SÜREKSİZ KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN ASİMPTOTİĞİ

MUSTAFA KANDEMİR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
TEMMUZ-1997

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Mustafa KANDEMİR

DOKTORA TEZİ

Danışman: Prof.Dr.Oktay MUHTAROV

Samsun
Temmuz-1997

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Eğitimi anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan	**: Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU**
Üye	**: Prof. Dr. Mustafa BALCI**
Üye	**: Prof. Dr. Oktay MUHTAROV**

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../.../1997

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof.Dr. Veysel Kartal

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde lineer diferensiyel operatörler ile ilgili temel tanımlara ve kuazipolinomların sıfir yerlerinin dağılımına ait bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde bilinen metodlarla ikinci mertebeden parametreye bağlı lineer diferensiyel denklemin çözümlerinin parametreye göre asimptotiği incelenmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölüm çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümlerde yüksek mertebeden türevinin katsayısı kompleks değerli, parçalı-sabit fonksiyon olan parametreye bağlı ikinci mertebeden diferensiyel denklem için bir kaç farklı özelliği bulunan fonksiyonel çok noktalı sınır değer probleminin spektrumu araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde önce kompleks düzlem dört tane sektöre bölünmüştür. Bu sektörlerin her birinde diferensiyel denklemin çözümlerinin asimptotiği bulunmuştur. Daha sonra bu sektörlerin her biri iki sektöre bölünerek elde edilen sekiz sektörün her birinde sınır şartlarında bulunan lineer fonksiyonellerin ve sınır değer ifadelerinin asimptotiği elde edilmiştir. Bu asimptotik formüllerden faydalanarak karakteristik determinant asimptotik kuazipolinom şeklinde ifade edilip özdeğerler iki dizi şeklinde düzenlenmiş ve asimptotik formüller bulunmuştur.

Dördüncü bölümde yüksek mertebeden türevin katsayısının aldığı değerlerin argümentlerinin eşit olduğu durum incelenmiştir. Bu halde kompleks düzlem iki yarı-düzleme bölünmüş ve bu yarı-düzlemlerin her birinde üçüncü bölümde olduğu gibi karakteristik determinant kuazipolinom şeklinde ifade edilmiş ve bir dizi şeklinde düzenlenerek özdeğerlerin asimptotiği bulunmuştur.

SUMMARY

This study has been desinged in four parts.

In the first section it has been mentioned about the basic definitions of linear differential operators and knowledge about the dispersion of quasi-polinoms on zero places.

In the second section asymptotic according to the parameter of the solutions of linear differential equation with respect to with the second order parameter with known methods has been examined.

The third and the fourth sections have been formed the original sides of our study. In these sections spectrum of functional poly-pointed boundary value problem which has some different properties for differential equation from second order connected with the parameter whose coefficient of derivation from higher order is a complex variable partial constant has been investigated.

In the third section, the complex plain has been divided into four sectors and in each of these factors, the asymptotic of the solutions of the diferential equation has been found. Dividing the each sector into two then eight sectors have been obtained. In each of these eight obtained sectors, the asymptotic of linear functional at boundary conditions has been found.

Using these asymptotic formulas, characteristic determinant has been written as asymptotic quasi-polinom . Writing the eigenvalue in two sequences, the asymptotic formulas have been found.

In the fourth section, the case of the argument of values of the coefficiency of the derivation in higher-order has been examined. In such a case the complex plain has been divided into two half-plains. As it is mentioned in the third section that in each of these two half-plains, characteristic determinant has been stated as quasi-polinom. Arranging these quasi-polinom as a sequence, the asymptotic of eigenvalue has been obtained.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarım boyunca, kıymetli zamanlarını ayırarak her türlü fedakarlığı yapan, yakın ilgi ve alakasını hiçbir zaman esirgemeyen, engin bilgilerinden en iyi şekilde istifade ettiğim Saygıdeğer Hocam sayın Prof.Dr.Oktay MUHTAROV'a yardımlarından dolayı en içten saygılarımı sunuyorum.

Bütün akademik çalışmam boyunca varlığını ve hoşgörüsünü sürekli yanımda hissettiğim, bana çalışma azmi ve cesareti veren Saygıdeğer Hocam, O.M.Ü. Rektör Yardımcısı ve Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Prof.Dr. Nuri KURUOĞLU'na sonsuz saygılarımı arzedeyorum.

Teşvik, telkin, ilgi ve alakası ile çalışmalarımda bana daha ilerisini gösteren Saygıdeğer Hocam, Ankara Ü.Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç.Dr.Ömer AKIN'a en derin saygılarımı sunuyorum.

Çalışmalarım boyunca her türlü yardım ve desteklerini gördüğüm O.M.Ü. Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü Başkanı Sayın Hocam Doç.Dr.Mustafa ÇALIŞKAN başta olmak üzere bütün Öğretim Üyesi hocalarıma, Araştırma Görevlisi arkadaşlarıma, tezin yazımında emeği geçen Recep Öztürk'e teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Uygulamalı Matematiğin birçok önemli problemlerinde, sınır şartlarında sadece koordinat değişkenine göre değil hem de zamana göre kısmi türev bulunmaktadır. Bu halde uygun spectral problemde özdeğer parametresi sadece adi diferensiyel denklemde değil, aynı zamanda sınır şartlarında da meydana çıkıyor. Bu tipten birkaç problem ilk defa S. L. Sobolev'in (S. L. Sobolev., Journal Prikladnoy Mekaniki I tekhniçeskoy Fiziki, 1960, No:3, Sayfa 20-55) çalışmasında ele alınmıştır. Son zamanlarda ise bu tipten problemler C. T. Fulton'un, A. Schneider'in, J. Walter'ın, S. Ya. Yakupob'un, M. L. Rasulov'un, A. A. Shkalikov'un vs. çalışmalarında incelenmiştir.

Bu problemlerin esas özelliği, onların iyi bildiğimiz fonksiyonel uzaylarda lineer diferensiyel operatör şeklinde temsil edilememesidir.

Bizim çalışmamızda da özdeğer parametresi hem diferensiyel denklemde hem de sınır şartlarında bulunmaktadır. Bununla birlikte, çalışmamızda ele aldığımız problemin birkaç ayırıcı özelliği daha bulunmaktadır. Bunlardan birincisi; sınır şartlarında soyut lineer fonksiyoneller bulunduğu için araştırdığımız problem tamamen diferensiyel olan sınır değer problemi değildir. İkincisi; sınır şartları aranan fonksiyonunun sadece sınır noktalarındaki değerlerini değil aynı zamanda sonlu sayıda iç noktadaki değerlerini de içermektedir. Bu nedenlerden dolayı ele aldığımız sınır şartlarını fonksiyonel çok-noktalı sınır şartları diye adlandırıyoruz. Üçüncü farklı özellik ise diferensiyel denklemde yüksek mertebeden türevin katsayısının bir noktada süreksiz olması ve bu süreksizlik noktasında doğal sınır şartlarına ilave olarak "geçiş" şartları dediğimiz şartların verilmesidir.

BÖLÜM I

TEMEL TANIMLAR VE YARDIMCI TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız temel tanımları ve yardımcı önermeleri vereceğiz.

I.1. Lineer Operatörler

Tanım 1.1. E ve F aynı bir K-reel veya kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı iki lineer uzay olsun. $D\subset E$ herhangi bir altcümle olmak üzere $\forall x\in D$ elemanına bir $y\in F$ elemanı karşılık getirilmişse bu dönüşüme tanım bölgesi $D\subset E$ olan E den F ye dönüşüm yapan operatör denir. Eğer bu operatörü A ile gösterirsek D cümlesine A operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(\mathrm{A})$ ile gösterilir. $\forall x\in D(\mathrm{A})$ için $y=\mathrm{A}x$ şeklinde olan F nin bütün y elemanlarının cümlesine A operatörünün değerler bölgesi denir ve $R(\mathrm{A})$ ile gösterilir.

Eğer $D(\mathrm{A})$ lineer altuzay ise ve $\forall x_1,x_2\in D(\mathrm{A})$, $\forall \alpha_1,\alpha_2\in K$ skalarları için

$$\mathrm{A}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1\mathrm{A}x_1+\alpha_2\mathrm{A}x_2$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir.

F=**K** reel veya kompleks sayılar uzayı olduğu durumda lineer operatöre lineer fonksiyonel denir.

Tanım I.1.2: E ve F lineer normlu uzaylar

$$\mathrm{A}:D(\mathrm{A})\subset E\to F$$

lineer bir operatör ve $x_0\in D(A)$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık

$$\|x-x_0\|_E<\delta \text{ olduğunda } \|Ax-Ax_0\|_F<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa A operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir.

Eğer $D(A)=E$ ve A operatörü $\forall x_0 \in D(A)=E$ noktasında sürekli olursa A operatörüne E den F ye süreklidir denir.[1]

I.2.Sobolev Uzayları

Herhangi bir sonlu [a,b] aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir ve mutlak değeri Lebesgue anlamında integrallenebilir bütün fonksiyonlar uzayı L_1 [a,b] ile gösterilir. $1 \le q < \infty$ olmak üzere $|f(x)|^q \in L_1[a,b]$ şartını sağlayan bütün f(x) fonksiyonlar uzayı ise $L_q[a,b]$ ile gösterilir. Bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{Lq[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^q\, dx\right)^{1/q}$$

şeklinde tanımlıdır. k herhangi bir doğal sayı olmak üzere (k-1)-inci mertebeye kadar sürekli türevleri bulunan, $f^{(k-1)}$ türevi mutlak sürekli, $f^{(k)} \in L_q[a,b]$ şeklinde olan bütün fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_q^k(a,b)$ ile gösterilir. Sobolev uzaylarındaki fonksiyonların normu

$$\|f\|_{W_q^k[a,b]} = \|f\|_{L_q[a,b]} + \|f'\|_{L_q[a,b]} + \ldots + \|f^{(k)}\|_{L_q[a,b]}$$

formülü ile veya bu norma denk olan herhangi normla verilir. [4]

I.3. Lineer Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri

Tanım I.3.1: Sonlu bir [a,b] aralığında $p_0(x) \neq 0$ ve $p_0(x)$, $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ fonksiyonları sürekli olmak üzere

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y \qquad \text{(I.3.1)}$$

ifadesine lineer diferensiyel ifade adı verilir.

Tanım I.3.2: Bir y fonksiyonunun [a,b] aralığının x=a ve x= b sınır noktalarında, fonksiyonunun kendisinin ve türevlerinin aldığı değerleri

$$y(a),\ y'(a),\ y''(a),\ldots,y^{(n-1)}(a)$$

ve

$$y(b),\ y'(b),\ y''(b),\ldots,\ y^{(n-1)}(b)$$

şeklinde gösterirsek α_i ve β_i (i=1,2,...,(n-1)) herhangi keyfi sabitler olmak üzere bu değişkenlerin lineer birleşimi olan

$$L(y)=\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)+\ldots+\alpha_{n-1} y^{(n-1)}(a)+\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)+\ldots+\beta_{n-1} y^{(n-1)}(b) \qquad (I.3.2)$$

ifadesine sınır-değer ifadesi denir. Ayrıca;

$$L(y)=c,\ c\in \mathbf{C} \qquad (I.3.3)$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe sınır şartı adı verilir.

Eğer (I.3.3) sınır şartı

$$L(y)=0 \qquad (I.3.4)$$

olarak tanımlanmışsa bu sınır şartına homojen sınır şartı denir.

Tanım 3.3: $l(y)$, (I.3.1) eşitliğindeki lineer diferensiyel ifade ve $L_k(y)$, k=1,2,...m, (I.3.2) şeklinde tanımlanmış sınır-değer ifadeleri olmak üzere

$$\begin{cases} l(y)=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0 & (I.3.6) \\ L_k(y)=0\ ,\ k=1,2,\ldots,m & (I.3.6) \end{cases}$$

problemine homojen sınır değer problemi denir.

Tanım I.3.4: Tanım bölgesi $q\geq 1$ olmak üzere ve

$D(L)=\{ y \in W_q^n[a,b] \mid L_k(y)=0,\ k=\overline{1,m}\}\subset L_q[a,b]$, değerler bölgesi $L_q[a,b]$ olan ve

$Ly=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y$

şeklinde tanımlanan

$L: L_q[a,b]\to L_q[a,b]$

operatörüne $L_q[a,b]$ uzayında $l(y)$ diferensiyel ifadesinin ve (I.3.6) sınır şartlarının ürettiği lineer diferensiyel operatör adı verilir. Bu halde (I.3.5)-(I.3.6) sınır değer problemi

$$Ly=0 \tag{I.3.7}$$

operatör denklemi şeklinde yazılabilir. $y=0$ fonksiyonu daima (I.3.7) lineer diferensiyel operatörünün aşikar çözümüdür.

$Ly=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(y)=0$

diferensiyel denkleminin, n- tane

$y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$

lineer bağımsız çözümü verildiğinde, $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ler herhangi keyfi sabitler olmak üzere genel çözümünün

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x) \tag{I.3.8}$$

olduğunu lineer diferensiyel denklemler teorisinden biliyoruz.

Bu genel çözümü (I.3.6) sınır şartlarında yerine yazarsak $c_1,c_2,\ldots c_n$ değişkenlerine göre

$$\begin{cases} c_1 L_1(y_1) + c_2 L_1(y_2) + \ldots + c_n L_1(y_n) = 0 \\ c_1 L_2(y_1) + c_2 L_2(y_2) + \ldots + c_n L_2(y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_m L_m(y_1) + c_2 L_m(y_2) + \ldots + c_m L_m(y_m) = 0 \end{cases}$$

lineer denklemin sistemini elde ederiz. Bu sistemin $c_1, c_2, \ldots, c_n$ değişkenlerine göre katsayılar matrisini A ile gösterelim

$$A = \begin{bmatrix} L_1(y_1)\ L_1(y_2) \ldots L_1(y_n) \\ L_2(y_1)\ L_2(y_2) \ldots L_2(y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_m(y_1)\ L_m(y_2) \ldots L_m(y_m) \end{bmatrix}$$

Bu matrisin rankını r ile gösterirsek $r \leq \min\{m,n\}$ olacağı aşikardır. Buna göre lineer denklem sistemlerinin çözümleri için aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç I.3.1:

i) (I.3.5)-(I.3.6) homogen sınır değer probleminin (veya Ly=0 lineer diferensiyel operatörünün) aşikar olmayan çözümünün bulunabilmesi için gerek ve yeter şart $r<n$ olmasıdır.

ii) $m<n$ ise (I.3.5)-(I.3.6) homogen sınır değer probleminin (veya Ly=0 lineer diferensiyel operatörünün) daima aşikar olmayan çözümleri vardır.

iii) $m=n$ ise (I.3.5)-(I.3.6) homogen sınır değer probleminin (veya Ly=0 lineer diferensiyel operatörünün) aşikar olmayan çözümünün bulunması için gerek ve yeter şart $\det A=0$ olmasıdır.

Tanım I.3.5: L Diferensiyel operatörü ve λ kompleks sayısı verilmiş olsun. Eğer $Ly=\lambda y$ denkleminin hiç olmazsa bir tane $y(x) \neq 0$, $y(x) \in D(L)$ çözümü bulunursa λ sayısına L operatörünün özdeğeri denir.

Tanım I.3.4. gereğince, λ kompleks sayısının L diferensiyel operatörün özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$l(y)=\lambda y$ (I.3.9)

denkleminin

$L_1(y)=0,\ L_2(y)=0,\ldots,L_m(y)=0$ (I.3.10)

sınır şartlarını sağlayan en az bir tane aşikar olmayan çözümünün bulunmasıdır.

$y_1(x,\lambda),\ y_2(x,\lambda),\ldots,\ y_n(x,\lambda),$ (I.3.11)

fonksiyonları (I.3.9) denkleminin n-tane lineer bağımsız çözümleri olmak üzere, lineer diferensiyel denklemlerin genel teorisinden biliyoruz ki x değişkeninin her bir değerinde (I.3.11) fonksiyonları λ parametresinin tam analitik fonsiyonları olacaklar-dır [7].

O halde sonuç (I.3.1) gereği λ sayısının özdeğer olması için gerek ve yeter şart

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} L_1(y_1(x,\lambda)) & L_1(y_2(x,\lambda)) & \ldots & L_1(y_n(x,\lambda)) \\ L_2(y_1(x,\lambda)) & L_2(y_2(x,\lambda)) & \ldots & L_2(y_n(x,\lambda)) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ L_m(y_1(x,\lambda)) & L_m(y_2(x,\lambda)) & \ldots & L_m(y_n(x,\lambda)) \end{bmatrix}$$

matrisinin r(λ) rankının n den küçük olmasıdır. m=n olması durumunda ise λ sayısının özdeğer olması için gerek ve yeter şart

$\det A(\lambda)=0$ (I.3.12)

olmasıdır. Bu denkleme L operatörünü karakteristik denklemi denir. $y_i(x,\lambda)$, $i=1,2,\ldots,n$ fonksiyonları x değişkeninin her bir değirinde tam analitik foksiyonlar olduğu için A(λ) matrisinin her bir elemanı tam analitik fonksiyondur. Kompleks analizlerden biliyoruz ki, tam analitik fonksiyonun en fazla sayılabilir sayıda sıfır yeri bulunur ve sıfır yerlerinin hiç bir sonlu yığılma noktası olamaz' [10].

Buna göre (I.3.1) denklemini de dikkate alırsak aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme I.3.1: Her bir lineer diferensiyel operatör için aşağıdaki iki şıktan ancak ve ancak biri mümkündür.

1) Her bir kompleks λ sayısı L lineer diferensiyel operatörünün özdeğeridir.

2) L lineer diferensiyel operatörünün özdeğerleri en fazla sayılabilir sayıdadır ve özdeğerlerinin hiç bir sonlu yığılma noktası olamaz. [6]

I.4. Asimptotik Olarak Kuazipolinom Şeklinde İfade Edilebilen Analitik Fonksiyonların Sıfır Yerlerinin Geometrik Dağılımı

Diferensiyel ve diferensiyel-fark denklemlerinin incelenmesinde ve özellikle çözümlerin üstel fonksiyonlar şeklindeki açılımları araştırılırken bu denklemlerin karakteristik fonksiyonlarının sıfır yerlerinin dağılımı hakkındaki bilgilerden faydalanıldığını biliyoruz.

Bu karakteristik fonksiyonlar genel olarak

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (M_i\lambda + N_i)e^{\omega_i\lambda} \qquad (1.4.1)$$

şeklinde elde edilir. Bu şekildeki tam fonksiyonlara eksponensiyel polinomlar veya kuazipolinomlar denir. Kuazipolinomların sıfır yerlerinin dağılımından teorik ve uygulamalı matematiğin bir çok alanlarında sık sık faydalanılmaktadır.

(I.4.1) şeklindeki kuazipolinomun sıfır yerlerinin dağılımını incelemek için analitik fonksiyonların sıfır yerleri hakkında iyi bilinen Argüment Prensibi ve Rouche teoremini uygulayacağız [10].

Teorem I.4.1

Basit ve kapalı olan C eğrisinin içinde moremorf, üzerinde ise analitik olan f(z) fonksiyonu C eğrisi üzerinde sıfırdan farklı ise f(z) fonksiyonunun C eğrisi içindeki sıfır noktalarının sayısı ile kutup noktalarının sayısı arasındaki fark, z değişkeni C eğrisi üzerinde pozitif yönde bir kez tam devir ettiğinde sürekli olarak değişen Argf(z) fonksiyonunun değişiminin $\frac{1}{2\pi}$ ile çarpımına eşittir.

Özel olarak Eğer f(z) fonksiyonu basit, kapalı C eğrisinin içinde ve üzerinde analitik ise f(z) fonksiyonunun C eğrisi içindeki sıfır yerlerinin sayısı $\frac{1}{2\pi}\underset{C}{Var}\, Arg(f(z))$ değerine eşit olacaktır.

Şimdi Argüment Prensibinin bir çok açıdan faydalı olan geometrik yorumunu verelim.

Z değişkeni, C eğrisi üzerinde pozitif yönde bir kez tam devir ettiğinde ω=f(z) noktasında bir C′ eğrisini çizer. ω noktasının koordinat başlangıcı etrafındaki tam devirlerinin sayısını ν ile gösterirsek, pozitif yöndeki bir tam devir sayısı +1, negatif yöndeki bir tam devir sayısı -1 olarak kabul edilmek üzere

$$\underset{C}{Var}\, Arg(f(z)) = 2\pi\nu$$

olacağından (I.4.9) formülü

$$\nu = N - P \qquad (I.4.10)$$

eşitliği ile yazılabilir. Buna göre kapalı, basit C eğrisi içinde sonlu sayıda kutup noktaları hariç, bu eğrinin içinde ve üzerinde analitik ve C üzerinde sıfırdan farklı f(z) fonksiyonunun sıfır noktası ve kutup noktaları sayıları arasındaki fark, z değişkeni C eğrisi üzerinde pozitif yönde bir tam devir ettiğinde $\omega=f(z)$ noktasının koordinat başlangıcı etrafında yaptığı tam devirlerin sayısına eşittir.

Özel olarak, eğer f(z) fonksiyonu C basit kapalı eğrisinin içinde ve üzerinde analitik, eğri üzerinde sıfırdan farklı ise f(z) fonksiyonunun C eğrisi içindeki sıfır yerlerinin sayısı, z noktası C üzerinde bir tam devir ettiğinde $\omega=f(z)$ noktasının koordinat başlangıcı etrafında yaptığı tam devirlerin sayısına eşittir.

Argüment Prensibinin önemli bir sonucu olarak elde edilen ve ileride uygulayacağımız Rouche teoremini verilim.

Sonuç I.4.2

f(z) ve $\varphi(z)$ herhangi basit kapalı bir C eğrisinin üzerinde sürekli, içinde analitik fonksiyonlar olmak üzere bu eğri üzerinde

$|\varphi(z)|<|f(z)|$

olsun. Bu taktirde f(z) ve $f(z)+\varphi(z)$ nin C eğrisi içindeki sıfır yerlerinin sayısı eşittir [10].

I.5. Sıfır Yerlerinin δ-Komşuluğunun Dışında Parametreye Bağlı Analitik Fonksiyonların Modülünün Değerlendirilmesi

Yardımcı Önerme 1.5. $R=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid a_i\leq x_i\leq b_i\}$ cümlesi n-boyutlu herhangi bir dikdörtgen ve S ise **C** kompleks düzleminin herhangi bir bölgesi olsun. F(z,x) fonksiyonu her iki değişkene göre sürekli olan ve $\forall x\in R$ için z değişkenine göre S bölgesinde analitik bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in R$ için $F(z,x)$ fonksiyonunun S bölgesi içindeki sıfır yerlerinin sayısı N sabit sayısından küçük olsun.

