

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜRETİCİ ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYLARINDA BEREZİN
SEMBOLLERİ İLE İLGİLİ BAZI PROBLEMLER**

İsmail Murat KARLI

**Danışman
Doç. Dr. Ulaş YAMANCI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2021**



© 2021 [İsmail Murat KARLI]

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	4
3. TEMEL KAVRAMLAR	6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	19
4.1. Radyal Limit ile İlgili Bazı Sonuçlar	19
4.2. Dizi ve Serilerin Borel Yakınsaklığı.....	21
4.3. Dirichlet Uzayı Üzerindeki Schatten Neumann Sınıfı Operatörlerin Karakterizasyonu	23
4.4. Operatörler Üzerindeki Berezin Sayısı Eşitsizliklerinin İyileştirilmesi.....	25
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ.....	40

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜRETİCİ ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYLARINDA BEREZİN SEMBOLLERİ İLE İLGİLİ BAZI PROBLEMLER

İsmail Murat KARLI

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

Bu tez çalışmasında üretici çekirdek ve Berezin sembolü teknikleri kullanılarak bazı problemlere cevap verilmeye çalışıldı.

İlk olarak üretici çekirdek, üretici çekirdekli Hilbert uzay, Berezin sembolü ve Berezin sayısı gibi temel bazı tanımlar verildi. Daha sonra, Dirichlet uzayındaki sınırlı köşegen operatörün Berezin dönüşümünün birim çember üzerinde radyal limite sahip olmadığı gösterildi. Benzer problem, kompleks düzlem üzerindeki Fock uzayı için de incelendi.

Ayrıca ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolü yardımıyla kompleks sayıların dizi ve serilerinin Borel yakınsaklığı için bazı yeni kriterler verildi. Dirichlet uzayındaki Schatten-von Neumann sınıfı operatörleri Berezin sembolleri yardımıyla karakterize edildi.

Son olarak operatörlerin Berezin sayısı için literatürde bilinen bazı eşitsizlik tipleri kullanılarak önemli eşitsizlikler elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Üretici çekirdek, Berezin sembolü, Borel yakınsaklık, Radyal limit, Fock uzay, Dirichlet uzay, Schatten-von Neumann sınıfı.

2021, 40 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME PROBLEMS RELATED WITH BEREZIN SYMBOLS IN REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACES

İsmail Murat KARLI

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ulaş YAMANCI

In this thesis, some problems were tried to be answered by using the techniques of reproducing kernel and Berezin symbol.

First, some basic definitions were given, such as the reproducing kernel, reproducing kernel Hilbert space, the Berezin symbol and the Berezin number. Later, it was shown that the Berezin symbol of bounded diagonal operator in the Dirichlet space does not have a radial limit on the unit circle. A similar problem was investigated for the Fock space on the complex plane.

In addition, some new criteria was given for Borel convergence of sequences and series of complex numbers with the help of the Berezin symbol of the weighted shift operator. The Schatten-von Neumann class operators in the Dirichlet space were characterized in terms of Berezin symbols.

Finally, significant inequalities were obtained for the Berezin number of operators by using some types of inequalities known in the literature.

Keywords: Reproducing kernel, Berezin symbol, Borel convergence, Radial limit, Fock space, Dirichlet space, Schatten-von Neumann class.

2021, 40 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Ulaş YAMANCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan maddi, manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

İsmail Murat KARLI

ISPARTA, 2021



SİMGELER DİZİNİ

$ A $	A operatörünün modülü
$\tilde{A}$	A operatörünün Berezin sembolü
$ber(A)$	A operatörünün Berezin sayısı
$Ber(A)$	A operatörünün Berezin kümesi
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ Hibert uzayındaki sınırlı lineer operatörler
$\mathbb{D}$	Birim disk
$\mathcal{D}$	Dirichlet uzay
$\mathcal{F}(\mathbb{C})$	Fock uzay
$\mathcal{H}(\Omega)$	Üretici çekirdekli Hilbert uzay
k_λ	Üretici çekirdek
$\widehat{k}_\lambda$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek
L_a^2	Bergman uzay
$rad(f)$	f fonksiyonunun radyalizasyonu
W	Ağırlıklı kaydırma operatörü
$\mathfrak{S}_p$	Schatten-von Neumann sınıfı
$\mathfrak{S}_2(H)$	Hilbert-Schmidt sınıfı

1. GİRİŞ

Üretici çekirdekler konusu eskilere dayanan bir konu olup ilk önce 1907 yılında Zarembo tarafından harmonik ve biharmonik fonksiyon sınıfları için kullanılmıştır. 1909 yılında ise Mercer tarafından integral denklemler teorisinde ele alınmış ve bu fonksiyon pozitif tanımlı fonksiyon olarak adlandırılmıştır (Mercer, 1907). Uzun süre bu kavram dikkat çekmemiştir. Daha sonra üç Berlin matematikçisinin doktora tezlerinde üretici çekirdek kavramı ortaya çıkmıştır. Bu matematikçiler Szegő (1921), Bergman (1922) ve Bochner (1922) dir. Özel olarak, Bergman, harmonik ve analitik fonksiyon sınıfları için üretici çekirdekler kavramını vermiştir ve bu kavramı çekirdek fonksiyonu olarak adlandırmıştır (Bergman, 1922). Bergman, bu çekirdek fonksiyonu kavramını kullanarak, kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde, konform dönüşümlerinde, pseudo-konform dönüşümlerinde, invariant Riemannian metriklerin incelenmesinde önemli sonuçlar elde etmiştir (Bergman, 1922). Bundan başka, olasılık teorisinde üretici çekirdekler tekniği ilk olarak dünyaca ünlü Rus bilim insanı Kolmogorov tarafından 1941 yılında kullanılmış ve çok önemli sonuçlara imza atılmıştır. Bu konular için genel teori Aronszajn (1950) tarafından ortaya konulmuştur. Daha sonraları üretici çekirdekler Fields ödülü ile ödüllendirilmiş Schwartz (1964) tarafından geliştirilmiştir. Bu teori bir o kadar başka anlamda Krein (1963) tarafından kullanılmıştır. Günümüz matematiğinde ise, yaklaşık 1972 yılından başlayarak ağırlıklı olarak Japon matematikçisi Saburo Saitoh üretici çekirdekler metoduna sanki yeni bir hayat vererek, bu yöntemi analizde, diferensiyel denklemler ve integral denklemler teorisinde, ters problemler konusunda, operatörler teorisinde ve harmonik analizde uygulayarak çok önemli ve orijinal sonuçlar almayı başarmıştır (Saitoh, 1988; 1997).

Üretici çekirdekler kullanılarak tanımlanabilen Berezin sembolleri kavramı ilk olarak Rus matematikçisi ve fizikçisi Berezin tarafından verilmiştir (Berezin, 1972; 1974). Berezin, aslında Fock uzayında Wick sembollerinin genişlemesi olarak bu kavramı tanımlamıştır. Berger ve Coburn ise ilk olarak Toeplitz operatörünün kontravaryant sembollerini, yani Toeplitz operatörünün Berezin sembolünü kullanmışlardır (Berger ve Coburn, 1986).

Eğer Berezin sembollerinin tanımladığı kümenin, yani Berezin kümesinin operatörün nümerik değer kümesinin alt kümesi olduğu dikkate alınırsa, bu kavramların haberleşme

alanında geniş bir uygulamaya sahip olduğu söylenilebilir. Bunlara ilaveten, elektronların Wieck ve anti-Wieck sembollerinin Berezin sembolleri ile sıkı bir ilişkiye sahip olmasından dolayı da yine Berezin sembollerinin elektronların enerji seviyelerinin belirlenmesinde var olduğu görülmüştür (Berezin, 1971). Üretici çekirdekler de geniş bir uygulama alanına sahiptirler. Üretici çekirdekler teorisi Hilbert uzayları üzerinde lineer dönüşümler ile birleştirildiğinde çeşitli alanlarda birçok bağlantılara ve diferensiyel denklemler, integral denklemler, Pisagor Teoreminin genelleştirilmesi, ters problemler, örnekleme teorisi, lineer dönüşümler ile birleştirilen lineer olmayan dönüşümler, Hilbert uzayları arasında çeşitli operatörler gibi birçok geniş alanlar üzerine yayılmış verimli uygulamalara sahiptir (Saitoh, 1988; 1997). Özel durumda Bergman çekirdeği ve Szegő çekirdeği gibi belli üretici çekirdekler kompleks analizde pek çok ve geniş sonuçlara sahiptir.

Berezin sembolleri teorisinin merkezî sonuçlarından biri, Berezin tarafından, Berezin sembolü yardımıyla ispatlanan nükleer (çekirdekli) A operatörlerinin iz formülüdür (Berezin, 1972; 1974). Bu formülden Berezin, sabit katsayılı eliptik diferensiyel operatörünün spektrumu için klasik asimptotiği elde etmiştir. Bu elde edilen sonuç daha sonra önemli problemlerin doğmasına yol açmıştır; örneğin bu sonuçtan sonra Berezin sembolü bakımından, Schatten-von Neuman sınıflarının incelenmesi problemi ortaya çıkmıştır (Peller, 1980). Berezin sembolü bir çok durumlarda çok etkileyicidir ve mevcut operatör için önemli bilgileri taşımaktadır. Örneğin, çok sayıda fonksiyonel Hilbert uzaylarında (H^2 Hardy uzayı, L_a^2 Bergman uzayı vb.) A operatörü kendisinin Berezin sembolü $\tilde{A}$ ile tek olarak tanımlanabilir. Berezin sembolü ağırlıklı olarak Toeplitz ve Hankel operatörleri için uygulanabilir. Bu sebeple şöyle doğal bir soru sorulabilir: Berezin sembolü operatörler için daha hangi bilgileri verebilir? Bu soru ile ilgili bazı pozitif sonuçlar Zhu'nun kitabında yer almaktayken negatif sonuçlar ise örneğin Nordgren ve Rosenthal, Zorboska, Karaev, Karaev ve Saltan'ın makalelerinde verilmiştir (Zhu, 2007; Nordgren ve Rosenthal, 1994; Zorboska, 2003; Karaev, 2010; Karaev ve Saltan, 2005). İncelenen problemler hem operatörler teorisi ile cebirler teorisinin birleştiği yerde bulunmakta hem de Toeplitz ve Hankel operatörlerinin bazı özelliklerini ortaya koymak için göz önüne alınmaktadır. Tartışılan yön çok hızlıca gelişen bir alan olmakla beraber aynı zamanda da sonu görünmeyen bir çalışma alanıdır.

