



TOPOLOJİK OYUNLAR VE BAZI İLGİLİ KONULAR

Servet SOYARSLAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Servet SOYARSLAN

04/06/2021

TOPOLOJİK OYUNLAR VE BAZI İLGİLİ KONULAR
(Doktora Tezi)

Servet SOYARSLAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

Bu çalışmada, Banach-Mazur, Choquet ve nokta-açık oyunlarının genelleştirilmelerini yaptık. Genelleştirilmiş nokta açık oyunu ile kompakt dağınık uzayları karakterize ettik. Diğer genelleştirilmiş oyunlar ile yönlendirilmiş tam uzaylar arasındaki bazı ilişkileri sunduk. Choquet oyununda DOLUCU'nun Markov stratejisi varken 1-taktiğinin olup olmadığı bir açık sorudur (Galvin). Choquet oyununda DOLUCU'nun Markov stratejisi varken 2-taktiğinin olduğunu ispatladık. Bu sonuç Galvin'in sorusuna kısmi bir cevaptır. Bu soru daha genel olarak şöyle sorulabilir: Choquet oyununda DOLUCU'nun k -Markov stratejisi varken k -taktiği var mıdır? Biz bu genel soruya bazı özel topolojik uzaylarda olumlu cevaplar verdik. Örneğin, topolojik gruplar veya bazı özel tabanı olan uzaylardaki Choquet oyununda DOLUCU'nun k -Markov stratejisi varken k -taktiğinin olduğunu ispatladık. DOLUCU'nun bazı uygun Nödeyan tabanı olan uzaylar üzerindeki Choquet oyununda kazanma stratejisi varken 1-taktiğinin olduğunu da gördük. Benzer sonuçları Banach-Mazur oyunu için de araştırdık. Bazı sonlu topolojik oyunlar tanımlayarak Ind ve ind boyut fonksiyonlarını karakterize ettik. Bu sonlu oyunlardan birisi ile bir oyun boyut fonksiyonu (ab) elde ettik. X kalıtsal normal uzay iken $ab(X)=\text{Ind}(X)$ olduğunu ve X normal uzayken $\text{Ind}(X)$ değerinin $ab(X)$ değerini geçmediğini ispatladık.

Bilim Kodu : 20405
Anahtar Kelimeler : Topolojik oyunlar, Banach-Mazur oyunu, Choquet oyunu,
Sayfa Adedi : 108
Danışman : Prof. Dr. Çetin VURAL
İkinci Danışman : Prof. Dr. Süleyman ÖNAL

TOPOLOGICAL GAMES AND SOME RELATED TOPICS

(Ph. D. Thesis)

Servet SOYARSLAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2021

ABSTRACT

In this study, we generalize the Banach-Mazur, Choquet and point-open games. By using generalized point-open game, we find a characterization of compact scattered spaces. We get some relations between the other generalized games and directed complete spaces. There is an open question in the Choquet game about existence of NONEMPTY's 1-tactic, whenever s/he has a Markov strategy in this game (Galvin). We prove that if NONEMPTY has a Markov strategy in the Choquet game, then s/he has a 2-tactic in this game. This result is a partial answer for Galvin's question. More general version of this question is that if NONEMPTY has a k -Markov strategy in the Choquet game, does NONEMPTY have a k -tactic in this game? In some special topological spaces, we give some affirmative answers to this general question. For instance, we prove that if NONEMPTY has a k -Markov strategy in the Choquet game on topological groups or on some spaces with some special bases, then s/he has a k -tactic in that game. We also show that if NONEMPTY has a winning strategy in the Choquet game on some spaces with some proper Noetherian bases, then NONEMPTY has a 1-tactic, in that game. We investigate some similar results for the Banach-Mazur game. We define some finite topological games and by using them we get some dimension functions which characterize the dimension function Ind and ind . By using one of the finite games, we get a game dimension function ab . We prove that $\text{ab}(X) = \text{Ind}(X)$ where X is a hereditarily normal space and $\text{Ind}(X)$ does not exceed $\text{ab}(X)$ where X is a normal space.

Science Code : 20405

Key Words : Topological games, Banach-Mazur game, Choquet game, tactics

Page Number : 108

Supervisor : Prof. Dr. Çetin VURAL

Co-Supervisor : Prof. Dr. Süleyman ÖNAL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca deneyiminden fazlası ile yararlandığım, her zaman yol gösterici olan ve desteğini hiç esirgemeyen kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Çetin VURAL'a en derin teşekkürlerimi sunarım.

Tatil günlerinde bile benimle yüz yüze görüşen ve her zaman bir telefon yakınımda olan engin bilgisinden fazlası ile yararlandığım değerli hocam, ikinci danışmanım Sayın Prof. Dr. Süleyman ÖNAL'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Maryland Üniversitesi'nde derslerine katılmamı sağlayarak kümeler teorisi ve lojik bilgisinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Micheal C. LASKOWSKI'ye, bu tezin TİK üyelerinden Sayın Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU'na ve Bolu'dan on-line olmayan TİK toplantılarıma gelme zahmetinde bulunarak değerli zamanını ayıran Sayın Prof. Dr. Zafer ERCAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu güne gelmemde bildiğim veya bilmediğim katkıları olan geçmişteki tüm öğretmenlerime sonsuz teşekkür ederim.

Beni yetiştiren büyüten anneme, bana hep destek olan maddi manevi yardımını esirgemeyen sevgili eşime ve on üç aylık kızıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI ÖN BİLGİLER	3
2.1. Kümeler Teorisi ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	3
2.2. Bazı Topolojik Temel Kavramlar.....	5
2.3. Bazı Topolojik Oyunlar	7
2.4. Topolojik Oyunlarda Oyuncuların Stratejileri.....	9
3. BAZI TOPOLOJİK OYUNLARIN GENELLEŞTİRİLMELERİ.....	15
3.1. Bu Bölüm İçin Gerekli Ön Bilgiler	15
3.2. Nokta-Açık Oyununun Genelleştirilmesi	16
3.3. Banach-Mazur ve Choquet Oyunlarının Genelleştirilmeleri	19
3.4. GBM(X), GCh(X) Oyunları ile BM(X) ve Ch(X) Arasındaki İlişki	23
3.5. Yönlendirilmiş Tam Uzaylar ve GBM(X) ile GCh(X).....	28
3.6. Bu Konu İle İlgili Açık Sorular	35
4. DOLUCU’NUN TOPOLOJİK OYUNLARDAKİ STRATEJİLERİ.....	39
4.1. Choquet Oyununda Markov Strateji ve 2-taktik	40
4.2. Bazı Özel Tabanı Olan Uzaylarda DOLUCU’nun Stratejileri	43
4.3. Choquet Oyununda DOLUCU’nun Stratejileri	50

Sayfa

4.4. Banach-Mazur Oyununda DOLUCU'nun Stratejileri.....	65
4.5. Bu Konu İle İlgili Açık Sorular	70
5. DOLUCU'NUN $Ch(X)$ 'TE K-MARKOV VE K-TAKTİĞİ	73
5.1. DOLUCU için k-Markov ve k-tactic	73
5.2. Bu Konu İle İlgili Açık Sorular	86
6. OYUN BOYUT FONKSİYONLARI.....	87
6.1. Bu Bölüm için Gerekli Ön Bilgiler	87
6.2. Oyunlar.....	90
6.3. Oyun Boyut Fonksiyonları.....	92
6.4. Oyun Boyut Fonksiyonlarının Bazı özellikleri	93
6.5. Bu Konu İle İlgili Açık Sorular	102
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	103
KAYNAKLAR	105
ÖZGEÇMİŞ	107

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

A^c	A kümesinin tümleyeni
A^s	A kümesinin sınırı
A^o	A kümesinin içi
$\tilde{A}$	A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$ A $	A kümesinin kardinalitesi
$\tau(X)$	X uzayı üzerindeki topoloji
$\tau^*(X)$	X uzayının boştan farklı olan açıklarının ailesi
ω	İlk sonsuz ordinal
ω_1	İlk sayılamaz ordinal

Kısaltmalar

Açıklamalar

BM(X)	Banach-Mazur Oyunu
Ch(X)	Choquet Oyunu
GBM(X)	Genelleştirilmiş Banach-Mazur Oyunu
GCh(X)	Genelleştirilmiş Choquet Oyunu

1. GİRİŞ

Oyun, belki de insanlık tarihi kadar eski bir olgudur. Oyunların matematiksel hale gelmesi ile oyun teorisinin temelleri atılmıştır. Telgarsky, seçime dayalı (kombinatorik) oyunların matematiksel tanımlarının ilk olarak on yedinci yüzyılda yapıldığını söylemektedir [1]. Bachet de Meziriac 1612 yılında iki kişinin 1 ile 10 arasından bir doğal sayı seçerek oynadığı şöyle bir oyun tanımlamışlardır [2]. İlk oynayan kişi, bir doğal sayı seçer. İkinci oynayan da bir doğal sayı seçip birincinin söylediği sayıya ekler. İlk oynayan tekrar bir doğal sayı seçip toplama ekler ve bu oyun böyle devam eder. 100 diyen kazanır. Nim olarak isimlendirilen matematikselleşmiş bu oyunları Bouton 1901 yılında çalışmıştır [3]. 1913 yılında satranç oyunu üzerine Zermelo çalışmıştır [4]. Zermelo tarafından verilen sonuçları, 1927 yılında ([5]) König ve 1929 yılında ([6]) Kalmar sonlu uzunluklu oyunlara (sonlu adet hamle yapıldığında biten oyunlara sonlu uzunluklu oyunlar denir) genişletmişlerdir. 1944 yılında Neumann ve Morgenstern *The theory of games and economic behavior* isimli bir kitap yayınlamışlardır [7]. Oyun teorisinin bu kitapla başladığı varsayılmaktadır [8]. Oyun teorisinin iktisat ve ekonomi gibi alanlarda geniş uygulamaları vardır [8].

Topolojik oyunların bir çoğu sonsuz uzunluklu, yani hamlelerin sonlu sayıda olmadığı, oyunlardır. Bu özellik topolojik oyunları oyun teorisindeki diğer bir çok oyundan ayırmaktadır. Ulam, ilk olarak sonsuz oyun kavramının Mazur tarafından tanımlandığını söylemektedir [1]. Topolojik oyunların en bilinenlerinden biri olan Banach-Mazur oyununu Mazur 1935 yılında tanımlamıştır [1]. "Topolojik oyun" kavramını isim olarak (içeriği şimdiki kullanımından farklı) ilk kez Berge 1957 yılında kullanmıştır [9]. Telgarsky, 1975 yılında bu gün kullandığımız anlamda "topolojik oyun" kavramını bu isimle kullanmıştır.

Zamanla topolojik oyunlar matematiksel bir çok kavramla yakından ilişkili hale gelmiş hatta bazılarını tanımlamak için kullanılmıştır. Bu kavramlardan bazıları; Baire özelliği, Baire uzayları, tamlık özellikleri, yakınsaklık özellikleri, örtü ve taban özellikleridir [1]. Böylece topolojik oyunlar genel topolojinin önemli bir konusu haline gelmiştir. Günümüzde de bu konuda çalışmalar halen devam etmektedir.

Bu tezde, var olan bazı topolojik oyunlar tanıtılmış ve bazı yeni topolojik oyunlar tanımlanmıştır. Bu topolojik oyunlarla bazı kavramlar ilişkilendirilmiş ve literatürde bu

konuyla ilgili olan bazı açık soruların cevapları araştırılmıştır.

Bu tezde yeni olan sonuçlar nelerdir? Bu sorunun cevabı aşağıdadır.

Bu tezin birinci bölümü bu bölümdür. İkinci bölüm tamamen literatürde var olan bizim bu tezde kullanacağımız kavramlardan oluşmaktadır.

Üçüncü bölümden itibaren tezin sonuna kadar yapılan her şey aksi belirtilmedikçe yeni olup bu tezle birlikte literatüre katılmıştır.

Üçüncü bölümde elde edilen bazı sonuçlar kısaca şöyledir. Bir topolojik oyun tanımlanarak kompakt dağınık uzaylar karakterize edilmiştir. William Fleissner ve Lynne Yengulalp [10] tarafından Banach-Mazur ve Choquet oyunlarının kullanışlı bir şekilde sonlu ötesine taşınabilir olup olmadığına dair sorulan soruya iki adet topolojik oyun tanımlanarak bir cevap verilmiş ve bu oyunlarla yönlendirilmiş tam uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bölümde yapılan çalışmalar yayınlanmıştır [11].

Dördüncü ve beşinci bölümlerde Galvin tarafından sorulan görece eski bir soruya kısmi cevaplar verilmiştir. Dördüncü bölümde yapılan çalışmalar yayınlanmıştır [12]. Beşinci bölümde yapılanlar Topology Proceedings isimli dergiye gönderilmiş ve yayın için hakem onayını almıştır.

Altıncı bölümde yeni topolojik oyunlar tanımlanarak boyut teorisinin bazı temel kavramları karakterize edilmiştir. Bu bölümde yapılanlar yayınlanmıştır.

Her bölüm sonunda açık sorular bırakılmıştır. Çoğunluğu yeni olan bu soruların cevapları araştırılarak bu konularda daha ileri çalışmalar yapılabilir.

2. BAZI ÖN BİLGİLER

Bu bölümde verilen kavram ve sonuçlar literatürde var olup ilerideki bölümlerde kullanılacaktır. Bu kavramların bir kısmı çoğu Türkçe kitapta aynı isimle yer almaktadır. Bir kısmına ise ya farklı farklı isimler verilmekte ya da henüz Türkçe kitaplarda bu kavramlar bulunmamaktadır. Böyle kavramların İngilizce karşılıkları parantez içerisinde okuyucuya kolaylık olması için yazıldı.

2.1. Kümeler Teorisi ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Bir A kümesinin tümleyenini (yani evrensel kümeden farkını) A^c ile göstereceğiz.

Bir A kümesi üzerinde bir $\leq$ bağıntısı bulunsun. $\leq$ bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip olsun. A kümesinin her alt kümesinin bu bağıntıya göre bir en küçük elemanı varsa bu A kümesine $\leq$ bağıntısı ile *bir iyi sıralı küme* denir.

"Her küme iyi sıralanabilir" iddiasına *iyi sıralama prensibi* denir. Diğer bir deyişle, A keyfi bir küme iken A kümesinin üzerine bir $\leq$ bağıntısı koyabiliriz ve A bu bağıntıyla bir iyi sıralı küme olur demektir.

Seçme aksiyomu için [13] e veya herhangi bir kümeler teorisi kitabına bakılabilir.

İyi sıralama prensibi, seçme aksiyomuna denktir [13].

Tez boyunca genelde seçme aksiyomunu değil, dengi olan iyi sıralama prensibini kullanacağız.

$(A, \leq)$ ve $(B, \ll)$ iyi sıralı kümeler olmak üzere eğer birebir, örten ve $a, b \in A$ olmak üzere $a \leq b$ iken $f(a) \ll f(b)$ koşullarını sağlayan bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona A ile B arasında bir *tam-eşleme* ve A ile B kümelerine *tam eşlenmiş kümeler* denir.

$\leq$, A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Her $a, b \in A$ için $c \leq a$ ve $c \leq b$ olan bir $c \in A$ varsa A kümesine $\leq$ bağıntısı ile *aşağı yönlendirilmiş küme*, veya karışıklık olmayacaksa, *aşağı yönlendirilmiş küme* denir.

Alt küme olma bağıntısı (yani " $\subseteq$ " bağıntısı) ile aşağı yönlendirilmiş olan ve boş kümeyi içermeyen bir kümeye bir *süzgeç tabanı* (*filter base*) denir.

Her elemanı öz alt kümesi olan kümeye *geçişli* (*transitive*) küme denir.

Elemanı olma bağıntısı (yani " $\in$ " bağıntısı) ile iyi sıralı olan geçişli bir kümeye bir *ordinal* veya *ordinal sayı* (*sıra sayı*) denir.

$(A, \leq)$ keyfi bir iyi sıralı küme olsun. $(A, \leq)$ kümesinin tam eşlenebileceği bir ve yalnız bir tane α ordinali vardır [13]. Bu α ordinaline $(A, \leq)$ kümesinin *sıra-tipi* (*order-type*) denir.

Kendisinden küçük ordinaler ile birebir eşlenemeyen ordinallere bir *kardinal* veya *kardinal sayı* denir.

Bir A kümesi ile aralarında birebir ve örten bir fonksiyon bulunan kardinal sayıya, A kümesinin kardinalitesi denir. A kümesinin kardinalitesini $|A|$ ile göstereceğiz.

İlk sonsuz kardinali ω veya ω_0 ile ilk sayılamaz sonsuz kardinali ise ω_1 ile göstereceğiz.

(a_n) , bir $(A, \ll)$ iyi sıralı kümesi içinde bir dizi olsun. $\{a_n : n \in \omega\}$ kümesi için $n, m \in \omega$ olmak üzere $n < m$ iken $a_n \ll a_m$ ve $a_n \neq a_m$ oluyorsa (a_n) dizisine *kesin artandır* diyeceğiz.

Ordinallerden oluşan kesin azalan bir (sonsuz) dizi yoktur [13].

α bir ordinal olsun. α ordinalinden büyük olan en küçük ordinal sayıya α ordinalinin *ardılı* denir ve α^+ ile gösterilir. Herhangi bir ordinalin ardılı olmayan ordinallere *limit ordinal* denir. Benzer biçimde kardinal sayılar için de *limit kardinal* kavramı tanımlanır.

Bilindiği üzere tümevarım yöntemi "her $n \in \omega \dots$ " biçimindeki iddiaları kanıtlamak için kullanılır. Sonlu ötesi tümevarım (transfinite induction) yöntemi ise α keyfi bir sonsuz ordinal veya kardinal iken "her $\beta \in \alpha \dots$ " biçimindeki iddiaları kanıtlamak için kullanılır. Bu yöntemde, bir $\beta \in \alpha$ için β ordinaline kadar iddianın doğruluğu kabul edilip β için doğru olduğu kanıtlanır. Daha ileri bilgiler için ve bu yöntemin doğruluğunu görmek için bir kümeler teorisi kitabına veya [13] e bakılabilir.

Ordinal ve kardinal konuları oldukça geniştir. Bu konularla ilgili daha fazla bilgi için [13] e bakılabilir.

2.2. Bazı Topolojik Temel Kavramlar

X bir topolojik uzay olmak üzere, $\tau(X)$ ile X üzerindeki topolojiyi, $\tau^*(X)$ ile X uzayının boştan farklı açıklarının ailesini (yani $\tau^*(X) = \tau(X) - \{\emptyset\}$) göstereceğiz.

Bu tez boyunca herhangi bir topoloji tabanı (taban tanımı aşağıda yapılmıştır) boş kümeyi içermeyecek yani $\mathcal{B}$, X topolojik uzayının bir tabanı olsun dediğimizde $\emptyset \notin \mathcal{B}$ olduğunu kabul edeceğiz.

Tez boyunca herhangi bir topolojik uzaydan bahsederken üzerine aksi belirtilmiyorsa hiç bir ayırma aksiyomu koymayacağız. X regüler uzay dediğimizde T_3 -uzay olmayı (yani T_1 -uzay da olacak) kastedeceğiz.

Şimdi $(X, \tau(X))$ bir topolojik uzay olsun.

1) $U \in \tau(X)$ olan bir $U \subseteq X$ alt kümesine X uzayının *bir açık alt kümesi* veya, karışıklık olmayacaksa, kısaca *bir açık* denir. $A^c \in \tau(X)$ olan $A \subseteq X$ alt kümesine X uzayının *bir kapalı alt kümesi* veya, karışıklık olmayacaksa, kısaca *bir kapalı* denir. X uzayının her alt kümesi bir açık alt kümesi ise X uzayına *ayrık (discrete) uzay* denir.

2) $A \subseteq X$ olsun. $\bigcap \{B \subseteq X : A \subseteq B \text{ ve } B \text{ kapalı}\}$ kümesine A kümesinin *kapanışı* denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

3) Boştan farklı bir $A \subseteq X$ alalım. Bir $x \in X$ verilsin. Eğer $x \in U \in \tau(X)$ olan her U için $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A nın *yığılma noktası* denir. A kümesinin yığılma noktalarından oluşan kümeyi $\tilde{A}$ ile göstereceğiz.

4) $A \subseteq X$ için $\bar{A} = \tilde{A} \cup A$ olur ve A kapalı ise $\bar{A} = A$ olur [14].

5) Boştan farklı bir $A \subseteq X$ ve bir $x \in A$ alalım. Eğer $x \in U \in \tau(X)$ olan bir U için $U \cap A = \{x\}$ oluyorsa x noktasına A kümesinin bir *yalıtık (isolated) noktası* denir. Eğer $x \in U \in \tau(X)$

olan bir U için $x \in U \subseteq A$ oluyorsa x noktasına A kümesinin bir *iç noktası* noktası denir. A kümesinin iç noktalarından oluşan kümeyi A° ile göstereceğiz. $(A^\circ \cup (A^c)^\circ)^c$ kümesine A kümesinin sınırı denir ve A^s ile gösterilir.

6) $\mathcal{A}$ ailesi X uzayının bazı alt kümelerinden oluşsun. $\cup \mathcal{A} = \cup \{A : A \in \mathcal{A}\}$ olarak tanımlanır. Eğer $\cup \mathcal{A} = X$ ise $\mathcal{A}$ ailesine X uzayının bir *örtüsü* denir. $\mathcal{A} \subseteq \tau(X)$ ve $\cup \mathcal{A} = X$ ise $\mathcal{A}$ ailesine X uzayının bir *açık örtüsü* denir.

7) $\mathcal{A}$ ailesi X uzayının bazı alt kümelerinden oluşsun. Eğer her $x \in X$ için x noktasının $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ ailesi sonlu (sayılabilir) olacak biçimde bir U açık komşuluğu varsa $\mathcal{A}$ ailesine *yerel sonlu (sayılabilir) aile* denir. Sayılabilir çoklukta yerel sonlu (sayılabilir) ailenin birleşimi olarak yazılabilen bir aileye σ -yerel sonlu aile (σ -yerel sayılabilir aile) denir.

8) $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \tau(X)$ olsun. Eğer $\cup \mathcal{V} = \cup \mathcal{W}$ ve her $V \in \mathcal{V}$ için $V \subseteq U$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{W}$ varsa $\mathcal{V}$ ailesine $\mathcal{W}$ ailesinin bir *açık incelməsi* (*open refinement*) denir.

9) $\mathcal{B} \subseteq \tau^*(X)$ olsun. Her $x \in U \in \tau(X)$ olan x ve U için $x \in B \subseteq U$ olan bir $B \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{B}$ ailesine X uzayının bir *tabanı* denir.

10) $\mathcal{B} \subseteq \tau^*(X)$ olsun. Her $U \in \tau^*(X)$ için $B \subseteq U$ olan bir $B \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{B}$ ailesine X uzayının bir π -tabanı denir.

11) $x \in X$ ve $\mathcal{B}_x \subseteq \tau^*(X)$ olsun. x noktasını içeren her $U \in \tau(X)$ için $x \in B \subseteq U$ olan bir $B \in \mathcal{B}_x$ varsa $\mathcal{B}_x$ ailesine X uzayının x noktasında bir tabanıdır veya x noktasının bir komşuluklar tabanıdır denir.

12) X uzayının karakteri $\chi(X)$ ile gösterilir ve $x \in X$ iken $\chi_x(X) = \min\{|\mathcal{B}_x| : \mathcal{B}_x, x \in X \text{ noktasında bir tabanıdır}\}$ olmak üzere $\chi(X) = \sup\{|\chi_x(X)| : x \in X\}$ olarak tanımlanır.

13) X bir T_1 -uzay olmak üzere X in sözde karakteri $\psi(X)$ ile gösterilir ve $x \in X$ iken $\psi_x(X) = \min\{|\mathcal{O}_x| : \mathcal{O}_x \subseteq \tau^*(X) \text{ ve } \{x\} = \cap \mathcal{O}_x\}$ olmak üzere $\psi(X) = \sup\{|\psi_x(X)| : x \in X\}$ olarak tanımlanır.

14) Elemanları X kümesinin açıklarından oluşan bir süzgeç tabanına X uzayı üzerinde bir açık

süzgeç tabanı, karışıklık olmayacaksa, kısaca *bir açık süzgeç tabanı* denir. Yani $\mathcal{F}$ ailesinin bir açık süzgeç tabanı olması için gerek ve yeter koşul şu şartların sağlanmasıdır; her $F \in \mathcal{F}$ için $F \in \tau^*(X)$ ve her $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ için $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$ olan bir $F_3 \in \mathcal{F}$ vardır.

2.3. Bazı Topolojik Oyunlar

Literatürde tanımlanmış bir çok topolojik oyun vardır. Biz burada Banach-Mazur, Choquet ve nokta açık oyunlarına değineceğiz. Bu oyunlarda genel olarak iki oyuncu bir topolojik uzayda oynamaktadır. Bu iki oyuncu kabaca birer fonksiyon olarak düşünülebilir. İngilizce kaynaklarda, özellikle Banach-Mazur ve Choquet oyunlarında, bu oyunculara farklı yazarlar çeşitli isimler vermektedir. Örneğin β ve α , Player 1 ve Player 2, ONE ve TWO, EMPTY ve NONEMPTY bunlardan bazılarıdır. Formal bir tanım yapmak hem zor hem de anlaşılmayı güçleştirdiğinden literatürde genelde bu oyunların tanımları formal yapılmaz.

Banach-Mazur (BM(X)) ve Choquet (Ch(X)) oyunları

İlk olarak Banach-Mazur oyununu, sonra bu oyunun biraz değişmiş olan Choquet oyununu vereceğiz.

Bir X topolojik uzayı ve iki oyuncu düşünüyoruz. Bu oyuncuları BOŞÇU ve DOLUCU olarak isimlendirelim. Her zaman her rauntta ilk hamleyi yapacak oyuncu BOŞÇU ve ikinci hamleyi yapacak oyuncu DOLUCU olup her raunt bu iki hamleden oluşur. Birinci rauntta, BOŞÇU bir $U_0 \in \tau^*(X)$ seçerek hamlesini yapar. Sonra DOLUCU, $V_0 \subseteq U_0$ olan bir $V_0 \in \tau^*(X)$ seçerek karşı hamleyi yapar. İkinci rauntta BOŞÇU, $U_1 \subseteq V_0$ olan bir $U_1 \in \tau^*(X)$ seçerek oynar. DOLUCU, $V_1 \subseteq U_1$ olan bir $V_1 \in \tau^*(X)$ seçerek karşılık verir. Böylece iç içe geçen boştan farklı açıkların (U_0, V_0, U_1, V_1) biçiminde bir sonlu dizisi oluşur. Sonraki rauntlar hep böyle devam eder. Yani gerekli rauntlar oynanıp $(U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_n, V_n)$ sonlu dizisi oluştuğunda BOŞÇU, $U_{n+1} \subseteq V_n$ olan $U_{n+1} \in \tau^*(X)$ seçerek oynar ve DOLUCU, $V_{n+1} \subseteq U_{n+1}$ olan bir $V_{n+1} \in \tau^*(X)$ seçerek karşılık verir. Oyuncular bu şekilde her $n \in \omega$ için oynayarak $(U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_n, V_n, \dots)$ biçiminde boştan farklı iç içe geçmiş açıkların bir dizisini oluştururlar. Böyle bir diziye *bir karşılaşma* denir. Eğer $\bigcap_{i \in \omega} U_i = \emptyset$ ise bu karşılaşmayı BOŞÇU kazanır, değilse yani $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ ise DOLUCU kazanır. Oyuncuların boşcu ve dolucu olarak isimlendirilme nedeni budur. Böyle karşılaşmalardan oluşan aileye X

üzerinde oynanan *Banach-Mazur oyunu* denir ve $BM(X)$ ile gösterilir. Bu durumda $BM(X) \subseteq (\tau^*(X))^\omega$ olup $BM(X) = \{(U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_n, V_n, \dots) : U_n, V_n \in \tau^*(X), U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \dots\}$ olarak yazılabilir.

Choquet oyunu, Banach-Mazur oyununa benzerdir. Farklılığı BOŞÇU'nun bir avantajının olmasıdır. Bu avantaj BOŞÇU hamlelerini $x_i \in U_i \in \tau^*(X)$ olan (U_i, x_i) biçiminde yapar. Burada DOLUCU ise $x_i \in V_i \subseteq U_i$ olan bir $V_i \in \tau^*(X)$ seçerek karşılık vermek zorundadır. Böylece bu oyunda bir karşılaşma $((U_0, x_0), V_0, (U_1, x_1), V_1, \dots, (U_n, x_n), V_n, \dots)$ biçiminde oluşur. Oyunun diğer kuralları Banach-Mazur oyunu ile aynıdır. Yani bu karşılaşmayı $\bigcap_{i \in \omega} U_i = \emptyset$ ise BOŞÇU değilse DOLUCU kazanır. Tüm böyle karşılaşmalardan oluşan aileye X üzerinde oynanan *Choquet oyunu* denir ve $Ch(X)$ ile gösterilir. Bu durumda $Ch(X) \subseteq ((\tau^*(X) \times X) \times \tau^*(X))^\omega$ olup $Ch(X) = \{((U_0, x_0), V_0, (U_1, x_1), V_1, \dots, (U_i, x_i), V_i, \dots) : U_i, V_i \in \tau^*(X), x_i \in V_i \subseteq U_i, U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \dots\}$ olarak yazılabilir.

Nokta-açık oyunu

Bir X topolojik uzayı ile NOKTACI ve AÇIKÇI olarak isimlendirdiğimiz iki oyuncu düşünelim. Herhangi bir rauntta ilk hamleyi NOKTACI, ikinci hamleyi AÇIKÇI yapar ve bir raunt bu iki hamleden oluşur. Birinci rauntta NOKTACI bir $x_0 \in X$ seçerek hamle yapar ve AÇIKÇI $x_0 \in U_0 \in \tau^*(X)$ olan bir U_0 seçerek karşılık verir. Diğer tüm rauntlar böyle oynanır. Yani $n \in \omega$ için $(n+1)$. rauntta NOKTACI bir $x_n \in X$ seçer ve AÇIKÇI bu x_n noktasının U_n açık komşuluğunu seçerek oynar. Böylece $(x_0, U_0, x_1, U_1, \dots, x_n, U_n, \dots)$ biçiminde bir karşılaşma oluşur. Eğer $\bigcup_{n \in \omega} U_n = X$ ise NOKTACI bu karşılaşmayı kazanır, değilse, yani $\bigcup_{n \in \omega} U_n \neq X$ ise AÇIKÇI kazanır. Tüm böyle karşılaşmalardan oluşan aileye X üzerinde oynanan *nokta-açık oyunu* denir. Bu oyunu $na(X)$ ile gösterelim. Bu durumda $na(X) \subseteq (X \times \tau^*(X))^\omega$ olup $na(X) = \{(x_0, U_0, x_1, U_1, \dots, x_n, U_n, \dots) : x_n \in U_n \in \tau^*(X)\}$ olarak yazılabilir.

Karşılaşmalar hakkında bazı kavramlar

$(U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, \dots)$ dizisi $BM(X)$ oyununda bir karşılaşma olsun. Bu karşılaşmanın baştan bir bölümü olan $(U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_n, V_n)$ ve $(U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_n, V_n, U_{n+1})$ sonlu dizilerini düşünelim. Bu $(U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_n, V_n)$ sonlu dizisine $BM(X)$ oyununda *bir karşılaşma parçası*, eğer karışıklık olmayacaksa, kısaca *bir karşılaşma parçası* diyeceğiz.

$(U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_n, V_n, U_{n+1})$ sonlu dizisine ise $BM(X)$ oyununda bir ekli karşılaşma parçası, eğer karışıklık olmayacaksa, kısaca *bir ekli karşılaşma parçası* diyeceğiz. Eğer $(U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_n, V_n)$ karşılaşma parçasının uzunluğunu vurgulamak istiyorsak bu karşılaşma parçasına $(n + 1)$ -uzunluklu karşılaşma parçası diyeceğiz.

$Ch(X)$ ve nokta açık oyunları için de *karşılaşma parçası* ve *ekli karşılaşma parçası* kavramları benzer biçimde tanımlanır.

2.4. Topolojik Oyunlarda Oyuncuların Stratejileri

Topolojik oyunlarda bir oyuncu için bir strateji hamle yapma kuralı veya bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Bu kural ya da bu fonksiyon oyuncunun her bir rauntta hangi hamleyle oynayacağını belirler. Bir stratejiyi tanımlamak için çoğu zaman, oyuncuların kaçınıcı rauntta oldukları, rakip oyuncunun daha önceki hamlelerinin neler olduğu gibi bazı bilgilere ihtiyaç vardır. Stratejiler tanımlanmaları esnasında kullanılan bu bilgilere göre isimlendirilirler.

Aşağıda ilk başlıkta kazanma stratejisini ayrıntılı açıklarken, diğer stratejileri tekrara düşmemek için daha kısa yazdık.

Kazanma stratejisi

Bir oyuncu için bir kazanma stratejisi, herhangi bir rauntta oyuncuya hangi hamleyle oynayacağı bilgisini veren ve o raunttan önceki tüm hamleler kullanılarak tanımlanan fonksiyondur. Üstelik, oyuncu bu strateji ile oynadığı her karşılaşmayı kazanır.