Eğer $\forall x \in R$ için z nin $F(z,x)$ fonksiyonunun sıfır yerinden uzaklığı yeteri kadar küçük $\delta>0$ sayısından küçük değilse bu durumda

$$|F(z,x)| \geq k_\delta$$

eşitsizliğini sağlayan ve sadece δ sayısına bağlı olan $k_\delta>0$ sayısı bulunur.

İspat: $\forall x \in R$ noktası için merkezleri $F(z,x)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinde, yarıçapları yeteri kadar küçük $\delta>0$ olan yuvarları S bölgesinden attıktan sonra geride kalan kısmını S_δ ile gösterelim. $F(z,x)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı sınırlı olduğu için S_δ bölgesi $\forall x \in R$ için kapalı olacaktır. Sabit tutulan $\forall x \in R$ için öyle bir $C_\delta>0$ sayısı bulunur ki $\forall z \in S_\delta$ için

$$|F(z,x)| \geq C_\delta$$

eşitsizliği sağlanır ve bazı $z \in S_\delta$ elemanları için son eşitsizlik eşitliğe dönüşür. Böylece

$$C_\delta = \min_{z \in S_\delta} |F(z,x)|$$

şeklinde bir $C_\delta(x)$ fonksiyonu tanımlanabilir. $C_\delta(x)$ fonksiyonu R de sürekli olacağından bu fonksiyon R de en küçük değerini alır. Yani öyle bir $x_0 \in R$ elemanı vardır ki

$$\min_{z \in S_\delta} C_\delta(x) = C_\delta(x_0) \equiv k_\delta$$

yazılabilir. Demek ki $\exists x_0 \in R$ ve $z_0 \in S_\delta$ bulunur ki

$$|F(z_0,x_0)| = k_\delta$$

olacağından $k_\delta>0$ sonucu elde edilir.

I.6. Kuazipolinomların Sıfır Yerleri

I.6.1. Reel Değişkenli Kuazipolinomların Sıfır Yerleri

Yardımcı önerme I.6.1:

M_i ve k_i reel sabitler olmak üzere

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\sigma} M_i e^{k_i x}$$

fonksiyonunun σ-1 den fazla kökü bulunamaz.

İspat: Bu ispatı tümevarım yöntemi ile yapalım.

σ=1 olduğunda önermenin doğruluğu açıktır.

σ-1 için doğru olduğunu kabul edelim.

φ(x) ve $\phi(x)= e^{-k_1 x}\varphi(x)$ polinomlarının aynı sayıda reel köklerinin bulunduğu açıktır. Kabulümüz gereğince

$$\phi'(x) = A_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + \ldots + A_\sigma(k_\sigma - k_1)e^{(k_\sigma-k_1)x}$$

polinomunun reel köklerinin sayısı σ-2 den büyük olamaz Buna göre de ϕ(x) polinomunun (veya φ(x) in) σ-1 den fazla kökü olamaz.

I.6.2. Kompleks Değişkenli Asimptotik Kuazipolinomların Sıfır Yerleri

Bundan sonra, kompleks düzlemin sınırsız D bölgesinde tanımlanmış ve ρ→∞ olduğunda f(ρ)→0 şartını sağlayan her f(ρ) fonksiyonu ve ∀M∈C kompleks sayısı için

$$[M]=M+f(\rho) \quad , \quad \rho\to\infty \quad , \quad \rho\in D$$

gösterimini kullanacağız.

Eğer H(z) fonksiyonu z=0 ve z=∞ noktaları hariç her yerde analitik ve z-kompleks düzleminin sanal ekseninin pozitif kısmını içeren R bölgesinde bu fonksiyon

$$H(z)=[M_1]e^{m_1 z}+[M_2]e^{m_2 z}+\ldots+[M_\sigma]e^{m_\sigma z} \tag{I.6.1}$$

şeklinde asimptotik olarak temsil edilebilirse H(z) fonksiyonuna asimptotik Kuazipolinom diyeceğiz.

Burada $M_1\neq 0$, $M_\sigma\neq 0$, $m_1<m_2<\ldots<m_\sigma$ dır.

Şimdi asimptotik Kuazipolinomların köklerinin asimptotiği ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem I.6.2:

1) $$H(z)=[M_1]e^{m_1 z}+\ldots+[M_\sigma]e^{m_\sigma z}=0 \tag{I.6.2}$$

denkleminin R bölgesinde sonsuz sayıda

Z_k ($|z_1|\leq|z_2|\leq\ldots$) kökleri bulunur ve bu kökler sanal ekseninin pozitif kısmını içeren eni sonlu bir h sayısı kadar olan D(h) şeridinde yerleşirler ve bu kökler için

$$|Z_N|=\frac{2\pi n}{m_\sigma-m_1}(1+0(\frac{1}{N})) \tag{I.6.3}$$

asimptotik formülü geçerlidir.

2) $|x|\leq\frac{h}{2}$, $y_1\leq y\leq y_2$ $(z=x+iy)$

eşitsizlikleri ile tanılanan her (Π_k) dikdörtgenin de içerdiği köklerin, N sayısı için yeteri kadar büyük y_1, y_2 sayılarına göre

$$\frac{1}{2\pi}(m_\sigma-m_1)(y_2-y_1)-\sigma\leq N\leq\frac{1}{2\pi}(m_\sigma-m_1)(y_2-y_1)+\sigma \tag{I.6.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

3) Eğer (D_h) şeridinden, merkezleri z_k noktalarında, yarıçapları yeteri kadar

küçük ve δ>0 olan yuvarları atarsak geride kalan ($(D_h(S))$) cümlesinde

$$|H(z)| \geq k_\delta \tag{I.6.5}$$

eşitsizliğini sağlayan ve sadece δ ya bağlı olan k_δ sayısı bulunur.

Ispat: Bu teoremi önce daha basit olan

$$F(z) = M_1 e^{m_1 z} + \ldots + M_\sigma e^{m_\sigma z} = 0 \tag{I.6.6}$$

denklemi için ispat edelim M≠0 ve $M_\sigma \neq 0$ olduğu için F(z) fonksiyonu

$$F(z) = \begin{cases} M_\sigma e^{m_\sigma z}\left(1 + \dfrac{1}{M_\sigma}\displaystyle\sum_{i=1}^{\sigma-1} M_i \exp[(m_i - m_\sigma)z]\right) & \text{Re}z \geq 0 \\ M_1 e^{m_1 z}\left(1 + \dfrac{1}{M_1}\displaystyle\sum_{i=2}^{\sigma} M_i \exp[(m_i - m_1)z]\right) & \text{Re}z \leq 0 \end{cases} \tag{I.6.7}$$

şeklinde yazalım.

Bu ifadeden açık bir şekilde görülüyor ki öyle bir h>0 sayısı bulabiliriz ki $|x| \geq \frac{h}{2}$

olduğunda F(z) ≠0 olur. Buna göre (I.6.6) denkleminin bütün kökleri eni h olan

(D_h): $|\text{Re}z| \leq \frac{h}{2}$

şeridinin içinde kalırlar.

Şimdi kolayca ispat edebiliriz ki her bir

(Π_h): $|x| \leq \frac{h}{2}$, $y_1 \leq y \leq y_2$

dikdörtgeninde (I.6.6) denkleminin köklerinin N sayısı

$$\frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(y_2 - y_1) - \sigma \leq N \leq \frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(y_2 - y_1) + \sigma$$

eşitsizliğini sağlar. Gerçekten

$F(z)=|z|e^{i\theta}=X(x,y)+iY(x,y)$, $\Pi_h=\partial(\Pi_h)$, ($\partial(\Pi_h)$, Π_h nın sınırı)

g keyfi sabiti için g>h olacak şekilde ve $\theta=\arg F(z)$ olmak üzere Teorem I.4.1 gereğince

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_h}\frac{F'(z)}{F(z)}dz$$

olduğunu biliyoruz.

$$F(z)=|z|e^{i\Theta}\ ,\quad dF(z)=|z|ie^{i\Theta}d\Theta\ ,\quad \frac{dF(z)}{F(z)}=id\Theta$$

şeklinde yazarsak

$$\left.\begin{aligned}X(x,y)&=Cos\Theta\\ Y(x,y)&=Sin\Theta\end{aligned}\right\}\quad \text{ise}\quad \Theta=\arctan\left(\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\right)$$

olacağından

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_h}\frac{F'(z)}{F(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_h}\frac{dF(z)}{F(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_h}id\Theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\Pi_g}d\Theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Pi_g}d(\arctan(\frac{Y}{X})) \qquad (I.6.8)$$

eşitliği elde edilir. (1.6.7) ifadesi gösteriyor ki (I.6.8) integralinin Π_g dikdörtgeninin düşey tarafına uygun gelen kısmı,

$$\frac{1}{2\pi}(m_\sigma-m_1)(y_2-y_1)+\varepsilon_g\ , \qquad (\varepsilon_g\to 0\ ;\ g\to\infty)$$

ifadesine eşittir. Diğer taraftan (I.6.8) formülünden görüldüğü gibi bu integralinin Π_g diktörtgeninin herbir yatay tarafına uygun gelen kısmı $X(x,y)=0$ $(y=y_i$, $i=1,2$

olduğunda) denkleminin reel köklerinin sayısı ω olmak üzere $\frac{\omega+1}{2}$ den daha büyük değildir.

Açıkça görülüyor ki; X, Π_g-nin herbir yatay tarafi için, sadece x değişkeninin fonksiyonu olacaktır ($X=X(x_i,y_i)$). Bu nedenle bu denklem

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\sigma} M_i e^{k_i x}=0 \tag{I.6.9}$$

şeklinde olacaktır. Burada M_i ve k_i reel sabit sayılardır. Yardımcı Önerme (I.6.1) gereğince (I.6.9) denkleminin σ-1 den fazla kökü bulunamaz. (I.6.8) eşitliğinden

$$\frac{1}{2\pi}(m_\sigma-m_1)(y_2-y_1)+\varepsilon_g-\sigma\le N\le\frac{1}{2\pi}(m_\sigma-m_1)(y_2-y_1)+\varepsilon_g+\sigma$$

elde edilir N sayısı g ye bağlı olmadığından bu eşitsizlikten ikinci hükmün her keyfi y_1, y_2 ve F(z) polinomu için doğru olduğu elde edilir. z noktası

(Π_h): $|x|\le\frac{h}{2}$, $2l\pi\le y\le 2(l+1)\pi$ $(l=1,2,\ldots)$

şeklinde olan dikdörtgeni taradığı zaman

$$F(z)=M_1e^{m_1 z}+\ldots+M_\sigma e^{m_\sigma z}=0$$

polinomunun değerleri

$|\mathrm{Re}\xi|\le\frac{h}{2}$, $0\le \mathrm{Im}\xi<2\pi$

şeklinde olan dirdörtgendeki herhangi eksponensiyel polinomun değerleri ile çakışır. Gerçekten eğer n_i sayısı $m_i l$ sayısının tam değeri ise bu durumda

$z\in\Pi_1$ için

$\xi=x+i\eta$, $0\le\eta<2\pi$ $(\xi=z-2\pi li)$

olmak üzere

$$F(z)=\sum_{j=1}^{\sigma} M_j e^{m_j z}=\sum_{j=1}^{\sigma} e^{t_j} M_j e^{m_j \xi}=G(\xi,t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

elde edilir. Burada $t_i \in (0,2\pi)$ parametreleri l ye bağlıdır. O halde Yardımcı önerme (I.V) gereğince eğer (D_h) şeridinden merkezleri (I.6.6) denkleminin kökleri olan (yani $F(z)=0$ fonksiyonunun sıfırları olan) yarıçapları ise yeteri kadar küçük $\delta>0$ olan yuvarları atarsak geride kalan kısımda

$$|F(z)| \geq N_\delta \qquad (I.6.10)$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Burada $N_\delta>0$ sabiti sadece δ ya bağlıdır. Böylece basit hale getirilmiş F(z) polinomu için ispat tamamlanmış oldu.

Şimdi bu ıspatı (I.6.2) denklemi için yapalım. F(z) fonksiyonunun $|x|\leq\frac{h}{2}$, $2\pi l\leq y\leq 2(l+1)\pi$ (l=1,2,...) diktörtgeninin sınırında sıfırdan farklı olduğuna dikkat edelim. Ayrıca

$$H(z)=F(z)(1+\frac{\psi(z)}{z})=[F(z)]$$

dir. Burada $\frac{\psi(z)}{z}F(z)$ fonksiyonu $z\neq0$, $z\neq\infty$ noktaları için analitiktir ve yeteri kadar büyük h ve y_1, y_2 değerleri için Π_h- sınırında

$$|\frac{\psi(z)}{z}|<1$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre Rouche teoremi gereğince Π_h dikdörtgenin içinde ((Π_h) dikdörtgeni z=0 noktasını içermiyor) H(z) ve F(z) fonksiyonlarının sıfır yerlerinin sayısı eşittir. Bu da teoremin ikinci hükmünün, doğru olduğunu gösterir.

Üçüncü hükmü ispatlamak için (I.6.10) eşitsizliğinden ve

$$|H(z)|=F(z)\ (1+\frac{\psi(z)}{z})$$

ifadesinden faydalanacağız. Burada $\psi(z)$ fonksiyonu (D_h) şeridinde sınırlıdır ve $z=0$ ve $z=\infty$ noktaları hariç analitiktir.

Gerçekten $(D_h^{(\delta)})$ bölgesinin $D_{h_1}^{(\delta)}$ sınırlı kısmı için $H(z)$ D_h da analitik olduğundan dolayı öyle $K'_\delta > 0$ sayısı bulunur ki

$$|H(z)| \geq K'_\delta$$

eşitsizliği sağlanır. $(D_h^{(\delta)} - D_{h_1}^{(\delta)})$ bölgesinde ise (I.6.10) eşitsizliği gereğince

$$H(z) = |F(z)||1+\frac{\psi(z)}{z}| \geq K_\delta (1-\frac{|\psi(z)|}{z}) \geq K_\delta (1-\frac{C}{z}) \geq \frac{K_\delta}{2}$$

elde edilir.

Şimdi ise $|F_k^{(\delta)}|$ ler için asimptotik ifadeler bulmak için $H(z)$ fonksiyonunun bütün z_k sıfır yerleri için merkezleri bu noktalarda yarıçapları $\delta>0$ olan O_δ çemberlerini ele alalım.

Alt tabanları

$Imz=y_1$

doğru parçalarından, üst tabanları ise

$Imz=y_v$

doğru parçalarından oluşan O_δ çemberleri ile kesişmeyen $(\Pi_k^{(\upsilon)})$ dikdörtgenlerini gözönüne alalım. (I.6.4) eşitsizliği gereğince böyle doğrular bulunur.

Bu durumda

$$|y_\upsilon - y_{\upsilon+1}| \le L, \quad \lim_{\upsilon\to\infty} y_\upsilon = +\infty$$

olacak şekilde L sabiti bulunur.

N_υ ile $H(z)$ fonksiyonunun $(\Pi_h^{(\upsilon)})$ içerisindeki sıfır yerlerinin sayısını gösterelim. Teoremin ikinci hükmü gereğince

$$\frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(y_\upsilon - y_1) - \sigma \le N_\upsilon \le \frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(y_\upsilon - y_1) + \sigma$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlikten

$$N_\upsilon = \frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(y_\upsilon - y_1) + Q_\upsilon \qquad \text{(I.6.11)}$$

yazılabilir. Burada Q_ν- ler ν-ye bağlı olmayan bir sayı ile sınırlıdırlar.

Şimdi $H(z)$ fonksiyonunun $(\Pi_h^{(\upsilon)})$ nin içinde kalan bütün sıfır yerlerini modüllerin artması sırasına göre sıralayalım. O halde

$$\operatorname{Im} z_{N_\upsilon} = y_\upsilon - C_\upsilon$$

bulunur. Burada $C_\upsilon > 0$ sadece ν-ye bağlı olan bir sabittir.

C_υ sabitlerinin L sayısı ile sınırlı oldukları açıktır. Buna göre (I.6.11) eşitliğinden aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$N_\upsilon = \frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(\operatorname{Im} F_{N_\upsilon} + C_\upsilon - y_1) + Q_\upsilon =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)((|F_{N_\upsilon}| - (\mathrm{Re} + F_{N_\upsilon})^{1/2} + (C_\upsilon - y_1)) + Q_\upsilon =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)|F_{N_\upsilon}|[(1 - \frac{(\mathrm{Re}\, F_{N_\upsilon})}{|F_{N_\upsilon}|})^2)^{1/2} + \frac{(C_\upsilon - y_1)}{|F_{N_\upsilon}|}] + Q_\upsilon$$

Buradan,

$$|F_{N_\upsilon}| = \frac{2\pi N_\upsilon}{m_\sigma - m_1}((1 - \frac{(\mathrm{Re}F_{N_\upsilon})^2}{|F_{N_\upsilon}|^2} + \frac{C_\upsilon - y_1}{|F_{N_\upsilon}|} + \frac{2\pi Q_\upsilon}{(m_\sigma - m_1)|F_{N_\upsilon}|})^{-1}$$

yazılabilir. Bütün F_{N_υ}-lerin reel kısımlarının sınırlı olduğu ($|\mathrm{Re}\,F_{N_\upsilon}|\leq h$), $(C_\upsilon - y_1)$ ve Q_υ-lerinde sınırlı olduğunu gözönünde bulundurursak

$$|F_{N_\upsilon}| = \frac{2\pi N_\upsilon}{m_\sigma - m_1}(1 + \frac{E(N_\upsilon)}{N_\upsilon})$$

asimptotik eşitliğini elde ederiz.

Burada $E(N_\upsilon)$ yeteri kadar büyük N_υ-ler için sınırlıdır. Son eşitlikten ν-indisini atarsak

$$|F_N| = \frac{2\pi N}{m_\sigma - m_1}(1 + \frac{E(N)}{N})$$

asimptotik formülünü elde ederiz [2], [12].

I.7. Rieman Lemması

İleride kullanacağımız ve Literatürde Rieman Lemması adı verilen bir yardımcı önerme verelim.

Yardımcı Önerme I.7.1

$c\neq 0$ herhangi bir kompleks sabit ve $f(z)$ ise herhangi $(0,a)$ aralığında mutlak integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_\alpha^\beta f(z)e^{c\lambda z}dz$$

integrali $\mathrm{Re}\lambda c\leq 0$ yarı-düzleminde $\alpha,\beta\in(0,a)$ sayılarına göre düzgün olarak $\lambda\to\infty$ olduğunda sıfıra yakınsar.

İspat: $\varepsilon>0$ yeteri kadar küçük bir sayı olsun. Bu sayı için öyle kısmi sabit $f_\varepsilon(z)$ fonksiyonu bulabiliriz ki

$$\int_\alpha^\beta |f(z)-f_\varepsilon(z)|dz < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(I.7.1)}$$

ve $z\in[\alpha_k,\beta_k]$ olduğunda $f(z)\quad \gamma_k$ olsun.

Burada $\bigcup_{k=1}^{n}[\alpha_k,\beta_k]=[\alpha,\beta]$, $\quad(\alpha_i,\beta_i)\cap(\alpha_j,\beta_j)=\varnothing\ i\neq j$ şeklinde tanımlıdır. Buna göre f(z) fonksiyonu için

$$\int_\alpha^\beta f(z)e^{c\lambda z}dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}e^{c\lambda z}\gamma_k dz=\frac{1}{c\lambda}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(e^{c\lambda\beta_k}-e^{c\lambda\alpha_k})$$

Bu eşitlikten ve teoremin şartlarını gereğince yeteri kadar büyük $|\lambda|$-lar için

$$\left|\int_\alpha^\beta f(z)e^{c\lambda z}dz\right|\leq\frac{2\pi}{|c||\lambda|}\max|\gamma_k|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. O halde (I.7.1) eşitsizliği gereğince

$$\left|\int_\alpha^\beta f(z)e^{c\lambda z}dz\right|\leq\int_\alpha^\beta|e^{c\lambda z}||f(z)-f_\varepsilon(z)|dz+\left|\int_\alpha^\beta f_\varepsilon(z)e^{c\lambda z}dz\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir. [12]

BÖLÜM II

PARAMETREYE BAĞLI İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN λ PARAMETRESİNE GÖRE ASİMPTOTİĞİ

II.1: Diferensiyel Denklemde Birinci Türevin Katsayısının Sıfır Yapılması

Bu bölümde,

$$l(y)\equiv a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=\lambda^2 y(x) \quad x\in[a,b] \tag{II.1.1}$$

denkleminin çözümlerinin parametreye göre asimptotiğini inceleyeceğiz.

Burada $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sürekli fonksiyonlardır ve $a(x)\neq 0$ dır.

Genelliği bozmadan $a(x)>0$ kabul edelim. Çünkü aksi halde $a(x)$ yerine $-a(x)$, λ^2 yerine de $-\lambda^2$ alabilirdik.

Şimdi x-bağımsız değişkeninden yeni t-bağımsız değişkenine

$$t=\frac{\int_a^x\sqrt{\frac{1}{a(x)}}dx}{\int_a^b\sqrt{\frac{1}{a(x)}}dx}$$

dönüşümü yardımıyla geçelim. Buna göre (II.1.1) denklemi

$$y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=\lambda^2 y(t) \tag{II.1.2}$$

şeklinde yazılabilecektir. (III.1.2) denkleminde genelliği bozmadan $p(t)\equiv 0$ olarak kabul edebiliriz. Çünkü, aksi halde

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int p(t)dt}\tilde{y} \tag{II.1.3}$$

dönüşümü yardımıyla $y'(t)$ türevinin katsayısı sıfır yapılabilir. Aynı zamanda y bağımlı değişkeninden $\tilde{y}$ bağımlı değişkenine geçilmiş olur.

Ayrıca $\lambda=i\rho$ değişimini yaparak (III.1.1) denklemini

$$l(y)=y''+p(x)y=-\rho^2 y \qquad \text{(II.1.4)}$$

şeklinde yazabiliriz.

Yine genelliği bozmadan [a,b] aralığı yerine

$$x=a+(b-a)t$$

dönüşümünü yaparak [0, 1] aralığını alabiliriz. (Benzer şekilde $x=b+(b-a)t$ dönüşümü yapılarak [a,b] aralığı yerine [-1, 0] aralığı alınabilir)

II.2. Parametreye Bağlı İkinci Mertebeden Diferensiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi

(II.1.1) diferensiyel denklemini

$$y''(x)+\rho^2 y(x)=-p(x)y(x) \qquad \text{(II.2.1)}$$

şeklinde yazarak bu denklemele birlikte

$$y''(x)+\rho^2 y(x)=0 \qquad \text{(II.2.2)}$$

denklemini de gözönüne alalım. (II.2.2) denkleminin iki tane lineer bağımsız çözümleri olarak

$$y_1=e^{i\rho x}\ ,\ y_2=e^{-i\rho x} \qquad \text{(II.2.3)}$$

fonksiyonlarını alırsak (II.2.2) denkleminin genel çözümü c_1 ve c_2 herhangi keyfi sabitler olmak üzere

$$y=c_1 e^{i\rho x}+c_2 e^{-i\rho x} \qquad \text{(II.2.4)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sabitin değişimi metodunu uygulayarak (II.2.1) denklemini onunla eş değer olan

$$y = c_1 e^{i\rho x} + c_2 e^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{ie^{i\rho(x-\xi)} - ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi \qquad \text{(II.2.5)}$$

integral denklemi şeklinde elde ederiz. Burada yine c_1 ve c_2 ler herhangi keyfi sabitler olup ρ değişkenine bağlı olabilirler.

