

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

UYARLAMALI DESTEK
VEKTÖR MAKİNESİ TEMELLİ MODELLEME VE KONTROL

DOKTORA TEZİ

ERDEM DİLMEN

DENİZLİ, MART-2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI



UYARLAMALI DESTEK
VEKTÖR MAKİNESİ TEMELLİ MODELLEME VE KONTROL

DOKTORA TEZİ

ERDEM DİLMEN

DENİZLİ, MART-2021

Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 2018FEBE006 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

ERDEM DİLMEN

ÖZET

**UYARLAMALI DESTEK
VEKTÖR MAKİNESİ TEMELLİ MODELLEME VE KONTROL
DOKTORA TEZİ
ERDEM DİLMEN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. SELAMİ BEYHAN
DENİZLİ, MART-2021**

Bu tez çalışmasında amaç; en az kareler temelli destek vektör makinesi modelinde iyileştirmeler yaparak fonksiyon yaklaşıklama başarısını artırmak ve geliştirilen modeli, sınıflandırma, bağlanım ve doğrusal olmayan kontrol için kullanmaktır. Tez çalışması, iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, destek vektör makinesinin, çekirdek fonksiyon parametresi dahil tüm parametrelerinin her bir örnekleme anında kokusuz Kalman süzgeci kullanılarak eş zamanlı güncellenmesi fikri üzerine kurulu olan uyarlamalı destek vektör makinesi yaklaşımı öne sürülmüştür. Aynı zamanda destek vektör sayısı uyarlamalı olacak şekilde önerilmiştir. İyileştirilen model farklı ölçüt veri kümelerinde sınıflandırma ve tanılama için kullanılmıştır. İkinci bölümde, destek vektör makinesi yapısal olarak geliştirilmiş ve yeni bir özyinelemeli model önerilmiştir. Bu model bir gizli katman ve çıktı katmanından oluşmaktadır. Gizli katman, en güncel gizli öznitelikleri ve güncel girişleri kullanarak güncel gizli öznitelik vektörünü üretir. Bu gizli öznitelikler, çıktı katmanında kullanılarak model çıktısı üretilir. Gizli öznitelik vektörü, doğrusal olan ve doğrusal olmayan şeklinde iki bileşenin toplamının bir Gauss aktivasyon fonksiyonundan geçirilmesiyle elde edilmektedir. Doğrusal olan bileşen, sonsuz darbe cevaplı bir süzgeç iken doğrusal olmayan bileşen en az kareler temelli destek vektör makinesinin ağırlıklandırılmış çıktı vektörüdür. Buna ek olarak, öznitelik vektöründeki her bir öznitelik aynı zamanda destek vektörüdür. Modelin eğitimi, literatürde iyi bilinen ve özyinelemeli ağların eğitiminde standart olan zamanda geri yayılma algoritması kullanılarak yapılmıştır. Önerilen model, kontrol benzetim çalışmasında quadrator tipi bir insansız hava aracının kayan kipli kontrolünde yüksek genlikli ve zamanla değişen bozucu etkilerin kestirimi için kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, önerilen modelin kestirim başarımının yüksek olduğunu ve bozucu etkinin başarıyla kestirilmesi sayesinde, yüksek doğrulukta referans izleme sonuçları elde edilebildiğini göstermiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: En az kareler temelli destek vektör makinesi, Özyinelemeli destek vektör makinesi, Zamanda geri yayılma, Kayan kipli gözetleyici, Kayan kipli kontrol, Bozucu etki gözetleyici, Gürbüz kontrol, Quadrotr insansız hava aracı.

ABSTRACT

**ADAPTIVE SUPPORT VECTOR MACHINE BASED
MODELLING AND CONTROL
PHD THESIS
ERDEM DİLMEN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERING
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. SELAMİ BEYHAN)
DENİZLİ, MARCH-2021**

This thesis study aims improving function approximation capability of least squares support vector machine by making enhancements on it and employing the enhanced model in classification, regression and control. Thesis is composed of two main parts. In the first part, an adaptive support vector machine approach is proposed, which is based on the idea of simultaneous adaptation of all parameters, including the kernel function parameter, using unscented Kalman filter at each sampling time instant. An adaptive support vector size is proposed as well. Enhanced model is employed in classification and regression of some benchmark data sets. In the second part, structural enhancement is made on the support vector machine and it is transformed into a recurrent model. The model is comprised of a recurrent hidden layer and a linear output layer. Hidden layer produces the current hidden feature vector which is computed using the most recent hidden features and the current input. Using those hidden features, model output is produced at the output layer. Hidden feature vector is obtained by passing the sum of two components that are referred to as linear part and nonlinear part through a Gaussian activation function. Linear component is an infinite impulse response filter while nonlinear component is the weighted output vector of least squares support vector machine. Each feature in the feature vector is also a support vector. Considering this structure, in the thesis study, a novel recurrent support vector machine is introduced to the literature. Training of the model is performed via backpropagation through time algorithm which is well-known in the literature and standard for training recurrent nets. Proposed model is employed for estimation of time-varying disturbance signals with high magnitude within sliding mode control of a quadrotor unmanned aerial vehicle in simulation. The results obtained show that, estimation performance is high and due to the successive estimation of disturbance, satisfactory results of reference tracking can be attained.

KEYWORDS: Least squares support vector machine, Recurrent support vector machine, Backpropagation through time, Sliding mode observer, Sliding mode control, Disturbance observer, Robust control, Quadrotor unmanned aerial vehicle.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	xii
1. GİRİŞ ve AMAÇ	1
2. UKF ile EĞİTİLEN DESTEK VEKTÖR MAKİNESİ	4
2.1 LS-SVM	6
2.1.1 LS-SVM Sınıflandırıcı	6
2.1.2 LS-SVM Bağlanımcı	8
2.2 UKF	9
2.3 UKF-SVM	11
2.3.1 UKF-SVM Sınıflandırıcı	11
2.3.2 UKF-SVM Bağlanımcı	13
2.3.3 Uyarlamalı Destek Vektör Kümesi Yaklaşımı	14
2.4 UKF-SVM Uygulama Sonuçları ve Yorumu	17
2.4.1 Sınıflandırma	18
2.4.2 Bağlanım	20
2.5 Yorum	25
3. ÖNERİLEN ÖZYİNELEMELİ DESTEK VEKTÖR MAKİNESİ: RSVM	26
3.1 Literatürdeki Çalışmalar	26
3.2 Güdülenim	27
3.3 RSVM Modeli	29
3.4 İç Kararlılık	35

3.5 RSVM Modelinin BPTT Algoritması ile Eğitimi	36
4. QUADROTOR MATEMATİKSEL MODELİ	46
4.1 Kordinat Çerçeveleri and Dönme Matrisleri	47
4.2 Kinematik Model ve Coriolis Denklemi	50
4.3 Dinamik Model	54
4.4 Kuvvetler ve Torklar	56
4.5 Durum Uzay Modeli	59
4.6 Gözetlenebilirlik ve Kontrol Edilebilirlik	63
5. ÖNERİLEN RSVM BOZUCU ETKİ GÖZETLEYİCİ	66
5.1 Problem Tanımı ve Temel Bilgiler	66
5.1.1 Problem Tanımı	67
5.1.2 Quadrotor İçin Kayan Kipli Gözetleyici	70
5.2 Quadrotor İçin Önerilen RSVM Bozucu Etki Gözetleyici Dinamikleri . .	82
5.3 Önerilen RSVM Bozucu Etki Gözetleyici İçin BPTT Denklemleri	85
6. RSVM BOZUCU ETKİ GÖZETLEYİCİ TEMELLİ KAYAN KİPLİ KONTROL	88
6.1 Quadrotor için Kayan Kipli Kontrolcü	88
6.2 Quadrotorun RSVM Bozucu Etki Gözetleyici Temelli Kayan Kipli Kontrolü	110
7. BENZETİM ORTAMI UYGULAMA SONUÇLARI	113
7.1 RSVM ile Bozucu Etki Kestirimi Olmayan Durum	118
7.2 RSVM ile Bozucu Etki Kestirimi Olan Durum	122
8. SONUÇ ve ÖNERİLER	139
KAYNAKLAR	141
ÖZGEÇMİŞ	148

SEMBOL LİSTESİ

ε	:	ε -SVR'de hataların gözardı edildiği sınır bandı
C	:	ε -SVR'de hataları cezalandıran düzenleme parametresi
ν	:	LS-SVM'de hataları cezalandıran düzenleme parametresi
γ_1	:	UKF'de kullanılan bir ölçeklendirme parametresi
γ_2	:	UKF'de sigma noktalarının beklenen değer etrafındaki yayılımını belirleyen parametre
γ_3	:	UKF'de söz konusu rassal değişkenin dağılımına dair öncül bilgiyi içeren parametre
γ_4	:	UKF'de kullanılan diğer bir ölçeklendirme parametresi
s	:	i) UKF-SVM'de herhangi bir anda destek vektör kümesindeki destek vektör sayısı ii) RSVM'de gizli öznitelik vektör boyutu
s_{max}	:	UKF-SVM'de izin verilen en fazla destek vektör sayısı
n_u	:	NARX veri oluşturulurken kullanılan girdiye dair geçmiş ufku
n_y	:	NARX veri oluşturulurken kullanılan çıktıya dair geçmiş ufku
R	:	Veri toplanan sistemin girdi boyutu
Q	:	Veri toplanan sistemin çıktı boyutu
η	:	RSVM modelini kırılmış BPTT algoritmasıyla eğitirken kullanılan zaman penceresinin boyutu
$\mu_{ji}^{rsvm}, \mu_{kkt}^{rsvm}$	:	$j \in \{\hat{y}, h\}$ ve $i \in \{b, h, \mu, \sigma, x, h, t, LS - SVM\}$ olmak üzere, RSVM modelini kırılmış BPTT algoritmasıyla eğitirken model ağırlıklarına uygulanan gradyan azalan yönündeki güncellenmenin öğrenme adımı
ϕ, θ, ψ	:	Euler açıları: yalpalama, yunuslama ve sapma
m	:	Quadrotor kütlesi
g	:	Yer çekimi ivmesi
ℓ	:	Quadrotorun motorlarının ağırlık merkezine olan uzaklığı
$f_t, \tau_x, \tau_y, \tau_z$	:	Quadrotorun girdileri olan itki kuvveti, yalpalama torku, yunuslama torku ve sapma torku
I_x, I_y, I_z	:	Quadrotorun x-y-z eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentleri
Ω_f, Ω_l	:	Quadrotorun ön, sol, sağ ve arka motorlarının dakikadaki devir sayıları
Ω_r, Ω_b	:	
t_f, d_f	:	Pervanelerin itki etkeni ve sürüklenme etkeni katsayıları
τ_f, τ_l	:	Quadrotorun ön, sol, sağ ve arka motorlarının ürettiği torklar
τ_r, τ_b	:	

$s_o^x, s_o^y,$ $s_o^z, s_o^\phi,$ s_o^θ, s_o^ψ	:	Kayan kipli gözetleyicideki kayan yüzey değişkenleri
$s_c^z, s_c^\phi,$ s_c^θ, s_c^ψ	:	Kayan kipli kontrolcüdeki kayan yüzey değişkenleri
κ_o	:	Kayan kipli gözetleyicide Lyapunov fonksiyonunun azalma hızı
κ_c	:	Kayan kipli kontrolcüde Lyapunov fonksiyonunun azalma hızı
$a_j^x, a_j^y,$ $a_j^z, a_j^\phi,$ $a_j^\theta, a_j^\psi,$ $j = 1, 2$	:	Kayan kipli gözetleyiciye ait sönümleme (damping) parametreleri
$k_j^x, k_j^y,$ $k_j^z, k_j^\phi,$ $k_j^\theta, k_j^\psi,$ $j = 1, 2$	:	Kayan kipli gözetleyiciye ait anahtarlama (switching) teriminin katsayıları
$c_j^x, c_j^y,$ $c_j^z, c_j^\phi,$ $c_j^\theta, c_j^\psi,$ $j = 1, 2$	:	Kayan kipli gözetleyicide anahtarlama terimi olarak kullanılan tanjant hiperbolik fonksiyonun eğim parametreleri
$\lambda_c^z, \lambda_c^\phi,$ $\lambda_c^\theta, \lambda_c^\psi$	:	Kayan kipli kontrolcüde kayan yüzey parametreleri
$k_c^z, k_c^\phi,$ k_c^θ, k_c^ψ	:	Kayan kipli kontrolcüye ait anahtarlama teriminin katsayıları
$c^z, c^\phi,$ c^θ, c^ψ	:	Kayan kipli kontrolcüde anahtarlama terimi olarak kullanılan tanjant hiperbolik fonksiyonun eğim parametreleri
$d^z, d^\phi,$ d^θ, d^ψ	:	Quadrotorun kayan kipli kontrolünde quadrotor üzerinde rol alan bozucu etkiler
$k_p^x, k_d^x,$ k_p^y, k_d^y	:	Quadrotorun kayan kipli kontrolünde yunuslama açısı ve yalpalama açısı için referans değerlerin bulunabilmesi amacıyla istifade edilen PD yüzeyi katsayıları
seq_d	:	Yapay bozucu etki işareti (signal) oluşturulurken içerilecek sinüsoidal ve kare dalga kısımlarının adet sayılarının toplamı
$r_d^{sine},$ r_d^{square}	:	Yapay bozucu etki işareti oluşturulurken içerilecek sinüsoidal ve kare dalga kısımlarının adet sayılarının toplam adet sayısına oranı
f_d^{max}	:	Yapay bozucu etki işareti oluşturulurken içerilecek sinüsoidal ve kare dalga kısımları için en yüksek sıklık (frequency) değeri
m_d^{max}	:	Yapay bozucu etki işareti oluşturulurken içerilecek sinüsoidal ve kare dalga kısımları için en yüksek genlik değeri

ÖNSÖZ

Doktora programına başladığım günden itibaren bana yol gösterip yanımda olan, ders sürecimde, doktora tezimde ve yaptığım diğer akademik çalışmalarda istifade ettiğim teknik altyapıyı sağlamama yardımcı olan tez izleme komitesi jüri üyelerine; bugüne kadar bana hem maddi hem de manevi anlamda her türlü desteği hiç esirgmeden gösteren, bugün olduğum kişi olabilmem için bana güzel bir ahlak ve eğitim ile iyi bir örnek sunan, imkan ve yönlendirme sağlayan, üzerimde çok büyük emeği geçmiş olan, benden ilgisini ve sevgisini hiç eksik etmeyen, başta annem Zehra DİLMEN ve babam Mehmet DİLMEN olmak üzere, ananem ve dedem dahil tüm aileme; ilköğretimden başlamak üzere doktora dönemine kadar eğitim-öğretim sürecinde üzerimde emeği geçen, başta ülkem ve milletim olmak üzere tüm insanlığa hizmeti ilke edinen sağduyulu ve çalışkan bir insan olmam için beni eğiten ve yönlendiren, bildiklerini öğreten tüm öğretmenlerime; modern bilimi ve tekniği öğrenip uygulayabildiğimiz üniversiteler dahil olmak üzere, çağdaş bir eğitim-öğretim sistemini ve ülkeyi bize kuran, hediye eden ve miras bırakan, başöğretmenimiz Ulu Önder Mustafa Kemal ATATÜRK'e ve emeği geçen tüm ecdadımıza ve bu tez çalışmasında, katıldığım konferanslar ve çalıştaylar gibi etkinlikler dahil olmak üzere sunduğum çalışmalara yapmış oldukları yorumlar veya herhangi bir şekilde fikir önerileri ile fikirsel ufkumu genişletmeme yardımcı olanlar dahil, bana, büyük veya küçük yardımı dokunmuş herkese teşekkür ederim.

Sevgili Annem ZEHRA DİLMEN ve Babam MEHMET DİLMEN'e...



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: UKF-SVM ile Iris verisinin çevrimiçi sınıflandırılmasında parametreler a) b , b) α , c) σ , ve d) #SV.	19
Şekil 2.2: UKF-SVM ile kalp krizi verisinin çevrimiçi sınıflandırılmasında parametreler a) b , b) α , c) σ , ve d) #SV.	20
Şekil 2.3: Laboratuvar ters sarkaç sistemi.	21
Şekil 2.4: UKF-SVM ile Box-Jenkins sisteminin çevrimiçi tanınmasında parametreler a) b , b) α , c) σ , ve d) #SV.	23
Şekil 2.5: UKF-SVM ile ters sarkaç sisteminin çevrimiçi tanınmasında parametreler a) b , b) α , c) σ , ve d) #SV.	24
Şekil 2.6: Box-Jenkins ve ters sarkaç sistemleri için, ölçülen ve UKF-SVM tarafından kestirilen çıktılar ile kestirim hataları.	24
Şekil 3.1: Önerilen RSVM modelinin mimarisi.	34
Şekil 3.2: Önerilen RSVM modelinin zamanda rulo gibi açılışının resmedilişi.	37
Şekil 4.1: Ascending Technologies Hummingbird modeli quadrotor.	47
Şekil 4.2: Quadrotor koordinat çerçeveleri. Her mor daire pervaneli bir elektrik motorunu gösterir.	48
Şekil 4.3: Coriolis etkisini göstermek için quadrotorun öteleme ve dönme hareketleri.	52
Şekil 4.4: Quadrotorun cisim çerçevesinde üstten görünüşü.	57
Şekil 6.1: İki boyutlu bir durum vektörü için ulaşma ve kayma safhalarının görselleştirilmesi.	90
Şekil 6.2: $\tilde{x}$ üzerindeki sınırların hesaplanması.	91
Şekil 6.3: $\tilde{x}^{(i)}$ üzerindeki sınırların hesaplanması.	92
Şekil 6.4: İki boyutlu durum vektörü için, süreksiz bir kontrol kuralı uygulandığında ulaşma ve kayma safhalarının görselleştirilmesi.	96
Şekil 6.5: Filippov'un çözümünün oluşturulması.	97

Şekil 6.6:	RSVM bozucu etki gözetleyici temelli kayan kipli kontrol mimarisi.	111
Şekil 7.1:	Benzetim esnasında quadrotor üzerine uygulanan yapay bozucu etki işaretleri.	118
Şekil 7.2:	RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında bozucu etki altındayken quadrotorun yörünge takibi.	119
Şekil 7.3:	RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında bozucu etki altındayken quadrotorun referans izleme sonucu.	119
Şekil 7.4:	RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında (standart SMO) bozucu etki altındayken quadrotorun $x_1 - x_6$ durumlarının kestirimi.	120
Şekil 7.5:	RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında (standart SMO) bozucu etki altındayken quadrotorun $x_7 - x_{12}$ durumlarının kestirimi.	120
Şekil 7.6:	RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında quadrotor bozucu etki altındayken SMC tarafından üretilen quadrotor kontrol girdileri.	121
Şekil 7.7:	RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında bozucu etki altındayken quadrotorun elektrik motorlarının rpm değerleri. W_{1-4} sırasıyla ön, sol, sağ ve arka motorlara karşılık gelmektedir.	121
Şekil 7.8:	Bozucu etki d^z 'nin önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirimi.	123
Şekil 7.9:	Bozucu etki d^ϕ 'in önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirimi.	123
Şekil 7.10:	Bozucu etki d^θ 'nin önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirimi.	124
Şekil 7.11:	Bozucu etki d^ψ 'in önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirimi.	124
Şekil 7.12:	RSVM ağırlıklarının zamanla değişimi: a) b , b) α ve c) σ (LS-SVM'den gelir).	125
Şekil 7.13:	RSVM ağırlıklarının zamanla değişimi: a) W_{hv} , b) W_{hh} ve c) W_{ht} .	125
Şekil 7.14:	RSVM ağırlıklarının zamanla değişimi: a) $W_{\hat{y}h}$, b) $W_{\hat{y}b}$, c) $W_{h\mu}$ ve d) $W_{h\sigma}$	126

Şekil 7.15:	RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun yörünge takibi.	126
Şekil 7.16:	RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun $x_1 - x_6$ durumlarının kestirimi.	127
Şekil 7.17:	RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun $x_7 - x_{12}$ durumlarının kestirimi.	127
Şekil 7.18:	RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun referans izleme sonucu.	128
Şekil 7.19:	RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında SMC tarafından üretilen quadrotor kontrol girdileri.	128
Şekil 7.20:	RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun elektrik motorlarının rpm değerleri. W_{1-4} sırasıyla ön, sol, sağ ve arka motorlara karşılık gelmektedir.	129
Şekil 7.21:	a) u_1 , b) s_c^z ve c) $\tilde{x}_3$ izleme hatasının RSVM bozucu etki gözetleyicinin çalıştırıldığı ve çalıştırılmadığı (standart SMO) durumlar için çizimi. Ayrıca, bozucu etki işareti d^z çizim d) ile verilmiştir.	133
Şekil 7.22:	a) u_2 , b) s_c^ϕ ve c) $\tilde{x}_4$ izleme hatasının RSVM bozucu etki gözetleyicinin çalıştırıldığı ve çalıştırılmadığı (standart SMO) durumlar için çizimi. Ayrıca, bozucu etki işareti d^ϕ çizim d) ile verilmiştir.	135
Şekil 7.23:	a) u_3 , b) s_c^θ ve c) $\tilde{x}_5$ izleme hatasının RSVM bozucu etki gözetleyicinin çalıştırıldığı ve çalıştırılmadığı (standart SMO) durumlar için çizimi. Ayrıca, bozucu etki işareti d^θ çizim d) ile verilmiştir.	136
Şekil 7.24:	a) u_4 , b) s_c^ψ ve c) $\tilde{x}_6$ izleme hatasının RSVM bozucu etki gözetleyicinin çalıştırıldığı ve çalıştırılmadığı (standart SMO) durumlar için çizimi. Ayrıca, bozucu etki işareti d^ψ çizim d) ile verilmiştir.	136

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1: Iris ve kalp krizi verisinin UKF-SVM ile çevrimiçi sınıflandırma sonuçları.	18
Tablo 2.2: Box-Jenkins ve ters sarkaç sistemlerini UKF-SVM ile çevrimiçi tanılama RMSE sonuçları.	22
Tablo 7.1: $\mu_{kkt}^{rsvm} = 0.1$ olmak üzere öğrenme adımları μ_{ji}^{rsvm}	114
Tablo 7.2: RSVM modeline $\mathbf{W}_{ji}$ ve $\mathbf{h}_0$ için ilk değer atamaları.	115
Tablo 7.3: $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ iken quadrotor tarafından yörünge takip MSE değerleri. i) ve ii) sırasıyla RSVM tarafından bozucu etki kestiriminin olduğu ve olmadığı durumları göstermektedir.	117
Tablo 7.4: $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ iken quadrotor durumlarının kestirim MSE değerleri. i) ve ii) sırasıyla RSVM tarafından bozucu etki kestiriminin olduğu ve olmadığı durumları göstermektedir.	117
Tablo 7.5: $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ iken üretilen quadrotor kontrol işaretlerinin gücü ($P(u) = \sum_{n=1}^N u_n^2$). i) ve ii) sırasıyla RSVM tarafından bozucu etki kestiriminin olduğu ve olmadığı durumları göstermektedir.	118
Tablo 7.6: $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ iken RSVM tarafından bozucu etki kestirim MSE değerleri.	122

1. GİRİŞ ve AMAÇ

Bu tez çalışmasında, yaygınca bilinen ve karasel programlama (quadratic programming - QP) tekniği ile çözümü elde edilen, esnek marjlinli destek vektör makinesine bir alternatif sunan en az kareler temelli destek vektör makinesi (least squares support vector machine - LS-SVM) üzerine çalışma yapılmıştır. Amaç, LS-SVM üzerinde geliştirmeler yapıp başarımında iyileştirmeler sağlamak ve sonuçta bundan, uyarlamalı kontrol kapsamında yararlanmaktır. Tez çalışması, ilerleyiş açısından, iki ana kısımdan oluşur ve bunlar takip eden paragraflarda kısaca bahsedilmektedir.

İlk kısımda, LS-SVM'nin çekirdek (kernel) fonksiyon parametresinin her bir örnekleme anında güncellenip uyarlamalı (adaptive) bir çekirdek yapısına sahip, uyarlamalı destek vektör makinesi yaklaşımı öne sürülmüştür. Bu bağlamda, LS-SVM'nin tüm parametreleri, çekirdek fonksiyon parametresi dahil, ardışık (sequential) veri kullanılarak güncellenmiştir. Ardışık ile kastedilen; LS-SVM'nin asıl eğitime mantığında olduğu gibi yığın (batch) veri kullanılarak eğitilmesinden, diğer bir deyişle, tüm veri örneklerinin tek seferde kullanılmasından farklı olarak, tek seferde ancak bir veri örneği kullanılarak parametre güncellemesi yapılmasıdır. Eğitime algoritması olarak kokusuz Kalman süzgeci (unscented Kalman filter - UKF) kullanılmıştır. Bunun nedeni; i) çekirdek fonksiyon parametresi, LS-SVM'nin analitik ifadesinde doğrusal olmayan (nonlinear) bir terim olarak belirir ve UKF, parametre(ler) cinsinden doğrusal olmayan ifadelerde en iyi (optimum) bir parametre güncellemesi sunmaktadır, ii) genişletilmiş Kalman süzgecinin (extended Kalman filter - EKF) aksine, doğrusal (linear) ifadelerde en iyi parametre güncellemesini sağlayan standart Kalman süzgecini doğrusallaştırmaya maruz bırakmaz, iii) UKF doğası gereği, ardışık veri kullanımında parametre güncellemesi için uygundur. Önerilen yaklaşım, UKF-SVM olarak adlandırılmış ve başarımı sınıflandırma ve bağlanım (regression) temel işlevleri üzerinden incelenmiştir.

İkinci kısımda, LS-SVM yapısal olarak geliştirilmiş ve özyinelemeli (recurrent) bir hale getirilmiştir. Bu yapıda, bir girdi katmanı, gizli katman ve çıktı katmanı bulunmaktadır. Gizli katman özyinelemelidir. Bu katmanın çıktıları gizli özniteliklerdir (hidden features) ve bunların geçmiş değeri ile güncel girdi kullanılarak özniteliklerin güncel değeri elde edilir. Bu gizli öznitelikler, doğrusal bir çıktı katmanında kullanılır ve model çıktısı üretilir. Gizli öznitelik vektörü, doğrusal olan ve olmayan diye iki alt bileşenin toplamının bir Gauss aktivasyon fonksiyonundan geçirilmesiyle elde edilir. Doğrusal olan bileşen, bir sonsuz darbe cevaplı (infinite impulse response - IIR) süzgeç (filter) iken doğrusal olmayan bileşen, LS-SVM'nin bir ağırlık matrisi ile ağırlıklandırılmış çıktı vektörüdür. Öznitelik vektöründeki her bir öznitelik aynı zamanda destek vektörüdür ve LS-SVM'ye girdi olarak düşünülebilir. Bu yapı göz önünde bulundurulunca, tez çalışmasında literatür için yeni sayılacak ve özgün bir özyinelemeli destek vektör makinesi (recurrent support vector machine - RSVM) önerilmiştir. Bu önerilen modelin, LS-SVM çekirdek (kernel) fonksiyon parametresi dahil, tüm parametreleri her bir örnekleme anında güncellenmektedir. Modelin eğitimi, literatürde uzun zamandır bilinen ve özyinelemeli modellerin eğitiminde standart olan zamanda geri yayılma (backpropagation through time - BPTT) algoritması kullanarak yapılmıştır. Bu bağlamda, önerilen modelin bu algoritma ile eğitimi için gerekli olan gradyan denklemleri titizlikle türetilmiştir. Model, bir quadrotor insansız hava aracı (İHA) sisteminin kontrol benzetim çalışmasında, kayan kipli kontrol (sliding mode control-SMC) çatısı altında, sistem üzerindeki bozucu etkiyi (disturbance) kestirmekte kullanılmıştır. Önerilen RSVM modeli standart bir doğrusal olmayan durum gözetleyici (state observer) ile birlikte çalışır. Bu çalışmada, bahsi geçen durum gözetleyicisi kayan kipli gözetleyicidir (sliding mode observer-SMO). Unutulmamalıdır ki, böyle bir işlem sadece, ölçülen sistem çıktısı kullanılarak sistem durumlarının gözetlenmesi için gerekli iken önerilen RSVM modeli ise bozucu etkinin gözetlenmesinden sorumludur. Önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici sayesinde kontrol başarımı ve kontrolcünün gürbüzlüğü (robustness) arttırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, önerilen modelin kapalı çevrim

kestirim başarımının yüksek olduğunu ve bozucu etkinin başarıyla kestirilmesi sayesinde, yüksek seviyede bozucu etkinin olduğu durumlarda dahi tatmin edici referans izleme sonuçları elde edilebildiğini göstermiştir.

Tezin geri kalanı şöyle düzenlenmiştir. Bölüm 2’de, LS-SVM’yi UKF’yi bir parametre güncelleme algoritması olarak kullanarak eğitme yaklaşımı ayrıntılarıyla verilmiştir. Bunun için, önce standart LS-SVM ve UKF anlatılmıştır. Ardından, UKF kullanılarak eğitilen destek vektör makinesi, UKF-SVM sınıflandırıcı ve bağlanımcı şeklinde ayrı ayrı verilmiştir. Bölüm 3’te, önerilen RSVM modelinin ayrıntıları ve BPTT algoritması kullanılarak eğitilmesi sunulmuştur. Quadrotor dinamikleri ve buna dair matematiksel model Bölüm 4’te incelenmektedir. Bozucu etkiyi kestirmek için RSVM modelini kullanan RSVM bozucu etki gözetleyici ve bu gözetleyici yapısı gözetilerek gerçekleştirilen RSVM parametre güncellemesi Bölüm 5’te ayrıntılandırılmıştır. RSVM bozucu etki gözetleyici temelli kayan kipli kontrol yapısı Bölüm 6’da verilmiştir. Son olarak, quadrotorun RSVM bozucu etki gözetleyici temelli kayan kipli kontrolüne dair benzetim ortamında elde edilen uygulama sonuçları Bölüm 7’de verilirken tez çalışmasına dair genel bir değerlendirme ise Bölüm 8’de verilmektedir.

2. UKF ile EĞİTİLEN DESTEK VEKTÖR MAKİNESİ

Geleneksel SVM modeli, eşitsizlik kısıtlı bir kayıp fonksiyonunun (loss function) QP aracılığıyla endüştürleştirilmesi (minimization) üzerine kuruludur (Vapnik, 1995) ve 90'lerden beri bilinmektedir (Cauwenberghs ve Poggio, 2001, Cortes ve Vapnik, 1995, Ma ve diğ., 2003, Manimala ve diğ., 2015, Osuna ve diğ., 1997, Platt, 1998, Schölkopf ve diğ., 2000). Geleneksel karesel programlama tabanlı SVM modelinden farklı bir seçenek olarak, Suykens ve Vandewalle (1999), eşitlik kısıtlı bir doğrusal denklem kümesi üzerine temellenmiş LS-SVM modelini önermiştir (Wang ve diğ., 2012, Wu ve diğ., 2007). Bu tezde, LS-SVM modelinin üzerine çalışma yapılmasının tercih edilme sebebi LS-SVM modelinin oldukça basit bir matematiksel ifade ile kolayca anlaşılabilir olmasıdır. Ayrıca, seçilen SVM modelinin ardışık veri ile kullanılması ve uyarlamalı olması istenmektedir. Çünkü, nihai hedef bu modelden kontrol çalışmasında yararlanmaktır ve kontrol çalışmalarında, SVM model parametrelerinin her bir örnekleme anında güncellenmesi beklenmektedir. LS-SVM modelinin bu şekilde bir uyarlamalı kullanımı QP temelli asıl SVM modelinin kullanımına kıyasla daha kolaydır ve bu yüzden, tez çalışmasında LS-SVM üzerine yoğunlaşmıştır.

SVM'nin sınıflandırma veya bağlanım başarımının üzerine büyük bir etkisi olduğu için, çekirdek parametresinin en iyi değerinin seçimi büyük bir öneme sahiptir. Bazı araştırmacılar buna çeşitli çözümler geliştirmiştir. Lin ve diğ. (2006) tarafından çevrimdışı (offline) sınıflandırma için uyarlamalı bulanık çekirdek fonksiyonu (adaptive fuzzy kernel function) önerilmiştir. Eğitim üç aşamada gerçekleşir ve başlangıç bulanık kuralları (fuzzy rules) türetildikten sonra, SVM bulanık çekirdek fonksiyonunu kullanarak çalıştırılır. Chapelle ve diğ. (2002) öyle bir azalt-arttır (minimax) yaklaşımı öne sürmüştür ki; SVM eğitimi ile boşluk hiperdüzlemi (margin hyperplane) en fazlalaştırıldıktan (maximization) sonra, kestirilmiş bir genelleme hatası (generalization error), çekirdek parametre kümesi üzerinden ve gradyan azalan eniyilemesi (gradient descent optimization) kullanılarak endüştürleştirilmektedir. Mu

ve Nandi (2006) tarafından, çekirdek parametre ayarlaması (parameter tuning) k-katmanlı çapraz sağlama yapılarak (k-fold cross validation) EKF ile yapılmıştır ki bu, k adet alt SVM sınıflandırıcı (k-sub-SVM classifier) anlamına gelmektedir. Parametre ayarlaması için önceden belirlenmiş durma kistasları sağlandığında, sonuçta elde edilen SVM modeli sınıflandırma görevinde kullanılmaktadır. Wang ve diğ. (2003) tarafından, Gauss çekirdek fonksiyonu genişlik parametresi σ için en iyi değer, verinin ön incelemesi yapılarak hesaplanır. Ardından, bu değer, SVM eğitilirken çekirdek fonksiyonu içinde kullanılır. Sınıflandırma ve bağlanım için ayrı ayrı değişik ön inceleme yaklaşımları önerilmiştir. SVM'nin eğitimi tamamlandığında, çekirdek fonksiyonunda düzeltme yapılır ve yeni fonksiyon kullanılarak sınıflandırma için tekrar eğitilir. Scholkopf ve diğ. (1998) tarafından, SVM'nin eğitime veriye dair öncül bilgiyi (prior knowledge) dahil etmek için sınırlı bağılılaşım (local correlations) kullanan çekirdek fonksiyonları önerilmiştir. Hong ve diğ. (2013) tarafından, ε -duyarsız (ε -insensitive) destek vektör bağlanımcısının (support vector regressor - SVR) (Cortes ve Vapnik, 1995) kestirim başarımı, kaotik genetik algoritma (chaotic genetic algorithm - CGA) adında melez (hybrid) bir algoritma ile iyileştirilmiştir. C , σ ve ε parametrelerinin en iyi değeri CGA tarafından belirlenir. Ek olarak, aynı parametreler için en iyi değer ayarlaması Hong (2009) tarafından ise kaotik parçacık sürü eniyilemesi (chaotic particle swarm optimization - CPSO) ile yapılmaktadır.

Yukarıda bahsedilmiş çalışmalar verinin ön incelemesinden, çekirdek fonksiyonu için ek bir modelin oluşturulmasından veya çekirdek fonksiyonunu geliştirmek için ardışık eniyilemeden (sequential optimization) ibarettir. Öyle bir çalışma yoktur ki SVM'nin tüm parametrelerini, çekirdek fonksiyonuna ait olan(lar) dahil, eş zamanlı eğitsin. Bu tezin ilk özgün yanı literatürde bu yöndeki ihtiyaca cevap niteliğinde karşımıza çıkar ve tezin ilk kısmının fikrinsel dayanağını oluşturur (Dilmen ve Beyhan, 2017, 2018). LS-SVM modelindeki α , b ve σ parametreleri, her örnekleme anında yeni gelen veri örneği ve UKF algoritması kullanılıp

çok-girdili çok-çıkıtlı (multi-input multi-output - MIMO) eniyileme yapılarak eş zamanlı olarak güncellenmektedir. LS-SVM’de veri seyrekliği (sparseness) akıllı bir artımsal/azaltımsal (incremental/decremental) destek vektör kümesi güncellemesi ile yapılmaktadır ki bu da LS-SVM literatürü için özgün bir destek vektör kümesi güncelleme yaklaşımıdır.

Bölüm 2 şöyle düzenlenmektedir. Bölüm 2.1, standart LS-SVM sınıflandırıcı ve beğlanımcıyı kısaca tanıtır. Bölüm 2.2, parametre güncellemesi için kullanılan UKF algoritmasını sunar. Ardından, Bölüm 2.3 sınıflandırma ve beğlanım için UKF ile eğitilen LS-SVM modeli olan UKF-SVM’yi ve benimsenen uyarlamalı destek vektör kümesi yaklaşımını anlatır. Son olarak, önerilen UKF-SVM modeli ile elde edilen uygulama sonuçları Bölüm 2.4’te verilmektedir ve bu bölüme dair yorumlar Bölüm 2.5’te yer almaktadır.

2.1 LS-SVM

Bu bölümde, yığın veriyle çalışan standart LS-SVM, sınıflandırma ve beğlanım için ayrı ayrı verilmiştir (Suykens ve diğ., 2002).

2.1.1 LS-SVM Sınıflandırıcı

$\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ ve $y_n \in \{-1, +1\}$ olmak üzere $\{\mathbf{x}_n, y_n\}_{n=1}^N$ şeklinde N adet veri örnek çiftimiz olduğunu düşünelim. Eşitlik kısıtı tabanlı QP problemi

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, b, \epsilon} L &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \nu \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \epsilon_n^2 \\ \text{Kıs. :} \quad & y_n (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n) + b) = 1 - \epsilon_n, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.1)$$

denklemini ile verilmektedir. Denklem (2.1)’de, $(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n) + b)$ ifadesi LS-SVM sınıflandırıcısının analitik ifadesidir ve hata terimi, $\epsilon_n = y_n - (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n) + b)$ şeklinde elde edilir. ν , hataları cezalandıran bir düzenleme parametresidir (regularization parameter). $L \in \mathbb{R}$, zarar fonksiyonunu göstermektedir. $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$, girdi uzayından daha yüksek boyutlu öznitelik uzayına eşleştirme (mapping) yapan bir

fonksiyondur. $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{d'}$, öznitelik uzayındaki ağırlık parametrelerini tutan vektördür (weighting vector) ve öznitelikleri ağırlıklandırır. $b \in \mathbb{R}$, sapma (bias) parametresidir. Amaç, zarar fonksiyonunu en düşükleştirmektir ve elimizde bir kısıtlı eniyileme problemi bulunmaktadır. Lagrange denklemini şöyle elde ederiz.

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \epsilon, \alpha) = L(\mathbf{w}, b, \epsilon) - \sum_{n=1}^N \alpha_n (y_n(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n) + b) - 1 + \epsilon_n) \quad (2.2)$$

Denklem (2.2)'de, α_n , Lagrange katsayılarıdır ve $\alpha \in \mathbb{R}^N$, bu katsayıları tutan vektördür. Karush-Kuhn-Tucker (KKT) eniyilik şartları şöyledir.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 0, & \mathbf{w} = \sum_{n=1}^N \alpha_n y_n \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 0, & \sum_{n=1}^N \alpha_n y_n = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_n} = 0, & \alpha_n = \nu \epsilon_n, \quad n = 1, \dots, N \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_n} = 0, & y_n(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n) + b) - 1 + \epsilon_n = 0, \quad n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.3)$$

Denklem (2.2) ve (2.3) birleştirildiğinde, (2.4)'teki gibi bir doğrusal denklem kümesi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{y}^T \\ \mathbf{y} & \boldsymbol{\Upsilon} + \nu^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Denklem (2.4)'te, $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N]^T$ ve $\boldsymbol{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ olmaktadır. Ayrıca, $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, N$ ve Υ_{nm} , $\boldsymbol{\Upsilon}$ matrisinin n . satırındaki ve m . sütunundaki elemanı göstermek üzere,

$$\Upsilon_{nm} = y_n y_m K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) \quad (2.5)$$

ve

$$K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n)^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_m) \quad (2.6)$$

olmaktadır. $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, birim matrisi gösterirken $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^N$, birler vektörünü gösterir. Denklem (2.6)'da, $K(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\varphi}$ fonksiyonunun iç çarpımının yerine geçebilen çekirdek fonksiyonudur. $\boldsymbol{\varphi}$ fonksiyonunun tam ifadesinin gerekliliğinden bizi muaf tutar. Çeşitli çekirdek fonksiyonları mevcuttur. Örn.; Gauss, polinomasal vb. gibi. Mercer şartlarını sağlamalıdır, pozitif yarı-tanımlı olmalıdırlar. Başarımları, üzerinde çalışılan veriye göre değişir.

α ve b , (2.4)'ün en az kareler (least squares - LS) çözümüdür ve LS-SVM sınıflandırıcı çıktısı şu şekilde elde edilir.

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n y_n K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + b \quad (2.7)$$

Görüldüğü üzere, tüm veri örnekleri destek vektörü olarak kullanılmaktadır. Bu, Vapnik tarafından önerilen QP tabanlı destek vektör makinesinden farklıdır. Ondan, sadece Lagrange katsayısı sıfırdan farklı olan veri örnekleri çıktı üretimine katkıda bulunur ve bu yüzden destek vektörü olarak adlandırılır. Buna veride seyreklik (sparseness) denir. Ancak, LS-SVM'de tüm veri örnekleri çıktı üretimine katkıda bulunduğu için seyreklikten bahsedilemez. Denklem (2.7) ile elde edilen çıktı kestiriminin sınıf etiketine (class label) dönüştürülmesi, işaret fonksiyonundan (sign) geçirilmesiyle mümkün olur.

$$\begin{aligned} \hat{y}(\mathbf{x}) &= \text{sgn}(\hat{y}(\mathbf{x})) \\ &= \begin{cases} -1, & \hat{y}(\mathbf{x}) < 0 \\ +1, & \hat{y}(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1.2 LS-SVM Bağlanımcı

Bağlanım durumunda, eşitlik tabanlı QP problemi

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, b, \epsilon} L &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \nu \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \epsilon_n^2 \\ \text{Kıs. :} \quad y_n &= \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n) + b + \epsilon_n, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ifadesi ile verilir. Değişkenler, Bölüm 2.1.1'deki sınıflandırma durumundakilerle aynıdır, sadece formülasyonda küçük değişiklikler vardır. Artık, çıktı verisini gösteren $y_n \in \mathbb{R}$, bir sınıf etiketi değil gerçek sayıdır. Lagrange ifadesi (2.2)'dekine benzer şekilde oluşturulur.

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \epsilon, \alpha) = L(\mathbf{w}, b, \epsilon) - \sum_{n=1}^N \alpha_n \{ \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n) + b + \epsilon_n - y_n \} \quad (2.10)$$

KKT eniyilik şartları ise (2.3)'tekine benzer şekilde oluşturulur.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 0, \mathbf{w} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi(\mathbf{x}_n) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 0, \sum_{n=1}^N \alpha_n = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_n} = 0, \alpha_n = \nu \epsilon_n, n = 1, \dots, N \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_n} = 0, \mathbf{w}^T \varphi(\mathbf{x}_n) + b + \epsilon_n - y_n = 0, n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.11)$$

Lagrange ifadesi (2.10) ile eniyilik şartları (2.11) birleştirildiğinde, (2.12)'deki gibi bir doğrusal denklem kümesi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & \mathbf{Y} + \nu^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$\mathbf{Y}, \mathbf{Y}, \mathbf{I}$ ve $\mathbf{1}$, (2.4)'tekilerle aynıdır. $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, N$ ve Υ_{nm} , $\mathbf{Y}$ matrisinin n . satırındaki ve m . sütunundaki elemanı göstermek üzere,

$$\Upsilon_{nm} = K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) \quad (2.13)$$

olmaktadır. $K(\cdot, \cdot)$, (2.6)'daki çekirdek fonksiyonudur. $\boldsymbol{\alpha}$ ve b , (2.12)'un LS çözümü olmak üzere, LS-SVM bağımlı çıktı ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + b \quad (2.14)$$

2.2 UKF

UKF, EKF'de doğrusallaştırmadan dolayı elde edilen en iyi olmaktan uzak (sub-optimal) sonuçlara karşı bir çözüm sunmaktadır. Olasılık dağılımının ilk iki momenti (beklenen değeri ve kovaryansı) bilinen bir rassal değişken için, beklenen değer etrafında aynı kovaryans değeriyle oluşturulan sigma noktaları, bir doğrusal olmayan dönüşüm aracılığıyla ilk üç momentin gerçek değerini verebilir. Buna, kokusuz dönüşüm (unscented transformation - UT) denir (Wan ve Van Der Merwe, 2000). Rassal bir değişkenimiz $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ olsun ve başlangıç değeri $\mathbf{x}_0$ ile gösterilmek üzere, dinamikleri aşağıdaki gibi ayrık zamanlı ifade edilsin.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{w}_n \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{v}_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Burada, n , zaman indisini göstermek üzere, $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^Q$, $\mathbf{x}_n$ girdisine karşılık gelen çıktıyı ve $\mathbf{g}(\cdot)$ ise ölçüm fonksiyonunu göstermektedir. $\mathbf{y}$, gözlemlenmiş (ölçülmüş) veridir ve $\mathbf{f}(\cdot)$, süreç (process) fonksiyonunu gösterir. $\mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^d$ ve $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^Q$ ise sırasıyla süreç ve ölçüme dair beyaz gürültüdür (white noise) ve beklenen değeri sıfırdır. $\mathbf{x}$ rassal değişkeninin beklenen değeri ile bu değişkenin kestirilmesine dair hatanın (estimation error) kovaryansını sırasıyla $\hat{\mathbf{x}}$ ve $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ile gösterelim. Dikkat edilmelidir ki, bu çalışmada, $\hat{\mathbf{x}}$ aynı zamanda rassal değişkene dair kestirimi de göstermektedir. $\mathbf{y}$ 'nin istatistikleri, $\hat{\mathbf{X}}_i \in \mathbb{R}^d$ sigma vektörlerini içeren bir $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{d \times (2d+1)}$ matrisi oluşturularak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}_0 &= \hat{\mathbf{x}} \\
\hat{\mathbf{X}}_i &= \hat{\mathbf{x}} + (\sqrt{(d + \gamma_1)\mathbf{P}})_i, \quad i = 1, \dots, d \\
\hat{\mathbf{X}}_i &= \hat{\mathbf{x}} - (\sqrt{(d + \gamma_1)\mathbf{P}})_i, \quad i = d + 1, \dots, 2d \\
Wm_0 &= \frac{\gamma_1}{d + \gamma_1} \\
Wc_0 &= \frac{\gamma_1}{d + \gamma_1} + 1 - \gamma_2^2 + \gamma_3 \\
Wc_i &= Wm_i = \frac{1}{2(d + \gamma_1)}, \quad i = 1, \dots, 2d
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Denklem (2.16)'da, $\gamma_1 = \gamma_2^2(d + \gamma_4) - d$ bir ölçeklendirme parametresidir. γ_2 , sigma vektörlerinin $\hat{\mathbf{x}}$ etrafındaki yayılımını belirler ve çoğunlukla küçük bir değere sahip olur. γ_4 , ikinci ölçeklendirme parametresidir ve genelde sıfıra eşitlenir. γ_3 ise rassal değişken $\mathbf{x}$ 'in dağılımına dair bir öncül bilgidir ve Gauss dağılımı için en iyi değeri 2'dir. $(\sqrt{(d + \gamma_1)\mathbf{P}})_i$ ifadesi, matris karekökünün i . sütununu göstermektedir (Cholesky ayrıklaştırması kullanılabilir). Wm_i ve Wc_i , $i = 0, 1, \dots, 2d$, ise birazdan göreceğimiz UKF denklemlerinde kullanılacak ağırlık parametreleridir. Süreç ve gözlem/ölçüm gürültü kovaryans matrisleri, UT dönüşümünü tekrarlamalı (recursive) UKF süzgecine geliştirebilmek için işleme dahil edilmelidir. Bu şekilde elde edilen UKF denklemleri Algoritma 1'de verilmiştir (Jiang ve diğ., 2013).

Algoritma 1'de, $\mathbf{P}_w \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ve $\mathbf{P}_v \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$, sırasıyla süreç ve ölçüm gürültü kovaryans matrisleridir. $\hat{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{Q \times (2d+1)}$ matrisi, $\hat{\mathbf{Y}}_i \in \mathbb{R}^Q$, $i = 0, 1, \dots, 2d + 1$,

Algoritma 1 Tekrarlamalı bir süzgeç olarak UKF.

% İlk değer atama:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0]$$

$$\mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$$

% Sigma vektörlerinin oluşturulması:

$$\hat{\mathbf{X}}_{n-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{n-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{n-1} \pm \sqrt{(d + \gamma_1)\mathbf{P}_{n-1}}]$$

% n zaman indisini göstermek üzere, $n = 1, 2, \dots$

% Zaman güncellemesi (time update):

$$\hat{\mathbf{X}}_{n|n-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{n-1})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n^- = \sum_{i=0}^{2d} W m_i \hat{\mathbf{X}}_{i,n|n-1}$$

$$\mathbf{P}_n^- = \sum_{i=0}^{2d} W c_i (\hat{\mathbf{X}}_{i,n|n-1} - \hat{\mathbf{x}}_n^-)(\hat{\mathbf{X}}_{i,n|n-1} - \hat{\mathbf{x}}_n^-)^T + \mathbf{P}_w$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{n|n-1} = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{X}}_{n|n-1})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_n^- = \sum_{i=0}^{2d} W m_i \hat{\mathbf{Y}}_{i,n|n-1}$$

% Ölçüm güncellemesi (measurement update):

$$\mathbf{P}_{y_n y_n} = \sum_{i=0}^{2d} W c_i (\mathbf{y}_{i,n|n-1} - \hat{\mathbf{y}}_n^-)(\mathbf{y}_{i,n|n-1} - \hat{\mathbf{y}}_n^-)^T + \mathbf{P}_v$$

$$\mathbf{P}_{x_n y_n} = \sum_{i=0}^{2d} W c_i (\hat{\mathbf{X}}_{i,n|n-1} - \hat{\mathbf{x}}_n^-)(\mathbf{y}_{i,n|n-1} - \hat{\mathbf{y}}_n^-)^T$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{P}_{x_n y_n} \mathbf{P}_{y_n y_n})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^- + \mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \hat{\mathbf{y}}_n^-)$$

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n^- - \mathbf{K} \mathbf{P}_{y_n y_n} \mathbf{K}^T$$

vektörlerini içerir ki bu vektörler, $\hat{\mathbf{X}}$ matrisi içindeki $\hat{\mathbf{X}}_i$ sigma vektörlerine karşılık gelen çıktı vektörleridir. Son olarak, $E[\cdot]$, beklenen değer (istatistiksel) işlecini (operator) göstermektedir.

2.3 UKF-SVM

UKF-SVM, sınıflandırma ve bağlanım için ayrıntılandırılacaktır. Ardından, her iki durumda da benimsenen uyarlamalı destek vektör kümesi yaklaşımından bahsedilecektir.

2.3.1 UKF-SVM Sınıflandırıcı

Denklem (2.4)'ü yeniden düzenlediğimizde ve açıkça yazdığımızda, LS-SVM

ifadesi için ölçüm fonksiyonunu ($\mathbf{G}_{SVM}$) elde ederiz.

$$\mathbf{Y}_{SVM} = \mathbf{G}_{SVM}(\mathbf{X}_{SV}, \mathbf{Y}_{SV}, b, \boldsymbol{\alpha}, \sigma)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sum_{k=1}^s \alpha_k y_k}{y_1 b + y_1^2 K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \alpha_1 + \dots + y_1 y_s K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_s) \alpha_s + \nu^{-1} \alpha_1} \\ y_2 b + y_2 y_1 K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \alpha_1 + \dots + y_2 y_s K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_s) \alpha_s + \nu^{-1} \alpha_2 \\ \vdots + \vdots + \dots + \vdots + \vdots \\ y_s b + y_s y_1 K(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_1) \alpha_1 + \dots + y_s^2 K(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \alpha_s + \nu^{-1} \alpha_s \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Denklem (2.17)'de, $\mathbf{X}_{SV} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, s$, ve $\mathbf{Y}_{SV} = \{y_1, \dots, y_s\}$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, s$, destek vektör (support vector - SV) kümesindeki girdi-çıkı veri örnek çiftleridir. Bunlar, gözlemlenmiş (ölçülmüş) değişkenlerdir. b , $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \dots \alpha_s]^T$ ve σ ise çok boyutlu bir parametre vektörünü oluşturur: $\mathbf{p}_{SVM} = [b \ \boldsymbol{\alpha}^T \ \sigma]^T \in \mathbb{R}^{s+2}$. UKF denklemlerinde ölçülmüş çıkı vektörüne ($\mathbf{y}$) karşılık gelen $\mathbf{Y}_{SVM} \in \mathbb{R}^{s+1}$ de çok boyutludur. Dolayısıyla, denklem takımı MIMO tiptedir. s , destek vektör sayısını ifade eder. Dikkat edilirse, UKF, tekrarlamalı bir algoritmadır ve ayrık zamanlı çalışır. İçinde bulunduğumuz anı n zaman indisiyle gösterirsek, s ile izin verilen kadar destek vektörü kullanılarak LS-SVM modeli oluşturulur ve UKF algoritması ile eğitilir. Bu s adet destek vektörü, n anına kadar karşılaşılan tüm girdi-çıkı veri örneklerinin arasından seçilmiş s adettir. Zamanda ilerledikçe ($n = 1, 2, \dots$) ve LS-SVM parametre vektörü $\mathbf{p}_{SVM}$ her bir anda UKF ile güncellenmeden önce, destek vektörleri güncellenir. Diğer bir deyişle, yeni gözlemlenen veri göz önünde bulundurularak, $\mathbf{X}_{SV}$ ve $\mathbf{Y}_{SV}$ güncellenir. Destek vektör kümesi güncellemesinin nasıl yapılacağı Bölüm 2.3.3'te verilecektir. Denklem (2.17), LS-SVM'nin ölçüm fonksiyonunu verir. Parametreleri UKF ile en iyi şekilde kestirebilmek için süreç fonksiyonu ($\mathbf{F}_{SVM}$) gereklidir ki bu, birim geçiş matrisidir (identity transition matrix).