Kazanma stratejisi kavramını açıklayalım. X bir topolojik uzay olmak üzere BOŞÇU'nun $BM(X)$ oyununda σ , bir kazanma stratejisi olsun. İlk raundun ilk hamlesini BOŞÇU yapacağından $\sigma(\emptyset) = U_0$ biçiminde bir $U_0 \in \tau^*(X)$ bulunur ve BOŞÇU bu hamle ile başlar. DOLUCU bu durumda bir V_0 oynayarak karşılık verir. Yani $(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0)$ karşılaşma parçası oluşur. Şimdi ikinci raunt için $\sigma((U_0, V_0)) = U_1$ biçiminde BOŞÇU'nun bir hamlesi vardır ve bu hamle ile BOŞÇU oynar. DOLUCU ise V_1 karşılığını verir. Böylece $(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1)$ biçiminde karşılaşma parçası oluşur. Bu böyle devam eder, yani $n \in \omega$ için $(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1, \dots, V_{n-1}, \sigma(\dots V_{n-1}) = U_n, V_n)$ biçiminde karşılaşma parçası oluştuğunda BOŞÇU'nun σ kullanılarak bulunan

$\sigma((\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1, \dots, V_{n-1}, \sigma(\dots V_{n-1}) = U_n, V_n)) = U_{n+1}$ biçiminde bir hamlesi vardır (σ fonksiyonunun U_{n+1} hamlesini vermek için önceki tüm hamleleri kullandığına, yani tüm karşılaşma parçasını kullandığına dikkat ediniz) ve BOŞÇU bu hamleyi yapar. DOLUCU bir V_{n+1} karşılığını verir ve $(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1, \dots, U_n, V_n, \sigma(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1, \dots, V_{n-1}, \sigma(\dots V_{n-1}) = U_n, V_n) = U_{n+1}, V_{n+1})$ biçiminde karşılaşma parçası oluşur. Sonuçta böyle oynanan

$$(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1, \dots, \sigma(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1) = U_2, V_2 \dots)$$

biçimindeki karşılaşmayı BOŞÇU kazanır. Yani $\bigcap_{i \in \omega} U_i = \emptyset$ olur. Sadece bu karşılaşmayı değil BOŞÇU bu σ ile oynadığı her karşılaşmayı kazanacaktır.

Bir örnek üzerinde kazanma stratejisini biraz daha açıklayalım. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ üzerinde reel sayılardan indirgenen topoloji olsun. Bu takdirde BOŞÇU'nun $BM(\mathbb{Q})$ oyununda bir kazanma stratejisi vardır. Bunu görelim. $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuz olduğundan $\mathbb{Q} = \{q_i : i \in \omega\}$ biçiminde yazılabilir.

$U_0 = \sigma(\emptyset) = \mathbb{Q} - \{q_0\}$ ve $U_{n+1} = \sigma(U_0, V_0, U_1, \dots, V_n) = V_n - \{q_{n+1}\}$ biçiminde tanımlansın.

BOŞÇU'nun bu strateji ile oynadığı keyfi bir karşılaşma $(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1, \dots, \sigma(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma((U_0, V_0)) = U_1, V_1) = U_2, V_2 \dots)$ biçiminde olsun. Burada σ stratejisinin tanımı gereği her $i \in \omega$ için $q_i \notin U_i$ olacaktır. Bu durumda $\bigcap_{i \in \omega} U_i = \emptyset$ olur. Çünkü bir $x = q_i \in \bigcap_{i \in \omega} U_i \subseteq \mathbb{Q} = \{q_i : i \in \omega\}$ olsa $q_i \in U_i$ olur ve bu bir çelişkidir. Bu karşılaşma keyfi olduğundan BOŞÇU, $BM(\mathbb{Q})$ oyununda σ ile oynadığı her karşılaşmayı kazanacaktır. Yani, σ bu oyunda BOŞÇU'nun kazanma stratejisidir.

Benzer biçimde DOLUCU için de $BM(X)$ oyununda bir σ kazanma stratejisi var olduğunda karşılaşmalar bu strateji kullanılarak yukarıdakine benzer şekilde oynanır. Tek fark DOLUCU ilk hamleyi yapmayacağı için $\sigma(\emptyset)$ diye bir hamle olmayacağıdır. Yine Choquet ve nokta-açık oyunlarında da oyuncuların her biri için kazanma stratejisi benzer biçimde tanımlanır.

Şimdi sözel olarak ifade ettiğimiz kazanma stratejisi kavramına matematiksel bir tanım verelim.

Aşağıdaki tanımı $Ch(X)$ oyununda DOLUCU için vereceğiz. Diğer oyunlarda da herhangi bir oyuncu için kazanma stratejisinin matematiksel tanımı benzer biçimde verilebilir.

2.4.1. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{K}(X) = \{t: t, Ch(X) \text{ oyununda bir ekli karşılaşma parçası}\}$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\sigma: \mathcal{K}(X) \rightarrow \tau^*(X)$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun (veya DOLUCU için) bir kazanma stratejisi, karışıklık olmayacaksa, yani oyunun $Ch(X)$ olduğu ve oyuncunun DOLUCU olduğu açıksa, bir kazanma stratejisi denir.

- 1) Her $((U_0, x_0), V_0, \dots, (U_n, x_n)) \in \mathcal{K}(X)$ için $x_n \in \sigma(((U_0, x_0), V_0, \dots, (U_n, x_n))) \subseteq U_n$,
- 2) $Ch(X)$ te $((U_0, x_0), \sigma((U_0, x_0)) = V_0, (U_1, x_1), \sigma(((U_0, x_0), V_0, (U_1, x_1))) = V_1, \dots, (U_n, x_n), \sigma(\dots, (U_n, x_n)) = V_n, \dots)$ biçimindeki her karşılaşma için $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olur. $\square$

Not: $BM(X)$ ve $Ch(X)$ oyununda yukarıda tanımladığımız kazanma stratejisine eşdeğer bir strateji daha vardır. Eğer bir oyuncunun bir kazanma stratejisi varsa herhangi bir rauntta sadece rakibin önceki tüm hamleleri kullanılarak tanımlanan yine oyuncuya her karşılaşmayı kazandıran bir strateji vardır. Üstelik bu ifadenin tersi de doğrudur [15]. Bu sebepten literatürde bazen kazanma stratejisi ile kastedilen bu stratejidir, yani sadece rakibin önceki tüm hamleleri kullanılarak tanımlanan stratejidir. Kabaca özetleyecek olursak, biz yukarıda kazanma stratejisini $\sigma(U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_n, V_n)$ olarak tanımladık ama $\sigma^*(U_0, U_1, \dots, U_n)$ biçiminde bir strateji de vardır. Üstelik σ varken σ^* bulunabilir ve σ^* varken σ bulunabilir [15]. Literatürde her ikisine de kazanma stratejisi denir. Biz her ikisini de kullanacağız. Kazanma stratejisi ile hangisini kastettiğimiz metinden açık olacak.

Markov ve k-Markov stratejisi

$k \in \omega - \{0\}$ olmak üzere herhangi bir rauntta, kaçınıcı raunt olduğu bilgisi ile rakibin son k adet hamlesi kullanılarak tanımlanan ve her karşılaşmayı kazandıran stratejiye k -Markov veya k -Markov stratejisi denir. Özel olarak 1-Markov stratejisine Markov stratejisi denir. Bir k -Markov, herhangi bir karşılaşmada başlangıçta $1 \leq i \leq k$ iken rakibin ilk i hamlesi ile de tanımlı değildir. Doğal olarak BOŞÇU'ya ait olan bir σ , k -Markov'u için $\sigma(\emptyset)$ tanımlı

olmalıdır.

Örneğin, BOŞÇU'nun $BM(X)$ oyununda σ , bir 2-Markov'u ise BOŞÇU'nun σ ile oynadığı bir karşılaşma $(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma(0, V_0) = U_1, V_1, \sigma(1, (V_0, V_1)) = U_2, V_2, \sigma(2, (V_1, V_2)) = U_3, V_3, \sigma(3, (V_2, V_3)) = U_4, \dots)$ biçiminde olacak ve $\bigcap_{i \in \omega} U_i = \emptyset$ olacaktır.

Şimdi matematiksel olarak $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun k -Markov stratejisi tanımını verelim. Diğer oyunlarda herhangi bir oyuncu için benzer şekilde k -Markov tanımlanabilir.

2.4.2. Tanım

X bir topolojik uzay, $k \in \omega - \{0\}$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\sigma : \bigcup_{1 \leq i \leq k} \omega \times (\tau^*(X) \times X)^i \rightarrow \tau^*(X)$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun k -Markov stratejisi veya, karışıklık olmayacaksa, bir k -Markov denir.

1) Her $(i, ((U_1, x_1), \dots, (U_i, x_i))) \in \bigcup_{1 \leq i \leq k} \omega \times (\tau^*(X) \times X)^i$ için

$x_i \in \sigma(i, ((U_1, x_1), \dots, (U_i, x_i))) \subseteq U_i$ olur.

2) $((U_0, x_0), V_0, (U_1, x_1), V_1, (U_2, x_2), V_2, \dots)$

sonlu dizisi $Ch(X)$ oyununda herhangi bir karşılaşma olmak üzere, eğer

$0 \leq i \leq k-1$ iken $V_i = \sigma(i, ((U_1, x_1), \dots, (U_i, x_i)))$ ve

$k-1 \leq i$ iken $V_i = \sigma(i, ((U_{i-\{k-1\}}, x_{i-\{k-1\}}), \dots, (U_i, x_i)))$ ise

$\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olur. $\square$

Başka bir strateji: k-taktik

$k \in \omega - \{0\}$ olmak üzere rakibin son k adet hamlesi kullanılarak tanımlanan ve her karşılaşmayı kazandıran stratejiye k -taktik denir. Bir k -taktik herhangi bir karşılaşmada başlangıçta $1 \leq i \leq k$ iken rakibin ilk i hamlesi ile tanımlı değildir. Doğal olarak BOŞÇU'ya ait olan bir σ , k -taktiği için $\sigma(\emptyset)$ tanımlı olmalıdır.

Örneğin, BOŞÇU'nun $BM(X)$ oyununda σ bir 2-taktığı ise BOŞÇU'nun σ ile oynadığı herhangi bir karşılaşma $(\sigma(\emptyset) = U_0, V_0, \sigma(V_0) = U_1, V_1, \sigma(V_0, V_1) = U_2, V_2, \sigma(V_1, V_2) = U_3, V_3, \sigma(V_2, V_3) = U_4, \dots)$ biçiminde olacak ve $\bigcap_{i \in \omega} U_i = \emptyset$ olacaktır.

Şimdi matematiksel olarak $Ch(X)$ oyunu için DOLUCU'nun k -taktığının tanımını verelim. Diğer oyunlarda herhangi bir oyuncu için benzer şekilde k -taktik tanımlanabilir.

2.4.3. Tanım

X bir topolojik uzay, $k \in \omega - \{0\}$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\sigma : \bigcup_{1 \leq i \leq k} (\tau^*(X) \times X)^i \rightarrow \tau^*(X)$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun k -taktığı veya, karışıklık olmayacaksa, kısaca *bir k -taktik* denir.

- 1) Her $((U_1, x_1), \dots, (U_i, x_i)) \in \bigcup_{1 \leq i \leq k} (\tau^*(X) \times X)^i$ için $x_i \in \sigma((U_1, x_1), \dots, (U_i, x_i)) \subseteq U_i$ olur.
- 2) $((U_0, x_0), V_0, (U_1, x_1), V_1, (U_2, x_2), V_2, \dots)$ $Ch(X)$ oyununda herhangi bir karşılaşma olmak üzere, eğer $0 \leq i \leq k-1$ iken $V_i = \sigma((U_1, x_1), \dots, (U_i, x_i))$ ve DOLUCU'nun bu karşılaşmadaki k -yıncı hamlesinden sonraki herhangi bir hamlesine W diyelim. BOŞÇU'nun W 'dan önceki son k -adet hamlesinden oluşan dizi $((O_1, y_1), \dots, (O_k, y_k))$ iken $\sigma((O_1, y_1), \dots, (O_k, y_k)) = W$ ise $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olur (burada W 'nun kaçınıcı hamle olduğunu bilmediğimizi vurgulamak için (çünkü σ indisten bağımsız) (U_i, x_i) yerine (O, y) dönüşümü yapıldı). $\square$

Kodlama stratejisi

Bir karşılaşma parçasındaki tam olarak son iki hamle (yani rakibin son hamlesi ve rakibin son hamlesinden önceki oyuncunun kendi hamlesi) kullanılarak tanımlanan ve her karşılaşmayı kazandıran stratejiye *kodlama stratejisi* denir. Bir kodlama stratejisi DOLUCU'ya ait ise DOLUCU'nun ilk hamlesi için tanımlı olmalıdır, BOŞÇU'ya ait ise başlangıç hamlesi için tanımlı olmalıdır.

Şimdi matematiksel olarak $Ch(X)$ oyunu için DOLUCU'nun kodlama stratejisi tanımını verelim. Diğer oyunlarda herhangi bir oyuncu için benzer şekilde kodlama stratejisi tanımlanabilir.

2.4.4. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\sigma : (\tau^*(X) \times (\tau^*(X) \times X)) \cup (\tau^*(X) \times X) \rightarrow \tau^*(X)$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona $Ch(X)$ oyununda *DOLUCU'nun bir kodlama stratejisi*, karışıklık olmayacaksa, kısaca *bir kodlama stratejisi* denir.

1) Her $(U, x) \in \tau^*(X) \times X$ için $x \in \sigma((U, x)) \subseteq U$ ve her $(V, (U, x)) \in (\tau^*(X) \times (\tau^*(X) \times X))$ için $x \in \sigma(V, (U, x)) \subseteq U$ olur.

2) $((U_0, x_0), \sigma((U_0, x_0)) = V_0, (U_1, x_1), \sigma(V_0, (U_1, x_1)) = V_1, (U_2, x_2), \sigma(V_1, (U_2, x_2)) = V_2 \dots)$ $Ch(X)$ oyununda herhangi bir karşılaşma ise $\bigcap_{i < \omega} U_i \neq \emptyset$ olur. $\square$

Topolojik oyunlar ve stratejiler ile ilgili daha fazla bilgi için [1], [15] veya [16] ya bakılabilir.

3. BAZI TOPOLOJİK OYUNLARIN GENELLEŞTİRİLMELERİ

Bu bölümde nokta-açık, Banach-Mazur ve Choquet oyunlarının genelleştirilmeleri yapılmıştır. Nokta-açık oyunun genelleştirilmesi kullanılarak kompakt dağınık uzaylar karakterize edilmiştir. Banach-Mazur ve Choquet oyunlarının genelleştirilmeleri ile yönlendirilmiş tam uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

William Fleissner ve Lynne Yengulalp [10] Banach-Mazur ve Choquet oyunlarının kullanışlı bir şekilde sonlu ötesine taşınabilir olup olmadığını sormuştur. Sonlu ötesine taşınmadaki temel sorun bu oyunlardaki iç içe geçmiş sonsuz çokluktaki açığın arakesitinin nihayetinde açık olmasının garanti olmamasıdır. Bu genelleştirilmelerde süzgeç tabanları kullanarak, biz iç içe geçmiş sonsuz çokluktaki açıklardan kurtulup bu temel sorunu aşmış olduk. Bu genelleştirilmiş oyunların Banach-Mazur ve Choquet oyunuyla ω -uzunlukta çakışması ve yönlendirilmiş tam uzaylarla aralarında ilişkinin olması bu oyunların kullanışlı olabileceğini ve [10] da sorulan soruya bir cevap olabileceğini düşünüyoruz. Bu bölümde yapılanlar yayınlanmıştır [11].

3.1. Bu Bölüm İçin Gerekli Ön Bilgiler

Bu başlık altında verilenler bilinen kavram ve sonuçlardır.

Topolojik uzayların önemli sınıflarından biri kompakt uzaylardır. Her açık örtüsünün sonlu alt örtüsünün var olduğu uzaylara kompakt uzaylar denir.

Kompakt uzayın kapalı her alt uzayı kompakttır [14].

Kompakt Hausdorff her uzay regülerdir [14].

Bir X topolojik uzayının yalıtık noktalarından oluşan küme $I(X)$ ile gösterilir. α bir ordinal olmak üzere bir X topolojik uzayının α -yıncı *Cantor-Bendixon seviyesi*, $I_\alpha(X)$ ile gösterilir ve (tümevarımsal olarak $I_0(X) = I(X)$, $I_1(X) = I(X - I_0(X))$, $I_2(X) = I(X - \bigcup_{\beta < 2} I_\beta(X))$, ... biçiminde iken) $I_\alpha(X) = I(X - \bigcup_{\beta < \alpha} I_\beta(X))$ olarak tanımlanır.

Boştan farklı her alt uzayının en az bir yalıtık noktaya sahip olduğu uzaylara *dağınık*

(*scattered*) uzay denir. X dağınık uzayının yüksekliği $ht(X) = \min\{\alpha : I_\alpha(X) = \emptyset\}$ biçiminde tanımlanır.

X bir Hausdorff uzay olsun. X uzayının dağınık uzay olması için gerek ve yeter koşul $X = \bigcup_{\alpha < ht(X)} I_\alpha(X)$ olmasıdır ([17], 350. sayfa).

X bir kompakt dağınık uzay ise $ht(X)$ limit ordinal olamaz, yani β bir ordinal olmak üzere $ht(X) = \beta + 1$ biçiminde olmalıdır, üstelik $I_\beta(X)$ sonlu olmalıdır ([17], 351. sayfa).

3.2. Nokta-Açık Oyununun Genelleştirilmesi

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{P}$ herhangi bir özellik olsun. NOKTACI ve AÇIKÇI olarak isimlendirilen iki oyuncu düşünelim. Bu oyunda herhangi bir karşılaşmada NOKTACI, bir $x_0 \in X$ seçerek karşılaşmayı başlatır ve AÇIKÇI, $x_0 \in U_0 \in \tau(X)$ olan bir U_0 seçerek karşılık verir. Böylece ilk raunt tamamlanır. Sonraki rauntlarda (eğer hala karşılaşma devam ediyorsa) $\{x_j : j < i\}$ kümesi NOKTACI'nın önceki hamlelerinin kümesi iken x_i hamlesini NOKTACI, $x_i \in X - \{x_j : j < i\}$ koşuluyla yapar ve AÇIKÇI, $x_i \in U_i \in \tau(X)$ olan U_i seçerek karşılık verir. Bu oyunda bir karşılaşma, veya α -uzunluklu karşılaşma $((x_0, U_0), (x_1, U_1), (x_2, U_2), \dots)$ biçimindedir. Bu karşılaşma $(X, \tau(X))^\alpha$ kümesinin bir elemanıdır. Bu α ordinaline bu karşılaşmanın *uzunluğu* denir ve sonlu ya da sayılabilir olma koşulu yoktur. NOKTACI istediği zaman karşılaşmayı bitirebilir ve karşılaşmayı bitirme kararını sadece NOKTACI verebilir. Diğer bir ifadeyle karşılaşmanın uzunluğunu yani α ordinalini NOKTACI belirler. Ama eğer NOKTACI nokta seçemezse karşılaşmayı bitirmek zorundadır. NOKTACI bir karşılaşmayı bitirdiğinde bu karşılaşmaya *bitmiş karşılaşma* diyeceğiz. $((x_0, U_0), (x_1, U_1), (x_3, U_3), \dots)$ herhangi bir α -uzunluklu bitmiş karşılaşma olmak üzere, eğer $\{x_i : i \in \alpha\}$ kümesi $\mathcal{P}$ özelliğine sahip ve $\{U_i : i \in \alpha\}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsü ise NOKTACI bu karşılaşmayı kazanır. Aksi takdirde AÇIKÇI kazanır. Dikkat edilirse α hiç bir zaman $|X|^+$ kardinaline ulaşamayacağından, NOKTACI eninde sonunda herhangi bir karşılaşmayı bitirecektir. X üzerindeki böyle karşılaşmalardan oluşan aileye *genelleştirilmiş nokta-açık oyunu* diyelim ve $O(\mathcal{P}, X)$ ile gösterelim. Böylece $O(\mathcal{P}, X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in |X|^+} (X, \tau(X))^\alpha$ olur. Bu oyunda, $\mathcal{P}$ bir kümenin sağlayabileceği herhangi bir özellik (sonlu, sayılabilir, kompakt, kapalı, açık... gibi) olabilir.

Bu oyunda oyuncular için strateji tanımları diğer oyunlarda olduğu gibidir.

3.2.1. Teorem

X bir Hausdorff uzay ve $\mathcal{P}$ özelliği "sonlu" olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir;

1) NOKTACI'nın $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda kazanma stratejisi vardır,

2) X uzayı kompakt dağınıktır.

Kanıt

(1 $\Rightarrow$ 2): NOKTACI için σ bir kazanma stratejisi olsun. X uzayının herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtüsünü alalım. $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda NOKTACI bir karşılaşmayı σ ile oynasın ve bu karşılaşmada AÇIKÇI hamlelerini bu açık örtüden seçerek yapsın. NOKTACI bu karşılaşmayı kazanacağından sonlu hamlede bu karşılaşma bitecektir. Yani bir $n \in \omega$ için bu karşılaşma $((x_0, U_0), (x_1, U_1), \dots, (x_n, U_n))$ biçiminde olup $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ örtüsü $\mathcal{U}$ 'nun bir sonlu alt örtüsü olacaktır. Bu durumda X uzayı kompakttır.

Şimdi, X uzayının dağınık olmadığını varsayalım. O zaman, yalıtık noktası olmayan boştan farklı bir $U \subseteq X$ alt kümesi vardır. $\bar{U} = Y$ diyelim. X kompakt ve Y de onun kapalı bir alt uzayı olduğundan Y kompakttır. Y 'nin herhangi bir yalıtık noktası yoktur, çünkü eğer olsaydı bu nokta U 'nun da yalıtık noktası olurdu.

İddia: Y üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau(Y) = \{V \cap Y : V \in \tau(X)\}$ olmak üzere her $x \in X$ ve her $V \cap Y \in \tau(Y)$ için, eğer $V \cap Y \neq \emptyset$ ise $x \notin \bar{W} \cap Y$ ve $\emptyset \neq W \cap Y \subseteq \bar{W} \cap Y \subseteq V \cap Y$ koşullarını sağlayan bir $W \cap Y \in \tau(Y)$ vardır.

İddianın kanıtı: $x \in X$, $V \in \tau(X)$ ve $V \cap Y \neq \emptyset$ olsun. Y alt uzayının izole noktası var olmadığından bir $y \in Y \cap V - \{x\}$ vardır. X uzayı Hausdorff olduğundan, X uzayının $x \in W_x$, $y \in W_y$ ve $W_x \cap W_y = \emptyset$ olacak biçimde W_x ile W_y açıkları vardır. Kompakt Hausdorff uzaylar regüler olduğundan X regüler olur ve böylece, X uzayının $y \in W \cap Y \subseteq \bar{W} \cap Y \subseteq (W_y \cap V) \cap Y$ olacak biçimde bir W açığı vardır. $W_x \cap W_y = \emptyset$ olduğundan $x \notin \bar{W} \cap Y$ dir. Böylece iddianın kanıtı tamamlanmış olur.

Şimdi, $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda şöyle bir karşılaşma düşünelim. x_0 noktası NOKTACI'nın σ ile oynadığı ilk hamle olsun. Yukarıdaki iddiadan $\emptyset \neq W_0 \cap Y \subseteq \overline{W}_0 \cap Y \subseteq Y$ ve $x_0 \notin (\overline{W}_0 \cap Y)$ olan bir $W_0 \subseteq X$ açık alt kümesi seçebiliriz. $(\overline{W}_0 \cap Y)^c$ hamlesini yaparak AÇIKÇI karşılık versin ve ilk raunt tamamlansın. İkinci raunt için NOKTACI, σ ile oynayıp x_1 hamlesini yapsın. Bu durumda iddia gereği bir $W_1 \in \tau(X)$ açığı var olup $\emptyset \neq W_1 \cap Y \subseteq \overline{W}_1 \cap Y \subseteq W_0 \cap Y$ ve $x_1 \notin (\overline{W}_1 \cap Y)$ koşullarını sağladığını biliyoruz. AÇIKÇI karşılık olarak $(\overline{W}_1 \cap Y)^c$ hamlesini yapsın. Böyle devam edilerek her $i \in \omega - \{0\}$ için NOKTACI σ ile x_i hamlesini yaptığında iddia gereği $\emptyset \neq W_i \cap Y \subseteq \overline{W}_i \cap Y \subseteq W_{i-1} \cap Y$ ve $x_i \notin (\overline{W}_i \cap Y)$ koşullarını sağlayan $W_i \in \tau(X)$ vardır. AÇIKÇI, $(\overline{W}_i \cap Y)^c$ hamlesi ile karşılık verir. AÇIKÇI'nın hamlelerinden oluşan aile $\{(\overline{W}_0 \cap Y)^c, (\overline{W}_1 \cap Y)^c, (\overline{W}_2 \cap Y)^c, \dots, (\overline{W}_i \cap Y)^c\}$ olup $\overline{W}_0 \cap Y \supseteq \overline{W}_1 \cap Y \supseteq \overline{W}_2 \cap Y \supseteq \dots \supseteq \overline{W}_i \cap Y$ ve $\emptyset \neq \overline{W}_i \cap Y$ olduğundan $\bigcup \{(\overline{W}_0 \cap Y)^c, (\overline{W}_1 \cap Y)^c, (\overline{W}_2 \cap Y)^c, \dots, (\overline{W}_i \cap Y)^c\} = (\overline{W}_i \cap Y)^c \neq X$ olur. Bunun anlamı bu karşılaşmayı sonlu hamlede NOKTACI'nın kazanamamasıdır. Oysa $\mathcal{P}$ özelliği "sonlu" olduğu için σ , NOKTACI'nın sonlu hamlede kazanacağı bir stratejidir. Bu çelişki gereği varsayım yanlış olup X dağılık uzaydır.

(2 $\Rightarrow$ 1): $\mathcal{P}$ özelliği "sonlu" olsun. Sonlu ötesi tümevarım kullanarak, "her α ordinali için X herhangi bir kompakt dağılık uzay olmak üzere eğer $ht(X) = \alpha$ ise NOKTACI'nın $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda kazanma stratejisi vardır" iddiasını kanıtlayalım. Bu iddia kanıtlandığında (herhangi bir X kompakt dağılık uzayı için $ht(X)$ ordinali var olduğundan) teoremin kanıtı tamamlanmış olur. α bir ordinal olsun. $\alpha = 1$ durumunda $X = \bigcup_{\alpha < ht(X)=1} I_\alpha(X) = I_0(X)$ olduğundan X uzayının tüm noktaları yalıtıktır (yani discrete uzaydır). Bu durumda X kompakt olduğundan sonlu olması gerekir. X uzayının sonlu olması demek $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda NOKTACI'nın kazanma stratejisinin olması demektir. İddiamız her $\beta < \alpha$ için doğru olsun. $ht(X) = \alpha$ olan, kompakt dağılık bir X uzayı alalım. X kompakt dağılık olduğundan $\alpha = \beta + 1$ ve $I_\beta(X)$ sonlu olmalıdır. $I_\beta(X) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olsun. Bu durumda, $I_\beta(X)$ in noktalarını x_0 noktasından başlayıp x_n noktasına kadar NOKTACI oynar. O halde, $(x_0, U_0), (x_1, U_1), \dots, (x_n, U_n)$ karşılaşma parçası oluşur. Böylece, kapalı $Y = (X - \bigcup_{i \leq n} U_i)$ alt uzayı kompakt dağılık olup $ht(Y) \leq \beta$ olur. Tümevarım hipotezi gereği, NOKTACI'nın $O(\mathcal{P}, Y)$ oyununda kazanma stratejisi vardır. Eğer NOKTACI bu sonlu karşılaşma parçasından sonra bu strateji ile oynarsa bu karşılaşmayı sonlu hamlede kazanmış olur. $\square$

Bu bölümde $O(\mathcal{P}, X)$ oyununu sadece $\mathcal{P}$ özelliği "sonlu" iken inceledik. $\mathcal{P}$ özelliğini

değiştirerek bu oyundan başka sonuçlar bulunabileceğini tahmin ediyoruz. Örneğin van Douwen'in D -uzayları ile bu oyun arasında $\mathcal{P}$ özelliği "kapalı ayrık" iken bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi açıklamak için D -uzay tanımlarını verelim.

Eğer bir $f : X \rightarrow \tau(X)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $x \in f(x)$ koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyona *komşuluk atayan* denir. Bir X uzayında f herhangi bir komşuluk atayan iken $\bigcup_{x \in D} \{f(x) : x \in D\} = X$ olan kapalı ve ayrık bir $D \subseteq X$ alt uzayı varsa X uzayına D -uzayı denir [18].

Açıkça $\mathcal{P}$ özelliği "kapalı ayrık" iken $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda NOKTACI'nın kazanma stratejisi varsa X bir D -uzayı olur. Şöyle ki, f herhangi bir komşuluk atayan ve σ , NOKTACI'nın kazanma stratejisi olsun. Bir karşılaşmada x_i NOKTACI'nın bu strateji ile oynadığı herhangi bir nokta iken AÇIKÇI, $f(x_i)$ ile karşılık versin ve bu karşılaşma $(x_0, f(x_0), x_1, f(x_1), \dots)$ biçiminde oluşsun. Bu durumda hem $D = \{x_i : x_i, \text{NOKTACI'nın bu karşılaşmadaki hamlesi}\}$ alt uzayı kapalı ve ayrık hem de $\bigcup_{x \in D} \{f(x) : x \in D\} = X$ olur, yani X bir D -uzayı olur. Ama X bir D -uzayı iken NOKTACI'nın $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda ($\mathcal{P}$ özelliği "kapalı ayrık") kazanma stratejisi var diyemeyiz. Örneğin X , reel sayıların (reel sayıların bilenen topolojisinden indirgenen alt uzay topolojisi ile) herhangi bir kapalı aralığı olsun. X kompakt olduğundan D -uzayıdır [19]. X dağınık olmadığından (çünkü yalıtık noktası yok) bir önceki teorem gereği NOKTACI sonlu karşılaşmaları $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda kazanamaz. Dolayısıyla, bu oyunda herhangi bir karşılaşmada X örtüldüğünde NOKTACI sonsuz çoklukta nokta seçmiş olacaktır. Bu takdirde seçilmiş sonsuz çoklukta noktadan oluşan kümenin yığılma noktası (reel sayıların sınırlı sonsuz her alt kümesinin bir yığılma noktası vardır, bunun ispatı ortalama bir analiz kitabında bulunabilir) var olup bu küme ayrık olamaz. Böylece X bir D -uzayı olup $O(\mathcal{P}, X)$ oyununda $\mathcal{P}$ özelliği "kapalı ayrık" iken NOKTACI'nın kazanma stratejisi yoktur.

3.3. Banach-Mazur ve Choquet Oyunlarının Genelleştirilmeleri

Banach-Mazur ve Choquet oyunlarını genelleştireceğiz. Bu genelleştirilmiş oyunlarla yönlendirilmiş tam (directed complete) uzaylar arasındaki ilişkileri araştıracağız.

Genelleştirilmiş Banach-Mazur oyunu ve Choquet oyunu

Önce Banach-Mazur oyununu genelleştireceğiz. Bir X topolojik uzayı ve yine BOŞÇU,

DOLUCU olarak isimlendireceğimiz, sırasıyla her rauntta ilk hamleyi ve ikinci hamleyi yapan iki oyuncu düşünüyoruz. BOŞÇU, bir $U_0 \in \tau^*(X)$ seçerek ilk hamleyi yapar. DOLUCU, $F_0 \subseteq U_0$ ve $F_0 \in \tau^*(X)$ koşuluyla bir $\mathcal{F}_0 = \{F_0\}$ açık süzgeç tabanı seçerek karşılık verir. Böylece 1. raunt tamamlanmış olur. Şimdi bu karşılaşma i bir ordinal olmak üzere i ordinaline kadar oynanmış ve sırasıyla BOŞÇU ile DOLUCU'nun hamlelerinden oluşan $\{U_\beta : \beta < i\}$, $\{\mathcal{F}_\beta : \beta < i\}$ aileleri oluşmuş olsun. i ordinali için BOŞÇU, $U_i \cap (\cap (\cup_{\beta < i} \mathcal{F}_\beta)) \neq \emptyset$ ve $U_i \notin \{U_\beta : \beta < i\}$ koşullarını sağlayan (varsa) bir $U_i \in \tau^*(X)$ seçerek oynar. DOLUCU, en az bir $j \leq i$ için $F_{j,i} \subseteq U_i$ olan ve $\cup_{\beta < i} \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_i$ koşullarını sağlayan bir $\mathcal{F}_i = \{F_{j,i} : j \leq i\}$ açık süzgeç tabanı seçerek karşılık verir. Bir i ordinali için bu karşılaşma aşağıdaki durumlardan biri olduğunda sonlanmış olur. 1. durum: $\cap (\cup_{\beta < i} \mathcal{F}_\beta) = \emptyset$. Bu durumda BOŞÇU karşılaşmayı kazanmıştır. 2. durum: DOLUCU her $j < i$ için $\cap (\cup_{\beta < i} \mathcal{F}_\beta) \neq \emptyset$ olacak biçimde oynamış ve BOŞÇU'nun oynayabileceği $U_i \notin \{U_j : j < i\}$ koşulunu sağlayan bir U_i hamlesi kalmamıştır. Bu durumda DOLUCU karşılaşmayı kazanır. Bu şekilde oynanmış tüm karşılaşmalar ailesini $\text{GBM}(X)$ ile gösteriyor ve *Genelleştirilmiş Banach-Mazur oyunu* olarak isimlendiriyoruz.

Şimdi, $\text{GBM}(X)$ oyununa aşağıdaki (*) koşulunu ekliyoruz.