Şimdi

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= c_1 \\ d_2 &= c_2 + \int_0^1 \frac{-ie^{i\rho\xi}}{2\rho} p(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \qquad \text{(II.2.6)}$$

gösterimini kullanırsak (II.2.5) ifadesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$y(x) = c_1 e^{i\rho x} + c_2 e^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{ie^{i\rho(x-\xi)} - ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi =$$

$$= d_1 e^{i\rho x} + e^{-i\rho x} \left(d_2 - \int_0^1 \frac{-ie^{i\rho\xi}}{2\rho} p(\xi) d\xi\right) + \int_0^x \frac{ie^{i\rho(x-\xi)} - ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) d\xi =$$

$$= d_1 e^{i\rho x} + d_2 e^{-i\rho x} + \int_0^1 \frac{ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^x \frac{ie^{i\rho(x-\xi)} - ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi =$$

$$= d_1 e^{i\rho x} + d_2 e^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi + \int_x^1 \frac{ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^x \frac{ie^{i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi - \int_0^x \frac{ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi =$$

$$= d_1 e^{i\rho x} + d_2 e^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{ie^{i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_x^1 \frac{ie^{-i\rho(x-\xi)}}{2\rho} p(\xi) y(\xi) d\xi$$

Böylece

$$y(x)=d_1e^{i\rho x}+d_2e^{-i\rho x}+\frac{i}{2\rho}\int_o^x e^{i\rho(x-\xi)}p(\xi)y(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{i}{2\rho}\int_x^1 e^{-i\rho(x-\xi)}p(\xi)y(\xi)d\xi \qquad (II.2.7)$$

İntegral denklemini elde etmiş olduk. Bu integral denklem (II.2.1) denklemi ile eşdeğer bir denklemdir. Bu nedenle (II.2.7) integral denkleminin çözümlerinin ve çözümlerinin tüverlerinin asimptotiğini araştıracağız.

II.3. Parametreye Bağlı Integral Denklemler Sisteminin Çözümlerinin Parametreye Göre Asimptotiği

Aşağıdaki integral denklem sistemi verilmiş olsun.

$$\begin{cases} y_1(x)=f_1(x)+\int_0^1 K_{11}(x,t,\lambda)y_1(t)dt+\int_0^1 K_{12}(x,t,\lambda)y_2(t)dt \\ y_2(x)=f_2(x)+\int_0^1 K_{21}(x,t,\lambda)y_1(t)dt+\int_0^1 K_{22}(x,t,\lambda)y_2(t)dt \end{cases} \qquad (II.3.1)$$

Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edeceğiz.

1) $f_i(x)$ fonksiyonları [0,1] aralığında süreklidir.

2) λ nın herbir değeri için $K_{ij}(x,t,\lambda)$ $(i,j=1,2)$ fonksiyonları $0\leq x<t$ ve $t<x\leq 1$ aralıklarında süreklidir.

3) x ve t nin herbir değerinde $0\leq x,\ t\leq 1$ için $K_{ij}(x,t,\lambda)$ fonksiyonları λ parametresine göre regüler analitik fonksiyonlardır.

4) Öyle R ve C sabitleri bulunabilirki bütün $0\leq x,\ t\leq 1$ için $|\lambda|>R$ olduğunda

$$|K_{ij}(x,t,\lambda)|\leq\frac{C}{|\lambda|}$$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem II.3.1: (II.3.1) denklem sistemi için 1)-4) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda R_0 yeteri kadar büyük olduğunda $|\lambda|\geq R_0$ için (II.3.1) sisteminin bir tek $y_i(x)=y_i(x, \lambda)$ çözümü bulunur. Bu çözümler λ parametresine göre analitik fonksiyonlardır ve bu çözümler

$$y_i(x,\lambda)=f_i(x)+0\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (\lambda\to\infty) \tag{II.3.2}$$

asimptotik eşitliklerini sağlıyorlar.

Burada $0(\frac{1}{\lambda^k})$ ifadesi ile herhangi C ve R_0 sabitleri için $0\leq x\leq 1$, $|\lambda|\geq R_0$ olduğunda $|f(x, \lambda)|\leq C$ olmak üzere $(\frac{f(x,\lambda)}{\lambda^k})$ şeklinde keyfi fonksiyon gösterilmiştir.

İspat: Eğer (II.3.1) sisteminin $y_i(x)$, i=1,2 çözümü bulunursa, bu çözümleri verilen sistemde ard arda yerine yazarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$y_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^1 K_{ij}(x,t,\lambda)y_j(t)dt =$$

$$= f_i(x) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^1 K_{ij}(x,t,\lambda)f_j(t)dt +$$

$$+ \sum_{j_1,j_2=1}^{2}\int_0^1\int_0^1 K_{ij}(x,t,\lambda)K_{j_1j_2}(t_1,t_2,\lambda)y_{j_2}(t_2)dt_1dt_2 =$$

$$= \ldots = f_i(x) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^1 K_{ij}(x,t,\lambda) f_j(t)dt +$$

$$+ \sum_{j_1,j_2=1}^{2}\int_0^1\int_0^1 K_{ij}(x,t,\lambda)K_{j_1j_2}(t_1,t_2,\lambda)f_{j_2}(t_2)dt_1dt_2 +$$

$$+ \ldots + \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=1}^{n}\int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{ij_1}(x,t_1,\lambda)K_{j_1j_2}(t_1,t_2,\lambda)\ldots$$

$$\ldots K_{j_{n-1}}j_n(t_{n-1},t_n,\lambda)f_{j_n}(t_n)dt_1dt_2\ldots dt_n +$$

$$+ \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{n}\int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{ij_1}(x,t_1,\lambda)K_{j_1j_2}(t_1,t_2,\lambda)\ldots$$

$$\ldots K_{j_n}K_{j_{n+1}}(t_n,t_{n+1},\lambda)y_{j_{n+1}}(t_{n+1})dt_1dt_2\ldots,dt_{n+1}$$

Eğer , $M = \max\limits_{\substack{x\in[0,1]\\ j=1,2}}|y_j(x)|$ gösterirsek,

$$\left|\sum_{j_1,j_2,j_{n+1}=1}^{2}\int_0^1\ldots\int_0^1 K_{ij_1}(x,t_1,\lambda)\ldots K_{j_nj_{n+1}}y_{j_{n+1}}(t_n,t_{n+1},\lambda)y_{j_{n+}}(t_{n+1})dt_1\ldots dt_{n+1}\right|$$

$$\leq M\left|\frac{C}{\lambda}\right|^{n+1}\sum_{j_1,j_2,j_{n+1}=1}^{2} 1 = \frac{2^{n+1}MC^{n+1}}{|\lambda|^{n+1}} \tag{II.3.3}$$

elde edilir. $|\lambda|>2C$ olarak alınırsa (II.3.3) eşitsizliğinin sağ tarafi $n\to\infty$ olduğunda sıfira yakınsadığı için

$R_0=\max\{R,2C\}$

olmak üzere $|\lambda|>R_0$ olduğunda

$$f_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,j_n=1}^{2}\int_0^1\ldots\int_0^1 K_{ij_1}(x,t_1,\lambda)K_{j_1j_2}(t_1,t_2,\lambda)\ldots$$

$$\ldots K_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1},t_n,\lambda)f_{j_n}(t_n)dt_1\ldots dt_n \qquad i=1,2 \tag{II.3.4}$$

serileri $x\in[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsak olacaktır. Demek ki (II.3.1) sisteminin çözümü bulunursa, bu çözüm $|\lambda|>R_0$ olduğunda (II.3.4) serisinin toplamı olan $y_i(x, \lambda)$ fonksiyonuna eşittir.

Diğer taraftan (II.3.4) serisinin toplamı olarak elde ettiğimiz $y_i(x,\lambda)$ fonksiyonları, herbir $|\lambda|>R_1>R_0$, $0\leq x\leq 1$ bölgeler için, (II.3.1) sisteminde yerine yazılarak bu sistemi sağladığı görülebilir.

Ayrıca $|\lambda|>R_2$ olduğunda

$$\sum_{j_1,j_2,j_{n+1}=1}^{2} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{ij_1}(x,t_1,\lambda)K_{j_1j_2}(t_1,t_2,\lambda) \ldots K_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1},t_n,\lambda).$$

$$.f_{j_n}(t_n)dt_1\ldots dt_n \leq M_1(\frac{R_0}{|\lambda|})^n$$

olacak şekilde x ve λ değişkenlerine bağımlı olmayan $M_1>0$ sayısının bulunabileceği açıktır. O halde $|\lambda|>R_0$ için

$$|y_i(x,\lambda)-f_i(x)|\leq M_1\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{R_0}{|\lambda|})^n = \frac{M_1R_0}{|\lambda|-R_0}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan da

$$y_i(x,\lambda)=f_i(x)+0(\frac{1}{\lambda}), \qquad \lambda\to\infty$$

asimptotik eşitliğini elde ederiz. Ayrıca $y_i(x,\lambda)$ çözümlerinin λ parametresine göre analitik oldukları da açıktır.

II.4.Parametreye Bağlı Ikinci Mertebeden Diferensiyel Denklemin Çözümlerinin Kompleks Düzlemin Üst Ve Alt Yarı Düzlemlerinde Asimptotiği

Kopmpeks ρ- düzleminin üst yarı-düzlemi,

$C^{+}=\{\rho\in C \mid \mathrm{Im}\rho\geq 0\}$

ve alt yarı-düzlemi

$C^{-}=\{\rho\in C \mid \mathrm{Im}\rho\leq 0\}$

olmak üzere , $\rho\in C^{\mp}$ yazdığımızda ρ nun $\mathbf{C}^{+}$ ve $\mathbf{C}^{-}$ bölgelerinin herhangi birinde değiştiğini düşüneceğiz.

Biz burada, bu yarı-düzlemlerde parametreye bağlı ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemin çözümlerinin ve bu çözümlerin türevlerinin asimptotiğini vereceğiz.

Teorem II.4.1: *p(x)* fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli olmak üzere ρ kompleks parametresine bağlı olan

$$y''+p(x)y=-\rho^2 y$$

diferensiyel denkleminin C^{+} ve C^{-} kompleks-düzlemlerinin herbirinde $\rho\to\infty$ olduğunda

$$y_1(x)=e^{i\rho x}(1+O(\frac{1}{\rho})) \qquad y_1'=i\rho e^{i\rho x}(1+O(\frac{1}{\rho}))$$

$$y_2(x)=e^{-i\rho x}(1+O(\frac{1}{\rho})) \qquad y_2'=-i\rho e^{-i\rho x}(1+O(\frac{1}{\rho}))$$

asimptotik eşitliklerini gerçekleyen ve ρ parametresine göre analitik olan iki tane lineer bağımsız $y_1(x)=y_1(x,\rho)$ ve $y_2(x)=y_2(x,\rho)$ çözümleri bulunur.

Ispat:

$$y''(x) + \rho^2 y(x) = -p(x)y(x) \qquad \text{(II.4.1)}$$

denklemi için elde ettiğimiz (II.2.7) integral denklemini gözönüne alalım. (II.4.1) denkleminin bu integral denklemde $d_1=1$, $d_2=0$ haline uygun gelen çözümünü $y_1(x)$ ve $d_1=0$, $d_2=1$ haline uygun gelen çözümünü $y_2(x)$ ile gösterelim. Buna göre,

$$y_1(x) = e^{i\rho x} + \frac{i}{2\rho}\int_0^x e^{i\rho(x-\xi)} p(\xi)y(\xi)d(\xi) + \frac{i}{2\rho}\int_x^1 e^{-i\rho(x-\xi)} p(\xi)y(\xi)d(\xi) \qquad \text{(II.4.2)}$$

Şimdi de (II.4.2) denkleminin türevini alırsak

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = i\rho e^{i\rho x} - \frac{1}{2\rho}\int_0^x \rho e^{i\rho(x-\xi)} p(\xi)y(\xi)d(\xi) + \frac{1}{2\rho}\int_x^1 \rho e^{-i\rho(x-\xi)} p(\xi)y(\xi)d(\xi) \qquad \text{(II.4.3)}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$y_2(x) = e^{-i\rho x} + \frac{i}{2\rho}\int_0^x e^{i\rho(x-\xi)} p(\xi)y(\xi)d(\xi) + \frac{i}{2\rho}\int_x^1 e^{-i\rho(x-\xi)} p(\xi)y(\xi)d(\xi) \qquad \text{(II.4.4)}$$

denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = -i\rho e^{i\rho x} - \frac{1}{2\rho}\int_0^x \rho e^{i\rho(x-\xi)} p(\xi)y(\xi)d(\xi) + \frac{1}{2\rho}\int_x^1 \rho e^{-i\rho(x-\xi)} p(\xi)y(\xi)d(\xi) \qquad \text{(II.4.5)}$$

elde edilir.

Şimdi aşağıdaki formüllerle tanımlanmış $Z_{kv}(x,\rho)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım.

$$\begin{cases} Z_{10}(x,\rho) = e^{-i\rho x} y_1(x,\rho) \\ Z_{11}(x,\rho) = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\rho x} y_1'(x,\rho) \\ Z_{20}(x,\rho) = e^{i\rho x} y_2(x,\rho) \\ Z_{22}(x,\rho) = \dfrac{1}{\rho} e^{i\rho x} y_2'(x,\rho) \end{cases} \qquad \text{(II.4.6)}$$

Böylece (II.4.2) ve (II.4.3) eşitlikleri gereğince,

$$\begin{cases} Z_{10}(x,\rho) = 1 + \dfrac{i}{2\rho}\displaystyle\int_0^x p(\xi)Z_{10}(\xi,\rho)d\xi + \dfrac{i}{2\rho}\int_x^1 e^{-2\rho i(x-\xi)}p(\xi)Z_{10}(\xi,\rho)d\xi \\ Z_{11}(x,\rho) = i - \dfrac{1}{2\rho}\displaystyle\int_0^x p(\xi)Z_{11}(\xi,\rho)d\xi + \dfrac{1}{2\rho}\int_x^1 e^{-2\rho i(x-\xi)}p(\xi)Z_{11}(\xi,\rho)d\xi \end{cases} \quad \text{(II.4.7)}$$

ve (II.4.4) ve (I.4.5) eşitlikleri gereğince de

$$\begin{cases} Z_{20}(x,\rho) = 1 + \dfrac{i}{2\rho}\displaystyle\int_0^x e^{2\rho i(x-\xi)}p(\xi)Z_{20}(\xi,\rho)d\xi + \dfrac{i}{2\rho}\int_x^1 p(\xi)Z_{20}(\xi,\rho)d\xi \\ Z_{21}(x,\rho) = -i - \dfrac{1}{2\rho}\displaystyle\int_0^x e^{2\rho i(x-\xi)}p(\xi)Z_{21}(\xi,\rho)d\xi + \dfrac{1}{2\rho}\int_x^1 p(\xi)Z_{21}(\xi,\rho)d\xi \end{cases} \quad \text{(II.4.8)}$$

integral denklem sistemlerini elde ederiz. (II.4.7) ve (II.4.8) integral denklemleri için Teorem (II.3.1) in bütün şartları gerçekleştiğinden bu teorem gereğince bu denklem sistemlerinin herbirinin tek bir çözümü bulunur ve bu çözümler aşağıdaki asimptotik formüllerle ifade edilebilirler.

$$\begin{cases} Z_{10}(x,\rho) = 1 + O(\dfrac{1}{\rho}) \\ Z_{11}(x,\rho) = i + O(\dfrac{1}{\rho}) \\ Z_{20}(x,\rho) = 1 + O(\dfrac{1}{\rho}) \\ Z_{22}(x,\rho) = -i + O(\dfrac{1}{\rho}) \end{cases} \quad \text{(II.4.9)}$$

(II.4.9) asimptotik ifadelerini (II.4.6) da yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
y_1(x,\rho) &= e^{i\rho x}(1+O(\frac{1}{\rho})) \\
y_1'(x,\rho) &= i\rho e^{i\rho x}(1+O(\frac{1}{\rho})) \\
y_2(x,\rho) &= e^{-i\rho x}(1+O(\frac{1}{\rho})) \\
y_2'(x,\rho) &= -i\rho e^{-i\rho x}(1+O(\frac{1}{\rho}))
\end{aligned}
\tag{II.4.10}
$$

sonuçları elde edilir.

BÖLÜM III

SÜREKSİZ KATSAYILI DİFERENSİYEL DENKLEMİN VE FONKSİYONEL ÇOK-NOKTALI SINIR ŞARTLARININ ÜRETTİĞİ DİFERENSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİNİN ASİMPTOTİĞİ

Bu bölümde bir sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotiğini elde edeceğiz.

Araştıracağımız Sınır değer Probleminin bir kaç tane ayırıcı özelliği bulunmaktadır. Bunlardan bazılarını ifade etmek gerekirse; diferensiyel denklemin en yüksek mertebeden türevinin katsayısı parçalı sabit fonksiyon olduğundan dolayı süreksizdir. Sınır şartları iki-noktalı olmayıp çok-noktalıdır ve sınır şartlarında diferensiyel ifadelerin dışında, genel lineer fonksiyoneller bulunmaktadır.

Bu tipten sınır değer problemleri mekanik ve fiziğin bir çok problemlerinin incelenmesinde uygulanmaktadır.

III.1.Sınır Şartlarında Spektral Parametre Bulunan Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemi

[-1,1] aralığının sıfir noktasında süreksiz katsayılı

$$l(y) = a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = \lambda^2 y(x) \qquad \text{(III.1.1)}$$

diferensiyel denkleminin

$$L_1 y = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} \left(\alpha_{1k} y^{(k)}(-1) + \beta_{1k} y^{(k)}(-0) + \sum_{p=1}^{n_{1k}} \eta_{1pk} y^{(k)}(x_{1pk}) + T_{1k} y\right) = 0 \quad \text{(III.1.2)}$$

$$L_2 y = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\alpha_{2k}.y^{(k)}(+0) + \beta_{2k}.y^{(k)}(1) + \sum_{p=1}^{n_{2k}} \eta_{2pk}.y^{(k)}(x_{2pk}) + T_{2k}.y) = 0 \, , \qquad \text{(III.1.3)}$$

fonksiyonel çok-noktalı sınır şartlarının ve

$$L_3 y = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\delta_{1k} y^{(k)}(-0) + \gamma_{1k} y^{(k)}(+0) + T_{3k} y) = 0 \qquad \text{(III.1.4)}$$

$$L_4 y = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\delta_{2k} y^{(k)}(-0) + \gamma_{2k} y^{(k)}(+0) + T_{4k} y) = 0 \, . \qquad \text{(III.1.5)}$$

geçiş şartlarının ürettiği sınır değer problemini gözönüne alacağız. Burada $y^{(k)}(\pm 0)$ ile $x \to \pm 0$ olduğunda $y^{(k)}x$ fonksiyonunun limiti gösterilmiştir ve a(x) fonksiyonu x=0 noktasında süreksiz olan kompleks değerli ve

$$a(x) = \begin{cases} a_1 & , \quad x \in [-1,0) \quad \text{ise} \\ a_2 & , \quad x \in (0,1] \quad \text{ise} \end{cases} \qquad \text{(III.1.6)}$$

eşitliği ile verilmiş parçalı sabit fonksiyondur. ($a_i \in C$)

$$b(x) \in W_q^1(-1,0) \oplus W_q^1(0,1) \; , \quad c(x) \in L_q[-1,0] \oplus L_q[0,1]$$

$\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \eta_{ik}, \delta_{ik}, \gamma_{ik}$ (i=1,2) katsayıları kompleks sayılardır. $T_{vk} (\upsilon = \overline{1,4}, \; k = 0,1)$ ifadeleri ise $W_q^k(-1,0) \oplus W_q^k(0,1)$ Sobolev uzaylarının direkt toplamında sürekli fonksiyonellerdir. Ayrıca, $q \geq 1$ dir ve $x_{1pk} \in (-1,0)$, $x_{2pk} \in (0,1)$ herhangi iç noktalardır. Burada Sobolev uzaylarının direkt toplamı

$$W_q^1(-1,0) \oplus W_q^1(0,1) = \{ f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \quad x \in [-1,0) \\ f_2(x) & , \quad x \in [0,1) \end{cases} \Big| \; f_1(x) \in W_q^k(-1,0),$$

$$f_2(x) \in W_q^k(0,1), \quad \|f\| = \|f_1\| + \|f_2\| \}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

III.2.Sınır Şartlarının Tipi Korunarak Diferensiyel Denklemin Daha Basit Hale Getirilmesi

Bu kesimde, özel bir dönüşüm yardımıyla sınır şartlarının tipini koruyarak (III.1.1) denklemindeki $y'(x)$ türevinin katsayısının sıfır yapılabileceğini göstereceğiz. Bunun içinde

$$\varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2a_1}\displaystyle\int_{-1}^{x}b(t)dt & , \quad x\in[-1,0)\\ -\dfrac{1}{2a_2}\displaystyle\int_{0}^{x}b(t)dt & , \quad x\in(0,1]\end{cases}$$

olmak üzere

$$y(x)=e^{\varphi(x)}\,\tilde{y} \qquad \text{(III.2.1)}$$

dönüşümünü yapalım.

$x\in[-1,0)$ olduğunda (III.1.1) diferensiyel denklemi

$$a_1y''(x)+b(x)y'(x)+C(x)y(x)=\lambda^2y(x)$$

şeklinde yazılacağından, bu denklemde

$$y(x)=e^{\varphi(x)}\,\tilde{y}$$

$$y'(x)=-\frac{1}{2a_1}b(x)e^{\varphi(x)}\tilde{y}(x)+e^{\varphi(x)}\tilde{y}'(x)$$

$$y''(x)=-\frac{1}{2a_1}b'(x)e^{\varphi(x)}\tilde{y}'(x)+\frac{b^2}{4a_1^2}e^{\varphi(x)}\tilde{y}(x)-$$

$$-\frac{1}{a_1}b(x)e^{\varphi(x)}\tilde{y}'(x)+e^{\varphi(x)}\tilde{y}''(x)$$

ifadelerini yerine yazarsak

$$a_1\tilde{y}''(x)+(-\frac{1}{2}b'(x)-\frac{1}{4a_1}b_2(x)+c(x)\tilde{y}(x)=\lambda^2\tilde{y}(x)$$

veya

$$a_1\tilde{y}''(x)+\tilde{c}(x)\tilde{y}(x)=\lambda^2\tilde{y}(x) \tag{III.2.2}$$

denklemi elde edilir.