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{SVM,n|n-1} &= \mathbf{F}_{SVM}(\mathbf{p}_{SVM,n-1}) \\ \mathbf{F}_{SVM} &= \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(s+2) \times (s+2)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Süreç ve ölçüme dair beyaz gürültüler sırasıyla $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{s+2}$ ve $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{s+1}$ olsun. Bunların kovaryans matrisleri ise sırasıyla $\mathbf{P}_{w,svm} \in \mathbb{R}^{(s+2) \times (s+2)}$ ve $\mathbf{P}_{v,svm} \in \mathbb{R}^{(s+1) \times (s+1)}$

olsun. Sürece dair olan kovaryans, süreç fonksiyonu birim geçiş matrisi olduğu için, küçük bir değere sahiptir (1e-6 gibi). Denklem (2.17) ve (2.18), gürültüler göz önünde bulundurularak birleştirilip kapalı biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{SVM,n} &= \mathbf{F}_{SVM}(\mathbf{p}_{SVM,n-1}) + \mathbf{w}_n \\ \mathbf{Y}_{SVM,n} &= \mathbf{G}_{SVM}(\mathbf{X}_{SV}, \mathbf{Y}_{SV}, \mathbf{p}_{SVM,n}) + \mathbf{v}_n \\ \mathbf{p}_{SVM,n} &= [b_n \quad \boldsymbol{\alpha}_n^T \quad \sigma_n]^T\end{aligned}\quad (2.19)$$

Artık, olay bir parametre kestirim problemine dönmüştür ve (2.20)'deki yer değiştirmeler yapıldıktan sonra, Algoritma 1'de gösterildiği şekilde UKF ile parametre kestirimi yapılabilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &\leftarrow \mathbf{F}_{SVM}, \quad \mathbf{g} \leftarrow \mathbf{G}_{SVM}, \quad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{p}_{SVM} \\ \mathbf{y} &\leftarrow \mathbf{Y}_{SVM}, \quad \mathbf{P}_w \leftarrow \mathbf{P}_{w,svm} \quad \mathbf{P}_v \leftarrow \mathbf{P}_{v,svm}\end{aligned}\quad (2.20)$$

2.3.2 UKF-SVM Bağlanımcı

Bağlanım ve sınıflandırma durumları birbirine çok benzer ve arada sadece çok ufak farklılıklar bulunmaktadır. Denklem (2.12)'u yeniden düzenlediğimizde ve açıkça yazdığımızda, LS-SVM ifadesi için ölçüm fonksiyonunu ($\mathbf{G}_{SVM}$) elde ederiz.

$$\mathbf{Y}_{SVM} = \mathbf{G}_{SVM}(\mathbf{X}_{SV}, \mathbf{Y}_{SV}, b, \boldsymbol{\alpha}, \sigma)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sum_{k=1}^s \alpha_k}{b + K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)\alpha_1 + \dots + K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_s)\alpha_s + \nu^{-1}\alpha_1} \\ b + K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)\alpha_1 + \dots + K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_s)\alpha_s + \nu^{-1}\alpha_2 \\ \vdots + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \vdots + \quad \quad \quad \vdots \\ b + K(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_1)\alpha_1 + \dots + K(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s)\alpha_s + \nu^{-1}\alpha_s \end{pmatrix}\quad (2.21)$$

Denklem (2.21)'de, $\mathbf{X}_{SV} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, s$, ve $\mathbf{Y}_{SV} = \{y_1, \dots, y_s\}$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, s$, ile $\mathbf{p}_{SVM} = [b \quad \boldsymbol{\alpha}^T \quad \sigma]^T \in \mathbb{R}^{s+2}$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_s]^T$, sınıflandırma durumundakiyle aynı değişkenleri göstermektedir. UKF ile parametre kestirimi için gerekli süreç fonksiyonu $\mathbf{F}_{SVM}$, (2.18)'da olduğu gibi birim geçiş matrisidir. Süreç ve ölçüm beyaz gürültüleri, sınıflandırma durumundakiyle aynı olmak üzere, $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{v}$ ile gösterilmektedir. Bunlara karşılık gelen kovaryans matrisleri ise, yine sınıflandırma durumundakiyle aynı olmak üzere, $\mathbf{P}_{w,svm}$

ve $\mathbf{P}_{v,svm}$ ile gösterilmektedir. Sürece dair olan kovaryans, süreç fonksiyonu birim geçiş matrisi olduğu için, küçük bir değere sahiptir ($1e-6$ gibi). Denklem (2.21) ve (2.18) birleştirilip (2.19)'deki gibi kapalı biçimde yazılabilir. Unutulmamalıdır ki, bu sefer, $\mathbf{Y}_{SVM}$ ve $\mathbf{G}_{SVM}$ (2.21)'da verilen ölçüm fonksiyonudur. Denklem (2.20)'deki yer değiştirmeler yapıldıktan sonra, Algoritma 1'de gösterildiği şekilde UKF ile parametre kestirimi yapılabilir.

2.3.3 Uyarlamalı Destek Vektör Kümesi Yaklaşımı

Verinin değişen dinamiklerini yeterince hızlı kavrayabilen ve aynı zamanda, kullanışsız veya zamanı geçmiş veriyle hantallaşmayan bir destek vektör kümesi yaklaşımı önerilmiştir. Genelde, çevrimiçi (online) kullanılan LS-SVM literatüründe, destek vektör kümesinde önce bir artımsal güncelleme yapılıp ardından, eğer gerekliyse, bir azaltımsal güncelleme yapılır, veya tam tersi olur. Bu tarz güncellemeler ardışıktır. Böyle bir durumda, küme artan veya azalan bir profile sahiptir (Liu ve diğ., 2009, Tang ve diğ., 2006, Yang ve diğ., 2010). Ancak bazen, bu güncellemelerden sadece bir tanesini yapmak daha iyi olabilir. Önerilen yaklaşım, hem tek güncellemeyi (sadece artımsal veya sadece azaltımsal) hem de ardışık güncellemeleri mümkün kılmaktadır. Ayrıca, eğer herhangi bir güncellemeye gerek yoksa bunu tespit edebilir. Algoritma 2, önerilen yaklaşımı sınıflandırma durumu için sunmaktadır. Algoritma 2'de, s_{max} izin verilen en fazla destek vektör sayısını gösterirken $abs(\cdot)$ ise mutlak değer fonksiyonunu göstermektedir. Ayrıca, dikkat edilmelidir ki, **eğer**, **değilse**, **bitir** ve **için** gibi ifadeler İngilizce algoritma yazarken kullanılan **if-else-end** gibi koşullu seçim ve **for** gibi döngü ifadelerinin Türkçe karşılığıdır. Ek olarak, LOO, leave-one-out (çapraz doğrulama) için kısaltmadır. LOO, istatistiksel modellerin genelleme yeteneğini karşılaştırmak için kullanılan standart bir kriter olarak kabul görmektedir.

Şimdi, Algoritma 2'de geçen *incupd* ve *decupd* fonksiyonlarını açalım. Bunlar, $\mathbf{p}_{SVM}$ ve $\mathbf{P}$ 'yi artımsal/azaltımsal şekilde günceller ve şöyle dir.

incupd: Şu anki parametre vektörümüz şöyle olsun.

$$\mathbf{p}_{SVM} = \begin{bmatrix} b \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \sigma \end{bmatrix}_{(s+2) \times 1}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}_{s \times 1} \quad (2.22)$$

Yeni bir örnek geldiğinde, buna karşılık gelen α parametresi (ilk değeri 0) α vektörünün en üstüne yerleştirilir.

$$\boldsymbol{\alpha}_+ = \begin{bmatrix} \alpha_{yeni} = 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}_{(s+1) \times 1}, \quad \mathbf{p}_{SVM+} = \begin{bmatrix} b \\ \boldsymbol{\alpha}_+ \\ \sigma \end{bmatrix}_{(s+3) \times 1} \quad (2.23)$$

Algoritma 2 Önerilen uyarlamalı destek vektör kümesi yaklaşımı.

İçin $n=1:N$ yap

Yeni örneği al $r_n = \{\mathbf{x}_n, y_n\}$;

% LS-SVM çıktısı $\hat{y}(\mathbf{x}_n)$, (2.7) ile hesaplanıp (2.8)'deki işaret fonksiyonundan geçirilir

% ve sınıf kestirim hatası hesaplanır

$e = \text{sgn}(y_n) - \text{sgn}(\hat{y}(\mathbf{x}_n))$

% Eğer sınıflandırma doğru değil ise

eğer $e \neq 0$ ise

$e_1 = 1$

$\mathbf{P}_{temp1} = \mathbf{P}_{SVM,n}$

$\mathbf{P}_{temp1} = \mathbf{P}_n$

$SV_{temp1} = SV$

% Senaryo 1 - azaltımsal + (eğer gerekliyse) artımsal güncelleme

% önce, azaltımsal güncelleme (kümedeki eleman sayısı 1'den fazla ise)

eğer $\#SV > 1$ ise

SV kümesinden r_d gibi bir örneği LOO çapraz doğrulama ile seç

$SV_{temp1} = SV - r_d$ % destek vektör kümesinden budama

$[\mathbf{p}_{temp1}, \mathbf{P}_{temp1}] = \text{decupd}(\mathbf{p}_{SVM,n}, \mathbf{P}_n)$ % parametre vektöründen ve kovaryans matrisinden budama

UKF ile azaltımsal öğrenme yap % $\mathbf{p}_{temp1}$ ve $\mathbf{P}_{temp1}$, Algoritma 1'de kullanılarak $\mathbf{p}_{temp1}$ güncellenir.

% LS-SVM çıktısı $\hat{y}(\mathbf{x}_n)$, SV_{temp1} 'deki destek vektörleri ve güncel $\mathbf{p}_{temp1}$ 'deki

% parametreler (2.7)'de kullanılarak hesaplanır ve (2.8)'deki işaret fonksiyonundan geçirilir. Ardından,

% sınıflandırma hatası hesaplanır.

$e_1 = \text{sgn}(y_n) - \text{sgn}(\hat{y}(\mathbf{x}_n))$

bitir

% Sonra, artımsal güncelleme gerekiyor mu diye kontrol et.

eğer $e_1 \neq 0$ && $\#SV_{temp1} < s_{max}$ ise

$SV_{temp1} = SV_{temp1} + r_n$ % destek vektör kümesine şu anki örneği ekleme

$[\mathbf{p}_{temp1}, \mathbf{P}_{temp1}] = \text{incupd}(\mathbf{p}_{temp1}, \mathbf{P}_{temp1})$ % parametre vektörü ve kovaryans matrisine ekleme

UKF ile artımsal öğrenme yap % $\mathbf{p}_{temp1}$ ve $\mathbf{P}_{temp1}$, Algoritma 1'de kullanılarak $\mathbf{p}_{temp1}$ güncellenir.

% LS-SVM çıktısı $\hat{y}(\mathbf{x}_n)$, SV_{temp1} 'deki destek vektörleri ve güncel $\mathbf{p}_{temp1}$ 'deki

% parametreler (2.7)'de kullanılarak hesaplanır ve (2.8)'deki işaret fonksiyonundan geçirilir. Ardından,

% sınıflandırma hatası hesaplanır.

$e_1 = \text{sgn}(y_n) - \text{sgn}(\hat{y}(\mathbf{x}_n))$

bitir

$e_2 = 1$

$\mathbf{P}_{temp2} = \mathbf{P}_{SVM,n}$

$\mathbf{P}_{temp2} = \mathbf{P}_n$

$SV_{temp2} = SV$

% Senaryo 2 - artımsal + (eğer gerekliyse) azaltımsal güncelleme

% önce, artımsal

eğer $\#SV < s_{max}$ ise

$SV_{temp2} = SV + r_n$

$[\mathbf{p}_{temp2}, \mathbf{P}_{temp2}] = \text{incupd}(\mathbf{p}_{SVM,n}, \mathbf{P}_n)$

UKF ile artımsal öğrenme yap

$e_2 = \text{sgn}(y_n) - \text{sgn}(\hat{y}(\mathbf{x}_n))$

bitir

% Sonra, azaltımsal güncelleme gerekiyor mu diye kontrol et.

eğer $e_2 \neq 0$ && $\#SV_{temp2} > 1$ ise

SV_{temp2} kümesinden r_d gibi bir örneği LOO çapraz doğrulama ile seç

$SV_{temp2} = SV_{temp2} - r_d$

$[\mathbf{p}_{temp2}, \mathbf{P}_{temp2}] = \text{decupd}(\mathbf{p}_{temp2}, \mathbf{P}_{temp2})$

UKF ile azaltımsal öğrenme yap

$e_2 = \text{sgn}(y_n) - \text{sgn}(\hat{y}(\mathbf{x}_n))$

bitir

% en az hatayı veren kümeyi seç

eğer $\text{abs}(e_1) < \text{abs}(e_2)$ ise

$\mathbf{P}_{SVM,n+1} = \mathbf{P}_{temp1}$

$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_{temp1}$

$SV = SV_{temp1}$

değilse

$\mathbf{P}_{SVM,n+1} = \mathbf{P}_{temp2}$

$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_{temp2}$

$SV = SV_{temp2}$

bitir

bitir

bitir

Şu anki parametre kestirim hatası kovaryan matrisi $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(s+2) \times (s+2)}$ aşağıdaki gibi olsun.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,s+1} & P_{1,s+2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,s+1} & P_{2,s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{s+1,1} & P_{s+1,2} & \cdots & P_{s+1,s+1} & P_{s+1,s+2} \\ P_{s+2,1} & P_{s+2,2} & \cdots & P_{s+2,s+1} & P_{s+2,s+2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Yeni α parametresine karşılık gelen satır ve sütunlar (köşegene denk gelen elemanın ilk değeri 1 ve diğerlerinin ise 0) eklenir ve $\mathbf{P}_+ \in \mathbb{R}^{(s+3) \times (s+3)}$ elde edilir.

$$\mathbf{P}_+ = \begin{bmatrix} P_{1,1} & 0 & P_{1,2} & \cdots & P_{1,s+1} & P_{1,s+2} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_{2,1} & 0 & P_{2,2} & \cdots & P_{2,s+1} & P_{2,s+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{s+1,1} & 0 & P_{s+1,2} & \cdots & P_{s+1,s+1} & P_{s+1,s+2} \\ P_{s+2,1} & 0 & P_{s+2,2} & \cdots & P_{s+2,s+1} & P_{s+2,s+2} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

decupd: En küçük α değerine sahip olan destek vektörünün kümeden çıkarılması her zaman iyi sonuçlar vermeyebilir. Bu sebeple, kümeden hangi vektörün çıkarılacağına karar vermek için LOO çapraz doğrulaması yapılır. Kümeden çıkarıldığında LS-SVM modeline en düşük yaklaşıklık hatasını sağlayacak olan destek vektörünün seçilmesi amaçlanır. Bu işlem, SV kümesinin budanması olarak da anılır. Çıkarılmasına karar verilen vektörün l indisli olduğunu var sayalım. SV kümesinin sonuna itilir ve sonra yok edilir. Karşılık gelen α_l parametresi ise $\mathbf{p}_{SVM}$ 'nin sonuna itilir ve yok edilir. Benzer şekilde, $\mathbf{P}$ matrisi içinde α_l 'e karşılık gelen satır ve sütun sırasıyla son satır ve son sütuna itilir ve yok edilir.

2.4 UKF-SVM Uygulama Sonuçları ve Yorumu

Sınıflandırma ve bağlanım için ayrı uygulamalar yapılmıştır. Uygulamalarda kodlamanın yapıldığı sistem, Intel i7, 4 çekirdekli işlemciye, 6 gb RAM ve 3 GHz işlemci hızına sahip bir Windows 10 işletim sistemli dizüstü bilgisayardır.

2.4.1 Sınıflandırma

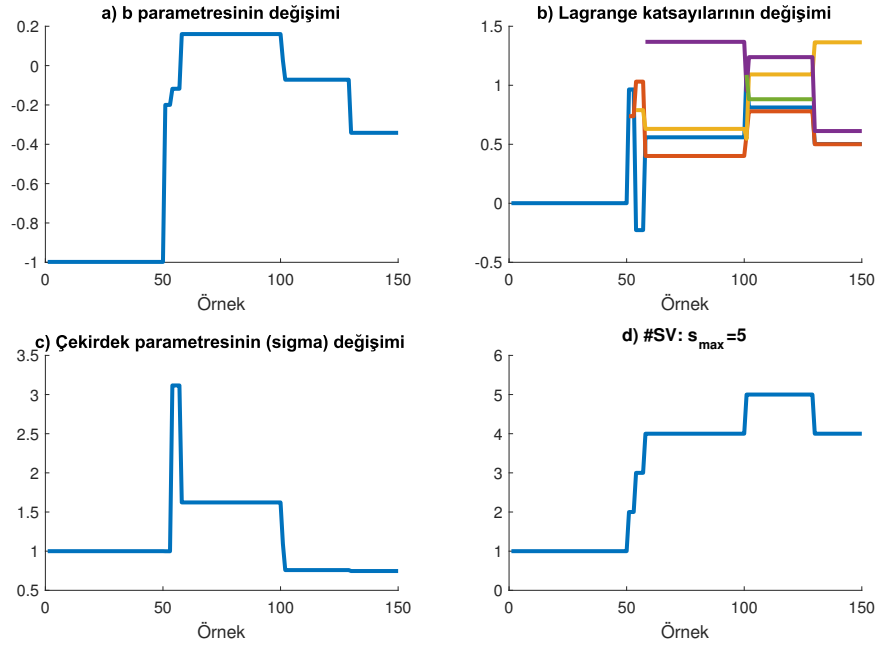
UKF-SVM ile çevrimiçi sınıflandırma yapmak için literatürde yaygınca istifade edilen ve tanınmış UCI (University of California Irvine Machine Learning Laboratory) veri havuzundan (UCI, 2020) iki tane veri kümesi kullanılmıştır. İlki, Iris veri kümesiyken ikincisi ise kalp krizi veri kümesidir. Iris, adı geçen çiçek türünü sınıflandırmaya dair veri kümesidir ve çiçeklerin çeşitli yapısal özelliklerini öznitelik kabul edip çiçeğin türünü sınıf etiketi olarak ele alır. Üç sınıftan oluşur (Iris-setosa, versicolor, virginica), her sınıf 50 örnekten ibarettir. Toplamda 150 örnektir ve her örnek 4 öznitelik ile temsil edilir. Setosa, versicolor ve virginicadan doğrusal şekilde ayrılabilirken, son ikisi birbirinden bu şekilde ayıramaz. Sınıf etiketleri, Iris-versicolor için +1 ve diğer ikisi için ise -1 olacak şekilde atanmıştır. Kalp krizi verisi ise Robert Detrano, Long Beach and Cleveland Clinic Foundation, tarafından oluşturulmuştur. Toplamda 5 sınıf ve 303 örnekten oluşur. (UCI, 2020) bağlantı adresinde verilen 'processed.cleveland.data' isimli veri dizininde bulunan 14 öznitelikli veri kümesi kullanılmıştır. Hastalara yapılan tahlillerin sonuçları öznitelik olarak kabul edilirken sınıf etiketi $\{+1, -1\}$, bunlara kalp krizi teşhisi konulup konulmadığını belirtir. Kayıp bilgiler içeren örnekler kümeden çıkarıldıktan sonra, kalp krizi verisi son haliyle 270 örnekten ibaret olmuştur. Her iki çalışmada izin verilen en fazla destek vektörü sayısı $s_{max} = 5$ seçilmiştir. Tablo 2.1, çevrimiçi sınıflandırma sonuçlarını gösterir.

Tablo 2.1: Iris ve kalp krizi verisinin UKF-SVM ile çevrimiçi sınıflandırma sonuçları.

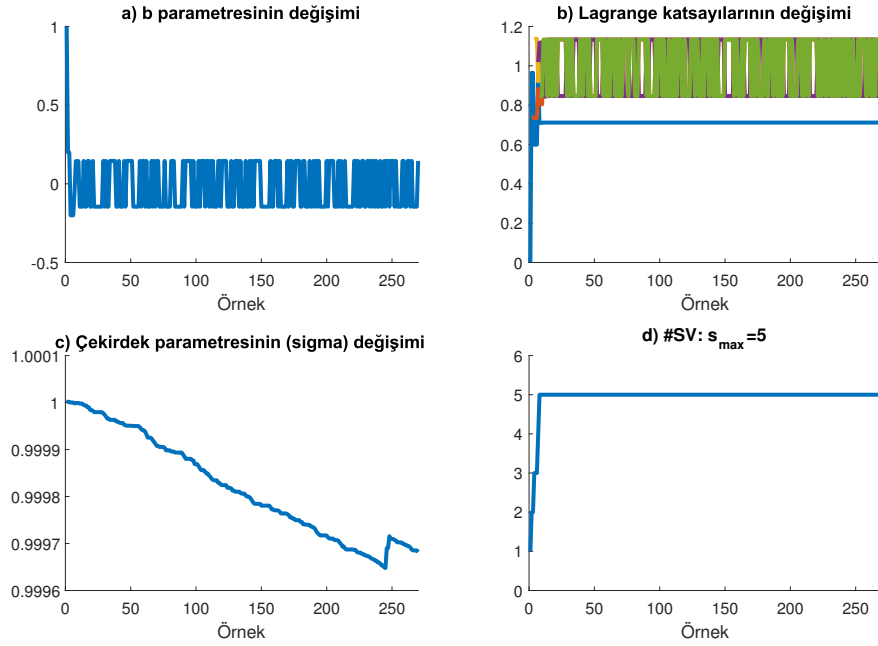
Veri (#Örnek/#Öznitelik)	#Hata	Geçen süre (s)
Iris (150/4)	0	0.2041
Kalp krizi (270/14)	0	2.3411

Tablo 2.1 göstermektedir ki, önerilen SV kümesi güncelleme yaklaşımı sayesinde, LS-SVM modelinin UKF ile başarılı eğitimi bu modele çevrimiçi sınıflandırmada 0 hata gibi bir başarıyı sağlarken SV kümesi küçük tutulabilmektedir. UKF'nin ölçüm güncellemesi adımı sayesinde, LS-SVM model çıktısı karar çizgisinin

(sıfır çizgisinin) üst veya alt tarafından uygun olana kayıp verilen örneğin doğru şekilde sınıflandırılmasını sağlamaktadır. Şekil 2.1 ve 2.2, Iris ve kalp krizi verisi UKF-SVM ile çevrimiçi sınıflandırıldığında parametrelerin ve SV sayısının değişimini göstermektedir.



Şekil 2.1: UKF-SVM ile Iris verisinin çevrimiçi sınıflandırılmasında parametreler a) b , b) α , c) σ , ve d) #SV.



Şekil 2.2: UKF-SVM ile kalp krizi verisinin çevrimiçi sınıflandırılmasında parametreler a) b , b) α , c) σ , ve d) $\#SV$.

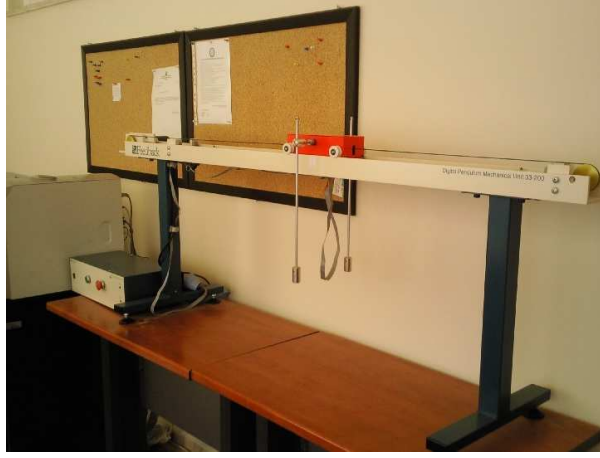
Sonuçlar göstermektedir ki, önerilen çevrimiçi LS-SVM yaklaşımı hem hızlıdır hem de müthiş bir sınıflandırma başarımına sahiptir. Özellikle, Iris çiçeğini sınıflandırılması örneği (bkz. Şekil 2.1), çekirdek parametresinin diğer LS-SVM parametreleriyle eş zamanlı güncellenmesi gerekliliğini gözler önüne sermektedir. Çekirdek parametresi zaman içinde önemli ölçüde değişim göstermiştir, öyle ki, başlangıç değeri sonuçta elde edilen başarıyı sunamazdı.

2.4.2 Bağlanım

UKF-SVM ile çevrimiçi sistem tanılama yapmak için iki veri kümesi kullanılmıştır. İlki, literatürde yaygınca kullanılan ve 296 adet girdi-çıkış çiftinden oluşan Box-Jenkins gaz fırını verisidir. Doğrusal olmayan bir özbağlanımlı-dışarıdan girdili (nonlinear autoregressive with exogeneous input - NARX) veri modeli oluşturulur.

$$\hat{y}_n = f(u_n, \dots, u_{n-n_u}, y_{n-1}, \dots, y_{n-n_y}) \quad (2.26)$$

Denklem (2.26)'te, u_n ve y_n , n zaman indisini göstermek üzere, sisteme uygulanan kontrol girdisi ve karşılık gelen sistem çıktısıdır. n_u ve n_y , NARX veri modeli oluşturulurken kullanılan geçmiş girdi ve çıktı ufkudur. Doğrusal olmayan sistem fonksiyonu f bilinmemektedir. İkinci veri kümesi, gerçek zamanlı ters sarkaç sisteminden toplanan 700 örneklik girdi-çıkı çiftlerinden oluşur. Yüksek dereceden doğrusalsızlığa (nonlinearity) sahip bir ölçüt sistemdir (Feedback, 2006). Şekil 2.3, bahsi geçen ters sarkaç sistemini göstermektedir.



Şekil 2.3: Laboratuvar ters sarkaç sistemi.

Matematiksel modeli ise aşağıdaki gibi türetilir.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{(m + M)} [F - bx_2(t) - ml\dot{x}_4(t)\cos x_3(t) + mlx_4^2(t)\sin x_3(t)] \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= \frac{1}{(I + ml^2)} [mgl\sin x_3(t) - ml\dot{x}_2(t)\cos x_3(t) - dx_4(t)].
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

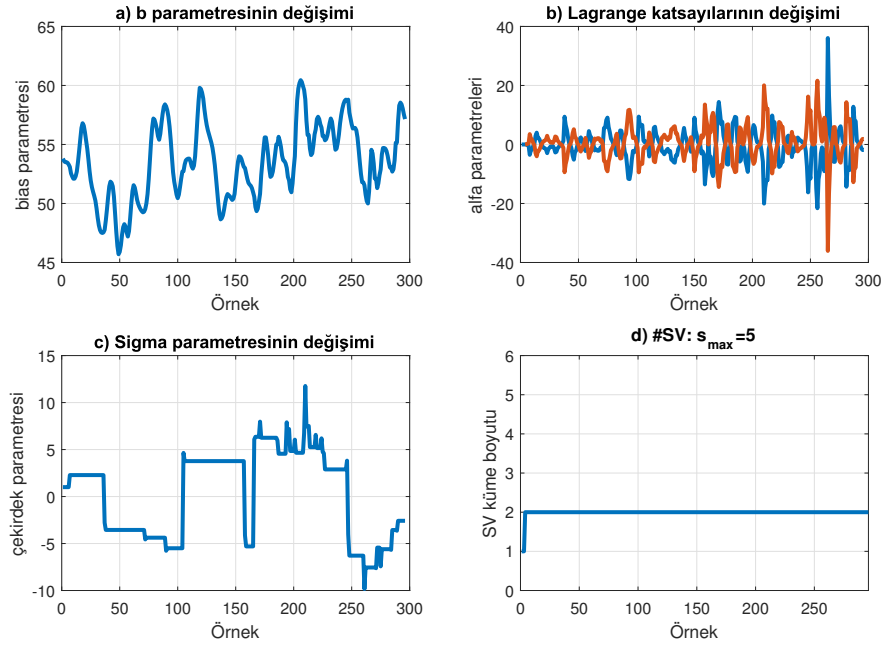
Denklem (2.27)'te, x_1 arabanın konumunu, x_2 arabanın hızını, x_3 çubuğun açısal konumunu (çıkı) ve x_4 çubuğun açısal hızını gösterir. Bunun dışında, g yerçekim ivmesini, l çubuğun uzunluğunu (araba ile çubuk ucundaki küçük kütle arası

mesafeyi), M arabanın kütlesini, m çubuğun ucundaki küçük kütleyi, I küçük kütlenin eylemsizlik momentini, b arabanın sürtünme katsayısını ve d ise sarkacın sönümlenme (damping) katsayısını göstermektedir. Kontrol işareti (control signal) ve uygulanan kuvvet, sırasıyla $u(t) \in [-2.5V, +2.5V]$ ve $F \in [-20N, +20N]$ olarak sınırlandırılmaktadır. Her iki tanılama çalışmasında, NARX modeli için $n_u = 5$ ve $n_y = 5$ seçilmişken izin verilen en fazla SV sayısı $s_{max} = 5$ olmaktadır. Tablo 2.2 çevrimiçi bağlanım sonuçlarını karesel-hatanın-ortalamasının-karekökü (root-mean-squared-error: RMSE) cinsinden vermektedir. Şekil 2.4 ve 2.5,

Tablo 2.2: Box-Jenkins ve ters sarkaç sistemlerini UKF-SVM ile çevrimiçi tanılama RMSE sonuçları.

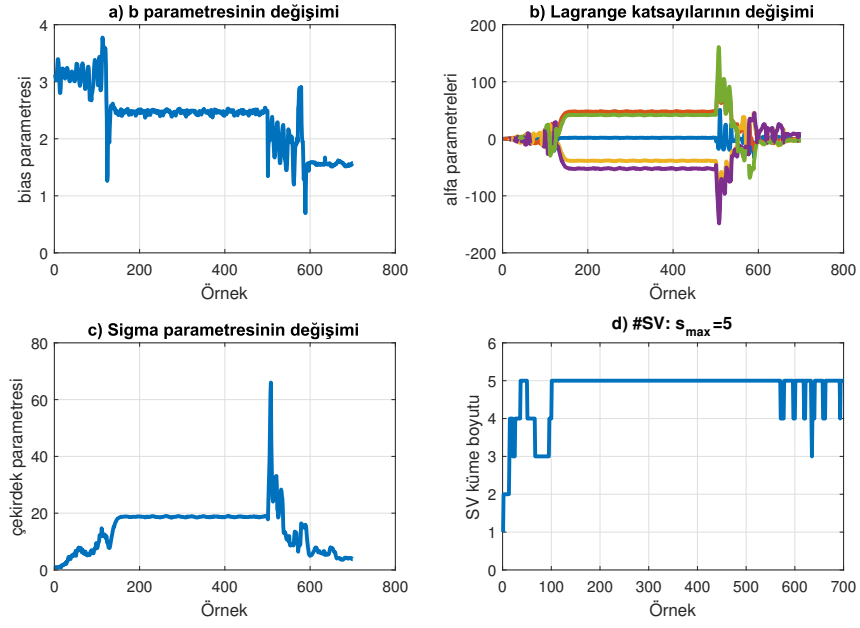
Sistem	#Örnek	RMSE	Geçen süre (s)
Box-Jenkins	296	0.0120	2.7309
Ters sarkaç	700	0.0595	10.0870

Box-Jenkins ve ters sarkaç sistemlerinin UKF-SVM ile çevrimiçi tanılanmasında parametrelerin ve SV sayısının değişimini göstermektedir. Şekil 2.6'da ise gözlemlenmiş çıktılar ve UKF-SVM model çıktıları ile kestirim hataları her iki sistem için verilmiştir.

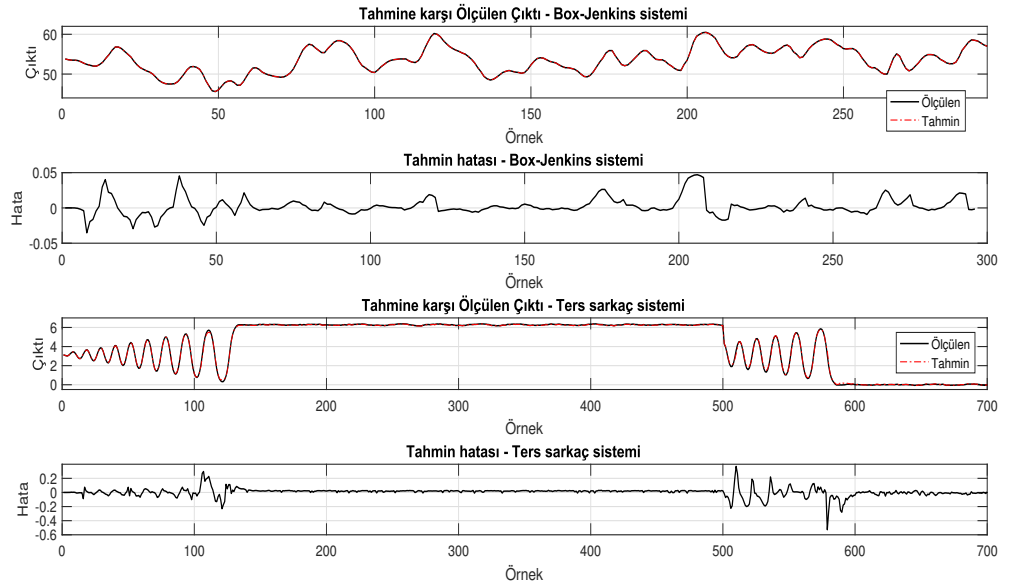


Şekil 2.4: UKF-SVM ile Box-Jenkins sisteminin çevrimiçi tanılanmasında parametreler a) b , b) α , c) σ , ve d) #SV.

Şekil 2.6, UKF algoritmasının önemli bir role sahip olduğu önerilen çevrimiçi LS-SVM yaklaşımının başarımını gözler önüne sermektedir. Ayrıca, diğer LS-SVM parametreleriyle eş zamanlı çekirdek parametresi güncellemesinin bu başarıım üzerinde hatırı sayılır bir payı vardır. Bu, Şekil 2.4 ve 2.5'te çekirdek parametresindeki değişim üzerinden kolayca görülebilmektedir. Tablo 2.2'nin gösterdiğine göre, önerilen uyarlamalı SV kümesi yaklaşımı sayesinde elde edilen küçük SV kümesi kullanılarak küçük bir RMSE değeriyle tanılama yapılabilir.



Şekil 2.5: UKF-SVM ile ters sarkaç sisteminin çevrimiçi tanılanmasında parametreler a) b , b) α , c) σ , ve d) #SV.



Şekil 2.6: Box-Jenkins ve ters sarkaç sistemleri için, ölçülen ve UKF-SVM tarafından kestirilen çıktılar ile kestirim hataları.

2.5 Yorum

Tezin bu bölümünde, önce, çekirdek parametresi dahil, LS-SVM'nin tüm parametrelerinin ardışık veri kullanılarak eş zamanlı güncellenmesi fikri öne sürülmüştür. Çekirdek uyarlanması için ek bir model veya ardışık bir eniyileme yoluna gidilmemiştir. Önerilen yaklaşım gerçekten basit bir çerçeveye sahiptir. Sahip olduğu nitelikler itibariyle, veriye dair ön inceleme yapıp çekirdek parametresi için en iyi değeri seçmeye gerek kalmaz. Modelin eğitilmesi, içerdiği UT kokusuz dönüşümü sayesinde doğrusal olmayan modellerin de parametrelerini yüksek bir başarımla kestirebilen UKF kullanılarak yapılmıştır. Özellikle, düşük boyutlu parametre vektörü ile, ki bu çalışmada az sayıda destek vektörü demektir, UKF hızlı çalışmaktadır. Bu, onu çevrimiçi uygulamalar için cazip kılmaktadır. Önerilen akıllıca uyarlamalı SV küme güncellemesi yaklaşımı sayesinde küçük bir SV kümesi elde edilebilmektedir. SV kümesini hem gelen veriyi başarıyla temsil edebilecek düzeyde tutar hem de sadece artan veya sadece azalan bir profilden korur. Yapılan uygulamaları göz önünde bulundurunca, çekirdek parametresinin diğer parametrelerle eş zamanlı güncellenmesinin literatürde bir ihtiyaç olduğu görülmektedir. Ve bu ihtiyaç, önerilen hızlı, etkili ve basit çevrimiçi LS-SVM, diğer adıyla UKF-SVM yaklaşımıyla karşılanmıştır.

Buraya kadar yapılan, LS-SVM üzerinde sadece çekirdek fonksiyonu ölçeğinde iyileştirme olmaktadır. Önümüzdeki bölümde ise, buna ek olarak, yapısal bir iyileştirme üzerinde durulup LS-SVM'ye özyinelenabilirlik özelliği kazandırılıp bir aşama daha iyileştirme yapılacaktır ve tezin geri kalanında bu model üzerinden gidilecektir. UKF-SVM ile ilgili kısım burada sona ermiştir.

3. ÖNERİLEN ÖZYİNELEMELİ DESTEK VEKTÖR MAKİNESİ: RSVM

Bu bölümde, önerilen özyinelemeli destek vektör makinesi RSVM hakkında ayrıntılı bilgiler verilecektir. Literatürde SVM ile özyinelemeli ağların birlikte kullanıldığı çalışmalara Bölüm 3.1’de değinilirken standart LS-SVM’ye özyinelenme özelliğinin neden kazandırıldığı Bölüm 3.2’de anlatılmaktadır. RSVM’nin kendisi ise Bölüm 3.3’te verilmektedir. Ardından, RSVM modelinin doğası gereği söz konusu olan iç kararlılığı Bölüm 3.4’te verilirken bu modelin, özyinelemeli modellerin eğitiminde kullanılan ve literatürde yaygınca bilinen BPTT algoritması kullanılarak eğitilmesine dair ayrıntılar Bölüm 3.5’te paylaşılmaktadır.

3.1 Literatürdeki Çalışmalar

Bu alt bölümde, şu ana kadar literatürde SVM ile özyinelemeli ağların birlikte bulunduğu veya SVM ile özyineleme olgusunun birlikte yer aldığı çalışmalardan bahsedilecektir. Özyinelemeli ağlar özellikle veri dizileri (data sequences) arasında geçici bağımlılık (temporal dependency) olan durumlarda çekicidir. (Suykens ve Vandewalle, 2000) çalışmasında, LS-SVM modeli, destek vektörleri oluşturulurken geçmiş model çıktılarının kullanılması fikri üzerine kurulmuştur. Destek vektörleri, içinde geçmiş model çıktılarını içeren bir NARX veri modeli ile oluşturulur. (Schneegaß ve diğ., 2007) çalışmasında, en fazla marjinli (maximum margin) sınıflandırıcı öyle bir şekilde değiştirilmiştir ki ayırıcı hiper düzlem (seperating hyperplane) denklemi özyinelemeli bir şekilde güncellenen bir içsel durum (internal state) vektörü barındırır. Durumların uyarlanması ek iki parametre matrisi kullanılarak yapılır. SVM çözümü elde edildikten sonra, bir adım gradyan azalan eğitimi ile bu matrisler uyarlanır. Bunlara ek olarak, SVM’yi çıktı katmanında bulunduran ve onu bir öznitelik uzayı önışlemci ağı (feature space prerpocessor network) ile ardarda bağlı (cascaded) şekilde çalıştıran bazı çalışmalar da mevcuttur. (Tang, 2013) çalışmasında, çıktı üreten üst katmandaki softmax aktivasyon fonksiyonu SVM ile yer değiştirmiştir.

İç katmanda yer alan ağ tarafından verinin öznitelikleri öğrenilmekte olup SVM bunları kullanarak çıktıyı üretmektedir. Bazı modeller ise özniteliklerdeki gelişigüzel (arbitrary) uzun vadeli bağımlılıklar (long term dependencies) ile ilgilenmek adına bünyesinde tuttuğu içsel durumları geliştirmek için uzun-kısa vadeli hafıza (long-short term memory - LSTM) hücresi barındırır. (Schmidhuber ve diğ., 2006) çalışmasında, bir özyinelemeli sinir ağı (recurrent neural network - RNN) ardışık gidileri alıp sinirsel aktivasyon vektörleri (neural activation vectors) üretir. Bunlar, skaler bir çıktı üreten SVM'yi girdi olarak besler. RNN içindeki LSTM hücreleri, içsel durumları temsil etmek için kullanılır. Bu durumlar, hücre mimarisi içinde güncellenir. (Zhang ve diğ., 2016) çalışmasında, benzer bir yapı benimsenmektedir ancak önce SVM modeli eğitilir ve ardından, RNN modeli SVM katmanından gradyanın geri yayılmasıyla eğitilir.

3.2 GÜDÜLENİM

LS-SVM'in neden özyinelemelilik özelliği ile donatılıp RSVM modelinin önerildiğine dair sebepleri (motivation-güdülenim) kısaca şöyle anlatabiliriz.

- İleri beslemeli ağlar için geçerli anlayışa göre, elde edilen veri birbiri üzerine binen zaman pencerelerinde (overlapping time windows) içerilir ve problem uzamsal (spatial) olarak ele alınır. Ancak, bu tip pencereleri kullanmanın başlıca bir sakıncası (drawback) vardır. Pencerme boyutu, yapılacak göreve bağlıdır (task dependent). Eğer çok küçük olursa ağ önemli bilgiyi görmezden gelecektir. Tam tersi durumda, eğer çok büyük olursa ağ, eğitim verisini aşırı öğrenecektir (overfitting). Zaman penceresi için uygun bir geçmiş ufkunu (past horizon) belirlemek adına genel geçer kabul görmüş bir yol yoktur. Böyle bir zaman penceresi, belirli bir geçmiş ufkuna kadarki geçmiş veri örnekleri kullanılarak oluşturulmuş bir NARX girdi verisi olabilir.
- Zaman dizisi tahmini (time series prediction) için NARX girdisi kullanmak, verideki hızlı dalgalanmaları yakalamak için iyi iş görebilir. Tahmin edici model,

veri örneklerindeki çabuk değişimlere cevap verebilir. Dolayısıyla, bu yaklaşım, veri örneklerindeki kısa vadeli bağımlılığı yakalamak için uygundur. Eğer biri uzun vadeli bağımlılığı yakalamak istiyorsa, zaman penceresini genişletmesi gerekir ki bu, veriyi aşırı öğrenmeye ve işlemsel açıdan ek yüke neden olur. Ayrıca dikkat edilmelidir ki, bu yaklaşım verideki gürültünün neden olduğu değişimlere karşı hassas da olacaktır.

- Öte taraftan, özyinelemeli ağlar zamanın akışını doğrudan modelleyebilir. Bu, gürültülü durumda dahi veri örnekleri arasındaki uzun vadeli bağımlılıkların izini sürebilmeyi sağlar. Zaman dizisindeki yavaş dalgalanmaları yakalama yeteneğine sahiptir. Böylece, ilgili bilgiyi gürültülü zaman dizisinden süzebilmektedir.
- Bozucu etki gözetleme görevimizi düşününce, bozucu etkideki yönsemeyi (trend) kestirmeyi istediğimiz kanısına varabiliriz. Böylece, bozucu etki kestirimi, bozucu etki geçmişini göz önünde bulundurarak bozucu etkinin şimdiki değerinin tahmin edildiği bir zaman dizisi tahmin görevine dönüşür.
- LS-SVM'yi geliştirip özyinelemeli bir modele dönüştürmedeki güdülenimimiz, NARX yaklaşımı ve özyinelemeli ağların faydalarını bir yapı içinde birleştirme fikri üzerine kuruludur. Bu nedenle, önerilen RSVM modeli, IIR süzgeç içinde NARX veri girdisi kullanan bir doğrusal kısmı ve veri örüntülerindeki (pattern) doğrusal olmayan dalgalanmaları yakalamak için kullanılan bir özyinelemeli LS-SVM'den oluşan başka bir kısmı içerir.
- Son olarak, bilinen LS-SVM, doğası itibariyle, tek çıktılı verinin bağlanımı için kullanılabilir ancak çok çıktılı için değil. Halbuki, mekatronik sistemlerin kontrolü bağlamında, çok çıktıya sahip olan bir sistemle çalışmak oldukça olasıdır. Önerilen RSVM sayesinde çok çıktılı verinin bağlanımını yapmamıza imkan tanınmış olur. Çünkü, gizli katmanda kullanılan LS-SVM, boyutu ayarlanarak çok çıktı verebilen bir çıktı katmanı tarafından sarılmaktadır.

3.3 RSVM Modeli

RSVM modeli, gizli katmanda doğrusal olmayan bağlanım yapan bir LS-SVM barındırmaktadır. Modele yüksek bir genelleme yeteneği kazandırmak için, gizli katmanı doğrusal bir IIR süzgeç ile güçlendirilmiştir. Doğrusal olan ve olmayan kısımlar birlikte, (3.1)'de verilen gizli öznitelik vektörünün hesap edildiği gizli katmanı oluştururlar.

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_s \end{bmatrix} = \mathbf{exp} \left(-0.5 (\mathbf{h}' - \mathbf{W}_{h\mu})^{\odot} \oslash \mathbf{W}_{h\sigma}^{\odot} \right), \quad \mathbf{h}' = \begin{bmatrix} h'_1 \\ \vdots \\ h'_s \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Denklem (3.1)'da, $\mathbf{h}' \in \mathbb{R}^s$, gizli katman Gauss aktivasyon fonksiyonuna olan ağ girdisini (net input to the hidden layer) gösterirken $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^s$ ise gizli katman aktivasyonunu (hidden layer activation) göstermektedir. Dikkat ediniz ki, $\mathbf{h}$, gizli katmanda üretilen asıl gizli öznitelik vektörüdür. Ayrıca, $\mathbf{W}_{hi} \in \mathbb{R}^s$, $i \in \{\mu, \sigma\}$, Gauss aktivasyonunun merkez ve genişlik parametre vektörlerini gösterirken ' $\odot$ ' ve ' $\oslash$ ' ise sırasıyla matematiksel işlemleri ise vektör/matris cebirindeki eleman elemana (elementwise) kare almayı ve bölmeyi simgelemektedir. Gizli katmana olan ağ girdisinin doğrusal olan ve olmayan bileşenlerini sırasıyla $\bar{\mathbf{h}}$ ve $\tilde{\mathbf{h}}$ ile gösterelim. O halde, gizli katmana olan ağ girdisi $\mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}} + \tilde{\mathbf{h}}$ şeklinde hesap edilir. $\mathbf{h}_n$, n zaman indisindeki gizli öznitelik vektörünü gösterebilir. $\mathbf{h}_{n+1}$ 'i elde etmekle alakalı özyinelemeli güncelleme, takip eden paragraflarda verilmektedir.

Öncelikle, $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}$ 'in gizli katmanda nasıl elde edildiğini açıklayalım. Gizli öznitelik vektörü $\mathbf{h}_n$ içindeki her bir eleman, n zaman indisinde, LS-SVM'de bir destek vektörü olacaktır. $\tilde{\mathbf{W}}_{ht} \in \mathbb{R}^{s+1}$ ağırlık matrisi olmak üzere, destek vektör bağlanımının

ağırlıklandırılmış çıktısı, $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}$ 'i verir.

$$\begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \tilde{\mathbf{h}}_{n+1} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{W}}_{ht} \odot \underbrace{\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{1}}^T \\ \tilde{\mathbf{1}} & \Omega_n + \nu^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\Phi_n \in \mathbb{R}^{(s+1) \times (s+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{s+1}} \right)}_{\text{LS-SVM}_n \in \mathbb{R}^{s+1}} \quad (3.2)$$

$$\Omega_{ij,n} = K(h_{i,n}, h_{j,n}), \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, s$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ht} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{W}}_{ht}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{W}_{ht}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{ht}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{ht} \in \mathbb{R}^s$$

Dikkat ediniz ki kesik çizgilerin üzerindeki eleman h^{kkt} , LS-SVM formülasyonunda içerilen (2.11)'de türetilmiş olan KKT koşuluna karşılık gelmektedir, α parametreleri üzerinde bir eşitlik kısıtı olark sifıra eşit olması gereken $\sum_{i=1}^s \alpha_i$. Ayrıca, ' $\odot$ ' eleman elemana matris çarpımını göstermektedir. Güçlü genelleme yeteneğinden ötürü Gauss çekirdek fonksiyonu kullanılmaktadır. σ , Gauss genişlik parametresi olmak üzere,

$$K_{ij,n} = K(h_{i,n}, h_{j,n}) = \exp \left(-\frac{(h_{i,n} - h_{j,n})^2}{2\sigma^2} \right), \quad (3.3)$$

$$i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, s$$

Dikkat edilmelidir ki, gizli öznitelik vektöründeki her bir gizli öznitelik LS-SVM formülasyonu içinde bir destek vektörü olarak ele alınır.

İkinci olarak, aslında bir IIR süzgeç olan $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}$ 'in nasıl elde edildiğini yazalım. Açıktır ki, doğrusal kısmın KKT koşulu üzerinde hiç bir etkisi yoktur.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{h}}_{n+1} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{W}}_{hh} \odot \begin{bmatrix} h_n^{kkt} \\ \mathbf{h}_n \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{W}}_{hv} \mathbf{v}_{n+1} \quad (3.4)$$

$\tilde{\mathbf{W}}_{hv} \in \mathbb{R}^{(s+1) \times d_v}$, geçmişte gözlemlenmiş girdi-çıkı örnekleriyle kurulmuş olan $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathbb{R}^{d_v}$ NARX girdi verisinin ağırlık matrisiyken $\tilde{\mathbf{W}}_{hh} \in \mathbb{R}^{s+1}$ ise gizli

özniteliklerin ağırlık matrisidir.

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{W}}_{hh} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \check{\mathbf{W}}_{hh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{W}}_{hh}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{hh}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{hh} \in \mathbb{R}^s \\ \check{\mathbf{W}}_{hv} &= \begin{bmatrix} \vec{0}^T \\ \underbrace{\check{\mathbf{W}}_{hv}}_{\in \mathbb{R}^{s \times d_v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \bar{\mathbf{W}}_{hv}(1,1) & \dots & \bar{\mathbf{W}}_{hv}(1,d_v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W}_{hv}(s,1) & \dots & \mathbf{W}_{hv}(s,d_v) \end{bmatrix}, \\ d_v &= \sum_{r=1}^R n_u^r + R + \sum_{q=1}^Q n_y^q,\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} u_{1,n} & \dots & u_{1,n-n_u^1} & \dots & u_{R,n} \\ \dots & u_{R,n-n_u^R} & y_{1,n-1} & \dots & y_{1,n-n_y^1} \\ \dots & y_{Q,n-1} & \dots & y_{Q,n-n_y^Q} & \end{bmatrix}^T$$

Denklem (3.5)'te, $r = 1, \dots, R$ için $u_{r,n}$ ve $q = 1, \dots, Q$ için $y_{q,n}$ sırasıyla, n zaman indisinde, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^R$ girdi vektöründeki her bir girdiyi ve $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^Q$ çıktı vektöründeki her bir çıktıyı göstermektedir. Bu girdi ve çıktı vektörleri, girdi-çıkı örneklerinin gözlemlendiği sisteme aittir. Benzer şekilde, n_u^r ve n_y^q ise sırasıyla, NARX girdi verisi $\mathbf{v}$ 'u oluşturmak için r indisli girdi ve q indisli çıktıya dair geçmiş ufkunu göstermektedir. Dikkat edilmelidir ki, $\mathbf{v}$ aslında tek tek tüm girdi ve çıktıların geçmişlerinin sırayla uç uca eklenmesinden ibarettir. Ayrıca, $\vec{0}$ uygun boyutta bir sıfırlar vektörünü gösterir. Doğrusal olan ve olmayan kısımları birleştirerek ve LS-SVM içindeki KKT koşulunu barındırarak, gizli öznitelik vektörü kapalı şekilde, özyinelemeli olarak şöyle güncellenmektedir.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \check{\mathbf{h}}_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{h}}_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \check{\mathbf{h}}_{n+1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{h}_{n+1} &= \exp \left(-0.5 \left(\mathbf{h}'_{n+1} - \mathbf{W}_{h\mu} \right)^{\odot} \odot \mathbf{W}_{h\sigma}^{\odot} \right)\end{aligned}\tag{3.6}$$

Son olarak, önerilen RSVM modelinin çıktı katmanında, ağırlık matrisi $\check{\mathbf{W}}_{\hat{y}h} \in \mathbb{R}^{(Q+1) \times (s+1)}$ ve sapma (bias) vektörü $\check{\mathbf{W}}_{\hat{y}b} \in \mathbb{R}^{s+1}$ ile gösterilmek üzere, çıktı,

özniteliklerin ağırlıklandırılmış toplamı artı çıktı sapması olarak üretilmektedir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{y}_{n+1}^{kkt} \\ \hat{\mathbf{y}}_{n+1} \end{bmatrix} &= \check{\mathbf{W}}_{\hat{y}h} \begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \mathbf{h}_{n+1} \end{bmatrix} + \check{\mathbf{W}}_{\hat{y}b} \\
\check{\mathbf{W}}_{\hat{y}h} &= \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mathbf{0}}^T \\ \bar{\mathbf{0}} & \mathbf{W}_{\hat{y}h} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{\hat{y}h}(1,1) & \dots & \mathbf{W}_{\hat{y}h}(1,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{W}_{\hat{y}h}(Q,1) & \dots & \mathbf{W}_{\hat{y}h}(Q,s) \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{\hat{y}h} \in \mathbb{R}^{Q \times s} \\
\check{\mathbf{W}}_{\hat{y}b} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}_{\hat{y}b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}_{\hat{y}b}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{\hat{y}b}(Q) \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{\hat{y}b} \in \mathbb{R}^Q
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Dikkat ediniz ki $\hat{y}_{n+1}^{kkt}$ aslında h_{n+1}^{kkt} 'dir. Şu anlama gelir ki, $\hat{y}^{kkt}$ (2.11)'deki KKT koşulu olan $\sum_{i=1}^s \alpha_i$ ifadesini göstermektedir ve $\hat{y}^{kkt}$ sıfıra eşit olmalıdır. RSVM modeli eğitilirken α parametreleri üzerinde bir eşitlik kısıtı olarak bu KKT koşulu, $\hat{y}^{kkt}$ terimine (3.7)'de çıktıda yer verilerek ve onun hedef değerini (target value) sıfıra eşitleyerek sağlanır. Asıl model çıktısı $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^Q$ ile gösterilir.