Bu tez çalışması temel olarak aşağıdaki ana başlıklardan oluşmaktadır:

- Dirichlet uzayı üzerindeki sınırlı bir operatörün Berezin dönüşümünün birim çember üzerinde radyal limite sahip olup olmadığı araştırılmıştır. Benzer problem, kompleks düzlem üzerindeki Fock uzayı için de incelenmiştir.

- Ağırlıklı kaydırma operatörünün, Berezin sembolü yardımıyla kompleks sayıların dizi ve serilerinin Borel yakınsaklığı için bazı yeni kriterler verilmiştir.

- Dirichlet uzayındaki Schatten-von Neumann sınıfı operatörleri Berezin sembolleri yardımıyla karakterize edilmiştir.

- Kerın-Lin ve Young Eşitsizliğinin genelleştirilmesi kullanılarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda operatörlerin Berezin sayısı için bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Aronszajn (1950) yılında üretici çekirdekler genel teorisi oluşturmuş ve daha sonra Schwartz (1964) tarafından bu teori geliştirilmiştir. Üretici çekirdekler genel teorisini aynı yıllarda Krein (1963) farklı bağlamda ele almıştır.

Berezin sembolleri kavramı üretici çekirdekler ile tanımlı olup ilk olarak Berezin tarafından verilmiştir (Berezin, 1972; 1974). Bu kavramın yardımıyla Berezin, kuantum fiziğinin ve istatistiksel fiziğin önemli operatörlerinin Hamilton operatörü, (Schrödinger) operatörü, Jacobi operatörü vd. özdeğerlerinin dağılımı için önemli sonuçlar almıştır. Örneğin ilk olarak nükleer operatörün izini Berezin sembolü ile ifade etmiştir. Ayrıca eliptik tipli kısmi diferensiyel operatörün pozitif özdeğerlerinin sayısı için de önemli formüller elde etmiştir.

Standart üretici çekirdekli Hilbert uzayındaki kompakt operatörlerin karakterizasyonu Berezin sembolü kullanılarak Nordgren ve Rosenthal tarafından verilmiştir (Nordgren ve Rosenthal, 1994). Ayrıca Bergman uzayındaki Toeplitz operatörlerin Berezin sembolü Poisson çekirdeğinin, $H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayındaki rolü kadar, Bergman uzayında da önemli olduğu ortaya çıkmıştır.

Kılıç (1995), üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında herhangi bir operatörün Berezin sembolünün çarpımsal özelliğini incelemiştir. Yani, her $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörü için $\widetilde{T_1 T_2} = \widetilde{T_1} \widetilde{T_2}$ olması için gerek ve yeter koşulun T_1 operatörünün çarpım operatörü olması gerektiğini elde etmiştir. Kiliç aynı zamanda, eğer T_1 operatörü H^2 Hardy uzayında sınırlı operatör ise o zaman her $T_2 \in \mathcal{B}(H^2)$ operatörü için $\widetilde{T_1 T_2}(\lambda) = \widetilde{T_1}(\lambda) \widetilde{T_2}(\lambda)$ olması için gerek ve yeter koşulun, T_1 operatörünün analitik Toeplitz operatör olduğunu göstermiştir. Daha sonra, T_φ ($\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$) Hardy uzayında Toeplitz operatör ve T_2 nin herhangi bir operatör olması durumunda $\lim_{\mu \rightarrow \partial\Omega} \left(\widetilde{T_\varphi T_2}(\mu) - \widetilde{\varphi}(\mu) \widetilde{T_2}(\mu) \right) = 0$ olduğu gösterilmiştir ve benzer sonuçlar Bergman uzayında da elde edilmiştir (Karaev and Gürdal, 2010). Berezin sembolleri yardımıyla operatörlerin Schatten-von Neumann sınıflarına ait olması ile ilgili yeni kriterler verilmiştir (Karaev, 2002; Karaev ve Saltan, 2005; Karaev vd., 2013). Bergman uzayı üzerinde tanımlanan sınırlı lineer bir operatörün mutlak değerinin Berezin sembolü ile yeni sonuçlar elde edilmiştir

(Das ve Sahoo, 2018). Yine Berezin sembolleri yardımıyla Abel, Borel ve logaritmik toplanabilme teorisi için yeni ispatlar verilmiştir (Karaev, 2004; Pehlivan ve Karaev, 2004; Karaev, 2010; 2013; Karaev vd., 2014; Yamancı, 2018). Aynı zamanda, üretici çekirdek ve Berezin sembolleri ile bazı fonksiyonel Hilbert uzaylarında tersinebilirliği garanti eden yeterli koşullar elde edilmiştir (Karaev, 2006).

Zorboska (2003), L_a^2 Bergman uzayı üzerinde sınırlı bir operatörün Berezin dönüşümünün birim çemberin hemen hemen her yerinde radyal limite sahip olup olmadığı sorusunu ortaya koymuştur. Karaev (2005) de bu problemi olumsuz olarak çözmüştür.

Nümerik yarıçap ve uygulamaları ile ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur (Abu-Omar ve Kittaneh, 2015; Dragomir, 2008; Dragomir, 20015; Gustafson ve Rao, 1997; Heydarbeygi vd., 2020; Kittaneh, 2011; Kittaneh vd., 2015; Sahoo vd., 2019; Sattari vd., 2015; Yamazaki, 2007). Nümerik yarıçap için temel bir eşitsizlik ,

$$w(A^n) \leq w(A)^n, n \geq 1,$$

şeklindeki kuvvet eşitsizliğidir (Gustafson ve Rao, 1997; Halmos, 1982).

Berezin kümesi ve Berezin sayısı, Karaev tarafından tanımlanmıştır (Karaev, 2006). Daha sonra, Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler kullanılarak operatörlerin Berezin sayısı için bazı kuvvet eşitsizlikleri elde edilmiştir (Garayev vd., 2016; Garayev vd., 2017; Garayev ve Alomari, 2021; Yamancı vd., 2017; Yamancı vd., 2019). Ayrıca literatürde bilinen bazı eşitsizlikler yardımıyla da operatörlerin Berezin sayısı için önemli eşitsizlikler verilmiştir (Bakherad, 2018; Bakherad vd., 2019; Bakherad ve Garayev, 2019; Hajmohamadi vd., 2020; Sahoo vd., 2020; Taghavi vd., 2019; Yamancı ve Garayev, 2019; Yamancı vd., 2020).

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1. X iç çarpım uzayı olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\|e_n\| = 1$ ve tüm $m, n \in \mathbb{N}$ ($m \neq n$) için $\langle e_m, e_n \rangle = 0$ ise $\{e_n\} \subset X$ dizisine ortonormal dizi denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Teorem 3.2. (Bessel eşitsizliği) X iç çarpım uzayı ve $\{e_n\}$ dizisi X uzayında ortonormal bir dizi olsun. Buna göre her $x \in X$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ yakınsaktır ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

dir (Rynne ve Youngson, 2008).

Teorem 3.3. H Hilbert uzay ve $\{e_n\}$ dizisi H uzayında ortonormal bir dizi olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir (Rynne ve Youngson, 2008):

- (a) $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$;
- (b) $\overline{\text{span}} \{e_n : n \in \mathbb{N}\} = H$;
- (c) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, (\forall x \in H)$;
- (d) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, (\forall x \in H)$.

Tanım 3.4. H Hilbert uzay ve $\{e_n\}$ dizisi H uzayında ortonormal bir dizi olsun. Eğer üstteki Teoremin koşullarından herhangi biri sağlanırsa o zaman $\{e_n\}$ ortonormal dizisine ortonormal baz denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 3.5. Normlu bir X uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsaktır ya da norma göre yakınsaktır denir ve bu durum,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

veya, kısaca

$$x_n \rightarrow x$$

ile gösterilir. x değerine, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir ve $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli olarak x değerine yakınsaktır denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 3.6.. Normlu bir X uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer her $f \in X'$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi zayıf yakınsaktır denir ve

$$x_n \xrightarrow{z} x$$

şeklinde gösterilir. x değerine, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir ve $\{x_n\}$ dizisi x değerine zayıf yakınsaktır denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanımlayacağımız Riesz temsil teoreminin Berezin sembollerinde kullanacağımız üretici çekirdek kavramında önemli bir rolü vardır.

Teorem 3.7. (Riesz temsil teoremi) Bir H Hilbert uzayındaki her sınırlı lineer f fonksiyoneli iç çarpım olarak ifade edilebilir. Yani, y , f fonksiyoneline bağlı olmak üzere

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir tek y vektörü vardır ve

$$\|f\| = \|y\|$$

dir (Rynne ve Youngson, 2008).

Şimdi Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan lineer operatör, sınırlı lineer operatör ve bunlarla ilgili bazı özellikleri vereceğiz

Tanım 3.8. H bir Hilbert uzay ve $T : H \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in H$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ özelliğini sağlarsa T ye lineer operatör denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 3.9. H Hilbert uzayında bir T lineer operatörü her $x \in H$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti varsa T ye sınırlı lineer operatör denir. Ayrıca T nin normu

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

dir (Rynne ve Youngson, 2008).

Teorem 3.10. H Hilbert uzayında T ve S sınırlı lineer operatör olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) Her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$

(ii) $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$

(iii) $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$.

Hilbert uzayı üzerinde tanımladığımız sınırlı lineer bir operatör adjoint operatörü tanımlamamıza olanak sağlamaktadır. Bu operatörün, aynı zamanda, self adjoint, normal, üniter, ortogonal projeksiyon ve izometri operatörlerin tanımlanmasında ve çeşitli uygulamaların incelenmesinde önemli bir rolü vardır. İlk olarak adjoint operatörün tanımını verelim.