Benzer şekilde $x\in(0,1]$ olduğu zaman da

$$a_2y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=\lambda^2y(x)$$

denklemi (III.2.1) dönüşümü altında

$$a_2\tilde{y}''(x)+\tilde{c}(x)\tilde{y}(x)=\lambda^2\tilde{y}(x) \tag{III.2.3}$$

şeklini alacaktır. Buna göre $x\in[-1,1]$ için (III.1.1) denklemi (III.2.1) dönüşümü yardımıyla

$$a(x)\tilde{y}''(x)+\tilde{c}(x)\tilde{y}(x)=\lambda^2\tilde{y}(x) \tag{II.2.4}$$

şeklinde $\tilde{y}$ değişkenini bağımlı değişken olarak kabul eden ve λ parametresi değişmeden kalan bir denklem elde edilmiş olacaktır.

Şimdide (III.2.1) dönüşümü altında $L_\nu(\upsilon=\overline{1,4})$ sınır şartlarının şeklinin korunduğunu gösterelim. Bu gösterimi L_ν sınır şartlarından birisi için yapmak yeterlidir. Diğer sınır şartları içinde benzer gösterim yapılabilir. $x\in[-1,0)$ için L_1y sınır şartını gözönüne alalım.

$$L_1y=\lambda(\alpha_{10}y(-1)+\beta_{10}y(-0)+\sum_{p=1}^{n_{10}}\eta_{1p0}y(x_{1p0})+T_{10}y)+$$

$$+(\alpha_{11}y'(-1)+\beta_{11}y'(-0)+\sum_{p=1}^{n_{11}}\eta_{1p1}y'(x_{1p1})+T_{11}y)=0$$

olduğuna göre burada (III.2.1) dönüşümünü uygulayalım.

$$\widetilde{L}_1(\widetilde{y}) \equiv L_1(e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x)) = \lambda[\alpha_{10}(e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x))(-1) + \beta_{10}(e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x))(-0) +$$

$$+\sum_{p=1}^{n_{10}} \eta_{1p0}(e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x))(x_{1p0}) + T_{10}(e^{\varphi(x)}\widetilde{y})(x)] +$$

$$+\alpha_{11}(\varphi'(x)e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x) + e^{\varphi(x)}\widetilde{y}'(x))(-1) + \beta_{11}(\varphi'(x)e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x) + e^{\varphi(x)}\widetilde{y}'(x))(-0) +$$

$$+\sum_{p=1}^{n_{11}} \eta_{1p1}(\varphi'(x)e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x) + e^{\varphi(x)}\widetilde{y}'(x))(x_{1p1}) + T_{11}(e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x))$$

$$= \lambda[(\alpha_{10}e^{\varphi(-1)}\widetilde{y}(-1) + \beta_{10}e^{\varphi(-0)}\widetilde{y}(-0) + \sum_{p=1}^{n_{10}} \eta_{1p0}e^{\varphi(x_{1p0})}\widetilde{y}(x_{1p0}) + \widetilde{T}_{10}(e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(x)]$$

$$\alpha_{11}e^{\varphi(-1)}\widetilde{y}'(-1) + \beta_{11}e^{\varphi(-0)}\widetilde{y}'(-0) + \sum_{p=1}^{n_{11}} \eta_{1p1}e^{\varphi(x_{1p1})}\widetilde{y}'(x_{1p1}) +$$

$$+T_{11}e^{\varphi(x)} + \alpha_{11}\varphi'(-1)e^{\varphi(x)}\widetilde{y}(-1) + \beta_{11}\varphi'(-0)e^{\varphi(-0)}\widetilde{y}(-0)$$

$$+\sum_{p=1}^{n_{11}} \eta_{1p1}\varphi'(x_{1p1})e^{\varphi(x_{1p1})}\widetilde{y}(x_{1p1})$$

$$= \lambda(\widetilde{\alpha}_{10}\widetilde{y}(-1) + \widetilde{\beta}_{10}\widetilde{y}(-0) + \sum_{p=1}^{n_{10}} \widetilde{\eta}_{1p0}\widetilde{y}(x_{1p0}) + \widetilde{T}_{10}\widetilde{y}(x))$$

$$+\widetilde{\alpha}_{11}\widetilde{y}'(-1) + \widetilde{\beta}_{11}\widetilde{y}'(-0) + \sum_{p=1}^{n_{11}} \widetilde{\eta}_{1p1}\widetilde{y}'(x_{1p1}) + \widetilde{T}_{11}\widetilde{y}(x)$$

Burada

$$\widetilde{\alpha}_{10} = \alpha_{10}e^{\varphi(-1)}, \quad \widetilde{\beta}_{10} = \beta_{10}e^{\varphi(-0)}, \quad \widetilde{\eta}_{1p0} = \eta_{1p0}e^{\varphi(x_{1p0})}, \quad \widetilde{T}_{10}\widetilde{y} = T_{10}e^{\varphi(x)}\widetilde{y},$$

$$\widetilde{\alpha}_{11} = \alpha_{11}e^{\varphi(-1)}, \quad \widetilde{\beta}_{11} = \beta_{11}e^{\varphi(-0)}, \quad \widetilde{\eta}_{1p1} = \eta_{1p1}e^{\varphi(x_{1p1})}$$

$$\widetilde{T}_{11}\widetilde{y} = T_{11}e^{\varphi(x)}\widetilde{y} + \alpha_{11}\varphi'(-1)e^{\varphi(-1)}\widetilde{y}(-1) + \beta_{11}\varphi'(-0)e^{\varphi(-0)}\widetilde{y}(-0) +$$

$$+\sum_{p=1}^{n_{11}} \eta_{1p1}\varphi'(x_{1p1})e^{\varphi(x_{1p1})}\widetilde{y}(x_{1p1})$$

olarak alınmıştır. Buna göre,

$$\widetilde{L}_1\widetilde{y} = \lambda(\widetilde{\alpha}_{10}\widetilde{y}(-1) + \widetilde{\beta}_{10}\widetilde{y}(-0) + \sum_{p=1}^{n_{10}} \widetilde{\eta}_{1p0}\widetilde{y}(x_{1p0}) + \widetilde{T}_{10}\widetilde{y}) +$$

$$+(\widetilde{\alpha}_{11}\widetilde{y}'(-1) + \widetilde{\beta}_{11}\widetilde{y}'(-0) + \sum_{p=1}^{n_{11}} \widetilde{\eta}_{1p1}\widetilde{y}'(x_{1p1}) + \widetilde{T}_{11}\widetilde{y})$$

elde edilir. Bu halde $L_1y=0$ sınır şartı aynı tipten olan

$$\widetilde{L}_1\widetilde{y} = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\widetilde{\alpha}_{1k}\widetilde{y}^{(k)}(-1) + \widetilde{\beta}_{1k}\widetilde{y}^{(k)}(-0) + \sum_{p=1}^{n_{1k}} \widetilde{\eta}_{1k}\widetilde{y}^{(k)}(x_{1pk}) + \widetilde{T}_{1k}\widetilde{y}) = 0$$

sınır şartına dönüşecektir. Buna göre λ parametresi değişmediğinden (III.1.1)-(III.1.5) sınır değer problemi

$$\begin{cases} a(x)\widetilde{y}''(x) + \widetilde{c}(x)\widetilde{y}(x) = \lambda^2\widetilde{y}(x) & \text{(III.2.5)} \\ \widetilde{L}_\upsilon\widetilde{y} = 0 \qquad ,\upsilon = \overline{1,4} & \text{(III.2.6)} \end{cases}$$

Sınır değer problemine dönüşecektir. Bu nedenle bundan sonra

$$\begin{cases} a(x)y''(x) + c(x)y(x) = \lambda^2 y(x) & \text{(III.2.7)} \\ L_\upsilon y = 0 \qquad ,\upsilon = \overline{1,4} & \text{(III.2.8)} \end{cases}$$

şeklindeki sınır değer problemi üzerinde duracağız.

III.3. Kompleks Düzlemin Sektörlere Ayrılışı ve Bu sektörlerde Diferensiyel Denklemin Çözümlerinin Asimptotiği

(III.1.1) denklemindeki a(x) katsayısının (III.1.6) eşitliği ile verilmiş olması nedeniyle, komleks düzlemin sektörlere ayrılış biçimini ilk önce $\arg a_1 \neq \arg a_2$ hali için inceleyeceğiz ve burada

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ , \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \ ,$$

gösterimini kullanacağız.

$l_1=\{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda\omega_1 = 0\}$ ve $l_2=\{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda\omega_2 = 0\}$ doğruları kompleks- düzlemi dört tane sektöre ayırır. Bu sektörlerin her birini S ile göstereceğiz. Yani $\lambda \in S$ yazdığımızda λ kompleks parametresinin bu sektörlerin sadece birinde değiştiğini düşüneceğiz.

c herhangi bir kompleks sayı olmak üzere $S\text{-}c=\{\lambda\text{-}c \mid \lambda \in S\}$ sektörünü Σ ile gösterelim. Σ sektörlerinin herbirinde $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_1$ ve $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_2$ reel değerli fonksiyonlarının işaretlerini koruduğu kolayca gösterilebilir. O halde Teorem (II.4.1) gereğince Σ sektörlerinin herbirinde (III.2.7) denkleminin [-1,0) aralığında iki tane lineer bağımsız $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ çözümü ve (0,1] aralığında da iki tane lineer bağımsız $y_3(x, \lambda)$ ve $y_4(x, \lambda)$ çözümleri bulunur, bu çözümler $|\lambda|$ nın yeteri kadar büyük değerlerinde Σ sektöründe analitiktirler, ayrıca $\lambda \to \infty$ ve k=0,1 için

$$\begin{aligned}
y_1^{(k)}(x,\lambda) &= (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1 x}(1 + O(\frac{1}{\lambda})) \\
y_2^{(k)}(x,\lambda) &= (-\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1 x}(1 + O(\frac{1}{\lambda})) \\
y_3^{(k)}(x,\lambda) &= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2 x}(1 + O(\frac{1}{\lambda})) \\
y_4^{(k)}(x,\lambda) &= (-\lambda\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2 x}(1 + O(\frac{1}{\lambda}))
\end{aligned} \tag{III.3.1}$$

asimptotik eşitliklerini sağlarlar.

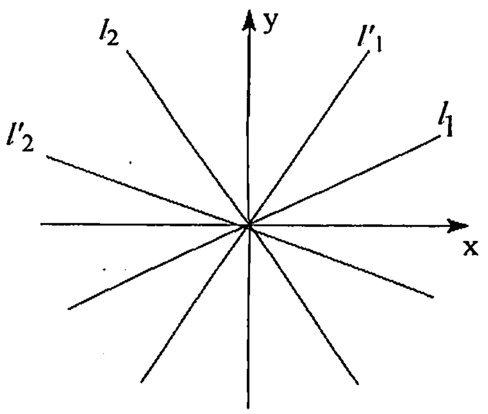
$y_j(x, \lambda)$ fonksiyonlarının [-1,1] \ {0} cümlesine sıfırla devamlarını $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ ile gösterelim. Bu halde (III.2.7) denkleminin genel çözümünü c_i (i=1,2,3,4) ler keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x) = \sum_{i=1}^{4} c_i \tilde{y}_i(x,\lambda) \tag{III.3.2}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

III.4. Σ Sektörlerinin Ω Sektörlerine Bölünmesi

Koordinat başlangıcından geçen l_1 ve l_2 den farklı iki tane keyfi l'_1 ve l'_2 doğrularını öyle seçelim ki, koordinat başlangıcı etrafında bir yönde döndürdüğümüzde bu doğrular l_1, l'_1, l_2, l'_2 sırasına göre dizilmiş olsunlar.



Bu durumda dört tane

$d_i = l_i\text{-}c = \{\lambda\text{-}c \mid \lambda \in l_i\}$,

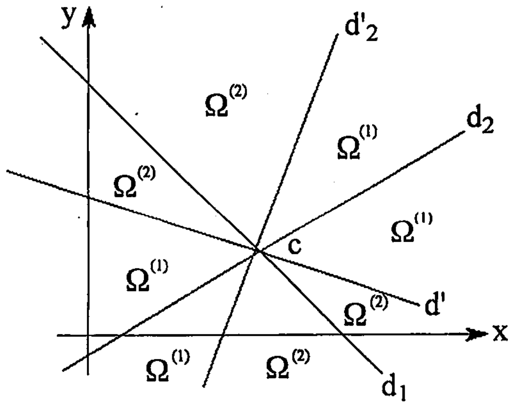
$d'_i = l'_i\text{-}c = \{\lambda\text{-}c \mid \lambda \in l'_i\}$

(i=1,2) doğrusu kompleks düzlemini sekiz tane sektöre ayırır. Bu sektörleri $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_8$ ile gösterelim. Bu sektörlerin herbirine kısaca Ω sektörü deyeceğiz. $\lambda \in \Omega$ yazdığımızda λ parametresinin Ω_i sektörlerinin herhangi birinde değiştiğini düşüneceğiz.

Herbir Σ sektörünün iki tane Ω sektöründen oluştuğu açıktır. Bu nedenle, $\lambda \in \Omega$ $\lambda \to \infty$ için (III.3.1) asimptotik eşitlikleri geçerlidir. Ω sektörlerini $\Omega^{(1)}$ ve $\Omega^{(2)}$ gibi öyle iki kısma ayıralım ki $\Omega^{(1)}$ e ait olan sektörlerin sınırlarından hiçbiri d_1 doğrusu üzerinde yerleşmesin. Aynı şekilde $\Omega^{(2)}$ ile öyle sektörleri göstereceğiz ki bu sektörlerin hiç bir sınırı d_2 üzerinde yerleşmesin.

Teorem III.4.1 $\Omega^{(1)}$ ve $\Omega^{(2)}$ sektörlerinin her birinde $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_1$ ve $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_2$ fonksiyonları işaretlerini korurlar ve $\mathrm{Re}\lambda\omega_i \to \infty$, $\lambda \in \Omega^{(i)}$, $\lambda \to \infty$ (i=1,2) olacaktır.

İspat $\Omega^{(i)}$ sektörlerinin tanımına göre,



$0<\varphi_1<\varphi_2<\pi$ olaçak şekilde öyle φ_1, φ_2 sayıları bulunur ki $\lambda\in\Omega^{(i)}$ olduğunda

$$\mp\frac{\pi}{2}+\varphi_1 \le \arg(\lambda\omega_i) \le \mp\frac{\pi}{2}+\varphi_2 \qquad i=1,2$$

eşitsizliği sağlanır. Öyle ki her bir Ω sektörü için $\frac{\pi}{2}$ karşısında (+) veya (-) işaretlerinden sadece bir tanesi bulunur. O halde $\lambda\in\Omega^{(i)}$ için

$$|\mathrm{Re}\,\lambda\omega_i| = |\lambda\omega_i|\,|\mathrm{Cos}\arg(\lambda\omega_i)| \ge r\,|\lambda\omega_i| \qquad \text{(III.4.1)}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$r = \min_{i=1,2}|Cos(\mp\frac{\pi}{2}+\varphi_i)| > 0$$

dır. Buna göre, $\lambda\in\Omega^{(i)}$ için $\mathrm{Re}\lambda\omega_i\to\infty$ $(\lambda\to\infty)$ olacaktır. Demek ki her Ω sektöründe $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_1$ ve $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_2$ fonksiyonlarından biri $\lambda\to\infty$ olduğunda sonsuzluğa yakınsıyor, diğeri ise işaretini koruyor. Bundan sonra $\lambda\in\Omega$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$$

olmak üzere $M+f(\lambda)$ şeklindeki herbir fonksiyonu [M] ile göstereceğiz.

III.5* Ω Sektörlerinde Sınır Fonksiyonellerinin Asimptotiği

Şimdi $\arg a_1 \neq \arg a_2$ olması durumunda $L_q(-1,1)$ uzayında genel olarak sınırsız olan $T_{\nu k}$, $\nu=1,2,3,4$, $k=1,2$, fonksiyonellerinin diferensiyel denklemin çözümlerindeki değerlerini $\lambda\in\Omega$, $\lambda\to\infty$ için asimptotiğini bulacağız.

$T_{\nu k}$: $L_q(-1,1)\to C$ fonksiyonellerini $W_q^k(-1,0)\oplus W_q^k(0,1)$ Sobolev uzayından C kompleks sayılar uzayına sürekli kabul etmiştik.

$$T_{\nu k}: W_q^k(-1,0)\oplus W_q^k(0,1)\to C$$

fonksiyoneli sürekli olduğu için

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere öyle

$Z_{\nu ki}(x)\in L_p(-1,1)$ fonksiyonları vardır ki

$$T_{\nu k}y=\sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{1}y^{(i)}(x)Z_{\nu ki}(x)dx \qquad \text{(III.5.1)}$$

eşitliği bütün $y\in W_q^k(-1,0)\oplus W_q^k(0,1)$ fonksiyonları için sağlanır [4]

Burada yazının kısalığı için $\int_{-1}^{1}\equiv\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}$ gösterimini kullandık.

$T_{\nu k}$ fonksiyonellerinin (III.3.1) şeklindeki temsillerini kullanarak bu formülde y fonksiyonu yerine (II.2.7) denkleminin $\tilde{y}_i(x,\lambda)$ çözümlerini yazıp (III.3.1) asimptotik formüllerinden faydalanarak Ω sektörlerinin herbirinde $T_{\nu k}\tilde{y}_i$ için asimptotik ifadeler bulabiliriz. Bu asimptotik ifadeleri Ω sektörlerinin $\Omega^{(1)}$ ve $\Omega^{(2)}$ alt sınıflarının her birindeki setörden sadece bir tanesinde hesaplayacağız (Diğer sektörler içinde benzer şekilde hesaplamalar yapılabilir.)

Bunu önce $\Omega^{(2)}$ sektörlerinin bir tanesi için yapalım. $\Omega^{(2)}$ sektörlerinin ancak ve ancak birinde $\text{Re}(\lambda+c)\omega_1 \geq 0$, $\text{Re}\lambda\omega_2 \to +\infty$, $\lambda \to \infty$ (III.5.2) şartlarının sağlandığını biliyoruz. Bu sektörü $\Omega_0^{(2)}$ ile gösterelim. (III.3.1) eşitliklerini (III.5.1) denkleminde yerine yazarsak $T_{vk}\tilde{y}$ için

$$T_{\upsilon k}\tilde{y}_1 = \sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{0}\frac{d^i\tilde{y}_1(x,\lambda)}{dx^i}Z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{0}(\lambda\omega_1)^i e^{\lambda\omega_1 x}(1+\text{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= (\lambda\omega_1)^k\sum_{i=0}^{k}(\lambda\omega_1)^{i-k}\int_{0}^{1}e^{-\lambda\omega_1 x}(1+\text{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\upsilon ki}(-x)dx \qquad \text{(III.5.3)}$$

eşitliğini elde ederiz.

$\lambda \in \Omega_0^{(2)}$ olduğunda $\text{Re}(-\lambda\omega_1) \leq 0$ olduğu için yardımcı önerme (I.7.1) gereğince

$$\int_{0}^{1}e^{-\lambda\omega_1 x}(1+\text{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\upsilon ki}(-x)dx = [\text{o}] \qquad \text{(III.5.4)}$$

asimptotik eşitliği sağlanır. Buna göre $T_{\upsilon k}\tilde{y}_1$ fonksiyonelinin asimptotik değeri

$$T_{\upsilon k}\tilde{y}_1 = (\lambda\omega_1)^k\sum_{i=0}^{k}(\lambda\omega_1)^{i-k}[\text{o}]$$

$$= (\lambda\omega_1)^k[\text{o}] \quad , \quad \lambda \in \Omega_0^{(2)} \quad , \lambda \to \infty \qquad \text{(III.5.5)}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer olarak $\lambda \in \Omega_0^{(2)}$, $\lambda \to \infty$ için

$$T_{\iota k}\widetilde{y}_2 = \sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{0}\frac{d^i\widetilde{y}_2(x,\lambda)}{dx^i}Z_{\iota ki}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{0}(-\lambda\omega_1)^i e^{-\lambda\omega_1 x}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= (-\lambda\omega_1)^k \sum_{i=0}^{k}(-\lambda\omega_1)^{i-k}\int_{-1}^{0}e^{-\lambda\omega_1 x}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= (-\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}\sum_{i=0}^{k}(-\lambda\omega_1)^{i-k}\int_{0}^{1}e^{\lambda\omega_1(x-1)}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\upsilon ki}(-x)dx =$$

$$= (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}] \tag{III.5.6}$$

$$T_{\iota k}\widetilde{y}_3 = \sum_{i=0}^{k}\int_{0}^{1}\frac{d^i\widetilde{y}_3(x,\lambda)}{dx^i}Z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\int_{0}^{1}(\lambda\omega_2)^i e^{\lambda\omega_2 x}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\iota ki}(x)dx =$$

$$= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}\sum_{i=0}^{k}(\lambda\omega_2)^{i-k}\int_{0}^{1}e^{-\lambda\omega_2(1-x)}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}\sum_{i=1}^{k}(\lambda\omega_2)^{i-k}[\mathrm{o}] =$$

$$= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}] \tag{III.5.7}$$

$$T_{\iota k}\widetilde{y}_4 = \sum_{i=0}^{k}\int_{0}^{1}\frac{d^i\widetilde{y}_4(x,\lambda)}{dx^i}Z_{\iota ki}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\int_{0}^{1}(-\lambda\omega_2)^i e^{-\lambda\omega_2 x}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= (-\lambda\omega_2)^k \sum_{i=0}^{k}(-\lambda\omega_2)^{i-k}\int_{0}^{1}e^{-\lambda\omega_2 x}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\lambda}))Z_{\iota ki}(x)dx =$$

$$= (-\lambda\omega_2)^k[o] =$$

$$= (\lambda\omega_2)^k[o] \qquad \text{(III.5.8)}$$

asimptotik ifadeleri elde edilir.

Benzer yöntemle $\Omega^{(1)}$ sektörleri için asimttotik formüller elde edilir. Örneğin, $Re(\lambda+c)\omega_2 \geq 0$, $Re\lambda\omega_1 \to +\infty$, $(\lambda \to \infty)$ şartlarının sağlandığı sektörü $\Omega_0^{(1)}$ ile gösterirsek bu sektörde de aşağıdaki

$$\left.\begin{aligned} T_{\nu k}\tilde{y}_1 &= (\lambda\omega_1)^k[o] \\ T_{\nu k}\tilde{y}_2 &= (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[o], \\ T_{\nu k}\tilde{y}_3 &= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[o], \\ T_{\nu k}\tilde{y}_4 &= (\lambda\omega_2)^k[o], \\ \lambda \in \Omega_0^{(1)}, \quad & \lambda \to \infty, \quad \nu=1,2,3,4, \quad k=0,1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.5.9)}$$

asimptotik formülleri geçerli olacaktır. Bu elde ettiğimiz sonuçları bir teorem şeklinde ifade edebiliriz.