Gizli öznitelik vektörü güncellemesini ve çıktı üreten denklemleri, bütün model denklemlerini sunmak için kapalı şekilde özetleyelim.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \mathbf{h}'_{n+1} \end{bmatrix} &= \check{\mathbf{W}}_{hh} \odot \begin{bmatrix} h_n^{kkt} \\ \mathbf{h}_n \end{bmatrix} + \check{\mathbf{W}}_{hv} \mathbf{v}_{n+1} \\
&\quad + \check{\mathbf{W}}_{ht} \odot \left(\begin{bmatrix} 0 & \bar{\mathbf{1}}^T \\ \bar{\mathbf{1}} & \bar{\boldsymbol{\Omega}}_n + \nu^{-1} \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \right) \\
\mathbf{h}_{n+1} &= \exp \left(-0.5 (\mathbf{h}'_{n+1} - \mathbf{W}_{h\mu})^{\odot 2} \oslash \mathbf{W}_{h\sigma}^{\odot 2} \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{n+1}^{kkt} \\ \hat{\mathbf{y}}_{n+1} \end{bmatrix} = \check{\mathbf{W}}_{\hat{y}h} \begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \mathbf{h}_{n+1} \end{bmatrix}$$

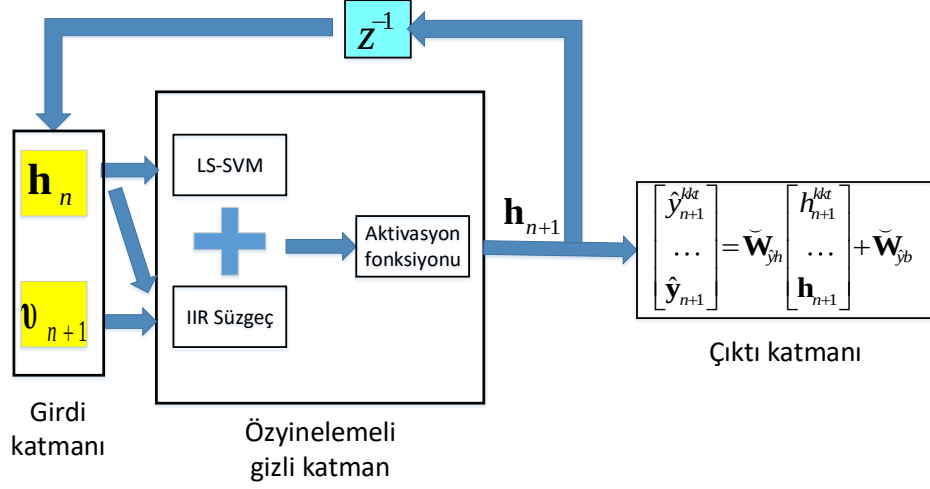
Önerilen RSVM modeline ait olan ve (3.8)'de verilen dinamikleri açık şekilde ifade

edebilmek için, bu dinamikler (3.9)'da yeniden yazılmıştır.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \bar{h}'_{1,n+1} \\ \vdots \\ h'_{s,n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{W}}_{hh}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{hh}(s) \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} h_n^{kkt} \\ \bar{h}_{1,n} \\ \vdots \\ h_{s,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\mathbf{W}}_{hv}(1,1) & \cdots & \bar{\mathbf{W}}_{hv}(1,d_v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W}_{hv}(s,1) & \cdots & \mathbf{W}_{hv}(s,d_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n+1}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n+1}(d_v) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mathbf{W}}_{ht}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{ht}(s) \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b + K(h_{1,n}, h_{1,n})\alpha_1 + \cdots + \frac{\sum_{i=1}^s \alpha_i}{K(h_{1,n}, h_{s,n})\alpha_s + \nu^{-1}\alpha_1} \\ \vdots \\ b + K(h_{s,n}, h_{1,n})\alpha_1 + \cdots + K(h_{s,n}, h_{s,n})\alpha_s + \nu^{-1}\alpha_s \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} h_{1,n+1} \\ \vdots \\ h_{s,n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \exp\left(-0.5 \frac{(h'_{1,n+1} - \mathbf{w}_{h\mu}(1))^2}{\mathbf{w}_{h\sigma}(1)^2}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-0.5 \frac{(h'_{s,n+1} - \mathbf{w}_{h\mu}(s))^2}{\mathbf{w}_{h\sigma}(s)^2}\right) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \hat{y}_{n+1}^{kkt} \\ \hat{y}_{1,n+1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{Q,n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{W}}_{\hat{y}h}(1,1) & \cdots & \bar{\mathbf{W}}_{\hat{y}h}(1,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{W}_{\hat{y}h}(Q,1) & \cdots & \mathbf{W}_{\hat{y}h}(Q,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \bar{h}_{1,n+1} \\ \vdots \\ h_{s,n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{W}}_{\hat{y}b}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{\hat{y}b}(Q) \end{bmatrix} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Şekil 3.1, önerilen RSVM modelinin mimarisini göstermektedir. Dikkat ediniz ki model çıktısı $\hat{\mathbf{y}}_{n+1}$ iken $\hat{y}_{n+1}^{kkt}$ ise α parametreleri üzerindeki eşitlik kısıtı gözetilecek şekilde bir model eğitimi için gereklidir. Eğitim, $\hat{y}_{n+1}^{kkt}$ terimini sıfıra eşitleyerek gerçekleştirilir.

RSVM modelinin önemli noktaları. Denklem (3.9)'da, $\bar{\mathbf{W}}_{ht}$ ile çarpım halinde olan LS-SVM gizli özniteliklerin doğrusal olmayan kısmını sağlar. Dikkat ediniz ki LS-SVM'nin destek vektörleri aslında modelin gizli öznitelikleridir. Genellikle, SVM literatüründe, destek vektörleri, altta yatan sistemden gözlemlenmiş girdi-çıkı örneklerini kullanıp NARX veri oluşturarak meydana getirilir. Böyle bir durumda, oluşturulan NARX girdi verisi, ki bizim örneğimizde $\mathbf{v}$ ile gösterilir, (3.5)'te belirtildiği gibi girdi boyutu R ve çıktı boyutu Q 'ya bağlı olan d_v gibi bir boyuttur.



Şekil 3.1: Önerilen RSVM modelinin mimarisi.

Halbuki, önerilen modelde, destek vektörlerinin gözlemlenmiş veriye boyutsal bağıllığı bulunmamaktadır. Çünkü, her bir gizli öznelik bir destek vektörüdür ve, doğal olarak, her biri skaler olduğundan sabit 1 boyutundadır. Burada, destek 'vektörü' terimi skaler değişken türünü de kapsayan genel bir terimdir, ki bizim durumumuzda, destek vektörlerinin boyutu 1'dir. Destek vektör kümesinin göze çarpan diğer bir özelliği ise destek vektör kümesini saklamak için ek bir hafızaya veya çabaya ihtiyaç olmamasıdır. Çünkü, destek vektörleri, aslında özyinelemeli güncelleme için zaten hafızada saklanan gizli özneliklerden ibarettir. Eğer NARX veri türünde destek vektörleri kullanılsaydı gözlemlenmiş girdi-çıkı verisi büyük boyutlu hale geldiğinde veya destek vektör sayısı (s - aynı zamanda gizli öznelik vektörünün boyutu) büyük bir sayı seçildiğinde daha fazla hafıza kullanımına neden olurdu. Gizli öznelik vektörünü ($\mathbf{h}$) destek vektörü olarak kabul ederek, bu işlemsel sıkıntıdan kaçınılmış olunur. RSVM modelini bu özellikleri sayesinde, yüksek boyutlu girdi-çıkı verisiyle çalışırken dahi, model üzerinde büyük bir işlemsel yük oluşturmada fazla sayıda destek vektörü ile kullanmak mümkündür.

Dikkat ediniz ki NARX girdi v , IIR süzgeç içinde kullanılır. Bu, girdi-çıkı geçmişi veriyi öğrenme sürecine dahil etmek için ve özellikle NARX veriyi

oluşturan birbiri üzerine binişimli zaman penceresinde yakın zamana ait girdi-çıkış geçmişinin yer alması sayesinde verideki hızlı değişimleri yakalamak içindir. Bu pencere, yeni örnekler işlendikçe zamanda ileriye doğru hareket eder. Öte yandan, LS-SVM verideki doğrusal olmayan dalgalanmaları yakalamaktan sorumludur. Gizli öznitelikler LS-SVM'ye girdi (destek vektörleri) olarak beslendiğinden ve LS-SVM'nin ağırlıklandırılmış çıktısı gizli özniteliklerin doğrusal olmayan kısmını ürettiğinden, LS-SVM özyinelemeli ile donanmıştır. Bu, önerilen modelin özyinelemeli SVM olarak anılmasının sebebidir. Verideki hızlı değişimleri sezebilen NARX modellerinin yeteneğiyle verideki yavaş dalgalanmaları yakalayabilen özyinelemeli ağların yeteneğini birleştirir. Destek vektörleri NARX veri türünde olan tipik bir LS-SVM verideki hızlı dalgalanmaları iyi yakalayabilecek güçte olurdu. Ancak, önerilen RSVM modeli NARX modellerinin gücüyle özyinelemeli ağların gücünü aynı çatı altında birleştirmektedir. Verideki yavaş dalgalanmalardan elde edilen bilgiden hem yavaş hem de hızlı dalgalanmaları yakalarken istifade edilir. Çünkü, gizli katmanın özyinelemeli olması sayesinde verideki yavaş dalgalanmalara dair bilgiyi taşıyan en yakın zamana ait gizli öznitelikler hem i) NARX girdi sayesinde verideki hızlı dalgalanmaları yakalayan IIR süzgeçte, hem de ii) LS-SVM'de destek vektörleri olarak kullanılır; böylece, IIR süzgecin çıktısı ve LS-SVM'nin ağırlıklandırılmış çıktısı toplandığında verideki yavaş dalgalanmaların yönsemesini yakalayan güncel gizli öznitelikleri elde ederiz.

3.4 İç Kararlılık

Şöyle bir denklemi sağlayan bir IIR süzgeç düşünün.

$$y_n + \sum_{i=1}^p \rho_i y_{n-i} = \sum_{j=0}^r \zeta_j u_{n-j} \quad (3.10)$$

Bu bizi

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^r \zeta_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p \rho_i z^{-i}} \quad (3.11)$$

gibi transfer fonksiyonuna çıkarır. Süzgeci kararlı tutabilmek için $\rho_i, i =$

$1, \dots, p$, katsayıları üzerinde süzgeç derecesi p 'ye bağlı belirli kısıtlar sağlanmalıdır. Önerdiğimiz RSVM modelindeki IIR süzgeç için uygun kısıtları belirlemek için, öncelikle gizli katmana olan ağ girdisinin i indisli elemanını yazalım.

$$h'_{i,n+1} = \bar{h}_{i,n+1} + \tilde{h}_{i,n+1} \quad (3.12)$$

Bu ifade şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$h'_{i,n+1} = \mathbf{W}_{hh}(i)h_{i,n} + \mathbf{W}_{hv}(i, :)\mathbf{v}_{n+1} + \tilde{h}_{i,n+1} \quad (3.13)$$

Burada, $\mathbf{W}_{hv}(i, :)$, $\mathbf{W}_{hv}$ matrisinin i . satırını göstermektedir. Denklem (3.13) göstermektedir ki IIR süzgecimiz birinci derecedendir. Bu sebeple, model kararlılığını garanti etmek için aşağıdaki kısıt sağlanmalıdır.

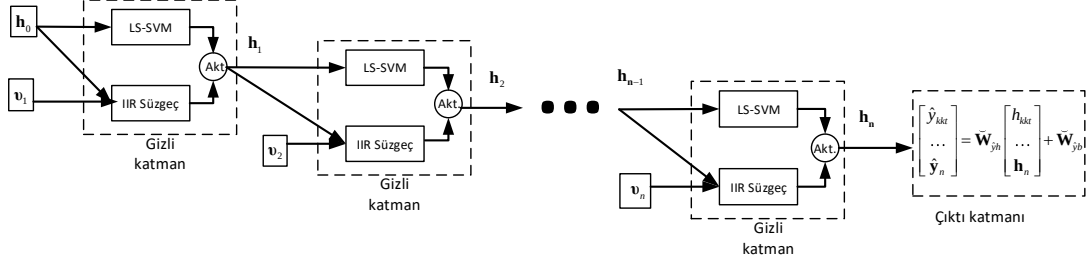
$$|\mathbf{W}_{hh}(i)| < 1, i = 1, \dots, p, \text{ (RSVM için } p = s) \quad (3.14)$$

Denklem (3.14)'teki kararlılık kısıtı, modelin her bir andaki çevrimiçi parametre güncellemesinin ardından $\mathbf{W}_{hh}$ 'deki parametreleri birim çember ile sınırlayarak sağlanır. Mevcut $\mathbf{W}_{hh}$ seçimi, model sadeliğini sağladığı gibi birinci dereceden bir IIR süzgeç yarattığı için model kararlılığının basitçe denetlenebilmesini de mümkün kılar.

3.5 RSVM Modelinin BPTT Algoritması ile Eğitimi

BPTT'de, gradyan hesabı ve ağırlık güncellemesi her bir yeni veri örneği işlendiği an yapılmaktadır. Bu, öncelikle, özyinelemeli ağ, çok gizli katmanlı bir ağ oluşturacak şekilde ve her bir gizli katman ayrı bir zaman indisine karşılık gelecek şekilde zamanda rulo gibi açarak yapılır (unrolling through time). Çok katmanlı bir algaç ağına (multilayer perceptron network - MLP) benzetilebilir. Ancak, bir farkla, o da şu ki; MLP'de her bir gizli katmanda farklı ağırlıklar bulunurken bunda, gizli katman ağırlıkları her gizli katmanda ortak kullanılır. BPTT'de, en son andaki hata (bu anı $n \in \mathbb{Z}$ ile gösterelim) 1'e eşit olan başlangıç anına kadar zamanda geri yayılır. Diğer bir deyişle, hata, açılmış ağın (unrolled network) gizli katmanları üzerinden

geriye yayılır. Bu şekildeki her bir gizli katman, $\{1, n\} \in \mathbb{Z}$ kümesindeki bir ana karşılık geldiğinden ötürü, hata aslında zamanda geri yayılmış olur, ki bu, algoritmaya ismini veren şeydir. Şekil 3.2 önerilen RSVM modelinin zamanda rulo gibi açılışını resmetmektedir.



Şekil 3.2: Önerilen RSVM modelinin zamanda rulo gibi açılışının resmedilişi.

BPTT, özyinelemeli ağırları eğitmek için uzun bir zamandır kullanılan standart bir algoritmadır ve bu yüzden, özyinelemeli bir ağırla rulo gibi açılmasının ayrıntılarını geçiyoruz ve okuyucu, ayrıntılar için (Williams ve Zipser, 1995) kaynağını inceleyebilir. Dikkat ediniz ki bu algoritma aynı zamanda gerçek zamanlı (real time) BPTT olarak da anılır. Ek olarak, söylemeliyiz ki, veri akışı, durdurucu bir müdahale olmaksızın sürekli şekilde seyredip $n \rightarrow \infty$ olduğunda, zaman indisleri kümesinin kuramsal olarak sonsuz boyutundan ötürü BPTT'den bazen BPTT(∞) olarak bahsedilmektedir. Bu, BPTT'nin uygulamadan ziyade kuramsal açıdan değerlendirilmesine neden olur. Bu sebeple, araştırmacılar en güncel hatanın başlangıça kadar değil, önceden belirlenmiş bir ana kadar geriye yayılmasını önermiştir (Williams ve Peng, 1990). Bu zaman penceresinin boyutunu $\eta \in \mathbb{Z}$ ($\eta < \infty$) ile gösterelim. O zaman, BPTT(η) geri yayılmanın işlemlerini sadece en yakın η adet an üzerinden gerçekleştirir. Bu, kırpılmış (truncated) BPTT algoritması olarak anılır ve bu tezde, uygulama yönünden sahip olduğu anlamdan dolayı, RSVM model eğitimi için bunu kullanmaktayız.

İçinde bulunduğumuz anın indisinin n olduğunu gözeterek hataların aşağıdaki

gibi bir kayıp (loss) fonksiyonuna sahip olalım.

$$\min_{\mathbf{W}_{ji,n}} L_{toplama} = \underbrace{\sum_{n_p=n-\eta+1}^n L_n}_{L_{toplama}^{\hat{y}}} + \underbrace{\sum_{n_p=n-\eta+1}^n L_n^{kkt}}_{L_{toplama}^{kkt}} \quad (3.15)$$

ve

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2} \epsilon_n^T \epsilon_n, \quad L_n^{kkt} = \frac{1}{2} (\epsilon_n^{kkt})^2 \\ \epsilon_n &= \hat{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}_n, \quad \epsilon_n^{kkt} = \hat{y}_n^{kkt} - 0 = \sum_{i=1}^s \alpha_{i,n} - 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

olmaktadır. Denklem (3.16)'da, 0, $\hat{y}_n^{kkt}$, nin istenen değeridir ki bu, $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 0$ olan KKT koşuluna karşılık gelmektedir. Denklem (3.9) göz önünde bulundurularak, şu anki zaman indisi n 'deki ağırlıklar, alt indis " j " aşağıdaki gibi düzenlenmek üzere, $\mathbf{W}_{ji,n}$ ile gösterilir.

$$\mathbf{W}_{ji} = \begin{cases} \mathbf{W}_{\hat{y}b}, & j = \hat{y}, i = b \\ \mathbf{W}_{\hat{y}h}, & j = \hat{y}, i = h \\ \mathbf{W}_{h\mu}, & j = h, i = \mu \\ \mathbf{W}_{h\sigma}, & j = h, i = \sigma \\ \mathbf{W}_{hv}, & j = h, i = v \\ \mathbf{W}_{hh}, & j = h, i = h \\ \mathbf{W}_{ht}, & j = h, i = t \\ \mathbf{W}_{hLS-SVM}, & j = h, i = LS - SVM \end{cases} \quad (3.17)$$

ve $\mathbf{W}_{hLS-SVM}$, gizli katmandaki LS-SVM'ye ait ağırlıkları tutmaktadır.

$$\mathbf{W}_{hLS-SVM} = [b \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_s \quad \sigma]^T \in \mathbb{R}^{s+2} \quad (3.18)$$

Denklem (3.18)'den görülmektedir ki, (3.3)'teki Gauss çekirdek fonksiyonunun genişlik parametresi σ da LS-SVM ağırlık vektörü $\mathbf{W}_{hLS-SVM}$ içine dahil edilmiştir. Bu, önerilen RSVM modelinde içeren LS-SVM bağlanımcıda uyarlamalı bir çekirdek fonksiyonunun benimsenmesindendir. Böylece, σ , modelin diğer parametreleriyle birlikte ayarlanır (parameter tuning). Gauss çekirdek parametresine dair bu yaklaşım, Bölüm 2'dekiyle aynıdır.

Dikkat ediniz ki kırılmış (ve dolayısıyla gerçek zamanlı) BPTT'de, gizli öznitelikleri başlangıçta sıfırlanmış ve başka hiç bir sıfırlama olmayan, sürekli

şekilde çalışan bir özyinelemeli model göz önüne alınmaktadır. Gradyan hesabı ve ağırlık güncellemesi her anda, yeni veri örneği işlendikten sonra gerçekleşmektedir. Denklem (3.15)'teki kayıp fonksiyonu göz önünde bulundurularak, zaman indisi n 'in her değerinde, model ağırlıkları öyle bir şekilde ayarlanır ki o andaki hata; kırpılmış BPTT için η boyutlu zaman penceresinde en eski olandan ($n_p = n - \eta + 1$), gerçek zamanlı BPTT için ise başlangıçtan ($n_p = 1$) şu ana kadar ($n_p = n$) olan tüm anları göz önünde bulunduracak şekilde endüştürleştirilir. Bu tarz bir ağırlık ayarlama yorumu, özyinelemeli modellerin doğası itibariyle, herhangi bir anı öncekilerle ilişkilendiren özyinelemeli gizli katman sayesinde ve bu yolla, herhangi bir an, bir zaman zinciri üzerinden, kırpılmış BPTT için η adım önceki an ile, gerçek zamanlı BPTT için ise başlangıç anıyla bile ilişkilendirilebilir. Bu, kırpılmış (ve gerçek zamanlı) BPTT'de, neden en son andaki hatanın dikkate alındığının sebebidir. İstenmektedir ki, özyinelemeli gizli katman aracılığıyla, en son an olan n 'deki hataya önceki $n - \eta + 1 \leq n_p \leq n$ anlarından olan katkıların toplamı endüştürleştirilsin. Bu ağırlık ayarlaması, model sürekli çalıştığı sürece ($n \rightarrow \infty$) yeni gelen anlarda tekrar edilip $\mu_{ji}^{rsvm} > 0$ ve $\mu_{kkt}^{rsvm} > 0$ öğrenme adımlı gradyan azalan ile gerçekleştirilir ki burada ji , (3.17) ve (3.18)'de verildiği gibi düzenlenmiştir.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ji} &= \mathbf{W}_{ji} + \Delta \mathbf{W}_{ji} \\ \Delta \mathbf{W}_{ji} &= -\mu_{ji}^{rsvm} \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} - \mu_{kkt}^{rsvm} \frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \\ \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} &= \sum_{n_p=n-\eta+1}^n \left. \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \right|_{n_p}, \quad \frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} = \sum_{n_p=n-\eta+1}^n \left. \frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \right|_{n_p} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Denklem (3.19)'da, $\frac{\partial L_{toplaml}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \Big|_{n_p}$ terimi en son an olan n 'deki hatanın n_p ile gösterilen önceki anlara zamanda geri yayılışını göstermektedir. Bu, özyinelemeli ağı, sonuçta elde edilecek olan açılmış ağı her bir gizli katmanının $n - \eta + 1 \leq n_p \leq n$ indisli bir ana karşılık geleceği şekilde zamanda rulo gibi açılmasıyla olur. Bu, n anındaki hatanın bir MLP ağının gizli katmanlarına geri yayılmasına denk görülebilir. Ancak, MLP'nin her bir gizli katmanı ayrı ağırlıklara sahipken açılmış olan ağı gizli katman ağırlıkları her gizli katmanda ortak kullanılmaktadır. Bu durum ve (3.15)'teki kayıp

fonksiyonu göz önünde bulundurularak, asıl gradyan terimi $\frac{\partial L_{toplaml}}{\partial \mathbf{W}_{ji}}$, $n - \eta + 1 \leq n_p \leq n$ anlarından bu gradyana olan katkıları toplayarak elde edilir ve $\frac{\partial L_{toplaml}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \Big|_{n_p}$ terimi ise, her bir n_p anından bu gradyana olan katkıyı göstermektedir. Şimdi, $\frac{\partial L_{toplaml}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \Big|_{n_p}$ teriminin, RSVM model dinamikleri göz önünde bulundurularak, nasıl elde edildiğini anlatalım. Burada izlenen yol, en son an olan n 'deki hatanın $n - \eta + 1 \leq n_p \leq n$ ile gösterilen zaman penceresindeki her bir n_p anı için RSVM modelinin ağırlıkları üzerine geri yayılışına dair kısmi türev denklemlerini elde etmekten geçer. Bu, $n_p = n$ anı ile başlar, $n_p = n - 1$ ile devam eder ve $n_p = n - \eta + 1$ anında biter. Sonra, bu işlemde elde edilen denklemlerden yola çıkarak genelleştirilmiş bir denklem kümesi elde edilir. Aşağıda, bu genelleştirilmiş denklemler verilmiştir. Bu denklemlerdeki açık kısmi türev ifadeleri kullanılarak, n anındaki hatanın herhangi bir n_p anı için RSVM model ağırlıkları üzerine geri yayılışı hesaplanabilir. Diğer bir deyişle, asıl gradyan olan $\frac{\partial L_{toplaml}}{\partial \mathbf{W}_{ji}}$ 'ye herhangi bir n_p anından gelen katkı olan $\frac{\partial L_{toplaml}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \Big|_{n_p}$ aşağıdaki denklemleri kullanarak hesaplanmaktadır.

Gradyana katkının genelleştirilmiş ifadesi: Hata delta ları ve n_p anından ağırlık gradyanına katkı $\frac{\partial L_{toplaml}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \Big|_{n_p}$ şu şekilde genelleştirilmektedir.

$$\delta_{\hat{y}, n_p} = \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \hat{\mathbf{y}}_{n_p}} = \begin{cases} \epsilon_n, & n_p = n \\ \vec{0} \in \mathbb{R}^Q, & n_p < n \end{cases}, \quad \delta_{\hat{y}, n_p}^{kkt} = \frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \hat{\mathbf{y}}_{n_p}^{kkt}} = \begin{cases} \epsilon_n^{kkt}, & n_p = n \\ 0, & n_p < n \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & \text{Çıktı katmanı} \\ & \text{ } n_p \text{ anından çıktı katmanı ağırlık ve sapma gradyanına katkı} \\ & \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{\hat{y}i}} \Big|_{n_p} = \begin{cases} \delta_{\hat{y}, n_p} \mathbf{h}_{n_p}^T, & i = h \text{ ve } \mathbf{h}_{n_p} = \exp \left(-0.5 \left(\mathbf{h}'_{n_p} - \mathbf{W}_{h\mu} \right)^{\odot 2} \odot \mathbf{W}_{h\sigma}^{\odot 2} \right), \\ \mathbf{h}'_{n_p} = \mathbf{W}_{hh} \odot \mathbf{h}_{n_p-1} + \mathbf{W}_{hv} \mathbf{v}_{n_p} + \mathbf{W}_{ht} \odot \mathbf{LS-SVM}_{n_p}(2 : s + 1) \\ \delta_{\hat{y}, n_p} \odot \vec{1}, & i = b \text{ ve } \vec{1} \in \mathbb{R}^Q \end{cases} \quad (3.21) \end{aligned}$$

Gizli katman aktivasyonu

$$\boldsymbol{\xi}_{h,n_p} = \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{h}_{n_p}} = \begin{cases} \mathbf{W}_{\hat{y}h}^T \boldsymbol{\delta}_{\hat{y},n}, & n_p = n \\ \mathbf{W}_{hh} \odot \boldsymbol{\delta}_{h,n_p+1} + \mathbf{W}_{ht} \odot (\delta \text{LS-SVM}_{h,n_p}^T \boldsymbol{\delta}_{h,n_p+1}), & n_p < n \end{cases}$$

$$\delta \text{LS-SVM}_{h,n_p} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{\partial K_{1i,n_p}}{\partial h_{1,n_p}} & \alpha_2 \frac{\partial K_{12,n_p}}{\partial h_{2,n_p}} & \cdots & \alpha_s \frac{\partial K_{1s,n_p}}{\partial h_{s,n_p}} \\ \alpha_1 \frac{\partial K_{21,n_p}}{\partial h_{1,n_p}} & \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{\partial K_{2i,n_p}}{\partial h_{2,n_p}} & \cdots & \alpha_s \frac{\partial K_{2s,n_p}}{\partial h_{s,n_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 \frac{\partial K_{s1,n_p}}{\partial h_{1,n_p}} & \alpha_2 \frac{\partial K_{s2,n_p}}{\partial h_{2,n_p}} & \cdots & \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{\partial K_{si,n_p}}{\partial h_{s,n_p}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

$$K_{ij,n_p} = K(h_{i,n_p}, h_{j,n_p}), \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, s$$

$$K(h_{i,n_p}, h_{j,n_p}) = \exp\left(-\frac{(h_{i,n_p} - h_{j,n_p})^2}{2\sigma^2}\right)$$

(3.22)

Gizli katmana olan ağ girdisi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{h,n_p} &= \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{h}'_{n_p}} = \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{h}_{n_p}} \frac{\partial \mathbf{h}_{n_p}}{\partial \mathbf{h}'_{n_p}} \\ &= \boldsymbol{\xi}_{h,n_p} \odot \left(\mathbf{h}_{n_p} \odot \left(-\vec{\mathbf{I}} \oslash \mathbf{W}_{h\sigma}^{\otimes 2} \right) \odot \left(\mathbf{h}'_{n_p} - \mathbf{W}_{h\mu} \right) \right), \quad \vec{\mathbf{I}} \in \mathbb{R}^s \\ \delta_{h,n_p}^{kkt} &= \frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial h_{n_p}^{kkt}} = \delta_{\hat{y},n_p}^{kkt} \end{aligned} \quad (3.23)$$

n_p anından gizli katman aktivasyon fonksiyonu ağırlıklarının gradyanına olan katkı

$$\begin{aligned} &\left. \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{hi}} \right|_{n_p} \\ &= \begin{cases} \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{h}_{n_p}} \frac{\partial \mathbf{h}_{n_p}}{\partial \mathbf{W}_{h\mu}} = \boldsymbol{\xi}_{h,n_p} \odot \left(\mathbf{h}_{n_p} \odot \left(\vec{\mathbf{I}} \oslash \mathbf{W}_{h\sigma}^{\otimes 2} \right) \odot \left(\mathbf{h}'_{n_p} - \mathbf{W}_{h\mu} \right) \right) & , i = \mu \\ \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{h}_{n_p}} \frac{\partial \mathbf{h}_{n_p}}{\partial \mathbf{W}_{h\sigma}} = \boldsymbol{\xi}_{h,n_p} \odot \left(\mathbf{h}_{n_p} \odot \left(\mathbf{h}'_{n_p} - \mathbf{W}_{h\mu} \right)^{\otimes 2} \odot \left(\vec{\mathbf{I}} \oslash \mathbf{W}_{h\sigma}^{\otimes 3} \right) \right) & , i = \sigma, \end{cases} \quad \vec{\mathbf{I}} \in \mathbb{R}^s \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
& \text{\textit{n}_p \text{ anından gizli katman ağırlık gradyanına katkı}} \\
& \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{hi}} \Big|_{n_p} = \begin{cases} \delta_{h,n_p} \mathbf{x}_{i,n_p} & , \quad i = v \\ \delta_{h,n_p} \odot \mathbf{x}_{i,n_p} & , \quad i \in \{h, t\} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,n_p}(1, :) \\ \mathbf{x}_{i,n_p}(2 : s+1, :) \\ \mathbf{x}_{i,n_p}(s+2, :) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{i,n_p} \in \mathbb{R}^{(s+2) \times s}} \delta_{h,n_p} & , \quad i = LS - SVM \end{cases} \quad (3.25) \\
& \frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{hi}} \Big|_{n_p} = \delta_{h,n_p}^{kkt} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\mathbf{1}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = LS - SVM \text{ ve } \vec{\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x}_{i,n_p} = \begin{cases} \mathbf{v}_{n_p}^T & , i = v \\ \mathbf{h}_{n_p-1} & , i = h \\ \mathbf{LS-SVM}_{n_p-1}(2 : s+1) & , i = t \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{ht}^T \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{ht}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_{ht}^T, \text{nin } s+2 \text{ defa tekrarı}} \odot \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\Phi_{n_p-1}(2 : s+1, :)}_{\in \mathbb{R}^{s \times (s+1)}} \mid \underbrace{\delta \mathbf{LS-SVM}_{\sigma, n_p-1}}_{\in \mathbb{R}^{s \times 1}} \end{bmatrix}^T}_{\in \mathbb{R}^{(s+2) \times s}} & , i = LS - SVM \end{cases} \\
& \delta \mathbf{LS-SVM}_{\sigma, n_p-1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \alpha_i K_{1i, n_p-1} \frac{(h_{1, n_p-1} - h_{i, n_p-1})^2}{\sigma^3} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^s \alpha_i K_{si, n_p-1} \frac{(h_{s, n_p-1} - h_{i, n_p-1})^2}{\sigma^3} \end{bmatrix}_{s \times 1} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Grdayanın genelleştirilmiş ifadesi: Denklem (3.15), (3.16), (3.21), (3.25) ve (3.26)'ü göz önünde bulundurarak, n anındaki ağırlık gradyanı $\frac{\partial L_{toplaml}}{\partial \mathbf{W}_{ji}}$ 'nin genelleştirilmiş

ifadesi her bir n_p anından gelen katkının toplanmasıyla elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} &= \sum_{n_p=n-\eta+1}^n \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \Big|_{n_p} \\
&= \sum_{n_p=n-\eta+1}^n \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{\hat{y},n_p} \odot \vec{\mathbf{1}} & , \quad j = \hat{y}, i = b \\ & \text{ve } \vec{\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^Q \\ \delta_{\hat{y},n_p} (\mathbf{h}_{n_p})^T & , \quad j = \hat{y}, i = h \\ \xi_{h,n_p} \odot \left(\mathbf{h}_{n_p} \odot \left(\vec{\mathbf{1}} \oslash \mathbf{W}_{h\sigma}^{(2)} \right) \odot \left(\mathbf{h}'_{n_p} - \mathbf{W}_{h\mu} \right) \right) & , \quad j = h, i = \mu \\ \xi_{h,n_p} \odot \left(\mathbf{h}_{n_p} \odot \left(\mathbf{h}'_{n_p} - \mathbf{W}_{h\mu} \right)^{(2)} \odot \left(\vec{\mathbf{1}} \oslash \mathbf{W}_{h\sigma}^{(3)} \right) \right) & , \quad j = h, i = \sigma \\ \delta_{h,n_p} \chi_{i,n_p} & , \quad j = h, i = v \\ \delta_{h,n_p} \odot \chi_{i,n_p} & , \quad j = h, i \in \{h, t\} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \chi_{i,n_p}(1, :) \\ \chi_{i,n_p}(2 : s+1, :) \\ \chi_{i,n_p}(s+2, :) \end{bmatrix}}_{\chi_{i,n_p} \in \mathbb{R}^{(s+2) \times s}} \delta_{h,n_p} & , \quad j = h, \\ & i = LS - SVM \end{array} \right. \\
\frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} &= \sum_{n_p=n-\eta+1}^n \frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{ji}} \Big|_{n_p} \\
&= \sum_{n_p=n-\eta+1}^n \delta_{h,n_p}^{kkt} \begin{bmatrix} 0 \\ -\vec{\mathbf{1}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = h, i = LS - SVM \text{ ve } \vec{\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^s
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Denklem (3.27)'yi kullanarak ağırlık gradyanları $\frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{ji}}$ ve $\frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{ji}}$ elde edildiğinde, ağırlıkları gradyan azalan yönünde güncellemek için bu terimler (3.19)'daki ilgili gradyan terimleri ile yer değiştirilir. Dikkat ediniz ki, öğrenme adımları $\mu_{kkt}^{rsvm} > 0$ ve $\mu_{ji}^{rsvm} > 0$, $j \in \{\hat{y}, h\}$, $i \in \{b, h, \mu, \sigma, v, t, LS - SVM\}$ bu çalışmada deneysel olarak uygun bir değere eşitlenir. Gelecek çalışmalarda, bunların uyarlamalı olanlarla değiştirilmesi planlanmaktadır. Ek olarak, RSVM modelinin iç kararlılığını sağlamak için, daha önceden Bölüm 3.4'te bahsedildiği üzere, kararlılık kısıtı $|\mathbf{W}_{hh}(i)| < 1$, $i = 1, \dots, s$, herhangi bir ihlale karşı (3.14)'te ifade edildiği gibi denetlenmektedir. Eğer güncellenmiş ağırlıkların herhangi bir ihlal yaptığı tespit edilirse ihlalde bulunanlar kararlı bölgeye çekilir. Diğer bir deyişle, IIR süzgecin kutupları birim çember içinde tutulur. Son olarak, öğrenme adımlı gradyan azalan ile RSVM model eğitimi sözde

kodlar ile Algoritma 3'te sunulmuştur. Dikkat ediniz ki algoritma, ileri ve geri sürüş diye iki ana kısımdan oluşmaktadır. İleri sürüşte, RSVM model dinamiklerinden zamanda bir adım ilerlemek ve tahmin hatalarını elde etmek için yararlanılır. Bunun peşi sıra, hatalar, ağırlıkları güncellemek adına hata deltalarını ve hata gradyanını elde etmek için zamanda geri yayılır. Buna geri sürüş denir.



Algoritma 3 Bir algoritma olarak, kırpılmış BPTT yöntemi-RSVM modelinin eğitimi.

% İlk değer atama:

RSVM model ağırlıkları $\mathbf{W}_{ji}$, $j \in \{\hat{y}, h\}$ ve $i \in \{b, h, \mu, \sigma, v, t, LS - SVM\}$;

RSVM modeli gizli öznitelikleri $\mathbf{h}$;

Öğrenme adımları μ_{kkt}^{rsvm} ve μ_{ji}^{rsvm} için uygun pozitif bir ilk değer atanması, $j \in \{\hat{y}, h\}$, $i \in \{b, h, \mu, \sigma, v, t, LS - SVM\}$;

sürece veri_akışı==doğru yap

% Her bir veri örneği sonrası gradyan hesabı ve ağırlık güncellemesi yapılır

Altta yatan sistemden şu anki veri örneğini al ($\mathbf{v}_n, \mathbf{y}_n$); **% n: şu anki zaman indisi**

% İLERİ SÜRÜŞ

Denklem (3.16)'daki kestirim hatası ϵ_n ve ϵ_n^{kkt} 'yi elde etmek için (3.9)'daki RSVM model dinamiklerini kullanarak ileri sürüşü gerçekleştir;

% GERİ SÜRÜŞ

için $n_p = n : -1 : n - \eta + 1$ yap

Denklem (3.20)'yi kullanarak çıktı katmanı için hata delta'ları $\delta_{\hat{y}, n_p}$ ve $\delta_{\hat{y}, n_p}^{kkt}$ 'yi hesapla;

Denklem (3.21)'i kullanarak çıktı katmanı ağırlık ve sapma gradyanına n_p anından olan katkıyı, $\left. \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{\hat{y}i}} \right|_{n_p}$, $i \in \{b, h\}$, hesapla;

Denklem (3.22)'yi kullanarak gizli katman aktivasyonu için hata delta'sı ξ_{h, n_p} 'yi hesapla;

Denklem (3.23)'ü kullanarak gizli katmana olan ağ girdisi için hata delta'ları δ_{h, n_p} ve δ_{h, n_p}^{kkt} 'yi hesapla;

Denklem (3.24)'ü kullanarak gizli katman aktivasyon fonksiyonu ağırlıklarına n_p anından olan katkıyı, $\left. \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{hi}} \right|_{n_p}$, $i \in \{\mu, \sigma\}$, hesapla;

Denklem (3.25) ve (3.26)'yı kullanarak gizli katman ağırlık gradyanlarına n_p anından olan katkılar $\left. \frac{\partial L_{toplaml}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{hLS-SVM}} \right|_{n_p}$ ve $\left. \frac{\partial L_{toplaml}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{hi}} \right|_{n_p}$, $i \in \{v, h, t, LS-SVM\}$ 'yi hesapla;

bitir

% η boyutlu zaman penceresindeki her bir n_p zaman indisinden ağırlık

% gradyanlarına olan katkı elde edilir, bunlar toplanır ve asıl gradyanlar hesaplanır

Denklem (3.27)'yi kullanıp her bir n_p anından olan katkıyı toplayarak asıl ağırlık gradyanları $\frac{\partial L_{total}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{hLS-SVM}}$ ve $\frac{\partial L_{total}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{ji}}$, $j \in \{\hat{y}, h\}$, $i \in \{b, h, \mu, \sigma, v, t, LS - SVM\}$ 'yi hesapla;

% AĞIRLIK GÜNCELLEMESİ

Ağırlık gradyanları $\frac{\partial L_{total}^{kkt}}{\partial \mathbf{W}_{hLS-SVM}}$ ve $\frac{\partial L_{total}^{\hat{y}}}{\partial \mathbf{W}_{ji}}$ 'yi (3.19)'da yerine koy ve ağırlıkları güncelle;

% RSVM modelinin iç kararlılığı

Kararlılık kısıtı $|\mathbf{W}_{hh}(i)| < 1$, $i = 1, \dots, s$ 'i (3.14)'te gösterildiği gibi herhangi bir ihlale karşı denetle, ihlal var ise bu ihlali yapanları kararlılık bölgesine çek;

bitir

4. QUADROTOR MATEMATİKSEL MODELİ

Bu çalışmada odak noktasındaki sistem quadrotor olduğundan dolayı, bozucu etki gözetleyicimizin dinamikleri quadrotor matematiksel modeli üzerine temellenir. Bu yüzden, önerilen bozucu etki gözetleyiciyi açıklamak için önce, quadrotor dinamikleri kısaca tanıtılmalıdır. Tez çalışmasında baz alından quadrotor, Ascending Technologies (<http://www.asctec.de/>) firmasının ürettiği Hummingbird modelidir (bkz. Şekil 4.1). Hummingbird için itki sistemi dört adet elektrik motoru ve itici olarak bunlara bağlı pervaneden oluşmaktadır. Lipo (lityum-polimer) pille çalışmaktadır. Üzerinde firmanın ürettiği uçuş kontrol kartı bulunmaktadır. Bu kartta alçak seviye (low level) ve yüksek seviye (high level) olmak üzere iki adet mikroişlemci bulunmaktadır. Alçak seviye işlemci tüm duyarga (sensor) haberleşmesi, kendi içine gömülü olan otomatik kontrol algoritması ile uygun kontrol girdilerinin hesaplanması, bunların motorları süren ESC (electronic speed controller) birimlerine iletilmesi ve yüksek seviye işlemciyle haberleşme gibi temel işlemleri halletmektedir. Alçak seviye işlemcinin içindeki koda herhangi bir şekilde müdahale edilemez. Yüksek seviye işlemcide ise alçak seviye işlemciyle haberleşmeyi yapan ve kullanıcının kendi kontrol algoritmasını yazmasına izin veren bir kod çatısı mevcuttur. Sadece yüksek seviye işlemciye kod yazılabilmektedir. Uzaktan kumandada belirlenmiş bir kanal ile kullanıcı kendi kontrol algoritmasını çalıştırırken dilediği anda quadrotorun içinde alçak seviye işlemcide gömülü olan kontrol algoritması devreye girebilmektedir. Bu sayede, kullanıcı kendi algoritmasını geliştirirken, denemeler esnasında bir şeyler ters giderse quadrotor kendini emniyetli uçuş algoritmasının çalıştığı kipe olarak kazalardan korunabilmektedir. Bu özellikleriyle, Hummingbird, eğitim ve araştırma için uygun bir quadrotor modelidir. Quadrotorlarda kontrol girdisi elektrik motorlarının dakikadaki devir sayısıdır (revolution per minute-rpm). Bu bilgi, kontrol algoritması tarafından hesaplandıktan sonra, ESC birimine gönderildiğinde, bu birim, rpm değerini elektrikli motor için uygun PWM (pulse width modulation) değerine dönüştürüp motoru sürer. Her bir motor için bir tane ESC mevcuttur. Quadrotordaki

motorların istenilen hızlarda dönmeleri sağlanarak istenilen şekilde çizgisel ve açısal konum değişikliği ve rota takibi yapması sağlanmaktadır. Motor hızlarıyla quadrotorun çizgisel ve açısal konum ve hızları arasındaki ilişki, takip eden alt başlıklarda, quadrotorun matematiksel modeli üzerinden anlatılmaktadır.



Şekil 4.1: Ascending Technologies Hummingbird modeli quadrotor.

4.1 Kordinat Çerçeveleri and Dönme Matrisleri

Quadrotor konumunu üç boyutlu uzayda ifade etmek için, önce ilgili kordinat çerçevelerinin (coordinate frames) tanımını vermeliyiz (Beard, 2008). Bu çerçeveler Şekil 4.2’de çizdirilmiştir.

Ataletsel referans çerçevesi (inertial reference frame). Bu, sabit referans kordinat sistemidir. Bu ayrıca, belirlenmiş bir başlangıç konumunda (home location) orijini bulunan, dünya referans çerçevesi olarak da bilinir. Bu çalışmada, x ekseninin kuzeyi, y ekseninin batıyı ve z ekseninin yukarıyı, gökyüzünü gösterdiği bir sağ eli (right-handed) kordinat sistemi kullanmayı seçiyoruz (O_{ENU} sistemi - ENU ifadesi *East – North – Up* içindir). Sağ eli kordinat sistemlerinde, ilk eksenden (x) ikinci eksene (y) olan hareket saat yönünün tersine olacak şekilde ve üçüncü eksen (z) tarafından gösterilen yön sağ elin başparmağı tarafından gösterilen yön olacak şekilde sağ el kuralına uyulur. Üçüncü eksen ilk ikisine diktir (orthogonal).

Araç çerçevesi (vehicle frame). Bu, orijini quadrotorun ağırlık merkezinde olduğundan dolayı gezgin bir kordinat çerçevesidir. Quadrotor üç boyutlu uzayda

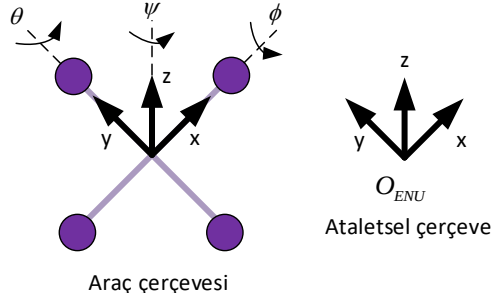
hareket ettiğinde araç çerçevesi onunla birlikte hareket eder. Dikkat ediniz ki araç çerçevesi ve ataletsel çerçeve hizalanmış durumdadır. Dolayısıyla, her iki çerçevenin karşılık gelen eksenleri birbirine paraleldir.

Araç-1 çerçevesi. Bu çerçeve, araç çerçevesinin z eksenine baktığı durumda, araç çerçevesinin z eksenine etrafında saat yönünün tersinde ψ kadar bir sapma (yaw) açısı yapıldıktan sonra elde edilir (yalpalama-roll- veya yunuslama-pitch- açısı yoktur).

Araç-2 çerçevesi. Bu çerçeve, araç-1 çerçevesinin y eksenine baktığı durumda, araç-1 çerçevesinin y eksenine etrafında saat yönünün tersinde θ kadar bir yunuslama açısı yapıldıktan sonra elde edilir (yalpalama veya sapma açısı yoktur).

Cisim çerçevesi (body frame). Bu çerçeve, araç-2 çerçevesinin x eksenine baktığı durumda, araç-2 çerçevesinin x eksenine etrafında saat yönünün tersinde ϕ kadar bir yalpalama açısı yapıldıktan sonra elde edilir (yunuslama veya sapma açısı yoktur).

Dikkat ediniz ki araç-1 ve araç-2 çerçeveleri, araç çerçevesinden cisim çerçevesine (ve tam tersi) dönüşüm matrisinin (transformation matrix) hesaplanmasında gerekli olduğu için, daha çok kuramsal bir anlama sahiptir. Asıl önemli olanlar ataletsel (araç çerçevesiyle hizalı) ve cisim çerçeveleridir.



Şekil 4.2: Quadrotor kordinat çerçeveleri. Her mor daire pervaneli bir elektrik motorunu gösterir.

Dönme matrisleri (Rotation matrices). Üç boyutlu uzayda $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ gibi bir noktamız olsun ve $\mathbf{p}_v \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{p}$ noktasının araç kordinat çerçevesindeki konum vektörünü göstere. $\mathbf{p}_v$ 'nin elemanları $\mathbf{p}$ noktasının araç çerçevesindeki kordinatlarıdır. Araç çerçevesini bu çerçevenin z eksenine etrafında sağ eli şekilde (saat yönünün tersinde) ψ kadar bir açıyla döndürdüğümüzde, $\mathbf{p}$ 'nin yeni (döndürülmüş) kordinat çerçevesindeki

kordinatlarını $\mathbf{p}_v$ 'yi ilgili dönme matrisiyle çarparak elde edebiliriz. Yeni çerçeve araç-1 çerçevesi olarak anıldığından ötürü, bu dönme matrisi araç çerçevesinden araç-1 çerçevesine dönmeyi temsil eder ve $\mathbf{R}_v^{v_1}(\psi) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ile gösterilir. $\mathbf{p}$ 'nin araç-1 çerçevesindeki kordinatları $\mathbf{p}_{v_1} \in \mathbb{R}^3$ ile gösterilsin. Şu şekilde hesap edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{v_1} &= \mathbf{R}_v^{v_1}(\psi) \mathbf{p}_v \\ \mathbf{R}_v^{v_1}(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Şimdi, araç-1 çerçevesini bu çerçevenin y eksenini etrafında θ kadar bir açıyla döndürelim. Bu, bizi araç-2 çerçevesine çıkaracaktır. $\mathbf{p}$ noktasının yeni kordinat çerçevesindeki kordinatlarını o noktanın araç-1 çerçevesindeki, $\mathbf{p}_{v_1}$ ile gösterilen, kordinatlarını araç-1 çerçevesinden araç-2 çerçevesine, $\mathbf{R}_{v_1}^{v_2}(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ile gösterilen, ilgili dönme matrisiyle çarparak elde edebiliriz. $\mathbf{p}$ 'nin araç-2 çerçevesindeki kordinatları $\mathbf{p}_{v_2} \in \mathbb{R}^3$ ile gösterilsin. Şu şekilde hesap edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{v_2} &= \mathbf{R}_{v_1}^{v_2}(\theta) \mathbf{p}_{v_1} \\ \mathbf{R}_{v_1}^{v_2}(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Son olarak, araç-2 çerçevesini bu çerçevenin x eksenini etrafında ϕ kadar bir açıyla döndürelim. Bu, bizi cisim çerçevesine çıkaracaktır. $\mathbf{p}$ noktasının yeni kordinat çerçevesindeki kordinatlarını o noktanın araç-2 çerçevesindeki, $\mathbf{p}_{v_2}$ ile gösterilen, kordinatlarını araç-2 çerçevesinden cisim çerçevesine, $\mathbf{R}_{v_2}^b(\phi) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ile gösterilen, ilgili dönme matrisiyle çarparak elde edebiliriz. $\mathbf{p}$ 'nin cisim çerçevesindeki kordinatları $\mathbf{p}_b \in \mathbb{R}^3$ ile gösterilsin. Şu şekilde hesap edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_b &= \mathbf{R}_{v_2}^b(\phi) \mathbf{p}_{v_2} \\ \mathbf{R}_{v_2}^b(\phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.1)-(4.3) denklemlerini birleştirerek ve Euler açılarını (ϕ, θ, ψ) kullanarak, araç çerçevesi kordinatlarını cisim çerçevesi için olanlara şu şekilde dönüştürebiliriz.

$$\mathbf{p}_b = \underbrace{\mathbf{R}_{v_2}^b(\phi) \mathbf{R}_{v_1}^{v_2}(\theta) \mathbf{R}_v^{v_1}(\psi)}_{\mathbf{R}_v^b(\phi, \theta, \psi)} \mathbf{p}_v \quad (4.4)$$

Denklem (4.4)'te, $\mathbf{R}_v^b(\phi, \theta, \psi)$ araç çerçevesinden cisim çerçevesine dönüşüm matrisi olarak anılır. Eğer cisim çerçevesinden araç çerçevesine dönüşümü elde etmek istiyorsak $\mathbf{R}_v^b(\phi, \theta, \psi)^{-1}$ matrisini hesaplamalıyız. Dikkat ediniz ki dönüşüm matrisleri diktir ve bir dönüşüm matrisinin tersi onun devrik dönüşümüne (transpose) eşit olacaktır. Bu sebeple, cisim çerçevesinden araç çerçevesine dönüşüm

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_v &= \underbrace{\mathbf{R}_b^v(\phi, \theta, \psi)}_{\mathbf{R}_v^b(\phi, \theta, \psi)^{-1}} \mathbf{p}_b \\ \mathbf{R}_v^b(\phi, \theta, \psi)^{-1} &= \mathbf{R}_v^b(\phi, \theta, \psi)^T \\ &= \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\theta)c(\psi) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & s(\phi)s(\theta)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ile verilir ki burada c , cosinüs fonksiyonunu gösterir ve s de sinüsü.