Tanım 3.11. H_1 ve H_2 Hilbert uzaylar olmak üzere $T : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. T nin T^* adjoint operatörü her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

olacak şekilde bir

$$T^* : H_2 \rightarrow H_1$$

operatörüdür (Rynne ve Youngson, 2008).

Şimdi adjoint operatör yardımıyla bazı özel tip operatörler tanımlayacağız.

Tanım 3.12. H Hilbert uzayı ve $T \in \mathcal{B}(H)$ olsun.

- (a) $T^*T = TT^*$ ise T operatörüne normal operatör;
- (b) $T^* = T$ ise T operatörüne self-adjoint operatör;
- (c) $T^*T = TT^* = I$ ise T operatörüne üniter operatör denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 3.13. H Hilbert uzayı olsun. $P = P^* = P^2$ olacak şekilde $P \in \mathcal{B}(H)$ operatörüne

ortogonal izdüşüm denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Sonuç 3.14. H Hilbert uzay, $M \subset H$ kapalı lineer uzay ve $\{e_n\}_{n=1}^J$ dizisi M için bir ortonormal baz olsun. $P : H \rightarrow M$ operatörü ortogonal izdüşüm ise o zaman

$$Px = \sum_{n=1}^J \langle x, e_n \rangle e_n$$

dir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 3.15. X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. X deki sınırlı her $\{x_n\}$ dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisi Y de yakınsak bir alt dizi içeriyorsa T operatörüne kompakt operatör denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Teorem 3.16. Kompakt Operatörlerin Bazı Özellikleri

(1) X ve Y iki normlu uzay ve $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ olsun.

a) T sonlu ranka sahipse T operatörü kompakttır.

b) $\dim X < \infty$ veya $\dim Y < \infty$ ise T operatörü kompakttır.

(2) X normlu uzay, H Hilbert uzay ve $T \in K(X, H)$ olsun. O zaman $\mathcal{B}(X, Y)$ de T operatörüne yakınsak $\{T_k\}$ sonlu rank operatörlerin dizisi mevcuttur.

(3) H Hilbert uzay ve $T \in \mathcal{B}(H)$ olsun. T operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul T^* operatörünün kompakt olmasıdır.

(4) T kompakt $\Leftrightarrow T^*T$ kompakt $\Leftrightarrow |T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ kompakt olmasıdır.

(5) H sonsuz boyutlu Hilbert uzayı, $\{e_n\}$ dizisi bu uzayın ortonormal bazı ve $T \in \mathcal{B}(H)$ olsun. T operatörü kompakt ise o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Te_n\| = 0$ dır.

Tanım 3.17. $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olsun. x_0 sabit bir nokta ve $g(x)$ de x_0 civarında açık bir aralıkta pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun.

(a) x_0 civarında açık bir aralıkta $|f(x)| < Kg(x)$ olacak şekilde sabit bir K sabiti varsa o zaman $f(x) = O(g(x))$, $(x \rightarrow x_0)$ dır.

(b) Eğer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise o zaman $f(x) = o(g(x))$, $(x \rightarrow x_0)$ dır.

(c) Eğer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ise o zaman $f(x) \sim g(x)$, $(x \rightarrow x_0)$ dır (Powell ve Shah, 1972).

Tanım 3.18. Kompleks sayıların açık bir Ω kümesi üzerinde, her $\lambda \in \Omega$ için $f \rightarrow f(\lambda)$ lineer fonksiyoneli $\mathcal{H}$ uzayında sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerindeki f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına "fonksiyonel Hilbert uzayı" ya da "üretici çekirdekli Hilbert uzayı" denir (Halmos, 1982).

Klasik Riesz temsil teoreminden, $\lambda \in \Omega$ için $f(\lambda) = \langle f, k_{\mathcal{H},\lambda} \rangle$ olacak şekilde bir tek $k_{\mathcal{H},\lambda} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu vardır. $\Omega \times \Omega$ kümesi üzerinde $k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k(z, \lambda)$ ile tanımlanan bu k fonksiyonuna " $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeği" denir (Halmos, 1982).

Diğer taraftan üretici çekirdek bazlar yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.19. $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayının herhangi ortonormal bazı $\{e_n\}$ olsun. O zaman $\mathcal{H}$ uzayının k üretici çekirdeği

$$k_\lambda(z) = k(z, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir (Stroethoff, 1997).

Çözüm: $\{e_n\}$ dizisi $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayının ortonormal bazı olduğundan, her $z \in \Omega$ için

$$k_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \langle k_\lambda, e_n \rangle e_n$$

yazılabilir. Parseval eşitliğinden $z \in \Omega$ olmak üzere

$$k(z, \lambda) = \langle k_\lambda, k_z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle k_\lambda, e_n \rangle \langle e_n, k_z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

olup böylece ispat tamamlanır (Stroethoff, 1997).

Üstteki Yardımcı Teoremden $k_\lambda(z) = \overline{k_z(\lambda)}$ olduğu açıktır. Bu yüzden her $\lambda, z \in \Omega$ için $k(z, \lambda) = \overline{k(\lambda, z)}$ dir. k_λ normu ise

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = k_\lambda(\lambda) = k(\lambda, \lambda)$$

dir. $\hat{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{k(\lambda, \lambda)^{1/2}}$ fonksiyonuna λ noktasında $\mathcal{H}$ uzayının "normalleştirilmiş üretici çekirdeği" denir (Stroethoff, 1997).

Tanım 3.20. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı ve $\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \frac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$ bu uzayın

normelleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. Eğer $\lambda \rightarrow \partial\Omega$ ($\lambda \rightarrow \xi \in \partial\Omega$) iken $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rightarrow 0$ zayıf yakınsak ise $\mathcal{H}$ uzayına "standart fonksiyonel Hilbert uzayı" denir (Aronzajn, 1950; Saitoh, 1988; 1997).

Örnek 3.21 (Dirichlet Uzayı). $\mathbb{D}$ birim disk üzerinde $\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA/\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |a_n|^2 < \infty$ koşulunu sağlayan $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayına $\mathcal{D}$ Dirichlet uzayı denir. Burada dA , $\mathbb{D}$ birim disk üzerinde Lebesgue ölçüsüdür. Dirichlet uzayı, $\{z^n/\sqrt{n+1} : n \geq 0\}$ ortonormal bazına sahip olduğundan bu uzayın üretici çekirdeği (3.1) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} k_{\lambda}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n+1}} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{\lambda}z)^n}{n+1} = \frac{1}{\bar{\lambda}z} \log \frac{1}{1-\bar{\lambda}z} \end{aligned}$$

elde edilir (Marshall ve Sundberg, 1994).

Tanım 3.22. (Fock uzayı) Kompleks düzlemde Gauss ölçüsüne göre karesi integrallenebilen tam fonksiyonların oluşturduğu uzaya " $\mathcal{F}$ Fock uzayı (veya Segal-Bargmann uzayı)" denir. Yani, $\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty$, $d\mu(z) = e^{-|z|^2/2} dA(z)/2$ olacak şekilde tüm analitik fonksiyonların oluşturduğu uzaya denir. $\mathcal{F}$ Fock uzayı

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} d\mu(z), \quad f, g \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$$

biçiminde tanımlanan iç çarpıma sahip $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ uzayının kapalı alt uzayı olduğundan bir Hilbert uzayıdır. Fock uzayı, $\{z^n/(n!2^n)^{1/2} : n \geq 0\}$ ortonormal bazına sahip olduğundan bu uzayın üretici çekirdeği (3.1) formülünden

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{F},\lambda}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n!2^n)^{1/2}} \frac{z^n}{(n!2^n)^{1/2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{\lambda}z/2)^n}{n!} = e^{\bar{\lambda}z/2} \end{aligned}$$

dir (Stroethoff, 1997).

Örnek 3.23 (Bergman uzayı). $\mathbb{D}$ birim diskinde Lebesgue ölçüsüne göre karesi

integrallenebilen analitik fonksiyonların oluşturduğu uzaya " $L_a^2 = L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı" denir. $\{\sqrt{n+1}z^n : n \geq 0\}$ kümesi L_a^2 Bergman uzayı için ortonormal baz olduğundan bu uzayın üretici çekirdeği (3.1) formülünden her $\lambda, z \in \mathbb{D}$ için

$$k_{L_a^2, \lambda}(z) = \frac{1}{(1 - \bar{\lambda}z)^2}$$

dır (Stroethoff, 1997).

Tanım 3.24. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzay ve $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sınırlı lineer operatör olsun. O zaman

$$\tilde{A}(\lambda) = \langle A\hat{k}_{H, \lambda}, \hat{k}_{H, \lambda} \rangle_{\mathcal{H}}$$

formülü ile tanımlanan $\tilde{A}$ fonksiyonuna "A operatörünün Berezin dönüşümü" ya da "Berezin sembolü" denir (Berezin, 1972).

Berezin sembolünün en önemli özelliklerinden bir tanesi, $\lambda \rightarrow \partial\Omega$ iken herhangi kompakt bir operatörün Berezin sembolünün sıfıra yaklaşıyor olmasıdır. Yani ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial\Omega} \tilde{A}(\lambda) = 0$$

dır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek 3.25. H^2 Hardy uzayında W operatörü

$$Wz^n = (-1)^n z^{n+1}, n \geq 0$$

ile tanımlı ağırlıklı kaydırma operatörü olsun. $\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \tilde{W}(\lambda) = 0$ dır. Fakat W operatörü kompakt değildir (Karaev ve Saltan, 2005).

Çözüm: W operatörünün Berezin sembolü hesaplanıldığında

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\lambda) &= \langle W\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle = (1 - |\lambda|^2) \langle Wk_\lambda, k_\lambda \rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2) \left\langle W \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n z^n, k_\lambda \right\rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2) \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n (-1)^n z^{n+1}, k_\lambda \right\rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \bar{\lambda}^n \lambda^{n+1} = \lambda (1 - |\lambda|^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |\lambda|^{2n} \end{aligned}$$

$$= \lambda(1 - |\lambda|^2) \frac{1}{1 + |\lambda|^2}$$

elde edilir. Burada $\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \tilde{W}(\lambda) = 0$ dır. Fakat $(-1)^n \not\rightarrow 0$ olduğundan W operatörü kompakt değildir.