(*) Herhangi bir rauntta, BOŞÇU, $x_i \in U_i \cap (\cap (\cup_{j < i} \mathcal{F}_j))$ koşulunu sağlayan bir (U_i, x_i) hamlesini yapar ve DOLUCU, $x_i \in \cap \mathcal{F}_i$ olan bir $\mathcal{F}_i$ ile karşılık verir.

$\text{GBM}(X)$ oyununda yapmış olduğumuz bu (*) değişikliği ile yeni bir oyun elde ettik. Bu yeni oyunu $\text{GCh}(X)$ ile gösteriyor ve *Genelleştirilmiş Choquet oyunu* olarak isimlendiriyoruz.

$\text{GBM}(X)$ oyununda α -uzunluklu karşılaşma (bazen karşılaşmanın bitmemiş olduğunu vurgulamak için aynı kavrama α -uzunluklu karşılaşma parçası da diyeceğiz) ile kastettiğimiz, $\beta < \alpha$ için her $(U_\beta, \mathcal{F}_\beta)$ rauntları oynanmış fakat $(U_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ raundu henüz oynanmamış karşılaşmadır. Tahmin edileceği üzere, eğer $\cap (\cup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta) = \emptyset$ ise DOLUCU'nun bu α -uzunluklu karşılaşmayı kaybettiğini söyleyeceğiz.

$\text{GCh}(X)$ oyununda α -uzunluklu karşılaşma ile kastımız benzerdir.

Dikkat edilecek olursa DOLUCU her zaman oynayacağı uygun bir açık süzgeç tabanı bulabilir. Örneğin, herhangi bir karşılaşmada $n \in \omega$ için $(U_n, \mathcal{F}_n)$ son raunt ise $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{(\cap \mathcal{F}_n) \cap$

U_n biçimindeki $\mathcal{F}_{n+1}$ açık süzgeç tabanı DOLUCU'nun oynayacağı uygun bir hamledir. $i \geq \omega$ için tüm $(U_j, \mathcal{F}_j)$ rauntları ($j \leq i$) oynanmış iken $\mathcal{F}_i = \bigcup_{j < i} \mathcal{F}_j \cup \{U_i \cap F : F \in \bigcup_{j < i} \mathcal{F}_j\}$ biçimindeki $\mathcal{F}_i$ ile DOLUCU oynayabilir.

Bu bölümde bir oyuncu için bir oyunda α -uzunluklu karşılaşmaları kaybetmeyeceği ya da α -uzunluklu karşılaşmalarda yenilmeyeceği stratejiden kastımız, bu oyuncunun her rauntta önceki tüm hamleleri kullanarak tanımlanan bir stratejisinin (kazanma stratejisi gibi) var olması ve bu oyuncunun bu strateji ile oynadığında α -uzunluklu karşılaşmalarda yenilmemesini sağlayan ama $\gamma > \alpha$ iken γ -uzunluklu karşılaşmalarda yenilmeyeceğini garanti etmeyen stratejidir.

3.3.1. Teorem

X bir T_1 -uzay olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir.

1. DOLUCU'nun GBM(X) oyununda (GCh(X) oyununda) kazanma stratejisi vardır;
2. GBM(X) oyunundaki (GCh(X) oyunundaki) herhangi bir karşılaşma için $|\cap(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta)| = 1$ olan bir α ordinali vardır (burada $\mathcal{F}_\beta$ 'lar DOLUCU'nun bu karşılaşmadaki hamleleri).

Kanıt

(1 $\Rightarrow$ 2): DOLUCU'nun γ -uzunluklu bir karşılaşmayı kazandığını varsayalım. Bu durumda BOŞÇU'nun oynayabileceği bir U_γ yoktur ve $\cap(\bigcup_{\beta < \gamma} \mathcal{F}_\beta) \neq \emptyset$ olur. Eğer $|\cap(\bigcup_{\beta < \gamma} \mathcal{F}_\beta)| = 1$ ise $\alpha = \min\{\lambda \leq \gamma : |\cap(\bigcup_{\beta < \lambda} \mathcal{F}_\beta)| = 1\}$ olarak tanımlarız. Eğer değilse farklı $x, y \in \cap(\bigcup_{\beta < \gamma} \mathcal{F}_\beta)$ noktaları vardır. Bu bize BOŞÇU'nun henüz hamlelerini bitirmediğini en azından $U_\gamma = U_0 - \{y\}$ ($(U_\gamma, x_\gamma) = (U_0 - \{y\}, x)$) biçiminde oynayabileceğini gösterir. Dolayısıyla bu karşılaşma henüz bitmemiştir. Bu ise DOLUCU'nun γ -uzunluklu bu karşılaşmayı kazanmış olması ile çelişir.

(2 $\Rightarrow$ 1): Herhangi bir karşılaşma düşünelim ve DOLUCU'nun hamleleri bu karşılaşmanın bir yerinde $|\cap(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta)| = 1$ biçimini almış olsun. Herhangi bir $\gamma \geq \alpha$ için BOŞÇU, hamlesini U_γ biçiminde ((U_γ, x_γ) biçiminde) yaptığında, DOLUCU'nun hamlesi $\mathcal{F}_\gamma = (\bigcup_{i < \gamma} \mathcal{F}_i) \cup \{U_\gamma \cap F : F \in \bigcup_{i < \gamma} \mathcal{F}_i\}$ olur. Böylece BOŞÇU eninde sonunda hamlelerini bitirip

bu karşılaşmada yenilecektir. $\square$

3.3.2. Sonuç

X bir T_1 -uzay olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir.

1. DOLUCU'nun GBM(X) oyununda kazanma stratejisi vardır;
2. DOLUCU'nun GBM(X) oyununda herhangi bir $\gamma \leq \chi(X)$ için γ -uzunluklu karşılaşma parçalarında yenilmeyeceği bir stratejisi vardır;
3. DOLUCU'nun GBM(X) oyununda herhangi bir $\gamma \leq \psi(X)$ için γ -uzunluklu karşılaşma parçalarında yenilmeyeceği bir stratejisi vardır.

Kanıt

(1 $\Rightarrow$ 2) ve (2 $\Rightarrow$ 3) açıktır. (3 $\Rightarrow$ 1): $\psi(X) = \alpha$ olsun. Herhangi bir karşılaşma düşünelim. Sonunda BOŞÇU'nun bu karşılaşmayı kaybedeceği şekilde DOLUCU'nun oynayabileceğini göreceğiz. Hipotez gereği her $\gamma < \alpha$ için, DOLUCU bu karşılaşmada kaybetmeden bir $\mathcal{F}_\gamma$ hamlesini yapabilir. BOŞÇU halen kaybetmemişse bir U_α hamlesi yapar. $U_\alpha \cap (\cap(\bigcup_{\gamma < \alpha} \mathcal{F}_\gamma)) = \emptyset$ ise BOŞÇU kaybeder ve kanıt biter. Değilse, bir $x_0 \in U_\alpha \cap (\cap(\bigcup_{\gamma < \alpha} \mathcal{F}_\gamma))$ alabiliriz. $|\mathcal{O}(x_0)| \leq \psi(X)$ ve $\cap \mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$ olan ve açıklardan oluşan bir $\mathcal{O}(x_0)$ ailesi alalım. $\mathcal{O}(x_0) \cup (\bigcup_{\gamma < \alpha} \mathcal{F}_\gamma) \cup \{U_\alpha\}$ ailesinin elemanlarının tüm sonlu arakesitlerinden oluşan aileyi $\mathcal{F}_\alpha$ ile gösterelim. $\mathcal{F}_\alpha$ oluşturulurken sonlu arakesit alındığı için elemanlarının hepsi açık olur ve süzgeç tabanı özelliklerini sağlar. Böylece $\mathcal{F}_\alpha$ bir açık süzgeç tabanı olur. DOLUCU bu $\mathcal{F}_\alpha$ ile oynadığında $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ olduğundan $\{x_0\} = \cap \mathcal{F}_\alpha$ olur ve böylece Teorem 3.3.1'den bu karşılaşmayı DOLUCU kazanır. $\square$

Yukarıdaki sonucun GCh(X) oyunundaki karşılığı olan aşağıdaki sonucun kanıtı benzer olduğundan tekrardan kaçınmak için yazılmadı.

3.3.3. Sonuç

X bir T_1 -uzay olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir.

1. DOLUCU'nun $GCh(X)$ oyununda kazanma stratejisi vardır;
2. DOLUCU'nun $GCh(X)$ oyununda herhangi bir $\gamma \leq \chi(X)$ için γ -uzunluklu karşılaşma parçalarında yenilmeyeceği bir stratejisi vardır;
3. DOLUCU'nun $GCh(X)$ oyununda herhangi bir $\gamma \leq \psi(X)$ için γ -uzunluklu karşılaşma parçalarında yenilmeyeceği bir stratejisi vardır. $\square$

Bilindiği üzere bir kardinal fonksiyon topolojik uzayları kardinal sayılar ile eşler [14]. Şimdi genelleştirilmiş topolojik oyunları kullanarak bazı topolojik uzayları ordinal sayılar ile eşleyen bir ordinal fonksiyon tanımlayalım. α bir ordinal olsun. Eğer $GBM(X)$ oyununda BOŞÇU'nun α -uzunluklu karşılaşmaları kazanacak stratejisi varsa, yani her $\beta < \alpha$ için DOLUCU'nun hamleleri $\mathcal{F}_\beta$ iken $\cap(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta) = \emptyset$ oluyor ve BOŞÇU'nun $i < \alpha$ iken i -uzunluklu karşılaşmaları kazanma garantisi yoksa, bu oyunda *BOŞÇU'nun eziciliği α 'dır* deyip $BE(X) = \alpha$ yazalım. Daha matematiksel olarak, X bir topolojik uzay ve $GBM(X)$ oyununda BOŞÇU'nun kazanma stratejisi varken $BE(X) = \min\{\alpha : GBM(X) \text{ te BOŞÇU } \alpha\text{-uzunluklu karşılaşmaları kazanır}\}$ olarak tanımlayalım. Böylece, BOŞÇU'nun $GBM(X)$ oyununda kazanma stratejisinin olduğu bir X topolojik uzayı için BE bir ordinal fonksiyondur. Benzer biçimde $GCh(X)$ oyununda BOŞÇU'nun eziciliğini tanımlayıp $BE_n(X)$ ile göstereyim. Burada n indisi BOŞÇU'nun seçtiği noktaları temsilen konmuştur.

3.4. $GBM(X)$, $GCh(X)$ Oyunları ile $BM(X)$ ve $Ch(X)$ Arasındaki İlişki

Aşağıdaki iki teoremden Banach-mazur ve Choquet oyunları ile bu oyunların genelleştirilmiş halleri arasındaki denklikleri vereceğiz.

Aşağıdaki ilk teoremin kanıtının birinci kısmını detaylı bir şekilde yazacağız. Kanıtın diğer kısımları ve bir sonraki teoremin kanıtı hemen hemen aynı detaylara sahiptir. Tekrardan kaçınmak için bu detayları yazmayıp sadece ilgili oyuncunun stratejisini tanımlayacağız. Bu ispatlarda ana fikir iç içe geçen karşılaşmalar yazmaktır.

3.4.1. Teorem

X bir T_1 -uzay olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

(1) BOŞÇU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisinin var olması için gerek ve yeter koşul $BE(X) = \omega$ olmasıdır.

(2) DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisinin var olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \leq \omega$ için DOLUCU'nun α -uzunluklu karşılaşma parçalarını GBM(X) oyununda kaybetmeyeceği bir stratejisinin var olmasıdır.

Kanıt

(1) $(\Rightarrow)$: $t, BM(X)$ oyununda BOŞÇU için kazanma stratejisi olsun. X üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen bir iyi sıralama bağıntısı var olsun. Aşağıdaki σ stratejisinin GBM(X) oyununda BOŞÇU'nun ω -uzunluklu karşılaşmaları kazanacağı bir stratejisi olduğunu göreceğiz.

İlk hamle $\sigma(\emptyset) = t(\emptyset)$ olsun.

GBM(X) oyununda $n \in \omega$ iken $P_n = (U_0, \mathcal{F}_0, \dots, U_n, \mathcal{F}_n)$ bir karşılaşma parçası olsun. Eğer $BM(X)$ oyununda $P'_n = (U_0, \cap \mathcal{F}_0, \dots, U_n, \cap \mathcal{F}_n)$ bir karşılaşma parçası ve $|t(P'_n)| \geq 2$ ise $x_n = \min t(P'_n)$ olmak üzere $U_{n+1} = \sigma(P_n) = t(P'_n) - \{x_n\}$ olarak tanımlansın. Eğer değilse (σ 'yı daha formal tanımlamak için yazdığımız bu durumun σ ile baştan oynanan bir karşılaşmada hiç gerçekleşmeyeceğini göreceğiz) $x_n = \min \cap_{i \leq n} U_i$ olmak üzere $U_{n+1} = \sigma(P_n) = \cap_{i \leq n} U_i - \{x_n\}$ olarak tanımlansın.

Böyle tanımlanan σ iyi tanımlıdır. Şöyle ki, ya $U_{n+1} = t(P'_n) - \{x_n\} \subsetneq t(P'_n) \subseteq \cap \mathcal{F}_n \subseteq U_n$ ya da $U_{n+1} = \cap_{i \leq n} U_i - \{x_n\}$ olup, her $n \in \omega$ için $U_{n+1} \subsetneq U_n$ olur. Eğer $U_{n+1} = t(P'_n) - \{x_n\}$ ise $|t(P'_n)| \geq 2$ olması halinde bu durum geçerli olduğundan olduğundan $t(P'_n) - \{x_n\} \neq \emptyset$ olur ve X uzayı T_1 -uzay olduğundan tek noktadan oluşan küme kapalı olup $t(P'_n) - \{x_n\}$ açık olur. $U_{n+1} = \cap_{i \leq n} U_i - \{x_n\}$ iken eğer $\cap_{i \leq n} U_i$ tek noktadan oluşuyorsa bu nokta açık olur ve DOLUCU bu noktayı oynadığında artık karşılaşmayı BOŞÇU kazanamaz. Halbuki t , BOŞÇU için bir kazanma stratejisidir. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkiden $\cap_{i \leq n} U_i$ tek noktadan oluşamaz ve yine uzayın T_1 olmasıyla $U_{n+1} = \sigma(P_n) = \cap_{i \leq n} U_i - \{x_n\} \in \tau^*(X)$ olur. Sonuçta her iki durum için $U_{n+1} \in \tau^*(X)$ olur. Üstelik, U_{n+1} tanımlanırken önceki U_i 'lerde var olan tek nokta atıldığı için önceki U_i 'lerden farklı olur yani $U_{n+1} \notin \{U_i : i < n+1\}$ olur. Böylece

σ iyi tanımlıdır.

σ stratejisinin BOŞÇU'nun aradığımız stratejisi olduğunu görmek için BOŞÇU'nun σ ile oynadığı ω -uzunluklu $GBM(X)$ oyununda

$$(\sigma(\emptyset) = U_0, \mathcal{F}_0, \sigma(P_0) = U_1, \mathcal{F}_1, \sigma(P_1) = U_2, \dots, \sigma(P_n) = U_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}, \dots)$$

karşılaşmasını alalım.

Bu karşılaşma için tümevarım kullanarak, her $n \in \omega$ için $BM(X)$ oyununda P'_n nin bir karşılaşma parçası olduğunu ve $|t(P'_n)| \geq 2$ olduğunu görelim (böylece σ 'nın tanımında bulunan "Eğer değilse..." kısmı hiç gerçekleşmeyecek). $n = 0$ için açıktır. $n \in \omega$ için $BM(X)$ oyununda $P'_n = (U_0, \cap \mathcal{F}_0, \dots, U_n, \cap \mathcal{F}_n)$ bir karşılaşma parçası olup $|t(P'_n)| \geq 2$ olsun. σ tanımı gereği $U_{n+1} = t(P'_n) - \{x_n\}$ olacağından $U_{n+1} \subseteq \cap \mathcal{F}_n \neq \emptyset$ olur. $\mathcal{F}_{n+1}$ tanımı gereği bir $F \in \mathcal{F}_{n+1}$ için $F \subseteq U_{n+1}$ olacağından $\cap \mathcal{F}_{n+1} \subseteq U_{n+1}$ olur ve böylece $P'_{n+1} = (U_0, \cap \mathcal{F}_0, \dots, U_n, \cap \mathcal{F}_n, U_{n+1}, \cap \mathcal{F}_{n+1})$ sonlu dizisi $BM(X)$ oyununda bir karşılaşma parçası olur. Eğer $|t(P'_{n+1})| < 2$ olsa ya $|t(P'_{n+1})| = 0$ olur ya da $|t(P'_{n+1})| = 1$ olur. Eğer $|t(P'_{n+1})| = 0$ ise $t(P'_{n+1}) = \emptyset$ olur ki bu durum t nin BOŞÇU'nun kazanma stratejisi olması ile çelişir. Eğer $|t(P'_{n+1})| = 1$ ise bu durumda $t(P'_{n+1}) = \{x\}$ biçiminde olup $\{x\}$ açık olur ki artık bu karşılaşmayı BOŞÇU kazanamaz. Bu durum t nin BOŞÇU'nun kazanma stratejisi olması ile çelişir. Bu çelişkilerden $|t(P'_{n+1})| \geq 2$ olmalıdır.

Bu durumda her $n \in \omega$ için $U_{n+1} = \sigma(P_n) = t(P'_n) - \{x_n\}$ olur. Böylece, $BM(X)$ oyununda BOŞÇU'nun t ile oynadığı aşağıdaki karşılaşma oluşur.

$$(t(\emptyset) = U_0, \cap \mathcal{F}_0, t(P'_0), \cap \mathcal{F}_1, t(P'_1), \cap \mathcal{F}_2, \dots)$$

Her $i \in \omega$ için $U_i \supseteq \cap \mathcal{F}_i \supseteq U_{i+1} \supseteq \cap \mathcal{F}_{i+1}$ olduğundan bu karşılaşma $BM(X)$ oyunundadır. BOŞÇU bu karşılaşmada t ile oynadığından $\bigcap_{i < \omega} (\cap \mathcal{F}_i) = \emptyset$ olur. Bu iki karşılaşma içi içedir. Bu durumda $\emptyset = \bigcap_{i < \omega} \cap \mathcal{F}_i = \cap (\bigcup_{i \in \omega} \mathcal{F}_i)$ olur. Böylece, σ , $GBM(X)$ oyununda BOŞÇU'nun ω -uzunluklu karşılaşmaları kazanacağı bir strateji olur.

($\Leftarrow$): σ , BOŞÇU'nun $GBM(X)$ oyununda ω -uzunluklu karşılaşmaları kazanacağı bir strateji olsun. $BM(X)$ oyununda BOŞÇU için bir t kazanma stratejisi tanımlayacağız.

$t(\emptyset) = \sigma(\emptyset)$ olsun.

Herhangi bir $P_n = (U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$ karşılaşma parçası $BM(X)$ oyununda verilsin. Eğer aşağıdaki (*) koşulu varsa, $t(P_n) = V_n \cap \sigma(P'_n)$ olarak tanımlayalım, eğer yoksa (bu durum t ile baştan oynanan hiç bir karşılaşmada olmayacak) $t(P_n) = V_n$ olsun.

(*) $U_0 = \sigma(\emptyset)$ ve $P'_0 = (U_0, \mathcal{F}_0 = \{V_0\})$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, n$ için $P'_i = (U_0, \mathcal{F}_0 = \{V_0\}, \sigma(P'_0), \dots, \sigma(P'_{i-1}), \mathcal{F}_i = \{V_0, V_1, \dots, V_i\})$ olur.

Böyle tanımlanan t stratejisinin $BM(X)$ oyununda BOŞÇU için bir kazanma stratejisi olduğu yukarıdaki kanıtı benzer biçimde görülebilir.

(2) ($\Rightarrow$): t , DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisi olsun. Eğer X sonlu ise T_1 -uzay olduğundan X ayrık (discrete) uzay olacak ve böylece DOLUCU'nun $GBM(X)$ oyununda bir kazanma stratejisi var olacaktır. O zaman, uzay sonlu olduğundan herhangi bir karşılaşmada sonlu adet rauntta BOŞÇU'nun hamleleri bitecek ve bir $\alpha < \omega$ için bu karşılaşma α -uzunluklu olacaktır. Böylece DOLUCU, $GBM(X)$ oyununda bu karşılaşmayı kazanacaktır. Şimdi X uzayının sonsuz olduğunu varsayalım. $GBM(X)$ oyununda $n \in \omega$ için $P_n = (U_0, \mathcal{F}_0, \dots, U_n)$ ekli karşılaşma parçası verilsin. $P'_n = (U_0, \cap \mathcal{F}_0, U_1 \cap (\cap \mathcal{F}_0), \dots, U_n \cap (\cap \mathcal{F}_{n-1}))$ olsun. Böylece, P'_n , $BM(X)$ oyununda ekli karşılaşma parçası olur. O zaman, aşağıdaki σ , DOLUCU'nun $GBM(X)$ oyununda aradığımız stratejisi olur.

$\sigma(U_0) = \mathcal{F}_0 = \{t(U_0)\}$ ve $\omega > n > 0$ için $\sigma(P_n) = \mathcal{F}_{n-1} \cup \{t(P'_n)\}$ olsun. $n \geq \omega$ herhangi bir uygun açık süzgeç tabanı $\mathcal{F}_n$ için $\sigma(P_n) = \mathcal{F}_n$ olsun.

($\Leftarrow$): σ , DOLUCU'nun $GBM(X)$ oyununda ilgili stratejisi olsun. X uzayı üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen bir iyi sıralama bağıntısı var olsun. $t(U) \in \sigma(U)$ olarak tanımlayalım (burada $\sigma(U)$ tek eleman içerdiğinden, $t(U)$ bu elemana eşit olacak). $BM(X)$ oyununda $n > 0$ için $P_n = (U_0, V_0, \dots, U_n)$ herhangi bir ekli karşılaşma parçası olsun. Eğer $|U_i| = 1$ ise DOLUCU kazanır. $|U_i| > 1$ olsun. $y_i = \min U_i$ diyelim ve $P'_n = (U_0, \mathcal{F}_0 = \{V_0\}, U_1 - \{y_1\}, \mathcal{F}_1 = \{V_0, V_1\}, \dots, \mathcal{F}_{n-1} = \{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}, U_n - \{y_n\})$ olarak tanımlayalım. Eğer P'_n , $GBM(X)$ oyununda ekli karşılaşma parçası ise $t(P_n) \in \sigma(P'_n) - \mathcal{F}_{n-1}$ olarak, değilse, $t(P_n) = U_n$ olarak tanımlayalım. $\square$

Yukarıdaki teoremin kanıtındaki yolları kullanarak, aşağıdaki teorem de kanıtlanabilir. Fakat okuyucuya kolaylık sağlamak için aşağıdaki teoremin kanıtını ilgili stratejileri tanımlayarak sunuyoruz. Bu başlığın girişinde de bahsettiğimiz gibi bu stratejilerin işe yarar olduğu yukarıdaki teoremin kanıtının ilk kısmına benzer şekilde görülebilir.

3.4.2. Teorem

X bir T_1 -uzay olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

(1) BOŞÇU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisinin var olması için gerek ve yeter koşul $BE(X) = \omega$ olmasıdır.

(2) DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisinin var olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \leq \omega$ için DOLUCU'nun α -uzunluklu karşılaşma parçalarını $GCh(X)$ oyununda kaybetmeyeceği bir stratejisinin var olmasıdır.

Kanıt

(1) ($\Rightarrow$): t , BOŞÇU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi ve " $\leq$ ", X üzerinde bir iyi sıralama bağıntısı olsun. $\sigma(\emptyset) = t(\emptyset)$ olarak tanımlayalım. $GCh(X)$ oyununda bir $P_n = ((U_0, x_0), \mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n)$ karşılaşma parçası verilsin. Eğer $y_i = \min(\cap \mathcal{F}_i - \{x_i\})$ varsa ve $Ch(X)$ oyununda her $0 \leq i \leq n$ için $V_i = \cap \mathcal{F}_i - \{y_i\}$ iken $P'_n = ((U_0, x_0), V_0, (U_1, x_1), V_1, \dots, V_n)$ bir karşılaşma parçası ise $\sigma(P_n) = t(P'_n)$ olarak tanımlayalım. Eğer değilse, herhangi bir uygun $\sigma(P_n)$ hamlesi alalım. Böylece, σ , BOŞÇU'nun $GCh(X)$ oyununda aradığımız stratejisi olur.

($\Leftarrow$): σ , $GCh(X)$ oyununda BOŞÇU'nun $BE_p(X) = \omega$ yapan kazanma stratejisi olsun. $t(\emptyset) = \sigma(\emptyset)$ olarak tanımlayalım. Verilen herhangi $P_n = ((U_0, x_0), V_0, \dots, V_n)$ oyun parçası için, eğer aşağıdaki (*) koşulu sağlamıyorsa, $\sigma(P'_n) = (U'_{n+1}, x_{n+1})$ olmak üzere $t(P_n) = (V_n \cap U'_{n+1}, x_{n+1})$ olarak, sağlanmıyorsa $t(P_n) = (V_n, x_n)$ olarak tanımlayalım.

(*) $(U_0, x_0) = \sigma(\emptyset)$. $P'_0 = ((U_0, x_0), \mathcal{F}_0 = \{V_0\})$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, n$ için $P'_i = ((U_0, x_0), \mathcal{F}_0 = \{V_0\}, \sigma(P'_0), \dots, \sigma(P'_{i-1}), \mathcal{F}_i = \{V_0, V_1, \dots, V_i\})$.

(2) ($\Rightarrow$): $Ch(X)$ oyununda t , DOLUCU'nun kazanma stratejisi olsun. $\sigma(U, x) = \mathcal{F}_0 =$

$\{t(U, x)\}$ olarak tanımlayalım. $GCh(X)$ oyununda verilen herhangi bir ekli karşılaşma parçası $P_n = ((U_0, x_0), \mathcal{F}_0, \dots, (U_n, x_n))$ için eğer aşağıdaki (*) koşulları varsa $\sigma(P_n) = \mathcal{F}_n = \{V_0, V_1, \dots, V_n = t(\dots, (U_n \cap V_{n-1}, x_n))\}$ olarak tanımlayalım eğer yoksa herhangi bir uygun açık süzgeç tabanı $\mathcal{F}_n$ olarak $\sigma(P_n) = \mathcal{F}_n$ tanımlayalım.

(*) $\mathcal{F}_0 = \{V_0 = t(U_0, x_0)\}$ ve her $0 < j < n$ için $\mathcal{F}_j = \{V_0 = t(U_0, x_0), V_1 = t((U_0, x_0), V_0, (U_1 \cap V_0, x_1)), \dots, V_j = t(\dots, (U_j \cap V_{j-1}, x_j))\}$ olur.

($\Leftarrow$): σ DOLUCU'nun $GCh(X)$ oyununda ilgili stratejisi ve " $\leq$ ", X uzayı üzerinde bir iyi sıralama bağıntısı olsun. $t(U, x) \in \sigma(U, x)$ olarak tanımlayalım (burada $\sigma(U, x)$ tek eleman içerdiğinden, $t(U, x)$ bu elemana eşit olacak). $Ch(X)$ oyununda $n > 0$ iken herhangi bir ekli karşılaşma parçası $P_n = ((U_0, x_0), V_0, \dots, (U_n, x_n))$ verilsin. Eğer $U_i = \{x_i\}$ bu karşılaşma parçasında ise DOLUCU kazanır. Dolayısıyla $U_i \neq \{x_i\}$ olduğunu varsayabiliriz. $y_i = \min(U_i - \{x_i\})$ olsun, o zaman, $P'_n = ((U_0, x_0), \mathcal{F}_0 = \{V_0\}, (U_1 - \{y_1\}, x_1), \mathcal{F}_1 = \{V_0, V_1\}, \dots, \mathcal{F}_{n-1} = \{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}, (U_n - \{y_n\}, x_n))$ olarak tanımlayalım. Eğer P'_n , $GCh(X)$ oyununda bir karşılaşma parçası ise $t(P_n) \in \sigma(P'_n) - \mathcal{F}_{n-1}$ olsun. Değilse $t(P_n) = U_n$ olsun. $\square$

3.5. Yönlendirilmiş Tam Uzaylar ve GBM(X) ile GCh(X)

"Domain temsilcili (domain representable) uzaylar" biçiminde isimlendirilen ve literatürde bu isimle hakkında araştırmalar bulunan topolojik uzaylar son zamanlarda yönlendirilmiş tam uzaylar (directed complete spaces) olarak isimlendirilmeye başlanmıştır. Bu uzaylara yönlendirilmiş tam uzay demek bize de daha anlamlı gelmektedir. Bu yüzden bu bölümde "domain temsilcili" ismi yerine "yönlendirilmiş tam uzay" ismi kullanılmıştır.

3.5.1. Tanım

X bir T_1 -uzay olsun. Eğer $(Q, \ll, B)$ üçlüsü aşağıdaki beş koşulu sağlayacak biçimde varsa X uzayına *yönlendirilmiş tam uzay* denir.

(1) $B: Q \rightarrow \tau^*(X)$ bir fonksiyon olup $\{B(q) : q \in Q\} \subseteq \tau^*(X)$ ailesi $\tau(X)$ topolojisinin bir tabanıdır,

(2) $\ll$, Q üzerinde geçişli ve ters simetrik bir bağıntıdır,

(3) her $p, q \in Q$ için, $p \ll q$ ise $B(p) \subseteq B(q)$ olur,

(4) her $x \in X$ için $\{q \in Q : x \in B(q)\}$ kümesi $\ll$ ile aşağı yönlendirilmiştir,

(5) $D \subseteq Q$ olmak üzere $(D, \ll)$ aşağı yönlendirilmiş ise $\bigcap_{d \in D} B(d) \neq \emptyset$ olur.

Herhangi bir κ sonsuz kardinali için, bir X topolojik uzayı yukarıdaki (1), (2), (3), (4) koşullarını ve aşağıdaki (5) $_{\kappa}$ koşulunu sağlıyorsa X uzayına κ yönlendirilmiş tam uzay denir.

(5) $_{\kappa}$ eğer $D \subseteq Q$ kümesi için $|D| < \kappa$ olup $(D, \ll)$ aşağı yönlendirilmiş ise $\bigcap_{d \in D} B(d) \neq \emptyset$ olur.

Eğer bir X topolojik uzayı (1), (2), (3), (5) koşullarını ve aşağıdaki (4)* koşulunu sağlıyorsa bu X uzayına zayıf yönlendirilmiş tam uzay denir.

(4)* Eğer $H \subseteq Q$, $(H, \ll)$ aşağı yönlendirilmiş, $\mathcal{U} \subset \tau^*(X)$ ve $x \in (\bigcap \mathcal{U}) \cap (\bigcap_{p \in H} B(p))$ ise bu durumda aşağıdaki i-iv koşullarını sağlayan bir $K \subseteq Q$ vardır:

i) $H \subseteq K$,

ii) $x \in \bigcap_{k \in K} B(k)$,

iii) $(K, \ll)$ aşağı yönlendirilmiş,

iv) $U \in \mathcal{U}$ için $B(k_u) \subseteq U$ olan bir $k_u \in K$ vardır.

Eğer X topolojik uzayı için (1), (2), (3), (4)* (5) $_{\kappa}$ koşulları sağlanıyorsa X uzayına κ zayıf yönlendirilmiş tam uzay denir. $\square$

Tanımdan şu ifadenin doğruluğu açıktır: X topolojik uzayı yönlendirilmiş tam (κ yönlendirilmiş tam) ise X zayıf yönlendirilmiş tam (κ zayıf yönlendirilmiş tam) uzaydır.

Aşağıdaki lemma, [20] deki Lemma 3.6 ile benzerdir. (4*) dan daha zayıf olan aşağıdaki (4**)

aynı kaynakta (Remark 1) vardır.

(4**) Eğer $H \subseteq Q$, $(H, \ll)$ aşağı yönlendirilmiş, $\mathcal{U} \subseteq \tau^*(X)$ ve en az bir $x \in (\cap \mathcal{U}) \cap (\cap_{p \in H} B(p))$ varsa, o zaman, aşağıdaki i, ii ve iii koşullarını sağlayan bir $K \subseteq Q$ vardır:

i) $H \subseteq K$,

ii) $(K, \ll)$ aşağı yönlendirilmiş,

iii) $U \in \mathcal{U}$ için $x \in B(k_u) \subseteq U$ olan bir $k_u \in K$ vardır.

3.5.2. Lemma

X topolojik uzayı $(Q, \ll, B)$ ile bir zayıf yönlendirilmiş tam uzay olsun. $H \subseteq Q$ sonsuz alt kümesi $\ll$ ile aşağı yönlendirilmiş olmak üzere bir $\mathcal{U} \subseteq \tau^*(X)$ ailesi verilsin. Eğer bir $x \in (\cap \mathcal{U}) \cap (\cap_{p \in H} B(p))$ noktası varsa, o zaman, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $P \subseteq Q$ alt kümesi bulabiliriz.

(1) $H \subseteq P$, $x \in \cap_{p \in P} B(p)$ ve $(P, \ll)$ aşağı yönlendirilmiş,

(2) $|P| \leq |H| \cdot |\mathcal{U}|$,

(3) her $U \in \mathcal{U}$ için $x \in B(p_u) \subseteq U$ olan bir $p_u \in P$ noktası vardır.

Kanıt

X zayıf yönlendirilmiş tam uzay olduğundan yukarıdaki 4*, i-iv koşullarını sağlayan bir $K \subseteq Q$ kümesi vardır. O halde $H \subseteq K$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için $x \in B(k_u) \subseteq U$ olacak biçimde bir $k_u \in K$ noktası vardır.