4.2 Kinematik Model ve Coriolis Denklemi

Kinematik Model. Ataletsel çerçevedeki quadrotor konum vektörüne $\mathbf{p}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ diyelim. Eğer $\mathbf{p}_i$ 'nin zamana göre türevi alınırsa ataletsel çerçevedeki hız vektörü elde edilir. Hatırlayınız ki, ataletsel çerçeve ve araç çerçevesi hizalıdır. Bu sebeple, bu hız vektörü araç çerçevesindekiyle özdeş olacaktır. Araç çerçevesinden cisim çerçevesine (ve tam tersi) dönüşümü bildiğimizden dolayı, cisim çerçevesindeki hız vektörüyle araç çerçevesindeki hız vektörü arasındaki ilişkiyi ifade edebiliriz. Cisim çerçevesinin x , y ve z eksenlerindeki hızlar sırasıyla u , v ve w olsun. O zaman, aşağıdaki ilişkiyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_b^v(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\theta)c(\psi) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & s(\phi)s(\theta)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Şimdi, açısal hızlar için geçerli olan durumu inceliyoruz. Cisim çerçevesinin x , y ve z eksenleri etrafındaki dönüş hızlarına sırasıyla p , q ve r diyelim. Hatırlayınız ki, ϕ , θ ve

ψ açıları araç-2, araç-1 ve araç çerçevesi gibi farklı çerçevelerde tanımlıdır. $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ ile $[p, q, r]^T$ arasındaki ilişkiyi elde ederken bunu göz önüne almamız gerekir. Bu ilişkiyi şu şekilde yazabiliriz. Bölüm. 4.1'den hatırlayınız ki önce, sapma açısı yapılır, sonra yunuslama ve en son, yalpalama açısı yapılır.

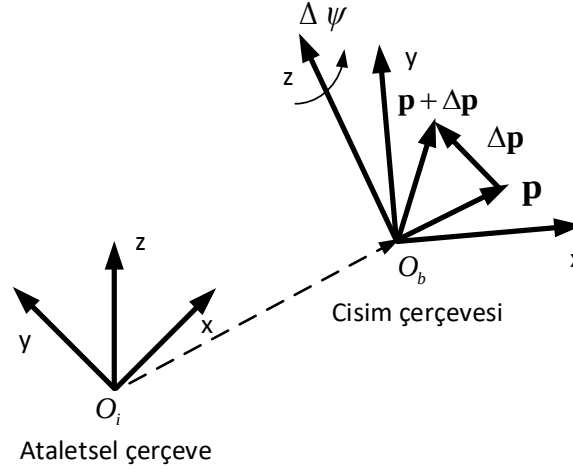
$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_{v_2}^b(\phi) \mathbf{R}_{v_1}^{v_2}(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{v_2}^b(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Tersini alarak şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_b^v \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_b^v &= \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi)\sec(\theta) & \cos(\phi)\sec(\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Coriolis denklemi. Quadrotorlar hem öteleme hem de dönme hareketi yaptıklarından ötürü, takip eden alt bölümde katı cisim dinamikleri türetilirken Coriolis etkisi dikkate alınmaktadır. O yüzden, Coriolis denkleminin kısaca tanımını vermemiz gerekmektedir (De Lellis Costa de Oliveira, 2011). Şekil 4.3'te, cisim çerçevesindeki öteleme ve dönme hareketleri gösterilmektedir.

Quadrotorun öteleme ve dönme hareketleri yaparak ataletsel çerçevenin orijini olan ve önceden tanımlı başlangıç noktası O_i 'den, şu anki cisim çerçevesinin orijini olan O_b konumuna gelmiş olduğunu düşünün. Hatırlayınız ki, cisim çerçevesi quadrotorla birlikte hareket eder ve quadrotor ağırlık merkezi cisim çerçevesinin orijini üzerindedir. Var sayalım ki, şimdi, Δt kadar bir süre içinde, quadrotor şu



Şekil 4.3: Coriolis etkisini göstermek için quadrotorun öteleme ve dönme hareketleri.

anki cisim çerçevesinde iki hareket gerçekleştiriyor; bir tanesi öteleme ve diğeri ise dönme hareketi. Bu ikisi eş zamanlı veya sırayla gerçekleştirilebilir. Öteleme hareketi quadrotor ağırlık merkezini cisim çerçevesinde yeni bir konuma taşır ve bu, konum vektörü $\mathbf{p}$ ile gösterilir. Dönme hareketi ise $\Delta\mathbf{p}$ ile gösterilen ek bir konum vektörü üretir. Sonuç konumu bu iki vektörün araç çerçevesinde $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ şeklinde toplanmasıyla elde edilir.

Quadrotorun araç çerçevesindeki hızını inceleyelim. Türevleme (differentiation) işlemi doğrusal olduğundan, süperpozisyon uygulayıp $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ şeklindeki sonuç konumunu $\mathbf{p}$ ve $\Delta\mathbf{p}$ olarak sırasıyla ötlemeyle ve dönmeyle alakalı kısımlara bölebiliriz. Öteleme kısmı için elimizde

$$\mathbf{V}_t = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (4.9)$$

vardır ki burada, $\mathbf{V}_t$ yalnız öteleme hareketinden kaynaklı hızı göstermektedir. Dönmeyle alakalı kısım için ise bir vektör döndürme formülünden bahsetmeliyiz. Bu nokta, Coriolis etkisinin matematiksel olarak açıklanacağı yerdir. Önce, belirtmeliyiz ki Bölüm 4.1’de verilen dönme matrisleri kordinat çerçevelerinin döndüğünü göz önüne alır. Bunları kullanarak, bir konum vektörünü farklı çerçevelerde temsil edebiliriz. Bu demektir ki konum vektörü değişmeden kalmaktadır ancak kordinat çerçevesi değişmektedir, diğer bir deyişle, dönmektedir. Bu dönme sağ eli bir şekilde

yapılmaktadır, yani, dönme eksenini bize baktığında koordinat çerçevesi saat yönünün tersinde döner. Halbuki, aynı işlem koordinat çerçevesini sabit tutup konum vektörünü sol eli bir şekilde döndürerek de yapılabilir, diğer bir deyişle, bu vektörü ilgili dönme eksenini etrafında, bu eksen bize baktığı durumda, saat yönünde çevirerek de yapılabilir. Bu bize aynı koordinatları verecektir. Böylece, bu iki işlem özdeş sonuçlar üretir. Hatırlayınız ki, Bölüm 4.1’de, koordinat çerçevelerinin dönmesiyle ilgili olan formül verilmişti. Aşağıda ise vektörlerin dönmesiyle alakalı formülü veriyoruz (Beard, 2008). Bu formüle göre, elimizde şu ifade vardır.

$$\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p} = (1 - \cos(-\Delta\psi))\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}) + \cos(-\Delta\psi)\mathbf{p} - \sin(-\Delta\psi)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{p} \quad (4.10)$$

Dikkat ediniz ki (4.10)’da, $\hat{\mathbf{k}} = [0, 0, 1]^T$ cisim çerçevesi z ekseninin birim vektörünü gösterir. Konum vektörü $\mathbf{p}$, cisim çerçevesi z eksenini etrafında $\Delta\psi$ kadar bir açıyla dönmektedir. Burada, z eksenini rastgele seçilmiştir. Coriolis etkisi herhangi bir eksen etrafında dönüşte geçerlidir. Bu dönme hareketinde quadrotor, cisim çerçevesinin z eksenini etrafında sağ eli bir şekilde dönmektedir. Bu sebeple, pozitif $\Delta\psi$ açısı, dönme eksenini (z eksenini) bize baktığı zaman saat yönünün tersinde tanımlıdır. Ancak, bu dönme, $\mathbf{p}$ vektörünün $-\Delta\psi$ gibi negatif bir açıyla dönmesi anlamına gelmektedir çünkü vektörün dönme formülünde pozitif açılar saat yönünde (sol eli) tanımlıdır. Bu, yukarıdaki denklemde $-\Delta\psi$ ’nin kullanılmasının nedenidir. Konumun türevini alıp hızı elde etmeyle ilgimiz olmasından ötürü, türev tanımı gereği, zaman aralığı Δt ’nin küçük değerlerini göz önüne almaktayız. Bu yüzden, (4.10)’da küçük açı varsayımı yapabiliriz ve sonra denklemi Δt ile bölebiliriz.

$$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta t}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{p} \quad (4.11)$$

Her iki tarafta limit alarak,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{p} \quad (4.12)$$

ve türev tanımıyla beraber cisim çerçevesi z eksenini etrafındaki açısal hızın $\omega_b = \frac{d\psi}{dt}\hat{\mathbf{k}}$ şeklindeki tanımından istifade ederek aşağıdaki türev denklemini elde ederiz. Bu bize

dönme hareketinin öteleme hareketi üzerine etkisinden kaynaklanan hız olan $\mathbf{V}_r$ 'yi verir.

$$\mathbf{V}_r = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \omega_b \times \mathbf{p} \quad (4.13)$$

Dikkat ediniz ki $\mathbf{V}_r$, dönmenin öteleme üzerine etkisini ifade eden Coriolis etkisidir. Denklem (4.9)'da gösterildiği gibi ötelemeden kaynaklı hızı ve (4.13)'te gösterilen Coriolis etkisini birleştirerek İHA'nın cisim çerçevesindeki asıl hızını

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_t + \mathbf{V}_r = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \omega_b \times \mathbf{p} \quad (4.14)$$

şeklinde elde ederiz ki bu bize Coriolis denklemini verir. Bu denklemi daha farklı bir gösterimle tekrar yazabiliriz.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \underbrace{\left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]}_{\mathbf{v}_t} + \underbrace{\omega_b \times \mathbf{p}}_{\mathbf{v}_r} \quad (4.15)$$

Burada, $\left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]$ terimi konum vektörünün herhangi bir dönme hareketi gözetilmeden alınan türevini gösterir. Bu sebeple, bu terim sadece ötelemeseldir. Ancak, dönme hareketinin hız vektörü üzerine bir etkisi olduğundan, bu terim tek başına hız vektörünü temsil edemez. Bu duruma işaret etmek için Coriolis denkleminde köşeli parantez gibi bir gösterim seçilmiştir. Bölüm 4.3'te, İHA'nın katı cisim dinamiklerini türetirken bu denklemden istifade edeceğiz.

4.3 Dinamik Model

Bu altbölümde, quadrotor İHA'nın katı cisim dinamiklerini türeteceğiz. Bölüm 4.2'nin Coriolis denkleminde istifade edeceğiz. Dinamik model, kuvvet-tork denklemleriyle ilgilidir. Öncelikle, kuvvet denklemini türetelim. Bölüm 4.2'den Hatırlayınız ki Şekil 4.3'teki konum vektörü $\mathbf{p}$ belli bir açısal hızla dönmektedir, buna ω_b diyelim, ve (4.15) bize Coriolis etkisini hesaba katan $\mathbf{v}$ hız vektörünü verir. Dikkat ediniz ki $\mathbf{p}$ konum vektörü üzerindeki Coriolis etkisi $\left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]$ üzerinde de geçerlidir. Çünkü, $\mathbf{p}$ ve $\left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]$ aynı yöndedir ve aynı açısal hızla dönmektedir. Fark edilmelidir ki cisim çerçevesinde ilgili duyargalar tarafından ölçülen doğrusal hızlar aslında $\left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]$

olacaktır. O yüzden, cisim çerçevesindeki hız vektörünü, $\mathbf{v}_b = \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]$ olduğunu gözeterek $\mathbf{v}_b$ ile temsil debiliriz. Denklem (4.15)'te $\mathbf{p}$ 'yi $\mathbf{v}_b$ ile yer değıştirdiğimizde, cisim çerçevesindeki ivmeyle ilgili olan Coriolis denklemini türetmiş oluruz.

$$\mathbf{a}_b = \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{v}_b}{dt} \right] + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b \quad (4.16)$$

Denklem (4.16)'yı quadrotor kütlesi m ile çarptığımızda ve quadrotora cisim çerçevesinde etki eden toplam kuvveti $\mathbf{f}_b$ ile gösterdiğimizde, kuvvet denklemini şu şekilde elde ederiz (Garcia ve diğ., 2005).

$$m\mathbf{a}_b = m \left(\frac{d\mathbf{v}_b}{dt} + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b \right) = \mathbf{f}_b \quad (4.17)$$

Cisim çerçevesindeki açısal ve doğrusal hızlar sırasıyla $\boldsymbol{\omega}_b = [p, q, r]^T$ ve $\mathbf{v}_b = [u, v, w]^T$ olsun. Öyleyse, $\mathbf{f}_b = [f_x, f_y, f_z]^T$ olmak üzere, cisim çerçevesinde elimizde şu ivme denklemi olur.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Dikkat ediniz ki (4.18)'deki, $\mathbf{f}_b$ 'nin bileşenleri olan f_x, f_y ve f_z , Bölüm 4.4'te açık hale getirilecektir. Şimdi, tork denklemini türetilim. Newton mekaniğinden biliriz ki

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_b \quad (4.19)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_m \boldsymbol{\omega}_b$$

ki burada, $\mathbf{I}_m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ quadrotorun atalet matrisidir, $\boldsymbol{\tau}_b \in \mathbb{R}^3$ quadrotora cisim çerçevesinde uygulanan toplam torktur ve $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^3$ ise quadrotorun açısal momentumudur. Coriolis denklemi (4.15)'te $\mathbf{p}$ 'yi $\mathbf{L}$ ile yer değıştirdiğimizde,

$$\boldsymbol{\tau}_b = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right] + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{L} \quad (4.20)$$

elde deriz. Dikkat ediniz ki quadrotorlar neredeyse simetrik bir geometriye sahiptir. Dolayısıyla, küçük asimetrleri ihmal ettiğimizde, atalet matrisi şu şekilde bir köşegensel matris olarak kabul edilebilir.

$$\mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Cisim çerçevesinin her bir eksenini etrafındaki torklar $\tau_b = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ olsun. Öyleyse, aşağıdaki tork denkleminin sahip oluruz.

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \quad (4.22)$$

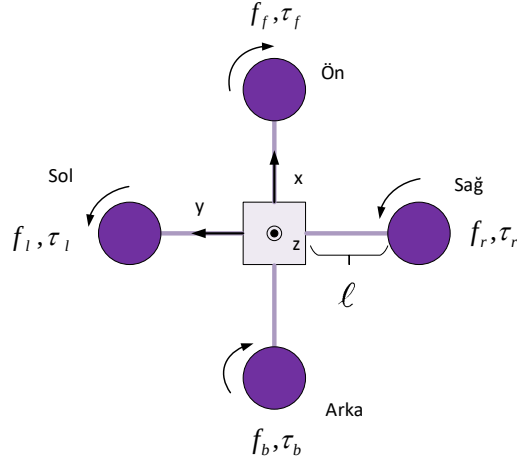
Bu denklemi tekrar yazdığımızda cisim çerçevesindeki açısal ivme denklemini şöyle elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} qr \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} pr \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} \tau_x \\ \frac{1}{I_y} \tau_y \\ \frac{1}{I_z} \tau_z \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Dikkat ediniz ki (4.23)'teki τ_x , τ_y ve τ_z Bölüm 4.4'te açık hale getirilecektir.

4.4 Kuvvetler ve Torklar

Şekil 4.4 quadrotorun cisim çerçevesinde üstten görünüşünü gösterir. Bu çerçevede, x eksenini her zaman ön tarafı gösterir, y eksenini sol tarafı ve z eksenini de yukarıyı gösterir. Üst görünüme baktığımız için z eksenini bize doğrudur. Quadrotor, kontrol birimini merkezinde bulundurur ve kontrol birimine ℓ metre uzaklıkta olan, üzerine pervane takılmış dört tane elektrik motoruna (mor daireler) sahiptir. Dikkat ediniz ki cisim çerçevesinin orijini quadrotorun ağırlık merkezidir ve ayrıca kare şekilli kontrol biriminin de merkezidir. Her bir motor kendisine bağlanan pervane sayesinde bir kaldırma kuvveti (f_f, f_l, f_r, f_b) ve tork ($\tau_f, \tau_l, \tau_r, \tau_b$) üretir. Belirtmeliyiz ki her bir kaldırma kuvveti pozitif z eksenini yönündedir. Quadrotora üstten baktığımızda kaldırma kuvvetleri bize doğru olacaktır. Şekil 4.4'ten görülmektedir ki sol ve sağ motorlar saat yönünün tersinde dönerken ön ve arka motorlar saat yönünde dönmektedir. Bu, motor torklarına ters şekilde yansır. Bu yüzden, sol ve sağ motorlar saat yönünde tork üretirken ön ve arka motorlar saat yönünün tersinde tork üretir. Bu demektir ki, örneğin, sol ve sağ motorların işleyişi quadrotor kütlelerini sağ tarafa doğru bir sapma açısı yapmaya zorlar. Şu ana kadar bahsi geçen torklar motor torku olarak adlandırılır. Halbuki, Bölüm 4.3'teki quadrotor dinamiklerinde gördüğümüz τ_x , τ_y ve τ_z torklarını açıklamamız gereklidir. Şimdi, bunların nasıl hesaplandığını göstereceğiz.



Şekil 4.4: Quadrotorun cisim çerçevesinde üstten görünüşü.

Ancak, önce, quadrotor dinamik modelinin kuvvetleri olan f_x , f_y ve f_z 'yi vermemiz gerekir.

Quadrotor üzerine etki eden iki temel kuvvet vardır. Bunlar quadrotor kütlesi (g yer çekim ivmesini göstermek üzere mg) ve itki kuvvetidir (f_t). İtki kuvveti motorların ürettiği kaldırma kuvvetlerinin toplamı şeklinde hesap edilir ve her zaman cisim çerçevesinin pozitif z eksen yönünde uzanır. Bu noktada, rüzgarın etkisini ihmal ediyoruz.

$$f_t = f_f + f_l + f_r + f_b \quad (4.24)$$

$$f_i = t_f \Omega_i^2, \quad i \in \{f, l, r, b\}$$

Denklem (4.24)'te, Ω_i , $i \in \{f, l, r, b\}$, sırasıyla ön, sol, sağ ve arka pervanelerin rpm birimi (dakikadaki devir sayısı - revolution per minute-rpm) cinsinden dönüş hızını gösterirken t_f ise itki etkenini (thrust factor) göstermektedir. Ayrıca, f_i , i indisli pervanenin ürettiği kaldırma kuvvetidir. Görüldüğü üzere, itki kuvveti, dönüş hızının karesi ve itki etkeniyle orantılıdır. Dikkat ediniz ki itki etkeni deneysel olarak belirlenebilir veya pervane üreticisinden sağlanabilir.

Ağırlık vektörü her zaman dünyanın merkezine doğru olduğundan ötürü, onun cisim çerçevesi eksenleri üzerindeki bileşenlerini bulmamız gerekir. Diğer bir deyişle, ağırlık vektörü ataletsel çerçevede tanımlıdır ve onu (4.18)'deki quadrotor

dinamik modeli (kuvvet denklemi) içersine dahil etmek için cisim çerçevesinde ifade edilmelidir. Bunu yapmak için (4.5)'te verilmiş olan dönüşüm matrisi $\mathbf{R}_v^b$ 'yi kullanacağız. Dikkat ediniz ki $\mathbf{R}_v^b = (\mathbf{R}_b^v)^T$ olmaktadır ve araç çerçevesi ile ataletsel çerçeve hizalıdır. $\hat{\mathbf{k}}$, cisim çerçevesinin z ekseninin birim vektörünü göstermek üzere, cisim çerçevesindeki kuvvetleri şöyle yazabiliriz.

$$\mathbf{f}_b = f_t \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{R}_v^b (-mg) \hat{\mathbf{k}} \quad (4.25)$$

Denklem (4.25)'in $\mathbf{f}_b$ terimini kuvvet denklemi (4.18) içinde yerine yazdığımızda, cisim çerçevesindeki şu dinamikleri elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} g \sin(\theta) \\ -g \sin(\phi) \cos(\theta) \\ -g \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_b} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_t \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Şimdi, kontrol torkları olan τ_x , τ_y and τ_z 'yi hesaplayalım. 'Kontrol torku' ifadesi bunlar için uygundur çünkü bunlar quadrotor Euler açılarını değiştirir (manipulation) ve ayrıca quadrotorun ötleme hareketi üzerine de etki eder. Bu sebeple, quadrotorun hem doğrusal hem de açısal konumu bu torklar aracılığıyla kontrol edilir. Motor torkları τ_f , τ_l , τ_r ve τ_b 'den bu yönleriyle ayırdırılır. Yalpalama torku τ_x , yunuslama torku τ_y ve sapma torku τ_z şu şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} \tau_x &= \ell(f_l - f_r) \\ \tau_y &= \ell(f_b - f_f) \\ \tau_z &= \tau_f + \tau_b - (\tau_l + \tau_r) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Dikkat ediniz ki sapma torku, aşağıdaki gibi hesaplanan motor torklarına bağlıdır.

$$\tau_i = d_f \Omega_i^2, \quad i \in \{f, l, r, b\} \quad (4.28)$$

Denklem (4.28)'de, d_f sürüklenme etkenini (drag factor) göstermektedir. Bu, deneysel olarak belirlenebilir veya pervane üreticisinden temin edilebilir. Pervaneler döndüğünde, hava sürüklemesinden (air drag) dolayı dönme yönüne ters bir tork üretir. Bu noktada, jiroskopik (gyroscopic) etkileri ve rüzgar etkisini ihmal ediyoruz. Dikkat

ediniz ki kontrol torklarının tanımı Şekil 4.2 'de verilmiş olan pozitif Euler açılarının tanımıyla uyumludur. Kontrol torkları τ_x , τ_y ve τ_z , araç çerçevesindeki quadrotor dinamik modelinin ivme denklemi (4.23) içinde yerine yazılır.

4.5 Durum Uzay Modeli

Bu, quadrotora dair sonuçta elde edilecek olan matematiksel modeldir. Denklem (4.8)'deki kinematik model ile (4.23) ve (4.26)'daki dinamik modeli bir durum uzay biçiminde birleştireceğiz. Bu çalışmanın geri kalanındaki bozucu etki gözetleyici ve kontrolcü bu durum uzay modelini göz önünde bulunduracaktır. Dikkat ediniz ki dinamik model araç çerçevesinde tanımlı iken kinematik model ataletsel çerçevede tanımlıdır. Bu yüzden, öncelikle dinamik modeli dönüştürmeli ve onu ataletsel çerçevede yazmamız gerekir. Denklem (4.26)'yı ele aldığımızda, eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim (vektör) Coriolis etkisinden gelir ve biz buna Coriolis terimi deriz. Bu aslında, (4.17) ve (4.18)'den görüldüğü üzere, $\omega_b \times \mathbf{v}_b$ olmaktadır. Diğer terimler hep birlikte $\mathbf{f}_b$ 'yi (quadrotora araç çerçevesinde uygulanan toplam kuvveti) temsil etmektedir. Belirtilmesi gereken önemli bir noktadır ki Coriolis etkisi sadece araç çerçevesinde geçerlidir. Çünkü, ataletsel çerçevede, quadrotorun mutlak konum vektörü hakkında konuşuruz ki bu, Şekil 4.3'de O_i and O_b arasındaki doğru olarak gözüktür. Bu sebeple, (4.26)'yı ataletsel çerçevede yazdığımız zaman, Coriolis etkisi ortadan kaybolur ve sadece $\mathbf{f}_b$ dönüştürülür. Bunun için (4.5)'te verilen dönüşüm matrisi $\mathbf{R}_b^v$ 'yi kullanırız. Denklem (4.26)'da eşitliğin sol tarafındaki ivme vektörünü $\mathbf{R}_b^v$ ile çarptığımızda mutlak ivme vektörünü elde ederiz ki bu, Bölüm 4.2'de tanımlanmış ve (4.6)'da kullanılmış olan mutlak konum vektörü $[x_i, y_i, z_i]^T$ 'nin ikinci türevidir. Ataletsel çerçevedeki ivme denklemi şöyledir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_b^v[\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}]^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \frac{f_t}{m} \begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_i = \mathbf{R}_b^v \mathbf{f}_b} \quad (4.29)$$

Denklem (4.29)'da, $\mathbf{f}_i$ quadrotora ataletsel çerçevede uygulanan toplam kuvvettir.

Dikkat ediniz ki (4.26)'daki Coriolis terimi ataletsel çerçevede yok olduğundan (4.29)'da yer almaz.

Açısal ivme denklemi (4.23) için küçük açı varsayımında bulunabiliriz ve şu eşitliği devreye sokabiliriz (Sabatino, 2015).

$$[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T = [p, q, r]^T \quad (4.30)$$

Bu, Bölüm 4.2'deki (4.8) ile çelişiyor gibi gözükebilir. Ancak, yalpalama açısı ϕ ve yunuslama açısı θ küçük olduğunda $\mathbf{T}_b^v$, birim matrise yakınsar ve $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \cong [p, q, r]^T$ eşitliğini elde ederiz. Bölüm 7'deki benzetim sonuçlarından gözükmektedir ki yalpalama ve yunuslama açıları quadrotor uçuştayken çoğunlukla yüksek değerlere sahip olmaz. Bu bizim küçük açı varsayımımızı destekler. Bu varsayım ile, (4.23)'te cisim çerçevesinde verilmiş olan açısal dinamikler, $[\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}]^T = [\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^T$ olduğu gözetilerek ataletsel çerçevede de kullanılabilir. Bundan sonra, ataletsel çerçevedeki açısal ivme denklemini şu şekilde elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} \tau_x \\ \frac{1}{I_y} \tau_y \\ \frac{1}{I_z} \tau_z \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Artık, hem kinematik hem de dinamik denklemlere ataletsel çerçevede tanımlanmış halde sahibiz. Durum uzay modelimizde, quadrotor konumuna etkisi olmalarından ötürü, pervaneler tarafından üretilen itki kuvveti f_t ile yalpalama, yunuslama ve sapma torkları τ_x , τ_y ve τ_z 'yi kontrol girdileri olarak tanımlayacağız.

Sonuç durum uzay modeli. Şimdi, (4.8)'deki kinematik model ile (4.29) ve (4.31)'deki dinamik modeli bir durum uzay biçiminde birleştireceğiz. Denklemlerin hepsi ataletsel çerçevede yazılmıştır. Denklem (4.32)'de verilen şekilde bir durum vektörü tanımlayacağız. Dikkat ediniz ki bu durum vektörü, araç çerçevesinde ölçülmüş olan açısal hızlar p , q ve r 'yi içerecektir ve (4.30)'da yaptığımız $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T = [p, q, r]^T$ varsayımından istifade edeceğiz. Bundan başka, durum vektörü, araç çerçevesinde ölçülmüş olan doğrusal hızlar u , v ve w 'yi içermeyecektir. Bu sebeple,

kinematik denklem (4.6)'yı durum uzay modeline dahil etmeye ihtiyacımız yoktur.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T \\ &= [x_i, y_i, z_i, \phi, \theta, \psi, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, p, q, r]^T\end{aligned}\quad (4.32)$$

Kontrol girdi vektörümüz $\mathbf{u}$ şöyle olacaktır

$$\mathbf{u} = [f_t, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T \quad (4.33)$$

ki burada, f_t , (4.24)'te tanımlanmıştır ve kontrol torkları τ_x , τ_y ve τ_z ise Bölüm 4.4 içindeki (4.27) ve (4.28)'de tanımlanmıştır. Quadrotorun durum uzay modelini şöyle yazarız (Sabatino, 2015). Dikkat ediniz ki u_i , $\mathbf{u}$ 'nın i indisli elemanını göstermektedir.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \quad (4.34)$$

ki burada

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} + x_{11}\sin(x_4)\tan(x_5) + x_{12}\cos(x_4)\tan(x_5) \\ x_{11}\cos(x_4) - x_{12}\sin(x_4) \\ x_{11}\sin(x_4)\sec(x_5) + x_{12}\cos(x_4)\sec(x_5) \\ 0 \\ 0 \\ -g \\ \frac{I_y - I_z}{I_x}x_{11}x_{12} \\ \frac{I_z - I_x}{I_y}x_{10}x_{12} \\ \frac{I_x - I_y}{I_z}x_{10}x_{11} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

olmakla beraber

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, g_1^7, g_1^8, g_1^9, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) &= \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{I_x}, 0, 0\right]^T \\ \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) &= \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{I_y}, 0\right]^T \\ \mathbf{g}_4(\mathbf{x}) &= \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{I_z}\right]^T\end{aligned}\quad (4.36)$$

ve

$$\begin{aligned} g_1^7 &= \frac{1}{m} (\cos(x_4) \sin(x_5) \cos(x_6) + \sin(x_4) \sin(x_6)) \\ g_1^8 &= \frac{1}{m} (\cos(x_4) \sin(x_5) \sin(x_6) - \sin(x_4) \cos(x_6)) \\ g_1^9 &= \frac{1}{m} (\cos(x_4) \cos(x_5)) \end{aligned} \quad (4.37)$$

olmaktadır. Sistem çıktısını $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^Q$ ile gösterelim. Bu çalışmada, durum vektöründeki ilk altı durumu sistem çıktısı olarak ele alırız. Bu sebeple, $\mathbf{y} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$ ve $Q = 6$ olmaktadır. Diğer bir deyişle, (4.32)'yi göz önünde bulundurunca, $\mathbf{y} = [x_i, y_i, z_i, \phi, \theta, \psi]^T$ olmaktadır. Bu gerçek göz önünde bulundurularak çıktı denklemini şu şekilde verebiliriz.

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.38)$$

ve burada

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_{6 \times 6} \mid \vec{\mathbf{0}}_{6 \times 6}] \in \mathbb{R}^{6 \times 12} \quad (4.39)$$

olmaktadır. Denklem (4.39)'da, $\mathbf{I}_{6 \times 6}$, belirtilen boyutlardaki bir birim matrisi ve $\vec{\mathbf{0}}_{6 \times 6}$ ise belirtilen boyutlarda bir sıfır matrisini göstermektedir. Denklem (4.32)-(4.39) tarafından verilen durum uzay modelinin gözetlenebilirliği ve kontrol edilebilirliği Bölüm 4.6'da verilecektir. Son olarak, kontrol girdileriyle pervanelerin dönüş hızlarını ($\Omega_i, i \in \{f, l, r, b\}$) ilişkilendiren bir matematiksel ifade vardır. Bu ifadeyi elde etmek için, önce, (4.24), (4.27) ve (4.28)'i kullanarak kontrol girdilerini ve pervane devir sayılarını vektör-matris biçiminde yazarız.

$$\begin{bmatrix} f_t \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_f & t_f & t_f & t_f \\ 0 & t_f l & -t_f l & 0 \\ -t_f l & 0 & 0 & t_f l \\ d_f & -d_f & -d_f & d_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_f^2 \\ \Omega_l^2 \\ \Omega_r^2 \\ \Omega_b^2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Dikkat ediniz ki, quadrotorun otonom uçuşunda, görevlendirilen kontrolcü kontrol girdileri f_t, τ_x, τ_y ve τ_z 'yi üretecektir. Bu sebeple, (4.40)'ın tersini alarak, ilgili kontrol girdilerini (itki kuvvetini ve kontrol torklarını) verecek pervane dönüş hızlarını elde

edebiliriz.

$$\begin{bmatrix} \Omega_f^2 \\ \Omega_l^2 \\ \Omega_r^2 \\ \Omega_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4t_f} & 0 & -\frac{1}{2t_f l} & -\frac{1}{4d_f} \\ -\frac{1}{4t_f} & \frac{1}{2t_f l} & 0 & -\frac{1}{4d_f} \\ \frac{1}{4t_f} & \frac{1}{2t_f l} & 0 & \frac{1}{4d_f} \\ -\frac{1}{4t_f} & 0 & -\frac{1}{2t_f l} & \frac{1}{4d_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_t \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Pervane dönüş hızları sisteme verilen fiziksel kontrol girdileridir. Quadrotorun kontrol birimi bu veriyi ESC'lere gönderir ve ESC'ler de elektrik motorlarını (4.41) ile edilmiş olan dönüş hızlarında sürer.

4.6 Gözetlenebilirlik ve Kontrol Edilebilirlik

Şimdi, durum uzay modelimizin gözetlenebilirliği ve kontrol edilebilirliğini inceleyeceğiz. Öncelikle, $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, $\bar{\mathbf{u}} = [mg, 0, 0, 0]^T$ gibi bir denge noktası etrafında doğrusallaştırılmış bir modele ihtiyacımız var. Önceden yapmış olduğumuz küçük açı varsayımına göre, $\sin(\phi) \cong \phi$ ve $\cos(\phi) = 1$ olacaktır, ϕ burada sadece örnek amaçlı seçilmiştir ve bu varsayım bütün Euler açıları için geçerlidir. Denklem (4.32)-(4.39) ile verilen durum uzay modeli gözetilerek şu doğrusallaştırılmış modele sahip oluruz.

Doğrusallaştırılmış model.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \quad (4.42)$$

ki burada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$ ve $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$ olmaktadır. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri

şu şekilde elde edilir.

$$\mathbf{A} = \frac{\partial (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

ve

$$\mathbf{B} = \frac{\partial (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i)}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Gözetlenebilirlik. Denklem (4.42)'deki gibi bir doğrusal, sürekli zamanlı sistem için gözetlenebilirlik matrisi (Ogata, 2001) şu şekilde elde edilir.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\Pi} \end{bmatrix} \in \Re^{72 \times 12} \quad (4.45)$$

Denklem (4.39)'daki $\mathbf{C}$ 'yi ve (4.43)'teki $\mathbf{A}$ 'yı (4.45)'te yerine yazdığımızda gözetlenebilirlik matrisi $\mathcal{O}$ 'yu elde ederiz ki bu matris tam ranktır (12: durum sayısı). Dolayısıyla, quadrotor için oluşturduğumuz durum uzay modeli gözetlenebilirdir.

Kontrol edilebilirlik. Denklem (4.42)'deki gibi bir doğrusal, sürekli zamanlı sistem için kontrol edilebilirlik matrisi (Ogata, 2001) şu şekilde elde edilir.

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{11}\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{12 \times 48} \quad (4.46)$$

Denklem (4.43)'teki $\mathbf{A}$ 'yı ve (4.44)'teki $\mathbf{B}$ 'yi (4.46)'da yerine yazdığımızda kontrol edilebilirlik matrisi $\mathcal{C}$ 'yi elde ederiz ki bu matrisin rankı 8'dir. Tam rank 12 olduğundan 4 adet durum kontrol edilemiyor gözüküyor. Yine de, bu bir sıkıntı yaratmayacaktır. Çünkü, Bölüm 6.1'den görüleceği üzere, bu zorluğun üstesinden bir çözüm ile gelinecek ve quadrotor başarıyla kontrol edilebilecektir.

5. ÖNERİLEN RSVM BOZUCU ETKİ GÖZETLEYİCİ

Bu Bölüm, önerilen RSVM modelinin bozucu etki kestirimi için nasıl kullanıldığının ve onun standart bir SMO ile iş birliği içinde nasıl bir bozucu etki gözetleyiciye dönüştüğünün ayrıntılarını kapsamaktadır. Önce, quadrotor matematiksel modeli, problem tanımı ve ön bilgiler okuyucuya açık hale getirilecektir. Sonra, önerilen RSVM bozucu etki gözetleyicinin dinamikleri açıklanacaktır. Son olarak, bu gözetleyicide çalıştırılan RSVM modelinin ağırlık güncellemesi için Euler ayrıklaştırması temelli BPTT denklemleri verilecektir.

5.1 Problem Tanımı ve Temel Bilgiler

Bu altbölüm kısaca gürbüz durum gözetleme işlevine dair yaklaşımın nasıl ele alındığını anlatır. Öncelikle, belirtmeliyiz ki, önerilen RSVM modeli quadrotoru etkileyen bozucu etkiyi kestirir. Standart bir SMO ise sadece sistem durumlarını kestirmek için gereklidir. Ancak, tüm quadrotor durumları uygun duyargalar aracılığıyla ölçülebilmektedir. Kişi, neden durum gözetleme için SMO kullanıldığını irdeleyebilir. Kestirilmiş durumları $\hat{\mathbf{x}}$ ile gösterelim. Örneğin, eğer durumların açık çevrim (open loop) gözetlenmesini gerçekleştirirsek; ki bu, durumların herhangi bir çıktı hatası geri bildirimi olmadan ve sadece quadrotor matematiksel modelinden istifade edilerek gözetlenmesi anlamına gelir; o zaman, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri (4.43) ve (4.44)'te verilmiş olmak üzere, (4.42)'deki doğrusallaştırılmış quadrotor modelini göz önünde bulundurarak şu hata dinamiklerine sahip olurduk.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}) - (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \quad (5.1)$$

Bir kişi rahatlıkla, durum geçiş (state transition) matrisi $\mathbf{A}$ 'nın tüm özdeğerlerinin sıfır olmasından ötürü, gözetleme hatası ($\tilde{\mathbf{x}}$) dinamiklerinin marjinal kararlı olduğunun farkına varabilir. Diğer bir deyişle, $\tilde{\mathbf{x}}$ sonsuza ıraksamayacaktır ancak, $\mathbf{A}$ matrisi Hurwitz olmadığı için, yani hata dinamikleri asimptotik kararlı olmadığı için, $\tilde{\mathbf{x}}$ 'nin sonlu sürede orijine yakınsaması da kesin bir şekilde sağlanamayacaktır. Bu sebeple,

gözetleyici dinamiklerine çıktı hatasının dahil edilmesi (output error injection) bir çözüm olarak karşımıza çıkar ve bizi çıktı geri bildirimi terimlerini içeren bir gözetleyiciyi kullanmaya yöneltir. Bu tez çalışmasında, SMO uygun bulunmuştur.

Bu altbölümde, quadrotor dinamiklerine dayanmak üzere, problem tanımı ve standart SMO verilecektir.

5.1.1 Problem Tanımı

Bu çalışmadaki problem tanımını yapmak için varsayımlarda bulunacağız.

Varsayım 5.1.1. *Parametrik belirsizliğe ve bozucu etkiye maruz kalan bir quadrotor bulunmaktadır. Bu durumda, quadrotorun dinamiklerine nominal sistem modeliyle sırasıyla parametrik belirsizlik ve dış bozucu etkiyi ifade eden terimlerin birleşimi hakim olacaktır.*

Denklem (4.32)-(4.39)'a dayanmak üzere, Varsayım 5.1.1'de bahsi geçen gibi bir quadrotor için sürekli zamanlı bir durum uzay modeli aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^4 (\mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t)) + \bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}(t)))u_i(t) + \mathbf{d}_{ext}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{5.2}$$

Denklem (5.2)'de, sistem fonksiyonları $\mathbf{f}$ and $\mathbf{g}$, girdiler u_i , $i = 1, \dots, 4$, çıktı vektörü $\mathbf{y}$ ve çıktı matrisi $\mathbf{C}$ (4.32)-(4.39)'da verilmiştir. Durum denkleminde sistem fonksiyonları için kullanılan farklı gösterimlere dikkat ediniz. $\mathbf{f}$ and $\mathbf{g}$, sistemin nominal modelindeki sistem fonksiyonlarını temsil etmektedir. Diğer taraftan, $\bar{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{12}$ ve $\bar{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{12}$ sistem modeli (5.2)'deki belirsizliği göstermektedir. Son olarak, $\mathbf{d}_{ext} \in \mathbb{R}^{12}$ sistem üzerindeki dış (external) bozucu etkiyi göstermektedir.

Parametrik belirsizliği iç (internal) bozucu etki olarak ele alırsak, $\mathbf{d}_{int} \in \mathbb{R}^{12}$, ve bu iç bozucu etkiyi dışarıdan olanla birleştirirsek, (5.2)'yi şu şekilde yeniden

yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t))u_i(t) + \mathbf{d}(t) \\
\mathbf{d}(t) &= \mathbf{d}_{int}(t) + \mathbf{d}_{ext}(t) \\
\mathbf{d}_{int}(t) &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^4 \bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}(t))u_i(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Denklem (5.3)'da, iç ve dış bozucu etkileri tek bir bozucu etki terimi altında topluyoruz, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{12}$. Dolayısıyla, bütün sistemi nominal model ile toplam bozucu etkinin birleşimi şeklinde yazmış oluyoruz.

Denklem (4.45)'teki gözetlenebilirlik matrisi tam ranka sahip olduğundan, durum uzay modelimiz (4.32)-(4.39) gözetlenebilirdir. Dolayısıyla, durumları kestirmek için uygun bir gözetleyici inşa edebiliriz. Dikkat ediniz ki, önceden bahsedildiği gibi, standart bir SMO bunun için görevlendirilecektir. Quadrotorun durumlarını gözetleyecek ve bozucu etkiyle ilgili yapacağı hiç bir şey olmayacaktır. Çünkü, önerilen RSVM modeli bozucu etkinin kestirimiyle ilgilenecektir.

Not 5.1.1. Kontrol torkları doğrudan Euler açılarını kontrol ederken diğer kontrol işareti olan itki kuvveti, x, y ve z eksenleri üzerindeki konumu eş zamanlı kontrol etmektedir. Eğer quadrotor sıfır Euler açılarına sahipse itki kuvveti doğrudan z eksenindeki konumu kontrol ediyor demektir. Oysaki, Euler açıları sıfır olmadığında, itki kuvvetinin z eksenine ek olarak x ve y eksenleri üzerinde de etkisi olur. Bu sebeple, kontrol torkları ve Euler açıları ($\tau_x \rightarrow \phi$, $\tau_y \rightarrow \theta$, $\tau_z \rightarrow \psi$) arasındaki gibi doğrudan bir eşleşmeyi z ekseni ile itki kuvveti arasında kuramayız. Bu, quadrotorun girdilerinin çıktılarından daha az olmasının bir sonucudur (4 girdi, 6 çıktı). Bu yüzden, quadrotor bir eksik tahrikli (underactuated) sistemdir (Fan ve diğ., 2017).

Buna dayanarak, problem tanımına dair ikinci varsayımımız şöyledir.

Varsayım 5.1.2. *Sıfırdan farklı bir dış bozucu etki ancak quadrotorun z eksenindeki konumuyla yalpalama, yunuslama ve sapma açılarına dair ivme denklemlerinde bulunur. Denklem (4.32) göz önünde bulundurulunca, bunlar, (4.32)-(4.39) ile*

verilen durum uzay modelindeki x_9, x_{10}, x_{11} ve x_{12} durumlarıyla ilgili olan durum denklemlerine karşılık gelmektedir.

Durum uzay modelinden hatırlayınız ki, $\dot{x}_1 = x_7, \dot{x}_2 = x_8$ ve $\dot{x}_3 = x_9$ 'dur. Euler açıları (x_4, x_5 ve x_6) küçük olduğunda, $\dot{x}_4 \cong x_{10}, \dot{x}_5 \cong x_{11}$ ve $\dot{x}_6 \cong x_{12}$ olacaktır. O yüzden, böyle bir durumda, $\dot{x}_{1,\dots,6} = x_{7,\dots,12}$ olduğunu yazabiliriz. Böyle bir tamamlayıcı biçim (companion form) için, genelde, bozucu etki terimi kendini $x_7, \dots, x_{12}$ durumlarıyla alakalı olan durum denklemlerinde gösterir (Shtessel ve diğ., 2014). Ancak, modelimiz için, x_7 ve x_8 'e karşılık gelen durum denklemlerinde, ki bunlar x ve y eksenlerindeki ivme denklemleridir, hiç bir bozucu etki olmadığını varsaymaktayız. Çünkü, quadrotorun x ve y eksenlerindeki konumu sırasıyla yunuslama ve yalpalama açılara bağlıdır. Esasında, (4.32)-(4.39)'dan görüldüğü üzere, matematiksel olarak tüm Euler açılarının x ve y eksenlerindeki konum üzerine etkisi vardır. Halbuki, küçük açı varsayımını düşündüğümüzde ve x_7 ile x_8 'e karşılık gelen durum denklemlerini incelediğimizde, görürüz ki yunuslama açısı (x_5) x eksenindeki konumu (x_1) belirler ve yalpalama açısı (x_4) ise y eksenindeki konumu (x_2) belirler. Bundan dolayı, x ve y eksenleri üzerindeki istenen (referans) konuma ulaşmak yalpalama ve yunuslama açıları için uygun birer istenen değer belirlemekle mümkün olur. Bu, Bölüm 6.1'de matematiksel olarak ifade edilecektir. Varsayım 5.1.2'ye dayanarak, bozucu etki terimi $\mathbf{d}$ aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\mathbf{d} = \left[\begin{array}{c} \vec{0}^T \\ 0 \quad 0 \quad d^z \quad d^\phi \quad d^\theta \quad d^\psi \end{array} \right]^T \in \mathbb{R}^{12}, \quad \vec{0} \in \mathbb{R}^6 \quad (5.4)$$

Bir kere $\mathbf{d}$ 'ye dair doğru bir kestirime sahip olduktan sonra düzgün bir bozucu etki gözetleyici oluşturulabilir. Önerilen RSVM bozucu etki gözetleyiciyi oluşturmak için, öncelikle standart quadrotor için tasarlanmış SMO'yu anlatmamız gerekir ve sonra, Euler ayrıklaştırmasını kullanarak aslen sürekli zamanlı bir sistem olan (5.3)'ün ayrıklaştırılmış hali elde edilecektir. Dikkat ediniz ki, ayrıklaştırma her bir örnekleme anında gözetlenen durumların değerlerini hesaplamak için gereklidir.

5.1.2 Quadrotor İçin Kayan Kipli Gözetleyici

İlk başta, tamamlayıcı biçimdeki doğrusal olmayan sistemler için SMO'nun genel formülünü vereceğiz. Sonra, bunun temelinde, quadrotor dinamik modelini göz önünde bulunduran SMO'yu sunacağız.

Genel formül. Dinamikleri diferansiyel denklem (5.5) tarafından ifade edilen, tamamlayıcı biçimdeki bir doğrusal olmayan sistemi düşünelim.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(d_x)} &= F(\mathbf{x}, u) \\ \mathbf{x} &= [x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(d_x-1)}]^T = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{d_x}]^T \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Denklem (5.5)'de, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_x}$ durum vektörünü, $u \in \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R}$ ise sırasıyla girdi ve çıktıyı göstermektedir. Dikkat ediniz ki, x_1 mümkün olan tek ölçümdür ve $F : \mathbb{R}^{d_x}, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d_x}$, ise sistem durumları ve girdinin doğrusal olmayan ve belirsiz bir fonksiyonudur. $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ivme denklemini temsil etmek üzere ve konum, sistemden elde edilen tek ölçüm olmak üzere, konum ve hız, sistem durumları x_1 ve x_2 olacak şekilde böyle bir sistem için ikinci dereceden bir örnek oluşturulabilir. Bu örnek, bizim quadrotor durum uzay modelimiz (4.32)-(4.39) ile alakalıdır. Kayan kipli gözetleyicinin ana fikri i) çıktı kestirim hatasının bir fonksiyonu olarak bir kayan yüzey (sliding surface) değişkeni (s_o) tanımlamak, ii) gözetleyici durum yörüngelerini kayan yüzey $s_o = 0$ 'a doğru sürmek (*ulaşma safhası - reaching phase*) ve iii) bir kere ulaşıncı, gözetleyici durum yörüngelerini bu yüzey üzerinde tutmak ve gözetleyici hata yörüngelerini ise bu yüzey boyunca orijine sürmektir (*kayma safhası - sliding phase*). Bu strateji üzerine temellendirilerek, şimdi SMO'yu formülize edeceğiz (Slotine ve diğ., 1986, Slotine ve diğ., 1987, Spurgeon, 2008). Denklem (5.5) ile verilen gibi bir sistem için, bir SMO

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -a_1 \tilde{x}_1 + \hat{x}_2 - k_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -a_2 \tilde{x}_1 + \hat{x}_3 - k_2 \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{d_x} &= -a_{d_x} \tilde{x}_1 + \hat{F} - k_{d_x} \text{sign}(\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (5.6)$$

denklemini ile tanımlanabilir ki burada, $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{d_x}$ gözetleyici tarafından kestirilen durumları göstermektedir, $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ durum kestirim hata vektörüdür ve $\hat{F}$ ise $F(\mathbf{x}, u, t)$ 'nin bir kestirimidir. Burada, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, d_x$, sabitleri durum kestirim hatasının asimptotik azalışından sorumludur ve bu sabitler, $k_i = 0$, $i = 1, \dots, d_x$, alınarak, doğrusallaştırılmış sistem denklemleri göz önünde bulundurup sanki bir Leunberger gözetleyiciye aittmiş gibi belirlenir. Sistem (5.5)'i doğrusallaştırdığımızda ve doğrusallaştırılmış sisteme dayanacak SMO dinamikleri (5.6)'yi yeniden yazdığımızda

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{F}} \quad (5.7)$$

denklemini elde ederiz ki burada,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d_x \times d_x}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times d_x} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{L} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{d_x}]^T \in \mathbb{R}^{d_x}, \quad \hat{\mathbf{F}} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \hat{F}]^T \in \mathbb{R}^{d_x}$$

olmaktadır. Doğrusallaştırılmış sistem için, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ olduğunu göz önüne alarak ve $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ olduğunu bildiğimiz için, doğrusallaştırılmış sistem ait gözetleyicinin hata dinamiklerini şöyle türetebiliriz.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{F} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.9)$$

ki burada,

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F} &= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \Delta F]^T \in \mathbb{R}^{d_x} \\ \Delta F &= \hat{F} - F \end{aligned} \quad (5.10)$$

olmaktadır. Eğer $\tilde{\mathbf{x}}$ 'nin sıfıra asimptotik şekilde azalmasını istiyorsak $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ matrisi Hurwitz olmalıdır, yani, bu matrisin tüm özdeğerleri negatif gerçekte kısımlara

sahip olmalıdır. Diğer bir deyişle, $\mathbf{I}$, d_x boyutlu bir birim matris olmak üzere,

$$|\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})| = \left| \lambda \mathbf{I} - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{d_x-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{d_x} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (5.11)$$

denklemini sağlayan kökler $(\lambda_i, i = 1, \dots, d_x)$ negatif gerçekte kısımlara sahip olmalıdır. Dikkat ediniz ki, $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ iken $\Delta F \rightarrow 0$ olduğundan dolayı, (5.9)'daki $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ matrisini incelemek yeterlidir. a_i 'lerin genliği ulaşma safhasında durum kestirim hatasının azalış hızını belirler.

Diğer taraftan, $k_i > 0, i = 1, \dots, d_x$, anahtarlama (switching) fonksiyonu için tasarım parametreleridir ki bunlar

$$\text{sign}(\tilde{x}_1) = \begin{cases} +1, & \tilde{x}_1 > 0 \\ 0, & \tilde{x}_1 = 0 \\ -1, & \tilde{x}_1 < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

gibi bir süreksiz davranış sergiler. Anahtarlama fonksiyonu, gözetleyici durum yörüngelerinin, bir kere ulaşıldıktan sonra, kayan yüzey $s_o = 0$ 'da kalmasını temin eder. Belirtmeliyiz ki anahtarlama fonksiyonu aynı zamanda durum kestirim hatasının asimptotik azalışını sağlama yetisine de sahiptir. Halbuki, gözetleyici dinamiklerine, (5.6)'deki a_i 'leri katarak sistem sönümlemesi (system damping) eklendiğinde gözetleyici durumlarının kayan yüzey $s_o = 0$ 'a sürüldüğü çekim bölgesi (region of attraction) arttırılmış olur (maximization) (Slotine ve diğ., 1986).