Tanım 3.26. $(e_n(z))_{n \geq 0}$, $\mathcal{H}$ üretici çekirdekli Hilbert uzayının ortonormal bazı olsun. $\mathcal{H}$ uzayında herhangi sınırlı $(a_n)_{n \geq 0}$ kompleks sayılar dizisi için köşegen operatörü

$$D_a e_n(z) := a_n e_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

formülü ile tanımlanır. Köşegen operatörün Berezin sembolü

$$\tilde{D}_a(\lambda) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |e_n(\lambda)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n |e_n(\lambda)|^2, \quad \lambda \in \Omega,$$

ile hesaplanır (Karaev, 2010).

Tanım 3.27. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzay ve $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sınırlı lineer operatör olsun. A operatörünün "Berezin sayısı" ve "Berezin kümesi", sırasıyla,

$$ber(A) = \sup \left\{ \left| \tilde{A}(\lambda) \right| : \lambda \in \Omega \right\} \text{ ve } Ber(A) = \left\{ \tilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\}$$

formülleriyle tanımlanır (Karaev, 2006).

Herhangi bir A operatörünün Berezin sayısı aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (a) $ber(A) \leq \|A\|$,
- (b) $ber(\alpha A) = \alpha ber(A)$, $(\alpha \in \mathbb{C})$,
- (c) $ber(A + B) \leq ber(A) + ber(B)$.

Tanım 3.28. H kompleks bir Hilbert uzayı olsun. T operatörünün nümerik değer kümesi

$$W(T) = \{ \langle Tx, x \rangle, x \in H, \|x\| = 1 \}$$

ile tanımlanır ve bu küme $\mathbb{C}$ kompleks sayısının bir alt kümesidir (Dragomir, 2013).

$W(T)$ nümerik değer kümesinin özellikleri aşağıdaki gibidir:

- (i) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$,

- (ii) $W(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in W(T)\}$, burada T^* , T 'nin adjoint operatörüdür,
 (iii) Herhangi U üniter operatör için $W(U^*TU) = W(T)$ dır (Dragomir, 2013).

Tanım 3.29. H kompleks bir Hilbert uzayı olsun. H üzerindeki bir T operatörünün nümerik yarıçapı

$$w(T) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\} = \sup \{|\langle Tx, x \rangle|, \|x\| = 1\}$$

ile tanımlanır.

Berezin sayısı ile numerik yarıçap arasında

$$ber(A) \leq w(A) \leq \|A\| \quad (3.2)$$

şeklinde bir bağıntı vardır ve ayrıca herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için

$$\frac{\|A\|}{2} \leq ber(A)$$

dir. Aynı zamanda Berezin kümesi ve nümerik değer arasında $Ber(A) \subset W(A)$ şeklinde bir ilişki vardır (Karaev, 2013).

Tanım 3.30. $f, L^1(\mathbb{D})$ üzerinde bir fonksiyon olsun.

$$rad(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}z) dt$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyona, f fonksiyonunun radyalizasyonu denir. Eğer f fonksiyonunun radyalizasyonu f fonksiyonuna eşitse o zaman bu fonksiyona radyal fonksiyon denir. Yani, $f(z) = f(|z|)$ eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu radyal fonksiyon olarak adlandırılır. L_a^2 üzerindeki A sınırlı operatörü için $Rad(A)$ operatörü

$$Rad(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_t^* A U_t dt$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $f \in L_a^2$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $(U_t f)(z) = f(e^{-it}z)$ olacak şekilde tanımlanan U_t operatörü birim operatördür. $f, g \in L_a^2$ için yukarıdaki integral tanımından

$$\langle Rad(A)f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle U_t^* A U_t f, g \rangle dt$$

elde edilir. $A = Rad(A)$ olduğunda A operatörü radyal operatör olarak adlandırılır (Zorboska, 2003).

Radyal operatör ile Berezin sembolü arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilmiştir.

Önerme 3.31. Birim diskteki her z için $\widetilde{Rad(A)}(z) = Rad(\tilde{A})(z)$ dir. A operatörünün radyal olması için gerek ve yeter koşul A operatörünün Berezin sembolünün radyal fonksiyon olmasıdır (Zorboska, 2003).

Çözüm.

$$U_t k_z(w) = k_z(e^{-it}w) = \frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z}e^{-it}w)^2} = k_{e^{it}z}(w)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \widetilde{Rad(A)}(z) &= \langle Rad(A)k_z, k_z \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle A U_t k_z, U_t k_z \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle A k_{e^{it}z}, k_{e^{it}z} \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{A}(e^{it}z) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $z \in \mathbb{D}$ için $\widetilde{Rad(A)}(z) = rad(\tilde{A})(z)$ dir. O zaman, eğer A radyal operatör ise Berezin dönüşümü de radyal fonksiyon olmak zorundadır. Öte yandan bir operatörün Berezin dönüşümü radyal olduğunda yani $\mathbb{D}$ 'deki tüm z için $\widetilde{Rad(A)}(z) = \tilde{A}(z)$ olduğunda $Rad(A) = A$ olur.

Schatten-von Neumann sınıflarının tanımlanmasında kullanılacak olan singüler sayısı (s -sayısı) tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 3.32. $\mathcal{B}(H)$ sonsuz boyutlu ayrılabilir H kompleks Hilbert uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin cebiri ve $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{B}(H)$ rankı n yi geçmeyen

tüm operatörlerin kümesi olsun. Bir $A \in \mathcal{B}(H)$ operatörünün $s_n(A)$ singüler sayısı (s -sayısı)

$$s_n(A) = \lambda_n \left((A^*A)^{\frac{1}{2}} \right), n \geq 1$$

ile tanımlanır. Burada $\lambda_n, (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ operatörünün özdeğerleridir (Gokhberg and Krein, 1965; Karaev, 2002).

Tanım 3.33. $0 < p < \infty$ için Schatten-von Neumann sınıfı $\mathfrak{S}_p := \mathfrak{S}_p(H)$

$$\sum_{n \geq 0} (s_n(K))^p < +\infty$$

koşulunu sağlayan $s_n(K)$ singüler sayılara sahip H uzayındaki tüm K kompakt operatörlerin uzayıdır (Gokhberg and Krein, 1965; Karaev, 2002).

$\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ ($1 \leq p \leq +\infty$) sınıfı aşağıda tanımlanan norma göre bir Banach uzayıdır:

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_p}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(s_n(A))^p|^{\frac{1}{p}}.$$

$p = 2$ için $A \in \mathfrak{S}_2(H)$ operatörü Hilbert-Schmidt operatörü olarak adlandırılır. Ayrıca

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|_H^2 \quad (3.3)$$

dır.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem Jensen ve Young eşitsizliğinin bir sonucudur.

Yardımcı Teorem 3.34. $a, b \geq 0$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. O zaman herhangi $r \geq 1$ için

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b \leq [\lambda a^r + (1-\lambda)b^r]^{\frac{1}{r}} \quad (3.4)$$

dir (Hardy vd., 1988; Sattari vd., 2015).

Yardımcı Teorem 3.35. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitif bir operatör olsun. Herhangi birim vektör $x \in \mathcal{H}$ ve pozitif r reel sayısı için

$$(a) \langle Ax, x \rangle^r \leq \langle A^r x, x \rangle, r \geq 1,$$

$$(b) \langle A^r x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle^r, r \in (0, 1]$$

dir (Hardy vd., 1988).

Aşağıdaki sonuç $f(t) = t^r$ ($r \geq 1$) konveks fonksiyonu için Jensen eşitsizliğinin bir sonucu olarak verilebilir.

Yardımcı Teorem 3.36. Eğer a ve b negatif olmayan reel sayılarsa o zaman herhangi $r \geq 1$ için

$$(a+b)^r \leq 2^{r-1} (a^r + b^r) \quad (3.5)$$

dir.

Young eşitsizliğinin toplamsal olarak geliştirilmiş hali aşağıdaki gibi verilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.37. $r = \min \{\lambda, 1 - \lambda\}$ olmak üzere eğer $a, b \geq 0$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ ise o zaman

$$a^\lambda b^{1-\lambda} + r \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right)^2 \leq \lambda a + (1 - \lambda) b \quad (3.6)$$

dir (Kittaneh ve Manasrah, 2011).

Kantorovich sabitli Young eşitsizliğinin çarpımsal olarak geliştirilmiş hali aşağıdaki gibi verilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.38. Eğer $a, b \geq 0$ ise buradan

$$(1 - \lambda) a + \lambda b \geq k(h, 2)^r a^{1-\lambda} b^\lambda \quad (3.7)$$

dir. Burada $h \geq 0$ için $K(h, 2) = \frac{(h+1)^2}{4h}$ olacak şekilde $h = \frac{b}{a}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1, r = \min \{\lambda, 1 - \lambda\}$ dir. Sahip olduğu özellikten dolayı $K(h, 2) = K\left(\frac{1}{h}, 2\right) \geq 1$ ($h > 0$) ve $K(h, 2)$ fonksiyonları $[1, 0)$ üzerinde artan ve $(0, 1)$ üzerinde azalandır (Fuji vd., 2011).

Genelleştirilmiş karma Cauchy-Schwarz eşitsizliği:

Yardımcı Teorem 3.39. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $x, y \in \mathcal{H}$ olsun.

(a) Eğer $0 \leq \lambda \leq 1$ ise o zaman

$$|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq \left\langle |A|^{2\lambda} x, x \right\rangle \left\langle |A^*|^{2(1-\lambda)} y, y \right\rangle \quad (3.8)$$

dir.

(b) Eğer f, g fonksiyonları $f(t)g(t) = t$ koşulunu sağlayan $[0, \infty)$ üzerinde negatif

olmayan sürekli fonksiyonlar ise o zaman

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \|f(|A|)x\| \|g(|A^*|)y\| \quad (3.9)$$

dir (Sattari vd., 2015).

Yardımcı Teorem 3.40. $x, y \in \mathcal{H}$ ve $\|y\| = 1$ olsun. O zaman

$$\|x\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|x - \lambda y\|^2 \quad (3.10)$$

dır (Dragomir, 2003).