$H_0 = H \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \{k_u\}$ diyelim ve Q üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen bir iyi sıralama bağıntısı var olsun. Her $n \in \omega$ için $H_{n+1} = H_n \cup (\bigcup_{k, q \in H_n} \{p^* : p^* = \min\{p \in K : p \ll k, p \ll q\}\})$ olarak tanımlayalım. Böylece $P = \bigcup_{n \in \omega} H_n$ aradığımız kümedir. Şöyle ki, $H \subseteq H_0 \subseteq P$ ve $x \in \cap_{p \in K} B(p) \subseteq \cap_{p \in P} B(p)$ olur. P nin aşağı yönlendirilmiş olduğunu görmek için $p, q \in P$

alalım. $n_1, n_2 \in \omega$ için $p \in H_{n_1}$ ve $q \in H_{n_2}$ olmalıdır. $n = \max\{n_1, n_2\}$ denilirse $p, q \in H_n$ olur. Bu takdirde $\min\{r \in K : r \ll p \text{ ve } r \ll q\} = r^* \in H_{n+1}$ olup $H_{n+1} \subseteq P$ olduğundan $r^* \in P$ dir. (2) ve (3) açıktır. $\square$

3.5.3. Teorem

Eğer X zayıf yönlendirilmiş tam uzay ise DOLUCU'nun $GCh(X)$ oyununda kazanma stratejisi vardır.

Kanıt

X topolojik uzayı $(Q, \ll, B)$ ile zayıf yönlendirilmiş tam uzay olsun. Q ile Q nun güç kümesi üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen birer iyi sıralama bağıntısı var olsun.

$(U_0, x_0), \mathcal{F}_0, \dots, (U_\alpha, x_\alpha)$ sonlu dizisi $GCh(X)$ oyununda bir karşılaşma parçası olsun.

$$\sigma((U_0, x_0), \mathcal{F}_0, \dots, (U_\alpha, x_\alpha)) = \begin{cases} \mathcal{F}_0, (1) \text{ de tanımlandığı gibi} & : \alpha = 0 \\ \mathcal{F}_\alpha, (2) \text{ de tanımlandığı gibi} & : 0 < \alpha < \omega \\ \mathcal{F}_\alpha, (3) \text{ te tanımlandığı gibi} & : \omega \leq \alpha \end{cases}$$

(1) $q_0 = \min\{q \in Q : x_0 \in B(q) \subseteq U_0\}$ olmak üzere $\mathcal{F}_0 = \{B(q_0)\}$.

(2) $\alpha = m + 1$ diyelim. Eğer $\mathcal{F}_m = \{B(q_0), B(q_1), \dots, B(q_m)\}$ ve $q_m \ll q_{m-1} \ll \dots \ll q_0$ ise $\mathcal{F}_\alpha$ aşağıdaki gibi tanımlanacak. Değilse, $\mathcal{F}_\alpha$ herhangi bir uygun açık süzgeç tabanı olacak (bir karşılaşma baştan itibaren σ ile oynandığında bu durum gerçekleşmeyecek).

$H_m = \{q_0, \dots, q_m\}$ ve $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ olsun. $x_\alpha \in (\bigcap_{q \in H_m} B(q)) \cap (\bigcap \mathcal{U})$ olduğundan, zayıf yönlendirilmiş tam uzay tanımı (4)* gereği, $H \subseteq K \subseteq Q$ biçimde olan ve bir $k \in K$ için $x_\alpha \in B(k) \subseteq U_\alpha$ olan aşağı yönlendirilmiş bir K bulabiliriz. Burada (4)* gereği $x_\alpha \in \bigcap_{k \in K} B(k)$ olur. Böyle K kümelerinden oluşan ailenin minimum elemanına K_α diyelim ve $k_\alpha^* = \min\{k \in K_\alpha : B(k) \subseteq U_\alpha\}$ olmak üzere $q_\alpha = \min\{k \in K_\alpha : k \ll k_\alpha^*, k \ll q_m\}$ iken $\mathcal{F}_\alpha = \{B(q_0), B(q_1), \dots, B(q_m), B(q_\alpha)\}$ biçiminde tanımlayalım. Burada q_α nın tanımı ve zayıf yönlendirilmiş tam uzay tanımı (3) ile (4)* dan $x_\alpha \in \bigcap (\bigcup_{j < \alpha+1} \mathcal{F}_j) = \bigcap \mathcal{F}_\alpha$ olup $B(q_\alpha) \subseteq U_\alpha$ olur. Yani, bu durumda σ iyi tanımlıdır.

(3) Eğer her bir $\beta < \alpha$ için aşağıdaki (*) koşulu sağlanıyorsa, $\mathcal{F}_\alpha$ aşağıdaki gibi tanımlanacak. Eğer sağlanmıyorsa herhangi bir uygun açık süzgeç tabanı olacak (bir karşılaşma baştan itibaren σ ile oynandığında bu durum gerçekleşmeyecek).

(*) Her bir $\mu \leq \beta$ için H_μ aşağı yönlendirilmiş ve $\mathcal{F}_\mu = \{B(q) : q \in H_\mu\}$, $|H_\mu| = |\mu|$ olmak üzere $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_\beta \subseteq Q$ vardır.

α bir limit ordinal ise $H = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$ ve eğer $\alpha = \gamma + 1$ ise $H = H_\gamma$ olsun. $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ diyelim. Böylece bir önceki lemma gereği, $H_\alpha = \min\{P \subseteq Q : P \text{ aşağı yönlendirilmiş, } H \subseteq P, x_\alpha \in \bigcap_{p \in P} B(p), |H| = |P|, \exists p \in P (x_\alpha \in B(p) \subseteq U_\alpha)\}$ biçiminde tanımlayabiliriz. Bu H_α kümesini kullanarak $\mathcal{F}_\alpha = \{B(q) : q \in H_\alpha\}$ biçiminde tanımlayalım. Burada H_α tanımı gereği $x_\alpha \in \bigcap_{p \in H_\alpha} B(p) = \bigcap \mathcal{F}_\alpha$ olup bir $q \in H_\alpha$ için $B(q) \in \mathcal{F}_\alpha$ ve $B(q) \subseteq U_\alpha$ dır. Yine H_α tanımı gereği $|\mathcal{F}_\alpha| = |\alpha|$ ve $\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ olur. Böylece, σ iyi tanımlı olur.

DOLUCU'ya herhangi bir karşılaşmayı baştan σ stratejisi ile oynatarak DOLUCU'nun bu karşılaşmayı kazanacağı, yani bu stratejinin kazanma stratejisi olduğu, görülebilir. Biz, yine de, okuyucuya kolaylık olması için böyle bir karşılaşmanın genel hatlarını verelim.

Şimdi, $GCh(X)$ oyununda keyfi bir karşılaşmayı baştan itibaren DOLUCU'ya σ ile oynatalım. Bu karşılaşmada eğer herhangi bir rauntta BOŞÇU hamle yapamıyorsa karşılaşmayı kaybeder. O yüzden her rauntta hamle yapabildiğini varsayalım ve BOŞÇU'nun hamle yaptığı her rauntta DOLUCU'nun yenilmeden (yani arakesiti boş olmayan bir süzgeç tabanı oynayarak) karşılık verebildiğini görelim. Bu durumda eninde sonunda BOŞÇU hamlelerini tüketir ve kaybeder.

BOŞÇU, (U_0, x_0) hamlesini yaparak karşılaşmayı başlatsın. Zayıf yönlendirilmiş tam uzay tanımı gereği $\{B(q) : q \in Q\}$ bir taban olduğundan $q_0 = \min\{q \in Q : x_0 \in B(q) \in U_0\}$ vardır. Böylece DOLUCU, σ nın tanımdaki (1)'e göre $\mathcal{F}_0 = \{B(q_0)\}$ hamlesini yapar.

O zaman, bu karşılaşmada her $n \in \omega - \{0\}$ için, tümevarım kullanarak, DOLUCU'nun σ ile oynadığı $((U_0, x_0), \mathcal{F}_0, (U_n, x_n), \mathcal{F}_n)$ karşılaşma parçasının σ nın tanımındaki (2)'nin koşullarını sağladığı ve $\mathcal{F}_n = \{B(q_0), B(q_1), \dots, B(q_m), B(q_n)\}$ biçiminde olduğu görülebilir. Bunu tümevarımla kanıtlamak için $n = m + 1$ iken $\mathcal{F}_m = \{B(q_0), B(q_1), \dots, B(q_m)\}$ ve

$q_m \ll q_{m-1} \ll \dots \ll q_0$ olduğu kabul edilip $H_m = \{q_0, \dots, q_m\}$ ve $\mathcal{U} = \{U_n\}$ alınır. $x_n \in (\bigcap_{q \in H_m} B(q)) \cap (\cap \mathcal{U})$ olduğundan, zayıf yönlendirilmiş tam uzay tanımı gereği, $H \subseteq K \subseteq Q$ biçimde olan ve bir $k \in K$ için $x_n \in B(k) \subseteq U_n$ olan aşağı yönlendirilmiş bir K bulunabilir. (2)'de olduğu gibi, böyle K kümelerinden oluşan ailenin minimum elemanına K_n denilip $k_n^* = \min\{k \in K_n : B(k) \subseteq U_n\}$ olmak üzere $q_n = \min\{k \in K_n : k \ll k_n^*, k \ll q_m\}$ iken $\mathcal{F}_n = \{B(q_0), B(q_1), \dots, B(q_m), B(q_n)\}$ ve $q_n \ll q_m \ll q_{m-1} \ll \dots \ll q_0$ olduğu ve bu $\mathcal{F}_n$ hamlesinin $GCh(X)$ oyunu için anlamlı olduğu görülür.

Bu durumda $q_n \ll q_m \ll q_{m-1} \ll \dots \ll q_0$ olduğundan zayıf yönlendirilmiş tam uzay tanımı ve σ stratejisi tanımı (2) gereği $x_n \in \cap(\bigcup_{i < n+1} \mathcal{F}_i) = B_{q_n} \neq \emptyset$ olur. Yani σ her $n \in \omega$ için DOLUCU'ya bu karşılaşmayı kaybettirmez.

BOŞÇU, (U_ω, x_ω) hamlesini yapsın. Bu hamle $x_\omega \in U_\omega \cap (\bigcup_{n < \omega} \mathcal{F}_n)$ biçiminde olmalıdır (böyle bir hamle yapamıyorsa BOŞÇU kaybeder). Her $n \in \omega$ için $H_n = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ iken $H_n \subseteq Q$ aşağı yönlendirilmiş olup $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots$ dır. $H = \bigcup_{n < \omega} H_n$ ve $\mathcal{U} = \{U_\omega\}$ diyelim. Burada $|H| = \omega$, $|\mathcal{U}| = 1$ ve $x_\omega \in ((\cap \mathcal{U}) \cap (\bigcap_{q \in H} B(q)))$ olup önceki lemma gereği, $H_\omega = \min\{P \subseteq Q : P \text{ aşağı yönlendirilmiş, } x_\omega \in \bigcap_{p \in P} B(p), H \subseteq P, |H| = |P|, \exists p \in P (x_\omega \in B(p) \subseteq U_\omega)\}$ biçiminde tanımlayabiliriz. Bu H_ω kümesini kullanarak tanımlanan $\mathcal{F}_\omega = \{B(q) : q \in H_\omega\}$ biçimindeki süzgeç tabanı ile DOLUCU oynar.

Burada $i \leq \omega$ için H_i aşağı yönlendirilmiş ve $\mathcal{F}_i = \{B(q) : q \in H_\mu\}$, $|H_i| = i$ olup $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_\omega \subseteq Q$ dır. Yani σ nın tanımındaki (3) ün (*) koşulları sağlanır.

Şimdi $\alpha \geq \omega$ iken aşağıdaki α -uzunluklu karşılaşma parçası oynanmış olsun (sonlu ötesi tümevarım kullanılacak).

$$((U_0, x_0), \mathcal{F}_0, (U_1, x_1), \mathcal{F}_1 \dots)$$

Burada tümevarım gereği α ordinaline kadar σ tanımındaki (3) ün (*) koşullarının var olduğunu kabul edelim.

Önce sırasıyla α limitken ve $\alpha = \gamma + 1$ iken $\cap(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta) \neq \emptyset$ olduğunu görmeliyiz (bunu görmemizin nedeni DOLUCU'nun bu karşılaşma parçasında kaybetmemiş olduğunu

kanıtlamaktır). Bu görüldüğünde BOŞÇU'nun (U_α, x_α) hamlesini yapabileceğini kabul edebiliriz.

Önce α limit ordinal iken $H = \bigcap_{\beta < \alpha} H_\beta$ olan H ın aşağı yönlendirilmiş olduğu, H_β ların aşağı yönlendirilmiş ve $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq$ olduğundan açıktır. Böylece zayıf yönlendirilmiş tam uzay tanımı gereği $\bigcap (\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta) = \bigcap_{q \in H} B(q) \neq \emptyset$ olur.

Şimdi $\alpha = \gamma + 1$ iken σ stratejisi tanımı (3) gereği $x_\gamma \in \bigcap \mathcal{F}_\gamma = \bigcap (\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta) = \bigcap_{q \in H_\gamma} B(q) \neq \emptyset$ olur.

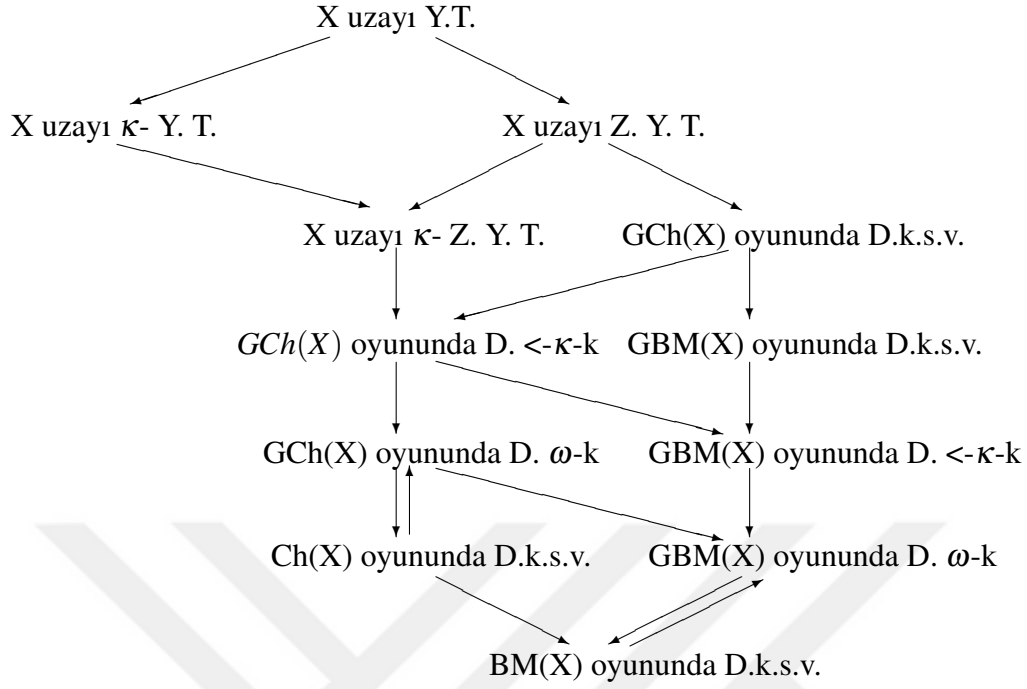
BOŞÇU, (U_α, x_α) hamlesini yapsın.

α limit ordinal iken σ tanımındaki (3) ün (*) koşulları sağlandığından yukarıda $\mathcal{F}_\omega$ hamlesinde yapılanlara benzer biçimde DOLUCU'nun oynayacağı $\mathcal{F}_\alpha$ bulunur ve (3) ün (*) koşulları sağlanır.

$\alpha = \gamma + 1$ iken yine $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, $H = H_\gamma$ denildiğinde $x_\alpha \in U_\alpha \cap (\bigcap \mathcal{F}_\gamma) = ((\bigcap \mathcal{U}) \cap (\bigcap_{q \in H} B(q)))$ olup önceki lemma kullanılarak (3)'teki gibi H_α bulunur. Bu H_α kümesini kullanarak tanımlanan $\mathcal{F}_\alpha = \{B(q) : q \in H_\alpha\}$ biçimindeki süzgeç tabanı ile DOLUCU oynar ve (3) ün (*) koşulları sağlanır. H_α tanımı gereği $x_\alpha \in \bigcap \mathcal{F}_\alpha \neq \emptyset$ olur.

Böylece DOLUCU bu σ stratejisi ile oynadığı bu karşılaşmada BOŞÇU hamle yapabildiği sürece DOLUCU'nun yenilmeyecek biçimde karşılık vereceği görülmüş olur. BOŞÇU'nun hamleleri eninde sonunda biteceğinden bu karşılaşmayı DOLUCU kazanır. Bu karşılaşma keyfi olduğundan σ , DOLUCU için $GCh(X)$ oyununda kazanma stratejisidir. $\square$

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki diyagramı verebiliriz. Bu diyagramda, κ bir sayılamaz kardinal olup, oklar "ise" manasındadır. Yine bu diyagramda şu kısaltmalar yapılmıştır. Y.T.: Yönlendirilmiş tam, Z.Y.T.: Zayıf yönlendirilmiş tam, D.k.s.v.: DOLUCU'nun kazanma stratejisi vardır, D. $<-\kappa$ -k: DOLUCU'nun her $\alpha < \kappa$ için α -uzunluklu karşılaşma parçalarında yenilmeyeceği stratejisi vardır, D. ω -k: DOLUCU'nun ω -uzunluklu karşılaşma parçalarında yenilmeyeceği bir stratejisi vardır.



3.6. Bu Konu ile İlgili Açık Sorular

Aşağıdaki bazı soruların yukarıdaki diyagrama bakılarak okunduğunda daha anlamlı olacağını düşünüyoruz.

3.6.1. Soru

Bir X uzayı için $GBM(X)$ oyununda (veya $GCh(X)$ oyununda) DOLUCU'nun kazanma stratejisi varsa X yönlendirilmiş tam uzaydır diyebilir miyiz?

3.6.2. Soru

Bir X topolojik uzayı için $GBM(X)$ oyununda (veya $GCh(X)$ oyununda) DOLUCU'nun kazanma stratejisi varsa X zayıf yönlendirilmiş tam uzaydır diyebilir miyiz?

3.6.3. Soru

κ bir kardinal X bir topolojik uzay olsun. $GBM(X)$ oyununda (veya $GCh(X)$ oyununda)

DOLUCU'nun her $\alpha < \kappa$ için α -uzunluklu karşılaşma parçalarında yenilmeyeceği bir stratejisi varsa X uzayı κ yönlendirilmiş tamdır diyebilir miyiz?

3.6.4. Soru

κ bir kardinal X bir topolojik uzay olsun. $GBM(X)$ oyununda (veya $GCh(X)$ oyununda) DOLUCU'nun her $\alpha < \kappa$ için α -uzunluklu karşılaşma parçalarında yenilmeyeceği bir stratejisi varsa X uzayı zayıf κ yönlendirilmiş tamdır diyebilir miyiz?

$(4)^{**}$ maddesinin yönlendirilmiş tam uzay tanımındaki $(4)^*$ maddesinden daha zayıf olduğu açıktır. Bu tanımdaki (1) ve (4) kullanılarak $(4)^*$ elde edilir. Kabaca, $((1) \text{ ve } (4)) \rightarrow (4)^* \rightarrow (4)^{**}$. Bu okların ters yönleri için ne söyleyebiliriz? Aşağıdaki bazı sorular bununla alakalıdır.

3.6.5. Soru

Yönlendirilmiş tam uzay tanımındaki, (4) , (4^{**}) ile değiştirilebilir mi? Yani (1) , (2) , (3) , (4^{**}) koşullarını sağlayan uzay yine yönlendirilmiş tam uzay mıdır? Bu soru [20] de sorulmuştur.

Aşağıdaki ilk üç soru [20] de sorulan yukarıdaki soruya benzerdir.

3.6.6. Soru

Zayıf yönlendirilmiş tam uzaylar, yönlendirilmiş tam uzay mıdır?

3.6.7. Soru

Zayıf yönlendirilmiş tam uzay tanımındaki $(4)^*$, $(4)^{**}$ ile yer değiştirilebilir mi? Yani (1) , (2) , (3) , (4^{**}) koşullarını sağlayan uzay yine zayıf yönlendirilmiş tam uzay mıdır?

3.6.8. Soru

κ zayıf yönlendirilmiş tam uzaylar, κ yönlendirilmiş tam uzay mıdır?

Aşağıdaki soru bir sorudan ziyade bir proje olarak düşünülebilir. Biz bu soru üzerinde çok düşünmedik. Belki bazı önemli sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir.

3.6.9. Soru

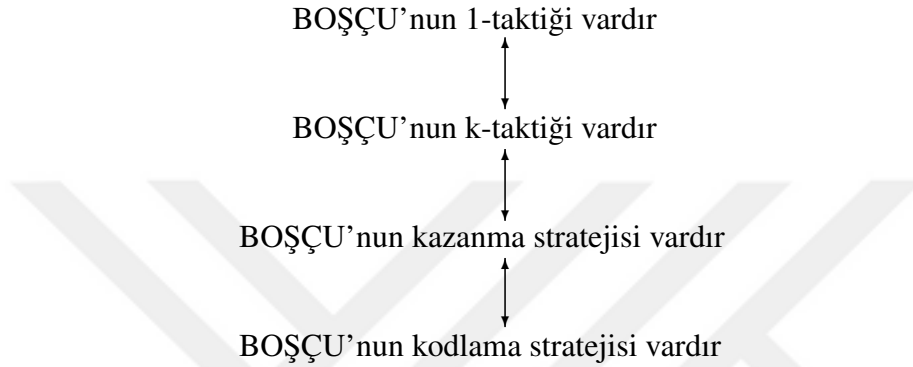
$\mathcal{P}$ özelliğini değiştirerek, $O(\mathcal{P}, X)$ oyunundaki oyuncuların kazanma stratejilerinin varlığı nasıl karakterize edilir?





4. DOLUCU'NUN TOPOLOJİK OYUNLARDAKİ STRATEJİLERİ

Banach-Mazur oyununda BOŞÇU'nun kazanma stratejisi varken 1-taktiğinin olduğu bilinmektedir. Üstelik Choquet oyununda da BOŞÇU'nun kazanma stratejisi varken 1-taktiği vardır. Bu iki sonuç için [15] e bakılabilir. Bilinen bu iki sonuçtan gerek Banach-Mazur gerekse Choquet oyununda BOŞÇU'nun stratejileri için aşağıdaki diyagram vardır.



Bu diyagramın anlamı, kabaca, BOŞÇU'nun stratejileri arasında her iki oyunda da fark olmadığıdır. Fakat DOLUCU'nun stratejileri ile ilgili bu söylenememektedir. Örneğin, DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisinin var olduğu ama 1-taktiğinin var olmadığı bir X topolojik uzayı vardır [21]. Fakat DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda Markov stratejisi varsa 1-taktiğinin var olduğu bilinmektedir (Sonuç 9, [15]). Bilinen bu sonucun $Ch(X)$ oyununda geçerli olup olmadığı akla gelen doğal bir sorudur. Bu soruyu yani "DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda Markov stratejisi varsa 1-taktiği var mıdır?" sorusunu ilk olarak Galvin sormuştur (Biz bu soruyu ilk olarak [22] de Galvin'e atfen gördük ve ayrıca Marion Scheepers "Bu sorunun kaynağını bilmiyorum; Galvin'den bunu duyduğumu hatırlıyorum" demektedir ([16])). İlginç bir şekilde, görece eski olan bu soru halen açık sorudur. Biz burada bu soruya kısmi bir cevap verdik. Şöyle ki, DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda Markov stratejisi varsa 2-taktiğinin olduğunu gördük ve eğer X topolojik uzayı bazı koşulları sağlıyorsa 1-taktiğinin de var olduğunu bulduk. Böylece ilerleyen sayfalarda görüleceği üzere yukarıdaki diyagrama benzer, fakat üzerinde hala açık sorular bulunan, bir diyagramı DOLUCU için $Ch(X)$ oyununda elde ettik.

[23] te (Teorem 42) DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varken k -taktiğinin var olduğu ($k > 1$ durumu için) bulunmuştur. Aynı sonucun $Ch(X)$ için geçerli olup olmadığı

doğal bir sorudur. Biz burada, X topolojik uzayının sayılabilir ranklı Nöderyan tabanı varken $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun k -Markov stratejisinin var olmasının k -taktiğinin var olmasını gerektirdiğini kanıtladık. Bunların dışında bu bölümde elde ettiğimiz bazı sonuçlara değinelim. X topolojik uzayının bazı özel koşulları sağlayan Nöderyan tabanı (π -tabanı) varken DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda ($BM(X)$ oyununda) kazanma stratejisi varsa $Ch(X)$ oyununda ($BM(X)$ oyununda) 1-taktiği vardır. X topolojik uzayının σ -yerel sayılabilir tabanı (π -tabanı) varken DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda ($BM(X)$ oyununda) kazanma stratejisi varsa 2-taktiği (1-taktiği) vardır.

Bu bölümde yapılanlar yayınlanmıştır [12].

4.1. Choquet Oyununda Markov Strateji ve 2-taktik

Aşağıdaki teoremde $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun Markov Strateji ile 2-taktik arasında bir ilişki veriyoruz. Aşağıdaki teorem Galvin'in $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun Markov stratejisi varken 1-taktiğinin var olup olmadığı hakkındaki sorusuna kısmi bir cevaptır.

4.1.1. Teorem

DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda 2-taktiği vardır.

Kanıt

σ , DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyunundaki Markov stratejsi olsun. Her $n \in \omega$ ve $y \in O \in \tau^*(X)$, $x \in U \in \tau^*(X)$ olan $((O, y), (U, x))$ ikilisi için aşağıdakileri tanımlayalım.

$(O, y) \overset{n}{\succ} (U, x) \Leftrightarrow O \supseteq \sigma(n, (O, y)) \supseteq U$ biçiminde olsun. Eğer her $n \in \omega$ için $(O, y) \overset{n}{\succ} (U, x)$ ise $((O, y), (U, x))$ ikilisine *gevşek* diyeceğiz. Değilse, yani en az bir $n \in \omega$ için $(O, y) \overset{n}{\succ} (U, x)$ sağlanmıyorsa $((O, y), (U, x))$ ikilisine *sıkı* diyeceğiz.

Eğer $((O, y), (U, x))$ ikilisi sıkı ise, $N((O, y), (U, x)) = \min\{n \in \omega : \neg((O, y) \overset{n}{\succ} (U, x))\}$ olarak tanımlayalım.

Şimdi bir t stratejisi tanımlayacağız ve 2-taktik olduğunu göreceğiz.

$$t((U, x)) = \sigma(0, (U, x)) \text{ ve}$$

$$t((O, y), (U, x)) = \begin{cases} \sigma(0, (U, x)) & : ((O, y), (U, x)) \text{ gevşek ise,} \\ \bigcap_{n \leq N((O, y), (U, x))} \sigma(n, (U, x)) & : ((O, y), (U, x)) \text{ sıkı ise.} \end{cases}$$

Şimdi t nin DOLUCU için bir 2-taktik olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$t((U_i, x_i), (U_{i+1}, x_{i+1})) = W_{i+1}$$

olmak üzere DOLUCU'nun t ile oynadığı keyfi bir

$$((U_0, x_0), t((U_0, x_0)), (U_1, x_1), W_1, (U_2, x_2), W_2, (U_3, x_3), W_3, \dots)$$

karşılaşmayı alalım.

Eğer $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olduğunu görebilsek bu karşılaşmayı DOLUCU'nun kazandığını, karşılaşma keyfi olduğundan, DOLUCU'nun t ile oynadığı herhangi bir karşılaşmayı kazanacağını kanıtlamış oluruz. Böylece t nin DOLUCU için 2-taktik olduğu görülür ve kanıt biter.

Her $i \in \omega$ için $(U_i, x_i) \stackrel{0}{\succ} (U_{i+1}, x_{i+1})$ olduğu açıktır

1. durum: Her $i \in \omega$ için $((U_{n_i-1}, x_{n_i-1}), (U_{n_i}, x_{n_i}))$ gevşek olacak biçimde bir $n_i > i$ vardır.

Bu durumda, bu karşılaşmanın içinde gevşek çiftlerden oluşan $((U_{n_i-1}, x_{n_i-1}), (U_{n_i}, x_{n_i}))$ ve $n_i < n_{i+1} - 1$ olan bir alt dizi vardır. Böylece bu karşılaşma şöyle yazılabilir:

$$(\dots, (U_{n_0-1}, x_{n_0-1}), W_{n_0-1}, (U_{n_0}, x_{n_0}), \dots, (U_{n_1-1}, x_{n_1-1}), W_{n_1-1}, (U_{n_1}, x_{n_1}), \dots, (U_{n_i-1}, x_{n_i-1}), W_{n_i-1}, (U_{n_i}, x_{n_i}), \dots) .$$

$((U_{n_i-1}, x_{n_i-1}), (U_{n_i}, x_{n_i}))$ gevşek ve $W_{n_i-1} = \sigma(i, ((U_{n_i-1}, x_{n_i-1})))$ olduğundan aşağıdaki diziyi elde ederiz.

$$(\dots, (U_{n_0-1}, x_{n_0-1}), \sigma(0, ((U_{n_0-1}, x_{n_0-1})), (U_{n_0}, x_{n_0}), \dots, (U_{n_1-1}, x_{n_1-1}), \sigma(1, ((U_{n_1-1}, x_{n_1-1})), (U_{n_1}, x_{n_1}), \dots, (U_{n_i-1}, x_{n_i-1}), \sigma(i, ((U_{n_i-1}, x_{n_i-1})), (U_{n_i}, x_{n_i}), \dots)$$

Bu dizinin aşağıdaki biçimde bir alt dizisi vardır.

$$((U_{n_0-1}, x_{n_0-1}), \sigma(0, ((U_{n_0-1}, x_{n_0-1})), (U_{n_1-1}, x_{n_1-1}), \sigma(1, ((U_{n_1-1}, x_{n_1-1})), \dots, (U_{n_i-1}, x_{n_i-1}), \sigma(i, ((U_{n_i-1}, x_{n_i-1})), \dots)$$

Bu alt dizi DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda σ Markov stratejisi ile oynadığı bir karşılaşma olduğundan $\emptyset \neq \bigcap_{i \in \omega} U_{n_i} = \bigcap_{i \in \omega} U_i$ olur. Böylece bu durum için kanıt biter.

2. durum: Bir $n_0 \in \omega$ vardır ve her $n \geq n_0$ için $((U_n, x_n), (U_{n+1}, x_{n+1}))$ sıkıdır.

Kısa yazmak için, $(U_{n_0+i}, x_{n_0+i}) = (H_i, y_i)$ değişikliği yapalım. Bu durumda $\bigcap_{i \in \omega} H_i = \bigcap_{i \in \omega} U_i$ olur.

İddia: Her $i \in \omega$ için $i < N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1})) < N((H_{i+1}, y_{i+1}), (H_{i+2}, y_{i+2}))$ olur.

İddianın kanıtı: $((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1}))$ sıkı olduğu için t nin tanımı gereği

$$H_{i+1} \supseteq t((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1})) = \bigcap_{n \leq N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1}))} \sigma(n, (H_{i+1}, y_{i+1})) \supseteq H_{i+2}$$

olur. Buradan $n \leq N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1}))$ için $H_{i+1} \supseteq \sigma(n, (H_{i+1}, y_{i+1})) \supseteq H_{i+2}$ olur.

Böylece her $n \leq N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1}))$ için $(H_{i+1}, y_{i+1}) \stackrel{n}{\succ} (H_{i+2}, y_{i+2})$ olur. Bu durumda $N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1})) < N((H_{i+1}, y_{i+1}), (H_{i+2}, y_{i+2}))$ elde edilir.

Şimdi $i < N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1}))$ olduğunu görmek için tümevarım kullanacağız. Her $i \in \omega$ için $(U_i, x_i) \stackrel{0}{\succ} (U_{i+1}, x_{i+1})$ olduğundan $(H_0, y_0) \stackrel{0}{\succ} (H_1, y_1)$ olup $0 < N((H_0, y_0), (H_1, y_1))$ dir. Varsayalım ki $i < N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1}))$ olsun. O zaman

$$i+1 \leq N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1})) \text{ ve } N((H_i, y_i), (H_{i+1}, y_{i+1})) < N((H_{i+1}, y_{i+1}), (H_{i+2}, y_{i+2}))$$

olduğundan $i+1 < N((H_{i+1}, y_{i+1}), (H_{i+2}, y_{i+2}))$ olur. Böylece iddianın kanıtı biter.