Teorem II.5.1 $L_q(-1,1)$ $q \geq 1$, uzayında verilmiş $T_{\nu k}$ $\nu=1,2,3,4$, $k=1,2$ fonksiyonelleri $W_q^k(-1,0) \oplus W_q^k(0,1)$ sobolov uzayından **C** kompleks sayılar uzayına sürekli ise bu fonksiyonellerinin (III.2.7) denkelinin (II.4.10) eşitlikler ile tanımlanmış $\tilde{y}_i^k(x,\lambda)$, i=1,2,3,4, k=0,1 çözümleri üzerindeki değerleri Ω sektörlerinde (III.5.5)-(III.5.8) asimptotik formüllerini gerçekliyorlar.

III.6. Ω Sektörlerinde Sınır Değer İfadelerinin Asimptotiği

Şimdi de $L_\upsilon \tilde{y}_i$, $(i,\upsilon=\overline{1,4})$ sınır değer ifadelerinin $\Omega_0^{(2)}$ ve $\Omega_0^{(1)}$ sektörlerinde asimptotik formüllerinin elde edilişini inceleyelim. Diğer Ω bölgelerindeki incelemeler benzer şekilde yapılabilir.

$L_{\upsilon k} y$ sınır-değer ifadelerini

$$L_{1k}y=\alpha_{1k}y^{(k)}(-1)+\beta_{1k}y^{(k)}(-0)+\sum_{p=1}^{n_{1k}}\eta_{1pk}y^{(k)}(x_{1pk})+T_{1k}y \qquad (k=0,1)$$

$$L_{2k}y=\alpha_{2k}y^{(k)}(+0)+\beta_{2k}y^{(k)}(1)+\sum_{p=1}^{n_{2k}}\eta_{2pk}y^{(k)}(x_{2pk})+T_{2k}y \qquad (k=0,1)$$

eşitlikleri ile tanımlarsak

$$L_\upsilon \tilde{y}_j=\sum_{k=0}^{1}\lambda^{1-k}L_{\upsilon k}\tilde{y}_j$$

elde edilir.

$$\{\{x_{ip0}\}_{p=\overline{1,n_{10}}},\{x_{ip1}\}_{p=\overline{1,n_{11}}}\}$$

noktalarını birleştirirek bu noktaları yeni notasyonla $\{x_{iq}\}_{q=\overline{1,N_i}}$ olarak gösterelim ve uygun olarak $\{\eta_{ipk}\}$ kompleks sayıları yerine de $\{\eta_{iq}\}$ sayılarını yazalım. O halde L_{vk} fonksiyonellerini

$$\begin{aligned}L_{1k}y&=\alpha_{1k}y^{(k)}(-1)+\beta_{1k}y^{(k)}(-0)+\sum_{q=1}^{N_1}\eta_{1k}y^{(k)}(x_{1q})+T_{1k}y\\ L_{2k}y&=\alpha_{2k}y^{(k)}(+0)+\beta_{2k}y^{(k)}(1)+\sum_{q=1}^{N_2}\eta_{2k}y^{(k)}(x_{2q})+T_{2k}y\end{aligned} \qquad \text{(III.6.1)}$$

şeklinde yazabiliriz.

Yukarıdaki gösterimler $L_{3k}y$ ve $L_{4k}y$ sınır şartlarını etkilemeyeceğinden bunlarda bir değişiklik olmayacaktır.

$\tilde{y}_i(x,\lambda)$ çözümleri için (III.3.1) formüllerinden, $T_{\upsilon k}\tilde{y}_i$ ifadeleri için ise (III.5.5)-(III.5.8) formüllerinden faydalanarak $\lambda\in\Omega_0^{(2)}$, $\lambda\to\infty$ olması durumunda önce

$L_{\nu k}\widetilde{y}_i$ sınır değer ifadeleri için asimptotik formüller elde edeceğiz. $\lambda\in\Omega_0^{(2)}$, $\lambda\to\infty$ olduğunda $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_1\geq 0$ ve $\mathrm{Re}\lambda\omega_2\to+\infty$ olduğunu gözönünde bulundurarak aşağıdaki asimptotik formülleri buluruz.

$$L_{1k}\widetilde{y}_1 = \alpha_{1k}\widetilde{y}_1^{(k)}(-1)+\beta_{1k}\widetilde{y}_1^{(k)}(-0)+\sum_{q=1}^{N_1}\eta_{1k}\widetilde{y}_1^{(k)}(x_{1q})+T_{1k}\widetilde{y}_1 =$$

$$=\alpha_{1k}(\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1}[1]+\beta_{1k}(\lambda\omega_1)^k[1]+$$

$$+\sum_{q=1}^{N_1}\eta_{1q}(\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1 x_{1q}}[1]+(\lambda\omega_1)^k[o]=$$

$$=(\lambda\omega_1)^k([\alpha_{1k}]e^{-\lambda\omega_1}+[\beta_{1k}]+\sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{\lambda\omega_1 x_{1q}}) \qquad \text{(III.6.2)}$$

$$L_{1k}\widetilde{y}_2 = \alpha_{1k}\widetilde{y}_2^{(k)}(-1)+\beta_{1k}\widetilde{y}_2^{(k)}(-0)+\sum_{q=1}^{N_1}\eta_{1q}\widetilde{y}_2^{(k)}(x_{1q})+T_{1k}\widetilde{y}_2 =$$

$$=\alpha_{1k}(-\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[1]+\beta_{1k}(-\lambda\omega_1)^k[1]+$$

$$+\sum_{q=1}^{N_1}\eta_{1q}(-\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1 x_{1q}}+(\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[o]$$

$$=(-\lambda\omega_1)^k([\alpha_{1k}]e^{\lambda\omega_1}+[\beta_{1k}]+\sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{-\lambda\omega_1 x_{1q}}+(-1)^k e^{\lambda\omega_1}[o])$$

$$=(-\lambda\omega_1)^k([\alpha_{1k}]e^{\lambda\omega_1}+[\beta_{1k}]+\sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{-\lambda\omega_1 x_{1q}}) \qquad \text{(III.6.3)}$$

$$L_{1k}\widetilde{y}_3 = \alpha_{1k}\widetilde{y}_3^{(k)}(-1)+\beta_{1k}\widetilde{y}_3^{(k)}(-0)+\sum_{q=1}^{N_1}\eta_{1q}\widetilde{y}_3^{(k)}(x_{1q})+T_{1k}\widetilde{y}_3 =$$

$$=T_{1k}\widetilde{y}_3$$

$$=(\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[o] \qquad \text{(III.6.4)}$$

$$L_{1k}\widetilde{y}_4 = \alpha_{1k}\widetilde{y}_4^{(k)}(-1) + \beta_{1k}\widetilde{y}_4^{(k)}(-0) + \sum_{q=1}^{N_1}\eta_{1q}\widetilde{y}_4^{(k)}(x_{1q}) + T_{1k}\widetilde{y}_4 =$$

$$= T_{1k}\widetilde{y}_4$$

$$= (\lambda\omega_2)^k[\mathrm{o}]$$

$$= \lambda^k[\mathrm{o}] \qquad \text{(III.6.5)}$$

$$L_{2k}\widetilde{y}_1 = \alpha_{2k}\widetilde{y}_1^{(k)}(+0) + \beta_{2k}\widetilde{y}_2^{(k)}(+1) + \sum_{q=1}^{N_2}\eta_{1q}\widetilde{y}_1^{(k)}(x_{2q}) + T_{2k}\widetilde{y}_1 =$$

$$= T_{2k}\widetilde{y}_1$$

$$= (\lambda\omega_1)^k[\mathrm{o}]$$

$$= \lambda^k[\mathrm{o}] \qquad \text{(III.6.6)}$$

$$L_{2k}\widetilde{y}_2 = \alpha_{2k}\widetilde{y}_2^{(k)}(+0) + \beta_{2k}\widetilde{y}_2^{(k)}(+1) + \sum_{q=1}^{N_2}\eta_{2q}\widetilde{y}_2^{(k)}(x_{2q}) + T_{2k}\widetilde{y}_2 =$$

$$= T_{2k}\widetilde{y}_2$$

$$= (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}]$$

$$= \lambda^k e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}] \qquad \text{(III.6.7)}$$

$$L_{2k}\widetilde{y}_3 = \alpha_{2k}\widetilde{y}_3^{(k)}(+0) + \beta_{2k}\widetilde{y}_3^{(k)}(+1) + \sum_{q=1}^{N_2}\eta_{2q}\widetilde{y}_3^{(k)}(x_{2q}) + T_{2k}\widetilde{y}_3$$

$$= \alpha_{2k}(\lambda\omega_2)^k[1] + \beta_{2k}(\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[1] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_2}\eta_{2q}(\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2 x_{2q}}[1] + (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}]$$

$$= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}([\alpha_{2k}]e^{-\lambda\omega_2} + [\beta_{2k}] + \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{-\lambda\omega_2(1-x_{2q})} + [\mathrm{o}]) =$$

$$= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[\beta_{2k}] \qquad \text{(III.6.8)}$$

$$L_{2k}\widetilde{y}_4 = \alpha_{2k}\widetilde{y}_4^{(k)}(+0) + \beta_{2k}\widetilde{y}_4^{(k)}(+1) + \sum_{q=1}^{N_2}\eta_{2q}\widetilde{y}_4^{(k)}(x_{2q}) + T_{2k}\widetilde{y}_4$$

$$= \alpha_{2k}(-\lambda\omega_2)^k[1] + \beta_{2k}(-\lambda\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2}[1] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_2}\eta_{2q}(-\lambda\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2 x_{2q}} + (\lambda\omega_2)^k[\mathrm{o}]$$

$$= (-\lambda\omega_2)^k[\alpha_{2k}] \qquad \text{(III.6.9)}$$

$$L_{3k}\widetilde{y}_1 = \delta_{1k}\widetilde{y}_1^{(k)}(-0) + \gamma_{1k}\widetilde{y}_1^{(k)}(+0) + T_{3k}\widetilde{y}_1$$

$$= \delta_{1k}\widetilde{y}_1^{(k)}(-0) + T_{3k}\widetilde{y}_1$$

$$= \delta_{1k}(\lambda\omega_1)^k[1] + (\lambda\omega_1)^k[\mathrm{o}]$$

$$= (\lambda\omega_1)^k[\delta_{1k}] \qquad \text{(III.6.10)}$$

$$L_{3k}\widetilde{y}_2 = \delta_{1k}\widetilde{y}_2^{(k)}(-0) + \gamma_{1k}\widetilde{y}_2^{(k)}(+0) + T_{3k}\widetilde{y}_2$$

$$= \delta_{1k}\widetilde{y}_2^{(k)}(-0) + T_{3k}\widetilde{y}_2$$

$$= \delta_{1k}(-\lambda\omega_1)^k[1] + (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}]$$

$$= (-\lambda\omega_1)^k([\delta_{1k}] + e^{\lambda\omega_1}[0]) \qquad \text{(III.6.11)}$$

$$L_{3k}\widetilde{y}_3 = \delta_{1k}\widetilde{y}_3^{(k)}(-0) + \gamma_{1k}\widetilde{y}_3^{(k)}(+0) + T_{3k}\widetilde{y}_3$$

$$= \gamma_{1k}\widetilde{y}_3^{(k)}(+0) + T_{3k}\widetilde{y}_3$$

$$= \gamma_{1k}(\lambda\omega_2)^k[1] + (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}]$$

$$= (\lambda\omega_2)^k([\gamma_{1k}] + e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}])$$

$$= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}([\gamma_{1k}] + e^{-\lambda\omega_2} + [\mathrm{o}])$$

$$= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}] \qquad \text{(III.6.12)}$$

$$
\begin{aligned}
L_{3k}\tilde{y}_4 &= \delta_{1k}\tilde{y}_4{}^{(k)}(-0) + \gamma_{1k}\tilde{y}_3{}^{(k)}(+0) + T_{3k}\tilde{y}_4 \\
&= \gamma_{1k}\tilde{y}_4{}^{(k)}(+0) + T_{3k}\tilde{y}_4 \\
&= \gamma_{1k}(-\lambda\omega_2)^k[1] + (\lambda\omega_2)^k[\mathrm{o}] \\
&= (-\lambda\omega_2)^k[\gamma_{1k}] \qquad \text{(III.6.13)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4k}\tilde{y}_1 &= \delta_{2k}\tilde{y}_1{}^{(k)}(-0) + \gamma_{2k}\tilde{y}_1{}^{(k)}(+0) + T_{4k}\tilde{y}_1 \\
&= \delta_{2k}\tilde{y}_1{}^{(k)}(-0) + T_{4k}\tilde{y}_1 \\
&= \delta_{2k}(\lambda\omega_1)^k[1] + (\lambda\omega_1)^k[\mathrm{o}] \\
&= (\lambda\omega_1)^k[\delta_{2k}] \qquad \text{(III.6.14)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4k}\tilde{y}_2 &= \delta_{2k}\tilde{y}_2{}^{(k)}(-0) + \gamma_{2k}\tilde{y}_2{}^{(k)}(+0) + T_{4k}\tilde{y}_2 \\
&= \delta_{2k}\tilde{y}_2{}^{(k)}(-0) + T_{4k}\tilde{y}_2 \\
&= \delta_{2k}(-\lambda\omega_1)^k[1] + (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}] \\
&= (-\lambda\omega_1)^k([\delta_{2k}] + e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}]) \qquad \text{(III.6.15)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4k}\tilde{y}_3 &= \delta_{2k}\tilde{y}_3{}^{(k)}(-0) + \gamma_{2k}\tilde{y}_3{}^{(k)}(+0) + T_{4k}\tilde{y}_3 \\
&= \gamma_{2k}\tilde{y}_3{}^{(k)}(+0) + T_{4k}\tilde{y}_3 \\
&= \gamma_{2k}(\lambda\omega_2)^k[1] + (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}] \\
&= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}([\gamma_{2k}]e^{-\lambda\omega_2} + [\mathrm{o}]) \\
&= (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}] \qquad \text{(III.6.16)}
\end{aligned}
$$

$$L_{4k}\widetilde{y}_4 = \delta_{2k}\widetilde{y}_4^{(k)}(-0) + \gamma_{2k}\widetilde{y}_4^{(k)}(+0) + T_{4k}\widetilde{y}_4$$

$$= \gamma_{2k}\widetilde{y}_4^{(k)}(+0) + T_{4k}\widetilde{y}_4$$

$$= \gamma_{2k}(-\lambda\omega_2)^k[1] + (\lambda\omega_2)^k[o]$$

$$= (-\lambda\omega_2)^k[\gamma_{2k}] \qquad \text{(III.6.17)}$$

Şimdi de elde ettiğimiz (III.6.2)-(III.6.17) asimptotik formüllerin yardımı ile $L_\upsilon\widetilde{y}_j$ fonksiyonları için asimptotik ifadeleri bulabiliriz.

Bunun için önce bu ifadeleri

$$L_\upsilon\widetilde{y}_j = \sum_{k=0}^{1}\lambda^{1-k}(L_{\upsilon k}\widetilde{y}_j)$$

$$= \lambda L_{\upsilon 0}\widetilde{y}_j + L_{\upsilon 1}\widetilde{y}_j$$

$$= \lambda(L_{\upsilon 0}\widetilde{y}_j + \frac{1}{\lambda}L_{\upsilon 1}\widetilde{y}_j) \qquad \text{(III.6.18)}$$

şeklinde yazalım (III.6.2)-(III.6.17) formüllerini (III.6.18) eşitliğinde yerine yazıp $\lambda \in \Omega_0^{(2)}$, $\lambda \to \infty$ olduğunu gözönüne alırsak aşağıdaki asimptotik ifadeleri elde ederiz.

$$L_1\widetilde{y}_1 = \lambda(L_{10}\widetilde{y}_1 + \frac{1}{\lambda}L_{11}\widetilde{y}_1)$$

$$= \lambda([\alpha_{10}]e^{-\lambda\omega_1} + [\beta_{10}] + \sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{\lambda\omega_1 x_{1q}} +$$

$$+\frac{1}{\lambda}(\lambda\omega_1)([\alpha_{11}]e^{-\lambda\omega_1} + [\beta_{11}] + \sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{\lambda\omega_1 x_{1q}}))$$

$$= \lambda([\alpha_{10} + \omega_1\alpha_{11}]e^{-\lambda\omega_1} + [\beta_{10} + \omega_1\beta_{11}] +$$

$$+(1+\omega_1)\sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{\lambda\omega_1 x_{1q}}) \qquad \text{(III.6.19)}$$

$$L_1\widetilde{y}_2 = \lambda(L_{10}\widetilde{y}_2 + \frac{1}{\lambda}L_{11}\widetilde{y}_2) =$$

$$= \lambda([\alpha_{10}]e^{\lambda\omega_1} + [\beta_{10}] + \sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{-\lambda\omega_1 x_{1q}} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}(-\lambda\omega_1)([\alpha_{11}]e^{\lambda\omega_1} + [\beta_{11}] + \sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{-\lambda\omega_1 x_{1q}})) =$$

$$= \lambda([\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11}]e^{\lambda\omega_1} + [\beta_{10} - \omega_1\beta_{11}] + (1-\omega_1)\sum_{q=1}^{N_1}[\eta_{1q}]e^{-\lambda\omega_1 x_{1q}}) \tag{III.6.20}$$

$$L_1\widetilde{y}_3 = \lambda(L_{10}\widetilde{y}_3 + \frac{1}{\lambda}L_{11}\widetilde{y}_3)$$

$$= \lambda(e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}] + \frac{1}{\lambda}(\lambda\omega_2)e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}])$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_2}[\mathrm{o}] \tag{III.6.21}$$

$$L_1\widetilde{y}_4 = \lambda([\mathrm{o}] + \frac{1}{\lambda}\lambda[\mathrm{o}]$$

$$=\lambda[\mathrm{o}] \tag{III.6.22}$$

$$L_2\widetilde{y}_1 = \lambda(L_{20}\widetilde{y}_1 + \frac{1}{\lambda}L_{21}\widetilde{y}_1)$$

$$= \lambda([\mathrm{o}] + \frac{1}{\lambda}\lambda[\mathrm{o}] =$$

$$=\lambda[\mathrm{o}] \tag{III.6.23}$$

$$L_2\widetilde{y}_2 = \lambda(L_{20}\widetilde{y}_2 + \frac{1}{\lambda}L_{21}\widetilde{y}_2)$$

$$= \lambda(e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}] + \frac{1}{\lambda}\lambda e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}]) =$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_1}[\mathrm{o}] \tag{III.6.24}$$

$$L_2\widetilde{y}_3 = \lambda(L_{20}\widetilde{y}_3 + \frac{1}{\lambda}L_{21}\widetilde{y}_3)$$

$$= \lambda(e^{\lambda\omega_2}[\beta_{20}] + \frac{1}{\lambda}(\lambda\omega_2)e^{\lambda\omega_2}[\beta_{21}]$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_2}[\beta_{20} + \omega_2\beta_{21}] \tag{III.6.25}$$

$$L_2\widetilde{y}_4 = \lambda(L_{20}\widetilde{y}_4 + \frac{1}{\lambda}L_{21}\widetilde{y}_4)$$

$$= \lambda([\alpha_{20}] + \frac{1}{\lambda}(-\lambda\omega_2)[\alpha_{21}])$$

$$= \lambda[\alpha_{20} - \omega_2\alpha_{21}] \tag{III.6.26}$$

$$L_3\widetilde{y}_1 = \lambda(L_{30}\widetilde{y}_1 + \frac{1}{\lambda}L_{31}\widetilde{y}_1)$$

$$= \lambda([\delta_{10}] + \frac{1}{\lambda}(\lambda\omega_1)[\delta_{11}])$$

$$= \lambda[\delta_{10} + \omega_1\delta_{11}]) \tag{III.6.27}$$

$$L_3\widetilde{y}_2 = \lambda(L_{30}\widetilde{y}_2 + \frac{1}{\lambda}L_{31}\widetilde{y}_2)$$

$$= \lambda([\delta_{10}) + e^{\lambda\omega_1}[o] + \frac{1}{\lambda}(-\lambda\omega_1)([\delta_{11}] + e^{\lambda\omega_1}[o]))$$

$$= \lambda([\delta_{10} - \omega_1\delta_{11}]) + e^{\lambda\omega_1}[o]) \tag{III.6.28}$$

$$L_3\widetilde{y}_3 = \lambda(L_{30}\widetilde{y}_3 + \frac{1}{\lambda}L_{31}\widetilde{y}_3)$$

$$= \lambda(e^{\lambda\omega_2}[o] + \frac{1}{\lambda}(\lambda\omega_2)e^{\lambda\omega_2}[o])$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_2}[o] \tag{III.6.29}$$

$$L_3\widetilde{y}_4 = \lambda(L_{30}\widetilde{y}_4 + \frac{1}{\lambda}L_{31}\widetilde{y}_4)$$

$$= \lambda([\gamma_{10}] + \frac{1}{\lambda}(-\lambda\omega_2)[\gamma_{11}])$$

$$= \lambda[\gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11}] \tag{III.6.30}$$

$$L_4\widetilde{y}_1 = \lambda(L_{40}\widetilde{y}_1 + \frac{1}{\lambda}L_{41}\widetilde{y}_1)$$

$$= \lambda([\delta_{20}] + \frac{1}{\lambda}(\lambda\omega_1)[\delta_{21}])$$

$$= \lambda[\delta_{20} + \omega_1\delta_{21}] \tag{III.6.31}$$

$$L_4\widetilde{y}_2 = \lambda(L_{40}\widetilde{y}_2 + \frac{1}{\lambda}L_{41}\widetilde{y}_2)$$

$$= \lambda([\delta_{20}] + e^{\lambda\omega_1}[\text{o}] + \frac{1}{\lambda}(-\lambda\omega_1)([\delta_{21}] + e^{\lambda\omega_1}[\text{o}]))$$

$$= \lambda([\delta_{20} - \omega_1\delta_{21}]) + e^{\lambda\omega_1}[\text{o}]) \tag{III.6.32}$$

$$L_4\widetilde{y}_3 = \lambda(L_{40}\widetilde{y}_3 + \frac{1}{\lambda}L_{41}\widetilde{y}_3)$$

$$= \lambda(e^{\lambda\omega_2}[\text{o}] + \frac{1}{\lambda}(\lambda\omega_2)e^{\lambda\omega_2}[\text{o}])$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_2}[\text{o}] \tag{III.6.33}$$

$$L_4\widetilde{y}_4 = \lambda(L_{40}\widetilde{y}_4 + \frac{1}{\lambda}L_{41}\widetilde{y}_4)$$

$$= \lambda([\gamma_{20}] + \frac{1}{\lambda}(-\lambda\omega_2)[\gamma_{21}])$$

$$= \lambda[\gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21}] \tag{III.6.34}$$