4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Radyal Limit ile İlgili Bazı Sonuçlar

Bu kısımda aşağıdaki sorulara cevap verilmeye çalışılacaktır:

$\mathcal{D}$ Dirichlet uzayı üzerindeki sınırlı bir operatörün Berezin dönüşümü birim çemberin hemen hemen her yerinde radyal limite sahip midir? Benzer soru, karmaşık düzlem üzerindeki Fock uzayı $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ için de geçerli midir?

Tanım 4.1.2. $(a_n)_{n \geq 0}$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = l$$

ise $(a_n)_{n \geq 0}$ dizisi l değerine Borel toplanabilir denir ve (B) -toplanabilir şekilde kısaltılır (Sawyer ve Watson, 1994).

Tanım 4.1.3. $(a_n)_{n \geq 0}$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{\log(1-x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \zeta$$

ise $(a_n)_{n \geq 0}$ dizisi ζ değerine logaritmik metotla toplanabilir denir ve (L) -toplanabilir şeklinde kısaltılır (Ishiguro, 1962).

K^∞ ve K_-^∞ kümeleri sırasıyla tüm sınırlı Borel toplanabilir olmayan dizilerin kümesini ve (L) -toplanabilir olmayan dizilerin kümesini gösterecektir.

Teorem 4.1.4. $(a_n)_{n \geq 0} \in K_-^\infty$ bir dizi ve $\{z^n/\sqrt{n+1} : n \geq 0\}$ dizisi $\mathcal{D}$ Dirichlet uzayının ortonormal bazı olsun.

$$D_{\{a_n\}} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}} = a_n \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$$

ile tanımlanan köşegen operatörün Berezin sembolü $\mathbb{T}$ birim diski üzerinde hemen hemen her yerde radyal limite sahip değildir.

İspat $\mathcal{D}$ Dirichlet uzayı üzerindeki diagonal operatörün Berezin sembolü her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{\{a_n\}}(\lambda) &= \langle D_{\{a_n\}} \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle \\ &= -\frac{1}{\log(1-|\lambda|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(|\lambda|^2)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

dir. Bu yüzden, $\tilde{D}_{\{a_n\}}$ birim disk üzerinde radyal fonksiyondur yani $\tilde{D}_a(\lambda) = \tilde{D}_a(|\lambda|)$ dir. $(a_n)_{n \geq 0}$ dizisinin (L) -toplanamayan bir dizi olduğunu göz önünde bulundurursak elde edilen yukarıdaki eşitlik $\tilde{D}_{\{a_n\}}$ Berezin dönüşümünün birim çember üzerinde hemen hemen her yerde radyal limiti olmadığını gösterir. Bu da bize istenilen sonucu verir.

Bir sonraki sonuç, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ Fock uzayında sınırlı lineer operatörün Berezin sembolünün $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminde radyal limitinin olmadığını gösterecektir.

Teorem 4.1.5. $(a_n)_{n \geq 0} \in K^\infty$ bir dizi ve $\left\{ z^n / (n! 2^n)^{1/2} \right\}_{n \geq 0}$ dizisi $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ Fock uzayının ortonormal bazı olsun. O zaman $\tilde{D}_{\{a_n\}}$ Berezin sembolü $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi üzerinde radyal limite sahip değildir.

İspat $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ Fock uzayında diagonal operatörünün Berezin sembolü her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}\tilde{D}_a(\lambda) &= \langle D_{\{a_n\}} \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle = \frac{1}{e^{|\lambda|^2/2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!} \\ &= e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!}\end{aligned}$$

dir ve böylece $\tilde{D}_a$ dönüşümü $\mathbb{C}$ kompleks düzlem üzerinde radyal fonksiyondur, yani $\tilde{D}_a(\lambda) = \tilde{D}_a(|\lambda|)$ dir.

Teoremin koşulundan dolayı $(a_n)_{n \geq 0}$ dizisi (B) -toplanabilir olmadığından yukarıdaki denklemden $D_{\{a_n\}}$ operatörünün Berezin sembolü olan $\tilde{D}_{\{a_n\}}$, $\mathbb{C}$ kompleks düzlem üzerinde radyal limite sahip değildir.

4.2. Dizi ve Serilerin Borel Yakınsaklığı

Bu bölümde, $\mathcal{F}$ Fock uzayında

$$W_\Lambda \frac{z^n}{(n!2^n)^{1/2}} = \lambda_n \frac{z^{n+1}}{((n+1)!2^{n+1})^{1/2}}, \quad n \geq 0, \quad (4.1)$$

ile tanımlı W_Λ ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolleri yardımıyla kompleks sayıların dizi ve serilerinin Borel yakınsaklığı için bazı kriterler verilmiştir.

Teorem 4.2.1. $\{a_n\}_{n \geq 0}$ kompleks sayıların bir dizisi ve W_a operatörü (4.1) formülünde tanımlanan $\mathcal{F}$ Fock uzayı üzerinde ağırlıklı kaydırma operatörü olsun. O zaman

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}}$ serisinin Borel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{|\tilde{W}_a|(\sqrt{2t})}{\sqrt{2t}} = O(e^{-t}), \quad t \rightarrow \infty$$

olmasıdır.

(b) $\left(\frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \right)_{n \geq 0}$ dizisinin Borel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$|\tilde{W}_a|(\sqrt{2t}) = O(\sqrt{2t}), \quad t \rightarrow \infty$$

olmasıdır.

Şimdi yukarıdaki teoremin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.2.2. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ herhangi bir operatör ve $e_n(z) = \left\{ \frac{z^n}{(n!2^n)^{1/2}} \right\}_{n \geq 0}$ dizisi $\mathcal{F}$ Fock uzayının ortonormal bazı olsun. O zaman her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\tilde{T}(\lambda) = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n!2^n)(m!2^m)}} \langle T e_n, e_m \rangle \bar{\lambda}^n \lambda^m \quad (4.2)$$

dır.

İspat. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\lambda) &= \left\langle T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle = \left\langle T \frac{k_\lambda}{\|k_{L_a^2, \lambda}\|}, \frac{k_\lambda}{\|k_{L_a^2, \lambda}\|} \right\rangle \\
&= e^{-|\lambda|^2/2} \left\langle \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} T e_n(z), \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) \right\rangle \\
&= e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n, m=0}^{\infty} \overline{e_n(\lambda)} e_m(\lambda) \langle T e_n, e_m \rangle \\
&= e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}^n}{\sqrt{n!2^n}} \frac{\lambda^m}{\sqrt{m!2^m}} \langle T e_n, e_m \rangle \\
&= e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n!2^n)(m!2^m)}} \langle T e_n, e_m \rangle \bar{\lambda}^n \lambda^m,
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (4.2) formülünü ispatlar.

Teorem 4.2.1 için ispat. W_a operatörü $\mathcal{F}$ Fock uzayı üzerinde ağırlıklı kaydırma operatörü olsun. Buradan (4.2) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_a(\lambda) &= e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n!2^n)(m!2^m)}} \langle a_n e_{n+1}, e_m \rangle \bar{\lambda}^n \lambda^m \\
&= \lambda e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{|\lambda|^{2n}}{n!2^n} \\
&= \lambda e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

veya

$$\tilde{W}_a(\lambda) = \lambda e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!} \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (4.3)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\left| \frac{\tilde{W}_a(\lambda)}{\lambda e^{-|\lambda|^2/2}} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!} \right| \quad (4.4)$$

ve

$$\left| \frac{\tilde{W}_a(\lambda)}{\lambda} \right| = \left| e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!} \right| \quad (4.5)$$

dır. $t = |\lambda|^2/2$ olsun. Buradan (4.4) ve (4.5) formülleri kullanılarak her $t \in R^+$ için

$$\frac{|\tilde{W}_a|(\sqrt{2t})}{\sqrt{2t}e^{-t}} = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{(t)^n}{n!} \right| \quad (4.6)$$

ve

$$\frac{|\tilde{W}_a|(\sqrt{2t})}{\sqrt{2t}} = \left| e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{(t)^n}{n!} \right| \quad (4.7)$$

elde edilir. Böylelikle (4.6) ve (4.7) formüllerinden teoremin (a) ve (b) iddiaları ispatlanmış olur.

Sonuç. 4.2.3.

- (a) $Ber(W_a) = \left\{ \lambda e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$
- (b) $ber(W_a) = \sup \left\{ |\lambda| e^{-|\lambda|^2/2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+2}} \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!} \right| : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$
- (c) Eğer $\sup_{n \geq 0} \frac{|a_n|}{\sqrt{2n+2}} < +\infty$ ise o zaman $ber(W_a)$ üst sınıra sahip değildir.

İspat. (a) ve (b) nin ispatı (4.3) formülünden kolayca elde edilir. Şimdi (c) yi ispatlayalım. Gerçekten de $\sup_{n \geq 0} \frac{|a_n|}{\sqrt{2n+2}} < +\infty$, $n \geq 0$ koşulu göz önüne alınırsa her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} ber(W_a) &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left(|\lambda| e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda|^2/2)^n}{n!} \right) \sup_{n \geq 0} \frac{|a_n|}{\sqrt{2n+2}} \\ &\leq \sup_{n \geq 0} \frac{|a_n|}{\sqrt{2n+2}} \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left(|\lambda| e^{-|\lambda|^2/2} e^{|\lambda|^2/2} \right) \\ &= \sup_{n \geq 0} \frac{|a_n|}{\sqrt{2n+2}} \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} (|\lambda|), \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $ber(W_a)$ nın bir üst sınıra sahip olmadığını gösterir.

4.3. Dirichlet Uzayı Üzerindeki Schatten Neumann Sınıfı Operatörlerin Karakterizasyonu

Bu bölüm, temel olarak Nordgren ve Rosenthal tarafından ortaya konulan soruya dayanmaktadır.

Schatten-von Neumann sınıfı operatörleri Berezin sembolleri yardımıyla nasıl karakterize edilir?

Şimdi $\mathcal{D}$ Dirichlet uzayındaki Schatten-von Neumann sınıfı operatörleri Berezin sembolleri yardımıyla karakterize edilecektir.