Bu iddiadan, her $i \in \omega$ için $(H_i, y_i) \stackrel{i}{\succ} (H_{i+1}, y_{i+1})$ elde edilir. Bu durumda, her $i \in \omega$ için

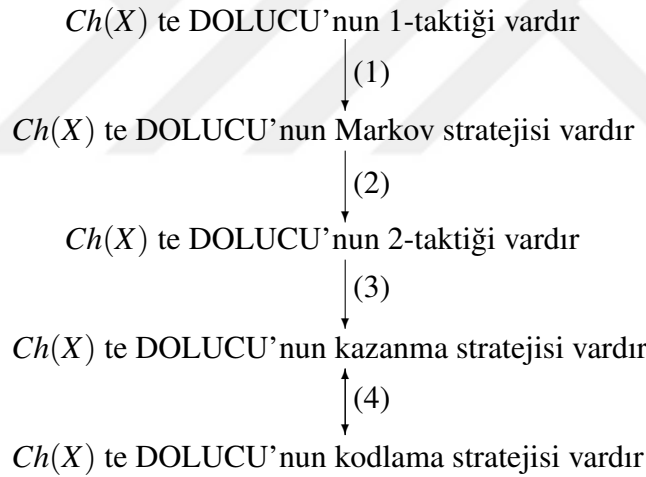
$H_i \supseteq \sigma(i, (H_i, y_i)) \supseteq H_{i+1}$ dir. Böylece aşağıdaki dizi elde edilir.

$$((H_0, y_0), \sigma(0, (H_0, y_0)), (H_1, y_1), \sigma(2, (H_1, y_1)), (H_2, y_2), \sigma(2, (H_2, y_2)), \dots)$$

Bu dizi DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda σ Markov stratejisi ile oynadığı bir karşılaşma olduğundan $\emptyset \neq \bigcap_{i \in \omega} H_i = \bigcap_{i \in \omega} U_i$ elde edilir. Bunun anlamı t nin DOLUCU için $Ch(X)$ oyununda 2-taktik olduğudur. $\square$

Burada kullandığımız gevşek-sıkı tekniğine benzer bir teknik bizden önce [15] te (Teorem 5) kullanılmıştır.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki diyagramı verebiliriz. Bu diyagramda, oklar "ise", çift yönlü ok "ancak ve ancak" manasındadır. .



(1) ve (3) stratejilerin tanımından açıktır. (2) yukarıdaki teoremin sonucudur. (4) regüler uzaylar için [22] de kanıtlanmıştır ve (4) ün aşağı yönü için X uzayının regüler olması gerekmez. $\square$

4.2. Bazı Özel Tabanı Olan Uzaylarda DOLUCU'nun Stratejileri

DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda Markov stratejisi varsa 2-taktiğinin var olduğunu Teorem 4.1.1 ile kanıtladık. Acaba bu teoremin genel hali doğru mudur? Yani DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa $(k+1)$ -taktiği veya k -taktiği var mıdır? Bu soruyu bu

bölüm sonunda açık soru olarak bıraktık. Bu başlık altında bu soruya bazı özel topolojik uzaylarda olumlu cevaplar verdik.

Gerekli bazı tanımlar

Aşağıdaki tanım literatürde vardır.

4.2.1. Tanım

$\mathcal{A}$ ailesinin elemanlarından oluşan $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \dots$ biçimindeki her dizi sonlu ise bu $\mathcal{A}$ ailesine *bir Nöderyan aile* denir. $\square$

$\mathcal{A}$ bir Nöderyan aile olsun. $\mathcal{A}$ ailesinin elemanlarını " $\subseteq$ "-maksimal kümelerden oluşan alt ailelere parçalayabiliriz. Yani, tümevarımsal olarak $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : \forall B \in \mathcal{A} (A \subseteq B \rightarrow B = A)\}$ biçiminde tanımlayıp α bir ordinal olmak üzere $i < \alpha$ iken $\mathcal{A}_i$ ailelerinin tanımlı olduğunu kabul edip $\mathcal{A}_\alpha = \{A \in \mathcal{A} - \bigcup_{j < \alpha} \mathcal{A}_j : \forall B \in \mathcal{A} - \bigcup_{j < \alpha} \mathcal{A}_j (A \subseteq B \rightarrow B = A)\}$ olarak tanımlayabiliriz. Böyle devam edildiğinde $|\mathcal{A}|^+$ kardinaline ulaşlamadan $\mathcal{A}$ ailesi biteceğinden bir α ordinali için $\mathcal{A}_\alpha = \emptyset$ olacaktır. Bu durumda aşağıdaki tanım anlamlı olur.

4.2.2. Tanım

$\mathcal{A}$ bir Nöderyan aile olsun. Bir α ordinali alalım. Her $j < \alpha$ için $\mathcal{A}_j$ ailesi tanımlanmış olsun. $\mathcal{A}_\alpha$ ailesini $\mathcal{A} - \bigcup_{j < \alpha} \mathcal{A}_j$ ailesinin $\subseteq$ -maksimal elemanlarından oluşan aile olarak, yani $\mathcal{A}_\alpha = \{A \in \mathcal{A} - \bigcup_{j < \alpha} \mathcal{A}_j : \forall B \in \mathcal{A} - \bigcup_{j < \alpha} \mathcal{A}_j (A \subseteq B \rightarrow B = A)\}$ biçiminde tanımlayalım. Bu durumda aşağıdakileri tanımlayabiliriz.

1) $\{\beta : \mathcal{A} = \bigcup_{j < \beta} \mathcal{A}_j\}$ ordinaler sınıfının en küçüğüne $\mathcal{A}$ ailesinin *rankı* diyelim ve $rank(\mathcal{A})$ ile gösterelim. Yani $rank(\mathcal{A}) = \min\{\beta : \mathcal{A} = \bigcup_{j < \beta} \mathcal{A}_j\}$.

2) $\mathcal{A}$ ailesinin *Nöderyan birleşimi* demekle $\bigcup_{j < rank(\mathcal{A})} \mathcal{A}_j$ biçimindeki birleşimi kastediyoruz.

3) $r : \mathcal{A} \rightarrow rank(\mathcal{A})$, " $A \in \mathcal{A}$ için $r(A) = j$ ancak ve ancak $A \in \mathcal{A}_j$ " biçimindeki fonksiyonu $\mathcal{A}$ ailesinin *rank fonksiyonu* olarak isimlendirelim ve $A \in \mathcal{A}$ için $r(A)$ ordinaline A nın $\mathcal{A}$ içindeki *seviyesi* diyelim. $\square$

Yukarıdaki tanımda verdiğimiz *rank* kavramının esin kaynağı, kümeler teorisinde iyi sıralı kümelerin rank kavramıdır.

Aşağıdaki tanım literatürde vardır.

4.2.3. Tanım

$\mathcal{A}$ bir aile olsun. Eğer her $U \in \mathcal{A}$ için $\{A \in \mathcal{A} : U \subseteq A\}$ ailesi sonlu ise $\mathcal{A}$ ailesine *sonlu güçlü Nöderyan aile* denir. $\square$

Açıkça her sonlu güçlü Nöderyan aile bir Nöderyan ailedir.

Herhangi bir α ordinali, $l(\alpha)$ bir limit ordinal (veya 0) ve $n(\alpha) \in \omega$ iken, $\alpha = l(\alpha) + n(\alpha)$ biçiminde yazılabilir [13]. Aşağıdaki önermede bu bilgiyi kullanacağız.

4.2.4. Önerme

X bir T_1 -uzay ve $\mathcal{B}$ ailesi X uzayının bir tabanı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir:

1. Her $x \in X$ için aşağıdaki (*) koşullarını sağlayan, ordinallerden oluşan bir $\beta(x)$ kümesi ve x noktasında bir yerel taban olan $\mathcal{B}_{(x)} \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesi vardır.

(*) $\mathcal{B}_{(x)} = \{B_i^x : i \in \beta(x)\}$ olmak üzere $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_{(x)}$ ve $B_i^x, B_j^y \in \mathcal{B}$ iken eğer $B_j^y \subsetneq B_i^x$ ise $n(i) < n(j)$ dir.

2. $\mathcal{B}$ ailesi Nöderyan ve $rank(\mathcal{B}) \leq \omega$ dır.

Kanıt

(1 $\Rightarrow$ 2): Her $x \in X$ için (*) koşulunu sağlayan bir $\beta(x)$ kümesi ve x noktasının $\mathcal{B}_{(x)} \subseteq \mathcal{B}$ biçiminde bir $\mathcal{B}_{(x)}$ komşuluklar tabanı var olsun. Herhangi bir $B \in \mathcal{B}$ alalım. $\mathcal{B}_{(x)} = \{B_i^x : i \in \beta(x)\}$ ve $B \in \mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_{(x)}$ olduğundan en az bir $x \in B$ için $B = B_i^x$ olmalıdır. Üstelik bir $x \neq y \in B$ için $B = B_j^y$ biçiminde de olabilir. Burada $B = B_i^x$ ve $B = B_j^y$ iken i indisi sabit olmayıp x ve y ye göre değişecektir. Bunun için "en az bir $x \in B$ için $B = B_{i_x}^x$ olmalıdır"

denebilir. Burada $i_x = l(i_x) + n(i_x)$ biçiminde olmalıdır. O halde aşağıdaki iddiayı verebiliriz.

İddia: Her $B \in \mathcal{B}$ için $\max\{n(i_x) : x \in B\}$ vardır.

İddianın kanıtı: Bir $B \in \mathcal{B}$ alalım. B sonlu ise iddianın doğru olduğu açıktır. B sonsuz olduğu durumda farklı $x, y \in B$ elemanlarını alabiliriz. X, T_1 -uzay olduğunda bir $x \in A_k^x \subseteq B - \{y\}$ olan bir $A_k^x \in \mathcal{B}$ vardır. Burada $A_k^x \in \{B_i^x : i \in \beta(x)\}$ olup $k = l(k) + n(k)$ biçiminde yazılır. Bu durumda $n(k), \{n(i_x) : x \in B\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. Şöyle ki, her $x \in B$ için $A_k^x \subseteq B_{i_x}^x = B$ olur. Böylece hipotezden her $x \in B$ için $n(k) > n(i_x)$ olup, doğal sayılardan oluşan $\{n(i_x) : x \in B\}$ kümesinin bir üst sınırı $n(k)$ dır. O halde bu kümenin maksimumu vardır. Böylece iddianın kanıtı tamamlanır.

$f : \mathcal{B} \rightarrow \omega, f(B) = \max\{n(i_x) : x \in B\}$ biçiminde bir fonksiyon tanımlayabiliriz.

$A \subsetneq B$ iken $f(A) > f(B)$ dir. Şöyle ki, $n(i_x) \in \{n(i_x) : x \in B\}$ ve $n(i_y) \in \{n(i_y) : y \in A\}$ alalım. $A \subsetneq B$ olduğunda hipotez gereği $n(i_y) > n(i_x)$ olur. Bu durumda f nin tanımından $f(A) > f(B)$ elde edilir.

$\mathcal{B}$ ailesi içerisinde herhangi bir $B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \dots$ dizisini alırsak $f(B_0) > f(B_1) > f(B_2) > \dots$ elde ederiz. O zaman, ordinalerin kesin azalan sonsuz bir dizisi var olmadığından, bu dizi sonlu olur. Yani $\mathcal{B}$ ailesi Nöderyanıdır. O zaman bu ailenin Nöderyan birleşimini $\mathcal{B} = \bigcup_{j < \text{rank}(\mathcal{B})} \mathcal{B}_j$ olarak alabiliriz. Şimdi, $\text{rank}(\mathcal{B}) > \omega$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, bir $B^* \in \mathcal{B}_\omega$ vardır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{B}_n$ ailesinin tanımındaki $\subseteq$ -maksimallikten $B^* \subsetneq B_n$ olan $B_n \in \mathcal{B}_n$ vardır. Böylece, her $n \in \omega$ için $f(B^*) > f(B_n) \geq n$ olur. Bu ise $f : \mathcal{B} \rightarrow \omega$ olmasıyla çelişir. O halde varsayım yanlış olup $\text{rank}(\mathcal{B}) \leq \omega$ dır.

($2 \Rightarrow 1$): $\mathcal{B}$ ailesinin Nöderyan birleşimi $\mathcal{B} = \bigcup_{j < \text{rank}(\mathcal{B})} \mathcal{B}_j$ olsun. Her $B \in \mathcal{B}$ için $B \in \mathcal{B}_{r(B)}$ olan bir $r(B) < \text{rank}(\mathcal{B})$ ordinali vardır. Herhangi bir $x \in X$ alalım ve $\mathcal{B}_{(x)} = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ diyelim. Şimdi, bir $B \in \mathcal{B}_{(x)}$ alalım ve $i(B) = 0 + r(B)$ diyelim, bu durumda, $B = B_{i(B)}^x$ yazabiliriz. $\beta(x) = \{i(B) : B \in \mathcal{B}_{(x)}\}$ olsun. Böylece $\mathcal{B}_{(x)} = \{B_{i(B)}^x : i(B) \in \beta(x)\}$ olur. $\square$

Herhangi bir metrik uzayın, rankı ω ordinalini aşmayan, bir Nöderyan tabanı vardır. Çünkü (X, d) keyfi metrik uzayı için $\mathcal{B}_{(x)} = \{B_i^x = \{y \in X : d(x, y) < \frac{1}{i+1}\} : i \in \omega\}$ iken $\mathcal{B} =$

$\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_{(x)}$ ailesi bir taban olup yukarıdaki önermenin (1) maddesindeki (*) koşullarını sağlar. Böylece bu önerme gereği bu taban $rank(\mathcal{B}) \leq \omega$ olan bir Nöderyan tabandır.

4.2.5. Tanım

X bir topolojik uzay, $U \in \tau^*(X)$ ve σ stratejisi $BM(X)$ oyununda DOLUCU'nun bir kazanma stratejisi olsun.

Eğer bir $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ sonlu dizisi için $(B_1, \sigma(B_1), B_2, \dots, B_n, \sigma(B_1, \dots, B_n))$ sonlu dizisi $BM(X)$ oyununda karşılaşma parçası ve $\sigma(B_1, \dots, B_n) \supseteq U$ oluyorsa $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ sonlu dizisine U nun $BM(X)$ oyununda bir dalı diyeceğiz.

Her $0 \leq j \leq n$ için $A_j = (B_1^j, B_2^j, \dots, B_{n_j}^j)$, U nun bir dalı olmak üzere sonlu ve indisleri sabit olan $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ailesi verilsin. Aşağıdakileri tanımlayalım.

$$\sigma_1^*(A_1) = \sigma(B_1^1, \dots, B_{n_1}^1, \sigma(B_1^1, \dots, B_{n_1}^1), U),$$

$$\sigma_2^*(A_2) = \sigma(B_1^2, \dots, B_{n_2}^2, \sigma(B_1^2, \dots, B_{n_2}^2), \sigma_1^*(A_1)),$$

...

$$\sigma_n^*(A_n) = \sigma(B_1^n, \dots, B_{n_n}^n, \sigma(B_1^n, \dots, B_{n_n}^n), \sigma_{n-1}^*(A_{n-1})).$$

Her $0 \leq i \leq n$ için yukarıdaki gibi tanımlanan $\sigma_i^*(A_i)$ ye U nun σ ile $BM(X)$ oyununda $A_i \in \mathcal{A}$ dan üretilmiş bir budanmış dalı denir. $\square$

Yukarıdaki tanım için $U \supseteq \sigma_1^*(A_1) \supseteq \dots \supseteq \sigma_n^*(A_n)$ olduğu açıktır.

4.2.6. Tanım

X bir topolojik uzay σ , $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun bir kazanma stratejisi olsun. $x \in U \in \tau(X)$ olan bir (U, x) ikilisi verilsin.

Eğer $Ch(X)$ oyununda $\sigma((A_0, a_0), \dots, (A_n, a_n)) \supseteq U$ olan bir

$$((A_0, a_0), \sigma((A_0, a_0)), (A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n), \sigma((A_0, a_0), \dots, (A_n, a_n)))$$

karşılaşma paraçası varsa $A = ((A_0, a_0)), (A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$ sonlu dizisine $Ch(X)$ oyununda U nun bir dalı diyelim.

X üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen bir iyi sıralama bağıntısı var olsun ve aşağıdakileri tanımlayalım.

$a_0^* = \min\{x \in A_0 : \sigma((A_0, x)) \supseteq A_1\}$ olsun,

eğer $\{x \in A_1 : \sigma((A_0, a_0^*), \sigma((A_0, a_0^*)), (A_1, x)) \supseteq A_2\} \neq \emptyset$ ise

$a_1^* = \min\{x \in A_1 : \sigma((A_0, a_0^*), \sigma((A_0, a_0^*)), (A_1, x)) \supseteq A_2\}$

... olsun,

eğer $\{x \in A_{n-1} : \sigma((A_0, a_0^*), \dots, (A_{n-2}, a_{n-2}^*), \dots, (A_{n-1}, x)) \supseteq A_n\} \neq \emptyset$ ise

$a_{n-1}^* = \min\{x \in A_{n-1} : \sigma((A_0, a_0^*), \dots, (A_{n-2}, a_{n-2}^*), \dots, (A_{n-1}, x)) \supseteq A_n\}$ olsun

ve eğer $\{x \in A_n : \sigma((A_0, a_0^*), \dots, (A_{n-1}, a_{n-1}^*), \dots, (A_n, x)) \supseteq U\} \neq \emptyset$ ise

$a_n^* = \min\{x \in A_n : \sigma((A_0, a_0^*), \dots, (A_{n-1}, a_{n-1}^*), \dots, (A_n, x)) \supseteq U\}$ olsun. Bu takdirde, eğer varsa, $((A_0, a_0^*), (A_1, a_1^*), \dots, (A_n, a_n^*))$ sonlu dizisine U nun $Ch(X)$ te σ ile A dan üretilmiş bir budanmış dalı veya kısaca, $Ch(X)$ te U nun bir budanmış dalı diyeceğiz. $\square$

Eğer bir karışıklık olmayacaksa "... $Ch(X)$ oyununda U nun bir dalı" ve "... $BM(X)$ oyununda U nun bir dalı" demek yerine kısaca "... U nun bir dalı" diyeceğiz. Benzer bir kısaltmayı "... budanmış dal" kavramı için de yapacağız.

Tanım gereği eğer $A = ((A_0, a_0^*), (A_1, a_1^*), \dots, (A_n, a_n^*))$ sonlu dizisi $Ch(X)$ oyununda U nun bir budanmış dalı ise, A , $Ch(X)$ te U nun bir dalı ve A , $Ch(X)$ te U nun A dan üretilmiş bir budanmış dalıdır.

$\mathcal{B}$ ailesi X topolojik uzayının açıklarının bir ailesi olsun. $Ch(X)$ oyununa "BOŞÇU hamlelerini $\mathcal{B}$ ailesinden seçerek oynayacaktır" koşulunu koyarak elde ettiğimiz oyunu $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ ile gösterelim. $BM(X)$ oyununa "hem BOŞÇU hem DOLUCU hamlelerini $\mathcal{B}$ ailesinden seçerek oynayacaktır" koşulunu getirerek elde ettiğimiz oyunu $BM_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(X)$ ile gösterelim.

Aşağıdaki iki lemma literatürde vardır.

4.2.7. Lemma

1. DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda bir kazanma stratejisinin (k-taktiğinin (k-Markov stratejisinin)) var olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{B}$ ailesi X uzayının bir tabanı iken $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda DOLUCU'nun bir kazanma stratejisinin (k-taktiğinin (k-Markov stratejisinin)) var olmasıdır.

2. DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda bir kazanma stratejisinin (k-taktiğinin (k-Markov stratejisinin)) var olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{B}$ ailesi X uzayının π -tabanı iken DOLUCU'nun $BM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(X)$ oyununda bir kazanma stratejisinin (k-taktiğinin (k-Markov stratejisinin)) var olmasıdır. $\square$

Yukarıdaki lemmanın kanıtı için [10] daki Lemma 4.1'e bakınız.

4.2.8. Lemma

Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda bir k-Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda aşağıdaki (*) koşullarını sağlayan σ , k-Markov stratejisi vardır.

(*) (a_i) doğal sayıların kesin artan bir dizisi, $((U_1, x_1), \dots, (U_i, x_i))$ bir karşılaşma parçası, $n, t \in \omega$ ve $1 \leq j \leq k$ olmak üzere

i) $\sigma(n, ((U_1, x_1), \dots, (U_j, x_j))) \supseteq \sigma(n+t, ((U_1, x_1), \dots, (U_j, x_j)))$.

ii) $i \in \omega$ için $W_i = \sigma(a_i, (\dots, (U_i, x_i)))$ iken eğer $((U_0, x_0), W_0, (U_1, x_1), W_1, (U_2, x_2), W_2, \dots)$ bir karşılaşma ise $\bigcap_{i < \omega} U_i \neq \emptyset$ olur.

Kanıt

DOLUCU için $Ch(X)$ oyununda σ^* bir k-Markov stratejisi olsun.

$1 \leq i < k$ için $\sigma(n, ((U_1, x_1) \dots (U_i, x_i))) = \sigma^*(i, ((U_1, x_1) \dots (U_i, x_i)))$ ve

$\sigma(n, ((U_1, x_1) \dots (U_k, x_k))) = \bigcap_{j \leq n} \sigma^*(j, ((U_1, x_1) \dots (U_k, x_k)))$ olarak tanımlayalım.

i) $1 \leq i < k$ için

$$\sigma(n, ((U_1, x_1) \dots (U_i, x_i))) = \sigma(n+t, ((U_1, x_1) \dots (U_i, x_i))) = \sigma^*(i, ((U_1, x_1) \dots (U_i, x_i)))$$

olduğundan $\sigma(n, ((U_1, x_1), \dots, (U_j, x_j))) \supseteq \sigma(n+t, ((U_1, x_1), \dots, (U_j, x_j)))$ olur.

$$\sigma(n, ((U_1, x_1) \dots (U_k, x_k))) = \bigcap_{j \leq n} \sigma^*(j, ((U_1, x_1) \dots (U_k, x_k))) \text{ iken}$$

$\sigma(n, ((U_1, x_1) \dots (U_k, x_k))) = \bigcap_{j \leq n} \sigma^*(j, ((U_1, x_1) \dots (U_k, x_k))) \supseteq \bigcap_{j \leq n+t} \sigma^*(j, ((U_1, x_1), \dots, (U_k, x_k))) = \sigma(n+t, ((U_1, x_1) \dots (U_k, x_k)))$ olduğundan $\sigma(n, ((U_1, x_1), \dots, (U_j, x_j))) \supseteq \sigma(n+t, ((U_1, x_1), \dots, (U_j, x_j)))$ olur.

ii) Şimdi (a_i) doğal sayıların kesin artan bir dizisi olsun. $i \in \omega$ olmak üzere $W_i = \sigma(a_i, (\dots, (U_i, x_i)))$ iken $((U_0, x_0), W_0, (U_1, x_1), W_1, (U_2, x_2), W_2, \dots)$ karşılaşmasını düşünelim. Bu karşılaşma ile iç içe geçen DOLUCU nun σ^* ile oynadığı bir karşılaşma bulacağız.

(a_i) doğal sayıların kesin artan bir dizisi olduğundan $i \leq a_i$ olup i) gereği $\sigma(i, (\dots, (U_i, x_i))) \supseteq \sigma(a_i, (\dots, (U_i, x_i)))$ olur.

σ nın tanımı gereği $\sigma^*(i, (\dots, (U_i, x_i))) \supseteq \sigma(i, (\dots, (U_i, x_i)))$ olacağından

$$\sigma^*(i, (\dots, (U_i, x_i))) \supseteq \sigma(i, (\dots, (U_i, x_i))) \supseteq \sigma(a_i, (\dots, (U_i, x_i))) = W_i$$

elde edilir. Bu durumda $x_i \in \sigma^*(i, (\dots, (U_i, x_i))) \subseteq U_i$ olup $U_i \supseteq \sigma^*(i, (\dots, (U_i, x_i))) \supseteq W_i$ olacağından $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun σ^* ile oynadığı $W_i^* = \sigma^*(i, (\dots, (U_i, x_i)))$ iken

$((U_0, x_0), W_0^*, (U_1, x_1), W_1^*, (U_2, x_2), W_2^*, \dots)$ karşılaşması vardır. σ^* stratejisi DOLUCU'nun kazanma stratejisi olduğundan $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olur. $\square$

4.3. Choquet oyununda DOLUCU'nun stratejileri

Bu bölümde Choquet oyununda DOLUCU'nun stratejileri arasındaki bazı ilişkileri içeren bazı sonuçlar vereceğiz.

4.3.1. Teorem

X bir T_1 -uzay olsun ve X uzayının $\text{rank}(\mathcal{B}) < \omega_1$ olan bir Nöderyan $\mathcal{B}$ tabanı bulunsun. Eğer DOLUCU'nun $\text{Ch}(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun $\text{Ch}(X)$ oyununda k -taktiği vardır.

Kanıt

Lemma 4.2.8'den DOLUCU'nun bu lemmadaki koşulları sağlayan bir σ , k -Markov stratejisi vardır. Böyle bir σ alalım.

Hipotezde verilen $\text{rank}(\mathcal{B}) = \alpha < \omega_1$ olan $\mathcal{B}$ tabanı üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen bir iyi sıralama bağıntısı var olsun.

Eğer X uzayının her noktası yalıtık ise: DOLUCU herhangi bir karşılaşmada (BOŞÇU'nun hamlesi (U_0, x_0) iken) ilk hamlesini $\{x_0\}$ biçiminde yapar (X uzayı yalıtık noktalardan oluştuğundan $\{x_0\} \in \tau^*(X)$ tir) ve bu karşılaşmayı kazanır. Çünkü bu karşılaşma

$$((U_0, x_0), \{x_0\}, (\{x_0\}, x_0), \{x_0\}, (\{x_0\}, x_0), \{x_0\}, (\{x_0\}, x_0), \dots)$$

biçiminde olacak ve $x_0 \in \bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olacaktır. Yani DOLUCU'nun X uzayının her noktası yalıtık nokta iken 1-taktiği vardır. DOLUCU'nun 1-taktiği varken k -taktiği vardır (t_0 1-taktik olsun, $t((U_0, x_0), \dots, (U_k, x_k)) = t_0((U_k, x_k))$ biçimindeki t bir k -taktiktir).

Eğer X uzayının yalıtık nokta olmayan en az bir a noktası varsa: Bu durumda $\alpha \geq \omega$ olur. Şöyle ki, $a \in U_0 \in \mathcal{B}$ olan bir U_0 alalım. U_0 sonsuz olmalıdır. Aksi halde X, T_1 olduğundan a yalıtık nokta olur. Bir $x_0 \in U_0 - \{a\}$ seçip $a \in U_1 \subseteq U_0 - \{x_0\}$ olan $U_1 \in \mathcal{B}$ seçelim. Bir $x_1 \in U_1 - \{a\}$ seçip $a \in U_2 \subseteq U_1 - \{x_1\}$ olan $U_2 \in \mathcal{B}$ seçelim. Böyle devam edildiğinde $\mathcal{B}$ nin elemanlarının sonsuz azalan $U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \dots$ dizisi elde edilir bu dizideki elemanların seviyeleri artan olur. Bu durumda $\text{rank}(\mathcal{B}) = \alpha \geq \omega$ olur.

α sayılabilir sonsuz olduğundan $|\alpha| = \omega$ dir. Bu durumda bir $f : \alpha \rightarrow \omega$ birebir fonksiyonu vardır. $\mathcal{B}$ nin Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{B}_i$ olsun ve $r, \mathcal{B}$ nin rank fonksiyonu olsun.

İddia: $x \in B \in \mathcal{B}$ olan bir (B, x) ikilisini ve x noktasının bir U açık komşuluğunu alalım. Eğer x, U nun yalıtık noktası değilse $x \in A \subseteq (U \cap B)$ ve $f(r(B)) < f(r(A))$ olan bir $A \in \mathcal{B}$ vardır.

Bu iddianın doğruluğunu görmek için yukarıda yapıldığı gibi $(T_1$ -uzay olma ve x in U nun yalıtık noktası olmadığı bilgileri kullanılarak) her $n \in \omega$ için $x \in B_n \subsetneq B_{n-1} \subsetneq \dots \subsetneq B_0 \subsetneq U \cap B$ olacak biçimde $\mathcal{B}$ içinde (B_i) sonlu dizisi elde edilir. Şimdi bir $n_0 > f(r(B))$ için $\{B_{n_0}, B_{n_0-1}, \dots, B_0\}$ kümesini alalım. Buradan $f(r(B)) \in \omega$, f birebir ve $n_0 > f(r(B))$ olduğundan en az bir $A \in \{B_{n_0}, B_{n_0-1}, \dots, B_0\}$ için $f(r(B)) < f(r(A))$ olur.

Eğer BOŞÇU bir karşılaşmanın herhangi bir raundunda, x_n, U_n nin yalıtık noktası iken, (U_n, x_n) ile oynarsa DOLUCU, $\{x_n\}$ hamlesini yapar (yukarıda görüldüğü gibi) ve bu karşılaşmayı kazanır. Bu durumda, herhangi bir karşılaşmada, BOŞÇU'nun (U_n, x_n) hamlesini yaptığında x_n noktasının U_n nin yalıtık noktası olmadığını kabul edeceğiz.

Şimdi DOLUCU için bir t , k -taktiği tanımlayalım.

$1 \leq j \leq k$ iken $Ch(X)$ oyununda bir karşılaşma parçası $((U_1, x_1), (U_2, x_2), \dots, (U_j, x_j))$ verilsin.

1. durum: $j = 1$ olsun. O zaman, $B_{(U_1, x_1)} = \min\{B \in \mathcal{B} : x_1 \in B \subseteq U_1\}$ diyelim ve $t((U_1, x_1)) = \sigma(f(r(B_{(U_1, x_1)})), ((B_{(U_1, x_1)}, x_1)))$ olarak tanımlayalım.

2. durum: $1 < j \leq k$ olmak üzere $U_1 \supseteq B_{(U_1, x_1)} \supseteq \dots \supseteq B_{(U_{j-1}, x_{j-1})} \supseteq U_j$ ve $f(r(B_{(U_1, x_1)})) < f(r(B_{(U_2, x_2)})) < \dots < f(r(B_{(U_{j-1}, x_{j-1})}))$ koşullarıyla $B_{(U_i, x_i)} \in \mathcal{B}$ elemanları var olsun. O zaman $B_{(U_j, x_j)} = \min\{B \in \mathcal{B} : x_j \in B \subseteq U_j, f(r(B_{(U_{j-1}, x_{j-1})})) < f(r(B))\}$ diyelim ve $t((U_1, x_1), \dots, (U_j, x_j)) = \sigma(f(r(B_{(U_1, x_1)})) + \dots + f(r(B_{(U_j, x_j)})), ((B_{(U_1, x_1)}, x_1), \dots, (B_{(U_j, x_j)}, x_j)))$ olarak tanımlayalım.

3. durum: Diğer tüm durumlar için $t((U_1, x_1), \dots, (U_j, x_j)) = U_j$ olarak tanımlayalım (σ ile baştan oynanan bir karşılaşmada bu durum hiç gerçekleşmeyecek).

t stratejisinin DOLUCU'nun k -taktiği olduğunu görmek için DOLUCU'yu keyfi bir karşılaşmayı bu strateji ile oynatıp bu karşılaşmayı kazandığını görelim.

BOŞÇU, (U_0, x_0) hamlesini yaparak karşılaşmayı başlatsın. t nin tanımı (1. durum) gereği $B_{(U_0, x_0)} = \min\{B \in \mathcal{B} : x_0 \in B \subseteq U_0\}$ olmak üzere

$$t((U_0, x_0)) = \sigma(f(r(B_{(U_0, x_0)})), ((B_{(U_0, x_0)}, x_0)) = W_0$$

hamlesi ile DOLUCU karşılık verir.

BOŞÇU, (U_1, x_1) hamlesini yapsın. Bu durumda

$$((U_0, x_0), t((U_0, x_0)) = \sigma(f(r(B_{(U_0, x_0)})), ((B_{(U_0, x_0)}, x_0)) = W_0, (U_1, x_1))$$

ekli karşılaşma parçası oluşur. Burada t nin, σ nın ve $B_{(U_0, x_0)}$ ın tanımları gereği

$$U_0 \supseteq B_{(U_0, x_0)} \supseteq \sigma(f(r(B_{(U_0, x_0)})), ((B_{(U_0, x_0)}, x_0)) = W_0 \supseteq U_1$$

olduğundan $U_0 \supseteq B_{(U_0, x_0)} \supseteq U_1$ olan $B_{(U_0, x_0)} \in \mathcal{B}$ elemanı var olup t nin tanımındaki 2. durum koşulları yerine gelir. O zaman x_1, U_1 in yalıtık noktası olmadığından (yukarıdaki iddia gereği) $\{B \in \mathcal{B} : x_1 \in B \subseteq U_1, f(r(B_{(U_0, x_0)})) < f(r(B))\} \neq \emptyset$ olur. O halde $B_{(U_1, x_1)} = \min\{B \in \mathcal{B} : x_1 \in B \subseteq U_1, f(r(B_{(U_0, x_0)})) < f(r(B))\}$ vardır ve $t((U_0, x_0), (U_1, x_1)) = \sigma(f(r(B_{(U_0, x_0)})) + f(r(B_{(U_1, x_1)})), (B_{(U_j, x_j)}, x_j)) = W_1$ biçiminde DOLUCU hamlesini yapar.