Şimdi, aslen doğrusal olmayan sistem (5.5)'e ait SMO (5.6) için hata dinamiklerini verelim.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -a_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - k_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -a_2 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 - k_2 \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{d_x} &= -a_{d_x} \tilde{x}_1 + \Delta F - k_{d_x} \text{sign}(\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dikkat ediniz ki, ΔF sınırlı (bounded) kabul edilmektedir ve $k_{d_x} \geq |\Delta F|$ olsun. Kayan yüzey değişkenimizi çıktı kestirim hatası olacak şekilde tanımlayarak

ilerleyelim.

$$s_o = \tilde{x}_1 \quad (5.14)$$

Aşağıda verilen gibi pozitif tanımlı ve çapsal sınırsız (positive definite and radially unbounded) bir Lyapunov fonksiyonu tanımla devam edelim

$$V(s_o) = \frac{1}{2}s_o^2 \quad (5.15)$$

ki bu, pozitif tanımlılık ve çapsal sınırsızlığın tanımına uyar.

$$\begin{aligned} V(s_o) &\geq 0, \quad \text{tüm } s_o \in \Re \text{ için} \\ V(s_o) &= 0, \quad \text{demektir ki } s_o = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\lim_{|s_o| \rightarrow \infty} V(s_o) = \infty$$

Eğer sınırlı zaman içinde $V(s_o) = 0$ yapabilecek bir koşulu türetebilirsek bir kayan kipe (sliding mode) erişebilir oluruz ($s_o = \tilde{x}_1 = 0$). Bu koşul, kayan yüzeye sonlu zaman içinde ulaşılabilirliği temin eden *ulaşılabilirlik koşulu (reachability condition)* olarak anılmaktadır. Bu, çıktı kestirim hatasının sıfıra sonlu zaman içinde yakınsaması gibi bir anlama da sahiptir. Gözetleyici durum yörüngelerinin kayan yüzeye doğru sürülmesi ulaşma safhası olarak anılmaktadır. a_i sabitlerinin gözetleyicinin yakınsaklığı üzerine tek başına etkisinin incelemesi yapılmış ve belirtilmiştir ki a_i 'ler (5.11)'ye ait özdeğerlerin negatif gerçek kısımlarının olmasını temin edecek şekilde seçilmelidir. Bu, durum kestirim hatasının asimptotik azalışı için gereklidir ancak yeterli değildir çünkü bu incelemede tüm k_i 'ler göz ardı edilmiştir. Denklem (5.15)'deki Lyapunov fonksiyonunu göz önüne alarak, şimdi ulaşılabilirlik koşulunu türeteceğiz. Şu anlamı çıkarmak basittir ki SMO yöntembilimi (methodology) denge noktası $s_o = 0$ etrafında asimptotik kararlılık fikri üzerine temellenmiştir (Shtessel ve diğ., 2014). Çünkü, istenen şudur ki gözetleyici durumları denge noktasına ulaşsın ve bir kere ulaştınca, sonsuza dek orada kalsın. Bunu elde etmek için, (5.15)'deki Lyapunov fonksiyonunun türevinin aşağıdaki tanıma uyacak şekilde negatif tanımlı olması gereklidir.

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_o) &< 0, \quad \text{tüm } s_o \neq 0 \text{ için} \\ \dot{V}(s_o) &= 0, \quad \text{demektir ki } s_o = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Denklem (5.15)'i göz önünde bulundurarak ve (5.17) üzerine temellenmek üzere, Lyapunov fonksiyonunun şöyle bir azalma davranışı sergilemesini isteriz.

$$\begin{aligned}\dot{V}(s_o) &= s_o \dot{s}_o \\ &\leq -\kappa_o |s_o|\end{aligned}\tag{5.18}$$

ki burada, $\kappa_o > 0$ azalma hızını gösterir. κ_o ile oynayarak SMO'muzu istenilen bir ulaşma zamanıyla (reaching time) tasarlayabiliriz ki bu zaman dilimi içinde Lyapunov fonksiyonu sıfır olur, yani, gözetleyici durum yörüngeleri kayan yüzeye ulaşır. Denklem (5.18)'ü göz önünde bulundurarak ve

$$\begin{aligned}s_o \dot{s}_o &\leq -\kappa_o |s_o| \\ |s_o| \text{sign}(s_o) \dot{s}_o &\leq -\kappa_o |s_o| \\ \text{sign}(s_o) \dot{s}_o &\leq -\kappa_o\end{aligned}\tag{5.19}$$

olmak üzere, ulaşma zamanı t_r için geçerli olan ifadeyi türetebiliriz. Denklem (5.19)'in $0 \leq \tau \leq t$ zaman dilimi üzerinden integralini alarak

$$\begin{aligned}|s_o(t)| - |s_o(0)| &\leq -\kappa_o t \\ |s_o(t)| &\leq |s_o(0)| - \kappa_o t\end{aligned}\tag{5.20}$$

ifadesini elde ederiz. Eğer (5.15)'deki gibi bir Lyapunov fonksiyonu sıfır değerine sahip olduğunda ($s_o(t_r) = 0$ olduğu durumda) ulaşma zamanı $t = t_r$ 'yi bulmak istiyorsak

$$\underbrace{|s_o(t_r)|}_0 \leq |s_o(0)| - \kappa_o t_r\tag{5.21}$$

ifadesi ile ilerleriz ve sonunda, (5.14) ve (5.21)'yi gözeterek

$$t_r \leq \frac{|s_o(0)|}{\kappa_o} = \frac{|\tilde{x}_1(0)|}{\kappa_o}\tag{5.22}$$

ifadesiyle sınırlandırılmış sonlu ulaşma zamanını elde ederiz.

Ulaşılabilirlik koşulunu türetmeye devam edelim. Denklem (5.18) ve (5.14)'ı

gözeterek (5.18)'ü yeniden yazdığımızda şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(s_o) &= s_o \dot{s}_o \\
&= \tilde{x}_1 \dot{\tilde{x}}_1 \\
&= \tilde{x}_1 (-a_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - k_1 \text{sign}(\tilde{x}_1)) \\
&= -a_1 \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - k_1 |\tilde{x}_1| \\
&= -a_1 |\tilde{x}_1|^2 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - k_1 |\tilde{x}_1| \\
&\leq -a_1 |\tilde{x}_1|^2 + |\tilde{x}_1| |\tilde{x}_2| - k_1 |\tilde{x}_1| \\
&\leq |\tilde{x}_1| (-a_1 |\tilde{x}_1| + |\tilde{x}_2| - k_1) \leq -\kappa_o |\tilde{x}_1|
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Denklem (5.23)'ten, ulaşılabilirlik veya *kayan kip* var oluş koşulu şöyle elde edilir.

$$|\tilde{x}_2| + \kappa_o \leq k_1 + a_1 |\tilde{x}_1| \tag{5.24}$$

Denklem (5.24) sağlandığı sürece Lyapunov fonksiyonu azalır ve sonunda $\tilde{x}_1 = 0$ denge noktasında sıfır olur. Bir kere bu noktaya ulaşıldığında, gözetleyici hata yörüngeleri orijine doğru sürülmeye başlar. Bu, anahtarlama fonksiyonu (5.12) için olan tasarım parametrelerinin (k_i sabitlerinin) uygun şekilde seçilmesiyle sağlanır. Bunla alakalı yöntem bilime girmeden önce, belirtmeliyiz ki, $-a_1 \tilde{x}_1$ gibi bir sistem sönümleme teriminin gözetleyici denklemine eklenmesi ulaşılabilirlik koşulunu sağlayan $\tilde{x}_2$ aralığını genişletir. Böylece, sadece süreksiz çıktı hatası terimlerinin dahil edildiği durumdaki ($a_i = 0$ olan durumdaki) kayan yüzey $\tilde{x}_1 = 0$ 'a olan çekim bölgesinden daha büyük bir çekim bölgesi elde edilmiş olur.

Şimdi, kayan yüzey üzerindeki dinamikleri inceleyelim, ki bu, önceki paragrafta belirtildiği gibi, k_i sabitlerinin uygun şekilde seçilmesiyle ilişkilidir. Kayan kip etkinleştirildiğinde (activated), kayma safhası başlar ve bu, gözetleyici durumlarını kayan yüzey $\tilde{x}_1 = 0$ üzerinde tutmak ve gözetleyici hata yörüngelerini kayan yüzey boyunca orijine doğru sürmekle ilişkilendirilir. Kayma safhasında, çıktı kestirim hatasının dahil edilmesiyle ilişkili doğrusal geribildirim elemanlarının (a_i 'ler) gözetleyici dinamikleri üzerinde hiç bir etkisi olmayacaktır ($\tilde{x}_1 = 0$ olacağından ötürü). Dolayısıyla, gözetleyici dinamikleri süreksiz geribildirim elemanlarının (k_i 'ler)

etkisi altında idare edilecektir. Şimdi, kayan yüzey üzerindeyken gözetleyicinin hata dinamiklerini gözeterek kararlılık koşulunu türeteceğiz. Önceden belirtildiği gibi, $\tilde{x}_1 = 0$ yüzeyinde kayan kip bir kere elde edildiğinde, gözetleyici durum yörüngelerinin bundan sonra o yüzey üzerinde kalması istenir, ki bu bizi kayma sahfasında $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ dinamiklerine götürür. $\tilde{x}_1 = 0$ ve $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ 'ı (5.13)'daki gözetleyici hata dinamiklerinde yerine koyarak

$$\tilde{x}_2 - k_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) = 0 \quad (5.25)$$

ifadesini elde ederiz. $\text{sign}(\tilde{x}_1)$ için eşlenik dahil etme terimini (equivalent injection term) $\frac{\tilde{x}_2}{k_1}$ olarak elde ederek ve bunu hata dinamiklerinin devamında yerine koyarak

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 - \frac{k_2}{k_1} \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_4 - \frac{k_3}{k_1} \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{d_x-1} &= \tilde{x}_{d_x} - \frac{k_{d_x-1}}{k_1} \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_{d_x} &= \Delta F - \frac{k_{d_x}}{k_1} \tilde{x}_2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

denklemini elde ederiz. Denklem (5.9)'teki benzer adımları izleyerek (5.26)'yı yeniden yazdığımızda ve (5.10)'yı göz önünde bulundurduğumuzda

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(2 : d_x) &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(2 : d_x) + \Delta\mathbf{F}(2 : d_x) \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{k_2}{k_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{k_3}{k_1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{k_{d_x-1}}{k_1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{k_{d_x}}{k_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \Re^{(d_x-1) \times (d_x-1)} \end{aligned} \quad (5.27)$$

denklemini elde ederiz. Dikkat ediniz ki, (5.27)'de, vektörlerin yanındaki $(2 : d_x)$ gösterimi indisi 2 olandan d_x olana kadarki elemanları ifade eder çünkü kayan yüzey üzerindeyken $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ olmasından ötürü $\tilde{x}_1$ 'nın hata dinamikleri üzerinde hiç bir etkisi yoktur. Gözetleyici hata yörüngeleri orijine doğru sürülürken, kayan yüzey

dinamikleri, (5.11)'e benzer şekilde oluşturulan aşağıdaki denklemi sağlayan $d_x - 1$ adet kutup (özdeğer) tarafından belirlenir. $\mathbf{I}$, $d_x - 1$ boyutlu bir birim matris olmak üzere,

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \left| \lambda \mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\frac{k_2}{k_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{k_3}{k_1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{k_{d_x-1}}{k_1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{k_{d_x}}{k_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (5.28)$$

olmaktadır. Dikkat ediniz ki, $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ iken $\Delta F \rightarrow 0$ olduğundan ötürü, (5.28)'deki $\mathbf{A}$ matrisinin kararlılığını incelemek yeterlidir. k_i sabitlerinin genliği, kayma safhasındayken durum kestirim hataları $\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{d_x}$ 'nın orijine asimptotik azalma hızını belirler. Dahası, k_{d_x} , k_1 ile sabit oranda olacak şekilde seçilirse ve k_i , $i = 2, \dots, d_x$, sabitleri öyle bir seçilirse ki kayma yüzeyindeki hata dinamiklerinin kritik sönümlenmesine izin verilirse, yani, (5.26)'nın tüm kutupları gerçekte ve $\lambda_i = -\gamma_o$, $i = 2, \dots, d_x$, $\gamma_o > 0$, gibi bir sabit değere eşit olursa, o zaman aşağıdaki denklem bize durum kestirimleriyle alakalı hassasiyeti verir (Slotine ve diğ., 1986, Slotine ve diğ., 1987).

$$|\tilde{x}_2^{(i)}| \leq (2\gamma_o)^i k_1, \quad i = 0, \dots, d_x - 2 \quad (5.29)$$

Son olarak, ölçüm hatasının olduğu durumu inceleyeceğiz, yani, var sayalım ki çıktı ölçümü, $\varrho \in \Re$ gibi bir işaret (signal) ile bozuluyor (corrupted) olsun. Öyleyse, kayan yüzey değişkenimizi azcık değiştirip

$$s_o = \tilde{x}_1 + \varrho \quad (5.30)$$

olarak yazalım. Şu ana kadarki SMO incelemelerindekiyle aynı yolu takip edeceğiz. Hatırlayınız ki, kayan yüzey üzerindeyken $s_o = \tilde{x}_1 + \varrho = 0$ ve $\dot{s}_o = 0$ olmalıdır. $\tilde{x}_1$ 'yi (5.13)'teki gözetleyici hata dinamiklerinde $\tilde{x}_1 + \varrho$ ile yer değiştirirsek ve (5.30)'yı göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} s_o = 0 &\Rightarrow (\tilde{x}_1 = -\varrho) \equiv (\dot{\tilde{x}}_1 = -\dot{\varrho}) \\ \dot{s}_o = 0 &\Rightarrow \underbrace{\dot{\tilde{x}}_1 + \dot{\varrho}}_0 \equiv -a_1(\tilde{x}_1 + \varrho) + \tilde{x}_2 - k_1 \text{sign}(\tilde{x}_1 + \varrho) + \dot{\varrho} = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

denklemini elde ederiz. $\text{sign}(\tilde{x}_1 + \dot{\varrho})$ için eşlenik dahil etme terimini $\frac{\tilde{x}_2 + \dot{\varrho}}{k_1}$ olarak elde edip ve bunu hata dinamiklerinde yerine koyup (5.26)'nin azcık değiştirilmiş halini şu şekilde ederiz.

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= -\dot{\varrho} \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 - \frac{k_2}{k_1}(\tilde{x}_2 + \dot{\varrho}) \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_4 - \frac{k_3}{k_1}(\tilde{x}_2 + \dot{\varrho}) \\
&\vdots \\
\dot{\tilde{x}}_{d_x-1} &= \tilde{x}_{d_x} - \frac{k_{d_x-1}}{k_1}(\tilde{x}_2 + \dot{\varrho}) \\
\dot{\tilde{x}}_{d_x} &= \Delta F - \frac{k_{d_x}}{k_1}(\tilde{x}_2 + \dot{\varrho})
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Denklem (5.32), SMO hata dinamiklerinde ölçüm gürültüsünü hesaba katmaktadır.

Eğer her bir durum için dinamik hata denklemini açık haliyle yazarsak görürüz ki

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= \dot{\varrho} \\
\dot{\tilde{x}}_i &= \tilde{x}_{i+1} - \frac{k_i}{k_1}\tilde{x}_2 - \frac{k_i}{k_1}\dot{\varrho}, \quad i = 2, \dots, d_x - 1 \\
\dot{\tilde{x}}_{d_x} &= \Delta F - \frac{k_{d_x}}{k_1}\tilde{x}_2 - \frac{k_{d_x}}{k_1}\dot{\varrho}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

olur, ki bu, ölçüm hatasıyla alakalı olarak $\dot{\varrho}$ terimini dahil edecek şekilde (5.26)'ye küçük bir değişiklik katmaktadır. Denklem (5.33)'ü (5.27)'e benzer şekilde daha düzenli biçimde şöyle yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(2 : d_x) &= \underbrace{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(2 : d_x) + \Delta\mathbf{F}(2 : d_x)}_{\text{same dynamics with (5.27)}} + \mathbf{L}_\varrho \dot{\varrho} \\
\mathbf{L}_\varrho &= \begin{bmatrix} -\frac{k_2}{k_1} & -\frac{k_3}{k_1} & \dots & -\frac{k_{d_x-1}}{k_1} & -\frac{k_{d_x}}{k_1} \end{bmatrix}^T \in \Re^{d_x-1}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Dikkat ediniz ki, $\mathbf{A}$ ve $\Delta\mathbf{F}$ önceden sırasıyla (5.27) ve (5.10)'da tanımlanmıştır. Denklem (5.27)'tekilerle aynı olan dinamiklerin (5.28)'teki koşul sağlandığında kararlı olduğu zaten ispatlanmıştır. Diğer bir deyişle, gözetleyici hata yötüğüleri $\tilde{\mathbf{x}}$ kayma safhasında orijine asimptotik şekilde yakınsayabilmektedir. Hatırlayınız ki, $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ iken $\Delta F \rightarrow 0$ olmaktadır. Ancak, $\mathbf{L}_\varrho \dot{\varrho}$ terimi, $\dot{\varrho} = 0$ olmadığı sürece, $\tilde{\mathbf{x}}$ 'nın orijine götürülmesine engel olur. $\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{\varrho}$ olduğunu akılda tutarak, kayan kip elde edildikten

sonra, sabit olmayan bir ölçüm hatası durumunda, gözetleyici dinamikleri kayan yüzey üzerinde kalamaz ancak, $\dot{\varrho}$ 'ın genliğine bağlı olmak üzere, bu yüzeyin belli bir komşuluğunda kalabilir. Denklem (5.23) ve (5.24)'i kullanarak sabit olmayan bir ölçüm gürültüsü durumu için ulaşılabilirlik koşulunu türetirken, (5.14)'ta tanımlanmış kayan yüzey değişkeni s_o 'yu gürültülü durum için (5.30)'da tanımlanmış olanla değiştirip şu eşitsizliği elde ederiz.

$$|\tilde{x}_2 + \dot{\varrho}| + \kappa_o \leq k_1 + a_1 |\tilde{x}_1 + \varrho| \quad (5.35)$$

Denklem (5.35)'den şu anlam çıkarılabilir ki, k_1 ve a_1 (5.35)'deki kararlılık kısıtını karşılayacak şekilde seçilmezse, örn., ölçüm gürültüsündeki değişim hızı nispeten fazlaysa, gözetleyici hata yörüngeleri orijinden uzaklaşıyor durumda olacaktır ve bu, kararsız gözetlemeyle dahi sonuçlanabilir.

Quadrotor dinamiklerini gözetten SMO tasarımına girmeden önce, kayan kip kavramında benimsenen sign fonksiyonunun önemli bir yanına deyinmemiz gerekir. Çünkü, kayma safhasında, kayma yüzeyi $s_o = 0$ koşulu sağlanmalıdır, ki bu, quadrotor için $\tilde{x}_i = 0$, $i = 1, \dots, 6$, demektir. Zaten biliyoruz ki, $\tilde{x}_i = \hat{x}_i - x_i$ olmaktadır ve sistemin ölçülen çıktısına bağlıdır. Ölçülen büyüklüklerdeki gürültü, anahtarlama terimi olan $sign(\cdot)$ 'ı etkilemeye dair büyük bir potansiyele sahiptir. Demektir ki, küçük değerdeki bir $\tilde{x}_i \neq 0$ bile $sign(\cdot)$ 'ın sıfırın herhangi bir tarafına geçmesine neden olabileceğinden ötürü, küçük bir gürültü bile gözetleyici hata dinamiklerinin kayan yüzey $s_o = 0$ 'dan uzaklaşmasına neden olabilir. Bu, sıfırın zıt tarafları arasında sık bir geçişe neden olur ve çatırdama olgusu (chattering phenomenon) adıyla bilinir. Çatırdamayı yatıştırmak için, $sign(\cdot)$ fonksiyonuna dair bir sürekli yaklaşıklama (continuous approximation) yapılabilir. Bu tez çalışmasında, süreksiz anahtarlama terimi, $sign(\cdot)$ fonksiyonunu hata dahil etme terimi (output error injection term) içindeki $tanh(\cdot)$ ile yaklaşıklamak suretiyle şu şekilde yumuşatılmıştır (smoothing) (Lambert ve Reyhanoglu, 2018).

$$sign(\tilde{x}) \approx tanh(c\tilde{x}) = \frac{exp(c\tilde{x}) - exp(-c\tilde{x})}{exp(c\tilde{x}) + exp(-c\tilde{x})}, \quad (5.36)$$

Not 5.1.2. Denklem (5.36)'dan görüldüğü üzere, $c > 0$ gibi bir ek gözetleyici parametresi $\tanh(\cdot)$ fonksiyonunun girdisine dahil edilmiştir ki böylece bu fonksiyonun eğimi istenilen bir seviyeye ayarlanabilsin. (Shtessel ve diğ., 2014) tarafından bahsedildiği üzere, bu sürekli yaklaşıklama yapıldığında, gözetleyici global durum kestirim yakınsaklığı (global state estimation convergence) özelliğini daha fazla sürdüremez. Bu, gözetleme başarımı ile çatırdamadan yoksun durum kestirimleri arasında bir ödünleşimdir (trade off). Halbuki, eğim parametresi c 'ye yeterince büyük bir değer atanırsa tanh fonksiyonunun davranışı sign fonksiyonununkinden pek fazla farklı olmayacaktır. Daha açık olmak gerekirse, hata yörüneleri orijinin küçük bir komşuluğuna yakınsayacaktır. Bu komşuluğun sınırı tanh fonksiyonunun eğimi olan c 'yi keyfi bir şekilde arttırarak azaltılabilir. c ile oynayarak, anahtarlama terimini istediğimiz seviyede yumuşatma imkanına erişiriz. Küçük bir c seçtiğimizde, ancak yukarıda anlatıldığı kadar büyük, $\tanh(\cdot)$ 'da sıfırın zıt tarafları arasındaki geçişler nispeten yumuşak olacaktır, yani, sign fonksiyonundaki kadar keskin değil. Böylelikle, düşük genlikli bir gürültü, gözetleyici hata dinamikleri üzerinde büyük bir etkiye sahip olamayacak ve çatırdama dikkate değer biçimde elenecektir.

Quadrotor için SMO. Sonunda, şu ana kadar türetilen SMO formüllerini kullanarak, quadrotor dinamiklerini gözetlen SMO'yu sunuyoruz. Dikkat ediniz ki, bir gözetleyici, durumları gözetlenmek üzere olan sistemin dinamik modelinden yararlanır. Bu bağlamda, bir gözetleyici, hata dahil etme terimlerini bu modele ekler, ki bunlar, çıktı kestirim hatası geribildirim terimleri olarak yorumlanabilir. Quadrotorun (4.32)-(4.39) ile verilen durum uzay modelini göz önüne alarak quadrotor için SMO dinamiklerini kapalı biçimde şöyle yazabiliriz.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^4 \hat{\mathbf{g}}_i(\hat{\mathbf{x}})u_i + \Theta_o \quad (5.37)$$

Denklem (5.37)'de, $\hat{\mathbf{f}}$ ve $\hat{\mathbf{g}}_i$, $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g}_i$ ile ifade edilen quadrotor dinamiklerine bir yaklaşıklama iken $\Theta_o \in \mathbb{R}^{12}$ ise gözetleyici hata dahil etme terimini göstermektedir. Ayrıca, $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{12}$ gözetleyici durumlarını gösterir ve u_i ise kontrol girdi vektörü $\mathbf{u}$ 'nun

i indisli elemandır.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5, \hat{x}_6, \hat{x}_7, \hat{x}_8, \hat{x}_9, \hat{x}_{10}, \hat{x}_{11}, \hat{x}_{12}]^T \\ &= [\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}, \dot{\hat{x}}_i, \dot{\hat{y}}_i, \dot{\hat{z}}_i, \hat{p}, \hat{q}, \hat{r}]^T \\ \mathbf{u} &= [f_t, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T\end{aligned}\quad (5.38)$$

Dikkat edilmelidir ki, (4.32)-(4.39) üçü doğrusal (x_i, y_i ve z_i eksenindeki olmak üzere) ve üçü de açısal (yalpalama, yunuslama ve sapma açıları) olmak üzere toplamda altı tane konum ve ek olarak, doğrusal ve açısal hızlar olmak üzere bunların türevlerini sunmaktadır. Dolayısıyla, quadrotor dinamikleri altı adet konum-hız çifti sunar. Buna dayanarak, quadrotor için tasarlanan SMO her birinin boyutu 2 olmak üzere tamamlayıcı biçimde olan 6 adet konum-hız çiftinden ibaret olacaktır. Diğer bir deyişle, quadrotor için SMO formülasyonunda, (5.6)'daki gözetleyici denklemi her birinde $d_x = 2$ olmak üzere altı defa içeriliyor olacaktır ve (5.38)'deki durum vektörü tanımını göz önünde bulundurunca konum-hız çiftleri şöyle olacaktır; $\hat{x}_1 - \hat{x}_7, \hat{x}_2 - \hat{x}_8, \hat{x}_3 - \hat{x}_9, \hat{x}_4 - \hat{x}_{10}, \hat{x}_5 - \hat{x}_{11}, \hat{x}_6 - \hat{x}_{12}$. Şimdi, (5.37)'deki $\mathbf{f}, \mathbf{g}_i$ ve Θ_o terimlerinin tanımını vererek quadrotor için olan SMO'nun dinamiklerini açık şekilde yazalım. Dikkat ediniz ki, sistem fonksiyonları $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g}_i$ üzerinde hiç bir modelleme hatası olmadığında, yaklaşıklamamız olan $\hat{\mathbf{f}}$ ve $\hat{\mathbf{g}}_i$ 'nin bunlar ile aynı olmasını bekleriz, aynen kestirilmiş çıktı $\hat{\mathbf{y}}$ ile gerçek çıktı $\mathbf{y}$ 'nin aynı olmasını beklediğimiz gibi.

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \hat{x}_7 \\ \hat{x}_8 \\ \hat{x}_9 \\ \hat{x}_{10} + \hat{x}_{11}\sin(\hat{x}_4)\tan(\hat{x}_5) + \hat{x}_{12}\cos(\hat{x}_4)\tan(\hat{x}_5) \\ \hat{x}_{11}\cos(\hat{x}_4) - \hat{x}_{12}\sin(\hat{x}_4) \\ \hat{x}_{11}\sin(\hat{x}_4)\sec(\hat{x}_5) + \hat{x}_{12}\cos(\hat{x}_4)\sec(\hat{x}_5) \\ 0 \\ 0 \\ -g \\ \frac{I_y - I_z}{I_x} \hat{x}_{11} \hat{x}_{12} \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} \hat{x}_{10} \hat{x}_{12} \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} \hat{x}_{10} \hat{x}_{11} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{g}}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, \hat{g}_1^7, \hat{g}_1^8, \hat{g}_1^9, 0, 0, 0]^T \\
\hat{\mathbf{g}}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{I_x}, 0, 0 \right]^T \\
\hat{\mathbf{g}}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{I_y}, 0 \right]^T \\
\hat{\mathbf{g}}_4(\hat{\mathbf{x}}) &= \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{I_z} \right]^T
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}_1^7 &= \frac{1}{m} (\cos(\hat{x}_4) \sin(\hat{x}_5) \cos(\hat{x}_6) + \sin(\hat{x}_4) \sin(\hat{x}_6)) \\
\hat{g}_1^8 &= \frac{1}{m} (\cos(\hat{x}_4) \sin(\hat{x}_5) \sin(\hat{x}_6) - \sin(\hat{x}_4) \cos(\hat{x}_6)) \\
\hat{g}_1^9 &= \frac{1}{m} (\cos(\hat{x}_4) \cos(\hat{x}_5))
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\Theta_o = \begin{bmatrix} -a_1^x \tilde{x}_1 - k_1^x \tanh(c_1^x s_o^x) \\ -a_1^y \tilde{x}_2 - k_1^y \tanh(c_1^y s_o^y) \\ -a_1^z \tilde{x}_3 - k_1^z \tanh(c_1^z s_o^z) \\ -a_1^\phi \tilde{x}_4 - k_1^\phi \tanh(c_1^\phi s_o^\phi) \\ -a_1^\theta \tilde{x}_5 - k_1^\theta \tanh(c_1^\theta s_o^\theta) \\ -a_1^\psi \tilde{x}_6 - k_1^\psi \tanh(c_1^\psi s_o^\psi) \\ -a_2^x \tilde{x}_1 - k_2^x \tanh(c_2^x s_o^x) \\ -a_2^y \tilde{x}_2 - k_2^y \tanh(c_2^y s_o^y) \\ -a_2^z \tilde{x}_3 - k_2^z \tanh(c_2^z s_o^z) \\ -a_2^\phi \tilde{x}_4 - k_2^\phi \tanh(c_2^\phi s_o^\phi) \\ -a_2^\theta \tilde{x}_5 - k_2^\theta \tanh(c_2^\theta s_o^\theta) \\ -a_2^\psi \tilde{x}_6 - k_2^\psi \tanh(c_2^\psi s_o^\psi) \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

$$s_o^x = \tilde{x}_1, \quad s_o^y = \tilde{x}_2, \quad s_o^z = \tilde{x}_3 \tag{5.43}$$

$$s_o^\phi = \tilde{x}_4, \quad s_o^\theta = \tilde{x}_5, \quad s_o^\psi = \tilde{x}_6$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} \tag{5.44}$$

$$\mathbf{C} = \left[\mathbf{I}_{6 \times 6} \mid \vec{\mathbf{0}}_{6 \times 6} \right] \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$$

5.2 Quadrotor İçin Önerilen RSVM Bozucu Etki Gözetleyici Dinamikleri

Önerilen şey iki sebepten ötürü bozucu etki gözetleyici olarak anılmaktadır. İlk olarak, sistem üzerindeki toplam bozucu etki $\mathbf{d}$ 'yi, ölçülen durumlar $\mathbf{x}$ 'ten ve sistem modelinden istifade ederek kestirir. Durum tahmin hatası (state prediction error), toplam bozucu etki terimini kestirmek için görevlendirilen RSVM modeline

geri yayılır. İkinci olarak, gürbüz bir durum kestirimi sunmak için, kestirilmiş bozucu etkiyi gözetleyici dinamikleri içine katar. Diğer bir deyişle, aslında, durum vektörü $\mathbf{x}$ 'i ve toplam bozucu etki terimi $\mathbf{d}$ 'yi eşzamanlı kestirir. Tezin geri kalanında, 'bozucu etki' dediğimizde aslında 'toplam bozucu etkiyi' kastediyor olacağız. RSVM model dinamikleri (3.8)'i göz önünde bulundurarak, (5.4)'teki bozucu etkiyi yeniden

$$\mathbf{d} = [d^z \ d^\phi \ d^\theta \ d^\psi]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (5.45)$$

şeklinde tanımlarız ve (5.45)'teki $\mathbf{d}$ 'yi kullanarak, kuramsal olarak şöyle yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \mathbf{h}_{n+1}' \end{bmatrix} &= \check{\mathbf{W}}_{hh} \odot \begin{bmatrix} h_n^{kkt} \\ \mathbf{h}_n' \end{bmatrix} + \check{\mathbf{W}}_{hx} \mathbf{v}_{n+1} \\ &+ \check{\mathbf{W}}_{ht} \odot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \check{\mathbf{I}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \check{\mathbf{I}}^T \\ \check{\mathbf{\Omega}}_n + \nu^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \check{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{h}_{n+1} &= \exp \left(-0.5 (\mathbf{h}_{n+1}' - \mathbf{W}_{h\mu})^{\odot 2} \oslash \mathbf{W}_{h\sigma}^{\odot 2} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{n+1}^{kkt} \\ \hat{\mathbf{d}}_{n+1} \end{bmatrix} = \check{\mathbf{W}}_{\hat{y}h} \begin{bmatrix} h_{n+1}^{kkt} \\ \mathbf{h}_{n+1}' \end{bmatrix}$$

Dikkat ediniz ki, (5.46)'da, RSVM model çıktısı, ki (3.8)'deki $\hat{\mathbf{y}}_{n+1}$ 'dir, $\mathbf{d}_{n+1}$ ile yer değiştirilmiştir. Quadrorot için, uygun duyargalar aracılığıyla tüm durumları ölçebilir durumdayız (yine de sadece ilk yarısını çıktı olarak tanımlıyoruz). Halbuki, bozucu etki ölçülemeyen bir büyüklüktür. Dolayısıyla, (5.46)'da gösterildiği gibi $\mathbf{d}$ 'yi $\hat{\mathbf{y}}$ 'nin hedef değeri seçerek bozucu etkinin doğrudan kestirimi ($\hat{\mathbf{y}}_{n+1} \cong \mathbf{d}_{n+1}$) uygulamada imkansızdır. Ölçülen durumları kullanarak, bozucu etki ancak dolaylı olarak kestirilebilir. Bunu yapmak için, (5.46)'daki RSVM model denklemleri (ilk satır hariç), (5.45)'te tanımlanmış olan bozucu etkiyi kestirmek için ($\hat{\mathbf{d}} \approx \mathbf{d}$) gözetleyici dinamikleri içine dahil edilir. RSVM'nin gözetleyici dinamikleri içine bu şekilde dahil edilmesi, (3.9)'u gözden geçirerek akılda daha açık şekilde canlandırılabilir. Denklem (3.9)'da, tanımları itibariyle kesikli çizgi içeren matris ve vektörleri düşünün. Bu elemanların kesikli çizgilerin altına denk gelen kısımları gözetleyici dinamikleri içinde hesaba katılacaktır. Diğer bir deyişle, 'kkt' ile işaretlenmemiş olan elemanlar gözetleyici dinamikleri için ilgi alanımızdadır. Sonuç olarak, RSVM

bozucu etki gözetleyici, (5.37)-(5.44) tarafından verilen ve quadrotor için olan SMO dinamiklerine, kestirilmiş bozucu etki $\hat{\mathbf{d}}$ 'yı eklemekten ibarettir. Aşağıda, Ts , örnekleme zamanını (sampling period) göstermek üzere, sonuçta oluşan RSVM bozucu etki dinamiklerini ayrık zamanda sunuyoruz. Burada, Euler ayrıklaştırması yapılmaktadır. Dikkat ediniz ki, ilgili SMO dinamiklerindeki $\hat{\mathbf{f}}$ ve $\hat{\mathbf{g}}_i$, quadrotor durum uzay modeli (4.32)-(4.39)'daki $\mathbf{f}$ and $\mathbf{g}_i$ 'ye eşittir çünkü modelleme hatası olmadığı varsayılmaktadır. Gözetleyici çıktısı $\hat{\mathbf{y}}$ 'yı RSVM çıktısından ayırt etmemiz gerekir. Bu yüzden, RSVM çıktısını $\hat{\mathbf{y}}^{rsvm}$ ile gösteririz.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{x}}_n + Ts \underbrace{\left(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_n) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{g}_i(\hat{\mathbf{x}}_n) u_{i_{n+1}} + \Theta_{o_{n+1}} + \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \hat{\mathbf{d}}_{n+1} \end{bmatrix} \right)}_{\delta_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \hat{\mathbf{d}}_{n+1})} \\ \hat{\mathbf{y}}_{n+1} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \quad \vec{0} \in \mathbb{R}^8 \\ \hat{\mathbf{d}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{rsvm}\end{aligned}\tag{5.47}$$

Denklem (5.4)'den biliyoruz ki, bozucu etki x_9-x_{12} durumları üzerinde olacaktır. Örnekleme anı $(n + 1)$ için, önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından ortak durum ve bozucu etki kestirimi (joint state and disturbance estmtion) şu şekilde üç aşamada yazılabilir. RSVM parametre vektörünü, tüm model ağırlıklarının peşi sıra dizildiği (concatenated) $\vartheta \in \mathbb{R}^{d_\vartheta}$ olarak düşünelim ki burada $d_\vartheta = 4 \times (s + 1) + s \times (d_v + 4)$ olur.

Hata teriminin oluşturulması:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}}_{n+1}^- &= \hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{rsvm} \\ \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^- &= \hat{\mathbf{x}}_n + \delta_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-) \\ \mathbf{e}_{n+1}^- &= \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^- - \mathbf{x}_{n+1} \\ e_{n+1}^{kkt} &= \underbrace{\sum_{i=1}^s \alpha_{i_n}}_{\hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{kkt}} - 0\end{aligned}\tag{5.48}$$

RSVM ağırlık güncellemesi:

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \Delta \vartheta_{n+1}\tag{5.49}$$

Ortak durum ve bozucu etki kestirimi:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{rsvm} \\ \hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{x}}_n + \delta_{\hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \hat{\mathbf{d}}_{n+1})\end{aligned}\tag{5.50}$$

Dikkat ediniz ki, (5.48)'de, e_{n+1}^{kkt} (5.46)'daki RSVM model denkleminin ilk satırından ötürüdür (kesikli çizgilerin üstü). İlk satır, KKT koşullarından biri ($\sum_{i=1}^s \alpha_i = 0$) için vardır ki bu, RSVM formülasyonuna yerleşiktir (intrinsic). Bu terim, α parametreleri üzerinde bir kısıt olarak, $\hat{y}_{n+1}^{kkt}$ 'nin hedef değerini sıfıra eşitleyerek RSVM'nin eğitim sürecine dahil edilir. Ayrıca, (5.48)'deki $\hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-$ terimi, RSVM ağırlıklarını güncellemek, ve böylece, bozucu etkinin (5.50)'de $\hat{\mathbf{d}}_{n+1}$ ile gösterilen doğru (accurate) bir kestirimini elde etmek için gerekli olan durum tahmin hatasını ($\mathbf{e}_{n+1}^-$) elde etmek adına oluşturulmuş öncül bir bozucu etki kestirimi (a-priori disturbance estimate) olarak yorumlanabilir. Ayrıca dikkat ediniz ki, (5.48)'deki $\hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-$ 'yi hesaplamak için kullanılan RSVM ağırlıkları RSVM parametre vektörü $\boldsymbol{\vartheta}_n$ 'ye aittir ve en son n örnekleme anında güncellenmiş ağırlıkları içerir. $n + 1$ anıyla ilişkili ağırlık güncellemesinin (5.49) ardından, güncellenmiş RSVM ağırlıkları, ki bunlar $\boldsymbol{\vartheta}_{n+1}$ vektöründe tutulur, bozucu etkinin (5.50)'de $\hat{\mathbf{d}}_{n+1}$ ile gösterilen doğru bir kestirimini hesap etmede kullanılır. Denklem (5.48) bir tahmin adımı olarak görülebilir ve (5.50) ise durum ölçümlerini kullanan bir düzeltme (correction) adımı olarak görülebilir. Ağırlık güncelleme terimi $\Delta \boldsymbol{\vartheta}_{n+1}$ (5.48)'deki durum tahmin hatası $\mathbf{e}_{n+1}^-$ 'in geri yayılmasıyla elde edilir ve Bölüm 5.3'te verilmiştir.

5.3 Önerilen RSVM Bozucu Etki Gözetleyici İçin BPTT Denklemleri

$n + 1$ indisli örnekleme anındaki durum tahmin hatasının karesel (quadratic) bir kayıp fonksiyonunu tanımlarız.

$$\min_{\boldsymbol{\vartheta}} L_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{e}_{n+1}^-)^T \mathbf{e}_{n+1}^-}_{L_{n+1}^x} + \underbrace{\frac{1}{2}(e_{n+1}^{kkt})^2}_{L_{n+1}^{kkt}}\tag{5.51}$$

RSVM ağırlıklarının güncellenmesi için öğrenme adımli gradyan azalan yöntemini

kullanacağız. Gradyan ifadesini yazalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{n+1}^x}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n} &= \frac{\partial L_{n+1}^x}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^-} \frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^-}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n} = \mathbf{e}_{n+1}^- \frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^-}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n} \\
&= \mathbf{e}_{n+1}^- \frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-} \frac{\partial \hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n} \\
\frac{\partial L_{n+1}^{kkt}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n} &= \frac{\partial L_{n+1}^{kkt}}{\partial e_{n+1}^{kkt}} \frac{\partial e_{n+1}^{kkt}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n} = e_{n+1}^{kkt} \frac{\partial e_{n+1}^{kkt}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Denklem (5.48)'ü gözeterek

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-} = \mathbf{I}_{12 \times 12} \tag{5.53}$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (5.47) ve (5.48)'ü göz önünde bulundurduğumuz zaman ise

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-} = T_s \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{0}} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{12 \times 4}, \vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \tag{5.54}$$

ifadesine erişiriz. Ayrıca, $\frac{\partial e_{n+1}^{kkt}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n} \in \mathbb{R}^{d_\vartheta}$ kısmi türevini elde etmek basittir. Kısmi türev vektörünü düşünürsek, RSVM modelinde sadece α_i , $i = 1, \dots, s$, parametrelerine karşılık gelen elemanlar 1 olacakken bu kısmi türev vektöründeki diğer tüm elemanlar 0 olacaktır. Son olarak, (5.48)'den bildiğimiz üzere, $\hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-$, bozucu etkinin RSVM tarafından öncül bir kestirimi olduğu için, $\frac{\partial \hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_n}$ aslında RSVM çıktısı $\hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{rsvm}$ 'nin ağırlıklarına göre kısmi türevidir.

RSVM bozucu etki gözetleyici için olan kayıp fonksiyonu (5.51) ile RSVM modelinin kendisi için olup (3.15) ve (3.16) ile verilen kayıp fonksiyonu formülasyonunu karşılaştıralım. Bölüm 3.5'te verilen ve RSVM modeli eğitimi için olan BPTT denklemlerini göz önünde bulundurarak şu çıkarımlarda bulunmaktayız. Bölüm 3.5'te anlatıldığı üzere, zaten bilmekteyiz ki, $n+1$ anındaki hataya önceki anlar $n-\eta \leq n_p \leq n+1$ 'den olan katkıların toplamı, RSVM'nin BPTT yöntemi kullanılarak eğitimi sırasında en düşüklenir. Bu açıdan, öncelikle öncül durum kestirim hatasını ($\mathbf{e}_{n+1}^-$) RSVM modelinin çıktı katmanına geri yaymalıyız. Gradyan ifadesi (5.52) göz önünde bulundurulunca, RSVM modelinin kendisi tarafından yapılan tahmin hatası

(ϵ_{n+1}) şöyle elde edilir.

$$\epsilon_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}^- \frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-} \quad (5.55)$$

ki burada, kısmi türevler $\frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-}$ ve $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-}$ sırasıyla (5.53) ve (5.54)'da tanımlanmıştır. Bir kere ϵ_{n+1} (5.55) ile elde edildiğinde, RSVM modelinin eğitimi için kayıp fonksiyonu formülasyonu (3.15) ve (3.16)'da kullanılır. Ek olarak, (5.51)'deki e^{kkt} ve (3.16)'daki ϵ^{kkt} terimleri, RSVM'nin α parametrelerinin toplamını sıfırla sınırlayan KKT koşuluyla alaklı olmalarından ötürü aynıdır.

$$\epsilon^{kkt} = e^{kkt} \quad (5.56)$$

Bu bağlamda, RSVM modelinin ağırlıklarına göre kısmi türevi, (5.52)'de $\frac{\partial \hat{\mathbf{d}}_{n+1}^-}{\partial \boldsymbol{\theta}_n}$ ile gösterilen, şu adımlarla elde edilir. Önce, (5.55) ile edilen ϵ_{n+1} ve (5.56)'daki ϵ^{kkt} (3.15) ve (3.16)'da yerine koyulur. Sonra, Bölüm 3.5'te sunulan BPTT denklemlerinde verilen öğrenme adımlarıyla gradyan azalan ağırlık güncellemesi gerçekleştirilir.

6. RSVM BOZUCU ETKİ GÖZETLEYİCİ TEMELLİ KAYAN KİPLİ KONTROL

Bu bölümde önce quadrotorun SMC ile kontrolünü vereceğiz. Sonra, RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC ile quadrotor kontrolünü vereceğiz.

6.1 Quadrotor için Kayan Kipli Kontrolcü

İlk olarak, SMC'nin genel formülünü vereceğiz. Sonra, bunun üzerine temellendirerek, quadrotor dinamik modelini gözetten SMC formülünü sunacağız.

Genel formül. Tamamlayıcı biçimde ve tek girdili tek çıktılı (single-input single-output - SISO) bir sistemi düşünelim (Slotine ve Li, 1991).

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(d_x)} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \\ \mathbf{x} &= [x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(d_x-1)}]^T = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{d_x}]^T \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Denklem (6.1)'de, $y = x$ sistemin çıktısı iken $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_x}$ durum vektörünü göstermektedir. $f : \mathbb{R}^{d_x} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R}^{d_x} \rightarrow \mathbb{R}$ genelde doğrusal olmayan sistem fonksiyonlarıdır. Dikkat ediniz ki, hem f hem de kontrol kazancı (control gain) g kesin bir şekilde bilinmeyebilir ancak f üzerindeki belirsizlik $\mathbf{x}$ 'in bilinen, sürekli bir fonksiyonu tarafından üstten sınırlıdır (upperbounded) ve g de $\mathbf{x}$ 'in bilinen, sürekli bir fonksiyonu tarafından üstten sınırlıdır. SMC'nin amacı durum vektörü $\mathbf{x}$ 'i öyle bir sürmektir ki bu vektör istenen bir durum yörüngesi olan $\mathbf{x}_d = [x_d, \dot{x}_d, \ddot{x}_d, \dots, x_d^{(d_x-1)}]^T \in \mathbb{R}^{d_x}$ 'i sistem fonksiyonları f and g üzerinde modelleme hatalarının olduğu durumda takip etsin.

$\tilde{x} = x - x_d$ çıktıya dair izleme hatası (output tracking error) olsun ve $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}, \dots, \tilde{x}^{(d_x-1)}]^T \in \mathbb{R}^{d_x}$ ise izleme hatası vektörü olsun. SMC tasarısında (scheme), önce çıktı izleme hatasına bağlı bir kayan yüzey değişkenini şu şekilde

tasarlarız.

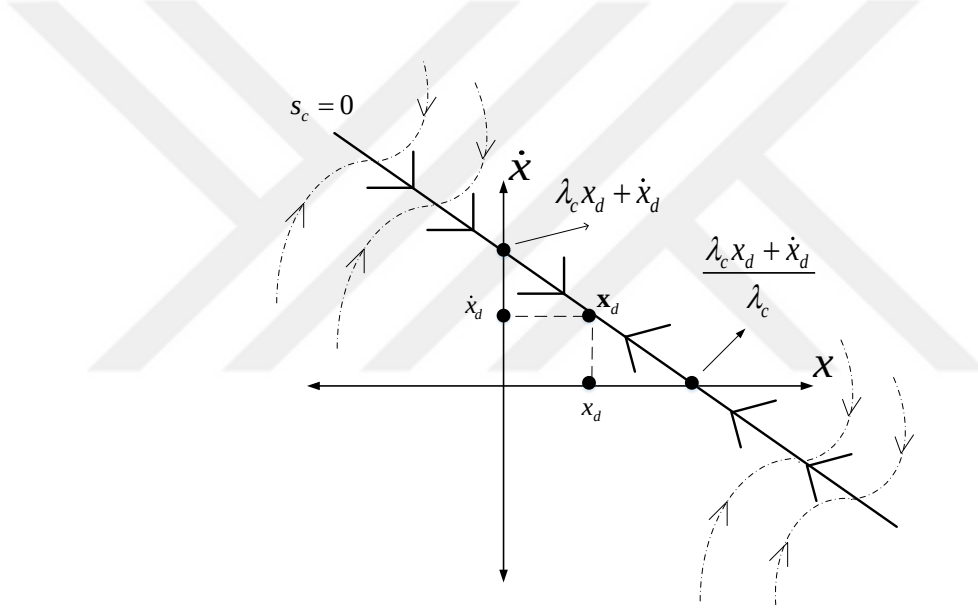
$$s_c = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_c \right)^{(d_x-1)} \tilde{x} \quad (6.2)$$

Denklem (6.2)'de, $\lambda_c > 0$ kayan yüzey değişkeni s_c için bir tasarım parametresidir. Basit olması açısından, $d_x = 2$ olan durumu inceleyelim, örn., durum vektörü $\mathbf{x} = [x, \dot{x}]^T = [x_1, x_2]^T$ mekanik bir sistemin konumunu ve hızını gösterebilir. Bu durumda,

$$s_c = \dot{\tilde{x}} + \lambda_c \tilde{x} \quad (6.3)$$

ifadesini elde ederiz. Kayan yüzey $s_c = 0$ 'ın yerel dinamiklerini düşünersek, pozitif bir λ_c 'ye sahip olan $\dot{\tilde{x}} = -\lambda_c \tilde{x}$ diferansiyel denkleminde eşdeğerdir ki bu diferansiyel denklem $1/\lambda_c$ gibi bir zaman sabitiyle ulaşılabilen asimptotik kararlı bir denge noktası olan $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ 'a sahiptir. SMC kavramında amaç, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d$ ile eşdeğer olan bu denge noktasına ulaşmaktır, yani, istenen durum yörüngesini mükemmel izlemek. Bu amaca ulaşmak için, önce, sistem durumları $\mathbf{x}$ 'i kayan yüzey $s_c = 0$ 'a sürmemiz gereklidir ve bir keye yüzeye varınca, $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ 'a yukarıda bahsi geçen sonlu zamanda yakınsamayı mümkün kılan $\dot{s}_c = 0$ ifadesini sağlayarak durumları sonsuza dek bu yüzey üzerinde tutmamız gereklidir. SMC'nin hedefine ulaşıldığı durumu analitik geometri terimleriyle yorumlayalım. Eğer $\tilde{\mathbf{x}}(0) = 0$ ise sistem durumları durum uzayı $\mathbb{R}^{d_x}$ 'te çok boyutlu olan ve istenen başlangıç durum yörüngesini ifade eden noktayla çakışacak şekilde bir başlangıç noktası ile başlar, yani, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_d(0)$ olur. Dikkat ediniz ki, (6.3)'ü göz önüne aldığımızda, $\tilde{x} = 0$, $s_c = 0$ 'ın çözümüdür ve kayan yüzey üzerinde yer alır. Kayan yüzeye bir kere ulaşıldıktan sonra durumlar bu yüzey üzerinde sonsuza dek tutulduğundan ötürü ve yine bu yüzey üzerinde $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ 'a asimptotik yakınsaklık olmasından dolayı, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d(t)$ ifadesi tüm $t > 0$ için sağlanır. Diğer taraftan, eğer $\tilde{\mathbf{x}}(0) \neq 0$ ise durum vektörü $\mathbf{x}$ 'i kayan yüzey $s_c = 0$ 'a sürmek için t_r gibi bir ulaşma zamanı gerekir. Bu süreç *ulaşma safhası (reaching phase)* olarak anılır. Bir kere bu yüzeye ulaşıldıktan sonra durumları bu yüzeyde tutmak için, $t \geq t_r$ için $\dot{s}_c(t) = 0$ sağlanarak $s_c(t) = 0$ garantiye alınır. Böylece, bir *kayan kip (sliding mode)* etkinleştirilmiş olur ve durumların $s_c = 0$ yüzeyi boyunca kayarak durum uzayı içinde çok boyutlu bir nokta olan $\mathbf{x}_d$ 'ye ulaşması şeklinde ifade

edilen kayma hareketi devreye girer. Buna *kayma safhası (sliding phase)* denir. Bu olguyu görselleştirmek için, kayan yüzeyin $-\lambda_c$ eğimli bir doğru olduğu, $d_x = 2$ için basit bir örneği sunan Şekil 6.1 verilmiştir. Dikkat ediniz ki, Şekil 6.1’de, noktalı kesikli çizgiler durumların kayan yüzey $s_c = 0$ ’a ulaşma safhasını temsil etmektedir. Bir kere bu yüzeye ulaşıncı, durum vektörü $\mathbf{x}$ bu yüzey boyunca kayar ve istenilen 2 boyutlu noktaya, $\mathbf{x}_d = [x_d, \dot{x}_d]^T$, yakınsar. Hatırlayınız ki, kayan yüzey $s_c = 0$ üzerinde $\dot{\tilde{x}} = -\lambda_c \tilde{x}$ yerel dinamiği geçerli olur. İzleme hatasının ve türevinin tanımı, şekilde $\tilde{x} = x - x_d$ ve $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_d$ olarak hesaba katılmıştır, ki bu bizim $s_c = 0$ ’a ait doğru denklemini açık haliyle $\dot{x} = -\lambda_c(x - x_d) + \dot{x}_d$ olarak yazmamızı mümkün kılar.



Şekil 6.1: İki boyutlu bir durum vektörü için ulaşma ve kayma safhalarının görselleştirilmesi.

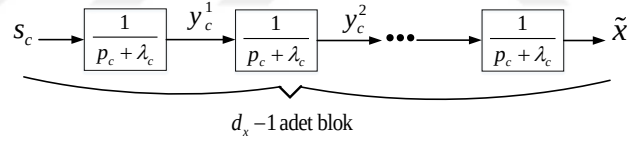
SMC tekniğinin çekici bir özelliği ise derecesi d_x olan bir izleme problemini birinci dereceden bir dengeleme (stabilization) problemine çevirmesidir. Şöyle ki, durum vektörü $\mathbf{x}$ tarafından bir referans yörüngesinin izlenmesi kayan yüzey s_c ’nin dengelenmesine dönüşür. Denklem (6.2)’daki tanımı itibariyle kayan yüzey, $\tilde{x}^{(d_x-1)}$ ’ni içerdiğinden ötürü, kontrol girdisi u ’nun ortaya çıkması için kayan yüzeyin sadece bir kere türevini almak gerekir. Uygun bir u hesaplayarak, kayan yüzey dengelenebilir.