Teorem. 4.3.1 . A operatörü $\mathcal{D}$ Dirichlet uzayı üzerinde kompakt bir operatör olsun. A operatörünün bir Hilbert-Schmidt operatörü olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \left[\left(-\frac{\log(1 - |\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} A^* A T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} \right) (\lambda) \right] < +\infty$$

olmasıdır.

İspat. $\mathcal{D}$ Dirichlet uzayının ortonormal bazı $\{z^n/\sqrt{n+1} : n \geq 0\}$ olduğundan ve $k_\lambda(z) = \frac{1}{\bar{\lambda}z} \log \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ uzayının üretici çekirdeği olduğundan herhangi $\lambda \in \mathcal{D}$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left\| A \frac{z^n}{\sqrt{n+1}} \right\|_{\mathcal{D}}^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \langle A z^n, A z^n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \langle A^* A z^n, z^n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\langle A^* A \frac{z^n}{\widehat{k}_\lambda(z)} \widehat{k}_\lambda(z), \frac{z^n}{\widehat{k}_\lambda(z)} \widehat{k}_\lambda(z) \right\rangle \\ &= -\frac{\log(1 - |\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\langle A^* A z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right) \widehat{k}_\lambda(z), z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right) \widehat{k}_\lambda(z) \right\rangle \\ &= -\frac{\log(1 - |\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\langle A^* A T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} \widehat{k}_\lambda(z), T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} \widehat{k}_\lambda(z) \right\rangle \\ &= -\frac{\log(1 - |\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\langle T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} A^* A T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} \widehat{k}_\lambda(z), \widehat{k}_\lambda(z) \right\rangle \\ &= -\frac{\log(1 - |\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} A^* A T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} \right) (\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.3) formülünü göz önünde bulundurarak $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (s_n(A))^2 = -\frac{\log(1-|\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} A^* A T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} \right)^{\sim}(\lambda)$$

dır ve dolayısıyla $A \in \mathfrak{G}_2(\mathcal{F})$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \left[\left(-\frac{\log(1-|\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} A^* A T_{z^n \left(-\frac{\bar{\lambda}z}{\log(1-\bar{\lambda}z)} \right)} \right)^{\sim}(\lambda) \right] < +\infty.$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.4. Operatörler Üzerindeki Berezin Sayısı Eşitsizliklerinin İyileştirilmesi

Bu bölümde, Kerin-Lin ve Young Eşitsizliğinin genelleştirilmesi kullanılarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda operatörlerin Berezin sayısı için bazı eşitsizlikler elde edilecektir. Ayrıca üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda $ber^2(A) - ber(A^2)$ için üst sınırlar verilecektir.

Teorem 4.4.1. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzay ve $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun.

(a)

$$ber^2(A) \leq ber(A^2) + \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A - \lambda I\|^2 \quad (4.8)$$

dır.

(b) f ve g fonksiyonları $f(t)g(t) = t$ koşulunu sağlayan $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman $r \geq 1$ için

$$ber^{2r}(A) \leq 2^{-r} \left(\|f^2(|A^2|) + g^2(|(A^2)^*|)\| + 2^r \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A - \lambda I\|^{2r} \right) \quad (4.9)$$

elde edilir.

İspat. Krein-Lin eşitsizliği (Dragomir, 2008)

$$|\langle x, z \rangle| |\langle y, z \rangle| \leq |\langle x, y \rangle| \|z\|^2 + \sqrt{\|x\|^2 \|z\|^2 + |\langle x, z \rangle|^2} \sqrt{\|y\|^2 \|z\|^2 + |\langle y, z \rangle|^2} \quad (4.10)$$

ile verilen eşitsizliği denktir. Aynı zamanda $x, y, z \in \mathcal{H}$ ile $\|z\| = 1$ için

$$|\langle x, z \rangle| |\langle y, z \rangle| \leq |\langle x, y \rangle| + \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|x - \lambda z\| \inf_{\mu \in \mathbb{C}} \|y - \mu z\| \quad (4.11)$$

dir (Dragomir, 2003). (4.11) eşitsizliğinde $x = A\hat{k}_\xi, y = A^*\hat{k}_\xi$ yazarsak, her $\xi \in \Omega$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} |\widetilde{A}(\xi)|^2 &\leq |\widetilde{A^2}(\xi)| + \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi\| \inf_{\mu \in \mathbb{C}} \|A^*\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi\| \\ &\leq |\widetilde{A^2}(\xi)| + \|A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi\| \|A\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi\| \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik aşağıdaki ifadeye denktir:

$$ber^2(A) \leq ber(A^2) + \|A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi\| \|A^*\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi\|.$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ üzerinde infimum alınırsa ve

$$\inf_{\mu \in \mathbb{C}} \|A^* - \mu I\| = \inf_{\mu \in \mathbb{C}} \|A - \bar{\mu} I\| = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A - \lambda I\|$$

olduğundan

$$ber^2(A) \leq ber(A^2) + \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A - \lambda I\|$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

(b) Diğer taraftan (3.9) ve AM-GM eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |\widetilde{A^2}(\xi)| &\leq \|f(|A^2|)\hat{k}_\xi\| \|g(|(A^2)^*|)\hat{k}_\xi\| \\ &= \sqrt{\langle f^2(|A^2|)\hat{k}_\xi, \hat{k}_\xi \rangle + \langle g^2(|(A^2)^*|)\hat{k}_\xi, \hat{k}_\xi \rangle} \\ &\leq \frac{1}{2} \langle (f^2(|A^2|) + g^2(|(A^2)^*|))\hat{k}_\xi, \hat{k}_\xi \rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

dir. AM-GM eşitsizliği tekrar uygulanarak

$$\|A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi\| \|A^*\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi\| \leq \frac{\|A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi\|^2 + \|A^*\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi\|^2}{2} \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.13) ve (4.14) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$\begin{aligned}
& \left| \tilde{A}(\xi) \right|^2 \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\left\langle \left(f^2(|A^2|) + g^2 \left(|(A^2)^*| \right) \right) \hat{k}_\xi, \hat{k}_\xi \right\rangle + \left\| A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi \right\| + \left\| A\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi \right\|^2 \right) \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\left\langle \left(f^2(|A^2|) + g^2 \left(|(A^2)^*| \right) \right) \hat{k}_\xi, \hat{k}_\xi \right\rangle^r + \left(\left\| A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi \right\|^{2r} + \left\| A^*\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi \right\|^2 \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

((3.4) numaralı eşitsizlikten

$$\leq \frac{1}{2} \left(\left\langle \left(f^2(|A^2|) + g^2 \left(|(A^2)^*| \right) \right) \hat{k}_\xi, \hat{k}_\xi \right\rangle^r + 2^{r-1} \left(\left\| A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi \right\|^{2r} + \left\| A^*\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi \right\|^{2r} \right) \right)^{\frac{1}{r}}$$

((3.5) numaralı eşitsizlikten)

dır. Bu yüzden

$$\left| \tilde{A}(\xi) \right|^{2r} \leq 2^{-r} \left(\left\langle \left(f^2(|A^2|) + g^2 \left(|(A^2)^*| \right) \right) \hat{k}_\xi, \hat{k}_\xi \right\rangle^r + 2^{r-1} \left(\left\| A\hat{k}_\xi - \lambda\hat{k}_\xi \right\|^{2r} + \left\| A^*\hat{k}_\xi - \mu\hat{k}_\xi \right\|^{2r} \right) \right)$$

dır. $\xi \in \Omega$ üzerinde supremum alındığında herhangi $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

$$w^{2r}(A) \leq \left(\left\| f^2(|A^2|) + g^2 \left(|(A^2)^*| \right) \right\|^r + 2^{r-1} \left(\|A - \lambda I\|^{2r} + \|A - \mu I\|^{2r} \right) \right)$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak, yukarıdaki eşitsizlikte $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ üzerinde infimum alındığında ve

$$\inf_{\mu \in \mathbb{C}} \|A^* - \mu I\| = \inf_{\mu \in \mathbb{C}} \|A - \bar{\mu} I\| = \inf_{\mu \in \mathbb{C}} \|A - \lambda I\|$$

kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.2. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. O zaman

$$ber^2(A) \leq \frac{1}{2} \left(\left\| |A^2| + |(A^2)^*| \right\| + 2 \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A - \lambda I\|^2 \right)$$

dır.

İspat. (4.9) eşitsizliğinde $r = 1, f(t) = g(t) = \sqrt{t}$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç. 4.4.3. $\|A - \lambda_0 I\| \leq p$ olacak şekilde $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ bir kompleks sayı olsun. Buradan

$$ber^2(A) - ber(A^2) \leq p^2$$

elde edilir.

İspat. (4.8) eşitsizliğinde $\lambda = \mu = \lambda_0$ alındığında

$$ber^2(A) - ber(A^2) \leq \|A - \lambda_0 I\| \|A^* - \lambda_0 I\|$$

elde edilir. Yani

$$ber^2(A) - ber(A^2) \leq p^2$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 4.4.4. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, a, b > 0$ ve $r \geq 1$ için

$$\|A - \lambda I\| \leq a, \|B - \mu I\| \leq b$$

olacak şekilde $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve B sıfırdan farklı self-adjoint bir operatör olsun. O zaman

$$ber(A) ber(B) \leq \left(\frac{a^{2r} + b^{2r}}{2} \right)^{\frac{1}{r}} + ber(B^* A)$$

dır. Özel olarak eğer $\widehat{A}k_\xi \perp \widehat{B}k_\xi$ ise o zaman $r \geq 1$ için

$$ber(A) ber(B) \leq \left(\frac{a^{2r} + b^{2r}}{2} \right)^{\frac{1}{r}}$$

elde edilir.