Şimdi de

$Re(\lambda+c)\omega_2 \geq 0$, $Re\lambda\omega_1 \to +\infty$, $(\lambda \to \infty)$ şartlarının gerçeklendiği $\Omega_0^{(1)}$ sektörü için fonksiyonel-çoknoktalı sınır değer ifadelerinin asimptotiğini yazalım. Hesaplama işlemleri $\Omega_0^{(2)}$ sektörü için yaptığımız işlemlere benzer olduğu için sonuçları direkt olarak yazacağız. Bu sektörde $L_{\nu k}\widetilde{y}_i(\lambda)$ fonksiyonları için aşağıdaki formüller geçerlidir

$$L_{1k}\widetilde{y}_1 = (\lambda\omega_1)^k[\beta_{1k}] \tag{III.6.35}$$

$$L_{1k}\widetilde{y}_2 = (-\lambda\omega_1)^{\omega_1}[\alpha_{1k}] \tag{III.6.36}$$

$$L_{1k}\widetilde{y}_3 = \lambda^k e^{\lambda\omega_2}[o] \tag{III.6.37}$$

$$L_{1k}\widetilde{y}_4 = \lambda^k[o] \tag{III.6.38}$$

$$L_{2k}\widetilde{y}_1 = \lambda^k[o] \tag{III.6.39}$$

$$L_{2k}\widetilde{y}_2 = \lambda^k e^{\lambda\omega_1}[o] \tag{III.6.40}$$

$$L_{2k}\widetilde{y}_3 = (\lambda\omega_2)^k([\alpha_{2k}] + [\beta_{2k}]e^{\lambda\omega_2} + \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{\lambda\omega_2 x_{2q}}) \tag{III.6.41}$$

$$L_{2k}\widetilde{y}_4 = (-\lambda\omega_2)^k([\alpha_{2k}] + [\beta_{2k}]e^{-\lambda\omega_2} + \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{-\lambda\omega_2 x_{2q}}) \tag{III.6.42}$$

$$L_{3k}\widetilde{y}_1 = (\lambda\omega_1)^k[\delta_{1k}] \tag{III.6.43}$$

$$L_{3k}\widetilde{y}_2 = (-\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[o] \tag{III.6.44}$$

$$L_{3k}\widetilde{y}_3 = (\lambda\omega_2)^k([\gamma_{1k}] + e^{\lambda\omega_2}[o]) \tag{III.6.45}$$

$$L_{3k}\widetilde{y}_4 = (-\lambda\omega_2)^k[\gamma_{1k}] \tag{III.6.46}$$

$$L_{4k}\widetilde{y}_1 = (\lambda\omega_1)^k[\delta_{2k}] \tag{III.6.47}$$

$$L_{4k}\widetilde{y}_2 = (-\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[o] \qquad \text{(III.6.48)}$$

$$L_{4k}\widetilde{y}_3 = (\lambda\omega_2)^k([\gamma_{2k}] + e^{\lambda\omega_2}[o]) \qquad \text{(III.6.49)}$$

$$L_{4k}\widetilde{y}_4 = (-\lambda\omega_2)^k([\gamma_{2k}] \qquad \text{(III.6.50)}$$

bu asimpotik formülleri

$$L_{\upsilon}\widetilde{y}_j = \lambda L_{\upsilon 0}\widetilde{y}_j + L_{\upsilon 1}\widetilde{y}_j$$

formülünde yerine yazıp, gerekli işlemleri yaparsak aşağıdaki formülleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} L_1\widetilde{y}_1 &= \lambda L_{10}\widetilde{y}_1 + L_{11}\widetilde{y}_1 \\ &= \lambda[\beta_{10}] + \lambda\omega_1[\beta_{11}] \\ &= \lambda[\beta_{10} + \omega_1\beta_{11}] \end{aligned} \qquad \text{(III.6.51)}$$

$$\begin{aligned} L_1\widetilde{y}_2 &= \lambda L_{10}\widetilde{y}_2 + L_{11}\widetilde{y}_2 \\ &= \lambda e^{\lambda\omega_1}[\alpha_{10}] + (-\lambda\omega_1)e^{\lambda\omega_1}[\alpha_{11}] \\ &= \lambda e^{\lambda\omega_1}([\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11}]) \end{aligned} \qquad \text{(III.6.52)}$$

$$\begin{aligned} L_1\widetilde{y}_3 &= \lambda L_{10}\widetilde{y}_3 + L_{11}\widetilde{y}_3 \\ &= \lambda e^{\lambda\omega_2}[o] + \lambda e^{\lambda\omega_2}[o] \\ &= \lambda e^{\lambda\omega_2}[o] \end{aligned} \qquad \text{(III.6.53)}$$

$$\begin{aligned} L_1\widetilde{y}_4 &= \lambda L_{10}\widetilde{y}_4 + L_{11}\widetilde{y}_4 \\ &= \lambda[o] + \lambda[o] \\ &= \lambda[o] \end{aligned} \qquad \text{(III.6.54)}$$

$$\begin{aligned} L_2\widetilde{y}_1 &= \lambda L_{20}\widetilde{y}_1 + L_{21}\widetilde{y}_1 \\ &= \lambda[o] + \lambda\omega_1[o] \\ &= \lambda[o] \end{aligned} \qquad \text{(III.6.55)}$$

$$L_2\tilde{y}_2 = \lambda L_{20}\tilde{y}_2 + L_{21}\tilde{y}_2$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_1}[o] + \lambda e^{\lambda\omega_1}[o]$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_1}[o] \tag{III.6.56}$$

$$L_2\tilde{y}_3 = \lambda L_{20}\tilde{y}_3 + L_{21}\tilde{y}_3$$

$$= \lambda([\alpha_{20}] + [\beta_{20}]e^{\lambda\omega_2} + \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{\lambda\omega_2 x_{2q}}) +$$

$$+ \lambda\omega_2([\alpha_{21}] + [\beta_{21}]e^{\lambda\omega_2} + \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{\lambda\omega_2 x_{2q}})$$

$$= \lambda([\alpha_{20} + \omega_2\alpha_{21}] + [\beta_{20} + \omega_2\beta_{21}]e^{\lambda\omega_2} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{\lambda\omega_2 x_{2q}}) \tag{III.6.57}$$

$$L_2\tilde{y}_4 = \lambda L_{20}\tilde{y}_4 + L_{21}\tilde{y}_4$$

$$+ \lambda([\alpha_{20}] + [\beta_{20}]e^{-\lambda\omega_2} + \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{-\lambda\omega_2 x_{2q}}) -$$

$$- \lambda\omega_2([\alpha_{21}] + [\beta_{21}]e^{-\lambda\omega_2} + \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{-\lambda\omega_2 x_{2q}})$$

$$= \lambda([\alpha_{20} - \omega_2\alpha_{21}] + [\beta_{20} - \omega_2\beta_{21}]e^{-\lambda\omega_2} +$$

$$+ (1-\omega_2)\sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{-\lambda\omega_2 x_{2q}} \tag{III.6.58}$$

$$L_3\tilde{y}_1 = \lambda L_{30}\tilde{y}_1 + L_{31}\tilde{y}_1$$

$$= \lambda[\delta_{10}] + \lambda\omega_1[\delta_{11}]$$

$$= \lambda[\delta_{10} + \omega_1\delta_{11}] \tag{III.6.59}$$

$$L_3\widetilde{y}_2 = \lambda L_{30}\widetilde{y}_2 + L_{31}\widetilde{y}_2$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_1}[o] - \lambda\omega_1 e^{\lambda\omega_1}[o]$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_1}[o] \qquad \text{(III.6.60)}$$

$$L_3\widetilde{y}_3 = \lambda L_{30}\widetilde{y}_3 + L_{31}\widetilde{y}_3$$

$$= \lambda([\gamma_{10}] + e^{\lambda\omega_2}[o]) + \lambda\omega_2([\gamma_{11}] + e^{\lambda\omega_2}[o])$$

$$= \lambda([\gamma_{10} + \omega_2\gamma_{11}] + e^{\lambda\omega_2}[o]) \qquad \text{(III.6.61)}$$

$$L_3\widetilde{y}_4 = \lambda L_{30}\widetilde{y}_4 + L_{31}\widetilde{y}_4$$

$$= \lambda[\gamma_{10}] - \lambda\omega_2[\gamma_{11}]$$

$$= \lambda([\gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11}]) \qquad \text{(III.6.62)}$$

$$L_4\widetilde{y}_1 = \lambda L_{40}\widetilde{y}_1 + L_{41}\widetilde{y}_1$$

$$= \lambda[\delta_{20}] + \lambda\omega_1[\delta_{21}]$$

$$= \lambda[\delta_{20} + \omega_1\delta_{21}] \qquad \text{(III.6.63)}$$

$$L_4\widetilde{y}_2 = \lambda L_{40}\widetilde{y}_2 + L_{41}\widetilde{y}_2$$

$$= (\lambda[o] - \lambda\omega_1[o]e^{\lambda\omega_1}$$

$$= \lambda e^{\lambda\omega_1}[o] \qquad \text{(III.6.64)}$$

$$L_4\widetilde{y}_3 = \lambda L_{40}\widetilde{y}_3 + L_{41}\widetilde{y}_3$$

$$= \lambda([\gamma_{20}] + e^{\lambda\omega_2}[o]) + \lambda\omega_2([\gamma_{21}] + e^{\lambda\omega_2}[o])$$

$$= \lambda([\gamma_{20} + \omega_2\gamma_{21}] + e^{\lambda\omega_2}[o]) \qquad \text{(III.6.65)}$$

$$L_4\widetilde{y}_4 = \lambda L_{40}\widetilde{y}_4 + L_{41}\widetilde{y}_4$$

$$= \lambda[\gamma_{20}] - \lambda\omega_2[\gamma_{21}]$$

$$= \lambda([\gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21}]) \qquad \text{(III.6.66)}$$

Bu asimptotik formüllerden verilen sınır değer problemlerinin karakteristik denkleminin asimptotiğini bulmak için ileride faydalanacağız. Daha sonra karakteristik denklemin asimptotik ifadesinden özdeğerlerin asimptotiğini elde edeceğiz.
Elde ettiğimiz bu sonuçları teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem (III.6.1)

$T_{\upsilon k}: W_q^k(-1,0) \oplus W_q^k(0,1) \to \mathbf{C} \qquad (\nu=1,2,3,4,\ k=0,1)$

lineer fonksiyonelleri sürekli ise $\arg a_1 \neq \arg a_2$ olduğunda kompleks düzlemin bölünmüş olduğu Ω sektörlerinde ($\Omega_0^{(2)}$ ve $\Omega_0^{(1)}$ için) $L_\upsilon \tilde{y}_i$ sınır değer ifadeleri için (III.6.19)-(III.6.34) ve (III.6.51)-(III.6.66) asimptotik eşitlikleri gerçeklenir.

III.7 Ω Sektöründe Karakteristik Determinantın Asimptotiği

Bu kısımda araştırdığımız sınır değer probleminin karakteristik determinantı dediğimizde (III.2.7) denkleminin (III.3.2) genel çözümünün (III.2.8) sınır şartlarında yerine yazılmasıyla elde edilen lineer denklem sisteminin

$$\Delta(\lambda) = \det(L_\upsilon \tilde{y}_i) \qquad \text{(III.7.1)}$$

determinantını düşüneceğiz. III.6. kesimde $L_\upsilon \tilde{y}_i$ ler için elde ettiğimiz (III.6.19)-(III.6.34) asimptotik ifadelerini (III.7.1) de yerine yazarak her satırdan λ ortak çarpanını ikinci sütunundan $e^{\lambda\omega_1}$ ortak çarpanını üçüncü sütunundan ise $e^{\lambda\omega_2}$ ortak çarpanını dışarı aldıktan sonra elde edilen determinant aşağıdaki şekilde yazıldığı gibidir.

$$\Delta(\lambda) =$$

$$= \lambda^4 e^{(\lambda\omega_1 + \lambda\omega_2)} \begin{vmatrix} = [\alpha_{10} + \omega_1\alpha_{11}] e^{-\lambda\omega_1} + [\beta_{10} + \omega_1\beta_{11}] + (1+\omega_1)\sum_{q=1}^{N_1} [\eta_q] e^{\lambda\omega_1 x_{1q}} & [\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11}] + [\beta_{10} - \omega_1\beta_{11}]^{-\lambda\omega_1} + (1-\omega_1)\sum_{q=1}^{N_1} [\eta_q] e^{-\lambda\omega_1(1+x_{1q})} & [o] & [o] \\ [o] & [o] & [\beta_{20} + \omega_2\beta_{21}] & [\alpha_{20} - \omega_2\alpha_{21}] \\ [\delta_{10} + \omega_1\delta_{11}] & [\delta_{10} - \omega_1\delta_{11}] e^{-\lambda\omega_1} + [o] & [o] & [\gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11}] \\ [\delta_{20} + \omega_1\delta_{21}] & [\delta_{20} - \omega_2\delta_{21}]^{-\lambda\omega_1} + [o] & [o] & [\gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21}] \end{vmatrix} \qquad \text{(III.7.2)}$$

(III.7.2) determinantını açarak asimptotik ifadelerin özelliklerinden yararlanarak $e^{\lambda\omega_1}$ ifadesinin reel kuvvetlerine göre düzenlersek aşağıdaki bu determinantı aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} \left([A_1] e^{m_1\lambda\omega_1} + [A_2] e^{m_2\lambda\omega_1} + \ldots + [A_{s-1}] e^{m_{s-1}\lambda\omega_1} + [A_s]\, e^{m_s\lambda\omega_1} \right) \qquad \text{(III.7.3)}$$

Burada, s herhangi bir doğal sayıdır. (Hangi sayı olduğu araştırdığımız konu açısından önemli değildir) $m_1, m_2, \ldots, m_s$ ler $-2 = m_1 < m_2 < \ldots < m_{s-1} < m_s = 0$ şartını sağlayan reel sayılardır,

$A_1(\lambda), A_2(\lambda), \ldots, A_s(\lambda)$ ise λ kompleks değişkenin analitik fonksiyonları olup

$A_i(\lambda) = A_i + o(1) = [A_i]$, $i=1,2,\ldots,s$ şeklinde ifade edilmektedir.

Şimdi A_1 ve A_s kompleks sayılarını hesaplayalım. (A_2, $A_3, \ldots,$ A_{s-1} değerleri incelediğimiz konu açısından önemli olmadığı için bu sayıların araştırdığımız sınır değer probleminin katsayıları cinsinden ifadesini hesaplamayacağız.) (III,7,2) den determinantın bilinen özelliklerinden faydalanarak A_1 ve A_s için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu direkt hesaplamalarla ıspatlayabiliriz.

$$A_1 = (\alpha_{10} + \omega_1\alpha_{11})(\beta_{20} + \omega_2\beta_{21})\begin{vmatrix} \delta_{10} - \omega_1\delta_{11} & \gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11} \\ \delta_{20} - \omega_1\delta_{21} & \gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21} \end{vmatrix} \tag{III.7.4}$$

$$A_s = (\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11})(\beta_{20} + \omega_2\beta_{21})\begin{vmatrix} \delta_{10} + \omega_1\delta_{11} & \gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11} \\ \delta_{20} + \omega_1\delta_{21} & \gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21} \end{vmatrix} \tag{III.7.5}$$

Böylece $\Omega^{(2)}$ sektörlerinden biri olan $\Omega_0^{(2)}$ sektöründe $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantını asimptotik kuazipolinom şeklinde ifade ettik ve bu kuazipolinomun ilk ve son katsayılarının asimptotik değerlerini, araştırdığımız sınır değer probleminin katsayılarının cebirsel ifadesi şeklinde bulmuş olduk.

Aynı yöntemle $\Omega^{(1)}$ sektörlerinde de $\Delta(\lambda)$ karakteristik deretminantını asimptotik kuazipolinom şeklinde ifade edebiliriz. Örneğin $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_2 \geq 0$, $\mathrm{Re}\lambda\omega_1 \to +\infty$ $(\lambda \to \infty)$ şartlarının sağlandığı $\Omega_0^{(1)}$ sektöründe $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantı asimptotik olarak $\Delta(\lambda)=\lambda^4\Delta_0(\lambda)$ olmak üzere

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} [\beta_{10} + \omega_1\beta_{11}] & [\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11}]e^{\lambda\omega_1} & [o]e^{\lambda\omega_2} & [o] \\ [o] & [o]e^{\lambda\omega_1} & [\alpha_{20} + \omega_2\alpha_{21}] + [\beta_{20} + \omega_2\beta_{21}]e^{\lambda\omega_2} + \sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{\lambda\omega_2 x_{2q}} & [\alpha_{20} - \omega_2\alpha_{21}] + [\beta_{20} - \omega_2\beta_{21}]e^{-\lambda\omega_2} + (1-\omega_2)\sum_{q=1}^{N_2}[\eta_{2q}]e^{-\lambda\omega_2 x_{2q}} \\ [\delta_{10} + \omega_1\delta_{11}] & [o]e^{\lambda\omega_1} & [\gamma_{10} + \omega_2\gamma_{11}] + [o]e^{\lambda\omega_2} & [\gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11}] \\ [\delta_{20} + \omega_1\delta_{21}] & [o]e^{\lambda\omega_1} & [\gamma_{20} + \omega_2\gamma_{21}] + [o]e^{\lambda\omega_2} & [\gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21}] \end{vmatrix} \tag{III.7.6}$$

şeklinde elde edilir.

Bu durumda da $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantı

$$B_1 = (\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11})(\beta_{20} - \omega_2\beta_{21})\begin{vmatrix} \delta_{10} + \omega_1\delta_{11} & \gamma_{10} + \omega_2\gamma_{11} \\ \delta_{20} + \omega_1\delta_{21} & \gamma_{20} + \omega_2\gamma_{21} \end{vmatrix} \tag{III.7.7}$$

$$B_t = (\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11})(\beta_{20} + \omega_2\beta_{21})\begin{vmatrix} \delta_{10} + \omega_1\delta_{11} & \gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11} \\ \delta_{20} + \omega_1\delta_{21} & \gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21} \end{vmatrix} \tag{III.7.8}$$

$-2=k_1<k_2<,\ldots,<k_{t-1}<0$ olmak üzere

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}([B_1]e^{k_1\lambda\omega_2} + ([B_2]e^{k_2\lambda\omega_2} + \ldots + ([B_{t-1}]e^{k_{t-1}\lambda\omega_2} + [B_t]) \tag{III.7.9}$$

gibi asimptotik kuazipolinom şeklinde yazılabilir.

Teorem III.7.1 (III.2.7)-(III.2.8) sınırdeğer probleminin karakteristik determinantı her bir Ω sektöründe $-2=m_1<m_2<\ldots<m_k=0$ olmak üzere asimtotik olarak

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}([M_1]e^{m_1\lambda\omega_i} + [M_2]e^{m_2\lambda\omega_i} + \ldots + [M_k]e^{m_k\lambda\omega_i}) \quad i=1,2 \tag{III.7.10}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada $M_1, M_2,\ldots,M_k$ kompleks sayıları (III.2.7)-(III.2.8) probleminin katsayıları cinsinden yazılabilen her hangi cebirsel ifadelerdir. Birinci ve sonuncu katsayı olan M_1 ve M_k sayıları ise

$$(\alpha_{10} + \omega^{(1)}\alpha_{11})(\beta_{20} + \omega^{(2)}\beta_{21})\begin{vmatrix} \delta_{10} + \omega^{(1)}\delta_{11} & \gamma_{10} + \omega^{(2)}\gamma_{11} \\ \delta_{20} + \omega^{(1)}\delta_{21} & \gamma_{20} + \omega^{(2)}\gamma_{21} \end{vmatrix} \tag{III.7.11}$$

şeklinde ifade edilebilir, öyle ki her bir toplama işleminde $\omega^{(1)}$ ile ω_1 ve $-\omega_1$ sayılarından her hangi biri $\omega^{(2)}$ ile de ω_2 ve $-\omega_2$ sayılarından her hangi biri gösterilmiştir.

Not: Bu teorem $\Omega^{(1)}$ ve $\Omega^{(2)}$ sektörler sisteminin her birinin bir elemanı için yukarıda ispatlanmıştır. Bu sektörler sistemlerinin diğer elemanlar için tamamen benzer şekilde ispatlanır.

III.8. Özdeğerlerin Asimptotiği

Bu kesimde (III.2.7)-(III.2.8) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotiğini bulacağız.

Teorem III.8.1 (III.2.7)-(III.2.8) sınır değer problemi için aşağıdaki şartların gerçeklendiğini kabul edelim.

1. $\arg a_1 \neq \arg a_2$;

2. $c(x) \in Lq(-1,1)$, $q \geq 1$

3. $\sqrt{a_1}\alpha_{10} \pm \alpha_{11} \neq 0$,

$$\sqrt{a_2}\beta_{20} \pm \beta_{21} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{a_1}\delta_{10} \pm \delta_{11} & \sqrt{a_2}\gamma_{10} + \gamma_{11} \\ \sqrt{a_1}\delta_{20} \pm \delta_{21} & \sqrt{a_2}\gamma_{20} + \gamma_{21} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{a_1}\delta_{10} \pm \delta_{11} & \sqrt{a_2}\gamma_{10} - \gamma_{11} \\ \sqrt{a_1}\delta_{20} \pm \delta_{21} & \sqrt{a_2}\gamma_{20} - \gamma_{21} \end{vmatrix} \neq 0$$

4. $T_{\nu k}$, $\nu=1,2,3,4$; $k=1,2$ fonksiyonelleri $W_q^k(-1,0) \oplus W_q^k(0,1)$ uzayında sürekli fonksiyonellerdir.

Bu halde (III.2.7)-(III.2.8) sınır değer probleminin sepektrumu diskrettir ve özdeğerleri aşağıdaki asimptotiklere sahip olan iki diziden oluşmaktadır.

$$\lambda_{n,1} = \sqrt{a_1}\pi n i(1 + O(\frac{1}{n})), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(III.8.1)}$$

$$\lambda_{n,2} = \sqrt{a_2}\pi n i(1 + O(\frac{1}{n})), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(III.8.2)}$$

İspat (III.2.7) denkleminin genel çözümü için elde ettiğimiz (III.3.2) formülünü (III.1.2)-(III.1.5) fonksiyonel çok noktalı sınır şartlarında yerine yazarsak, c_i, $i = \overline{1,4}$ değişkenlerine göre

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} c_i (L_\upsilon \tilde{y}_i)(\lambda) = 0 \\ \upsilon = \overline{1,4} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. O halde bölüm I de gösterdiğimiz gibi özdeğerler ancak ve ancak

$$\Delta(\lambda) = \det\{(L_\upsilon \tilde{y}_i)(\lambda)\}_{i,\upsilon=\overline{1,4}} \tag{III.8.3}$$

karakteristik determinantının sıfır yerlerinden, yani

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(L_\upsilon \tilde{y}_i)(\lambda) = 0 \tag{III.8.4}$$

denkleminin köklerinden ibarettir.