Orijini olan $s_c = 0$ 'a görütülebilir ve bir kere ulaşınca, $\dot{s}_c$ içinde geçen kontrol işareti u ile oynayarak $\dot{s}_c = 0$ eşitliğinin sağlanmasıyla kayan yüzey değişkeni sonsuza dek orijininde tutulabilir. $s_c = \dot{s}_c = 0$ sağlandığında, kayan yüzeyi ifade eden diferansiyel denklemin asimptotik kararlı denge noktası sayesinde, izleme hatası vektörü $\tilde{\mathbf{x}}$ bu denklemin denge noktası olan $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ 'a sonlu zamanda yakınsar. Örnek olarak ikinci dereceden bir sistemi düşünersek ($d_x = 2$) bu diferansiyel denklem, (6.3) olacaktır ve bu denklemdeki $\tilde{x}$, denge noktasına $1/\lambda_c$ gibi bir zaman sabitiyle yakınsayacaktır.

Dahası, izleme hatası vektörü $\tilde{\mathbf{x}}$ üzerindeki sınırlar (bounds) (6.2)'daki skaler s_c üzerindeki sınırlara dayanarak hesaplanabilir. O halde, s_c , izleme başarımına dair gerçek bir kıstas görülebilir. Örneğin, $\tilde{\mathbf{x}}(0) = 0$ olsun. O zaman,

$$\forall t \geq 0, |s_c(t)| \leq \Phi_c \Rightarrow \forall t \geq 0, |\tilde{x}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda_c)^i \varepsilon_c, \quad i = 0, \dots, d_x - 1 \quad (6.4)$$

ifadesine erişiriz ki burada, $\varepsilon_c = \Phi_c/(\lambda_c)^{d_x-1}$ olmaktadır. Şekil 6.2 bize göstermektedir ki, $p_c = \frac{d}{dt}$, Laplace işlecini göstermek üzere, $\tilde{x}$, s_c 'nin bir dizi alçak geçiren süzgeçten (low pass filter) geçirilmesi ile elde edilebilir. Dikkat ediniz ki, ilk



Şekil 6.2: $\tilde{x}$ üzerindeki sınırların hesaplanması.

süzgecin çıktısı

$$y_c^1(t) = \int_0^t e^{-\lambda_c(t-\tau)} s_c(\tau) d\tau \quad (6.5)$$

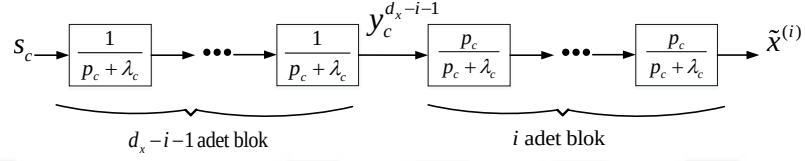
şeklinde hesaplanır. Eğer $|s_c| \leq \Phi_c$ ise

$$\begin{aligned} |y_c^1(t)| &\leq \Phi_c \int_0^t e^{-\lambda_c(t-\tau)} d\tau = \\ &\Phi_c e^{-\lambda_c t} \int_0^t e^{\lambda_c \tau} d\tau = \\ &\Phi_c e^{-\lambda_c t} \frac{1}{\lambda_c} e^{\lambda_c \tau} \Big|_0^t = \\ &\frac{\Phi_c}{\lambda_c} (1 - e^{-\lambda_c t}) \leq \frac{\Phi_c}{\lambda_c} \end{aligned} \quad (6.6)$$

ifadesini elde ederiz. Aynı mantık ikinci süzgeçten $(d_x - 1)$ numaralı olana kadar uygulandığında $y_c^{d_x-1} = \tilde{x}$ 'e ulaşırız. Bunun sonucu olarak ise

$$|\tilde{x}| \leq \frac{\Phi_c}{(\lambda_c)^{d_x-1}} = \varepsilon_c \quad (6.7)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde, $\tilde{x}^{(i)}$, s_c 'nin Şekil 6.3'te gösterilen bir dizi süzgeçten geçirilmesinin ürünü olarak yorumlanabilir. Denklem (6.7)'de elde ettiğimiz sonuçtan



Şekil 6.3: $\tilde{x}^{(i)}$ üzerindeki sınırların hesaplanması.

istifade ederek, rahatlıkla

$$|y_c^{d_x-i-1}| \leq \frac{\Phi_c}{(\lambda_c)^{d_x-i-1}} \quad (6.8)$$

ifadesi elde edebilir. Ek olarak, dikkat ediniz ki

$$\frac{p_c}{p_c + \lambda_c} = \frac{p_c + \lambda_c - \lambda_c}{p_c + \lambda_c} = 1 - \frac{\lambda_c}{p_c + \lambda_c} \quad (6.9)$$

olmaktadır. Denklem (6.6)'dakine benzer hesaplamalar yapılarak, görülecektir ki

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \left(\frac{\Phi_c}{(\lambda_c)^{d_x-i-1}} \right) \left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda_c} \right)^i = (2\lambda_c)^i \varepsilon_c \quad (6.10)$$

olmaktadır ki bu, (6.4)'ü doğrulamaktadır. Eğer $\tilde{\mathbf{x}}(0) \neq 0$ ise (6.4)'teki sınırlara $(d_x - 1)/\lambda_c$ zaman sabiti ile asimptotik yakınsaklık, her birinin zaman sabiti $1/\lambda_c$ 'ye eşit olan $d_x - 1$ adetlik bir dizi süzgeçten ötürüdür. Bu sebepten, (6.4), derecesi d_x olan genel bir durum izleme probleminin s_c 'ye ait birinci dereceden bir dengeleme problemine dönüştürülmesini ilgilendiren başarıım kistaslarını nicelleştirmektedir (quantification).

Durumların kayan yüzeye ulaşmasını mümkün kılmak için, bir kayma kipine erişebilmek için sağlanması gereken bir *ulaşma koşulu* (reachability condition) vardır.

Bu bize aynı zamanda skaler s_c ’yi sıfırda tutmaya dair birinci dereceden problemin çözümünü sunacaktır. Bu koşulu tanıtmadan önce,

$$V(s_c) = \frac{1}{2}s_c^2 \quad (6.11)$$

gibi bir pozitif tanımlı ve çapsal sınırsız bir Lyapunov fonksiyonunu tanımlamamız gerekir ki bu,

$$\begin{aligned} V(s_c) &\geq 0, \quad \text{tüm } s_c \in \mathbb{R} \text{ için} \\ V(s_c) &= 0, \quad \text{demektir ki } s_c = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\lim_{|s_c| \rightarrow \infty} V(s_c) = \infty$$

şeklindeki pozitif tanımlılık ve çapsal sınırsızlığın tanımına uyar. Sonlu zaman içinde $V(s_c) = 0$ yapacak bir koşul türetebilirsek bir kayan kipe ulaşmamaız mümkün olabilir ($s_c = 0$). Bu koşul, ulaşma koşulu olarak adlandırılır ve kayan yüzeye sonlu zamanda ulaşılmasını temin eder. Bu, kayan yüzey üzerinde, çıktı izleme hatası $\tilde{x}$ ’nın $1/\lambda_c$ gibi bir zaman sabitiyle ($d_x = 2$ için) asimptotik azalışı gibi bir anlama da sahiptir. Sistem durum yörüngelerinin kayan yüzeye doğru sürülmesi ulaşma safhasında gerçekleşir. Denklem (6.11)’deki Lyapunov fonksiyonunu gözeterek, şimdi ulaşma koşulunu türeteceğiz. Ancak, bundan önce, kısaca i) ulaşma zamanının matematiksel ifadesini kayan yüzeye ilişki kurarak türetmeliyiz, ii) kayan kontrol kuralını (sliding control law) gürbüzlük ile niteleyen önsezi hakkında konuşmalıyız ve iii) eşdeğer kontrol (equivalent control) u_{eq} kavramını tanıtmalıyız. Dikkat ediniz ki, u_{eq} , bir kere $t = t_r$ anında ulaşıldığında, $t \geq t_r$ için $\dot{s}_c(t) = 0$ olmasını sağlayarak durum yörüngelerini kayan yüzey $s_c(t) = 0$ üzerinde tutar. u_{eq} ’in türetilişi sonra verilecektir.

Şu yargıya varmak kolaydır ki SMC yöntembilimi, denge noktası $s_c = 0$ etrafında asimptotik kararlılık ilkesi üzerine kurulmuştur (Shtessel ve diğ., 2014). Çünkü istenen şudur ki sistem durumları denge noktasına varsın ve bir kere varınca hep orada kalsın. Bunu başarmak için, (6.11)’deki Lyapunov fonksiyonunun türevininin

aşağıdaki tanıma uygun şekilde negatif tanımlı olması gerekir.

$$\begin{aligned}\dot{V}(s_c) &< 0, \quad \text{tüm } s_c \neq 0 \text{ için} \\ \dot{V}(s_c) &= 0, \quad \text{demektir ki } s_c = 0\end{aligned}\tag{6.13}$$

Denklem (6.11)'i göz önünde bulundurarak ve (6.13) üzerine temellenecek şekilde, Lyapunov fonksiyonunun şu şekilde bir azalış davranışı sergilemesini isteriz.

$$\begin{aligned}\dot{V}(s_c) &= s_c \dot{s}_c \\ &\leq -\kappa_c |s_c|\end{aligned}\tag{6.14}$$

ki burada $\kappa_c > 0$, azalış hızını gösterir. κ_c ile oynayarak, kontrolcümüzü Lyapunov fonksiyonunun sıfır olacağı, yani, durum yörüngelerinin kayan yüzeye ulaşacağı, istenen bir ulaşma zamanı ile tasarlayabiliriz. Denklem (6.14)'ü gözeterek ulaşma zamanı t_r için geçerli olan ifadeyi aşağıdaki eşitsizliği hesaba katacak şekilde türetebiliriz.

$$\begin{aligned}s_c \dot{s}_c &\leq -\kappa_c |s_c| \\ |s_c| \text{sign}(s_c) \dot{s}_c &\leq -\kappa_c |s_c| \\ \text{sign}(s_c) \dot{s}_c &\leq -\kappa_c\end{aligned}\tag{6.15}$$

Denklem (6.15)'in $0 \leq \tau \leq t$ zaman dilimi üzerinden integralini aldığımızda

$$\begin{aligned}|s_c(t)| - |s_c(0)| &\leq -\kappa_c t \\ |s_c(t)| &\leq |s_c(0)| - \kappa_c t\end{aligned}\tag{6.16}$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (6.11)'deki gibi tanımlanmış bir Lyapunov fonksiyonunun sıfır olduğu an ($s_c(t_r) = 0$ olmasıyla eşdeğer) olan ulaşma zamanı $t = t_r$ 'yi bulmak istiyorsak

$$\underbrace{|s_c(t_r)|}_0 \leq |s_c(0)| - \kappa_c t_r\tag{6.17}$$

denklemini ileriye ve sonunda, (6.3) ve (6.17)'yi göz önünde bulundurarak, $d_x = 2$ olan durumda

$$t_r \leq \frac{|s_c(0)|}{\kappa_c} = \frac{|\dot{\tilde{x}}(0) + \lambda_c \tilde{x}(0)|}{\kappa_c}\tag{6.18}$$

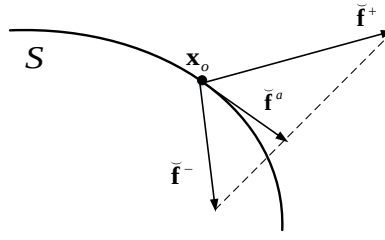
ifadesindeki gibi sınırlanan sonlu ulaşma zamanını elde ederiz.

Kayan kontrol kuralını gürbüzlük ile niteleme yaklaşımını tanıtalım. Biliyoruz ki kayma safhasında sistemi eşdeğer kontrol u_{eq} ile beslemek, $t \geq t_r$ için $\dot{s}_c(t) = 0$ olmasını sağlar ve böylece durum yörüngelerinin kayan yüzey $s_c = 0$ üzerinde tutulmasını garanti eder. Bu safhada, izleme hatasının ve türevinin orijine $1/\lambda_c$ gibi ($d_x = 2$ için) bir zaman sabitiyle asimptotik yakınsaklığı sağlanır. Bu, ideal olan durumdur. Ancak, parametrik belirsizlik veya bozucu etki durumunda, kontrol kuralının bunlarla başa çıkabilmesi için, kayan yüzey $s_c = 0$ etrafında süreksiz olması gerekir (Slotine ve Li, 1991). O yüzden, kontrol kuralına $s_c = 0$ etrafında süreksizliğe sahip olan bir anahtarlama terimini

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} + u_{disc} \\ u_{disc} &= -\frac{k_c}{g(\mathbf{x})} \text{sign}(s_c) \\ \text{sign}(s_c) &= \begin{cases} +1, & s_c > 0 \\ 0, & s_c = 0 \\ -1, & s_c < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.19)$$

denklemindeki gibi ekleyeceğiz ki burada k_c , anahtarlama terimi için bir tasarım parametresidir ve bunun seçimi sonra, ulaşma koşulunun türetilmesi esnasında verilecektir. Kayan kontrol kuralı u (6.19)'daki gibi olduğunda, sistem durumları istenen değerlere Şekil 6.4'te gösterildiği gibi kayar. Dikkat ediniz ki, süreksizlikten ötürü, kayan yüzey üzerinde bir zig-zag hareketi göze çarpar. Buna çatırdama (chattering) denmektedir ve uygulamada çoğunlukla istenmeyen bir şeydir. Bunun çaresini sonra sunacağız.

Şimdi, eşdeğer kontrol u_{eq} 'in türetilişini verelim. Bunun için, öncelikle, Filippov'un eşdeğer dinamik kavramını kısaca açıklamalıyız. Çünkü, zaten gördüğümüz üzere, (6.19)'daki kayan kontrol kuralı u , modelleme hatası ve bozucu etkiyle başa çıkabilmek için süreksiz bir terim içermek zorundadır. Bu, sistem dinamikleri (6.1)'i durumlar cinsinden süreksiz yapmaktadır. Filippov süreksizliklere sahip olan diferansiyel denklemler için bir çözüm önermiştir. Bu çözümü verdikten sonra, Utkin'e atfedilen eşdeğer kontrol yöntemini vereceğiz. Filippov'un çözümünü



Şekil 6.5: Filippov'un çözümünün oluşturulması.

konveks kümesinden oluşan bir diferansiyel denklemdir ve

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \quad (6.24)$$

olmaktadır.

Şimdi, Filippov'un eşdeğer dinamikleri ile Utkin'in eşdeğer kontrol yöntemi arasındaki ilişkiyi kuralım. Kayma safhasında, $\dot{s}_c = 0$ sağlanmalıdır. Denklem (6.1)'deki sistem dinamiklerini gözeterek açık haliyle yazdığımızda şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned} \dot{s}_c &= \ddot{x} + \lambda_c \dot{\tilde{x}} \\ &= \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}} \\ &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Denklem (6.19)'daki kayan kontrol kuralını yeniden yazalım.

$$u = u_{eq} - \frac{k_c}{g(\mathbf{x})} \text{sign}(s_c) \quad (6.26)$$

Dikkat ediniz ki, sign fonksiyonunun tanımından ötürü, $s_c = 0$ noktası $\text{sign}(s_c)$ için bir süreksizlik noktasıdır. sign için sınır değerleri, süreksizlik noktasına bu noktanın zıt taraflarından yaklaşıldığında +1 ve -1'dir. Bunu gözeterek,

$$\begin{aligned} u &= \gamma_f u^+ + (1 - \gamma_f) u^- \\ u^+ &= u_{eq} - \frac{k_c}{g(\mathbf{x})} \\ u^- &= u_{eq} + \frac{k_c}{g(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (6.27)$$

denklemini yazabiliriz. Denklem (6.27)'deki u^+ ve u^- 'yi (6.25)'te yerine

yazdığımızda $\dot{s}_c$ için ortalama bir değeri şu şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\dot{s}_c^a &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) (\gamma_f u^+ + (1 - \gamma_f) u^-) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}} \\
&= f(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}} + g(\mathbf{x}) \left(\gamma_f \left(u_{eq} - \frac{k_c}{g(\mathbf{x})} \right) + (1 - \gamma_f) \left(u_{eq} + \frac{k_c}{g(\mathbf{x})} \right) \right) \\
&= f(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}} + g(\mathbf{x}) \left(u_{eq} + (1 - 2\gamma_f) \frac{k_c}{g(\mathbf{x})} \right)
\end{aligned} \tag{6.28}$$

O halde, (6.28)'in sağ tarafı

$$\check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \left\{ f(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}} + g(\mathbf{x}) \left(u_{eq} + (1 - 2\gamma_f) \frac{k_c}{g(\mathbf{x})} \right) : \text{for all } \gamma_f \in [0, 1] \right\} \tag{6.29}$$

konveks kümesi içindedir ve

$$\dot{s}_c \in \check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \tag{6.30}$$

olmaktadır. Denklem (6.28)'de, γ_f , $\dot{s}_c^a$ 'yı süreksizlik noktasında $\dot{s}_c$ 'ye teğet yapacak şekilde bulunabilir. Bu süreksizlik noktası, $[x, \dot{x}]^T$, Şekil 6.4'te gösterilen $s_c = 0$ doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta olabilir.

Eşdeğer dinamikler kavramını bitirdikten sonra, artık eşdeğer kontrol yöntemini SMC'nin şu temel ilkesini gözeterek sunabiliriz: bir kere ulaşıncaya kadar durum yörüngelerini kayan yüzeyde tutmak. Bunu başarmak için, kayma safhasında $\dot{s}_c = 0$ sağlanmalıdır. Eşdeğer dinamiklerden biliyoruz ki bir fonksiyonun bir süreksizlik noktasındaki eşdeğeri aslında o fonksiyonun bu noktadaki ortalamasıdır. O sebeple, bunla uyumlu olacak şekilde eşdeğer kontrol, sisteme kontrolcü tarafından yapılan ortalama etki olarak yorumlanabilir. Dikkat ediniz ki, kayan kontrol kuralı (6.26)'nın süreksiz bileşeninin varlığı sistemdeki belirsizlikler, sistemin modellenmesindeki hatalar veya sisteme etki eden dış bozucular gibi sebeplerden ötürüdür. Eğer sistemi temsil eden matematiksel model kesin olsaydı kontrol kuralı içine herhangi bir anahtarlama terimini dahil etmeye ihtiyaç duyulmazdı. Böyle bir durumda, sadece eşdeğer kontrol kuralı u_{eq} 'e ihtiyaç duyulurdu ki bu, $t > t_r$ için, $\dot{s}_c(t) = 0$ olmasını garanti ederek sistem durumlarını kayan yüzey $s_c(t) = 0$ üzerinde tutan sürekli kontrol kuralıdır. u_{eq} , $\dot{s}_c = 0$ seçerek ve kayan kontrol kuralındaki anahtarlama terimini (sign

fonksiyonunu) yok sayacak şekilde (6.25)'i çözerek hesaplanabilir.

$$u_{eq} = \frac{1}{g(\mathbf{x})} (\ddot{x}_d - f(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{\tilde{x}}) \quad (6.31)$$

Bu noktada, SMC tekniğinin duyarsızlık (insensitivity) özelliğinden bahsetmemmiz gerekir. Bu, kayan kipli kontrol sistemlerinin belli bir bozucu etki türüne karşı değişmezlik (invariance) özelliğidir. Bu tür, girdiyle sisteme aynı kanal üzerinden etki eder ve eşleşen bozucu etki (matched disturbance) olarak anılır. Varsayınız ki (6.1)'deki sistemimiz $d \in \mathfrak{R}$ gibi, girdi kanalı üzerinden etki eden bir bozucu etki altında olsun. Örneğin, $d_x = 2$ ve $\mathbf{x} = [x, \dot{x}]^T = [x_1, x_2]^T$ olsun.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + d \end{aligned} \quad (6.32)$$

Denklem (6.25) ve (6.32)'yi gözeterek

$$\dot{s}_c = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + d - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}} \quad (6.33)$$

denklemini yazabiliriz ve böylece eşdeğer kontrolü şöyle elde ederiz.

$$u_{eq} = \frac{1}{g(\mathbf{x})} (\ddot{x}_d - f(\mathbf{x}) - d - \lambda_c \dot{\tilde{x}}) \quad (6.34)$$

Denklem (6.34)'teki u_{eq} 'i (6.32)'de yerine yazarsak kayma safhasındaki sistem dinamikleri

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{g(\mathbf{x})} (\ddot{x}_d - f(\mathbf{x}) - d - \lambda_c \dot{\tilde{x}}) \right) + d \\ &= f(\mathbf{x}) + \ddot{x}_d - f(\mathbf{x}) - d - \lambda_c \dot{\tilde{x}} + d \\ &= \ddot{x}_d - \lambda_c \dot{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (6.35)$$

şeklinde olur. Denklem (6.35)'ten görüldüğü üzere, bozucu etki terimi ortadan kalkar ve kayma safhasındaki kapalı çevrim dinamikleri, girdi ile eşleşen bozucu etkiye tamamiyle duyarsız olur.

Ancak, bozucu etki eşleşmeyen türde olduğunda, yani, sisteme girdinin etki ettiğinden farklı bir kanal üzerinden etki ettiğinde, örnek sistemimiz

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + d \\ \dot{x}_2 &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u\end{aligned}\tag{6.36}$$

dinamik denklemi tarafından idare edilir. Bu durumda, eşdeğer kontrol

$$u_{eq} = \frac{1}{g(\mathbf{x})} (\ddot{x}_d - f(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{\tilde{x}})\tag{6.37}$$

şeklinde hesap edilir ve (6.37)'deki u_{eq} 'i (6.36)'da yerine yazdığımızda kayma safhasındaki kapalı çevrim dinamiklerini elde ederiz

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + d \\ \dot{x}_2 &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{g(\mathbf{x})} (\ddot{x}_d - f(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{\tilde{x}}) \right) \\ &= f(\mathbf{x}) + \ddot{x}_d - f(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{\tilde{x}} \\ &= \ddot{x}_d - \lambda_c \dot{\tilde{x}}\end{aligned}\tag{6.38}$$

ki burada, bozucu etki kendi varlığını dinamikler üzerinde korumaktadır.

Dikkat etmeye değer bir nokta da şudur ki, eşleşen bozucu etki durumundaki eşdeğer kontrol, genelde bilinmez olan bozucu etkiye bağlıdır. Bu sebeple, u_{eq} daha ziyade kuramsal bir kavramdır ve sisteme aslen uygulanabilen bir kontrol değildir. Her zaman süreklidir, oysaki asıl kontrol, doğası gereği süreksiz olabilir. Esasında, $u_{eq}, \dot{s}_c = 0$ denkleminin, sistemin kayma düzenindeyken kapalı çevrim kararlılığının çalışılabildiği cebirsel bir çözümdür. Ölçülemeyen veya analitik olarak bilinmeyen bir büyüklüğe (bozucu etkiye) dayanarak bir ifade oluşturamayacağımıza göre, eşdeğer kontrol terimi u_{eq} , (6.31)'de tanımlanan gibi olacaktır. Yine de bu, sisteme etki eden herhangi bir eşleşen bozucu etkinin kayan kontrol tasarımında göz ardı edileceği anlamına gelmez. Kayan kontrol kuralı için kararlılık koşulunu devam eden paragrafta türetirken, sistemin modellenmesindeki hatalar göz önüne alındığı gibi, bu da göz önüne alınacaktır.

Sonunda, kayan kip için ulaşılabilirlik koşulunu türetmeye geçiyoruz. Varsayınız ki, sistem fonksiyonu f hakkında tam bilgiye sahip değiliz ancak ona dair

bir yaklaşıklamamız var, $\hat{f}$. Bu gerçeği gözeterek, (6.31)'deki eşdeğer kontrol ifadesini şu şekilde yeniden yazıyoruz.

$$u_{eq} = \frac{1}{g(\mathbf{x})} \left(\ddot{x}_d - \hat{f}(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{\tilde{x}} \right) \quad (6.39)$$

Denklem (6.26) ve (6.39)'u göz önünde bulundurarak, kayan kontrol kuralını şu şekilde yazabiliriz.

$$u = \frac{1}{g(\mathbf{x})} \left(\ddot{x}_d - \hat{f}(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{\tilde{x}} - k_c \text{sign}(s_c) \right) \quad (6.40)$$

Şimdi, (6.40)'taki kontrol u 'yu (6.14)'te yerine koyarak (6.14)'ü yeniden yazacağız. Bundan önce, kontrol kazancı $g(\mathbf{x})$ 'in kesin şekilde biliniyor olduğunu farz ettiğimizi söylememiz gereklidir (buna dair belirsizlik olduğu durum ileride tartışılacak).

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_c) &= s_c \dot{s}_c \\ &= s_c (\ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}}) = s_c (\ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}) \\ &= s_c (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}) \\ &= s_c \left(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{g(\mathbf{x})} \left(\ddot{x}_d - \hat{f}(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{\tilde{x}} - k_c \text{sign}(s_c) \right) \right) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}} \right) \\ &= s_c \left(f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}) - k_c \text{sign}(s_c) \right) = s_c \left(f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}) \right) - k_c |s_c| \end{aligned} \quad (6.41)$$

f üzerindeki modelleme belirsizliğini hesaba katmalıyız. Varsayınız ki, f üzerindeki belirsizlik, durumların bilinen bir fonksiyonu $F_c = F_c(\mathbf{x})$ tarafından sınırlanıyor olsun.

$$|f - \hat{f}| \leq F_c \quad (6.42)$$

F_c , bazı uygulamalarda, eğer var ise, aynı zamanda dış eşleşen bozucuyu da içeren bir toplu (lumped) belirsizlik terimi olarak görülebilir. Denklem (6.14), (6.41) ve (6.42)'yi göz önünde bulundurarak,

$$\dot{V}(s_c) \leq -|s_c|(k_c - F_c) \leq -\kappa_c |s_c| \quad (6.43)$$

ifadesini yazabiliriz ki bu bizi kayan kip için şöyle bir ulaşılabilirlik ya da var oluş koşuluna ulaştırır.

$$k_c \geq F_c + \kappa_c \quad (6.44)$$

Denklem (6.40)'ta verilen gibi bir kontrol girdisi u , anahtarlama terimi k_c 'nin (6.44)'teki ulaşılabilirlik koşulunu sağladığı bir durumda sistem (6.1)'e uygulanırsa pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu $V(s_c)$, (6.14)'te verildiği gibi $\kappa_c > 0$ hızıyla azalır. Denklem (6.18) tarafından sınırlanan ulaşma zamanı t_r ardından, durum yörüngeleri, kayan yüzey $s_c = 0$ üzerinde uzanmaya başlar. Bu anda, (6.2)'deki skaler s_c ($d_x = 2$ ise (6.3)'teki skaler s_c) sıfıra eşitlenir ve böylece $V(s_c)$ de sıfıra eşitlenmiş olur. Bu, ulaşma safhasının tamamlandığı anlamına gelir. Bu andan itibaren, $\tilde{\mathbf{x}}$ 'nin orijine eksponensiyel olarak yakınsadığı, yani, durum vektörü $\mathbf{x}$ 'in istenen yörünge $\mathbf{x}_d$ 'ye, kayan yüzey parametresi λ_c 'ye dayanan bir hızla yakınsadığı kayma safhası başlamış olur. $\tilde{\mathbf{x}}$ 'nin orijine doğru azalışına ilişkin zaman sabiti $(d_x - 1)/\lambda_c$ 'dir ($d_x = 2$ ise $1/\lambda_c$). Bir kere $s_c = 0$ durumuna ulaşıncaya bu durum, (6.25)'teki $\dot{s}_c$ 'nin sıfıra eşit tutulmasıyla korunur. Bunu başarmak için, (6.39)'da verilen u_{eq} 'i bulmak için $\dot{s}_c = 0$ denklemi cebirsel olarak çözülür. Halbuki, u_{eq} , sistem fonksiyonu f üzerinde belirsizlik varken, yani, $\hat{f} \neq f$ iken, kayan yüzey değişkeni s_c 'yi dengeleyemez. O sebepten, süreksiz bir bileşen, (6.19)'daki u_{disc} , uygun bir kontrol kuralı geliştirmek için gereklidir. u_{eq} , modellemenin kesin olduğu durumda s_c 'yi sıfırda tutmak için gerekli olan kontrol eylemini sağlar iken u_{disc} ise modelleme belirsizliğini telafi eder. Denklem (6.40)'ta verilen kayan kontrol kuralı u , u_{eq} ve u_{disc} 'in birleşimi olarak görülebilir. Kayan kontrolün başarımı (6.44)'teki ulaşılabilirlik koşulu sağlanıyorsa mümkündür. SMC tekniğinin gürbüzlüğü, birinci dereceden sistemler için geçerli olan sezgisel (intuitive) strateji üzerine kuruludur. O da şudur ki: eğer hata negatifse pozitif tarafa itmek veya tam tersi, ki bu, kontrol kuralındaki süreksiz terim ile sağlanır.

Şimdi, belirsiz bir kontrol kazancının olduğu durum için ulaşılabilirlik koşulunu inceleyelim. Farz ediniz ki kontrol kazancı tam olarak bilinmiyor ancak ilgili sınırları biliniyor. Sistem dinamikleri (6.1)'i gözeterek,

$$0 < g_{min} \leq g(\mathbf{x}) \leq g_{max} \quad (6.45)$$

gibi bir aralık tanımlayalım. Kontrol girdisi sisteme çarpım üzerinden (multiplicatively) giriş yaptığından ötürü, kontrol kazancı $g(\mathbf{x})$ 'e dair kestirim $\hat{g}$ için,

en düşük ve en yüksek değerlerin geometrik ortalaması olması yönünde bir sezgisel tercihte bulunuruz.

$$\hat{g} = (g_{min}g_{max})^{1/2} \quad (6.46)$$

Denklem (6.45)'teki sınırları

$$\beta_c^{-1} \leq \frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} \leq \beta_c \quad (6.47)$$

şeklinde yazabiliriz ki burada,

$$\beta_c = \left(\frac{g_{max}}{g_{min}} \right)^{1/2} \quad (6.48)$$

olmaktadır. g 'nin üzerinde belirsizlik olduğu durumda tasarlanacak kontrol kuralının (6.47)'deki sınırlı, çarpımsal belirsizliğe karşı gürbüz olması gerektiğini biliyoruz. Bu açıdan, β_c 'yi, doğrusal kontroldeki terimbiliminden (terminology) esinlenerek kazanç marjini (gain margin) olarak adlandırıyoruz. β_c zamanla değişen veya durumlara bağlı bir şey olabilir. Dikkat ediniz ki, (6.47) alternatif olarak

$$\beta_c^{-1} \leq \frac{g(\mathbf{x})}{\hat{g}} \leq \beta_c \quad (6.49)$$

şekinde yazılabilir. Şimdi, belirsiz kontrol kazançlı mevcut durum için ulaşılabilirlik koşulunu, bu koşulun (6.41)-(6.44)'te yer alan önceki türetilişine (6.48)'deki kazanç marjini β_c 'yi dahil ederek türetelim. Böylece, kesin bilinen bir kontrol kazancının olduğu önceki durumda bir kayan kipin var olma koşuluna dair yapılmış olan inceleme, belirsiz kontrol kazançlı sistemlere uyarlanmış olur. Yeni koşulun türetilmesine başlamadan önce, (6.40)'taki kayan kontrol kuralını şu şekilde yeniden tanımlamamız gereklidir.

$$u = \frac{1}{\hat{g}} (\hat{u} - k_c \text{sign}(s_c)) \quad (6.50)$$

ki burada,

$$\hat{u} = \ddot{x}_d - \hat{f}(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{\tilde{x}} \quad (6.51)$$

olmaktadır. Şimdi, (6.50) ve (6.51) tarafından verilen kontrol u 'yu gözetip (6.14)'teki

Lyapunov fonksiyon türevini yeniden yazarak türetiliše başlayalım.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(s_c) &= s_c \dot{s}_c \\
&= s_c (\ddot{x} + \lambda \dot{x}) = s_c (\ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{x}) \\
&= s_c (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{x}) \\
&= s_c \left(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{\hat{g}} (\ddot{x}_d - \hat{f}(\mathbf{x}) - \lambda_c \dot{x} - k_c \text{sign}(s_c)) \right) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{x} \right) \\
&= s_c \left(f(\mathbf{x}) - \frac{g(\mathbf{x})}{\hat{g}} \hat{f}(\mathbf{x}) + \left(\frac{g(\mathbf{x})}{\hat{g}} - 1 \right) (\ddot{x}_d - \lambda_c \dot{x}) - \frac{g(\mathbf{x})}{\hat{g}} k_c \text{sign}(s_c) \right)
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Denklem (6.52)'nin her iki tarafını $\hat{g}/g(\mathbf{x})$ ile çarparak

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} \dot{V}(s_c) &= \frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} s_c \dot{s}_c \\
&= s_c \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}) + \left(1 - \frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} \right) (\ddot{x}_d - \lambda_c \dot{x}) - k_c \text{sign}(s_c) \right)
\end{aligned} \tag{6.53}$$

denklemini elde ederiz. Eğer $f = \hat{f} + (f - \hat{f})$ olduğunu yazarsak $\dot{s}_c$ 'yi yeniden

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} \dot{s}_c &= \\
&\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{x}) + \frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})) - \hat{f}(\mathbf{x}) + \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} - 1 \right) (-\ddot{x}_d + \lambda_c \dot{x}) - k_c \text{sign}(s_c) \\
&= \\
&\left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} - 1 \right) \hat{f}(\mathbf{x}) + \frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})) + \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} - 1 \right) (-\ddot{x}_d + \lambda_c \dot{x}) - k_c \text{sign}(s_c) \\
&= \\
&\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})) + \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} - 1 \right) (\hat{f}(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{x}) - k_c \text{sign}(s_c)
\end{aligned} \tag{6.54}$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem (6.54)'ü (6.53)'te yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} \dot{V}(s_c) &= \frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} s_c \dot{s}_c \\
&= s_c \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})) + \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} - 1 \right) (\hat{f}(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}}) - k_c \text{sign}(s_c) \right) \\
&= s_c \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})) \right) + s_c \left(\left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} - 1 \right) (\hat{f}(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}}) \right) - k_c |s_c| \\
&\leq |s_c| \left| \frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})) \right| + |s_c| \left| \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} - 1 \right) (\hat{f}(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}}) \right| - |s_c| k_c
\end{aligned} \tag{6.55}$$

ifadesini elde ederiz ve (6.14)'ü göz önünde bulunarak

$$\begin{aligned}
|s_c| \left(\left| \frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})) \right| + \left| \left(\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} - 1 \right) (\hat{f}(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda_c \dot{\tilde{x}}) \right| - k_c \right) \\
\leq -\frac{\hat{g}}{g(\mathbf{x})} \kappa_c |s_c|
\end{aligned} \tag{6.56}$$

ifadesinin yazabiliriz. Daha sonra, (6.42), (6.47) ve (6.51)'i göz önünde bulundurarak, (6.56)'yı belirsiz kontrol kazanç durumu için olan ulaşılabilirlik koşulunu türetmek için şu şekilde düzenleyebiliriz.

$$k_c \geq \beta_c (F_c + \kappa_c) + (\beta_c - 1) |\hat{u}| \tag{6.57}$$

Dikkat ediniz ki, kazanç marjini, kayan kipin var olma koşulunun türetilişinde hesaba katıldığında kontroldeki süreksizlik bölgesi büyümüştür. Kazanç marjini üzerinde belirsizlik olmadığında $\beta_c = 1$ olur ve (6.57), (6.44)'te verilmiş olan standart ulaşılabilirlik koşulunun ifadesine indirgenir.

Quadrotror dinamiklerini gözetten SMC tasarımına geçmeden önce, kayan kip kavramında geçen sign fonksiyonunun önemli bir yanından bahsetmemiz gerekir. Çünkü, kayma safhasında, kayan yüzey $s_c = 0$ koşulu karşılanmalıdır ve sonlu bir zamandan sonra, $\tilde{x}_i = 0$, $i = 1, \dots, 12$, olup bundan sonra bu durum korunmaktadır. Zaten bilmekteyiz ki, $\tilde{x}_i = \hat{x}_i - x_i$, $i = 1, \dots, 12$, sistemin ölçülen durumlarına bağlıdır. Ölçülen büyüklüklerdeki gürültü, anahtarlama terimi $\text{sign}(\cdot)$ 'ı büyük ölçüde etkileme potansiyeline sahiptir. Bu demektir ki, küçük bir $\tilde{x}_i \neq 0$ değeri $\text{sign}(\cdot)$ fonksiyonunun sıfırın iki tarafından birine geçmesine neden olabileceğinden ötürü

küçük bir gürültü bile sistem durumlarının kayan yüzey $s_c = 0$ 'dan sapmasına neden olabilir. Bu, sıfırın zıt tarafları arasında sık bir geçişe neden olur ve bu olguya çatırdama denir. Çatırdamayı dindirmek için, $sign(\cdot)$ fonksiyonunun sürekli bir yaklaşıklığının elde edilmesi yoluna başvurulur. Bu tez çalışmasında, süreksiz anahtarlama terimi, $sign(\cdot)$ fonksiyonunun $tanh(\cdot)$ ile yaklaşıklanması suretiyle şu şekilde yumuşatılmıştır (Lambert ve Reyhanoglu, 2018).

$$sign(s_c) \approx tanh(cs_c) = \frac{exp(cs_c) - exp(-cs_c)}{exp(cs_c) + exp(-cs_c)}, \quad (6.58)$$

Not 6.1.1. Denklem (6.58)'den görüldüğü üzere, $c > 0$ gibi bir ek kontrolcü parametresi $tanh(\cdot)$ 'ın eğimini istenen seviyeye ayarlayabilmek için bu fonksiyonun girdisine dahil edilmiştir. (Esfandiari ve Khalil, 1991) tarafından yapılan kararlılık incelemesine göre, eğer eğim parametresi c 'ye yeterince büyük bir değer atanırsa kapalı çevrim sistem, orijin etrafında sıkı (compact) bir kümeye göre global, düzgün ve nihayetinde sınırlı (globally uniformly ultimately bounded) olacaktır. Daha açık olmak gerekirse, hata yörüngeleri orijinin küçük bir komşuluğuna yakınsar. Bu komşuluğun sınırları, tanh fonksiyonunun eğimi olan c arttırılarak keyfi şekilde daraltılabilir. c ile oynayarak, anahtarlama terimini istediğimiz seviyede yumuşatmamız mümkün olur. Küçük bir c seçtiğimizde, ancak yukarıda açıklandığı gibi yeterince büyük, $tanh(\cdot)$ fonksiyonunda sıfırın zıt tarafları arasındaki geçişler nispeten yumuşak olacaktır, yani, sign fonksiyonunda olduğu kadar keskin değil. Böylelikle, düşük genlikli bir gürültü, kontrolcü hata dinamikleri üzerinde büyük bir etkiye sahip olamayacaktır ve çatırdama gözle görülür şekilde elenecektir.

Quadrotor için SMC. Sonunda, şu ana kadarki SMC formülasyonunu kullanarak quadrotor durum uzay modeli (4.32)-(4.39)'u gözetten SMC kontrolcüyü veriyoruz. Dikkat edilmelidir ki, quadrotor, üçü doğrusal (x_i , y_i ve z_i eksenleri üzerindeki konum) ve üçü açısal (yalpalama, yunuslama ve sapma açısı) olmak üzere altı adet konum ve ek olarak, çizgisel ve açısal hızlar olmak üzere bunların türevlerini sunmaktadır. Dolayısıyla, quadrotor dinamikleri altı tane konum-hız çifti sunar ki bunlar şöyledir: $x_1 - x_7$, $x_2 - x_8$, $x_3 - x_9$, $x_4 - x_{10}$, $x_5 - x_{11}$, $x_6 - x_{12}$. Buna dayanarak, quadrotor

durum uzay modelini tamamı, (6.1)'de verilen gibi ve her birinin boyutu iki olan ($d_x = 2$), tamamlayıcı biçimde 6 adet durum denkleminde ibarettir. Bundan başka, quadrotor eksik tahrikli bir sistem olduğu için, girdi sayısı çıktı sayısından azdır, yani, 4 girdisi ve 6 çıktısı vardır. Her bir skaler girdi için (6.40)'taki gibi bir kayan kontrol ifadesi yazabiliriz. Ancak, bu durumda, iki çıktı kontrol edilemiyor olacaktır. Eksik tahriklilikten kaynaklı bu sıkıntıyı çözmek için şu yaklaşımı benimseyeceğiz.

Yalpalama ve yunuslama açılarının (x_4 ve x_5), ataletsel çerçevenin x ve y eksenlerinde yapılan yer değiştirmeyi belirlemesinden ötürü, ki bu, quadrotor durum uzay modelinden teyit edilebilir, x ve y eksenlerindeki referans rotasını kullanarak bu açılar için istenen eğrileri elde edebiliriz (Runcharoon ve Srichatrapimuk, 2013). Örneğin, x eksen için, yunuslama açısı bu ekseninde bir ivmelenme oluşturacak şekilde dinamiklere etki eder. Denklem (4.32)-(4.39)'u gözeterek, bu etkiyi yeniden yazalım.

$$\dot{x}_7 = \frac{1}{m} (\cos(x_4)\sin(x_5)\cos(x_6) + \sin(x_4)\sin(x_6)) u_1 \quad (6.59)$$

Denklem (6.59)'dan açıktır ki, tüm Euler açılarının $\dot{x}_7$ üzerine etkisi vardır. Halbuki, ataletsel çerçevenin $x - y - z$ eksenleri birlikte ele alındığında, yalnızca x ekseninde bir harekete neden olan Euler açısı yunuslama açısıdır. Bunun üzerine temellenerek, sadece x eksenindeki hareketi incelediğimizde, diğer açıların sıfıra yakın olduğunu varsaymamız gerekir, yani, $x_4 = x_6 \cong 0$. Bu durumda,

$$\dot{x}_7 \cong \frac{1}{m} (\sin(x_5)) u_1 \quad (6.60)$$

ifadesine erişiriz ki bu, bir PD (proportional-derivative) yüzeyinden istifade ederek, istenen yunuslama açısını hesaplamak için aşağıdaki ifadeye dönüştürülebilir.

$$x_5^d \cong \sin^{-1} \left((k_p^x \tilde{x}_1 + k_d^x \dot{\tilde{x}}_1) \frac{m}{u_1} \right) \quad (6.61)$$

Denklem (6.61)'de, $k_p^x > 0$ ve $k_d^x > 0$ PD yüzeyinin oransal ve türevsel kazançları olur iken $\tilde{x}_1$ ise x_1 durumu için izleme hatasıdır. Dikkat ediniz ki, x_5^d aslında x_5 için referans yörüngesidir ki bu, quadrotorun x eksenindeki referans yörüngesini (x_1^d) takip edebilmesi için istenilen yunuslama açısıdır. Diğer bir deyişle, quadrotorun x

ekseni konumu olan x_1 'in x_1^d 'yi izleyebilmesi ancak yunuslama açısı x_5 'in kendisi için referans yörüngesi olan x_5^d 'yi izlemesiyle mümkün olur. Bu iki referans yörüngesi arasındaki kaydadeğer fark şudur ki, x_1^d çevrimdışı şekilde belirlenebilir (otonom uçuş başlamadan önce) ancak x_5^d , x_1^d 'ye bağlı olacak şekilde (6.61) aracılığıyla çevrimiçi hesaplanmalıdır (uçuş esnasında). Benzer bir hesaplama, yalpalama açısı x_4 için istenilen referansı elde etmek için yapılabilir. Çünkü, quadrotor durum uzay modeli (4.32)-(4.39) bize gösterir ki, yalnızca y ekseninde bir hareketi tetikleyecek olan Euler açısı yalpalama açısıdır. y eksenini ilgilendiren ivmelenme denklemini hatırlayalım.

$$\dot{x}_8 = \frac{1}{m} (\cos(x_4) \sin(x_5) \sin(x_6) - \sin(x_4) \cos(x_6)) u_1 \quad (6.62)$$

Sadece y eksenindeki hareketi incelediğimizde, $x_5 = x_6 \approx 0$ olduğunu varsaymamız gerekir. Bu durumda,

$$\dot{x}_8 \approx \frac{1}{m} (-\sin(x_4)) u_1 \quad (6.63)$$

ifadesine erişiriz ki bu, bir PD yüzeyinden istifade ederek, istenilen yalpalama açısını hesap etmek için aşağıdaki ifadeye dönüştürülebilir.

$$x_4^d \approx \sin^{-1} \left(- (k_p^y \tilde{x}_2 + k_d^y \dot{\tilde{x}}_2) \frac{m}{u_1} \right) \quad (6.64)$$

Denklem (6.64)'te, $k_p^y > 0$ ve $k_d^y > 0$ PD yüzeyinin oransal ve türevsel kazançları iken $\tilde{x}_2$, x_2 durumu için izleme hatasını göstermektedir. Dikkat ediniz ki, x_4^d , x_4 için hesaplanmış referans yörüngesidir, ki bu, quadrotorun y eksenindeki konumu için olan referans yörüngesini (x_2^d) izleyebilmesi için istenen yalpalama açısıdır. Denklem (6.61) ve (6.64)'te, izleme hataları $\tilde{x}_i = x_i^d - x_i$, $i = 1, 2$, şeklinde hesap edilir. O sebeple, (6.61) ve (6.64)'ü kullanarak, x_1 ve x_2 'ye karşılık gelen yörünge bilgisini sırasıyla x_5 ve x_4 için olan referans yörüngesine dönüştürmekteyiz. Bunun sonucu olarak, kontrol edilecek çıktıların sayısı iki azalmış olur, ki karşılığında, quadrotorun doğasında var olan eksik tahrikliliğin açtığı zorluğun üstesinden gelmemize imkan tanır.

Şimdi, quadrotor durum uzay modeli (4.32)-(4.39)'a dayanarak, (4.33)'te verilen $\mathbf{u}$ kontrol girdi vektöründeki her bir skaler girdi u_i 'ye, $i = 1, \dots, 4$, (6.40)'ta

gösterilen şekilde bir kontrol kuralı atayabiliriz. Böylece, z eksenindeki konum olan yükseklik (altitude) ile ϕ , θ ve ψ ile gösterilen yalpalama, yunuslama ve sapma saçısal konumlarını (attitude) kontrol edeceğiz. Dikkat ediniz ki, yumuşak bir kontrol girdisi üretebilmek için *sign* fonksiyonu yerine (6.58)'deki tanjant hiperbolik fonksiyonunu kullanmayı benimsiyoruz.

$$u_1 = \frac{1}{g_1^9} \left(\ddot{x}_3^d - \hat{f}_9 - \lambda_c^z \dot{\tilde{x}}_3 - k_c^z \tanh(c^z s_c^z) \right) \quad (6.65)$$

$$u_2 = \frac{1}{g_2^{10}} \left(\ddot{x}_4^d - \hat{f}_{10} - \lambda_c^\phi \dot{\tilde{x}}_4 - k_c^\phi \tanh(c^\phi s_c^\phi) \right) \quad (6.66)$$

$$u_3 = \frac{1}{g_3^{11}} \left(\ddot{x}_5^d - \hat{f}_{11} - \lambda_c^\theta \dot{\tilde{x}}_5 - k_c^\theta \tanh(c^\theta s_c^\theta) \right) \quad (6.67)$$

$$u_4 = \frac{1}{g_4^{12}} \left(\ddot{x}_6^d - \hat{f}_{12} - \lambda_c^\psi \dot{\tilde{x}}_6 - k_c^\psi \tanh(c^\psi s_c^\psi) \right) \quad (6.68)$$

Denklem (6.65)-(6.68)'de, c^i , $i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}$, $\tanh$ fonksiyonunun eğim parametresini göstermektedir. İzleme hatası ve bu hatanın türevi ise

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= x_i - x_i^d \\ \dot{\tilde{x}}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_i^d \end{aligned} \quad i = 3, \dots, 6 \quad (6.69)$$

şeklinde hesap edilmektedir ve (6.65)-(6.68)'deki kontrol formülasyonu şöyledir. $i = 1, \dots, 4$ ve $j = 9, \dots, 12$ olmak üzere, kontrol kazancı g_i^j , (4.36)-(4.37)'de tanımlanmış olan $\mathbf{g}_i$ vektörünün j indisli elemanını gösterir. Benzer şekilde, $i = 9, \dots, 12$ olmak üzere, $\hat{f}_i$, (4.35)'te tanımlı $\mathbf{f}$ fonksiyonun yaklaşıkleması olan $\hat{\mathbf{f}}$ 'nin i indisli elemanını gösterir. Burada, $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ alabiliriz çünkü özel olarak (4.32)-(4.39) ile verilmiş olan quadrotor modelinde herhangi bir belirsizlik yoktur. Benzer şekilde, kontrol kazancı g_i^j de herhangi bir belirsizlik içermez. Anlaşılrlık için bunları yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} \hat{f}_9 &= -g, & \hat{f}_{10} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} x_{11} x_{12}, & \hat{f}_{11} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} x_{10} x_{12}, \\ \hat{f}_{12} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} x_{10} x_{11}, & g_1^9 &= \frac{1}{m} (\cos(x_4) \cos(x_5)), & g_2^{10} &= \frac{1}{I_x}, \\ g_3^{11} &= \frac{1}{I_y}, & g_4^{12} &= \frac{1}{I_z} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Son olarak, (6.65)-(6.68)'deki kayan yüzeylerin tanımları şu şekildedir.

$$\begin{aligned} s_c^z &= \dot{\tilde{x}}_3 + \lambda_c^z \tilde{x}_3 \\ s_c^\phi &= \dot{\tilde{x}}_4 + \lambda_c^\phi \tilde{x}_4 \\ s_c^\theta &= \dot{\tilde{x}}_5 + \lambda_c^\theta \tilde{x}_5 \\ s_c^\psi &= \dot{\tilde{x}}_6 + \lambda_c^\psi \tilde{x}_6 \end{aligned} \quad (6.71)$$

Burada, λ_c^i , $i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}$, kayan yüzey parametresini göstermektedir.

Sonuç olarak, quadrotor için SMC 4 alt kontrolcünden oluşmaktadır. Önce, (4.32)-(4.39)'daki quadrotor dinamiklerini göz önünde bulundurarak, kontrol edilecek her bir çıktı (yükseklik z and açılar $\phi - \theta - \psi$) için, izleme hatası ve bunun türevi (6.69) aracılığıyla hesaplanır. Benzer şekilde, kayan yüzey değişkenleri (6.71) aracılığıyla hesaplanır. Sonra, sistemin ilk kontrol girdisi u_1 (itki kuvveti f_t) (6.65) aracılığıyla ve (6.70)'i gözeterek hesaplanır. Bundan sonra, yalpalama (ϕ) ve yunuslama (θ) açıları için istenilen referans değerleri sırasıyla (6.64) ve (6.61) aracılığıyla hesap edilir. Bu referanslar (6.69)'da yerine yazılıp bu açılara ait izleme hataları ve bunların türevleri elde edilir. u_{2-4} girdileri (kontrol torkları τ_x , τ_y ve τ_z) (6.70)'i gözeterek ve (6.66)-(6.68) aracılığıyla hesaplanır.

6.2 Quadrotorun RSVM Bozucu Etki Gözetleyici Temelli Kayan Kipli Kontrolü

SMC formülasyonunda, gözetlenen durumlarla ölçülen durumları yer değiştirdiğimiz gibi önerilen gözetleyicinin (5.47)'deki dinamikleriyle (4.32)-(4.39)'da sunulan nominal sistem modelini şu şekilde yer değiştiririz. Dikkat ediniz ki, Bölüm 6.1'de belirtildiği gibi, quadrotor durum uzay modelinde hiç bir modelleme hatası bulunmaz ve bu yüzden rahatlıkla $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ alabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\leftarrow \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leftarrow \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{\Theta}_o + \hat{\mathbf{d}} \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) &\leftarrow \mathbf{g}_i(\hat{\mathbf{x}}), \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (6.72)$$

Böylece, aslında bünyesinde bozucu etki terimi barındırmayan SMC formülasyonuna, kestirilmiş bozucu etki teriminin dahil edilmesi, SMC tekniğinin gürbüzlüğüne

Algoritma 4 Quadrotorun RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC kontrolü.