BOŞÇU, (U_2, x_2) hamlesini yapsın. Bu durumda

$$((U_0, x_0), t((U_0, x_0)) = \sigma(f(r(B_{(U_0, x_0)})), ((B_{(U_0, x_0)}, x_0)) = W_0, (U_1, x_1), t((U_0, x_0), (U_1, x_1)) = \sigma(f(r(B_{(U_0, x_0)})) + f(r(B_{(U_1, x_1)})), (B_{(U_j, x_j)}, x_j)) = W_1, (U_2, x_2))$$

ekli karşılaşma parçası oluşur. Burada t nin, σ nın ve $B_{(U_i, x_i)}$ lerin tanımları gereği (bir önceki rauntta olduğu gibi) $U_0 \supseteq B_{(U_0, x_0)} \supseteq U_1 \supseteq B_{(U_1, x_1)} \supseteq U_2$ ve $f(r(B_{(U_0, x_0)})) < f(r(B_{(U_1, x_1)}))$ biçiminde $B_{(U_i, x_i)} \in \mathcal{B}$ elemaları var olup t nin tanımındaki 2. durum koşulları yerine gelir. O zaman x_2, U_2 in yalıtık noktası olmadığından (yukarıdaki iddia gereği) $\{B \in \mathcal{B} : x_2 \in B \subseteq U_2, f(r(B_{(U_1, x_1)})) < f(r(B))\} \neq \emptyset$ olur. O halde $B_{(U_2, x_2)} = \min\{B \in \mathcal{B} : x_2 \in B \subseteq U_2, f(r(B_{(U_1, x_1)})) < f(r(B))\}$ vardır ve

$$t((U_0, x_0), (U_1, x_1), (U_2, x_2)) = \sigma(f(r(B_{(U_0, x_0)})) + f(r(B_{(U_1, x_1)})) + f(r(B_{(U_2, x_2)})), (B_{(U_2, x_2)}, x_2)$$

$$)) = W_2$$

biçiminde DOLUCU hamlesini yapar (burada $k = 2$ ise

$$t((U_1, x_1), (U_2, x_2)) = \sigma(f(r(B_{(U_1, x_1)})) + f(r(B_{(U_2, x_2)}))(B_{(U_2, x_2)}, x_2))) = W_2$$

biçiminde olacaktır).

Bu karşılaşma bu yolla devam etsin. Açıkça bu karşılaşmada σ nın tanımındaki 2. durumun koşulları yerine gelir (3. durum gerçekleşmez) ve bu nedenle her $n \in \omega$ için $W_n = t(\dots, (U_n, x_n)) = \sigma(\dots + f(r(B_{(U_n, x_n)})), (\dots, (B_{(U_n, x_n)}, x_n)))$ olmak üzere bu karşılaşma

$$((U_0, x_0), W_0, (U_1, x_1), W_1, \dots, (U_n, x_n), W_n, \dots)$$

biçiminde oynanır. Bu karşılaşmada t stratejisinin tanımı gereği $Ch(X)$ oyununda

$$(B_{(U_0, x_0)}, x_0), W_0, (B_{(U_1, x_1)}, x_1), W_1, \dots, (B_{(U_n, x_n)}, x_n), W_n, \dots)$$

karşılığı vardır. Burada $0 \leq j \leq (k-1)$ ve $n \in \omega$ olmak üzere $a_{n+k} = f(r(B_{(U_{n+1}, x_{n+1})})) + \dots + f(r(B_{(U_{n+k}, x_{n+k})}))$ ve $a_j = f(r(B_{(U_0, x_0)})) + \dots + f(r(B_{(U_j, x_j)}))$ dersek, (a_n) kesin artan bir dizi olup $W_n = \sigma(a_n, (\dots, (B_{(U_n, x_n)}, x_n)))$ olur. Böylece Lemma 4.2.8'den $\bigcap_{i \in \omega} B_{(U_i, x_i)} \neq \emptyset$. O zaman, $\bigcap_{i \in \omega} U_i = \bigcap_{i \in \omega} B_{(U_i, x_i)} \neq \emptyset$ olur. Bu karşılaşma keyfi olduğundan DOLUCU için t bir k -taktiktir. $\square$

Daha önce de bahsettiğimiz gibi DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varken k -taktiği vardır (Teorem 42, [23]). Teorem 4.3.1 bu sonucun bazı kısıtlamalar altında $Ch(X)$ oyunundaki karşılığıdır.

Choquet oyunu ile ilgili vereceğimiz Teorem 4.3.2, Banach-Mazur oyunu hakkında olan [15] deki Sonuç 11 ile ilişkilidir.

4.3.2. Teorem

X bir topolojik uzay olsun. X uzayının aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{B} = \bigcup_{i < \omega} \mathcal{B}_i$

tabanı var olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda Markov stratejisi (ve böylece Teorem 4.1.1 ile 2-taktığı) vardır.

(*) her $U \in \mathcal{B}$ ve her $i < \omega$ için $\{B \in \mathcal{B}_i : U \subseteq B\}$ ailesi sonludur.

Kanıt

Lemma 4.2.7'den DOLUCU'nun $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda bir σ kazanma stratejisi olduğunu biliyoruz. Yine aynı lemma gereği DOLUCU'nun $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda bir Markov stratejisi olduğunu görürsek kanıt biter.

X üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen bir iyi sıralama bağıntısı var olsun ve her $B \in \mathcal{B}$ için $p(B) = \min\{i \in \omega : B \in \mathcal{B}_i\}$ diyelim.

$x \in U \in \mathcal{B}$ ve $h \in \omega$ olmak üzere $(h, (U, x))$ verilsin. $K(h, (U, x)) = \max\{p(U), h\}$ diyelim.

Şimdi $\mathcal{A}_U$ aşağıdaki koşulları sağlayan U nun σ ile budanmış dallarının tamamından oluşan bir aile olsun.

$((A_0, a_0^*), (A_1, a_1^*), \dots, (A_k, a_k^*)) \in \mathcal{A}_U$ ancak ve ancak $A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq \dots \supsetneq A_k \supsetneq U$ olup $0 \leq i \leq k$ iken $A_i \in \mathcal{B}$ ve $p(A_i) \leq K(h, (U, x))$.

Eğer böyle bir $\mathcal{A}_U$ varsa sonludur. Şöyle ki, $\mathcal{A}_U = \emptyset$ ise sonludur. Şimdi $\mathcal{A}_U \neq \emptyset$ olup sonsuz olduğunu varsayalım. Bu takdirde $A \in \mathcal{A}_U$ elemanları tanımlanırken sonsuz çoklukta A_i kullanılmış olmalıdır (eğer sonlu adet A_i kullanılmış olsa $A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq \dots \supsetneq A_k \supsetneq U$ koşulundan dolayı $\mathcal{A}_U$ sonlu olur). Bu A_i lerin her birisi için $p(A_i) \leq K(h, (U, x))$ olacağından bir $j \leq K(h, (U, x))$ için $|\{A_i : p(A_i) = j\}| \geq \omega$ olur. O halde, $\{A_i : p(A_i) = j\} \subseteq \{B \in \mathcal{B}_j : U \subseteq B\}$ olur ve bu durum $\{B \in \mathcal{B}_j : U \subseteq B\}$ ailesinin sonlu olması ile çelişir.

Şimdi, herhangi bir $A = ((A_0, a_0^*), (A_1, a_1^*), \dots, (A_k, a_k^*)) \in \mathcal{A}_U$ alalım ve

$$\sigma^*(A, x) = \sigma((A_0, a_0^*), \dots, (A_k, a_k^*), \sigma((A_0, a_0^*), \dots, (A_k, a_k^*), (U, x)))$$

diyelim. Böylece $\mathcal{A}_U$ sonlu olduğundan $\bigcap_{A \in \mathcal{A}_U} \sigma^*(A, x) = W_U$ bir açık olup $(x \in \sigma^*(A, x) \subseteq U$

olduğundan) $x \in W_U \subseteq U$ olur.

Bu durumda $t(h, (U, x))$ Markov stratejisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$t(h, (U, x)) = \begin{cases} W_U \cap \sigma((U, x)) & : \mathcal{A}_U \neq \emptyset \text{ ise,} \\ \sigma((U, x)) & : \mathcal{A}_U = \emptyset \text{ ise.} \end{cases}$$

Şimdi t nin $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda DOLUCU için bir Markov stratejisi olduğunu görelim. Bunu kanıtlamak için t ile oynanmış keyfi bir karşılaşmayı $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda

$$((U_0, x_0), t(1, (U_0, x_0)), (U_1, x_1), t(2, (U_1, x_1)), (U_2, x_2) \dots) \quad (4.1)$$

biçiminde alalım. Eğer $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olduğunu görürsek kanıt bitecek.

Eğer bu karşılaşmada her $j > i$ için $U_i = U_j$ olan bir $i \in \omega$ varsa $\bigcap_{m \in \omega} U_m = U_i \neq \emptyset$ olur. Bu durumda t bir Markov stratejidir.

Şimdi bu karşılaşmada her bir $i \in \omega$ için $U_i \supsetneq U_{m_i}$ olan bir $m_i > i$ var olsun. Bu durumda aşağıdaki iddia doğrudur.

İddia: $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda aşağıdaki (*) koşullarını sağlayan bir

$$((H_0, x_0^*), \sigma((H_0, x_0^*)), (H_1, x_1^*), \sigma(\dots, (H_1, x_1^*)), (H_2, x_2^*), \sigma(\dots, (H_2, x_2^*)), (H_3, x_3^*), \dots)$$

karşılığı vardır.

(*) Her $k \in \omega$ için $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ biçiminde U_{n_k} BOŞÇU'nun (4.1) karşılaşmasında bir hamlesi olmak üzere $H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots$ ve $U_{n_0} \supseteq H_0 \supseteq U_{n_1} \supseteq H_1 \supseteq U_{n_2} \supseteq H_2 \supseteq U_{n_3} \supseteq \dots$ olur.

İddianın kanıtı: Tümevarım kullanarak aşağıdaki önermeyi kanıtlayacağız.

Önerme: Her $k \in \omega$ için $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda iddianın (*) koşullarını sağlayan bir

$$((H_0, x_0^*), \sigma((H_0, x_0^*)), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), \sigma(\dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), ((H_k, y_k^*)))$$

ekli karşılaşma parçası vardır (Burada sondaki (H_k, y_k^*)) hamlesi $(k + 1)$ 'inci hamle yapıldığında $((H_k, x_k^*))$ hamlesine dönüşecek, sonra oyun sonuna kadar değişmeyecektir (yani y_k^* noktası x_k^* noktasına dönüşecek ve öyle kalacaktır) ve böylece sabit bir karşılaşma elde edilecektir).

$U_{n_0} = U_0$, $H_0 = U_0$ ve $U_{n_1} = U_1$ olsun. O zaman $((H_0, x_0))$, U_{n_1} in bir dalı olur. Böylece $y_0^* = \min\{x \in H_0 : \sigma((H_0, x)) \supseteq U_{n_1}\}$ ve $((H_0, y_0^*), \sigma((H_0, y_0^*)))$ bir karşılaşma parçası iken $((H_0, y_0^*), U_{n_1})$ in budanmış dalı olur.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda bir

$$((H_0, x_0^*), \sigma((H_0, x_0^*)), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), \sigma(\dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*)), (H_k, y_k^*), \sigma((H_0, x_0^*), \dots, (H_k, y_k^*)))$$

karşılaşma parçası bulunduğunu varsayalım.

Koşullar: $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k+1}$ olup her $0 \leq i \leq k+1$ için U_{n_i} , (4.1) karşılaşmasında BOŞÇU'nun bir hamlesi ve $((H_0, x_0^*), (H_1, x_1^*), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, y_k^*))$ sonlu dizisi $U_{n_{k+1}}$ in budanmış dalı olmak üzere $H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq \dots \supsetneq H_k$ ve $U_{n_0} \supseteq H_0 \supseteq U_{n_1} \supseteq H_1 \supseteq U_{n_2} \supseteq \dots \supseteq U_{n_k} \supseteq H_k \supseteq U_{n_{k+1}}$ dır.

Her bir $i \in \omega$ için $U_i \supsetneq U_{m_i}$ olan bir $m_i > i$ var olduğundan $n'_{k+1} = \min\{n \in \omega : U_n \subsetneq U_{n_{k+1}}, p(U_n) > \max\{p(H_j) : 0 \leq j \leq k\}\}$ vardır. $H_{k+1} = U_{n'_{k+1}}$ ve $U_{n_{k+2}} = U_{n'_{k+1}+1}$ diyelim.

Bu durumda bu yapılan tanımlar ve tümevarım hipotezi gereği $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k+1} < n_{k+2}$, her $0 \leq i \leq k+2$ için U_{n_i} , (4.1) karşılaşmasında BOŞÇU'nun bir hamlesi olmak üzere $H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq \dots \supsetneq H_k$ ve $U_{n_0} \supseteq H_0 \supseteq U_{n_1} \supseteq H_1 \supseteq U_{n_2} \supseteq \dots \supseteq U_{n_k} \supseteq H_k \supseteq U_{n_{k+1}} \supseteq H_{k+1} \supseteq U_{n_{k+2}}$ elde edilir.

Son olarak $((H_0, x_0^*), (H_1, x_1^*), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, x_k^*), \sigma(\dots), (H_{k+1}, y_{k+1}^*))$ sonlu dizisinin $U_{n_{k+2}}$ in budanmış dalı olduğunu görmek kalır. Bunun için, önce x_k^* ve y_{k+1}^* noktalarını bulmak gerekir.

Tümevarım hipotezi gereği $((H_0, x_0^*), (H_1, x_1^*), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, y_k^*))$ sonlu dizisi $U_{n_{k+1}}$ in budanmış dalı olduğundan aşağıdakiler yazılabilir.

$\sigma((H_0, x_0^*), \dots, \sigma(\dots (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, y_k^*)) \supseteq U_{n_{k+1}} \supsetneq U_{n'_{k+1}} = H_{k+1}$ olup, $y_k^* = \min\{x \in H_k : \sigma(\dots, (H_k, x)) \supseteq H_{k+1}\} \neq \emptyset$ olur.

Böylece $x_k^* = \min\{x \in H_k : \sigma(\dots, (H_k, x)) \supseteq H_{k+1}\}$ vardır. Bu durumda

$$\sigma((H_0, x_0^*), \dots, \sigma(\dots (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, x_k^*)) \supseteq U_{n_{k+1}} \supsetneq U_{n'_{k+1}} = H_{k+1}$$

olduğundan $((H_0, x_0^*), (H_1, x_1^*), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, x_k^*))$ sonlu dizisi $U_{n'_{k+1}}$ in bir dalı olur. $((H_0, x_0^*), (H_1, x_1^*), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, x_k^*))$ sonlu dizisinin budanmış hali $(x_i^*$ noktaları minimum olup değişmeyeceğinden) kendisidir. Bu bilgiyle birlikte, tümevarım hipotezi ve $0 \leq i \leq k$ iken $p(H_i) \leq \max\{p(H_j : 0 \leq j \leq k)\} < p(U_{n'_{k+1}})$ olup $p(H_i) < \max\{p(U_{n'_{k+1}}), n'_{k+1}\} = K(n'_{k+1}, (U_{n'_{k+1}}, n'_{k+1}))$ olduğundan $A = ((H_0, x_0^*), \sigma((H_0, x_0^*)), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), \dots, (H_k, x_k^*))$ olmak üzere $A \in \mathcal{A}_{U_{n'_{k+1}}} \neq \emptyset$ olur. Bu durumda t nin tanımı gereği $H_{k+1} = U_{n'_{k+1}} \supseteq \sigma^*(A, x_{n'_{k+1}}) \supseteq t(n'_{k+1}, (U_{n'_{k+1}}, x_{n'_{k+1}})) \supseteq U_{n'_{k+1}+1} = U_{n_{k+2}}$ dir. O halde

$$x_{n'_{k+1}} \in \{x \in U_{n'_{k+1}} : \sigma((H_0, x_0^*), \dots, \sigma(\dots (H_k, x_k^*), (U_{n'_{k+1}}, x)) \supseteq U_{n_{k+2}}\} \neq \emptyset \text{ olur.}$$

O zaman $y_{k+1}^* = \min\{x \in H_{k+1} = U_{n'_{k+1}} : \sigma((H_0, x_0^*), \dots, \sigma(\dots, (H_k, x_k^*))(H_{k+1}, x)) \supseteq U_{n_{k+2}}\}$ vardır. Böylece $((H_0, x_0^*), (H_1, x_1^*), \dots, (H_k, x_k^*), (H_{k+1}, y_{k+1}^*))$ sonlu dizisi $U_{n_{k+2}}$ nin (bir dalı olup noktalar minimum olduğundan budandığında kendisi olacaktır) bir budanmış dalıdır. $U_{n_{k+1}} \supsetneq U_{n'_{k+1}} = H_{k+1} \supseteq \sigma((H_0, x_0^*), \dots, \sigma((H_k, x_k^*), \dots (H_{k+1}, y_{k+1}^*)) \supseteq U_{n_{k+2}}$. $H_k \supseteq U_{n_{k+1}} \supsetneq U_{n'_{k+1}} \supseteq H_{k+1}$ olup $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda, iddiadaki (*) koşullarını sağlayan,

$$((H_0, x_0^*), \sigma((H_0, x_0^*)), \dots, (H_k, x_k^*), \sigma(\dots, (H_k, x_k^*)), (H_{k+1}, y_{k+1}^*), \sigma(\dots, \sigma(\dots, (H_k, x_k^*)), (H_{k+1}, y_{k+1}^*)))$$

bir karşılaşma parçasıdır. Bu durumda tümevarım gereği iddianın kanıtı tamamlanır.

İddiadaki σ , DOLUCU için kazanma stratejisi olduğundan ve iddiadaki karşılaşma ile (4.1) karşılaşması iç içe olduğundan $\emptyset \neq \bigcap_{i \in \omega} H_i = \bigcap_{i \in \omega} U_{n_i} = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ elde edilir. $\square$

4.3.3. Sonuç

X bir T_1 -uzay olsun ve X uzayının aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{B}$ Nöderyan tabanı

bulunsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda 1-taktiği vardır.

(*) $rank(\mathcal{B}) = \beta < \omega_1$. $\mathcal{B}$ nin Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i < \beta} \mathcal{B}_i$ olmak üzere $i > 0$ iken her $\mathcal{B}_i$, her $U \in \mathcal{B}_i$ ve her $j < i$ için $\{B \in \mathcal{B}_j : U \subseteq B\}$ ailesi sonludur.

Kanıt

Eğer X uzayının her noktası yalıtık ise DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda (Teorem 4.3.1'in kanıtındaki gibi) 1 taktiği vardır. Bu durumda X uzayının yalıtık olmayan en az bir noktasının var olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $\beta \geq \omega$ olduğunu Teorem 4.3.1'in kanıtında gördük. Böylece birebir ve örten $F : \omega \rightarrow \beta$ fonksiyonu vardır. Her $i \in \omega$ için $\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)}$ iken $\mathcal{B}' = \bigcup_{i < \omega} \mathcal{B}'_i$ diyelim. Bu durumda her $U \in \mathcal{B}'$ ve her $i < \omega$ için $\{B \in \mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)} : U \subseteq B\}$ ailesi sonlu olduğu hipotezdeki (*) koşulu kullanılarak görülür. Bu durumda Teorem 4.3.2'den $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun Markov stratejisi vardır. Böylece Teorem 4.3.1'den DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda 1-taktiği vardır. $\square$

Sonlu güçlü Nöderyan bir taban Sonuç 4.3.3 içindeki (*) koşullarını sağlayacağından (bunun doğruluğunu aşağıdaki sonucun kanıtında göreceğiz) aşağıdaki sonuç verilebilir. Ama bu sonuç bilinmektedir ve [24] te bulunabilir.

4.3.4. Sonuç

X bir T_1 -uzay ve sonlu güçlü Nöderyan tabanı var olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(x)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda 1-taktiği vardır (Teorem 2.16, [24]).

Kanıt

X uzayının sonlu güçlü Nöderyan tabanı $\mathcal{B}$ olsun. Sonuç 4.3.3'ün kanıtındaki gerekçelerle $rank(\mathcal{B}) \geq \omega$ kabul edebiliriz. $\mathcal{B}$ tabanının Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i \in rank(\mathcal{B})} \mathcal{B}_i$ olsun.

Eğer $rank(\mathcal{B}) > \omega$ olsa bir $B^* \in \mathcal{B}_\omega$ vardır. Bu durumda her $n \in \omega$ için $B^* \subsetneq B_n$ olan bir $B_n \in \mathcal{B}_n$ vardır. O halde $\{B \in \mathcal{B} : B^* \subsetneq B\}$ sonsuz olur. Bu ise $\mathcal{B}$ tabanının sonlu güçlü Nöderyan olması ile çelişir. Bu çelişkidten $rank(\mathcal{B}) = \omega$ elde edilir.

Böylece $\mathcal{B}$ tabanının Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i \in \omega} \mathcal{B}_i$ olarak yazılabilir. $j < i < \omega$ iken bir $U \in \mathcal{B}_i$ alınırsa $\{B \in \mathcal{B}_j : U \subseteq B\} \subseteq \{B \in \mathcal{B} : U \subseteq B\}$ olur. Bu durumda sonlu güçlü Nöderyan aile tanımı gereği $\{B \in \mathcal{B} : U \subseteq B\}$ alesi sonlu olduğundan $\{B \in \mathcal{B}_j$ ailesi de sonlu olur. Sonuç 4.3.3'ün koşullarını $\mathcal{B}$ tabanı sağlar. Bu durumda Sonuç 4.3.3'ten DOLUCU'nun $Ch(x)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda 1-taktiği vardır. $\square$

4.3.5. Teorem

X topolojik uzayının aşağıdaki (*) koşullarını sağlayan bir $\mathcal{B}$ tabanı var olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda bir kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda Markov stratejisi (böylece Teorem 4.1.1 ile 2-taktiği) vardır.

(*) $\mathcal{B} = \bigcup_{i < \omega} \mathcal{B}_i$ olup her $i \in \omega$ için $\mathcal{B}_i$ ailesi $\bigcup \mathcal{B}_i$ üzerinde yerel sayılabilir (yani her $x \in \bigcup \mathcal{B}_i$ için $\{B \in \mathcal{B}_i : B \cap V_x \neq \emptyset\}$ ailesi sayılabilir olacak biçimde x noktasının bir V_x açık komşuluğu vardır).

Kanıt

Lemma 4.2.7'den $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda DOLUCU'nun bir σ kazanma stratejisi vardır. Aynı lemma gereği eğer DOLUCU'nun $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda bir Markov stratejisinin var olduğunu görürsek kanıt tamamlanacaktır.

X üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen bir iyi sıralama bağıntısı var olsun. $\tau^*(X)$ ailesi $<'$ ile iyi sıralı olsun. $\omega \leq \alpha < \omega_1$ olan her α için birebir örten bir $f_\alpha : \alpha \rightarrow \omega$ fonksiyonu alalım ($|\alpha| = \omega$ olduğundan böyle f_α fonksiyonları vardır) ve $\alpha < \omega$ iken $f_\alpha : \alpha \rightarrow \omega$ fonksiyonunu $i < \alpha$ olmak üzere $f_\alpha(i) = i$ biçiminde tanımlayalım.

$x \in U \in \mathcal{B}$ ve $h \in \omega$ olmak üzere $(h, (U, x))$ ikilisi verilsin. $p(U) = \min\{i \in \omega : U \in \mathcal{B}_i\}$, $K'(h, U) = \max\{p(U), h\}$ ve $K(h, (U, x)) = \{i \in \omega : i \leq K'(h, U), x \in \bigcup \mathcal{B}_i\}$ diyelim. Burada $p(U) \in K(h, (U, x))$ olduğundan $K(h, (U, x)) \neq \emptyset$ dir. O zaman her bir $i \in K(h, (U, x))$ için $x \in \bigcup \mathcal{B}_i$ olup $\mathcal{B}_i$ ailesi $\bigcup \mathcal{B}_i$ üzerinde yerel sayılabilir olduğundan $\{B \in \mathcal{B}_i : B \cap V_{(i,x)} \neq \emptyset\}$ ailesi sayılabilir olacak biçimde x in bir $V_{(i,x)}$ açık komşuluğu vardır. Tanımı gereği $K(h, (U, x)) \neq \emptyset$ ve sonlu olduğundan $x \in \bigcap_{i \in K(h, (U, x))} V_{(i,x)}$ açık alt küme olur. Şimdi $\{V \in \mathcal{B} : x \in V \subseteq (\bigcap_{i \in K(h, (U, x))} V_{(i,x)}) \cap \sigma((U, x))\}$ ailesinin minimumuna $(\mathcal{B} \subseteq \tau^*(X))$ ve

$\bigcap_{i \in K(h, (U, x))} V_{(i, x)}$ açık olduğundan bu aile boştan farklı olup minimumu vardır) $V_{(U, x)}$ diyelim ve $i \in K(h, (U, x))$ iken $\mathcal{B}^{(h, U, i)} = \{B \in \mathcal{B}_i : B \cap V_{(U, x)} \neq \emptyset\}$ biçiminde tanımlayalım. O zaman, $V_{(U, x)} \subseteq V_{(i, x)}$ olup $\mathcal{B}^{(h, U, i)} \subseteq \{B \in \mathcal{B}_i : B \cap V_{(i, x)} \neq \emptyset\}$ olduğundan her $i \in K(h, (U, x))$ için $\mathcal{B}^{(h, U, i)}$ sayılabilir olur. $\mathcal{B}^{(h, U, i)} \subseteq \tau^*(X)$ ve $\tau^*(X)$ iyi sıralı olduğundan $\mathcal{B}^{(h, U, i)}$ iyi sıralı olur. $\mathcal{B}^{(h, U, i)}$ ailesinin sıra-tipi $\alpha_{(h, U, i)}$ olsun. Buradan $\alpha_{(h, U, i)} \in \omega_1$ olur (sayılabilir kümelerin sıra-tipi ω_1 içindedir [13]) ve $\tau^*(X)$ üzerindeki iyi sıralama kullanarak $\mathcal{B}^{(h, U, i)} = \{B_\gamma : \gamma \in \alpha_{(h, U, i)}\}$ kümesini tekrar yazabiliriz (kastımız $B_\gamma \in \mathcal{B}^{(h, U, i)}$ iken her $\gamma \in \alpha_{(h, U, i)}$ için $B_0 <' B_1 <' \dots <' B_\gamma <' B_{\gamma+1} <' \dots$ biçiminde bir yazımdır). Şimdi $j \in K(h, (U, x))$ için $\alpha_{(h, U, j)}$ sonsuz iken $r^*(h, U, j) = \max\{h, \max(K(h, (U, x)))\}$ diyelim ($K(h, (U, x))$ sonlu olduğundan $\max(K(h, (U, x)))$ vardır) $\alpha_{(h, U, j)}$ sonlu iken $r^*(h, U, j) = \alpha_{(h, U, j)} - 1$ diyelim. $K(h, (U, x)) \subseteq \omega$ sonlu olduğundan $K(h, (U, x))$ elemanlarını minimumdan maksimuma doğru $\min(K(h, (U, x))) = i_0 < i_1 < \dots < i_U = \max(K(h, (U, x)))$ biçiminde dizebiliriz. Böylece aşağıdaki sonlu şemayı elde ederiz (bu şemayı satırları eşit uzunlukta olması gerekmeyen bir matris gibi düşünebiliriz).

$$\begin{bmatrix} B_{f_{\alpha_{(h, U, i_0)}}^{-1}(0)} & B_{f_{\alpha_{(h, U, i_0)}}^{-1}(1)} & \dots & B_{f_{\alpha_{(h, U, i_0)}}^{-1}(r^*(h, U, i_0))} \\ B_{f_{\alpha_{(h, U, i_1)}}^{-1}(0)} & B_{f_{\alpha_{(h, U, i_1)}}^{-1}(1)} & \dots & B_{f_{\alpha_{(h, U, i_1)}}^{-1}(r^*(h, U, i_1))} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{f_{\alpha_{(h, U, i_U)}}^{-1}(0)} & B_{f_{\alpha_{(h, U, i_U)}}^{-1}(1)} & \dots & B_{f_{\alpha_{(h, U, i_U)}}^{-1}(r^*(h, U, i_U))} \end{bmatrix}$$

U nun σ ile budanmış olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan tüm dallarının ailesini $\mathcal{A}_U$ ile gösterelim. " $0 \leq i \leq k$ için A_i ler şemadaki bazı satırlarda olmak üzere $((A_0, a_0^*), (A_1, a_1^*), \dots, (A_k, a_k^*)) \in \mathcal{A}_U$ ancak ve ancak $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_k$ ".

Eğer $\mathcal{A}_U \neq \emptyset$ ise herhangi bir $A = ((A_0, a_0^*), (A_1, a_1^*), \dots, (A_k, a_k^*)) \in \mathcal{A}_U$ alıp $\sigma^*(A, x) = \sigma((A_0, a_0^*), \dots, (A_k, a_k^*), \sigma((A_0, a_0^*), \dots, (A_k, a_k^*), (V_{(U, x)}, x))$ olarak tanımlayalım. Böylece $\mathcal{A}_U$ sonlu olduğundan (çünkü şema sonludur ve $\mathcal{A}_U$ bu sonlu şema ile tanımlanmıştır) $W_{(h, (U, x))} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}_U} \sigma^*(A, x) \in \tau(X)$ olup $\sigma^*(A, x)$ tanımı gereği $x \in W_{(h, (U, x))} \subseteq V_{(U, x)}$ ve $V_{(U, x)}$ tanımı gereği $V_{(U, x)} \subseteq \sigma((U, x))$ olduğundan $x \in W_{(h, (U, x))} \subseteq V_{(U, x)} \subseteq \sigma((U, x)) \subseteq U$ ve $W_{(h, (U, x))} \in \tau(X)$ olur.

Böylece $x \in U \in \mathcal{B}$ ve $h \in \omega$ iken $(h, (U, x))$ verildiğinde yukarıda elde ettiğimiz $\mathcal{A}_U$ ve $W_{(h, (U, x))}$ kullanılarak DOLUCU için bir t Markov stratejisi tanımlayabiliriz.

$x \in U \in \mathcal{B}$ ve $h \in \omega$ iken $(h, (U, x))$ verilsin. Eğer $\mathcal{A}_U = \emptyset$ ise $t(h, (U, x)) = V_{(U, x)}$ olarak tanımlayalım. Eğer $\mathcal{A}_U \neq \emptyset$ ise $t(h, (U, x)) = W_{(h, (U, x))}$ olarak tanımlayalım.

$x \in W_{(h, (U, x))} \subseteq V_{(U, x)} \subseteq \sigma((U, x)) \subseteq U$ olduğundan t nin tanımı gereği $x \in t(h, (U, x)) \subseteq V_{(U, x)} \subseteq \sigma((U, x)) \subseteq U$ olur.

$Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda t nin DOLUCU'nun bir Markov stratejisi olduğunu görmek için

$$((U_0, x_0), t(0, (U_0, x_0))), (U_1, x_1), t(1, (U_1, x_1))), (U_2, x_2), t(2, (U_2, x_2))), \dots \quad (4.2)$$

biçiminde $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda oynanmış keyfi bir karşılaşma alalım.

Bu karşılaşmada, her $j > i$ için $U_i = U_j$ olacak biçimde bir $i \in \omega$ varsa $\bigcap_{m \in \omega} U_m = U_i \neq \emptyset$ olur. Bunun anlamı t nin bu durumda Markov stratejisi olduğudur.

Şimdi her $i \in \omega$ için $U_i \supsetneq U_{m_i}$ olan bir $m_i > i$ var olsun.

İddia: $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda aşağıdaki koşulları sağlayan bir

$$((H_0, x_0^*), \sigma((H_0, x_0^*))), (H_1, x_1^*), \sigma(\dots, (H_1, x_1^*))), (H_2, x_2^*), \sigma(\dots, (H_2, x_2^*))), (H_3, x_3^*), \dots)$$

karşılığı vardır.

Koşullar: $H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots$ ve $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ olmak üzere her $k \in \omega$ için U_{n_k} lar BOŞÇU'nun (4.2) karşılaşmasındaki hamleleri olmak üzere $U_{n_0} \supseteq H_0 \supseteq U_{n_1} \supseteq H_1 \supseteq U_{n_2} \supseteq H_2 \supseteq U_{n_3} \supseteq \dots$ dır.

İddianın kanıtı: (Bu iddia ve kanıtı Teorem 4.3.2'nin kanıtındaki iddiaya benzer olup mantıkları hemen hemen aynı olduğundan buradaki kanıt daha kısa yazıldı) Tümevarım kullanacağız. $U_{n_0} = U_0$, $H_0 = U_0$ ve $U_{n_1} = U_1$ diyelim, o zaman $((H_0, x_0))$ ikilisi U_{n_1} in bir dalı olur. Böylece $y_0^* = \min\{x \in H_0 : \sigma((H_0, x)) \supseteq U_{n_1}\}$ ve $((H_0, y_0^*), \sigma((H_0, y_0^*)))$ karşılaşma parçası iken $((H_0, y_0^*))$ ikilisi U_{n_1} in budanmış dalıdır.

Şimdi varsayalım ki aşağıdaki koşulları sağlayan $Ch_{\mathcal{B}}(X)$ oyununda bir $((H_0, x_0^*), \sigma((H_0, x_0^*))), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), \sigma(\dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*))), (H_k, y_k^*), \sigma((H_0, x_0^*), \dots, (H_k, y_k^*)))$ karşılaşma parçası

vardır. Koşullar: $H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq \dots \supsetneq H_k$ ve $U_{n_0} \supseteq H_0 \supseteq U_{n_1} \supseteq H_1 \supseteq U_{n_2} \supseteq \dots \supseteq U_{n_k} \supseteq H_k \supseteq U_{n_{k+1}}$ burada $0 \leq i \leq k+1$ için U_{n_i} BOŞÇU'nun (4.2) karşılaşmasındaki hamleleri ve $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k+1}$ olup $((H_0, x_0^*), (H_1, x_1^*), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, y_k^*))$ sonlu dizisi $U_{n_{k+1}}$ in budanmış dalıdır.