İspat. $\widehat{k}_\xi$ normalleştirilmiş üretici çekirdek olsun. (4.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{A}(\xi) \right| \left| \widetilde{B}(\xi) \right| - \left| \langle \widehat{A}k_\xi, \widehat{B}k_\xi \rangle \right| &\leq \sqrt{\left\| \widehat{A}k_\xi \right\|^2 - \left| \widetilde{A}(\xi) \right|^2} \sqrt{\left\| \widehat{B}k_\xi \right\|^2 - \left| \widetilde{B}(\xi) \right|^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\left\| \widehat{A}k_\xi \right\|^2 - \left| \widetilde{A}(\xi) \right|^2 + \left\| \widehat{B}k_\xi \right\|^2 - \left| \widetilde{B}(\xi) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

(AM-GM eşitsizliğinden)

$$\leq \frac{1}{2} \left(\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\| \widehat{A}k_\xi - \lambda \widehat{k}_\xi \right\|^2 + \inf_{\mu \in \mathbb{C}} \left\| \widehat{B}k_\xi - \mu \widehat{k}_\xi \right\|^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& ((3.10) \text{ eşitsizliğinden}) \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\|A - \lambda I\|^2 + \|B - \mu I\|^2 \right) \\
& \leq \frac{a^{2r} + b^{2r}}{2} \\
& \leq \left(\frac{a^{2r} + b^{2r}}{2} \right)^{\frac{1}{r}} ((3.4) \text{ eşitsizliğinden})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$|\tilde{A}(\xi)| |\tilde{B}(\xi)| \leq \left(\frac{a^{2r} + b^{2r}}{2} \right)^{\frac{1}{r}} + |\widetilde{B^*A}(\xi)| \quad (4.15)$$

ve

$$\sup_{\xi \in \Omega} \left(|\tilde{A}(\xi)| |\tilde{B}(\xi)| \right) \leq \left(\frac{a^{2r} + b^{2r}}{2} \right)^{\frac{1}{r}} + \sup_{\xi \in \Omega} \left(|\widetilde{B^*A}(\xi)| \right)$$

olur ki bu da

$$\text{ber}(A) \text{ber}(B) \leq \left(\frac{a^{2r} + b^{2r}}{2} \right)^{\frac{1}{r}} + \text{ber}(B^*A)$$

olduğunu ifade eder.

Sonuç 4.4.5. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $a, b > 0$ olsun. O zaman

$$\text{ber}^2(A) - \text{ber}(A^2) \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

dir.

İspat. (4.15) numaralı eşitsizlikte $r = 1$ ve $B = A^*$ alındığında $\forall \xi \in \Omega$ için

$$|\tilde{A}(\xi)|^2 \leq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) + |\widetilde{A^2}(\xi)|$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sup_{\xi \in \Omega} \left(|\tilde{A}(\xi)|^2 \right) \leq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) + \sup_{\xi \in \Omega} \left(|\widetilde{A^2}(\xi)| \right)$$

dır. Böylece

$$\text{ber}^2(A) - \text{ber}(A^2) \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, Young eşitsizliğinin geliştirilmişini uygulayarak (3.2) eşitsizliğinin daha genel hali elde edilecektir.

Teorem 4.4.6 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $r = \min\{\lambda, 1 - \lambda\}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. O zaman

$$ber(A) \leq \frac{1-2r}{2} \| |A| + |A^*| \| + 2r \|A\|$$

elde edilir.

İspat. $\widehat{k}_\xi$ normalleştirilmiş üretici çekirdek olsun. O zaman

$$\begin{aligned} |\widetilde{A}(\xi)| &\leq \sqrt{|\widetilde{A}|(\xi) |\widetilde{A}^*|(\xi)} \quad ((3.8) \text{ eşitsizliğinden}) \\ &= \left(\left(|\widetilde{A}(\xi)| \right)^{1-\lambda} \left(|\widetilde{A}^*(\xi)| \right)^\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(|\widetilde{A}^*(\xi)| \right)^{1-\lambda} \left(|\widetilde{A}(\xi)| \right)^\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\left(|\widetilde{A}(\xi)| \right)^{1-\lambda} \left(|\widetilde{A}^*(\xi)| \right)^\lambda + \left(|\widetilde{A}^*(\xi)| \right)^{1-\lambda} \left(|\widetilde{A}(\xi)| \right)^\lambda \right) \\ &\quad (\text{AM-GM eşitsizliğinden}) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[(1-\lambda) |\widetilde{A}|(\xi) + \lambda |\widetilde{A}^*|(\xi) - r \left(\sqrt{|\widetilde{A}|(\xi)} - \sqrt{|\widetilde{A}^*|(\xi)} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(1-\lambda) \sqrt{|\widetilde{A}^*|(\xi)} + \lambda |\widetilde{A}|(\xi) - r \left(\sqrt{|\widetilde{A}|(\xi)} - \sqrt{|\widetilde{A}^*|(\xi)} \right)^2 \right] \\ &\quad ((3.6) \text{ eşitsizliğinden}) \\ &= \frac{1}{2} \left(|\widetilde{A}| + |\widetilde{A}^*|(\xi) - 2r |\widetilde{A}| + |\widetilde{A}^*|(\xi) + 4r \sqrt{|\widetilde{A}|(\xi) |\widetilde{A}^*|(\xi)} \right) \end{aligned}$$

yani $\forall \xi \in \Omega$ için

$$|\widetilde{A}(\xi)| + r (|\widetilde{A}| + |\widetilde{A}^*|)(\xi) \leq \frac{1}{2} \left((|\widetilde{A}| + |\widetilde{A}^*|)(\xi) + 4r \sqrt{|\widetilde{A}|(\xi) |\widetilde{A}^*|(\xi)} \right)$$

dır. Yukardaki eşirsizlikte $\xi \in \Omega$ üzerinde supremum alınarak

$$ber(A) \leq \frac{1-2r}{2} \| |A| + |A^*| \|_{ber} + 2r \|A\|_{ber}$$

elde edilir ki bu (3.2) eşitsizliğin geliştirilmiş halidir.

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü $A^*A - AA^* \geq 0$ ise $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü hiponormal operatördür.

Teorem 4.4.7. Eğer $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hiponormal operatör ve $r = \min\{\lambda, 1 - \lambda\}$ olsun. O zaman $\varsigma(x) = K \left(\frac{|\tilde{A}|(\xi)}{|\tilde{A}^*|(\xi)}, 2 \right)^r$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere

$$ber(A) \leq \frac{1}{\inf_{\xi \in \Omega} \varsigma(x)} \frac{\| |A| + |A^*| \|}{2}$$

dir.

İspat. $\widehat{k}_\xi$ normalleştirilmiş üretici çekirdek olsun.

$$\begin{aligned} |\tilde{A}(\xi)| &\leq \sqrt{|\tilde{A}|(\xi) |\tilde{A}^*|(\xi)} \quad ((3.8) \text{ eşitsizliğinden}) \\ &= \left[\left(|\tilde{A}^*|(\xi) \right)^{1-\lambda} \left(|\tilde{A}|(\xi) \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \left[\left(|\tilde{A}|(\xi) \right)^{1-\lambda} \left(|\tilde{A}^*|(\xi) \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\left(|\tilde{A}^*|(\xi) \right)^{1-\lambda} \left(|\tilde{A}|(\xi) \right)^\lambda + \left(|\tilde{A}|(\xi) \right)^{1-\lambda} \left(|\tilde{A}^*|(\xi) \right)^\lambda \right] \end{aligned}$$

(AM-GM eşitsizliğinden)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K \left(\frac{|\tilde{A}|(\xi)}{|\tilde{A}^*|(\xi)}, 2 \right)^r} \left((1-\lambda) |\tilde{A}^*|(\xi) + \lambda |\tilde{A}|(\xi) \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K \left(\frac{|\tilde{A}^*|(\xi)}{|\tilde{A}|(\xi)}, 2 \right)^r} \left((1-\lambda) |\tilde{A}|(\xi) + \lambda |\tilde{A}^*|(\xi) \right) \right] \end{aligned}$$

((3.7) eşitsizliğinden) $\forall \xi \in \Omega$ için

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K \left(\frac{|\tilde{A}|(\xi)}{|\tilde{A}^*|(\xi)}, 2 \right)^r} \left(|\tilde{A}^*|(\xi) + |\tilde{A}|(\xi) \right) \right]$$

dir. Yani

$$|\tilde{A}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K \left(\frac{|\tilde{A}|(\xi)}{|\tilde{A}^*|(\xi)}, 2 \right)^r} \left(|\tilde{A}^*|(\xi) + |\tilde{A}|(\xi) \right) \right]$$

ve

$$\sup_{\xi \in \Omega} \left(\left| \widetilde{A}(\xi) \right| \right) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{K \left(\frac{\left| \widetilde{A} \right|(\xi)}{\left| \widetilde{A}^* \right|(\xi)}, 2 \right)^r} \sup_{\xi \in \Omega} \left(\left| \widetilde{A}^* \right|(\xi) + \left| \widetilde{A} \right|(\xi) \right)$$

elde edilir ki bunun anlamı

$$ber(A) \leq \frac{1}{\inf_{\xi \in \Omega} \zeta(x)} \frac{\| |A| + |A^*| \|}{2}$$

olur.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışmasında, $\mathcal{D}$ Dirichlet uzayı üzerindeki sınırlı bir operatörün Berezin dönüşümü birim çember üzerinde radyal limite sahip olup olmadığı araştırılmıştır. Benzer problem, kompleks düzlem üzerindeki Fock uzayı $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ için de incelenmiştir. Ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolü yardımıyla kompleks sayıların dizi ve serilerinin Borel yakınsaklığı için bazı yeni kriterler verilmiştir. $\mathcal{D}$ Dirichlet uzayındaki Schatten-von Neumann sınıfı operatörleri Berezin sembolleri yardımıyla karakterize edilmiştir. Kerin-Lin ve Young Eşitsizliğinin genelleştirilmesi kullanarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda operatörlerin Berezin sayısı için bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir kaç öneri vardır:

1. Berezin sayısı ile ilgili çalışmalar literatürde yenidir. Literatürde bilinen eşitsizlik tipleri kullanılarak operatörlerin Berezin sayısı için yeni eşitsizlikler elde edilebilir.
2. Berezin sembolleri ve üretici çekirdekler metodu operatör teoride birçok problemin çözümünde önemli rol oynamaktadır. Toplanabilirlik teorisinde bazı açık problemlerin çözümünde bu metodlar kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Abu-Omar, A., Kittaneh, F., 2015. Numerical radius inequalities for products and commutators of operators. *Houston Journal of Mathematics*, 41, 1163-1173.
- Aronzajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68, 337-404.
- Bakherad, M., 2018. Some Berezin Number Inequalities for Operator Matrices. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 68, 997-1009.
- Bakherad, M., Lashkaripour R., Hajmohamadi M., Yamancı U., 2019. Complete refinements of the Berezin number inequalities. *Journal of Mathematical Inequalities*, 13, 1117-1128.
- Bakherad, M., Garayev M. T., 2019. Berezin number inequalities for operators. *Concrete Operators*, 6, 33-43.
- Berezin, F. A., 1971. Wick and anti-Wick operator symbols. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 86(128), 578-610.
- Berezin, F. A., 1972. Covariant and contravariant symbols for operators. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 6, 1117-1151.
- Berezin, F.A., 1974. Quantization. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 8, 1109-1163.
- Berger, C.A., Coburn, L.A., 1986. Toeplitz operators and quantum mechanics. *Journal of Functional Analysis*, 68(3), 273-299.
- Bergman, S., 1922. Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach orthogonalfunktionen. *Mathematische Annalen*, 86, 237-271.
- Bochner, S., 1922. Ueber orthogonale Systeme analytischer Funktion. *Mathematische Zeitschrift*, 14, 180-207.
- Das, N., Sahoo, M., 2014. Schatten class operators on the Bergman space over bounded symmetric domain. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 20(3), 193-212.
- Das, N., Sahoo, M., 2018. Berezin transform of the absolute value of an operator. *Annals of Functional Analysis*, 9(2), 151-165.
- Dragomir, S.S., 2003. Some Grüss type inequalities in inner product spaces. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 4, 1-10.

- Dragomir, S.S., 2008. Inequalities for the numerical radius, the norm and the maximum of the real part of bounded linear operators in Hilbert spaces. *Linear Algebra and its Applications*, 428, 2980-2994.
- Dragomir, S.S., 2015. A note on numerical radius and the Krein-Lin inequality. *Mathematica*, 60, 149-151.
- Garayev, M.T., Gürdal, M., Okudan, A., 2016. Hardy-Hilbert's inequality and a power inequality for Berezin numbers for operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 19, 883-891.
- Garayev, M.T., Gürdal, M., Saltan, S., 2017. Hardy type inequality for reproducing kernel Hilbert space operators and related problems. *Positivity*, 21, 1615-1623.
- Garayev, M.T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2017. Berezin symbols and Borel Summability. *Quaestiones Mathematicae*, 40(3), 403-411.
- Garayev, M., Bouzeffour, F., Gürdal, M., Yangöz, C.M., 2020. Refinements of Kantorovich type, Schwarz and Berezin number inequalities. *Extracta Mathematicae*, 35, 1-20.
- Garayev, M. T, Saltan, S., Bouzeffour, F., Aktan, B., 2020. Some inequalities involving Berezin symbols of operator means and related questions. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Serie A Matemáticas*, 114, 1-17.
- Garayev, M. T., Alomari, M.W., 2021. Inequalities for the Berezin number of operators and related questions. *Complex Analysis and Operator Theory*, 15, 1-30.
- Gohberg, I. Ts., Krein, M. G., 1969. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operator. *Translations of Mathematical Monographs* 18, American Mathematical Society, Providence, RI.
- Gustafson, K.E., Rao, D.K.M., 1997. *Numerical Range*. Springer, New York.
- Hajmohamadi, M., Lashkaripour, R., Bakherad, M., 2020. Improvements of Berezin number inequalities. *Linear and Multilinear Algebra*, 68, 1218-1229.
- Halmos, P.R., 1982. *A Hilbert Space Problem Book*. Springer-Verlag, New York.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., 1967. *Inequalities*. 2nd edition Cambridge University Press, Cambridge.
- Heydarbeygi, Z., Amyari M., Khanehgir, M., 2021. Some refinements of numerical radius inequalities. *Ukrainian Mathematical Journal*, 72(10), 1664-1674.

- Ishiguro, K., 1962. On the summability methods of logarithmic type. *Proceedings of the Japan Academy*, 38, 703-705.
- Karaev, M. T., 2002. Berezin symbols and Schatten-von Neumann classes. *Matematicheskie Zametki*, 72(2), 207-215.
- Karaev, M. T., 2004. Functional analysis proofs of Abel's theorems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132, 2327-2329.
- Karaev, M.T., 2005. On some problems related to Berezin symbols. *Comptes Rendus Mathematique*, 340, 715-718.
- Karaev, M.T., Saltan, S., 2005. Some Results on Berezin Symbols. *Complex Variables: Theory and Applications*, 50, 185-193.
- Karaev, M. T., 2006. Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces. *Journal of Functional Analysis*, 238, 181-192.
- Karaev, M. T., 2010. (e)-convergence and related problem. *Comptes Rendus Mathematique*, 348, 1059-1062.
- Karaev, M.T., 2012. Use of reproducing kernels and Berezin symbols technique in some questions of operator theory. *Forum Mathematicum*, 24(3), 553-564.
- Karaev, M.T., 2013. Reproducing kernels and Berezin symbols techniques in various questions of operator theory. *Complex Analysis and Operator Theory*, 7, 983-1018.
- Karaev, M. T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2014. Some results related with Berezin symbols and Toeplitz operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 17(3), 1031-1045.
- Kato, T., 1952. Notes on some inequalities for linear operators. *Mathematische Annalen*, 12, 208-212.
- Kılıç, S., 1995. The Berezin symbol and multipliers of functional Hilbert spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(12), 3687-3691.
- Kittaneh, F., 1988. Notes on some inequalities for Hilbert space operators. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 24, 283-293.
- Kittaneh, F., 2005. Numerical radius inequalities for Hilbert space operators. *Studia Mathematica*, 168, 73-80.

- Kittaneh, F., Manasrah, Y., 2011. Reverse Young and Heinz inequalities for matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 59, 1031-1037.
- Kittaneh, F., Moslehian, M.S., Yamazaki, T., 2015. Cartesian decomposition and numerical radius inequalities. *Linear Algebra and Its Applications*, 471, 46-53.
- Kolmogorov, A.N., 1941. Stationary Sequences in Hilbert Space. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2, 1-40.
- Krein, M.G., 1963. Hermitian Positive Kernels on Homogeneous Spaces. *American Mathematical Society Translations*, 2(34), 69-108.
- Marshall, D., Sundberg, C., 1994. Interpolating sequences for the multipliers of the Dirichlet space. Preprint; see <http://www.math.washington.edu/marshall/preprints/preprints.html>.
- Mercer, J., 1909. Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equation. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 209, 415-446.
- Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary Values of Berezin symbols. *Operator Theory: Advances and Applications*, 73, 362-368.
- Pehlivan, S., Karaev, M.T., 2004. Some results related with statistical convergence and Berezin symbols. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 299, 333-340.
- Peller, V.V., 1980. Hankel operators of class S_p and their applications (rational approximation, Gaussian processes, operator majorization problem). *Matematicheskii Sbornik*, 113, 538-581.
- Powell, R.E., Shah, S.M., 1972. , Summability theory and applications. Van Nostrand Reinhold, London.
- Rynne, B.P., Youngson, M.A., 2000. *Linear Functional Analysis*. Springer-Verlag, London.
- Sahoo, S., Das, N., Mishra, D., 2019. Numerical radius inequalities for operator matrices. *Advances in Operator Theory*, 4, 197-214.
- Sahoo, S., Das, N., Mishra, D., 2020. Berezin number and numerical radius inequalities for operators on Hilbert spaces. *Advances in Operator Theory*, 5, 714-727.
- Saitoh, S., 1988. *Theory of Reproducing Kernels and Its Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189.

- Saitoh, S., 1997. Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 369.
- Saitoh, S., Sawano, Y., 2016. Theory of reproducing kernels and applications. Springer, Singapore.
- Sattari, M., Moslehian, M.S., Yamazaki, T., 2015. Some generalized numerical radius inequalities for Hilbert space operators. Linear Algebra and Its Applications, 470, 216-227.
- Sawyer, B., Watson, B., 1994. Borel's Methods of Summability: Theory and Applications. Oxford University Press, New York.
- Schwartz, L., 1964. Sous espaces Hilbertiens despaces Vectoriels Topologiques et Noyaux Associes (Noyaux Reproductibles). Journal d'Analyse Mathematique, 13, 115-256.
- Stroethoff, K., 1997. The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions. Banach Center Publications, 38, 361-380.
- Szegő, S., 1921. Ueber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Mathematische Zeitschrift, 9, 218-270.
- Taghavi, A., Roushan, T.A., Darvish, V., 2019. Some upper bounds for the Berezin number of Hilbert space operators. Filomat, 33, 4353-4360.
- Yamancı, U., Gürdal, M., Garayev, M.T., 2017. Berezin number inequality for convex function in reproducing kernel Hilbert space. Filomat, 31, 5711-5717.
- Yamancı, U., 2018. On the summability methods of logarithmic type and the Berezin symbol. Turkish Journal of Mathematics, 42, 2417-2422.
- Yamancı, U., Garayev, M.T., 2019. Some results related with the Berezin number inequalities. Turkish Journal of Mathematics, 43, 1940-1952.
- Yamancı, U., Garayev, M., Çelik, C., 2019. Hardy-Hilbert type inequality in reproducing kernel Hilbert space: its applications and related results. Linear and Multilinear Algebra, 67, 830-842.
- Yamancı, U., Tunç, R., Gürdal, M., 2020. Berezin number, Grüss-type inequalities and their applications. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43, 2287-2296.
- Yamazaki, T., 2007. On upper and lower bounds of the numerical radius and equality condition. Studia Mathematica, 178, 83-89.

Zaremba, S., 1907. Lequation Biharmonique et Une Classe Remarquable de Fonctions Fondamentales Harmoniques. Bulletin International de l'Academie des Sciences de Cracovie, 147-196.

Zorboska, N., 2003. Berezin transforms and radial operators. Proceedings of the American Mathematical Society, 131, 793-800.

Zuo, H., Shi, G., Fuji, M., 2011. Refined Young inequality with Kantorovich constant. Journal of Mathematical Inequalities, 5, 551-556.