Teorem III.7.1 gereği sonuncu denklem her bir $\Omega^{(2)}$ sektöründe

$-2=m_1<m_2<,\dots,<m_k=0$ ve M_1 ve M_k kompleks sayıları ise (III.7.11) şeklinde olmak üzere

$$\Delta_1(\lambda) \equiv [M_1]e^{m_1\lambda\omega_1} + [M_2]e^{m_2\lambda\omega_1} + \dots + [M_k]e^{m_k\lambda\omega_1} = 0 \tag{III.8.5}$$

şeklinde bir denklem ile , $\Omega^{(1)}$ sektörlerinin her birinde ise

$-2=n_1<n_2<,\dots,<n_l=0$ ve N_1 ve N_l kompleks sayıları (III.7.11) şeklinde olmak üzere

$$\Delta_2(\lambda) \equiv [N_1]e^{n_1\lambda\omega_2} + [N_2]e^{n_2\lambda\omega_2} + \dots + [N_l]e^{n_l\lambda\omega_2} = 0 \tag{III.8.6}$$

gibi bir denklem ile eşdeğerdir. Teoremin üçüncü şartı gereği birinci ve sonuncu katsayılar olan M_1, M_k, N_1 ve N_l kompleks sayıları sıfırdan farklıdırlar. O halde Teorem I.6.2 gereği öyle $h>0$ sayısı vardır ki, $|\mathrm{Re}\lambda\omega_i| \geq h$ olduğunda $\Delta_i(\lambda) \neq 0$ $(i=1,2)$ dir. Demek ki, (III.8.5) ve (III.8.6) denklemlerinin bütün kökleri

$$\Pi_i=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid |\mathrm{Re}\lambda\omega_i|<h\},\qquad i=1,2$$

şeritlerinin içerisinde kalırlar. $c\in\mathbf{C}$ kompleks sayısını öyle seçelim ki, Π_i şeridi kompleks düzlemin d_i doğrusu ile ayrılan iki yarıdüzlemin birinde yerleşsin (i=1,2) Bu durumda yeteri kadar büyük r>0 için

$$\Pi_i^+=\{\lambda\in\Pi_i \mid \mathrm{Im}\lambda\omega_i>r\}\quad \text{ve}$$

$$\Pi_i^-=\{\lambda\in\Pi_i \mid \mathrm{Im}\lambda\omega_i<-r\}$$

yırım-şeritlerinin her biri $\Omega^{(i)}$ sektörlerinin birinde yerleşecektir. O halde Teorem I.6.2 gereğince $\Pi_i^{\pm}$ yarım şeritlerinin her birinde $\Delta_i(\lambda)$ fonksiyonunun sayılabilir sayıda kökü bulunur ve bu kökleri uygun şekilde sıralayarak $\lambda_{\pm n,i}$ i=1,2 n=1,2,...gibi gösterirsek

$$|\omega_i\lambda_{\pm n,i}|=\pi n(1+O(\frac{1}{n})),\qquad i=1,2 \tag{III.8.7}$$

asimptotik formülleri elde edilmektedir.

Diğer taraftan

$$|\mathrm{Re}(\omega_i\lambda_{\pm n,i})|\le h,\qquad i=1,2 \tag{III.8.8}$$

eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz. (III.8.7) ve (III.8.8) formüllerinden

$$\omega_i\lambda_{\pm n,i}=\pi ni(1+O(\frac{1}{n})) \tag{III.8.9}$$

formülü ve buradan da özdeğerler için

$$\lambda_{n,1}=\sqrt{a_1}\,\pi ni(1+O(\frac{1}{n})),\qquad n=\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\lambda_{n,2}=\sqrt{a_2}\,\pi ni(1+O(\frac{1}{n})),\qquad n=\pm1,\pm2,\ldots$$

asimptotik formülleri elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM IV

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVİN KATSAYI FONKSİYONUNUN DEĞERLERİNİN ARGUMENTLERİ EŞİT OLDUĞU DURUMDA ÖZDEĞERLERİN ASİMPTOTİĞİ

Bu bölümde (III.2.7), (III.2.8) sınır değer problemi için $\arg a_1=\arg a_2$ hali araştırılacaktır. Bu halde özdeğerler için Bölüm III de elde edilen iki tane asimptotik formül yerine tek bir asimptotik formül bulunacaktır.

IV.1 Kompleks düzlemin $\arg a_1 = \arg a_2$ halinde iki tane yarı-düzleme Bölünmesi

$\arg a_1=\arg a_2$ olduğu durumda kompleks düzlemi Bölüm III deki gibi sekiz tane değil de sadece iki bölgeye ayıracağız.

Bu durumda,

$l_1=\{\lambda\in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\lambda\omega_1=0\}$ ve

$l_2=\{\lambda\in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\lambda\omega_2=0\}$

doğrularının çakıştığı açıktır. Bu tek doğruyu l ile gösterelim. $c\in\mathbf{C}$ keyfi kompleks sayı olmak üzere (ileride özel olarak seçeceğiz)

$$d=l-c=\{\lambda-c \mid \lambda\in l\}$$

doğrusunu gözönüne alalım. d doğrusu kompleks düzlemi iki tane yarı-düzleme ayırmaktadır. Bu yarı-düzlemlerin her birinde $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_1$ ve $\mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_2$

fonksiyonları işaretlerini korurlar ve aynı işarete sahiptirler. $Re(\lambda+c)\omega_1 \geq 0$ ve $Re(\lambda+c)\omega_2 \geq 0$ şartlarının sağlandığı yarı-düzlemi Σ^{+} ile, $Re(\lambda+c)\omega_1 \leq 0$ ve $Re(\lambda+c)\omega_2 \leq 0$ şartlarının sağlandığı yarı-düzlemi ise Σ^{-} ile gösterelim $\Sigma^{\pm}$ yarı-düzlemlerinin her birinde (III.2.7) denkleminin (III.3.1) asimptotik formülleri ile verilen dört tane lineer bağımsız çözümünün bulunduğu ve genel çözümünün (III.3.2) formülü ile verildiği Bölüm III de ispatlanmıştır.

IV.2. Σ Yarı-düzlemlerinde Sınır Fonksiyonellerinin Asimptotiği

Bundan sonraki araştırmalarımızı $\Sigma^{\pm}$ yarı-düzlemlerinin sadece bir tanesi için yapacağız. Diğer yarı-düzlemdeki araştırmalar tamamen benzer şekilde yapılabilecektir.

Şimdi

$(T_{\upsilon k}\tilde{y}_i)(\lambda)$

fonksiyonlarının $\lambda \subset \Sigma^{-}$, $\lambda \to \infty$ olduğunda asimptotiğini bulalım. (III.5.1) formülü gereğince aşağıdaki asimptotik ifadeleri elde ederiz.

$$(T_{\upsilon k}\tilde{y}_1)(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \int_{-1}^{1} \frac{d^i \tilde{y}_1(x,\lambda)}{dx^i} z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_{-1}^{0} (\lambda\omega_1)^i e^{\lambda\omega_1 x}(1 + O(\frac{1}{\lambda}))z_{\upsilon ki}(x)dx$$

Burada $x = t-1$ dönüşümünü yapar ve Yardımcı önerme I.7.1 i uygularsak

$$(T_{\nu k}\widetilde{y}_1)(\lambda) = \sum_{i=0}^{k}(\lambda\omega_1)^i\int_0^1 e^{\lambda\omega_1(t-1)}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\nu ki}(t-1)dt =$$

$$=(\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1}\sum_{i=0}^{k}(\lambda\omega_1)^{i-k}\int_0^1 e^{\lambda\omega_1 t}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\nu ki}(t-1)dt =$$

$$=(\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1}\sum_{i=0}^{k}(\lambda\omega_1)^{i-k}[o] =$$

$$=(\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1}[o], \quad \lambda\in\Sigma^-, \quad \lambda\to\infty \qquad \text{(IV.2.1)}$$

benzer şekilde

$$(T_{\nu k}\widetilde{y}_2)(\lambda) = \sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{1}\frac{d^i\widetilde{y}_2(x,\lambda)}{dx^i}z_{\nu ki}(x)dx =$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{0}(-\lambda\omega_1)^i e^{-\lambda x\omega_1}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\nu ki}(x)dx =$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-\lambda\omega_1)^i\int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\nu ki}(-x)dx =$$

$$=(-\lambda\omega_1)^k\sum_{i=0}^{k}(-\lambda\omega_1)^{i-k}[o] =$$

$$=(-\lambda\omega_1)^k[o] \qquad \text{(IV.2.2)}$$

$$(T_{\nu k}\widetilde{y}_3)(\lambda) = \sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{1}\frac{d^i\widetilde{y}_3(x,\lambda)}{dx^i}z_{\nu ki}(x)dx =$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\int_{0}^{1}(\lambda\omega_2)^i e^{\lambda\omega_2 x}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\nu ki}(x)dx =$$

$$=(\lambda\omega_2)^k\sum_{i=0}^{k}(\lambda\omega_2)^{i-k}\int_0^1 e^{\lambda\omega_2 x}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\nu ki}(x)dx =$$

$$=(\lambda\omega_2)^k[o] \qquad \text{(IV.2.3)}$$

$$(T_{\upsilon k}\widetilde{y}_4)(\lambda) = \sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{1}\frac{d^i\widetilde{y}_4(x,\lambda)}{dx^i}z_{\upsilon ki}(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\int_{-1}^{0}(-\lambda\omega_2)^i e^{-\lambda\omega_2 x}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\upsilon ki}(x)dx =$$

$$= (-\lambda\omega_2)^k \sum_{i=0}^{k}(-\lambda\omega_2)^{i-k}\int_0^1 e^{-\lambda\omega_2 x}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\upsilon ki}(x)dx$$

burada x=1-t dönüşümünü yapalım.

$$(T_{\upsilon k}\widetilde{y}_4)(\lambda) = (-\lambda\omega_2)^k \sum_{i=0}^{k}(-\lambda\omega_2)^{i-k}\int_0^1 e^{-\lambda\omega_2(1-t)}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\upsilon ki}(1-t)dt =$$

$$= (-\lambda\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2} \sum_{i=0}^{k}(-\lambda\omega_2)^{i-k}\int_0^1 e^{\lambda\omega_2 t}(1+O(\frac{1}{\lambda}))z_{\upsilon ki}(1-t)dt =$$

$$= (-\lambda\omega_2)e^{-\lambda\omega_2}[o] \qquad \text{(IV.2.4)}$$

Aynı yöntemle Σ^+ yarı-düzleminde de $(T_{\upsilon k}\widetilde{y}_i)(\lambda)$ fonksiyonlarının aşağıdaki asimptotik ifadeleri bulunur.

$$(T_{\upsilon k}\widetilde{y}_1)(\lambda) = (\lambda\omega_1)^k[o] \qquad \text{(IV.2.5)}$$

$$(T_{\upsilon k}\widetilde{y}_2)(\lambda) = (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[o] \qquad \text{(IV.2.6)}$$

$$(T_{\upsilon k}\widetilde{y}_3)(\lambda) = (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[o] \qquad \text{(IV.2.7)}$$

$$(T_{\upsilon k}\widetilde{y}_4)(\lambda) = (\lambda\omega_2)^k[o] \qquad \text{(IV.2.8)}$$

Elde ettiğimiz sonuçları teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem IV.2.1 $T_{\nu k}$: $W_q^k(-1,0)\oplus W_q^k(0,1)\to \mathbf{C}$ (ν=1,2,3,4, k=1,2, q≥1) fonksiyonelleri sürekli olduğunda $\Sigma^{\pm}$ yarı-düzlemlerinde (IV.2.1)-(IV.2.8) asimptotik formüller gerçeklenir.

IV.3 $\Sigma^{\pm}$ Yarı-düzlemlerinde Sınır Değer İfadelerin Asimptotiği

yukarıda elde ettiğimiz (IV.2.1)-(IV.2.8) asimptotik formüllerinden faydalanarak (III.3.1) ifadelerini (III.6.1) de ve buradan elde ettiğimiz sonuçları da (III.1.2)-(III.1.5) eşitliklerinde yerine yazarsak $L_{\upsilon}\widetilde{y}_i$ sınır değer ifadelerinin $\lambda \in \Sigma^{\pm}$, $\lambda \to \infty$ olduğunda asimptotiğini bulalım. Önce $\lambda \in \Sigma^{-}$ halini inceleyelim. Bu durumda aşağıdaki formüller elde edilir.

$$L_1\widetilde{y}_1 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\alpha_{1k}\widetilde{y}_1^{(k)}(-1) + \beta_{1k}\widetilde{y}_1^{(k)}(-0) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_1} \eta_{1qk}\widetilde{y}_1^{(k)}(x_{1qk}) + T_{1k}\widetilde{y}_1)$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} ([\alpha_{1k}](\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1} + [\beta_{1k}](\lambda\omega_1)^k +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_1} [\eta_{1qk}](\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1 x_{1qk}} + (\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1}[o]) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda\omega_1} \sum_{k=0}^{1} \omega^k ([\alpha_{1k}] + [\beta_{1k}]e^{\lambda\omega_1} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_1} [\eta_{1qk}]e^{\lambda\omega_1(x_{1qk}+1)} + [o]) \qquad \text{(IV.3.1)}$$

$$L_1\widetilde{y}_2 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\alpha_{1k}\widetilde{y}_2^{(k)}(-1) + \beta_{1k}\widetilde{y}_2^{(k)}(-0) +$$

$$+\sum_{q=1}^{N_1} \eta_{1qk}\widetilde{y}_2^{(k)}(x_{1qk}) + T_{1k}\widetilde{y}_2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} ([\alpha_{1k}](-\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1} + [\beta_{1k}](-\lambda\omega_1)^k +$$

$$+\sum_{q=1}^{N_1} [\eta_{1qk}](-\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1 x_{1qk}} + (-\lambda\omega_1)^k [o]) =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{1} (-\omega_1)^k ([\alpha_{1k}]e^{\lambda\omega_1} + [\beta_{1k}] + + \sum_{q=1}^{N_1} [\eta_{1qk}]e^{\lambda\omega_1 |x_{1qk}|} + [o]) \tag{IV.3.2}$$

$$L_1\widetilde{y}_3 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} T_{1k}\widetilde{y}_3)$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} \lambda^k [o] =$$

$$= \lambda\ [o] \tag{IV.3.3}$$

$$L_1\widetilde{y}_4 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} T_{1k}'\widetilde{y}_4$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} \lambda^k e^{-\lambda\omega_2} [o] =$$

$$= \lambda\ e^{-\lambda\omega_2} [o] \tag{IV.3.4}$$

$$L_2\widetilde{y}_1 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} T_{2k}\widetilde{y}_1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} \lambda^k e^{-\lambda\omega_1} [o] =$$

$$= \lambda\ e^{-\lambda\omega_1} [o] \tag{IV.3.5}$$

$$L_2\tilde{y}_2 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} T_{2k} \tilde{y}_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} \lambda^{k} [o] =$$

$$= \lambda [o] \qquad \text{(IV.3.6)}$$

$$L_2\tilde{y}_3 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\alpha_{2k} \tilde{y}_3^{(k)}(+0) + \beta_{2k} \tilde{y}_3^{(k)}(+1) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_2} \eta_{2qk} \tilde{y}_3^{(k)}(x_{2qk}) + T_{2k}\tilde{y}_3) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} ([\alpha_{2k}](\lambda\omega_2)^k + [\beta_{2k}](\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_2} [\eta_{2qk}](\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2 x_{2qk}} + \lambda^k [o]) =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{1} (\omega_2)^k ([\alpha_{2k}] + [\beta_{2k}] e^{\lambda\omega_2} + \sum_{q=1}^{N_2} [\eta_{2qk}] e^{\lambda\omega_2 x_{2qk}} + [o]) \qquad \text{(IV.3.7)}$$

$$L_2\tilde{y}_4 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} ([\alpha_{2k}](-\lambda\omega_2)^k + [\beta_{2k}](-\lambda\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_2} [\eta_{2qk}](-\lambda\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2 x_{2qk}} + \lambda^k e^{-\lambda\omega_2} [o]) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda\omega_2} \sum_{k=0}^{1} (-\omega_2)^k ([\alpha_{2k}] e^{\lambda\omega_2} + [\beta_{2k}] + \sum_{q=1}^{N_2} [\eta_{2qk}] e^{\lambda\omega_2 (1 - x_{2qk})} + [o]) \qquad \text{(IV.3.8)}$$

$$L_3\tilde{y}_1 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\delta_{1k}\tilde{y}_1^{(k)}(-0) + \gamma_{1k}\tilde{y}_1^{(k)}(+0) + T_{3k}\tilde{y}_1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} ([\delta_{1k}](\lambda\omega_1)^k + \lambda^k e^{-\lambda\omega_1}[o]) =$$

$$\lambda \sum_{k=0}^{1} \omega_1{}^k ([\delta_{1k}] + e^{-\lambda\omega_1}[o]) = \lambda[\delta_{10} + \omega_1\delta_{11}] + e^{-\lambda\omega_1}[o] \qquad \text{(IV.3.9)}$$

$$L_3\tilde{y}_2 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} ([\delta_{1k}](-\lambda\omega_1)^k + T_{3k}\tilde{y}_2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} ([\delta_{1k}](-\lambda\omega_1)^k + \lambda^k[o]) =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{1} (-\omega_1)^k ([\delta_{1k}] + [o]) =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{1} (-\omega_1)^k [\delta_{1k}] =$$

$$= \lambda[\delta_{10} - \omega_1\delta_{11}] = \qquad \text{(IV.3.10)}$$

$$L_3\tilde{y}_3 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\delta_{1k}\tilde{y}_3^{(k)}(-0) + \gamma_{1k}\tilde{y}_3^{(k)}(+0) + T_{3k}\tilde{y}_3) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\gamma_{1k}\tilde{y}_3^{(k)}(+0) + T_{3k}\tilde{y}_3) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} ([\gamma_{1k}](\lambda\omega_2)^k + (\lambda\omega_2)^k[o]) =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{1} \omega_2{}^k [\gamma_{1k}] =$$

$$= \lambda[\gamma_{10} + \omega_2\gamma_{11}] \qquad \text{(IV.3.11)}$$

$$L_3\widetilde{y}_4 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k}(\gamma_{1k}\widetilde{y}_4^{(k)}(+0) + T_{3k}\widetilde{y}_4) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k}([\gamma_{1k}](-\lambda\omega_2)^k + (-\lambda\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2}[o]) \doteq$$

$$= \lambda\sum_{k=0}^{1} (-\omega_2)^k([\gamma_{1k}] + e^{-\lambda\omega_2}[o]) = \lambda[\gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11}] + \lambda e^{-\lambda\omega_2}[o] \qquad \text{(IV.3.12)}$$

L_3y ve L_4y sınır değer ifadeleri aynı şekilde olduğu için $(L_4\widetilde{y}_i)$ (λ) fonksiyonlarının asimptotiğini ayrıca hesaplamadan da $(L_3\widetilde{y}_i)$ (λ) fonksiyonları için yukarıda elde ettiğimiz formüllerde katsayıların birinci indisi olan 1 yerine 2 yazmak yeterli olacaktır. Buna göre $\lambda \in \Sigma^-$, $\lambda \to \infty$ olduğunda $(L_4\widetilde{y}_i)$ fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik ifadeler doğrudan yazılabilecektir.

$$L_4\widetilde{y}_1 = \lambda[\delta_{20} + \omega_1\delta_{21}] + \lambda e^{-\lambda\omega_1}[o] \qquad \text{(IV..3.13)}$$

$$L_4\widetilde{y}_2 = \lambda[\delta_{20} - \omega_1\delta_{21}] \qquad \text{(IV.3.14)}$$

$$L_4\widetilde{y}_3 = \lambda[\gamma_{20} + \omega_2\gamma_{21}] \qquad \text{(IV.3.15)}$$

$$L_4\widetilde{y}_4 = \lambda[\gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21}] + \lambda e^{-\lambda\omega_2}[o] \qquad \text{(IV.3.16)}$$

Şimdi ise Σ^+ yarı-düzleminde $(L_\upsilon\widetilde{y}_i)(\lambda)$ fonksiyonlarının $\lambda \to \infty$ olduğunda asimptotik ifadelerini bulalım.

Bu halde Σ^- yarı-düzlemi için yukarıda yaptığımız araştırmalardan farklı olacak şekilde $(T_{\upsilon k}\widetilde{y}_i)(\lambda)$ ifadeleri için, kullandığımız (IV.2.1)-(IV.2.4) asimptotik formülleri yerine Σ^+ yarı-düzlemi için (IV.2.5)-(IV.2.8) formüllerinden faydalanacağız.