% İlk değer atama:

Algoritma 3'te anlatıldığı gibi RSVM modeliyle alakalı olan ilk değer atamasını yap;
 $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$ için $d_j^i > 0$, $k_j^i > 0$ ve c_j^i gibi SMO parametrelerine ilk değer atama;

$i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}$ için $\lambda_c^i > 0$, $k_c^i > 0$ ve c^i gibi SMC parametrelerine ilk değer atama;
Quadrotorun doğrusal konumu ve sapma açısı için istenen rotayı oluştur: x_i^d , $i \in \{1, 2, 3, 6\}$; **% istenen yalpalama ve yunuslama açıları olay esnasında (on-line)**

% oluşturulacaktır

Gözetleyici durumlarına ilk değer atama: $\hat{\mathbf{x}} = 0$;

% Quadrotor çalışmaya başlar

sürece quadrotor_çalışıyor==doğru yap

Yalpalama ve yunuslama açıları için istenen referans değerlerini sırasıyla (6.61) ve (6.64) aracılığıyla hesapla;

Kontrol girdilerini, u_i , $i = 1, \dots, 4$, (6.65)-(6.71) aracılığıyla hesapla;

Kayan kipli kontrolcü tarafından hesaplanan kontrol girdilerini quadrotora uygula, sonra sistem durumlarını ölç;

RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından öncül durum kestirimine dair hatayı (5.48)'te gösterildiği gibi elde et;

RSVM çıktı katmanına doğru geri yayılmış olan hatayı (5.55) ve (5.56)'de gösterildiği gibi elde et;

RSVM modeli için (5.49)'te gösterilen ağırlık güncellemesini Bölüm 3.5 ve Algoritma 3'te ayrıntılandırıldığı gibi yap;

RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından i) (5.50)'te gösterildiği gibi ortak durum ($\hat{\mathbf{x}}$) ve bozucu etki ($\hat{\mathbf{d}}$) kestirimi ve (6.72)'deki yer değiştirmeler yapılsın;

% İçinde bulunduğumuz anı n zaman indisi ile gösterelim. ii) numaralı işlem $n + 1$

% anındaki kontrol kuralı üretimi için gereklidir.

% Dikkat ediniz ki, (6.72)'deki $\hat{\mathbf{x}}$ ve $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, kestirilmiş bozucu etki $\hat{\mathbf{d}}$ 'yı hesaba

% katarak elde edilir. Dolayısıyla, bir sonraki andaki kayan kontrol kuralı, bozucu

% etki gözetilerek oluşturulacaktır ki bu bizi daha gelişmiş bir gürbüzlüğe ulaştırır.

bitir

7. BENZETİM ORTAMI UYGULAMA SONUÇLARI

Önerilen RSVM bozucu etki gözetleyicinin daha gürbüz durum kestirimlerini nasıl sağladığını ve böylece, kullanılan kontrol yöntemini (SMC) zorlu bozucu etki durumunda nasıl daha gürbüzlük ile donattığını göstermek için bir benzetim yapıldı.

Bozucu etkinin oluşturulması. Öncelikle, benzetimde yer alan bozucu etki hakkında konuşulması gerekir.

- Benzetim çalışmasında, (5.45)'teki bozucu etki vektörü tanımıyla tutarlı olacak şekilde yapay bozucu etkiler oluşturmaktayız. Her bir bozucu etki işareti, sinusoidal ve kare dalga dizilerinin birleşiminden oluşmaktadır. Toplam dizi sayısı seq_d ile gösterilmektedir.
- Bir bozucu etki işareti içindeki sinüs dalga dizilerinin sayısı ile kare dalga dizilerinin sayısı, bu dalga tiplerinin ilgili bozucu etki işaretindeki toplam dizi sayısına önceden belirlenmiş bir oranı ile bulunur. Bu önceden belirlenmiş oranlar sinüs ve kare dalgalar için sırasıyla r_d^{sine} ve r_d^{square} gösterilmektedir.
- Sinüs ve kare dalga dizileri $(0, m_d^{max}]$ ve $(0, f_d^{max}]$ aralıklarından rastgele seçilmiş bir genliğe ve sıklığa (frequency) sahip olacak şekilde oluşturulmaktadır ki burada m_d^{max} ve f_d^{max} , önceden belirlenmiş olan en yüksek genlik ve sıklığı göstermektedir.
- Bir bozucu etki işareti içindeki sinüs ve kare dalga dizilerinin sırası rastgele seçilmektedir.

Benzetim için ilk değer atamaları. Şimdi, benzetim için önemli olan parametreleri veriyoruz. Belirtmek gerekir ki, bu değerler deneysel olarak uygun bulunmuştur. Önerilen RSVM modelinin gizli öznitelik sayısı $s = 5$ 'tir. RSVM modelinin gizli katmanındaki LS-SVM'nin parametreleri için başlangıç değerleri $b_0 = 0$, $\alpha_0 = \vec{0} \in \mathbb{R}^s$ ve $\sigma_0 = 1$ olmaktadır. Ayrıca, LS-SVM için hata cezalandırma terimi $\nu = 1e + 3$ olmaktadır. RSVM modelinin NARX veri girdisi için geçmiş girdi ve

çıktı ufukları sırasıyla $n_u^r = 3$ ve $n_y^q = 3$ olmaktadır ki burada $r = 1, \dots, 4$ ve $q = 1, \dots, 6$ 'dır. Bundan dolayı, (3.5)'e göre $d_v = 12+18+4 = 34$ olmaktadır. RSVM modelini BPTT ile eğitirken gereken zaman penceresi boyutu $\eta = 4$ 'tür. $j \in \{\hat{y}, h\}$ ve $i \in \{b, h, \mu, \sigma, v, h, t, LS - SVM\}$ olmak üzere, öğrenme adımları μ_{ji}^{rsvm} 'lerin değerlerini Tablo 7.1'de vermekteyiz ki burada $\mu_{kkt}^{rsvm} = 0.1$ olmaktadır.

Tablo 7.1: $\mu_{kkt}^{rsvm} = 0.1$ olmak üzere öğrenme adımları μ_{ji}^{rsvm} .

μ_{ji}^{rsvm}	$j = \hat{y}$	$j = h,$	$j = h,$	$j = h,$
	$i \in \{b, h\}$	$i \in \{\mu, \sigma\}$	$i \in \{v, h, t\}$	$i = LS - SVM$
Değeri	5000	5000	5	1

Quadrotorun kütlesi $m = 0.53057 \text{ kg}$ 'dır. Quadrotorun elektrik motorları ile ağırlık merkezi arasındaki uzaklık $\ell = 0.17 \text{ m}$ 'dir. Quadrotorun pervanelerinin itki ve sürüklenme etkenleri sırasıyla $t_f = 2.98e - 6 \text{ N/rpm}^2$ ve $d_f = 1.14e - 7 \text{ Nm/rpm}^2$ 'dir. x-y-z eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentleri sırasıyla $I_x = 3.675e - 3 \text{ kgm}^2$, $I_y = 7.030e - 3 \text{ kgm}^2$ ve $I_z = 3.650e - 3 \text{ kgm}^2$ 'dir. $j = \{1, 2\}$ ve $i \in \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$ olmak üzere, SMO için sönümleme katsayıları $a_j^i = \{17.5, 17.5, 17.5, 17.5, 17.5, 17.5\}$ olmaktadır. $j = \{1, 2\}$ ve $i \in \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$ olmak üzere, SMO için anahtarlama terimi katsayıları $k_j^i = \{1.75, 1.75, 1.75, 1.75, 1.75, 1.75\}$ olmaktadır. $j = \{1, 2\}$ ve $i \in \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$ olmak üzere, SMO içindeki anahtarlama terimi olarak kullanılan hiperbolik tanjant fonksiyonunun eğim parametreleri $c_j^i = \{1.75, 1.75, 1.75, 1.75, 1.75, 1.75\}$ olmaktadır. $i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}$ olmak üzere, SMC için kayan yüzey parametreleri $\lambda_c^i = \{10, 10, 10, 15\}$ olmaktadır. $i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}$ olmak üzere, SMC için anahtarlama terimi katsayıları $k_c^i = \{10, 10, 10, 15\}$ olmaktadır. $i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}$ olmak üzere, SMC içindeki anahtarlama terimi olarak kullanılan hiperbolik tanjant fonksiyonunun eğim parametreleri $c^i = \{1, 1, 1, 1.5\}$ olmaktadır. Dikkat ediniz ki, SMO ve SMC için parametrelerin değerlerini öyle bir belirleriz ki çatırdama olmadan iyi bir başarımlı gösterebilmektedirler. Bu parametrelere yukarıda bahsedilenlerden daha büyük değerler atamak çatırdamaya neden olabilir. Bundan ötürü, verilmiş olan değerler olası bir gerçek zamanlı deneyde uygulanabilirlik açısından

kabul edilebilir olmaktadır. SMC formülasyonunda kullanılan PD yüzey parametreleri olan oransal ve türevsel kazançlar $i \in \{x, y\}$ için $k_p^i = 20$ ve $k_d^i = 3.5$ olmaktadır. $j \in \{\hat{y}, h\}$ ve $i \in \{b, h, \mu, \sigma, v, h, t, LS - SVM\}$ olmak üzere, RSVM ağırlıkları $\mathbf{W}_{ji}$ 'ler için başlangıç değerleri olarak MATLAB'daki ' $\text{linspace}(min, max, dim)$ ' komutuyla oluşturulan ve doğrusal şekilde bölmelenmiş bir vektörden (linearly spaced vector) çekilen eşit aralıklı sayıları atamaktayız. Dikkat ediniz ki, dim , vektör boyutunu gösterirken min ve max ise vektörün sınırlarını göstermektedir. Ayrıca, gizli öznitelik vektörüne, $\mathbf{h}_0$ ile gösterilen, rastgele başlangıç değerleri atamaktayız ki bu, $[-20, 20]$ aralığından seçilen sayılardan oluşmaktadır. İlk değer atamaları Tablo 7.2'de verilmiştir. Benzetim için en iyi $\mathbf{h}_0$ da bu tabloda verilmektedir.

Tablo 7.2: RSVM modeline $\mathbf{W}_{ji}$ ve $\mathbf{h}_0$ için ilk değer atamaları.

$\mathbf{W}_{ji}$	Değeri
$j = \hat{y}, i = b$	$\text{linspace}(-20, 20, 4)^T$
$j = \hat{y}, i = h$ (satırlar 1-3)	$\text{linspace}(-400, 400, s)$
$j = \hat{y}, i = h$ (satır 4)	$\text{linspace}(-3000, 3000, s)$
$j = h, i = \mu$	$\text{linspace}(-3, 3, s)^T$
$j = h, i = \sigma$	$\text{linspace}(0.001, 5.5, s)^T$
$j = h, i \in \{h, t\}$	$\text{linspace}(-1, 1, s)^T$
$j = h, i = v$ (tüm satırlar)	$\text{linspace}(-150, 150, d_v)$
$\mathbf{h}_0$	$[-2.3767, 9.7190, 0.5062, 16.7587, -12.9066]^T$

Son olarak, oluşturulan bozucu etki işaretlerindeki sinüs ve karde dalga dizilerinin toplam sayısı $seq_d = 10$ seçilmiştir. Bir bozucu etki işaretindeki sinüs dalga dizilerinin sayısının o ilgili işarettaki toplam dizi sayısına oranı $r_d^{sine} = 0.5$ olarak ayarlanmıştır ki bunun karşılığında $r_d^{square} = 0.5$ olacak anlamı çıkar. Bozucu etki işaretinin bir yarısı sinüs dalgalardan oluşuyorken diğer yarısı ise kare dalgalardan ibarettir. Ancak, bu dizilerin sırası rastgele belirlenmektedir. Dikkat ediniz ki, benzetimde, quadrotor başlangıçta hareketsiz kabul edilmektedir. O yüzden, öncelikle, motorlarını çalıştırmak ve yerden kalkış yaparak 2 m gibi önceden belirlenmiş bir yüksekliğe çıkması için ona 10 s gibi bir ölü zaman tanınmıştır (dead time). Bu 10 saniyelik sürenin ardından, 60 saniyelik bir süreye yayılacak şekilde sarmal eğri

(helix) şekilli bir yörüngeyi (trajectory) takip etmeye başlar. Bozucu etkiler quadrotor üzerinde $t = 0$ başlangıç anından itibaren rol alır.

Benzetim adımları. Şimdi, önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC'den elde edilen faydaları göstermek için bu çalışmada takip ettiğimiz adımları veriyoruz. Dikkat ediniz ki, benzetim iki aşamadan oluşur. Bunlardan birinde, RSVM ile bozucu etki kestiriminin yapılmadığı durumu incelemekteyiz ve diğeri ise bozucu etki kestiriminin yer aldığı durumdur. Daha sonra, bunları referans izleme MSE (mean squarred error - ortalama karesel hata) değeri, durum kestirim MSE değeri ve üretilen kontrol işaretlerinin gücü ($P(u) = \sum_{n=1}^N u_n^2$) cinsinden karşılaştırmaktayız. Ayrıca, sonuçları ilgili çizimler aracılığıyla görsel olarak da sunmaktayız. En yüksek genlik ve sıklık değerlerinin $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ olduğu bozucu etkiler uygulanmaktadır. Tablo 7.3, RSVM tarafından bozucu etki kestiriminin olduğu ve olmadığı durumlar için yörünge takip MSE değerlerini vermektedir. MSE değerleri, ölü zamandan sonrası için hesaplanmaktadır. Ek olarak, Tablo 7.4 her iki durum için durum kestirim MSE değerlerini sunmaktadır. Dikkat ediniz ki, bozucu etki kestirimi yapılmadığında, durum kestirimi standart SMO tarafından yapılır. Dolayısıyla, Tablo 7.4 bize durum kestiriminin RSVM tarafından yapılmasıyla sağlanan geliştirmeyi göstermektedir. Diğer bir deyişle, standart SMO ile RSVM bozucu etki gözetleyicinin durum kestirim başarımları Tablo 7.4'te kıyaslanmaktadır. Üretilen kontrol işaretlerinin gücü de Tablo 7.5'te karşılaştırılmaktadır. Dikkat ediniz ki ilgili tablolarda, i) ve ii) sırasıyla RSVM tarafından bozucu etki kestiriminin olduğu ve olmadığı durumları göstermektedir.

Belirtmeliyiz ki, RSVM model ağırlıklarına ilk değer atamasını Tablo 7.2'de açıklandığı gibi yaptığımızda, kabul edilebilir bir bozucu etki kestirim ve bunun sonucunda yörünge takip başarımı elde edebilmekteyiz. Ancak, erken aşamalarda ($t = 0$ 'dan $t = 1.5$ saniyeye kadar geçen sürede), bozucu etki kestirimleri yüksek genlikli aşımalar (overshoots) sergileyebilmektedir. Bu aşımalar hızlıca sönümlenmektedir ve sonunda iki saniye civarı süre içinde bozucu etki kestirimleri gerçek değerlere yakınsar.

Benzer şekilde, RSVM model ağırlıkları da en iyi değerlerine çok kısa bir süre içinde oturur. Başlangıçtaki aşımaları hafifletmek için, ilk olarak, RSVM model ağırlıklarına ilk değer atamasının Tablo 7.2'ye göre yapıldığı bir ön (preliminary) benzetim çalışması yapılır. Benzetimin sonunda, güncellenmiş ağırlıklar ve gizli öznitelikler kaydedilir. Daha sonra asıl benzetim, bunların başlangıç ağırlıkları ve gizli öznitelikler olarak kullanılmasıyla yapılır. İlgili tablolar ve şekillerde RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC'ye ait olan tüm sonuçlar bu şekilde elde edilmiştir.

Tablo 7.3: $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ iken quadrotor tarafından yörünge takip MSE değerleri. i) ve ii) sırasıyla RSVM tarafından bozucu etki kestiriminin olduğu ve olmadığı durumları göstermektedir.

MSE	i)	ii)
y_1	1.71091e-5	9.47374e-4
y_2	1.11867e-5	1.49622e-3
y_3	2.98004e-6	1.05634e-3
y_4	7.06649e-7	4.47671e-3
y_5	5.28138e-6	2.66082e-3
y_6	7.51114e-8	1.11761e-3

Tablo 7.4: $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ iken quadrotor durumlarının kestirim MSE değerleri. i) ve ii) sırasıyla RSVM tarafından bozucu etki kestiriminin olduğu ve olmadığı durumları göstermektedir.

MSE	i)	ii)
x_1	2.63393e-6	9.56805e-4
x_2	2.8017e-6	6.39044e-4
x_3	5.0312e-6	5.52417e-3
x_4	4.47683e-7	9.58974e-3
x_5	3.97135e-7	1.25325e-2
x_6	2.32489e-8	7.54467e-3
x_7	7.25284e-7	0.393213
x_8	5.17585e-7	0.265824
x_9	1.12291e-8	2.36321
x_{10}	3.0868e-8	4.00637
x_{11}	1.95555e-8	5.17344
x_{12}	2.55235e-8	3.22665

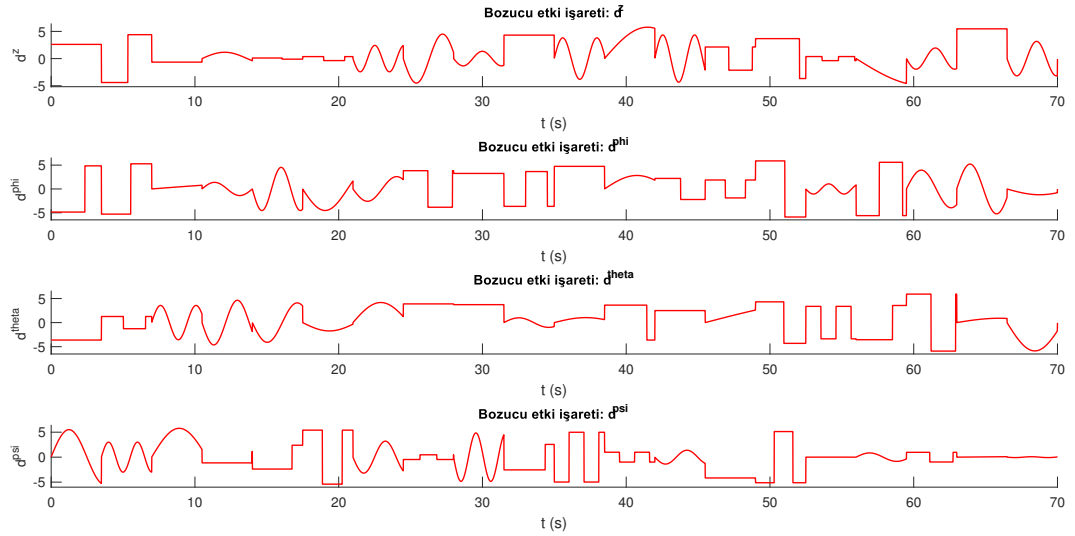
Tablo 7.5: $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ iken üretilen quadrotor kontrol işaretlerinin gücü ($P(u) = \sum_{n=1}^N u_n^2$). i) ve ii) sırasıyla RSVM tarafından bozucu etki kestiriminin olduğu ve olmadığı durumları göstermektedir.

$P(u)$	i)	ii)
u_1	25.1657	25.4642
u_2	8.10633e-4	6.7705e-4
u_3	2.03418e-3	1.23365e-3
u_4	1.42433e-4	1.55489e-4

Bölüm 7.1 ve 7.2’de sonuçlar ilgili çizimleri vererek görsel olarak sunulmaktadır.

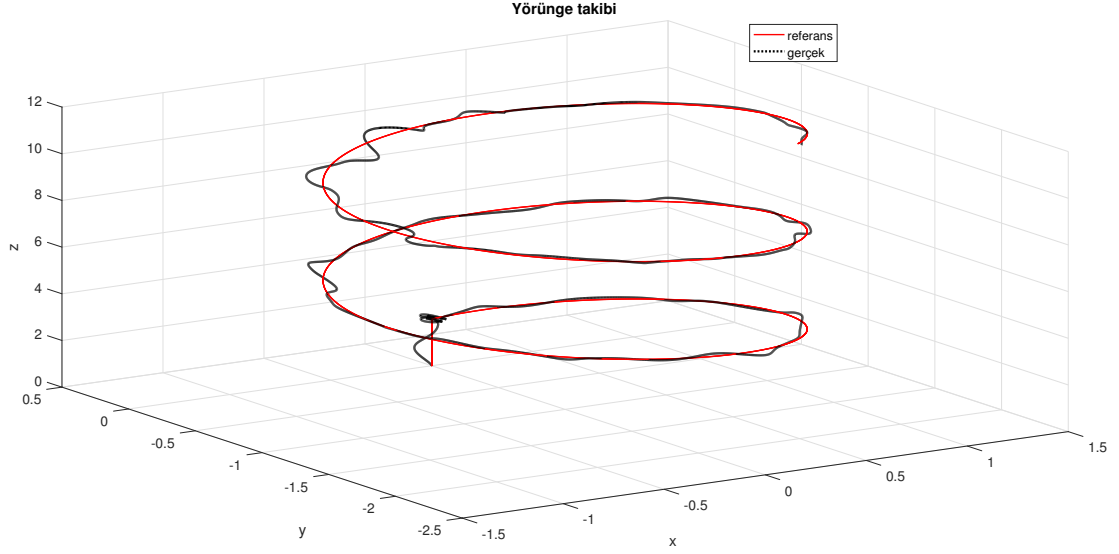
7.1 RSVM ile Bozucu Etki Kestirimi Olmayan Durum

Şekil. 7.1 uygulanan bozucu etki işaretlerini sunmaktadır.

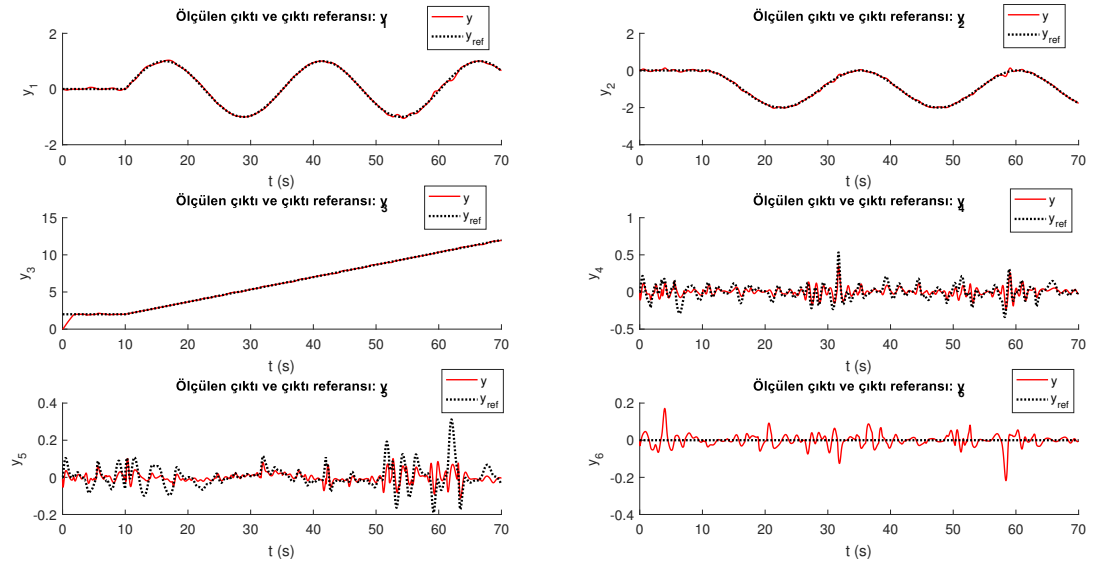


Şekil 7.1: Benzetim esnasında quadrotor üzerine uygulanan yapay bozucu etki işaretleri.

Şekil. 7.2 yörünge takip sonucunu göstermektedir. Şekil. 7.3 referans izleme sonucu göstermektedir. Şekil. 7.4 ve Şekil. 7.5 sırasıyla $x_1 - x_6$ ve $x_7 - x_{12}$ durumları için durum kestirim sonuçlarını sunmaktadır. Şekil. 7.6 SMC tarafından üretilen quadrotor kontrol işaretlerini sunmaktadır. Son olarak, Şekil. 7.7 quadrotorun elektrik



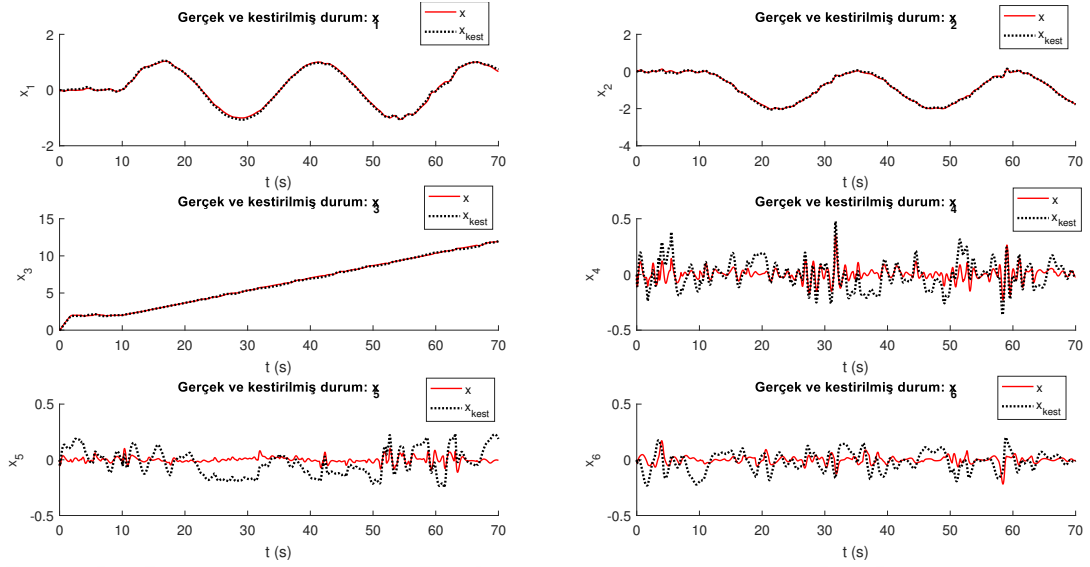
Şekil 7.2: RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında bozucu etki altındayken quadrotorun yörünge takibi.



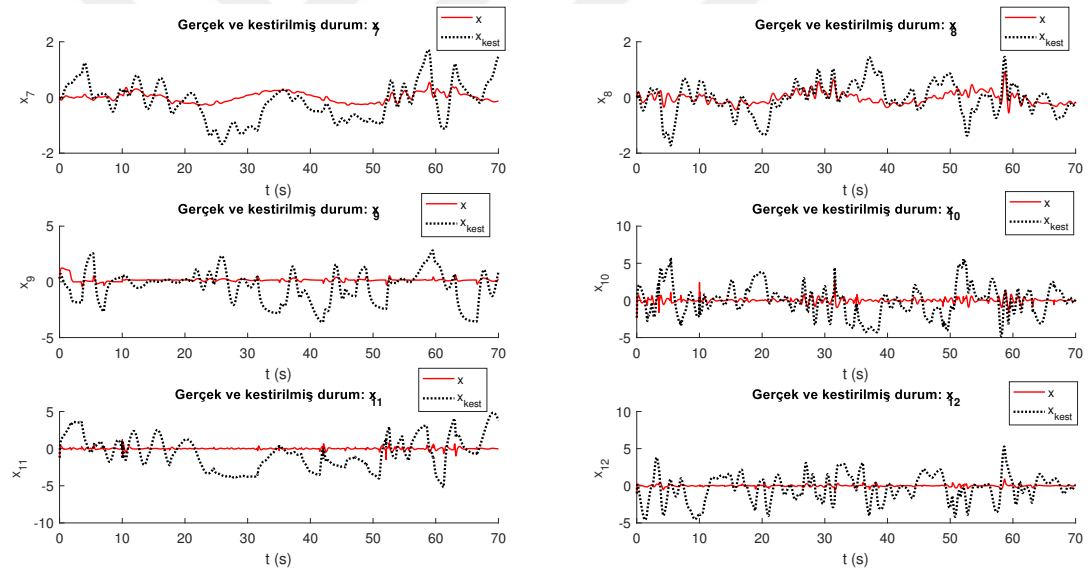
Şekil 7.3: RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında bozucu etki altındayken quadrotorun referans izleme sonucu.

motorlarının rpm değerlerini sunmaktadır.

Şekil 7.2'den görülmektedir ki quadrotora uygulanan ve Şekil 7.1'de gösterilen bozucu etkiler, RSVM tarafından bozucu etki kestirimi yapılmadığında, quadrotorun sarmal eğri şekilli referans yörüngesinden ciddi miktarda sapmasına neden olmaktadır.

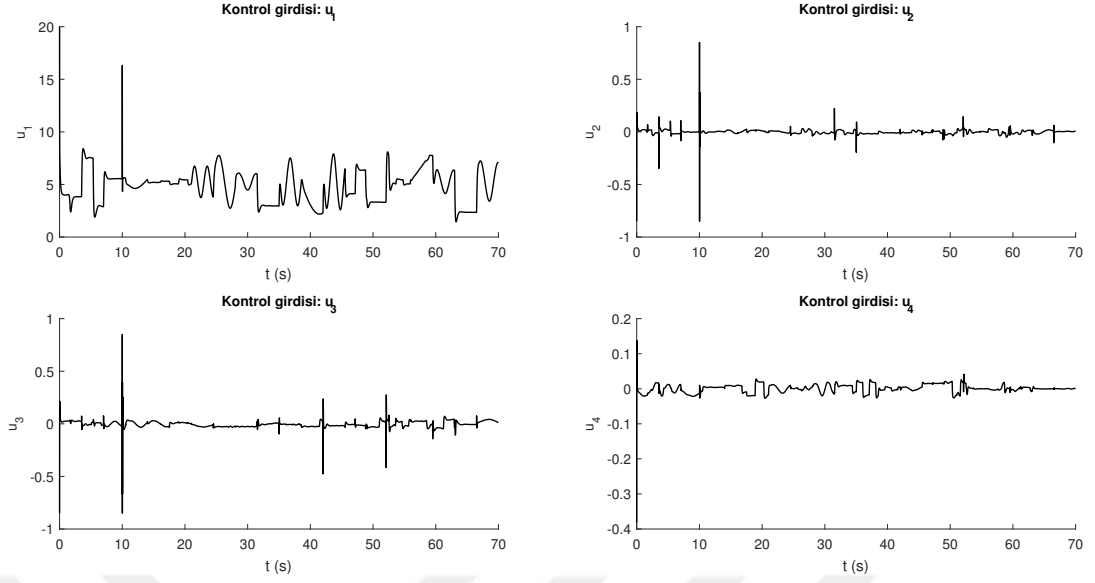


Şekil 7.4: RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında (standart SMO) bozucu etki altındayken quadrotorun $x_1 - x_6$ durumlarının kestirimi.

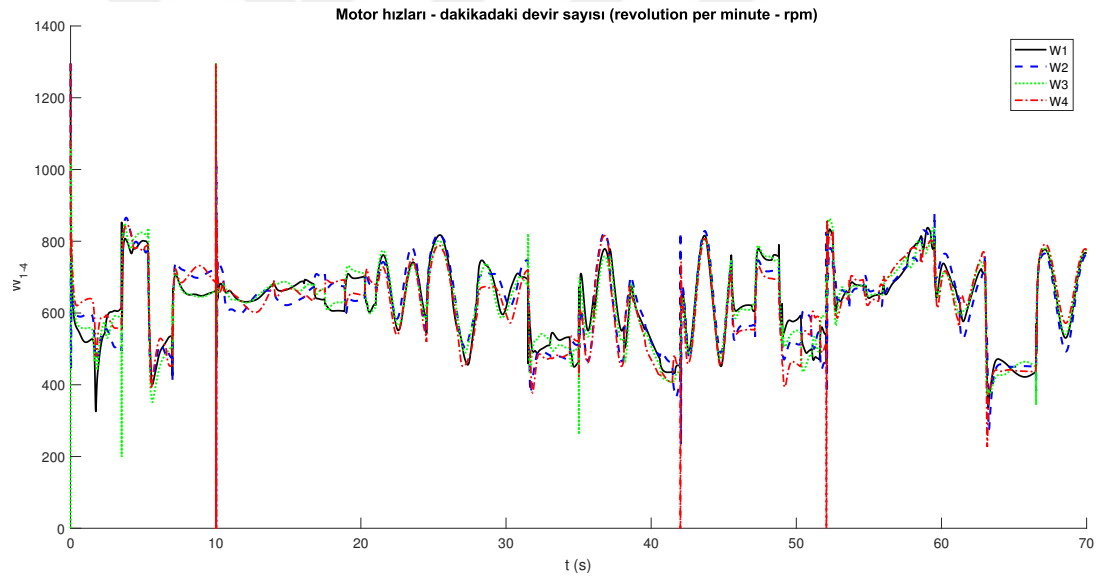


Şekil 7.5: RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında (standart SMO) bozucu etki altındayken quadrotorun $x_7 - x_{12}$ durumlarının kestirimi.

Bu durumda, durum kestirimleri Şekil 7.4 ve 7.5'te gösterildiği şekilde standart SMO kullanılarak elde edilir. Bozucu etkiler göreceli olarak yüksek bir genlik ile oluşturulduğundan, bunlar SMO için üstesinden gelmesi zor bir sıkıntı yaratmaktadır ve durum kestirim hataları hoş görülebilir bir değer aralığında gelmez (bkz.



Şekil 7.6: RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında quadrotor bozucu etki altındayken SMC tarafından üretilen quadrotor kontrol girdileri.



Şekil 7.7: RSVM tarafından bozucu etki kestirimi olmadığında bozucu etki altındayken quadrotorun elektrik motorlarının rpm değerleri. W_{1-4} sırasıyla ön, sol, sağ ve arka motorlara karşılık gelmektedir.

Tablo 7.4'teki 'ii' sütunu). Böylesine kötü kestirilmiş durumlar kayan kontrol kurallarını üretmek için SMC formülasyonunda kullanıldığında çıktı referans izleme başarımı kabul edilebilir bir seviyede olmaz. Özellikle, Şekil 7.3 incelendiğinde,

kolayca görülmektedir ki yunuslama ve yalpalama açılarının (y_5 ve y_4 çıktıları) takibine dair tatmin edici olmayan takip başarımı quadrotorun y_1 ve y_2 çıktıları (x ve y eksenlerindeki konum) için referansların zorla takip edilmesine yol açar ki bu da Şekil 7.2’de gözüken düşük başarımly yörünge takibine sebep olmaktadır.

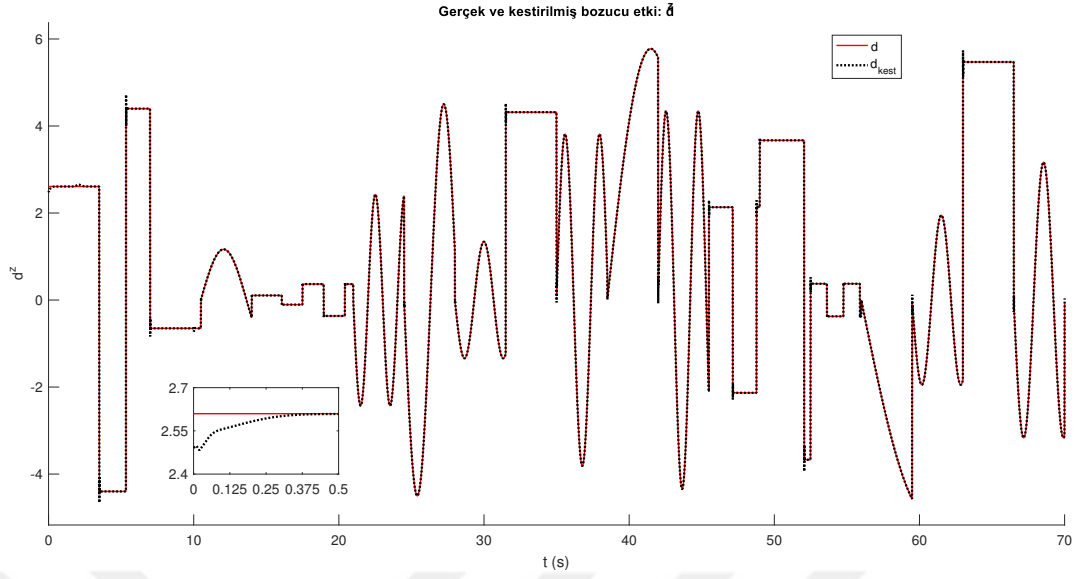
7.2 RSVM ile Bozucu Etki Kestirimi Olan Durum

Şimdi, RSVM bozucu etki gözetleyicinin etkin olduğu durumu incelenmektedir. Şekil 7.1’de gösterilenlerle aynı bozucu etkiler quadrotora uygulanmaktadır. Tablo 7.6, bozucu etkilerin önerilen RSVM modeli tarafından kestirim MSE değerlerini vermektedir.

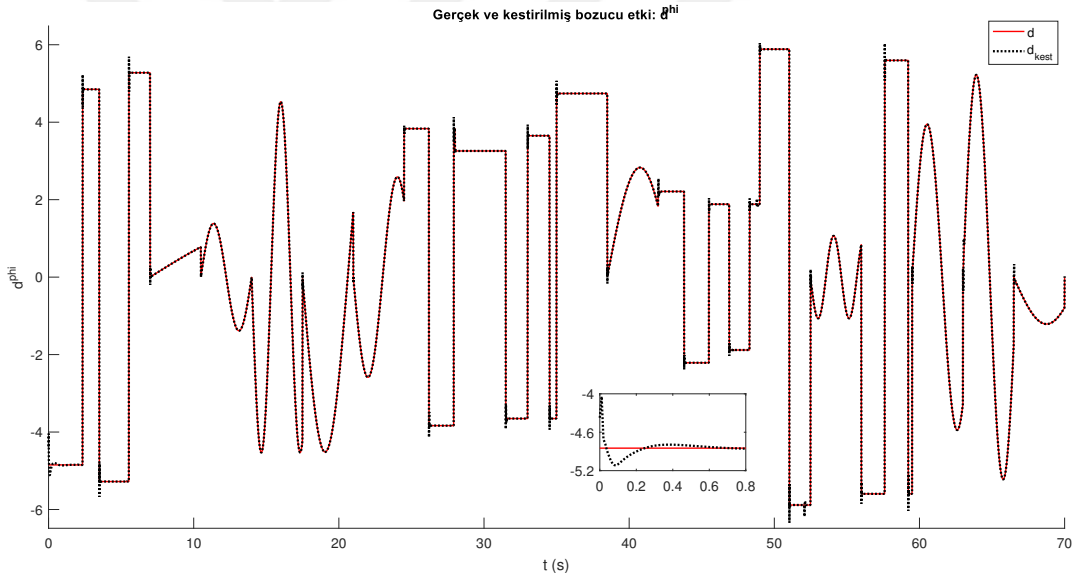
Tablo 7.6: $m_d^{max} = 6$ ve $f_d^{max} = 0.5$ iken RSVM tarafından bozucu etki kestirim MSE değerleri.

bozucu etki işareti	MSE
d^z	2.59987e-4
d^ϕ	1.13438e-3
d^θ	8.21545e-4
d^ψ	1.40345e-3

Şekil 7.8-7.11 sırasıyla d^z , d^ϕ , d^θ ve d^ψ bozucu etkilerinin kestirim sonuçlarını sunmaktadır. Hem Table 7.6 hem de ilgili şekiller önerilen RSVM bozucu etki gözetleyicinin muhteşem bir bozucu etki kestirim başarımına sahip olduğunu göstermektedir. Şekil 7.8-7.11’den görülmektedir ki RSVM tarafından kestirilmiş bozucu etkiler hızlıca gerçek değerlere yakınsar ve RSVM bu bozucu etki kestirimlerini o andan itibaren gerçek değerlere yakın tutar. Bu, zamanla değişen bozucu etki işaretlerindeki yönsemenin önerilen RSVM modeli tarafından başarıyla kavranabilmesi sayesinde olur. Hızlı yakınsama Şekil 7.12-7.14’te verilen RSVM model ağırlıklarının zamanla değişiminden de teyit edilebilmektedir. Bu şekiller bize gösterir ki model ağırlıkları çok erken aşamalarda en iyi değerlerine oturmaktadır. Dikkat ediniz ki, benimsenen uyarlamalı çekirdek fonksiyonu yaklaşımından ötürü, çekirdek genişlik parametresi σ diğer model ağırlıklarıyla birlikte güncellenmektedir



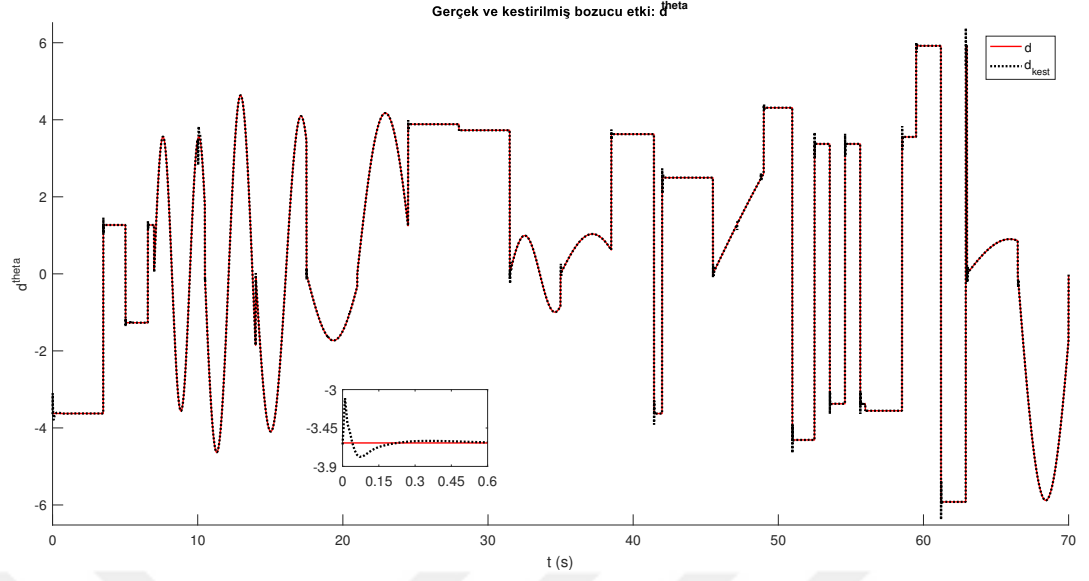
Şekil 7.8: Bozucu etki d^z 'nin önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirimi.



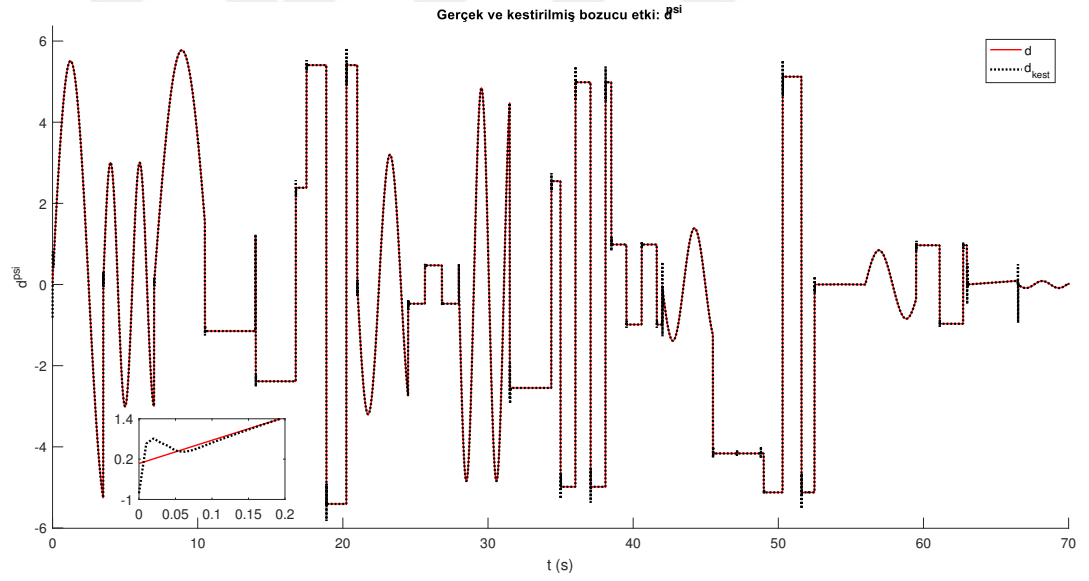
Şekil 7.9: Bozucu etki d^ϕ 'in önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirimi.

(bkz. Şekil 7.12).

Yörünge takip sonucu Şekil 7.15'te verilmektedir. Şekil 7.2'deki sonuçla karşılaştırıldığında, RSVM tarafından bozucu etki kestirimi işleme dahil edildiğinde takip başarımı önemli ölçüde geliştirilmiştir ki bu, Tablo 7.3'ten de teyit edilebilir.

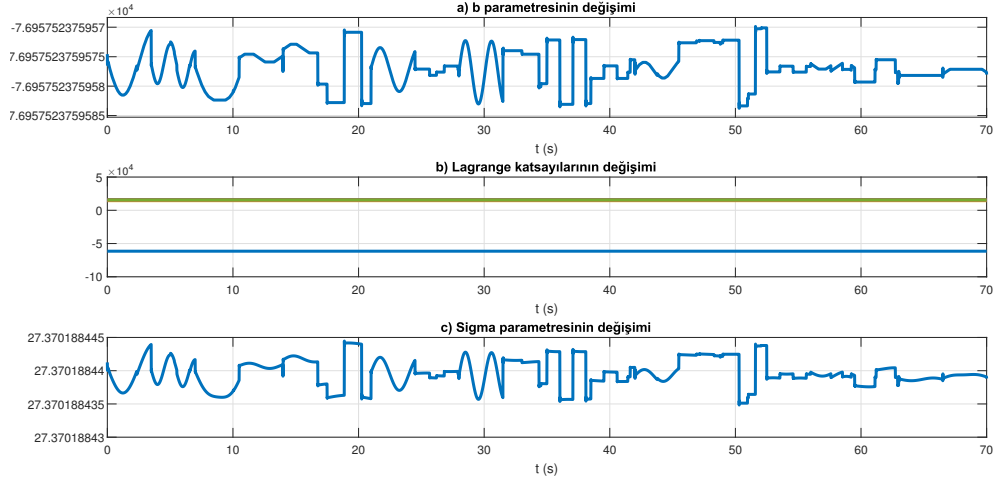


Şekil 7.10: Bozucu etki d^θ 'nın önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirimi.

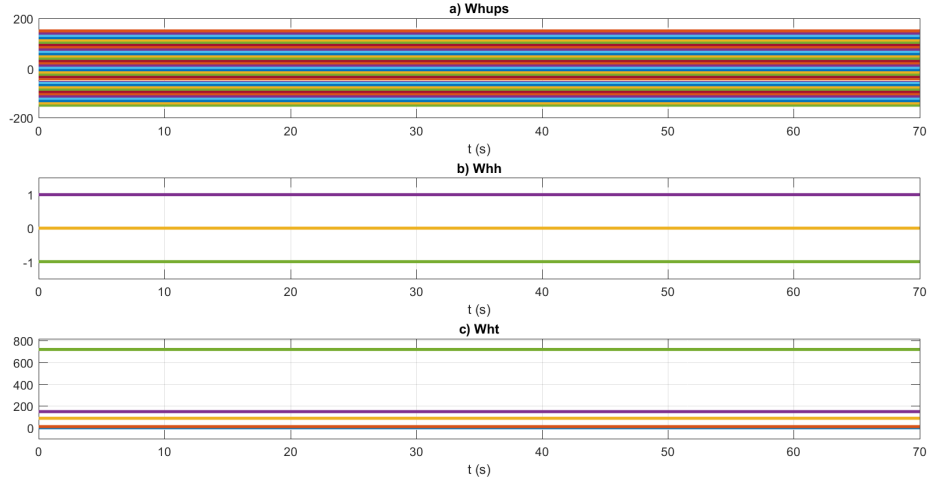


Şekil 7.11: Bozucu etki d^ψ 'nin önerilen RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirimi.

Bu durum, Şekil 7.8-7.11 ve Tablo 7.6'dan gördüğümüz yüksek bir bozucu etki kestirim başarımı sayesinde. Şekil 7.15 bize anlatmaktadır ki RSVM bozucu etki gözetleyici etkin olduğunda, quadrotor sarmal eğri şeklindeki istenilen yörüngeyi sanki sistem üzerine etki eden bir bozucu etki yokmuş gibi takip etmektedir. Böylesine

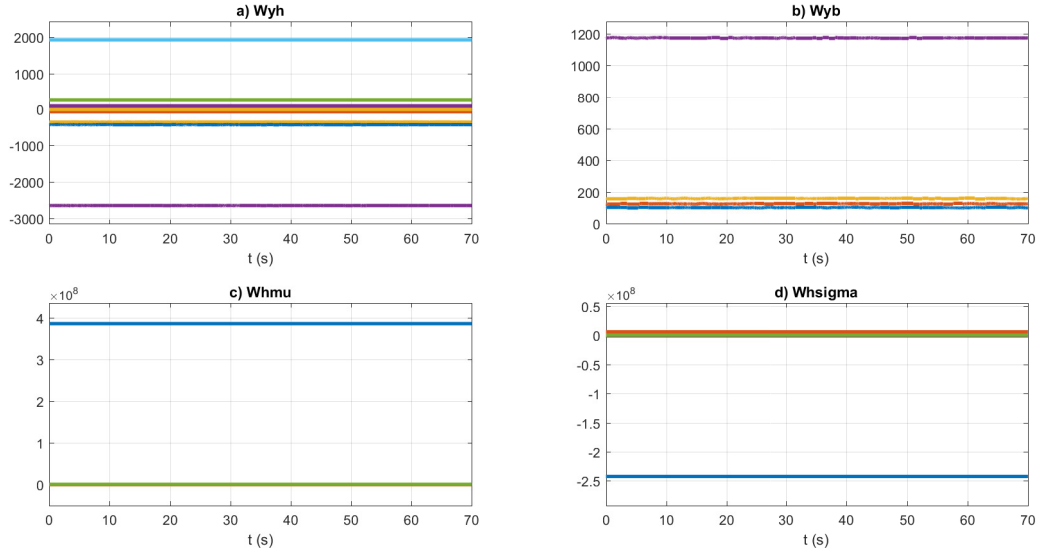


Şekil 7.12: RSVM ağırlıklarının zamanla değişimi: a) b , b) α ve c) σ (LS-SVM'den gelir).

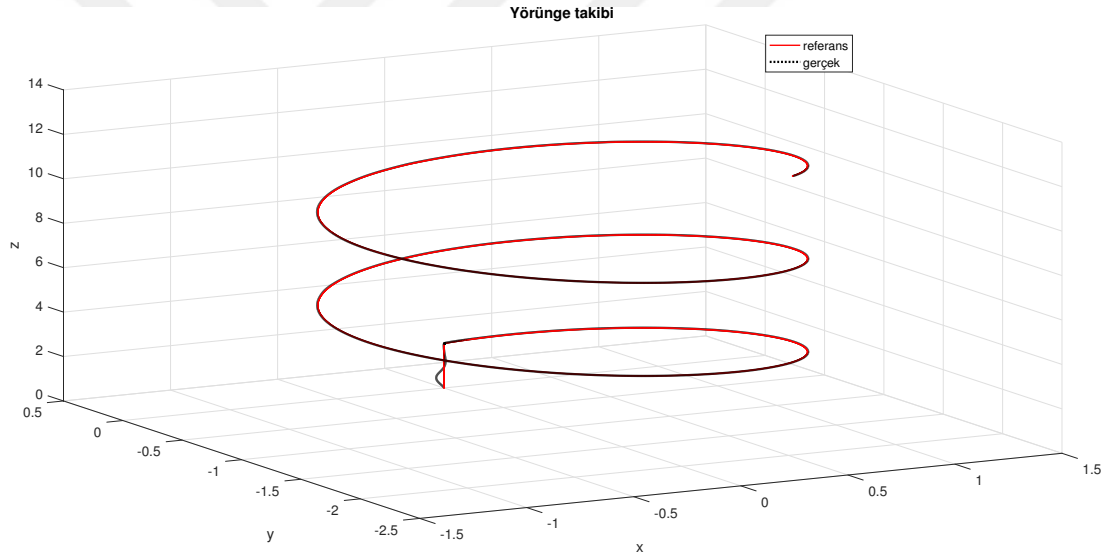


Şekil 7.13: RSVM ağırlıklarının zamanla değişimi: a) W_{hv} , b) W_{hh} ve c) W_{ht} .

gürbüz bir takip başarımı, kestirilen bozucu etki terimi $\hat{\mathbf{d}}$ 'nın, gözetleyici dinamiklerine (5.47)'de verildiği gibi dahil edilmesi şeklinde önerilen yaklaşım ile sağlanmaktadır. Bu, Şekil. 7.16-7.17'de verildiği gibi daha gürbüz durum kestirimlerini mümkün kılar ki bunu Tablo 7.4'ten de teyit edebilmekteyiz. Bunun sonucunda, böylesine doğruluk payına sahip durum kestirimlerine dayanarak üretilen kayan kontrol kuralları sistem durumlarını istenilen değerlere götürebilmektedir ki bu, Şekil 7.18'deki gibi bir yüksek hassasiyetli referans izleme başarımını doğurmaktadır. Bu da bizi Şekil 7.15'teki



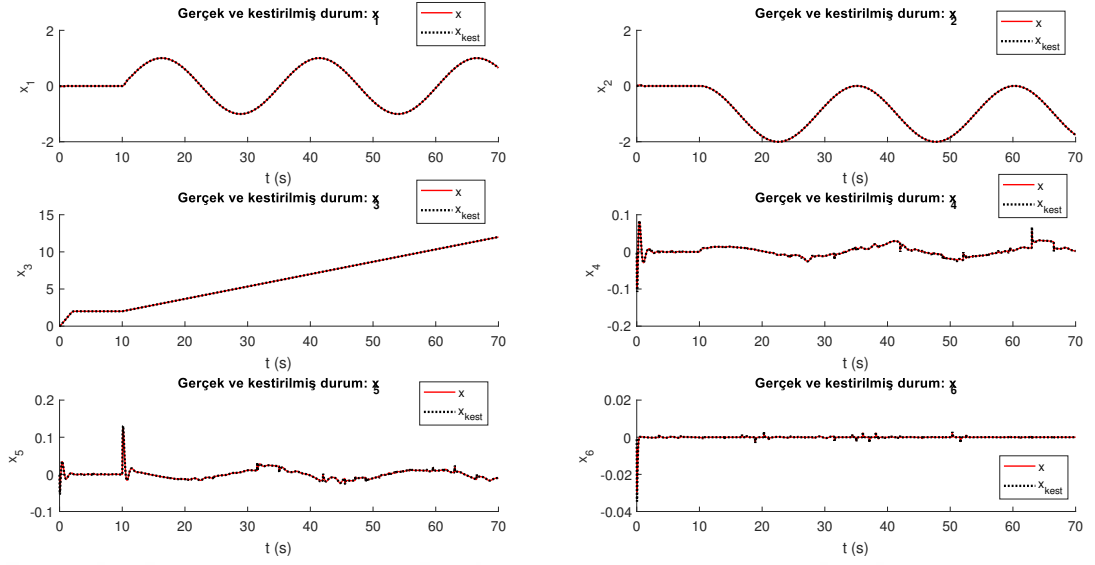
Şekil 7.14: RSVM ağırlıklarının zamanla değişimi: a) W_{yh} , b) W_{yb} , c) $W_{h\mu}$ ve d) $W_{h\sigma}$.