Şimdi $0 \leq j \leq k$ iken $p(H_j) = \min\{n \in \omega : H_j \in \mathcal{B}_n\}$, $h_0 = \max\{p(H_j) : 0 \leq j \leq k\}$, $h_1 = \max\{h_0, n_{k+1}\}$ ve $h_2 = \min\{n \in \omega : U_n \subsetneq U_{h_1}\}$ diyelim. Böylece $H_j \supsetneq U_{h_2} \supseteq V_{(U_{h_2}, x_{h_2})} \supseteq t(h_2, (U_{h_2}, x_{h_2})) \supseteq U_{h_2+1} \supseteq V_{(U_{h_2+1}, x_{h_2+1})} \dots$ ve her $0 \leq j \leq k$, $l \in \omega$ için $p(H_j) \in K(h_2 + l, (U_{h_2+l}, x_{h_2+l}))$ olur. O zaman $0 \leq j \leq k$ iken $H_j \supsetneq V_{(U_{h_2}, x_{h_2})} \supseteq V_{(U_{h_2+1}, x_{h_2+1})} \supseteq V_{(U_{h_2+2}, x_{h_2+2})} \dots$ olur. O zaman $\mathcal{B}^{(h_2, U_{h_2}, p(H_j))} \supseteq \mathcal{B}^{(h_2+1, U_{h_2+1}, p(H_j))} \supseteq \mathcal{B}^{(h_2+3, U_{h_2+2}, p(H_j))} \supseteq \dots$ dir. Böylece $\alpha_{(U_{h_2}, p(H_j))} \geq \alpha_{(U_{h_2+1}, p(H_j))} \geq \alpha_{(U_{h_2+2}, p(H_j))} \geq \dots$ dir. Ordinalerin sonsuz kesin azalan bir dizisi var olmayacağından bir $s(p(H_j)) \in \omega$ bulunabilir ki bir $l_j \in \omega$ için $s(p(H_j)) = h_2 + l_j$ olup $l_j \in \omega$ iken her U_{h_2+l} için $\alpha_{(U_{h_2+l}, p(H_j))} \geq \alpha_{(U_{s(p(H_j))}, p(H_j))}$, hatta $l \geq l_j$ iken $\alpha_{(U_{h_2+l}, p(H_j))} = \alpha_{(U_{s(p(H_j))}, p(H_j))}$ olur. Şimdi $h_3 = \max\{s(p(H_j)) : 0 \leq j \leq k\}$ diyelim. $0 \leq j \leq k$ için $H_j = B_{f_{\alpha_{(U_{s(p(H_j))}, p(H_j))}}^{-1}(i(j))}$ olan $i(j) \in \omega$ olduğunu biliyoruz. $h_4 = \max\{i(j) : 0 \leq j \leq k\}$ diyelim. $n'_{k+1} = \max\{h_2, h_3, h_4\}$ olarak tanımlayalım. $H_{k+1} = U_{n'_{k+1}}$ ve $U_{n_{k+2}} = U_{n'_{k+1}+1}$ olsun. Böylece eğer $x_k^* = \min\{x \in H_k : \sigma(\dots, (H_k, x)) \supseteq H_{k+1}\}$ iken $A = ((H_0, x_0^*), \dots, (H_{k-1}, x_{k-1}^*), (H_k, x_k^*))$ yazarsak (tümevarım hipotezi, h_i tanımları ve n'_{k+1} tanımı kullanılarak) $A \in \mathcal{A}_{U_{n'_{k+1}}}$ olur. Böylece t nin tanımından $H_{k+1} = U_{n'_{k+1}} \supseteq \sigma^*(A, x_{n'_{k+1}}) \supseteq t((U_{n'_{k+1}}, x_{n'_{k+1}})) \supseteq U_{n'_{k+1}+1} = U_{n_{k+2}}$ dir.

Bu durumda $x_{n'_{k+1}} \in \{x \in U_{n'_{k+1}} : \sigma((H_0, x_0^*), \dots, \sigma((H_k, x_k^*), \dots (H_{k+1}, x)) \supseteq U_{n_{k+2}}\}$, o zaman $y_{k+1}^* = \min\{x \in U_{n'_{k+1}} : \sigma((H_0, x_0^*), \dots, \sigma((H_k, x_k^*), \dots (H_{k+1}, x)) \supseteq U_{n_{k+2}}\}$ elde ederiz. Böylece $U_{n_{k+1}} \supsetneq U_{n'_{k+1}} = H_{k+1} \supseteq \sigma((H_0, x_0^*), \dots, \sigma((H_k, x_k^*), \dots (H_{k+1}, y_{k+1}^*)) \supseteq U_{n_{k+2}}$ olur. $H_k \supseteq U_{n_{k+1}} \supsetneq U_{n'_{k+1}} \supseteq H_{k+1}$ olduğundan $H_k \supsetneq H_{k+1}$ elde edilir. Böylece $Ch_{\emptyset}(X)$ oyununda $((H_0, x_0^*), \sigma(\dots, (H_k, x_k^*)), \sigma(\dots, (H_k, x_k^*)), (H_{k+1}, y_{k+1}^*), \sigma(\dots, \sigma(\dots, (H_k, x_k^*)), (H_{k+1}, y_{k+1}^*)))$ bir karşılaşma parçası olur ve $0 \leq i \leq k+2$ için U_{n_i} ler BOŞÇU'nun hamleleri ve $n_0 < n_1 < \dots < n_{k+2}$ olup $((H_0, x_0^*), (H_1, x_1^*), \dots, (H_k, x_k^*), (H_{k+1}, y_{k+1}^*))$ sonlu dizisi $U_{n_{k+2}}$ nin budanmış dalı olmak üzere $U_{n_0} \supseteq H_0 \supseteq U_{n_1} \supseteq H_1 \dots \supseteq U_{n_{k+1}} \supseteq H_{k+1} \supseteq U_{n_{k+2}}$ dir. Böylece iddianın kanıtı tamamlanmış olur.

İddia gereği, $\emptyset \neq \bigcap_{k \in \omega} H_k = \bigcap_{k \in \omega} U_{n_k} = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ olur ki bu kanıtı bitirir. $\square$

4.3.6. Sonuç

X , σ -yerel sayılabilir tabanı olan bir topolojik uzay olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda Markov stratejisi (ve böylece Teorem 4.1.1 ile 2-taktiği) vardır.

Kanıt

Bir σ -yerel sayılabilir taban Teorem 4.3.5'in içindeki (*) koşulunu sağlayacağından Teorem 4.3.5'ten bu sonuç doğrudur. $\square$

4.3.7. Sonuç

X bir T_1 -uzay olsun ve aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{B}$ Nöderyan tabanı var olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda 1-taktiği vardır.

(*) $rank(\mathcal{B}) = \beta < \omega_1$ ve $\mathcal{B}$ nin Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i < \beta} \mathcal{B}_i$ olmak üzere $i < \beta$ iken her $U \in \mathcal{B}_i$ ve her $j < i$ için $\{B \in \mathcal{B}_j : U \cap B \neq \emptyset\}$ ailesi yerel sayılabilir.

Kanıt

Eğer X uzayının her noktası yalıtık nokta ise DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda (Teorem 4.3.1'in kanıtındaki gibi) 1 taktiği vardır. Bu durumda X uzayının en az bir yalıtık olmayan noktasının var olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $\beta \geq \omega$ olduğunu Teorem 4.3.1'in kanıtında gördük. Böylece $\omega \leq \beta < \omega_1$ olup bir $F : \omega \rightarrow \beta$ birebir örten fonksiyonu tanımlayabiliriz.

Her $i \in \omega$ için $\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)}$ iken $\mathcal{B}' = \bigcup_{i < \omega} \mathcal{B}'_i$ diyelim. Burada Teorem 4.3.5'i kullanmak için $i \in \omega$ iken $\mathcal{B}'_i$ ailesinin $\bigcup \mathcal{B}'_i$ üzerinde yerel sayılabilir olduğunu göreceğiz.

Şimdi herhangi bir $i \in \omega$ ve $x \in \bigcup \mathcal{B}'_i = \bigcup \mathcal{B}_{F(i)}$ alalım. Böylece $x \in O$ olan bir $O \in \mathcal{B}_{F(i)}$ vardır.

Şimdi x in bir yalıtık nokta olmadığını varsayalım. O zaman O sonlu değildir. Böylece her bir $y \in O - \{x\}$ için $x \in B_x \subseteq O - \{y\}$ olan bir $B_x \in \mathcal{B}$ vardır ve $r(B_x) > r(O) = F(i)$ olur. O zaman (*) koşulu gereği $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}_{F(i)} = \mathcal{B}'_i : B_x \cap B \neq \emptyset\}$ yerel sayılabilirdir. Bu durumda x in $\{B \in \mathcal{A} : B \cap V'_x \neq \emptyset\}$ ailesi sayılabilir olacak biçimde bir V'_x açık komşuluğu vardır. $V_x = V'_x \cap B_x$ diyelim, böylece $\{B \in \mathcal{B}'_i : V_x \cap B \neq \emptyset\} \subseteq \{B \in \mathcal{A} : B \cap V'_x \neq \emptyset\}$ elde ederiz. Bu durumda $\{B \in \mathcal{B}'_i : V_x \cap B \neq \emptyset\}$ sayılabilir olur.

Eğer x , bir yalıtık noktaysa $\mathcal{B}$ bir taban olduğundan $\{x\} \in \mathcal{B}$ olur. Şimdi, x in açık komşuluğu $\{x\}$ iken, $\{B \in \mathcal{B}'_i : \{x\} \cap B \neq \emptyset\}$ ailesinin sayılabilir olduğunu göreceğiz. $\{x\} \subseteq O$ olduğundan $r(\{x\}) \geq r(O) = F(i)$ olur. Eğer $r(\{x\}) = r(O) = F(i)$ ise $\{B \in \mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)} : \{x\} \cap B \neq \emptyset\} = \{x\}$ ailesi bir elemanlı olup (bu ailede $\{x\}$ dışında başka bir A kümesi olsa $\{x\} \cap A \neq \emptyset$ olur, yani $\{x\} \subsetneq A$ olup $F(i) = r(\{x\}) > r(A) = F(i)$ çelişkisi olur) sayılabilirdir. Eğer $r(\{x\}) > r(O) = F(i)$ ise hipotez ((*) koşulu) gereği $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)} : \{x\} \cap B \neq \emptyset\}$ ailesi yerel sayılabilirdir. Bu durumda da $\mathcal{A}$ ailesinin sayılabilir olduğu yukarıdaki gibi görülür.

Teorem 4.3.5'ten DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda Markov stratejisi vardır. Böylece Teorem 4.3.1 ile DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda 1-taktiği vardır. $\square$

Sonuç 4.3.7 ile ilgili bir soru soracağız.

4.4. Banach-Mazur Oyununda DOLUCU'nun Stratejileri

Bir önceki başlıkta Choquet oyunu için elde ettiğimiz sonuçların benzerlerini Banach-Mazur oyunu için yapacağız.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.3.2 ile benzerdir ve bu teorem [15] te (Sonuç 11) bulunabilir.

4.4.1. Teorem

X bir topolojik uzay ve bu uzayın aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{B} = \bigcup_{i < \omega} \mathcal{B}_i$ π -tabanı var olsun. Eğer DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda 1-taktiği vardır (Sonuç 11, [15]).

(*) Her $U \in \mathcal{B}$ ve her $i < \omega$ için $\{B \in \mathcal{B}_i : U \subseteq B\}$ ailesi sonludur. $\square$

Aşağıdaki sonucun kanıtı ile Sonuç 4.3.3 sonucunun kanıtı benzerdir. Tekrardan kaçınmak için yazmadık.

4.4.2. Sonuç

X bir topolojik uzay ve bu uzayın aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan Nöderyan bir $\mathcal{B}$ π -tabanı bulunsun. Eğer DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda 1-taktiği vardır.

(*) $rank(\mathcal{B}) = \beta < \omega_1$ ve $\mathcal{B}$ nin Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i < \beta} \mathcal{B}_i$ olsun. $i < \beta$ iken her $U \in \mathcal{B}_i$ ve her $j < i$ için $\{B \in \mathcal{B}_j : U \subseteq B\}$ ailesi sonludur.

4.4.3. Teorem

X bir topolojik uzay ve bu uzayın aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{B} = \bigcup_{i < \omega} \mathcal{B}_i$ π -tabanı bulunsun. Eğer DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda Markov stratejisi (ve böylece [15] kaynağındaki Sonuç 9'dan 1-taktiği) vardır.

(*) her $i \in \omega$ için bir $Y_i \subseteq \bigcup \mathcal{B}_i$ vardır ve $Y_i, \bigcup \mathcal{B}_i$ de yoğun olup $\mathcal{B}_i, Y_i$ üzerinde yerel sayılabilir. Yani her $x \in Y$ için x noktasının $\{B \in \mathcal{B}_i : B \cap V_x \neq \emptyset\}$ ailesi sayılabilir olacak biçimde bir V_x açık komşuluğu vardır.

Kanıt

(Tekrardan kaçınmak için Teorem 4.3.5'in kanıtındakilere atıf yapacağız) Lemma 4.2.7'den $BM_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(X)$ oyununda DOLUCU'nun bir σ kazanma stratejisi vardır. Aynı lemma gereği eğer DOLUCU'nun $BM_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(X)$ oyununda bir Markov stratejisinin var olduğunu görürsek kanıt tamamlanacaktır.

İyi sıralamalar ve $\alpha \in \omega_1$ için f_α fonksiyonları Teorem 4.3.5'in kanıtındaki gibi olsun.

$U \in \mathcal{B}$ ve $h \in \omega$ iken (h, U) verilsin. $p(U)$ ve $K'(h, U)$ Teorem 4.3.5'in kanıtındaki gibi olsun. $p(U) \in \{i \in \omega : i \leq K'(h, U), \sigma(U) \cap (\bigcup \mathcal{B}_i) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ ve sonlu (çünkü $(K'(h, U)) \in \omega$ dir) olduğundan $m_{(1,U)} = \max\{i \in \omega : i \leq K'(h, U), \sigma(U) \cap (\bigcup \mathcal{B}_i) \neq \emptyset\}$ diyebiliriz. $Y_{m_{(1,U)}}$ hipotezden (yani (*) koşulundan) gelen küme olmak üzere $\min(Y_{m_{(1,U)}} \cap (\sigma(U) \cap (\bigcup \mathcal{B}_{m_{(1,U)}}))) = y_1$ olsun. Böylece, (*) koşulu gereği, y_1 in bir açık komşuluğu $V_{y_1} \subseteq \sigma(U)$ vardır ve $\{B \in \mathcal{B}_{m_{(1,U)}} : B \cap V_{y_1} \neq \emptyset\}$ sayılabilir olur. O zaman, eğer varsa, $m_{(2,U)} = \max\{i \in \omega : i < m_{(1,U)}, V_{y_1} \cap (\bigcup \mathcal{B}_i) \neq \emptyset\}$ diyelim. $\min(Y_{m_{(2,U)}} \cap (V_{y_1} \cap (\bigcup \mathcal{B}_{m_{(2,U)}}))) = y_2$ olsun. Böylece y_2 nin bir açık komşuluğu $V_{y_2} \subseteq V_{y_1}$ vardır ve $\{B \in \mathcal{B}_{m_{(2,U)}} : B \cap V_{y_2} \neq \emptyset\}$ sayılabilir olur. Böyle devam ederek $m_{(n_U,U)} = \max\{i \in \omega : i < m_{(n_U-1,U)}, V_{y_{n_U-1}} \cap (\bigcup \mathcal{B}_i) \neq \emptyset\}$ olan sonuncu $m_{(n_U,U)}$ yu bulabiliriz ve y_{n_U} nun bir açık komşuluğu $V_{y_{n_U}} \subseteq V_{y_{n_U-1}}$ var olup $\min(Y_{m_{(n_U,U)}} \cap (V_{y_{n_U-1}} \cap \bigcup \mathcal{B}_{m_{(n_U,U)}})) = y_{n_U}$ iken $\{B \in \mathcal{B}_{m_{(n_U,U)}} : B \cap V_{y_{n_U}} \neq \emptyset\}$ sayılabilir olur. $K''(h, U) = \{m_{(1,U)}, m_{(2,U)}, \dots, m_{(n_U,U)}\}$ ve $V_U = \min\{B \in \mathcal{B} : B \subseteq V_{y_{n_U}}\}$ diyelim. $K''(h, U) \neq \emptyset$ olur (çünkü $m_{(1,U)} \in K''(h, U)$ ve eğer $K''(h, U) = \{m_{(1,U)}\}$ ise $V_{y_{n_U}} = V_{y_1}$). Böylece (h, U) verildiğinde her zaman V_U bulabiliriz ve her $i \in K''(h, U)$ için $\mathcal{B}^{(h,U,i)} = \{B \in \mathcal{B}_i : B \cap V_U \neq \emptyset\}$ iken $\mathcal{B}^{(h,U,i)}$ sayılabilir olur. $K(h, U) = \{i \in K''(h, U) : \mathcal{B}^{(h,U,i)} \neq \emptyset\}$ diyelim. $K(h, U) = \{i \in \omega : i \leq K'(h, U), \mathcal{B}^{(h,U,i)} \neq \emptyset\}$ olur. Böylece Teorem 4.3.5'in kanıtındaki $\alpha_{(h,U,i)}$, $r^*(h, U, j)$ gibi ilişkili kavramlarla, $K(h, U) \neq \emptyset$ iken $K(h, (U, x))$ ve $V_{(U,x)}$ yerine, sırasıyla, $K(h, U)$ ve V_U kullanılarak Teorem 4.3.5'in kanıtındaki şemayı elde ederiz.

Şimdi U nun aşağıdaki koşulu sağlayan tüm dallarından oluşan $\mathcal{A}_U$ ailesini şöyle tanımlayalım.

$(B_0, B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{A}_U$ ancak ve ancak $B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq \dots \supsetneq B_n$ ve her $0 \leq i \leq n$ için B_i şemanın satırlarındadır.

Eğer $\mathcal{A}_U \neq \emptyset$ ise aşağıdakileri tanımlayalım.

$\mathcal{A}_U$ sonlu olduğundan $|\mathcal{A}_U| = m(U)$ iken $\mathcal{A}_U$ ailesini $\mathcal{A}_U = \{A_1, A_2, \dots, A_{m(U)}\}$ biçiminde numaralandırabiliriz. $1 \leq j \leq m(U)$ için $A_j \in \mathcal{A}_U$ olmak üzere V_U nun σ ile budanmış dalı $\sigma_j^*(A_j)$ olsun.

Böylece $\sigma(U) \supseteq \sigma_1^*(A_1)$, $V_U \supseteq \sigma_1^*(A_1)$, $\sigma_1^*(A_1) \supseteq \sigma_2^*(A_2) \supseteq \dots \supseteq \sigma_{m(U)}^*(A_{m(U)}) \neq \emptyset$ ve $1 \leq j \leq m(U)$ için, σ stratejisi $BM_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ de olduğundan, $\sigma_j^*(A_j) \in \mathcal{B}$ olur.

Şimdi $BM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(X)$ oyununda DOLUCU için bir t Markov stratejisi tanımlayacağız. $U \in \mathcal{B}$ ve $h \in \omega$ için herhangi bir (h, U) verilsin. Eğer $\mathcal{A}_U = \emptyset$ ise $t(h, U) = V_U$ biçiminde tanımlayalım. Eğer $\mathcal{A}_U \neq \emptyset$ ise $t(h, U) = \sigma_{m(U)}^*(A_{m(U)})$ olarak tanımlayalım.

t nin DOLUCU için bir Markov stratejisi olduğunu göreceğiz. Bunun için DOLUCU'nun t ile oynadığı $BM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(X)$ oyununda keyfi bir

$$(U_0, t(0, U_0), U_1, t(1, U_1), U_2, t(2, U_2), \dots) \quad (4.3)$$

karşılaşmasını alalım.

Teorem 4.3.5'in kanıtındaki aynı gerekçeyle bu karşılaşmada her $i \in \omega$ için $U_i \supsetneq U_{m_i}$ olacak biçimde bir $m_i > i$ var olduğunu varsayabiliriz.

İddia: $BM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(X)$ oyununda $(H_0, \sigma(H_0), H_1, \sigma(H_0, \sigma(H_0), H_1), H_2, \sigma(H_0, \dots, H_2), H_3, \dots)$ karşılaşması var olup $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, her $k \in \omega$ için U_{n_k} BOŞÇU'nun (4.3) karşılaşmasında hamlesi iken $U_{n_0} \supseteq H_0 \supseteq U_{n_1} \supseteq H_1 \supseteq U_{n_2} \supseteq H_2 \supseteq U_{n_3} \supseteq \dots$ ve $H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots$ olur.

İddianın kanıtı: Tümevarım kullanacağız.

$k = 0$ için $U_{n_0} = U_0$, $H_0 = U_0$ ve $U_{n_1} = U_1$ olsun.

Varsayalım ki $BM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(X)$ oyununda bir $(H_0, \sigma(H_0), H_1, \dots, H_k, \sigma(H_0, \dots, H_k))$ karşılaşma parçası var ve $H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq \dots \supsetneq H_k$, $\sigma(H_0, \dots, H_k) \supseteq U_{n_{k+1}}$ her $0 \leq i \leq k+1$ için $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k+1}$ olup (4.3) karşılaşmasında U_{n_i} ler BOŞÇU'nun hamleleri iken $U_{n_0} \supseteq H_0 \supseteq U_{n_1} \supseteq \dots \supseteq U_{n_k} \supseteq H_k \supseteq U_{n_{k+1}}$ olsun.

n'_{k+1} i Teorem 4.3.5'in kanıtındaki gibi aynı argümanları kullanarak tanımlayalım. Böylece eğer $A = (H_0, H_1, \dots, H_k)$ yazarsak $A \in \mathcal{A}_{U_{n'_{k+1}}}$ elde ederiz. Eğer $A = A_1$ ise $H_{k+1} = V_{U_{n'_{k+1}}}$ tanımlayalım. Eğer $j > 1$ için $A = A_j$ ise $\mathcal{A}_{U_{n'_{k+1}}} = \{A_1, A_2, \dots, A_{m(U_{n'_{k+1}})}\}$ iken $H_{k+1} = \sigma_{j-1}^*(A_{j-1})$ olsun. Böylece eğer $U_{n_{k+2}} = U_{n'_{k+1}+1}$ ise $U_{n_{k+1}} \supseteq H_{k+1} \supseteq \sigma(H_0, \dots, H_{k+1}) \supseteq U_{n_{k+2}}$ elde ederiz. $n'_{k+1} \geq n_{k+1} + 1$ olduğundan $H_k \supseteq U_{n_{k+1}} \supsetneq U_{n'_{k+1}} \supseteq H_{k+1}$ olur. Böylece $H_k \supsetneq H_{k+1}$ olup iddianın kanıtı tamamlanır.

Bu iddiadan $\emptyset \neq \bigcap_{k \in \omega} H_k = \bigcap_{k \in \omega} U_{n_k} = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ olur ve kanıt tamamlanır. $\square$

Bir σ -yerel sayılabilir π -taban Teorem 4.4.3'in içindeki (*) koşulunu sağlayacağından aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.4.4. Sonuç

X topolojik uzayının bir σ -yerel sayılabilir π -tabanı var olsun. Eğer DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda 1-taktiği vardır.

4.4.5. Sonuç

X bir T_1 -uzay olsun ve X uzayının aşağıdaki (*) koşullarını sağlayan bir $\mathcal{B}$ π -tabanı var olsun. Eğer DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda bir kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda bir 1-taktiği vardır.

(*) $rank(\mathcal{B}) = \beta < \omega_1$. $\mathcal{B}$ nin Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i < \beta} \mathcal{B}_i$ olmak üzere her $\mathcal{B}_i$, her $U \in \mathcal{B}_i$ ve her $j < i$ için $\{B \in \mathcal{B}_j : U \cap B \neq \emptyset\}$ yerel sayılabilir.

Kanıt

$\tau^*(X)$ üzerine ve X üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen birer iyi sıralama bağıntısı var olsun.

Teorem 4.3.1'in kanıtındaki gibi, genelliği bozmadan, X uzayının yalıtık olmayan en az bir noktasının var olduğunu ve $\beta \geq \omega$ olduğunu varsayabiliriz.

Bu durumda birebir örten bir $F : \omega \rightarrow \beta$ fonksiyonu vardır. Her $i \in \omega$ için $\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)}$ iken $\mathcal{B}' = \bigcup_{i < \omega} \mathcal{B}'_i$ diyelim. $\mathcal{B}'$ ailesinin Teorem 4.4.3'ün içindeki (*) koşullarını sağladığını göreceğiz. Şimdi herhangi bir $i \in \omega$ alalım. $\mathcal{A}_i = \{O \cap B : O \in \tau^*(X), B \in \mathcal{B}'_i, O \cap B \neq \emptyset\}$ diyelim. Herhangi bir $A \in \mathcal{A}_i$ için A nın tüm yalıtık noktalarının kümesine A' diyelim ve $|A| > 1$ iken $B_A = \min\{B \in \mathcal{B} : B \subseteq (A - \{\min(A)\})\}$ olsun. $x_A = \min(B_A)$ olsun. Şimdi $Y_i = \{x_A : A \in \mathcal{A}_i\} \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}_i} A'$ olarak tanımlayalım. Y_i ve $\mathcal{A}_i$ tanımları gereği $Y_i, \bigcup \mathcal{B}_i$ kümesinde yoğundur.

Her $i \in \omega$ için $\mathcal{B}_i$ ailesinin Y_i üzerinde yerel sayılabilir olduğunu görelim. Bunun için bir

$y \in Y_i$ alalım. $y \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}_i} A'$ veya $y \in \{x_A : A \in \mathcal{A}_i\}$ dir.

$y \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}_i} A'$ ise: y yalıtık nokta olduğundan $\{y\}$ açıktır ve $\{y\} \in \mathcal{B}'$ olur. Bir $B \in \mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)}$ için $\{y\} \cap B \neq \emptyset$ ise $\{y\} \subseteq B$ olur ve buradan $r(\{y\}) \geq r(B) = F(i)$ olur. Eğer $r(\{y\}) = r(B)$ olsa $\{y\} = B$ olup, bu durumda, $\{B \in \mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)} : \{y\} \cap B \neq \emptyset\} = \{y\}$ ailesi bir elemanlı olur (bu ailede $\{y\}$ dışında başka bir A kümesi olsa $\{y\} \cap A \neq \emptyset$ olur, yani $\{y\} \subsetneq A$ olup $F(i) = r(\{x\}) > r(A) = F(i)$ çelişkisi oluşur) ve bu aile sayılabilir. Eğer $r(\{y\}) > r(B) = F(i)$ ise hipotez (*) koşulu gereği $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)} : \{x\} \cap B \neq \emptyset\}$ ailesi yerel sayılabilir. Yani y nin bir V_y açık komşuluğu var ve $\{C \in \mathcal{C} : C \cap V_y \neq \emptyset\}$ sayılabilir. $\{B \in \mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)} : \{y\} \cap B \neq \emptyset\} \subseteq \{C \in \mathcal{C} : C \cap \{x\} \neq \emptyset\} \subseteq \{C \in \mathcal{C} : C \cap V_y \neq \emptyset\}$ olduğundan $\{B \in \mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_{F(i)} : \{y\} \cap B \neq \emptyset\}$ ailesi sayılabilir.

$y \in \{x_A : A \in \mathcal{A}_i\}$ ise: $y = x_A$ diyelim. $r(B_A) > F(i)$ ve $B_A \in \mathcal{B}_{r(B_A)}$ olduğundan (*) koşulu gereği $\mathcal{B}''_i = \{B \in \mathcal{B}'_i : B \cap B_A \neq \emptyset\}$ ailesi yerel sayılabilir. Bu durumda x_A nın bir V' açık komşuluğu vardır ve $\{B \in \mathcal{B}''_i : B \cap V' \neq \emptyset\}$ sayılabilir. $V = V' \cap B_A$ diyelim. Böylece V kümesi $x_A = y$ nin açık komşuluğu olur ve $\{B \in \mathcal{B}'_i : B \cap V \neq \emptyset\} \subseteq \{B \in \mathcal{B}''_i : B \cap V' \neq \emptyset\}$ olup $\{B \in \mathcal{B}'_i : B \cap V \neq \emptyset\}$ ailesi sayılabilir.

Böylece $\mathcal{B}'$, Teorem 4.4.3'ün (*) koşullarını sağladığından bu teorem gereği DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda 1-taktiği vardır. $\square$

4.5. Bu Konu ile İlgili Açık Sorular

4.5.1. Soru

[22] X bir regüler uzay olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi veya eşdeğer olarak kodlama stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda 2-taktiği var mıdır?

Yukarıdaki soru $BM(X)$ oyununda da açık sorudur [22].

4.5.2. Soru

X Nöderyan tabanı olan bir T_1 -uzay olsun. Eğer $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun kazanma stratejisi veya X regüler iken eşdeğer olarak kodlama stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda

1-taktiğinin (veya 2-taktiğinin) var olması gerekir mi?

Aşağıdaki iki soru, Soru 4.5.2'den daha özel olup sırasıyla Sonuç 4.3.3 ve Sonuç 4.3.7 sonuçları ile ilişkilidir.

4.5.3. Soru

X bir T_1 -uzay olsun ve X uzayının aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{B}$ Nöderyan tabanı bulunsun. DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda 1-taktiği var mıdır?

(*) $\mathcal{B}$ nin Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i < \beta} \mathcal{B}_i$ olsun. $i > 0$ iken her $U \in \mathcal{B}_i$ ve her $j < i$ için $\{B \in \mathcal{B}_j : U \subseteq B\}$ ailesi sonludur.

4.5.4. Soru

X bir T_1 -uzay olsun ve X uzayının aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{B}$ Nöderyan tabanı bulunsun. DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda 1-taktiği var mıdır?

(*) $\mathcal{B}$ nin Nöderyan birleşimi $\bigcup_{i < \beta} \mathcal{B}_i$ olmak üzere $i < \beta$ ve $j < i$ iken her $U \in \mathcal{B}_i$ için $\{B \in \mathcal{B}_j : U \cap B \neq \emptyset\}$ ailesi yerel sayılabilir.

Sonuç 4.4.2 ve Sonuç 4.4.5 sonuçları ile ilişkili olarak Soru 4.5.3 ve Soru 4.5.4 soruları $\mathcal{B}$ bir Nöderyan π -taban iken $BM(X)$ oyunu içinde sorulabilir. Aşağıdaki soru Galvin'in sorusunun genel halidir.

4.5.5. Soru

DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği var mıdır?

Daha öncede bahsettiğimiz aşağıdaki soru Teorem 4.1.1 ile ilişkilidir. Elbette Soru 4.5.5 için olumlu bir cevap aşağıdaki soru için de olumlu bir cevap olacaktır.

4.5.6. Soru

DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda $(k+1)$ -taktiği var mıdır?

Aşağıdaki soru Soru 4.5.5 ve Soru 4.5.6 sorularından daha özel olup Teorem 4.3.1 ile ilişkilidir.

4.5.7. Soru

X Nöderyan tabana sahip bir T_1 -uzay olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği (veya $(k+1)$ -taktiği) var mıdır?

4.5.8. Soru

X bir T_1 -uzay olsun ve X uzayının $rank(\mathcal{B}) \leq \omega$ olan Nöderyan bir $\mathcal{B}$ tabanı bulunsun. DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi varken DOLUCU'nun bu oyunda 1-taktiği var mıdır?

4.5.9. Soru

X bir T_1 -uzay olsun ve X uzayının $rank(B) \leq \omega$ olan Nöderyan bir $\mathcal{B}$ π -tabanı bulunsun. DOLUCU'nun $BM(X)$ oyununda kazanma stratejisi varken DOLUCU'nun bu oyunda 1-taktiği var mıdır?

5. DOLUCU'NUN $\text{Ch}(X)$ 'TE K-MARKOV VE K-TAKTİĞİ

Bir önceki bölümün giriş kısmında "DOLUCU'nun $\text{Ch}(X)$ oyununda Markov stratejisi varsa 1-taktiği var mıdır?" (Galvin) sorusundan ve bu sorunun daha genel hali olan DOLUCU'nun $\text{Ch}(X)$ oyununda k-Markov stratejisi varsa k-taktiği var mıdır?" sorusundan bahsetmiştik. Bu sorulara bir önceki bölümde bazı özel tabanı olan uzaylarda kısmi cevaplar vermiştik. Bu bölümünde ise DOLUCU'nun $\text{Ch}(X)$ oyunundaki k-Markov ve k-taktiği arasındaki ilişkileri topolojik gruplarda ve (zayıf) P-nokta içeren topolojik uzaylarda inceleyeceğiz ve DOLUCU'nun G bir topolojik grup iken $\text{Ch}(G)$ oyununda k-Markov stratejisi varken k-taktiğinin var olduğunu göreceğiz.

Bu bölümde $X \times X$ çarpım uzayı üzerinde doğal çarpım topolojisi olduğunu (yani tabanı $\{U \times V : U, V \in \tau(X)\}$ olan topoloji) varsayacağız ve $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ olacak.

Bu bölümde topolojik gruplarla ilgili kullandığımız sembol ve kavramlar standart olup [25] te bulunabilir.

5.1. DOLUCU için k-Markov ve k-taktik

Aşağıdaki tanım literatürde vardır.

5.1.1. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Bir $x \in X$ alalım. Eğer aşağıdaki (*) koşulu sağlamıyorsa bu x noktasına X uzayının bir zayıf P -noktası (X uzayının bir P -noktası), karışıklık olmayacaksa, kısaca bir P -nokta (bir zayıf P -nokta) denir.

(*) x noktasının açık komşuluklarından oluşan sayılabilir her $\mathcal{A}_x$ ailesi için $(\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ \neq \emptyset$ ($x \in (\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ$) olur.

5.1.2. Uyarı

$\mathcal{A} = \{A_i : i \in \omega\}$ sayılabilir ailesi verilsin. Her $i \in \omega$ için $B_i = \bigcap_{j \leq i} A_j$ denilirse $\{B_i : i \in \omega\}$ ailesi içermeye bağıntısına göre azalan, yani her $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, olur ve $\bigcap_{i < \omega} B_i = \bigcap_{i < \omega} A_i$

dir. Bu nedenle (zayıf) P-nokta tanımındaki $\mathcal{A}_x$ ailesini azalan kabul etmek genelliği bozmaz.