Bunu dikkate alarak (IV.3.1)-(IV.3.16) formülleri üzerinde gerekli düzenlemeleri yaparak $(L_{\upsilon}\widetilde{y}_i)(\lambda)$ fonksiyonları için $\lambda \in \Sigma^+$, $\lambda \to \infty$ olduğunda aşağıdaki formülleri buluruz.

$$L_1\widetilde{y}_1 = \lambda e^{-\lambda\omega_1} \sum_{k=0}^{1} \omega_1{}^k ([\alpha_{1k}] + [\beta_{1k}]e^{\lambda\omega_1} + \sum_{q=1}^{N_1} [\eta_{1qk}]e^{\lambda\omega_1(x_{1qk}+1)} + e^{\lambda\omega_1}[o]) \quad \text{(IV.3.17)}$$

$$L_1\widetilde{y}_2 = \lambda \sum_{k=0}^{1} (-\omega_1)^k ([\alpha_{1k}]e^{\lambda\omega_1} + [\beta_{1k}] + \sum_{q=1}^{N_1} [\eta_{1qk}]e^{\lambda\omega_1|x_{1qk}|} + e^{\lambda\omega_1}[o]) \quad \text{(IV.3.18)}$$

$$L_1\widetilde{y}_3 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[o] = e^{\lambda\omega_2} + \sum_{k=0}^{1} \lambda\omega_2{}^k[o] = \lambda e^{\lambda\omega_2}[o] \quad \text{(IV.3.19)}$$

$$L_1\widetilde{y}_4 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} T_{1k}\widetilde{y}_4 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\lambda\omega_2)[o] = \lambda[o] \quad \text{(IV.3.20)}$$

$$L_2\widetilde{y}_1 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} T_{2k}\widetilde{y}_1 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\lambda\omega_1)^k[o] = \lambda[o] \quad \text{(IV.3.21)}$$

$$L_2\widetilde{y}_2 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} T_{2k}\widetilde{y}_2 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k} (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[o] = \lambda e^{\lambda\omega_1}[o] \quad \text{(IV.3.22)}$$

$$L_2\widetilde{y}_3 = \lambda \sum_{k=0}^{1} \lambda\omega_2{}^k ([\alpha_{2k}] + [\beta_{2k}]e^{\lambda\omega_1} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_2} [\eta_{2qk}]e^{\lambda\omega_2 x_{2qk}} + e^{\lambda\omega_2}[o]) \quad \text{(IV.3.23)}$$

$$L_2\widetilde{y}_4 = \lambda e^{-\lambda\omega_2} \sum_{k=0}^{1} (-\omega_2)^k ([\alpha_{2k}]e^{\lambda\omega_2} + [\beta_{2k}] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_2} [\eta_{2qk}]e^{\lambda\omega_2(1-x_{2qk})} + e^{\lambda\omega_2}[o]) \quad \text{(IV.3.24)}$$

$$L_3\widetilde{y}_1 = \lambda \sum_{k=0}^{1} \omega_1{}^k ([\delta_{1k}] + [o]) = \lambda[\delta_{10} + \omega_1\delta_{11}] \quad \text{(IV.3.25)}$$

$$L_3\tilde{y}_2 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k}([\delta_{1k}](-\lambda\omega_1)^k + (\lambda\omega_1)^k e^{\lambda\omega_1}[o]) =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{1} (-\omega_1)^k ([\delta_{1k}] + e^{\lambda\omega_1}[o]) =$$

$$= \lambda[\delta_{10} - \omega_1\delta_{11}] + \lambda e^{\lambda\omega_1}[o] \qquad \text{(IV.3.26)}$$

$$L_3\tilde{y}_3 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k}([\gamma_{1k}](\lambda\omega_2)^k + (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[o]) =$$

$$= \lambda[\gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11}] + \lambda e^{\lambda\omega_2}[o] \qquad \text{(IV.3.27)}$$

$$L_3\tilde{y}_4 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k}([\gamma_{1k}](-\lambda\omega_2)^k + (\lambda\omega_2)^k[o]) =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{1} (-\omega_2)^k ([\delta_{1k}] + [o]) =$$

$$= \lambda[\gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11}] \qquad \text{(IV.3.28)}$$

$$L_4\tilde{y}_1 = \lambda \sum_{k=0}^{1} \omega_1{}^k ([\delta_{2k}] + [o]) =$$

$$\lambda[\delta_{10} + \omega_1\delta_{21}] \qquad \text{(IV.3.29)}$$

$$L_4\tilde{y}_2 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k}([\delta_{1k}](-\lambda\omega_2)^k + (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_1}[o]) =$$

$$= \lambda[\delta_{10} - \omega_1\delta_{21}] + \lambda e^{\lambda\omega_1}[o] \qquad \text{(IV.3.30)}$$

$$L_4\tilde{y}_3 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k}([\gamma_{2k}](\lambda\omega_2)^k + (\lambda\omega_2)^k e^{\lambda\omega_2}[o]) =$$

$$= \lambda[\gamma_{20} + \omega_2\gamma_{21}] + \lambda e^{\lambda\omega_2}[o] \qquad \text{(IV.3.31)}$$

$$L_4\tilde{y}_4 = \sum_{k=0}^{1} \lambda^{1-k}([\gamma_{2k}](-\lambda\omega_2)^k + (\lambda\omega_2)^k[o]) =$$

$$= \lambda[\gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21}] \qquad \text{(IV.3.32)}$$

Teorem (IV.3.1): $T_{\upsilon k}: W_q^{\kappa}(-1,0) \oplus W_q^{k}(0,1) \to C$ lineer fonksiyonelleri sürekli ise kompleks düzlemin

$\Sigma^{-}=\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_i \leq 0\ ,\ \ i=1,2\}$ ve

$\Sigma^{+}=\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(\lambda+c)\omega_i \geq 0\ ,\ \ i=1,2\}$ ve

şeklinde bölünmüş yarı-düzlemlerinde $(L_{\upsilon}\tilde{y}_i)(\lambda)$ sınır değer ifadeleri $\lambda \to \infty$ olduğunda uygun olarak (IV.31)-(IV.3.16) ve (IV.3.17)-(IV.3.32) asimptotik eşitliklerini sağlarlar.

IV.4. $\Sigma^{\mp}$ Yarı-düzlemlerde Karakteristik Determinantın Asimptotiği

Şimdi $\arg a_1 = \arg a_2$ durumunda $(L_{\upsilon}\tilde{y}_i)(\lambda)$ i, λ=1,2,3,4 sınırdeğer ifadeleri için elde ettiğimiz (IV.3.1)-(V.3.16) ve (IV.3.17)-(IV.3.32) formüllerinden yararlanmakla uygun olarak Σ^{-} ve Σ^{+} yarımdüzlemlerinin her birinde araştırdığımız sınırdeğer probleminin karakteristik determinantının asimptotik olarak asimpotik kuazıpolinom şeklinde ifade edilebildiğini göstereceğiz. Bununla birlikte elde edilen asimptotik kuazipolinomun ilk ve son katsayısının asimtotik değerini hesaplayacağız. Önce Σ^{-} yarımdüzlemini ele alalım (IV.3.1)-(IV.3.16) formülleri gereği $\lambda \in \Sigma^{-}$, $\lambda \to \infty$ için $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantı aşağıdaki şekilde olacaktır.

$\Delta(\lambda)=\det(L_{\nu}\widetilde{y}_i) =$

$$
= \left| \begin{array}{cc}
\lambda e^{-\lambda\omega_1}\sum\limits_{k=0}^{1}\omega_1{}^k([\alpha_{1k}]+[\beta_{1k}]e^{\lambda\omega_1}+\sum\limits_{q=1}^{N_1}[\eta_{1qk}]e^{\lambda\omega_1(x_{1qk}+1)} & \lambda\sum\limits_{k=0}^{1}(-\omega_1)^k([\alpha_{1k}]e^{\lambda\omega_1}+[\beta_{1k}]+\sum\limits_{q=1}^{N_1}[\eta_{1qk}]e^{\lambda\omega_1|x_{1qk}|}) \\
\lambda e^{-\lambda\omega_1}[o] & \lambda[o] \\
\lambda^{-\lambda\omega_1}([\delta_{10}+\omega_1\delta_{11}]e^{\lambda\omega_1}+[o]) & \lambda[\delta_{10}-\omega_1\delta_{11}] \\
\lambda e^{-\lambda\omega_1}([\delta_{20}+\omega_1\delta_{21}]e^{\lambda\omega_1}+[o]) & \lambda[\delta_{20}-\omega_1\delta_{21}]
\end{array}\right.
$$

$$
\left. \begin{array}{cc}
\lambda[o] & \lambda e^{-\lambda\omega_2}[o] \\
\lambda\sum\limits_{k=0}^{1}\omega_2{}^k([\alpha_{2k}]+[\beta_{2k}]e^{\lambda\omega_2}+\sum\limits_{q=1}^{N_2}[\eta_{2qk}]e^{\lambda\omega_2 x_{2qk}}) & \lambda e^{-\lambda\omega_2}\sum\limits_{k=0}^{1}(-\omega_2)^k([\alpha_{2k}]e^{\lambda\omega_2}+[\beta_{2k}]+\sum\limits_{q=1}^{N_2}[\eta_{2qk}]e^{\lambda\omega_2(1-x_{2qk})}) \\
\lambda[\gamma_{10}+\omega_2\gamma_{11}] & \lambda e^{-\lambda\omega_2}([\gamma_{10}-\omega_2\gamma_{11}]e^{\lambda\omega_2}+[o]) \\
\lambda[\gamma_{20}+\omega_2\gamma_{21}] & \lambda e^{-\lambda\omega_2}([\gamma_{20}-\omega_2\gamma_{21}]e^{\lambda\omega_2}+[o])
\end{array}\right|
$$

Bu determinantın her bir stünundan λ ortak çarpanını determinant dışına aldıktan sonra elde edilen determinantın bütün elemanlarını $e^{\lambda\omega_1}$ ve $e^{\lambda\omega_2}$ ifadelerinin reel kuvvetlerinin artma sırası ile dizerek araştırmalarımız için önemsiz olan aradaki terimleri yazmazsak karakteristik determinantı aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$\Delta(\lambda) = \lambda^4\Delta_0(\lambda)$, $\Delta_0(\lambda)$ almak üzere

$\Delta_0(\lambda)=$

$$
= \left| \begin{array}{cc}
[\alpha_{10}+\omega_1\alpha_{11}]e^{-\lambda\omega_1}+\ldots+[\beta_{10}+\omega_1\beta_{11}] & [\beta_{10}-\omega_1\beta_{11}]+\ldots+[\alpha_{10}-\omega_1\alpha_{11}]e^{\lambda\omega_1} \\
[o] & [o] \\
[o]e^{-\lambda\omega_1}+[\delta_{10}+\omega_1\delta_{11}] & [\delta_{10}-\omega_1\delta_{11}] \\
[o]e^{-\lambda\omega_1}+[\delta_{20}+\omega_1\delta_{21}] & [\delta_{20}-\omega_1\delta_{21}]
\end{array}\right.
$$

$$
\left. \begin{array}{cc}
[o] & [o] \\
[\alpha_{20}+\omega_2\alpha_{21}]+\ldots+[\beta_{20}+\omega_2\beta_{21}]e^{\lambda\omega_2} & [\beta_{20}-\omega_2\beta_{21}]e^{-\lambda\omega_2}+\ldots+[\alpha_{20}-\omega_2\alpha_{21}] \\
[\gamma_{10}+\omega_2\gamma_{11}] & [o]e^{-\lambda\omega_2}+[\gamma_{10}-\omega_2\gamma_{11}] \\
[\gamma_{20}+\omega_2\gamma_{21}] & [o]e^{-\lambda\omega_2}+[\gamma_{20}-\omega_2\gamma_{21}]
\end{array}\right| \quad \text{(IV.4.1)}
$$

$\arg a_1 = \arg a_2$ olduğu için sonuncu determinantın açılımından her bir terim $M \in C$ kompleks sayı, k ise reel sayı olmak üzere $[M]e^{k\lambda(\omega_1+\omega_2)}$ şeklindedir.

Bu determinantı açarak $e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}$ ifadesinin artan kuvvetlerine göre dizersek $[P_i] = P_i + o(1)$, $i=1,1,\ldots,l$ ve $-1=k_1<k_2<\ldots<k_l=1$ olmak üzere

$$\Delta_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} [P_i] e^{k_i\lambda(\omega_1+\omega_2)}$$

şeklinde asimptotik kuazipolinom elde edilir. Diğer taraftan (IV.4.1) ifadesinden determinantın bilinen özelliklerinden faydalanarak görebiliriz ki, ilk ve son katsayılar oyan P_1 ve P_l için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$P_1 = (\alpha_{10} + \omega_1\alpha_{11})(\beta_{20} - \omega_2\beta_{21}) \begin{vmatrix} \delta_{10} - \omega_1\delta_{11} & \gamma_{10} + \omega_2\gamma_{11} \\ \delta_{20} - \omega_1\delta_{21} & \gamma_{20} + \omega_2\gamma_{21} \end{vmatrix}$$

$$P_l = (\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11})(\beta_{20} + \omega_2\beta_{21}) \begin{vmatrix} \delta_{10} + \omega_1\delta_{11} & \gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11} \\ \delta_{20} + \omega_1\delta_{21} & \gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21} \end{vmatrix}$$

Şimdi ise Σ^+ yarı-düzleminde $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının $\lambda \to \infty$ asimtotik kuazipolinom şeklinde ifade edilebildiğini gösterelim ve bu kuazipolinomun ilk ve son katsayılarının asimptotiğini bulalım. Yazının kısalağı için (IV.3.17)-(IV.3.32) formüllerinde parentez içindeki ifadeleri $e^{\lambda\omega_1}$ ve $e^{\lambda\omega_2}$ ifadelerinin reel kuvvetlerinin artma sırasına göre dizelim. Ayrıca her satırdan λ ortak çarpanını da determinantın dışına alalım. Buna göre $\Delta(\lambda)$ determinantını aşağıdaki şekilde elde ediriz.

$\Delta(\lambda)=\lambda^4\Delta_0(\lambda)$ olmak üzere

$\Delta_0(\lambda)=$

$$\begin{vmatrix} [\alpha_{10}+\omega_1\alpha_{11}]e^{-\lambda\omega_1}+\ldots+[\beta_{10}+\omega_1\beta_{11}] & [\beta_{10}-\omega_1\beta_{11}]+\ldots+[\alpha_{10}-\omega_1\alpha_{11}]e^{-\lambda\omega_1} \\ [o] & [o]e^{\lambda\omega_1} \\ [\delta_{10}+\omega_1\delta_{11}] & [\delta_{10}-\omega_1\delta_{11}]+[o]e^{\lambda\omega_1} \\ [\delta_{20}+\omega_1\delta_{21}] & [\delta_{20}-\omega_1\delta_{21}]+[o]e^{\lambda\omega_1} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} [o]e^{\lambda\omega_2} & [o] \\ [\alpha_{20}+\omega_2\alpha_{21}]+\ldots+[\beta_{20}+\omega_2\beta_{21}]e^{\lambda\omega_2} & [\beta_{20}-\omega_2\beta_{21}]e^{-\lambda\omega_2}+\ldots+[\alpha_{20}-\omega_2\alpha_{21}] \\ [\gamma_{10}+\omega_2\gamma_{11}]+[o]e^{\lambda\omega_2} & [\gamma_{10}-\omega_2\gamma_{11}] \\ [\gamma_{20}+\omega_2\gamma_{11}]+[o]e^{\lambda\omega_2} & [\gamma_{20}-\omega_2\gamma_{11}] \end{vmatrix}$$

(IV.4.2)

(IV.4.2) determinantını açarak $e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}$ ifadesinin reel kuvvetlerinin artma sırasına göre düzenlersek

$[Q_i]=Q_i+0(1)$, $i=1,2,\ldots,m$, $-1=s_1<s_2<\ldots<s_m=1$ olmak üzere

$$\Delta_0(\lambda)=\sum_{i=1}^{m}[Q_i]e^{s_i\lambda(\omega_1+\omega_2)}$$

şeklinde asimptotik kuazipolinom elde edilir. Determinantın bilinen özelliklerinden faydalanarak ilk ve son katsayılar için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu kolayca gösterebiliriz.

$$Q_1 = (\alpha_{10} + \omega_1\alpha_{11})(\beta_{20} - \omega_2\beta_{21}) \begin{vmatrix} \delta_{10} - \omega_1\delta_{11} & \gamma_{10} + \omega_2\gamma_{11} \\ \delta_{20} - \omega_1\delta_{21} & \gamma_{20} + \omega_2\gamma_{21} \end{vmatrix}$$

$$Q_m = (\alpha_{10} - \omega_1\alpha_{11})(\beta_{20} + \omega_2\beta_{21}) \begin{vmatrix} \delta_{10} + \omega_1\delta_{11} & \gamma_{10} - \omega_2\gamma_{11} \\ \delta_{20} + \omega_1\delta_{21} & \gamma_{20} - \omega_2\gamma_{21} \end{vmatrix}$$

Görüldüğü gibi $P_1=Q_1$, $P_l= Q_m$ dir. Şimdi buradan elde ettiğimiz sonucu teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem (IV.4.1) $T_{l,k} : W_q^k(-1,0) \oplus W_q^k(0,1) \rightarrow \mathbf{C}$ lineer fonksiyonelleri sürekli ve kompleks düzlemin bölündüğü

$\Sigma^- = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid Re(\lambda+c)\omega_1 \geq 0 , Re(\lambda+c)\omega_2 \geq 0 \}$

$\Sigma^+ = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid Re(\lambda+c)\omega_1 \leq 0 , Re(\lambda+c)\omega_2 \leq 0\}$

yarı-düzlemlerinin herbirinde (III.2.7)-(III.2.8) sınır değer probleminin $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantı $\lambda \to \infty$ olduğunda

$R_1, R_2, \ldots R_s$ kompleks sayılar ve $-1=k_1<k_2<\ldots<k_s=1$ olmak üzere

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4([R_1]e^{k_1\lambda(\omega_1+\omega_2)} + [R_2]e^{k_2\lambda(\omega_1+\omega_2)} + \ldots + [R_s]e^{k_s\lambda(\omega_1+\omega_2)})$$

olarak asimtotik kuazipolinom şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca ilk ve son katsayı olan R_1 ve R_s sayıları $\lambda \in \Sigma^{\pm}$ sektörleri için

$$R_1 = (\alpha_{10} \pm \omega_1 \alpha_{11})(\beta_{20} \mp \omega_2 \beta_{21}) \begin{vmatrix} \delta_{10} \mp \omega_1 \delta_{11} & \gamma_{10} \pm \omega_2 \gamma_{11} \\ \delta_{20} \mp \omega_1 \delta_{21} & \gamma_{20} \pm \omega_2 \gamma_{21} \end{vmatrix} \tag{IV.4.4}$$

$$R_s = (\alpha_{10} \mp \omega_1 \alpha_{11})(\beta_{20} \pm \omega_2 \beta_{21}) \begin{vmatrix} \delta_{10} \pm \omega_1 \delta_{11} & \gamma_{10} \mp \omega_2 \gamma_{11} \\ \delta_{20} \pm \omega_1 \delta_{21} & \gamma_{20} \mp \omega_2 \gamma_{21} \end{vmatrix} \tag{IV.4.5}$$

eşitlikleri doğrudur.

IV.5 $\arg a_1 = \arg a_2$ Oluğunda Özdeğerlerin Asimptotiği

Önceki bölümde $\arg a_1 \neq \arg a_2$ halinde özdeğerleri iki dizi halinde sıralamıştık ve bu dizilerin asimptotiğini bulmuştuk. Bu kısımda ise $\arg a_1 = \arg a_2$ hali için özdeğerleri bir tane dizi şeklinde göstereceğiz ve asimptotiğini bulacağız.

Teorem IV.5.1 Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

1) $\arg a_1 = \arg a_2$

2) $c(x) \in Lq(-1,1)$, $q \geq 1$,

3) $\sqrt{a_1}\,\alpha_{10} \pm \alpha_{11} \neq 0$,

$\sqrt{a_2}\,\beta_{20} \pm \beta_{21} \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} \sqrt{a_1}\,\delta_{10} \mp \delta_{11} & \sqrt{a_2}\,\gamma_{10} \pm \gamma_{11} \\ \sqrt{a_1}\,\delta_{20} \mp \delta_{21} & \sqrt{a_2}\,\gamma_{20} \pm \gamma_{21} \end{vmatrix} \neq 0$$

4) $T_{\nu k} : W_q^k(-1,0) \oplus W_q^k(0,1) \to \mathbf{C}$ ($\nu=1,2,3,4$, $k=0,1$) lineer fonkiyonelleri süreklidirler. O halde (III.2.7)-(III.2.8) Sınır değer Probleminin spektrumu diskrettir ve özdeğerleri aşağıdaki asimptotiğe sahip olan

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} \pi n i (1 + 0(\frac{1}{n})), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(IV.5.1)}$$

dizinini oluşturmaktadır.

İspat: Önceki bölümde olduğu gibi özdeğerler ancak ve ancak (IV.4.3) formülü ile verilmiş $\Delta(\lambda)$ kuazipolinomun sıfir yerlerinden ibarettir. Teorimin 3.Şartı gereğince $R_1 \neq 0$ ve $R_s \neq 0$ dır. O halde Teorem I.5.2 gereği öyle $h>0$ sayısı bulunur ki $|Re\lambda(\omega_1+\omega_2)| \geq h$ olduğunda $\Delta(\lambda) \neq 0$ olmaktadır. Demek ki

$$[R_1]e^{k_1\lambda(\omega_1+\omega_2)} + [R_2]e^{k_2\lambda(\omega_1+\omega_2)} + \ldots + [R_s]e^{k_s\lambda(\omega_1+\omega_2)} = 0 \qquad \text{(IV.5.2)}$$

denkleminin bütün kökleri

$\Pi = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |Re\lambda\,(\omega_1+\omega_2)| < h\}$

şeridinin içerisinde bulunurlar. $c \in \mathbf{C}$ kompleks sayısını özel olarak seçmekle Π şeridini Σ^+ veya Σ^- yarı-düzlemlerinde yerleştirebiliriz. O halde Teorem I.5.2 gereğince (IV.5.2) denkleminin Π şeridinde sayılabilir sayıda λ_n, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ köklü bulunur ve bu kökler için

$$|(\omega_1+\omega_2)\lambda_n| = \pi |n| (1 + O(\frac{1}{n})), \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(IV.5.3)}$$

asimptotik eşitliği geçerlidir. $\lambda_n \in \Pi$ olduğu için

$$|Re\lambda_n(\omega_1+\omega_2)| < h \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(IV.5.4)}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (IV.5.3) ve (IV.5.4) ifadelerinden ,

$$(\omega_1 + \omega_2)\lambda_n = \pi ni(1 + O(\frac{1}{n})), \; n = \pm 1, \; \pm 2, \ldots$$

formülü elde edilir. Dolayısıyla

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} \pi ni(1 + O(\frac{1}{n})), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

sonucunu bulmuş oluruz.

KAYNAKLAR

[1]. Bachhman G. and Lavrance, Functional Analysis, Academic press, New York and London, 1966.

[2]. Bellman R.Kuk K. Diferensiyel-Fark Denklemleri, MIR, Moskova, 1967, (Rusca)

[3]. Fulton T.C. Two-Point Boundary Value Problems With Eigenvalue Parameter Cortained in the Boundary Conditions Proc.Roy.Soc. Edinburg 77 A, P.293-308, 1977

[4]. Maz'ja V.G. Sobolev Space, Springer-Verlag, Berlin 1985

[5]. Muhtarov. O. Kandemir M.Bir Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asymptotiği Matematik Sempozyumu Balıkesir, 1996

[6]. Naimark M.A., Linear Differential Operators, Ungar, New York, 1967

[7]. Ross S.L. Differential Equations, New York 1974

[8]. Shkalikov, A.A., Boundary Value Problems for Ordinary differantial Equations With a Parameter in boundary Conditions, Trudy Sem. Imeny I.G.Petrovsgo 9(1983), 190-229

[9]. Tolstov. G.P. Fouriers Series, Englewood Cliffs N.J., Prentice-Hall, 1969

[10]. Uluçay C. Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri, A.Ü.Fen Fakültesi Ankara 1971

[11]. Wasow, W. Asymptotic Expansions for ordinary Differential Equations, New York: Wiley-interscince , 1966

[12]. Rasulov, M.L. Methods of Contour Integration. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1967

ÖZGEÇMİŞ

1966 yılında Tokat ile Reşadiye İlçesi Yolüstü Köyünde doğdum. İlkokulu köyümde, ortaokulu Reşadiye'de Lise eğitimini Çanakkale Gökçeada Atatürk Öğretmen Lisesinde tamamladım.

1987 yılında O.M.Ü.Eğitim Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve bu bölümden 1991 yılında mezun oldum. Yine aynı yılı O.M.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başladım ve 1994 yılında bitirdim.

Halen Amasya Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünde öğretim görevlisi olarak çalışmaktayım. Evli ve dört çocuk babasıyım.