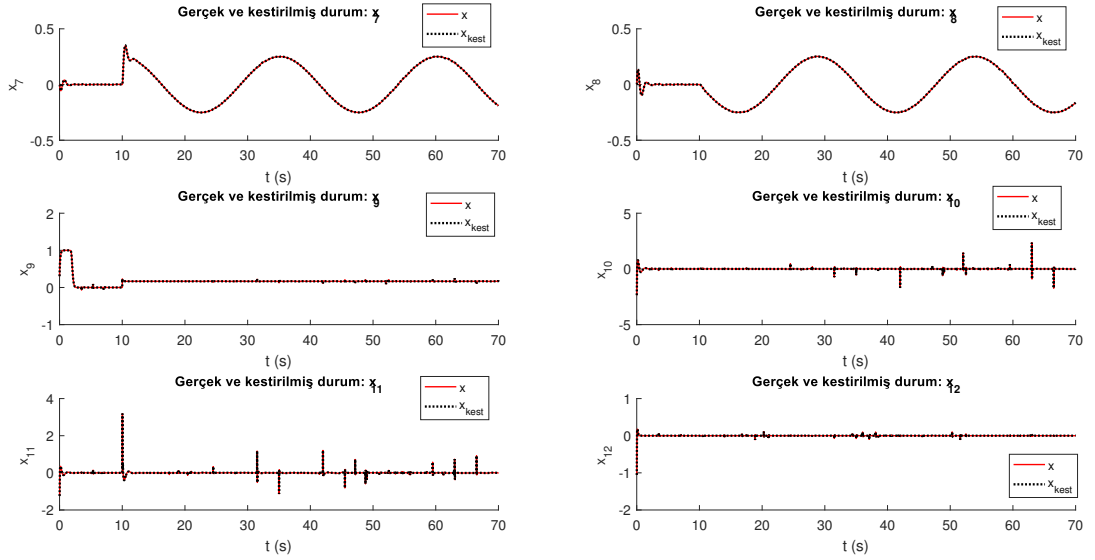
Şekil 7.15: RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun yörünge takibi.

sarmal eğri şekilli yörüngeyi yüksek hassasiyetli takibine götürmektedir.

Son olarak, Şekil 7.19 RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC tarafından üretilen kontrol girdilerini gösterirken Şekil 7.20 ise quadrotorun elektrik motorlarının rpm değerlerini çizdirmektedir. Şekil 7.19 ile Şekil 7.6 karşılaştırıldığında

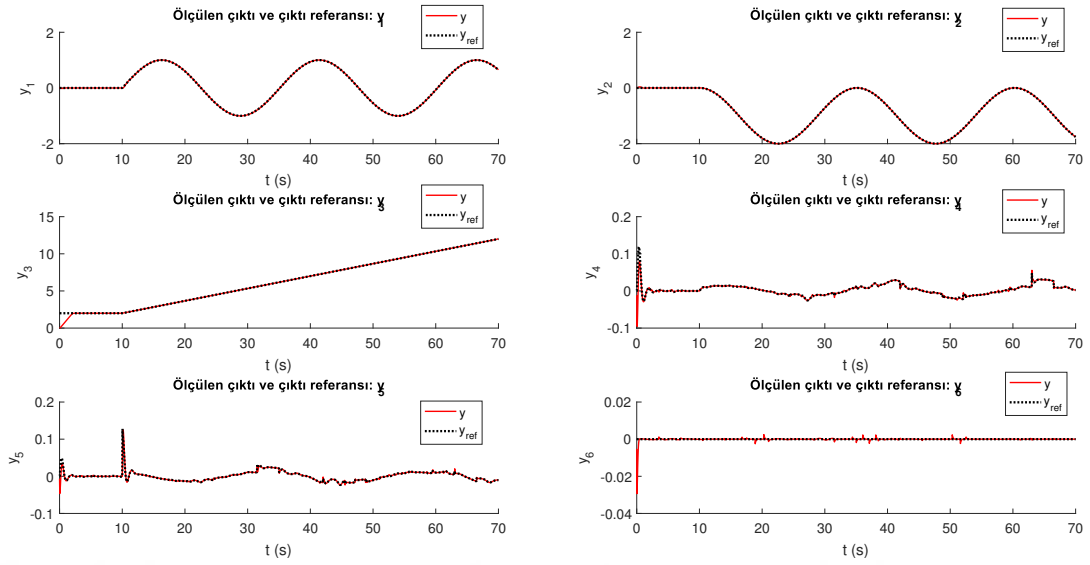


Şekil 7.16: RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun $x_1 - x_6$ durumlarının kestirimi.

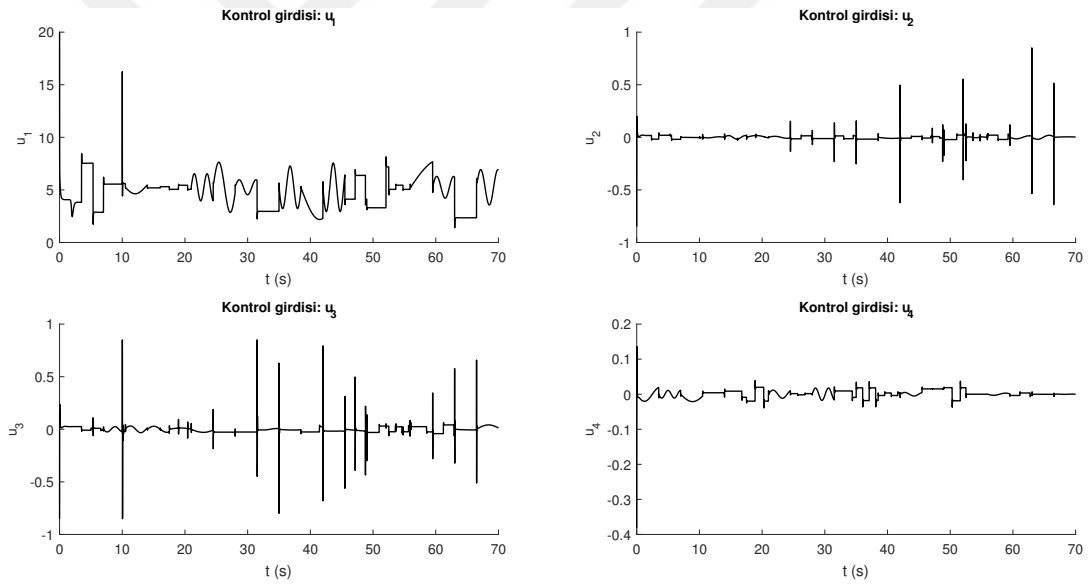


Şekil 7.17: RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun $x_7 - x_{12}$ durumlarının kestirimi.

görülmektedir ki RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC tarafından üretilen kontrol girdileri belli bir dereceye kadar daha yumuşaktır (smooth). Bu durum, ilgili şekillerden özellikle bozucu etki işaretinin kare dalga tipinde olduğu anlarda gözlenebilmektedir.

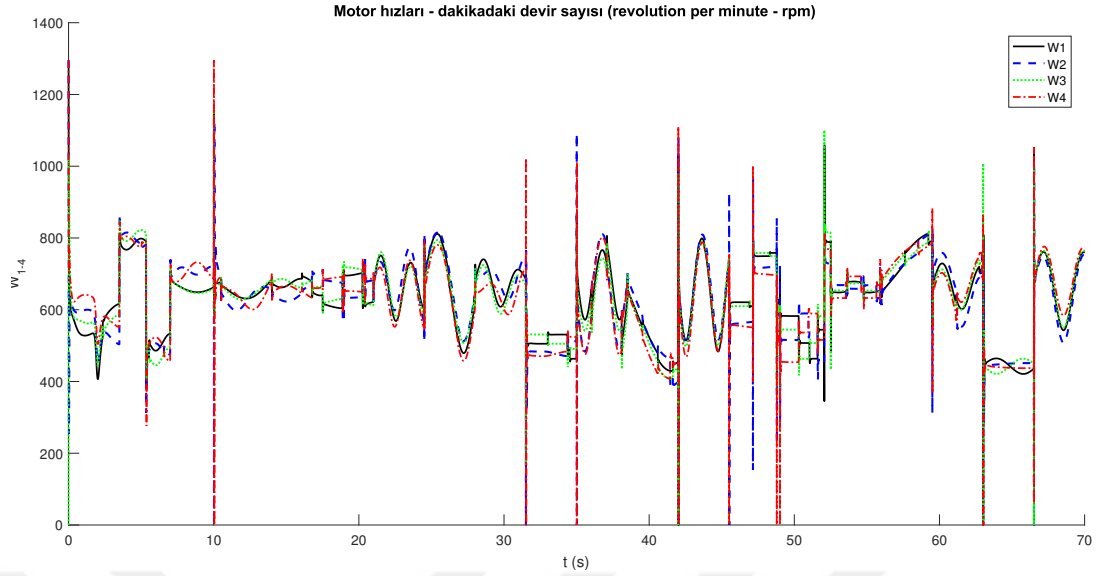


Şekil 7.18: RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun referans izleme sonucu.



Şekil 7.19: RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında SMC tarafından üretilen quadrotor kontrol girdileri.

z eksenine etkiyen bozucu etki , d^z 'yi (bkz Şekil 7.8) ve SMC formülasyonunda z eksenindeki konum ile (y_3) bir girdi-çıkı çifti olarak eşleşen, kayan kontrol kuralı u_1 'i (bkz. Şekil 7.19) inceleyelim. Kontrol girdisi u_1 'in bozucu etki d^z ile benzer bir geometrik görünüme sahip olduğu fark edebilir. Ancak, bunlar arasında



Şekil 7.20: RSVM bozucu etki gözetleyici etkinken bozucu etki altında quadrotorun elektrik motorlarının rpm değerleri. W_{1-4} sırasıyla ön, sol, sağ ve arka motorlara karşılık gelmektedir.

belirgin bir ilişki vardır. Bozucu etki işareti d_z 'deki herhangi bir yükselen kenar (rising edge), kontrol işareti u_1 'de ters yönde yansıtılmaktadır. Diğer anlamıyla, örneğin, d_z 'deki bir sinüsoidal dalganın yükselen kenarı u_1 'de bir düşen kenar (falling edge) ile karşılanmaktadır veya tam tersi. Benzer şekilde, bu durum kare dalga tipleri için de geçerlidir. Bu, kapalı döngü dinamikleri içinde u_1 ve d^z arasındaki etkileşimin doğal bir sonucudur. Üretilen kontrol işareti, sistemi bozucu etkinin tersi yöne iterek bozucu etkiyi söndürmek için (disturbance rejection) bir çaba sarf etmektedir. Bu, Bölüm 6.1'de verilmiş olan kayan kip kuramında benimsenen sezgisel fıkırdır. Neden özel olarak kontrol girdisi u_1 'i incelediğimize gelince ise bu girdi (4.24)'te verildiği üzere, her bir motorun ürettiği itki kuvvetinin toplamıdır ki bu kuvvetler de motor rpm değerlerinin kareleriyle orantılıdır. Bu sebeple, u_1 doğrudan motor rpm değerleriyle ilişkilendirilebilir, bu da demektir ki Şekil 7.19 ve Şekil 7.20 arasında doğrudan bir ilişki vardır.

Şimdi, RSVM bozucu etki çalışmıyorken üretilen u_1 'deki kare dalga dizilerini düşünelim (bkz. Şekil 7.6). Kontrol işareti negatif kenardan pozitif kenara geçerken

veya tam tersinde aşımalar vardır. Diğer bir deyişle, u_1 tam olarak kare dalga şeklinde bir geometri sergileyememektedir. Bu demektir ki u_1 , bozucu etki d^z 'yi, geçiş anlarında umulduğu gibi karşılayamamaktadır çünkü SMC formülasyonunun aslında bozucu etki modele ayrı bir terim olarak dahil edilmemiştir ve SMC'deki anahtarlama terimi k_c^i ($i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}$), bozucu etkinin genliğinden çok büyük değildir. Hatırlayınız ki SMC formülasyonunda, k_c^i parametresi belirsizlikle olduğu kadar bozucu etkiyle de ilgilenmektedir. Denklem (6.1)'de verilen sistem gösterimini hatırlayalım. Biliyoruz ki f , gerçek sistemi temsil eden durum denklemindeki sistem fonksiyonunu göstermektedir (basitlik açısından $d_x = 2$ olduğunu varsayın). Bölüm 6.1'de quadrotor için kayan kipli kontrolcü verilirken ifade edildiği üzere, hiç bir parametrik belirsizlik olmadığında, bizim kurduğumuz matematiksel modelin durum denklemindeki sistem fonksiyonu ($\hat{f}$) gerçek sistemin ilgili fonksiyonuna eşit olacaktır, yani $\hat{f} = f$. Diğer taraftan, sistem üzerinde d gibi bir bozucu etki olduğunda, gerçek sistem fonksiyonu

$$f \leftarrow f + d \quad (7.1)$$

şeklinde olacaktır çünkü bozucu etki durum denkleminde toplamsal şekilde girer. Bu durumda, modelleme hatası, ki (6.42)'de tanımlı F_c ile sınırlıdır, kayan kontrol kuralını üretirken dikkate alınmalıdır. Denklem (7.1) ve (6.42)'yi gözeterek, modelleme hatası için sınırı

$$\left| \underbrace{f}_{f+d} - \underbrace{\hat{f}}_f \right| = |d| \leq F_c \iff F_c = m_d^{max} \quad (7.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Modelleme hatası, SMC'deki anahtarlama terimi k_c sayesinde süreksiz bir kontrol kuralını benimseyerek telafi edilir. Bu terim, (6.44)'te verilen ulaşılabilirlik koşulunu sağladığında, orijinin asimptotik kararlılığı garanti edilmiş olur. Denklem (7.2)'yi gözetirsek, ulaşılabilirlik koşulunu özel olarak quadrotorun z eksenindeki konumunun kontrolü için yeniden yazdığımızda

$$\underbrace{k_c^z}_{10} \geq \underbrace{m_d^{max}}_6 + \underbrace{\kappa_c}_4 \quad (7.3)$$

olur ki burada κ_c , (6.14)'te tanımlandığı gibi Lyapunov fonksiyonunun orijine doğru

azalış hızını gösterir. Dikkat ediniz ki, κ_c , sistem durum yörüngelerinin kayan yüzey $s_c = 0$ 'a ulaşma zamanı t_r üzerinde doğrudan bir role sahiptir. Denklem (6.18)'de verilmiş olan t_r 'yi özel olarak quadrotorun z eksenindeki konumunun kontrolü için yeniden yazarsak

$$t_r \leq \frac{|s_c^z(0)|}{\kappa_c} \quad (7.4)$$

ifadesini elde ederiz. Şekil 7.6'daki u_1 'den bellidir ki $\kappa_c = 4$ öyle bir t_r değeri sunmaktadır ki durum yörüngeleri kayan yüzey $s_c^z = 0$ 'a yeterince hızlı ulaşamamaktadır. Hatırlayınız ki, ancak kayan yüzeye ulaşıldıktan sonra izleme hatası orijine eksponensiyel şekilde yakınsayabilir. Diğer taraftan, RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC çalıştırıldığında, Şekil. 7.8 ve Tablo 7.6'dan bildiğimiz üzere, d^z yüksek bir hassasiyetle kestirilmektedir. Bu sayede,

$$\hat{d}^z \cong d^z \quad (7.5)$$

olmaktadır. Denklem (6.72)'den hatırlayınız ki, RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC çalıştırıldığında, kestirilmiş bozucu etki, gözetleyici dinamiklerine dahil edilmektedir. Böylece, gözetleyici modelinde benimsenen sistem fonksiyonu, nominal sistem fonksiyonu ve kestirilmiş bozucu etkinin birleşimi haline gelir (tabi ki gözetleyici düzeltme terimi de buna eklenir). Bunu yeniden yazalım.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leftarrow \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \Theta_o + \hat{\mathbf{d}} \quad (7.6)$$

Şekil. 7.16-7.17 ve Tablo 7.4'ten zaten bilmekteyiz ki RSVM bozucu etki gözetleyici tarafından kestirilmiş durumlar hızlıca gerçek değerlere yakınsar. Bu sebeple,

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (7.7)$$

alınabilir. Ayrıca, gözetleyici düzeltme terimi Θ_o , çıktı kestirim hatasına bağlıdır. Durum kestirimleri hızlıca yakınsadığı için, bu terim de hızlıca sifra yakınsayacaktır. Dolayısıyla,

$$\Theta_o \cong 0 \quad (7.8)$$

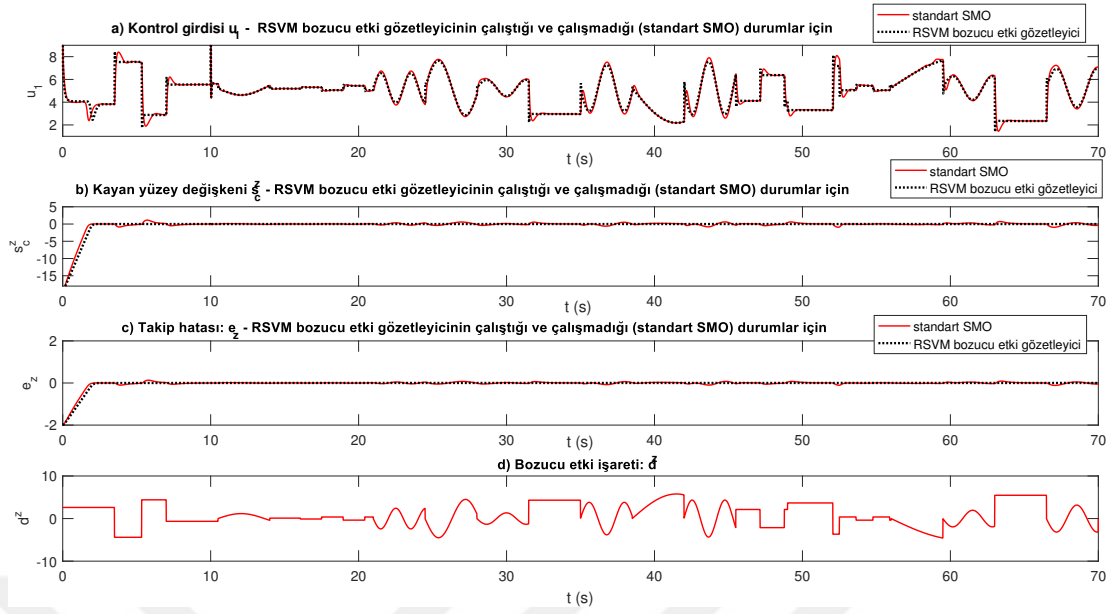
alabiliriz. Denklem (7.5)-(7.8)'e dayanarak, quadrotorun z eksenini düşünülendiğinde, modelleme hatası için sınırı bulmak adına (7.2)'yi şu şekilde yeniden yazabiliriz. Varsayınız ki, f artık sadece z eksenini dinamiklerini ifade ediyor ve Θ_o^z de z ekseniniyle alakalı duruma karşılık gelen düzeltme terimini gösteriyor olsun.

$$\left| \underbrace{f}_{f(\mathbf{x})+dz} - \underbrace{(f(\hat{\mathbf{x}}))}_{\approx f(\mathbf{x})} + \underbrace{\Theta_o^z}_{\approx 0} + \underbrace{\hat{d}^z}_{\approx dz} \right| \leq F_c \iff F_c \approx 0 \quad (7.9)$$

Dikkat ediniz ki, önerilen bozucu etki gözetleyici dinamikleri sayesinde bozucu etki söndürülmektedir ve $F_c \approx 0$ elde edilmektedir. Denklem (7.9)'dan elde edilen F_c 'yi gözeterek, (6.44)'teki ulaşılabilirlik koşulunu yeniden yazdığımızda

$$\underbrace{k_c^z}_{10} \geq \underbrace{F_c}_{\approx 0} + \underbrace{\kappa_c}_{10} \iff \kappa_c \approx k_c^z \quad (7.10)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (7.10)'dan görülmektedir ki κ_c , RSVM bozucu etki gözetleyici çalıştırıldığında 10'a yükseltilmiştir. Aslında, SMC'deki anahtarlama teriminin değeri Lyapunov fonksiyonunun azalma hızı olmuştur. Bu hızı arttırarak, ulaşma zamanı t_r , (7.4)'e göre azalmaktadır. Bu, RSVM bozucu etki çalıştırıldığında üretilen u_1 'in RSVM bozucu etki gözetleyici çalışmadığı duruma kıyasla daha küçük aşımılara (neredeyse ihmal edilebilir) yol açmasının nedenidir. Şekil 7.21 bu gerçekleri görsel olarak kanıtlamaktadır.



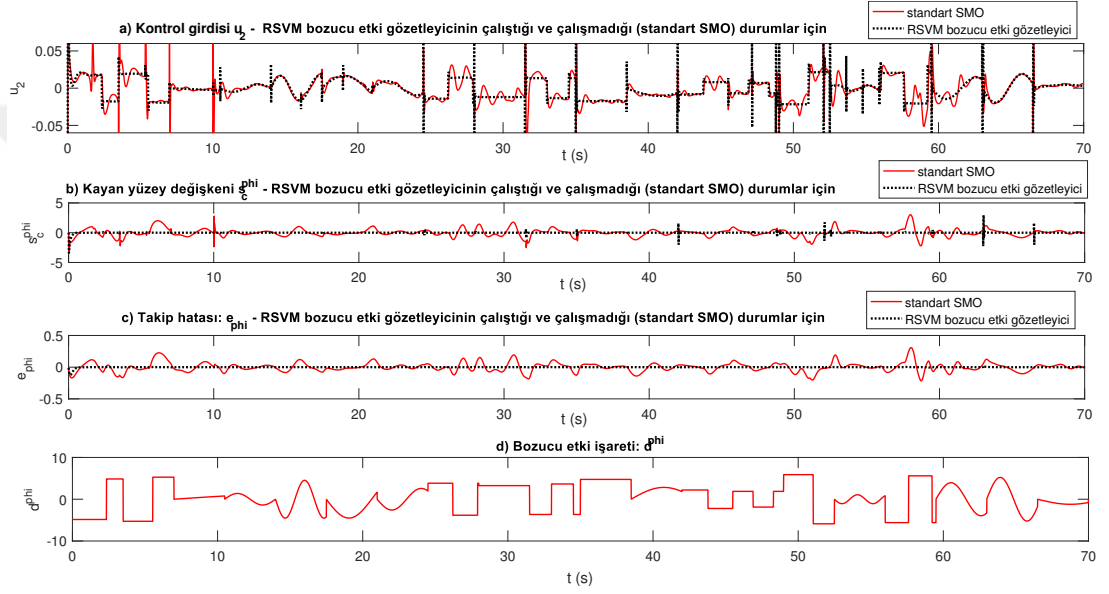
Şekil 7.21: a) u_1 , b) s_c^z ve c) $\tilde{x}_3$ izleme hatasının RSVM bozucu etki gözetleyicinin çalıştırıldığı ve çalıştırılmadığı (standart SMO) durumlar için çizimi. Ayrıca, bozucu etki işareti d^z çizim d) ile verilmiştir.

Şekil 7.21’den görülmektedir ki, bozucu etki işareti d^z ’nin pozitif ve negatif işaretli kenarları arasındaki geçiş anlarında, s_c^z istenilen değeri olan 0’dan sapmaktadır (standart SMO durumu için). Diğer bir ifadeyle, durum yörüngeleri kayan yüzeyden sapmaktadır. Sapmanın boyutu, bozucu etki işaretindeki sinüs dalga dizilerinin tepe noktasının genliğiyle ve kare dalga dizilerinin ise pozitif ve negatif kenarları arasındaki geçiş miktarıyla orantılıdır. Ancak, RSVM bozucu etki gözetleyici çalıştığında, $s_c^z = 0$ sağlanır ve bir kere ulaşıldığında durum yörüngeleri kayan yüzey üzerinde tutulur. Çünkü, Lyapunov fonksiyonunun göreceli olarak yüksek olan azalma hızından ötürü ($\kappa_c = 10$), RSVM bozucu etki gözetleyicinin etkin olduğu durumda ulaşma zamanı t_r göreceli olarak daha azdır. Bozucu etki işaretindeki yüksek genlikli bir geçişten ötürü durum yörüngeleri kayan yüzey $s_c^z = 0$ ’dan sapsa bile, bu yörüngeler, t_r küçük olduğu için $s_c^z = 0$ ’a hızlıca geri döndürülür. Tam tersindeyse, bozucu etki kestirimi yapılmadığında κ_c daha küçüktür ve bu yüzden t_r daha büyüktür. Bunun sonucunda, s_c^z değişkeninin sıfıra geri oturması belli bir süre alır. Bu olguya dayanarak, standart SMO durumunda u_1 , bozucu etki işaretinin tersi bir geometriyle üst üste oturamaz (bozucu

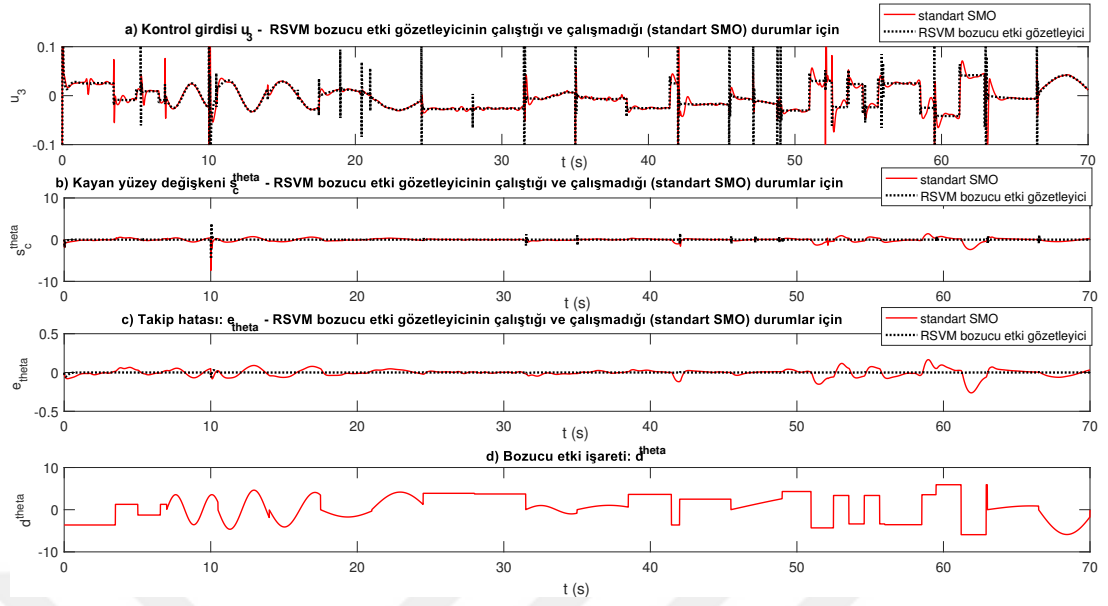
etki işaretindeki kare dalga dizileri düşünüldüğünde), yani u_1 , bozucu etki işareti kadar keskin bir kare dalga olamaz. Kayan yüzey değişkeni s_c^z sıfırdan saptığında kontrol girdisi u_1 de bozucu etki işaretinin ters geometrisinden sapmaktadır. Böyle sapmalar, bozucu etki işaretindeki kare dalga dizilerinin pozitif ile negatif kenarları arasındaki bir geçişe veya sinüsoidal dalga dizilerindeki bir tepe noktasına denk gelen anlarda u_1 'de aşım neden olmaktadır. Ancak, RSVM bozucu etki gözetleyici etkin olduğu zamanki u_1 , bozucu etki işaretinin ters geometrisiyle yüksek bir hassiyetle üst üste oturabilir durumdadır. Bu, bozucu etkinin önemli ölçüde söndürülmesini sağlar ve böylece kullanılan kontrolcü, durum yörüngelerini kayan yüzey üzerinde kolayca tutabilir, bu da sistemi Şekil. 7.15 ve Tablo 7.3'te gördüğümüz yüksek hassasiyetli yörünge takibine götürür.

Dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta şudur ki, $t = 2$ s civarında, u_1 'de öyle bir ani değişim görmekteyiz ki 1 saniye gibi bir süre içinde azalıp sonrasında artıyor. Fark edebileceğiniz üzere bu, d^z 'nin ters geometrisiyle tutarlı değildir. Aslında, bunun bozucu etki söndürmeyle bir ilişkisi yoktur. Bu daha ziyade quadrotorun sarmal eğri şekilli yörünge takibine geçmeden önce istenilen yüksekliğe (2 m) oturma manevrasıyla ilişkilidir. Dikkat ediniz ki, quadrotorun durum yörüngeleri (x_3 ve x_9) kayan yüzey $s_c^z = 0$ 'a $t = 2$ s anında ulaşır ve sonra, izleme hatası $\tilde{x}_3$, $1/\lambda_c^z$ gibi bir zaman sabitiyle sıfıra eksponensiyel olarak azalmaya başlar. Sonunda quadrotor, istenilen yükseklik olan 2 metreye kısa bir sürede ulaşır ve sarmal eğri şekilli yörünge takibine başlamadan önce bu yükseklikte yaklaşık 8 saniye boyunca havada asılı kalır (bu, Şekil. 7.18'de y_3 için olan referans izleme sonucundan teyit edilebilir). Diğer bir deyişle, $t = 2$ s anında, quadrotor istenilen yüksekliği geçmemek için önce yavaşlar (itki kuvveti u_1 'deki azalışın nedeni) ve sonraysa u_1 'i öyle bir değere ayarlar ki (u_1 'deki artışın nedeni) bu değer quadrotorun, kalkıştan sonraki 10 saniyelik ölü zamanın bitimine kadar, istenilen yükseklikte havada asılı kalmasını sağlar. Gördüğünüz üzere bu, quadrotor için doğal bir manevradır. Bundan başka bir nokta ise, yüksek genlikli bozucu etkilerin üstesinden gelebilmek adına k_c 'yi artırarak

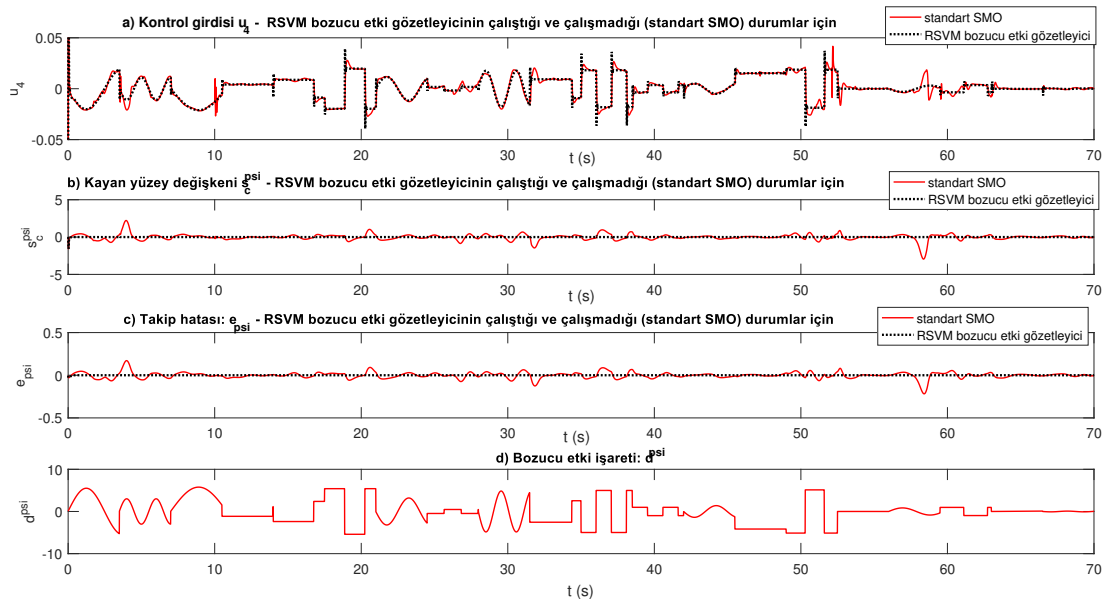
standart SMC'nin başarımını iyileştirmek akıllara gelebilir. Ancak, çatırdamadan sakınmak için o parametreye yüksek değerler vermeyi tercih etmeyiz. Bu sebeple, benzetim çalışmasında mevcut SMC parametre ayarlarıyla, standart SMC, $m_d^{max} = 6$ gibi yüksek genlikli zor bir bozucu etkinin varlığında kabul edilebilir bir izleme başarımı sunamamaktadır. Belirtmeliyiz ki, u_1 'i ilgilendiren durum diğer kontrol girdileri olan u_{2-4} için de geçerlidir. Bu yüzden, u_{2-4} 'le alakalı olan benzer çizimleri sırasıyla Şekil 7.22-7.24'te vermekteyiz.



Şekil 7.22: a) u_2 , b) s_c^{ϕ} ve c) $\tilde{x}_4$ izleme hatasının RSVM bozucu etki gözetleyicinin çalıştırıldığı ve çalıştırılmadığı (standart SMO) durumlar için çizimi. Ayrıca, bozucu etki işareti d^{ϕ} çizim d) ile verilmiştir.



Şekil 7.23: a) u_3 , b) s_c^{θ} ve c) $\tilde{x}_5$ izleme hatasının RSVM bozucu etki gözütleyicinin çalıştırıldığı ve çalıştırılmadığı (standart SMO) durumlar için çizimi. Ayrıca, bozucu etki işareti d^{θ} çizim d) ile verilmiştir.



Şekil 7.24: a) u_4 , b) s_c^{ψ} ve c) $\tilde{x}_6$ izleme hatasının RSVM bozucu etki gözütleyicinin çalıştırıldığı ve çalıştırılmadığı (standart SMO) durumlar için çizimi. Ayrıca, bozucu etki işareti d^{ψ} çizim d) ile verilmiştir.

Şekil. 7.22-7.24'ten görülmektedir ki, standart SMO durumunda, bozucu etki işaretindeki kare dalgadaki kenar geçişine denk gelen anlarda u_1 'de gördüğümüz

gibi aşımalar u_{2-4} 'te de görülmektedir. Ek olarak, bu aşımalar aynı zamanda bozucu etki işaretindeki sinüsoidal dalgaların başlangıç anlarında da görülebilmektedir. Buna dair örneklerle u_2 'de $t = 63$ s; u_3 'te ise $t = 3$ s ve $t = 17$ s anlarında rastlamaktayız. Bundan ayrı olarak, bozucu etki işaretinde hem kare hem de sinüsoidal dalga dizilerine denk gelen anlarda, örn., u_2 'de $t = 30$ s, $t = 50$ s ve $t = 60$ s anlarında, salınımlar görmekteyiz. Böyle salınımlara u_3 ve u_4 'te de rastlanmaktadır. Şekil 7.21-7.24'ten görülmektedir ki, RSVM bozucu etki gözetleyici durumunda, ilgili bozucu etki işaretindeki kare dalgaların kenar geçiş anlarında, ilgili kontrol girdisi bir kere kenar üzerine oturduktan sonra, herhangi bir salınım olmadan kenar üzerinde yakın takip sağlamaktadır. Bu aynı zamanda bozucu etki işaretinde sinüsoidal dalga dizilerine denk gelen anlar için de geçerlidir. Bu sayede, RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC, uçuş boyunca hem izleme hatasını hem de kayan yüzey değişkenini sifıra yakın tutmaktadır çünkü bozucu etki önemli ölçüde söndürülmektedir. Bir kere kayan yüzeye ulaşıldığında, ilgili izleme hatası orijine hızlıca yakınsar ve sürecin geri kalanı boyunca orijinin küçük bir komşuluğunda tutulur. Diğer bir deyişle, durum yörüngeleri o andan itibaren kayan yüzey üzerinde tutulur.

Standart SMO durumunda ise hem izleme hatası hem de kayan yüzey değişkeni yüksek genlikli bozucu etkilerden dolayı sıfırdan sıkça sapmaktadır. Bu, Şekil 7.21-7.24'teki b) ve c) altçizimlerinden görülmektedir. Yine de, RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC'de, kayan yüzey değişkeninde bazen anlık zıplamalar göze çarpmaktadır. Buna bir kaç örnek olarak u_2 'de $t = 42$ s, $t = 52$ s ve $t = 64$ s anları gösterilebilir. Dikkat ediniz ki kayan yüzeyden böyle sapmaların hızlıca üstesinden gelinir, yani, durum yörüngeleri kayan yüzeye hızlıca geri çekilir. Böylece, bu durum, izleme hatasının orijinden uzaklaşmasına neden olmaz. Böyle anlık sapmaların nedeni ilgili bozucu etki işareti ve onun kestirimini veren Şekil 7.9'u inceleyerek bulunabilir. Bahsi geçen anlarda, kestirilen bozucu etki işaretinde anlık zıplamalar bulunmaktadır. Bu zıplamalar, kestirim hatasında anlık artışa neden olur ve bu yüzden RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC başarımı çok kısa bir

süreliğine bozulur. Bu, ilgili kontrol işaretinde de anlık zıplamalar şeklinde kendini gösterir. u_2 , bahsi geçen anlarda böyle zıplamalar sergilemektedir ki bunlar u_2 'nin, ilgili anlarda bozucu etki işareti d^ϕ 'ın ters geometrisinden anlık sapmalar yaşamasına neden olur (bkz. Şekil 7.22). Yine de, bozucu etki kestirim hatası hızlıca orijinin küçük komşuluğuna geri çekilir. Bunun sonucunda, $s_c^\phi = 0$ hızlıca yeniden sağlanır. Bu sayede, $\tilde{x}_4$ sıfırın küçük bir komşuluğunda tutulur ve kusursuz takip başarımı korunur.

Son olarak, u_1 'in doğrudan motor rpm değerleriyle ilişkisi olmasından ötürü, farklı iki durumda (standart SMO ve RSVM bozucu etki gözetleyici durumlarında) üretilen u_1 'ler arasındaki ilişki, bu iki farklı durumda üretilen motor rpm değerleri arasında da bulunmaktadır. Bu, Şekil 7.19-7.6 ve Şekil. 7.20-7.7'den görsel olarak incelenebilmektedir. Sonuç olarak, RSVM bozucu etki gözetleyici temelli SMC durumunda üretilen kontrol işareti u_1 'in gücü bozucu etki kestirimi olmayan durumdakinden daha azdır. Bu, Tablo 7.5'ten sayısal olarak teyit edilebilir. Ancak bu durum u_2 ve u_3 için geçerli değildir. Bu, şu anlama gelmektedir. RSVM bozucu etki gözetleyici etkin olduğunda quadrotor, yalpalama ve yunuslama açılarıyla oynayıp kendini yörüngede tutmak için (x ve y eksenlerindeki konum için olan referansın daha iyi takibi için) daha çok çaba sarf etmektedir. Bu çaba karşılığında daha iyi takip başarımı elde edildiği için bu çabaya değer. Ayrıca dikkat ediniz ki, (4.24), (4.27), (4.28)'deki kuvvet ve tork tanımlarını motor rpm değerleri cinsinden düşündüğümüzde ve (4.33)'teki girdi tanımını göz önünde bulundurduğumuzda u_1 , pil tüketimini ifade etmek için daha iyi bir ölçüm olacaktır çünkü tüm motor rpm değerlerinin karesinin toplamıdır.

8. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının ilk kısmında UKF-SVM adı verilen ve LS-SVM üzerinde sadece çekirdek fonksiyonu ölçeğinde iyileştirmenin sağlandığı çalışmalar yapılmıştır. Bu kısımda, LS-SVM'nin çekirdek fonksiyon parametresi σ , diğer parametrelerle beraber, kokusuz Kalman süzgeci kullanılarak güncellenmektedir. Bunun sonucunda, başarıyla sınıflandırma ve bağlanım çalışmaları yapılmıştır.

Tezin ikinci kısmında ise buna ek olarak, yapısal bir iyileştirme üzerinde durulup LS-SVM'ye özyinelenabilirlik özelliği kazandırılmış ve bir aşama daha iyileştirme yapılmıştır. Böylece, özgün bir özyinelemeli SVM modeli önerilmiştir. Bu model, yüksek seviyede bozucu etkiler altında olan quadrotor tipi bir İHA'nın kayan kipli kontrolü çerçevesinde bozucu etki gözetleyici olarak kullanılmıştır. Modelin her bir gizli özniteliği aynı zamanda destek vektörü olduğundan, model karmaşıklığı küçük tutulmuştur. Gauss çekirdek fonksiyon parametresi diğer model ağırlıklarıyla eş zamanlı güncellenmektedir. Benzetimler, $s = 5$ gibi küçük bir destek vektör kümesiyle (5 adet gizli öznitelik kullanılarak) gerçekleştirilmiştir. Önerilen model, zamanda geri yayılma yöntemi kullanılarak eğitilmektedir. Modelin, zamanla değişen bir bozucu etki işaretindeki yönsemeyi kavrayabilme yeteneği sayesinde, ağırlıkları en iyi değerlerine çok kısa bir sürede oturmaktadır. Böylece, bozucu etki kestirimleri gerçek değerlere kısıtlı zaman içinde hızlıca yakınsamaktadır ve kestirim hatasının çok küçük olması sağlanmaktadır. Kayda değer nitelikte bir bozucu etki kestirim başarımı sayesinde durum kestirimleri de yüksek hassasiyetle elde edilmektedir. Bunun sonucunda, durum kestirimlerine dayanarak üretilen kontrol girdileri, sistem durumlarını istenilen değerlere kolayca götürebilmektedir. Önerilen bozucu etki gözetleyici, takip kalitesini öyle iyileştirmektedir ki quadrotorun referans yörüngesinden göze çarpacak miktarda sapmasına neden olabilecek bir bozucu etkiyi dahi kestirip etkisini yok edebilmektedir. Bu, bozucu etkinin önemli ölçüde söndürülmesiyle sağlanır. İHA'ların otonom uçuşu düşünüldüğünde, rüzgar borasında (wind gust) uçuşlar gerçekleştirilirken bu faydadan güzelce yararlanılabilir.

Ek olarak, daha yumuşak kontrol girdileri üretildiği için bu girdilerin toplam gücü belli bir dereceye kadar düşürülmektedir. Bu, özellikle beklenen uçuş süresi göreceli olarak uzun olduğunda, pil tüketimi açısından önemli bir durumdur. Sonuç olarak, önerilen RSVM modelinin bozucu etki gözetleyici olarak başarımı kayan kipli kontrol çerçevesinde kanıtlanmıştır. Böylece, bu tez çalışması, geliştirilmiş bir gürbüz kontrol elde edebilmek adına, makine öğrenmesi ve doğrusal olmayan kontrol yöntemlerini birleştirmek amacına ulaşmaktadır.

Gelecekte, tez çalışmasında önerilen yaklaşımın rüzgarlı havalarda uygulanması düşünülmektedir. Ayrıca, önerilen RSVM modelinin pekiştirmeli öğrenmede (reinforcement learning) kullanılması ve bu yöntem ile quadrotor kontrolü de planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- Beard, R., “Quadrotor dynamics and control rev0.1”, Technical Report, All Faculty Publications, Paper 1325, Brigham Young University, (2008).
- Cauwenberghs, G. and Poggio, T., “Incremental and decremental support vector machine learning”, *Advances in neural information processing systems*, 13, (2001).
- Chapelle, O., Vapnik, V., Bousquet, O., and Mukherjee, S., “Choosing multiple parameters for support vector machines”, *Mach. Learn.*, 46 (1-3), 131–159, (2002).
- Cortes, C. and Vapnik, V., “Support-vector networks”, *Machine Learning*, 20 (3), 273–297, (1995).
- De Lellis Costa de Oliveira, M., “Modeling, identification and control of a quadrotor aircraft”, Master’s thesis, Czech Technical University in Prague, (2011).
- Dilmen, E. and Beyhan, S., “A novel online LS-SVM approach for regression and classification”, *IFAC-PapersOnLine*, 50 (1), 8642–8647. 20th IFAC World Congress, (2017).
- Dilmen, E. and Beyhan, S., “An enhanced online LS-SVM approach for classification problems”, *Soft Computing*, 22 (13), 4457–4475, (2018).
- Esfandiari, F. and Khalil, H. K., “Stability analysis of a continuous implementation of variable structure control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 (5), 616–620, (1991).
- Fan, Y., Cao, Y., and Zhao, Y., “Sliding mode control for nonlinear trajectory tracking of a quadrotor”, In *2017 36th Chinese Control Conference*, 6676–6680, (2017).
- Feedback, Digital pendulum control experiments, feedback instruments Inc, (2006).
- Garcia, P. C., Lozano, R., and Dzul, A. E., “Modelling and control of mini-flying machines”, Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, (2005).

- Hong, W.-C., “Chaotic particle swarm optimization algorithm in a support vector regression electric load forecasting model”, *Energy Conversion and Management*, 50 (1), 105 – 117, (2009).
- Hong, W.-C., Dong, Y., Zhang, W. Y., Chen, L.-Y., and Panigrahi, B. K., “Cyclic electric load forecasting by seasonal SVR with chaotic genetic algorithm”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 44 (1), 604 – 614, (2013).
- Jiang, Z., Liu, C., Zhang, G., Wang, Y., Huang, C., and Liang, J., “GPS/INS integrated navigation based on UKF and simulated annealing optimized SVM”, In *Proceedings of the 78th IEEE Vehicular Technology Conference, VTC Fall 2013, Las Vegas, NV, USA*, 1–5, (2013).
- Lambert, P. and Reyhanoglu, M., “Observer-based sliding mode control of a 6-dof quadrotor UAV”, In *IECON 2018 - 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2379–2384, (2018).
- Lin, C.-T., Yeh, C.-M., Liang, S.-F., Chung, J.-F., and Kumar, N., “Support-vector-based fuzzy neural network for pattern classification”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14 (1), 31–41, (2006).
- Liu, Y., Hu, N., Wang, H., and Li, P., “Soft chemical analyzer development using adaptive least-squares support vector regression with selective pruning and variable moving window size”, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 48 (12), 5731–5741, (2009).
- Ma, J., Theiler, J., and Perkins, S., “Accurate online support vector regression”, *Neural Computation*, 15, 2683–2703, (2003).
- Manimala, K., David, I. G., and Selvi, K., “A novel data selection technique using fuzzy c-means clustering to enhance SVM-based power quality classification”, *Soft Computing*, 19 (11), 3123–3144, (2015).

- Mu, T. and Nandi, A. K., “EKF based multiple parameter tuning system for a L2-SVM classifier”, In *2006 16th IEEE Signal Processing Society Workshop on Machine Learning for Signal Processing*, 229–233. IEEE, (2006).
- Ogata, K., “Modern control engineering”, Prentice Hall PTR, USA, 4th edition, (2001).
- Osuna, E., Freund, R., and Giros, F., “An improved training algorithm for support vector machines”, In *Neural Networks for Signal Processing VII. Proceedings of the 1997 IEEE Workshop*, 276–285, (1997).
- Platt, J., “Sequential minimal optimization: A fast algorithm for training support vector machines”, Technical Report, (1998).
- Runcharoon, K. and Srichatrapimuk, V., “Sliding mode control of quadrotor”, In *2013 The International Conference on Technological Advances in Electrical, Electronics and Computer Engineering (TAECE)*, 552–557, (2013).
- Sabatino, F., “Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation”, Master’s thesis, KTH Royal Institute of Technology, (2015).
- Schmidhuber, J., Gagliolo, M., Wierstra, D., and Gomez, F., “Evolino for recurrent support vector machines”, In *ESANN ’06 — 14 th European Symposium on Artificial Neural Networks*, 593–598, Evere, Belgium, (2006).
- Schneegaß, D., Schaefer, A. M., and Martinetz, T., “The intrinsic recurrent support vector machine”, In *European Symposium on Artificial Neural Networks, ESANN*, 325–330, (2007).
- Scholkopf, B., Simard, P., Smola, A., and Vapnik, V., “Prior knowledge in support vector kernels”, In *Advances in Neural Information Processing Systems 10*, 640–646, Cambridge, MA, USA. Max-Planck-Gesellschaft, MIT Press, (1998).

- Schölkopf, B., Smola, A. J., Williamson, R. C., and Bartlett, P. L., “New support vector algorithms”, *Neural Comput.*, 12 (5), 1207–1245, (2000).
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A., “Sliding mode control and observation”, series: Control engineering, birkhauser:basel, ISBN: 978-0-81764-8923, (2014).
- Slotine, J. and Li, W., “Applied nonlinear control”, Prentice-Hall Inc., (1991).
- Slotine, J. . E., Hedrick, J. K., and Misawa, E. A., “On sliding observers for nonlinear systems”, In *1986 American Control Conference*, 1794–1800, (1986).
- Slotine, J.-J. E., Hedrick, J. K., and Misawa, E. A., “On sliding observers for nonlinear systems”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 109 (3), 245–252, (1987).
- Spurgeon, S. K., “Sliding mode observers: a survey”, *International Journal of Systems Science*, 39 (8), 751–764, (2008).
- Suykens, J., Van Gestel, T., and De Brabanter, J., “Least squares support vector machines”, World Scientific, (2002).
- Suykens, J. A. and Vandewalle, J., “Recurrent least squares support vector machines”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47 (7), 1109–1114, (2000).
- Suykens, J. A. K. and Vandewalle, J., “Least squares support vector machine classifiers”, *Neural Process. Lett.*, 9 (3), 293–300, (1999).
- Tang, H.-S., Xue, S.-T., Chen, R., and Sato, T., “Online weighted LS-SVM for hysteretic structural system identification”, *Engineering Structures*, 28 (12), 1728–1735, (2006).
- Tang, Y., “Deep learning using support vector machines”, *CoRR*, abs/1306.0239, 2, (2013).

UCI, (10 May 2020), <http://archive.ics.uci.edu/ml/>, University of California Irvine Machine Learning Laboratory, (2020).

Vapnik, V. N., “The nature of statistical learning theory”, Springer, (1995).

Wan, E. A. and Van Der Merwe, R., “The unscented Kalman filter for nonlinear estimation”, In *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications and Control Symposium 2000, AS-SPCC, IEEE*, 153–158, (2000).

Wang, W., Xu, Z., Lu, W., and Zhang, X., “Determination of the spread parameter in the gaussian kernel for classification and regression”, *Neurocomputing*, 55 (3-4), 643–663, (2003).

Wang, Z., Zhang, Z., and Mao, J., “Adaptive tracking control based on online LS-SVM identifier”, *International Journal of Fuzzy Systems*, 14 (2), 330–336, (2012).

Williams, R. and Zipser, D., “Gradient-based learning algorithms for recurrent networks and their computational complexity”, In *Back-propagation: Theory, Architectures and Applications*, 433–486. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, USA, (1995).

Williams, R. J. and Peng, J., “An efficient gradient-based algorithm for on-line training of recurrent network trajectories”, *Neural computation*, 2 (4), 490–501, (1990).

Wu, Q., Liu, W.-Y., and Yang, Y.-H., “Time series online prediction algorithm based on least squares support vector machine”, *Journal of Central South University of Technology*, 14 (3), 442–446, (2007).

Yang, X., Lu, J., and Zhang, G., “Adaptive pruning algorithm for least squares support vector machine classifier”, *Soft Comput.*, 14 (7), 667–680, (2010).

Zhang, S.-X., Zhao, R., Li, C. L. J., and Gong, Y., “Recurrent support vector machines for speech recognition”, In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, (2016).