5.1.3. Önerme

G bir topolojik grup olmak üzere aşağıdakiler denktir:

1. G nin her noktası bir P-noktadır;
2. G nin birim elemanı e bir P-noktadır;
3. e bir zayıf P-noktadır;
4. G nin her noktası bir zayıf P-noktadır.

Kanıt

$(1 \Rightarrow 2)$ ve $(2 \Rightarrow 3)$ açıktır.

$(3 \Rightarrow 4)$: Herhangi bir $x \in G - \{e\}$ ve x in açık komşuluklarının keyfi bir $\{A_i : i \in \omega\}$ ailesini alalım. Bu durumda her $i \in \omega$ için $e \in x^{-1}A_i$ açık olup hipotez gereği e bir zayıf P-nokta olduğundan $\emptyset \neq (\bigcap_{i \in \omega} x^{-1}A_i)^\circ$ olur. $y \in (\bigcap_{i \in \omega} x^{-1}A_i)^\circ$ diyelim. O zaman $y \in U \subseteq \bigcap_{i \in \omega} x^{-1}A_i = x^{-1} \bigcap_{i \in \omega} A_i$ olan bir $U \in \tau(G)$ vardır. Böylece $xy \in xU \subseteq \bigcap_{i \in \omega} A_i$ olur ve $xy \in (\bigcap_{i \in \omega} A_i)^\circ$ elde edilir.

$(4 \Rightarrow 1)$: Herhangi bir $x \in G$ ve x in açık komşuluklarının keyfi bir $\{A_i : i \in \omega\}$ ailesini alalım. Herhangi bir $i \in \omega$ için $xB_i^2 \subseteq A_i$ ve $B_i^{-1} = B_i$ olan e nin bir B_i açık komşuluğu vardır ([25] te 23. sayfa). e bir zayıf P-nokta olduğundan bir $y \in (\bigcap_{i \in \omega} B_i)^\circ$ vardır. Böylece $y \in U \subseteq \bigcap_{i \in \omega} B_i$ olan bir $U \in \tau(G)$ vardır. Bu durumda her $i \in \omega$ için $x \in xy^{-1}U \in xB_i^{-1}B_i \subseteq xB_i^2 \subseteq A_i$ olur. O zaman $x \in xy^{-1}U \subseteq \bigcap_{i \in \omega} A_i$. Böylece $x \in (\bigcap_{i \in \omega} A_i)^\circ$ olur. $\square$

P-nokta (zayıf P-nokta) olma özelliği homeomorfizm altında değişmezdir. Şöyle ki, $f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ve $x \in X$ bir P-nokta (zayıf P-nokta) olsun. $f(x)$ noktasının açık komşuluklarından oluşan sayılabilir bir $\mathcal{A}_{f(x)} = \{A_i : i \in \omega\}$ ailesini alalım. $\{f^{-1}(A_i) : i \in \omega\}$ ailesi $x \in X$ noktasının açık komşuluklarının sayılabilir bir ailesidir. $x \in X$ bir P-nokta (zayıf

P-nokta) olduğu için $(\bigcap \{f^{-1}(A_i) : i \in \omega\})^\circ \neq \emptyset$ ($x \in (\bigcap \{f^{-1}(A_i) : i \in \omega\})^\circ$) olur. f bir homeomorfizm olduğundan $\emptyset \neq f(\bigcap \{f^{-1}(A_i) : i \in \omega\})^\circ = (f(\bigcap \{f^{-1}(A_i) : i \in \omega\}))^\circ = (\bigcap \{f(f^{-1}(A_i)) : i \in \omega\})^\circ = (\bigcap \{A_i : i \in \omega\})^\circ$ (benzer biçimde $f(x) \in (\bigcap \{A_i : i \in \omega\})^\circ$) olur. Yani $f(x) \in Y$ bir P-nokta (zayıf P-nokta) olur.

5.1.4. Uyarı

G bir topolojik grup olsun. G nin herhangi bir noktasını başka bir noktası ile eşleyen bir homeomorfizm vardır [25]. P-nokta olma özelliği homeomorfizm altında değişmez olduğundan herhangi bir G topolojik grubu için $e \in G$ noktasının, veya daha genel olarak G nin herhangi bir noktasının, (zayıf) P-nokta olması için gerek ve yeter koşul G grubunda en az bir (zayıf) P-noktanın olmasıdır.

Aşağıdaki sonuç bu bölümün önemli sonuçlarından biridir ve bu sonuçla ilgili bölüm sonunda bir soru soracağız.

5.1.5. Teorem

X topolojik uzayı hiç zayıf P-noktasına sahip olmayan bir uzay olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda $k \geq 2$ için k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği vardır.

Kanıt

σ stratejisi Lemma 4.2.8'in koşullarını sağlayan k -Markov olsun. Her $x \in X$ için içerme bağıntısına göre azalan x noktasının açıklarının bir $\mathcal{A}_x = \{A_i^x : i \in \omega\}$ ailesi var olup $\emptyset = (\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ$ olur. Böylece herhangi bir $U \in \tau^*(X)$ açığı ve $x \in X$ noktası için $U \not\subseteq (\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ = \emptyset$ olduğundan $n_{(U,x)} = \min\{i \in \omega : A_i^x \in \mathcal{A}_x, U \not\subseteq A_i^x\}$ biçiminde tanımlayabiliriz (Burada $x \in U$ olması gerekmez).

Şimdi $1 \leq i \leq k$ ve $1 \leq j \leq i$ için $x_j \in O_j \in \tau(X)$ olmak üzere $((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i))$ verilsin. Aşağıdaki gibi bir t , k -taktiği tanımlayacağız.

$$t((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i)) = \begin{cases} \sigma(0, ((O_1, x_1))) \cap A_{n(O_1, x_1)}^{x_1} & : i = 1 \\ \sigma(n(O_{i, x_{i-1}}), (\dots, (O_i, x_i))) \cap A_{n(O_{i, x_{i-1}})}^{x_i} & : i > 1 \end{cases}$$

Bu t stratejisinin tanımı görüldüğü üzere $i > 2$ iken

$t(\dots, (O_i, x_i)) = \sigma(n(O_{i, x_{i-1}}), (\dots, (O_i, x_i))) \cap A_{n(O_{i, x_{i-1}})}^{x_i}$ biçimindedir. Burada $k \geq 2$ olduğundan x_{i-1} noktası görülmekte ve tanımda $A_{n(O_{i, x_{i-1}})}^{x_i}$ ailesi kullanılmakta ve tanım anlamlı olmaktadır. Eğer $k = 1$ olsa sadece (O_i, x_i) görülecek, x_{i-1} görülemeyecek ve $A_{n(O_{i, x_{i-1}})}^{x_i}$ ailesi bulunamayacaktır. Yani bu tanım yapılamayacaktır (Bu teoremin $k = 1$ durumunu bölüm sonunda açık soru olarak bıraktık).

t nin DOLUCU için bir k -taktik olduğunu görmek için $t(\dots, (U_i, x_i)) = W_i$ olmak üzere keyfi bir

$$((U_0, x_0), W_0, (U_1, x_1), W_1, (U_2, x_2), W_2, (U_3, x_3), W_3, \dots)$$

karşılaşmasını alalım. Eğer $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olduğunu görürsek kanıt bitecektir.

t nin tanımı gereği $A_{n(U_0, x_0)}^{x_0} \supseteq W_0 \supseteq U_1$ olduğundan $0 \leq n(U_0, x_0) < n(U_1, x_0)$ olup $0 < n(U_1, x_0)$ dır. Her $i \in \omega$ için bu karşılaşmada t nin tanımı gereği $A_{n(U_{i+1}, x_i)}^{x_{i+1}} \supseteq W_{i+1} \supseteq U_{i+2}$ olur. O halde $U_{i+2} \not\subseteq A_j^{x_{i+1}}$ biçimindeki her j için $j > n(U_{i+1}, x_i)$ olmalıdır (aksi halde $j \leq n(U_{i+1}, x_i)$ olsa $\mathcal{A}_{x_{i+1}}$ ailesinin içerme bağıntısına göre azalanlığından $A_j^{x_{i+1}} \supseteq A_{n(U_{i+1}, x_i)}^{x_{i+1}} \supseteq U_{i+2}$ çelişkisi olur). Bu durumda $n(U_{i+2}, x_{i+1})$ tanımı gereği $n(U_{i+1}, x_i) < n(U_{i+2}, x_{i+1})$ dir. Böylece, eğer $a_{i+1} = n(U_{i+1}, x_i)$ ve $a_0 = 0$ dersek doğal sayıların kesin aratan bir (a_i) dizisini elde ederiz. Bu durumda biz yukarıdaki karşılaşmayı t nin tanımını dikkate alarak tekrar

$$((U_0, x_0), \sigma(a_0, ((U_0, x_0))) \cap A_{n(U_0, x_0)}^{x_0}, (U_1, x_1), \sigma(a_1, ((U_0, x_0), (U_1, x_1))) \cap A_{n(U_1, x_0)}^{x_1}, (U_2, x_2), \sigma(a_2, (\dots, (U_2, x_2))) \cap A_{n(U_2, x_1)}^{x_2}, \dots)$$

biçimimde yazabiliriz.

Bu durumda $((U_0, x_0), \sigma(a_0, ((U_0, x_0))), (U_1, x_1), \sigma(a_1, ((U_0, x_0), (U_1, x_1))), (U_2, x_2), \sigma(a_2, (\dots, (U_2, x_2))), (U_3, x_3), \dots)$ biçimindeki karşılaşmayı elde ederiz.

Böylece Lemma 4.2.8'den $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olur. $\square$

Teorem 5.1.5 topolojik uzayların zayıf P-nokta içermeyenleri ile ilgili iken aşağıdaki teorem zayıf P-nokta içeren uzaylarla ilgilidir.

5.1.6. Teorem

$k \geq 2$ bir doğal sayı, X aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan bir uzay olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği vardır.

(*) Herhangi bir $x \in X$ için eğer x bir zayıf P-nokta ise x noktasının açık komşuluklarının öyle bir sayılabilir $\mathcal{A}_x$ ailesi vardır ki DOLUCU'nun $Ch((\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ)$ oyununda k -taktiği vardır.

Kanıt

Herhangi bir $x \in X$ alalım. Eğer x bir zayıf P-nokta değilse $\mathcal{A}_x$ ailesi x in zayıf P-nokta olmamasını sağlayan aile (yani $\mathcal{A}_x$, x in açık komşuluklarının sayılabilir bir ailesi olup $(\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ = \emptyset$ olan bir aile) olsun. Eğer x bir zayıf P-nokta ise $\mathcal{A}_x$ hipotezde bahsedilen aile olsun. Genelliği bozmadan $\mathcal{A}_x$ ailelerinin içerme bağıntısına göre azalan olduğunu varsayabiliriz.

Herhangi bir $x \in X$ zayıf P-nokta noktası için t^x , $Ch((\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ)$ oyunda DOLUCU'nun k -taktiği olsun.

$X = \{x^\alpha : \alpha \in |X|\}$ diyelim. Bir $U \in \tau^*(X)$ alalım. Eğer $\emptyset \neq \{\alpha : x^\alpha \in X, U \subseteq (\bigcap \mathcal{A}_{x^\alpha})^\circ\}$ ise $\alpha_U = \min\{\alpha : x^\alpha \in X, U \subseteq (\bigcap \mathcal{A}_{x^\alpha})^\circ\}$ olsun. Bu durumda α_U tanımı gereği, eğer α_U varsa $\emptyset \neq U \subseteq (\bigcap \mathcal{A}_{x^{\alpha_U}})^\circ$ olup x^{α_U} bir zayıf P-nokta olur.

σ , $Ch(X)$ oyununda Lemma 4.2.8'in koşullarını sağlayan k -Markov stratejisi olsun.

$1 \leq i \leq k$ ve $1 \leq j \leq i$ için $x_j \in O_j \in \tau(X)$ olmak üzere $((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i))$ sonlu dizisi verilsin. Şimdi aşağıdaki gibi bir k -taktik tanımlayalım.

$1 \leq j \leq i$ iken α_{O_j} var olmasın. Bu durumda $\{\alpha : x^\alpha \in X, O_j \subseteq (\bigcap \mathcal{A}_{x^\alpha})^\circ\} = \emptyset$ olur. Yani

$O_j \subseteq (\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ$ olan $x \in X$ yoktur. Böylece, Teorem 5.1.5'in kanıtında tanımlanan, $n_{(O_j, x_j)} = \min\{i \in \omega : A_i^{x_j} \in \mathcal{A}_{x_j}, O_j \not\subseteq A_i^{x_j}\}$ vardır. Bu durumda $t((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i))$ Teorem 5.1.5'in kanıtındaki strateji gibi (yani bu strateji ile tamamen aynı) tanımlayalım.

Eğer $1 \leq j \leq i$ iken α_{O_j} varsa $\alpha' = \min\{\alpha_{O_j} : 1 \leq j \leq i, \alpha_{O_j} \text{ var}\}$, $j^* = \min\{j : 1 \leq j \leq i, \alpha_{O_j} = \alpha'\}$ olsun. Burada $\alpha_{O_{j^*}}$ var olduğunda tanımı gereği $\emptyset \neq O_{j^*} \subseteq (\mathcal{A}_{x_{O_{j^*}}}^\alpha)^\circ$ olur. $\mathcal{A}_x$ ailelerin tanımı gereği $\emptyset \neq (\mathcal{A}_{x_{O_{j^*}}}^\alpha)^\circ$ olduğundan $x^{\alpha_{O_{j^*}}}$ bir zayıf P-nokta olup (*) koşulu gereği $t^{x^{\alpha_{O_{j^*}}}}$ stratejisi vardır. Böylece aşağıdaki t stratejisi tanımı anlamlıdır.

$$t((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i)) = t^{x^{\alpha_{O_{j^*}}}}((O_{j^*}, x_{j^*}), (O_{j^*+1}, x_{j^*+1}), \dots, (O_i, x_i))$$

biçiminde tanımlayalım.

t bir n in k -taktik olduğunu görmek için $t(\dots, (U_i, x_i)) = W_i$ olmak üzere DOLUCU'nun t ile oynadığı keyfi bir

$$((U_0, x_0), W_0, (U_1, x_1), W_1, (U_2, x_2), W_2, (U_3, x_3), W_3, \dots)$$

karşılaşmasını alalım. Eğer $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olduğunu görürsek kanıt biter.

1. durum: Bu karşılaşmadaki herhangi bir U_i için α_{U_i} yoktur. Bu durumda Teorem 5.1.5'in kanıtındaki gibi $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olduğu görülür.

2. durum: Bu karşılaşmadaki herhangi bir U_i için α_{U_i} vardır.

$\alpha^* = \min\{\alpha_{U_i} : i \in \omega, \alpha_{U_i} \text{ vardır}\}$ ve $i_1 = \min\{i \in \omega : \alpha_{U_i} = \alpha^*\}$ diyelim. Böylece i_1 ordinalinden sonra t nin tanımı gereği bu karşılaşma aşağıdaki gibi olur.

$$(\dots, (U_{i_1}, x_{i_1}), t^{x^{\alpha_{U_{i_1}}}}((U_{i_1}, x_{i_1})), (U_{i_1+1}, x_{i_1+1}), t^{x^{\alpha_{U_{i_1}}}}((U_{i_1}, x_{i_1}), (U_{i_1+1}, x_{i_1+1})), \dots).$$

Bu karşılaşmanın baş tarafını yok sayıp $(U_{i_1+j}, x_{i_1+j}) = (O_j, y_j)$ dönüşümünü yaparak $((O_0, y_0), t^{x^{\alpha_{U_{i_1}}}}((O_0, y_0)), (O_1, y_1), t^{x^{\alpha_{U_{i_1}}}}((O_0, y_0), (O_1, y_1)), (O_2, y_2), t^{x^{\alpha_{U_{i_1}}}}(\dots, (O_2, y_2)), (O_3, y_3), \dots)$ karşılaşmasını elde ederiz. Elde ettiğimiz bu karşılaşma $Ch((\bigcap \mathcal{A}_x^{\alpha_{U_{i_1}}})^\circ)$ oyunundadır. $t^{x^{\alpha_{U_{i_1}}}}$ stratejisi DOLUCU'nun $Ch((\bigcap \mathcal{A}_x^{\alpha_{U_{i_1}}})^\circ)$ oyununda bir k -taktiği olduğundan $\emptyset \neq$

$\bigcap_{n \in \omega} O_n = \bigcap_{i \in \omega} U_i$ elde edilir ve kanıt tamamlanır. $\square$

Yukarıdaki teoremden, bazı noktaları zayıf P-nokta olan uzaylara bir takım koşullar koyarak DOLUCU için k -Markov stratejisinden k -taktik elde ettik. Bu durumda şu iki soruyu sormak doğaldır. Birincisi: Tüm noktaları zayıf P-nokta olan bir uzaya bu koşullar konulmadığında aynı sonuç geçerli olur mu? İkincisi: Tüm noktaları P-nokta olan bir uzaya bu koşullar konulmadığında aynı sonuç geçerli olur mu? İlk soru, bu bölümün sonunda açık soru olarak bırakıldı. İkinci soru ise aşağıdaki teoremle cevaplandı.

5.1.7. Teorem

X topolojik uzayı her noktası P-nokta olan bir uzay olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği vardır.

Kanıt

σ , DOLUCU'nun k -Markov stratejisi olsun. $1 \leq i \leq k$ ve $1 \leq j \leq i$ iken $x_j \in O_j \in \tau^*(X)$ olan $((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i))$ sonlu dizisi verilsin. σ bir k -Markov stratejisi olduğundan her $n \in \omega$ için $x_i \in \sigma(n, ((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i))) \in \tau(X)$ olur. Bu durumda $\{\sigma(n, ((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i))) : n \in \omega\}$ ailesi, x_i nin açık komşuluklarının sayılabilir bir ailesi olur ve x_i bir P-nokta olduğundan $x_i \in (\bigcap_{n < \omega} \sigma(n, ((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i))))^\circ$ olur. Böylece t stratejisini

$$t((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i)) = (\bigcap_{n < \omega} \sigma(n, ((O_1, x_1), (O_2, x_2), \dots, (O_i, x_i))))^\circ$$

biçiminde tanımlayabiliriz.

t stratejisinin DOLUCU'nun bir k -taktiği olduğunu görmek için $t(\dots, (U_i, x_i)) = W_i$ iken keyfi bir

$$((U_0, x_0), W_0, (U_1, x_1), W_1, (U_2, x_2), W_2, (U_3, x_3), W_3, \dots)$$

karşılaşmasını alalım.

Bu karşılaşmada her $i \in \omega$ için $U_i \supseteq \sigma(i, (\dots, (U_i, x_i))) \supseteq \bigcap_{n < \omega} \sigma(n, (\dots, (U_i, x_i))) \supseteq (\bigcap_{n < \omega} \sigma(n, (\dots, (U_i, x_i))))^\circ = W_i \supseteq U_{i+1}$ olduğundan $U_i \supseteq \sigma(i, (\dots, (U_i, x_i))) \supseteq U_{i+1}$ olup $Ch(X)$ oyununda

$$((U_0, x_0), \sigma(0, ((U_0, x_0))), (U_1, x_1), \dots, (U_i, x_i), \sigma(i, (\dots, (U_i, x_i))), (U_{i+1}, x_{i+1}), \dots)$$

karşılaşması vardır. σ , DOLUCU'nun k -Markov stratejisi ve bu karşılaşma da DOLUCU'nun σ ile oynadığı karşılaşma olduğundan $\bigcap_{i < \omega} U_i \neq \emptyset$ olur. $\square$

Aşağıdaki sonuç bu bölümün önemli sonuçlarından biridir.

5.1.8. Sonuç

G bir topolojik grup olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(G)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği vardır.

Kanıt

Birim eleman olan e , ya bir P-nokta olacak ya da olmayacaktır.

1. durum: e bir P-nokta olsun. Önerme 5.1.3'ten G uzayının her noktası P-noktadır. Bu durumda Teorem 5.1.7'den DOLUCU'nun k -taktiği vardır.

2. durum: e bir P-nokta olmasın. Önerme 5.1.3'ten G nin zayıf P-noktası yoktur. Teorem 5.1.5'ten DOLUCU'nun $k \geq 2$ iken k -taktiği vardır.

Böylece görülmesi gereken e bir zayıf P-nokta değilken ve $Ch(G)$ oyununda DOLUCU'nun Markov stratejisi varken 1-taktiğinin de olduğudur. Bu durumda e nin açık komşuluklarının içerme bağıntısına göre azalan öyle bir $\{A_i : i \in \omega\}$ ailesi vardır ki $(\bigcap_{i \in \omega} A_i)^\circ = \emptyset$ olur. Burada her $i \in \omega$ için $A_i^{-1} = A_i$ ve $A_{i+1}^2 \subseteq A_i$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz ([25] te 23. sayfa).

$\mathcal{B}$ ailesi e noktasında bir taban olsun. $\mathcal{B}$ üzerinde iyi sıralama prensibinden gelen bir iyi sıralama bağıntısı var olsun. $x \in U \in \tau^*(G)$ olan herhangi bir (U, x) ikilisini alalım ve $B^{(U, x)} =$

$\min\{B \in \mathcal{B} : xB \subseteq U\}$ ($\mathcal{B}$ bir taban olduğundan $B^{(U,x)}$ vardır), $n_{(U,x)} = \min\{i \in \omega : B^{(U,x)} \not\subseteq A_i\}$ diyelim ($(\bigcap_{i \in \omega} A_i)^\circ = \emptyset$ olduğundan ve $B^{(U,x)} \neq \emptyset$ olduğundan $n_{(U,x)}$ vardır).

σ , Lemma 4.2.8'in koşullarını sağlayan bir Markov stratejisi olsun. Şimdi DOLUCU için .

$$t(U, x) = \sigma(n_{(U,x)}, (U, x)) \cap xA_{n_{(U,x)}+1}$$

biçiminde tanımlı t nin 1-taktik olduğunu görelim. Keyfi bir

$$((U_0, x_0), t(U_0, x_0), (U_1, x_1), t(U_1, x_1), (U_2, x_2), t(U_2, x_2), (U_3, x_3), \dots)$$

karşılaşmasını alalım. Eğer $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olduğunu görürsek kanıt tamamlanacak.

İddia: Bu karşılaşmada $i \in \omega$ için $n_{(U_i, x_i)} < n_{(U_{i+1}, x_{i+1})}$ olur.

İddianın kanıtı: Her $i \in \omega$ için bu karşılaşmada

$$\dots, (U_i, x_i), t(U_i, x_i) = \sigma(n_{(U_i, x_i)}, (U_i, x_i)) \cap x_i A_{n_{(U_i, x_i)}+1}, (U_{i+1}, x_{i+1}), \dots$$

olduğundan ve $B^{(U_{i+1}, x_{i+1})}$ tanımından $x_{i+1} B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \subseteq U_{i+1} \subseteq x_i A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ olur. Bu durumda $x_i^{-1} x_{i+1} B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \subseteq A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ elde edilir. $e \in B^{(U_{i+1}, x_{i+1})}$ olduğundan $x_i^{-1} x_{i+1} \in A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ olur. $A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ simetrik olduğundan $x_i^{-1} x_{i+1} \in A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ olması $(x_i^{-1} x_{i+1})^{-1} \in A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ olmasını da gerektirir. Böylece $(x_i^{-1} x_{i+1} B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \subseteq A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ olduğundan $B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \subseteq (x_i^{-1} x_{i+1})^{-1} A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ olup $B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \subseteq (x_i^{-1} x_{i+1})^{-1} A_{n_{(U_i, x_i)}+1} \subseteq A_{n_{(U_i, x_i)}+1} A_{n_{(U_i, x_i)}+1} \subseteq A_{n_{(U_i, x_i)}}$ elde edilir. Böylece $B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \subseteq A_{n_{(U_i, x_i)}}$ olur. $\{A_i : i \in \omega\}$ ailesi içerme bağıntısına göre azalan olduğundan $n_{(U_i, x_i)} > 0$ iken $B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \subseteq A_{n_{(U_i, x_i)}} \subseteq A_{n_{(U_i, x_i)}-1} \subseteq \dots \subseteq A_0$ elde ederiz. Bu durumda $j \in \{i \in \omega : B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \not\subseteq A_i\}$ ise $j > n_{(U_i, x_i)}$ olmalıdır. Yani $n_{(U_i, x_i)} < \min\{i \in \omega : B^{(U_{i+1}, x_{i+1})} \not\subseteq A_i\}$ dir. Böylece $n_{(U_i, x_i)} < n_{(U_{i+1}, x_{i+1})}$ olur. Bu durumda iddianın kanıtı tamamlanmıştır.

İddia gereği, eğer $n_{(U_i, x_i)} = a_i$ dersek kesin artan (a_i) doğal sayı dizisini elde ederiz. $t(U_i, x_i) = \sigma(n_{(U_i, x_i)}, (U_i, x_i)) \cap x_i A_{n_{(U_i, x_i)}+1}$ olduğundan bu karşılaşmayı aşağıdaki gibi tekrar yazabiliriz.

$$((U_0, x_0), \sigma(a_0, (U_0, x_0)) \cap x_0 A_{a_0+1}, (U_1, x_1), \sigma(a_1, (U_1, x_1)) \cap x_1 A_{a_1+1}, (U_2, x_2), \sigma(a_2, (U_2, x_2$$

$$)) \cap x_2 A_{a_2+1}, (U_3, x_3), \dots).$$

Böylece bu karşılaşmada $U_0 \supseteq \sigma(a_0, (U_0, x_0)) \supseteq U_1 \supseteq \sigma(a_1, (U_1, x_1)) \supseteq U_2 \supseteq \dots$ ve $x_i \in \sigma(a_i, (U_i, x_i)) \subseteq U_i$ olduğundan

$$((U_0, x_0), \sigma(a_0, (U_0, x_0)), (U_1, x_1), \sigma(a_1, (U_1, x_1)), (U_2, x_2), \sigma(a_2, (U_2, x_2)), (U_3, x_3), \dots)$$

karşılaşması oluşur. Burada Lemma 4.2.8'den $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ olur. $\square$

5.1.9. Önerme

X bir topolojik uzay olsun. Eğer $\Delta \subseteq \bigcap \mathcal{O}$ ve $(\bigcap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ olacak biçimde sayılabilir bir $\mathcal{O} \subseteq \tau(X \times X)$ ailesi varsa X uzayının açık örtülerinin öyle bir $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ dizisi vardır ki her $i \in \omega$ için U_i kümesi $\mathcal{U}_i$ ailesinden rasgele seçilen bir eleman olmak üzere $(\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ = \emptyset$ olur.

Kanıt

$\mathcal{O} = \{O_i : i \in \omega\}$ diyelim. Her $i \in \omega$ ve her $x \in X$ için $\Delta \subseteq O_i$ olduğundan $(x, x) \in V_{x,i} \times V_{x,i} \subseteq O_i$ olan X in bir $V_{x,i}$ açığını seçebiliriz. $i \in \omega$ için $\mathcal{U}_i = \{V_{x,i} : x \in X\}$ biçiminde tanımlayalım. Burada her $x \in X$ için $x \in V_{x,i}$ olduğundan $X = \bigcup \mathcal{U}_i$ olur. Böylece X uzayının açık örtülerinin bir $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ dizisini elde ederiz. Her $i \in \omega$ için $U_i \in \mathcal{U}_i$ olmak üzere $(\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ = \emptyset$ olduğunu göreceğiz. Aksini varsayalım: $(\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ \neq \emptyset$ olsun. Herhangi bir $x \in (\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ$ alalım. O zaman bir $A \in \tau^*(X)$ vardır ve $x \in A \subseteq \bigcap_{i < \omega} U_i$ olur. Böylece, her $i \in \omega$ için $(x, x) \in A \times A \subseteq U_i \times U_i \subseteq O_i$ olup $(x, x) \in A \times A \subseteq \bigcap_{i < \omega} O_i$ elde edilir. Yani $(\bigcap \mathcal{O})^\circ \neq \emptyset$ olur. Bu bir çelişkidir. Bu çelişkiden varsayım yanlış olup her $U_i \in \mathcal{U}_i$ için $(\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ = \emptyset$ dir. $\square$

Aşağıdaki sonuç Önerme 5.1.3 ve Önerme 5.1.9 önermelerinin topolojik gruplarda bir sonucudur.

5.1.10. Sonuç

Herhangi bir G topolojik grubu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

1. G grubunun P-noktası yoktur;
2. $e \in G$ bir P-nokta değildir;
3. $e \in G$ bir zayıf P-nokta değildir;
4. G grubunun zayıf P-noktası yoktur;
5. $G \times G$ uzayının $\Delta \subseteq G \times G$ köşegenini içeren açıkklarının $(\bigcap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ olacak biçimde sayılabilir bir $\mathcal{O}$ ailesi vardır;
6. G nin $\Delta \subseteq G \times G$ köşegenini içeren açıkklarının $(\bigcap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ veya $\bigcap \mathcal{O} \notin \tau(G \times G)$ olacak biçimde sayılabilir bir $\mathcal{O}$ ailesi vardır;
7. G nin açık örtülerinin bir $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ dizisi var ve her $i \in \omega$ için $U_i \in \mathcal{U}_i$ olmak üzere $(\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ = \emptyset$ olur;
8. G nin açık örtülerinin bir $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ dizisi var ve her $i \in \omega$ için $U_i \in \mathcal{U}_i$ olmak üzere $(\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ = \emptyset$ olur veya $\bigcap_{i < \omega} U_i \notin \tau(G)$ dir.

Kanıt

$(1 \Leftrightarrow 2)$, $(2 \Leftrightarrow 3)$ ve $(3 \Leftrightarrow 4)$ Önerme 5.1.3 ve Uyarı 5.1.4 gereğidir.

$(5 \Rightarrow 4)$: $\mathcal{O} = \{O_i : i \in \omega\}$ diyelim. Her $x \in G$ ve her $i \in \omega$ için $(x, x) \in A_i^x \times A_i^x \subseteq O_i$ olan bir $A_i^x \in \tau(G)$ seçebiliriz. $\mathcal{A}_x = \{A_i^x : i \in \omega\}$ diyelim.

Şimdi $(\bigcap \mathcal{A}_x)^\circ = (\bigcap_{i < \omega} A_i^x)^\circ \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O halde bir $y \in (\bigcap_{i < \omega} A_i^x)^\circ$ vardır. Bu durumda bir $U \in \tau^*(G)$ için $y \in U \subseteq \bigcap_{i < \omega} A_i^x$ olur. Buradan her $i \in \omega$ için $(y, y) \in U \times U \subseteq A_i^x \times A_i^x \subseteq O_i$ olup $(y, y) \in U \times U \subseteq \bigcap_{i \in \omega} O_i = \bigcap \mathcal{O}$ yani $(y, y) \in (\bigcap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkidenden varsayım yanlış olup G nin zayıf P-noktası yoktur.

$(4 \Rightarrow 5)$: e bir zayıf P-nokta olmadığından e nin açık komşuluklarından oluşan bir $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \omega\}$ ailesi vardır ve $(\bigcap \mathcal{U})^\circ = \emptyset$ dir. Her $i \in \omega$ için $O_i = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in U_i\}$ olsun.

Bu $\mathcal{O} = \{O_i : i \in \omega\}$ ailesinin aradığımız aile olduğunu göreceğiz. Her $i \in \omega$ ve her $x \in G$ için $xx^{-1} = e \in U_i$ olduğundan $(x, x) \in O_i$ olup $\Delta \subseteq O_i$ dir. $f : G \times G \rightarrow G$, $f(x, y) = x^{-1}y$ fonksiyonu sürekli ([25]) ve her $i \in \omega$ için $O_i = f^{-1}[U_i]$ olduğundan $O_i \in \tau(G \times G)$ olur. Son olarak $(\bigcap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ olduğunu görelim. Bir $(x, y) \in ((\bigcap \mathcal{O})^\circ)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $A, B \in \tau^*(G)$ olmak üzere $(x, y) \in A \times B \subseteq \bigcap \mathcal{O}$ olur. Böylece her $i \in \omega$ için $(x, y) \in A \times B \subseteq O_i$ olur. Bu durumda her $i \in \omega$ için $A^{-1}B \subseteq U_i$ elde edilir. Böylece $\emptyset \neq A^{-1}B \subseteq \bigcap_{i < \omega} U_i$ olur. $A^{-1}B \neq \emptyset$ açık olduğundan $\emptyset \neq (\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ = (\bigcap \mathcal{U})^\circ$ olur. Bu bir çelişki olup $(\bigcap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ dir.

(5 $\Rightarrow$ 6) ve (7 $\Rightarrow$ 8) açıktır. Önerme 5.1.9'dan (5 $\Rightarrow$ 7) elde edilir. Kanıtı tamamlamak için (6 $\Rightarrow$ 2) ve (8 $\Rightarrow$ 2) olduğunu göreceğiz.

(6 $\Rightarrow$ 2): $\mathcal{O} = \{O_i : i \in \omega\}$ diyelim. $(\bigcap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ olduğunu varsayalım. (5 $\Rightarrow$ 4) ve (4 $\Leftrightarrow$ 2) gereği e bir P-nokta değildir. Yani $(\bigcap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ durumunda (6 $\Rightarrow$ 2) elde edilir.

$(\bigcap \mathcal{O})^\circ \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda hipotez gereği $\bigcap \mathcal{O} \notin \tau(G \times G)$ olduğundan $x, y \in G$ noktaları var olup $(x, y) \in \bigcap \mathcal{O}$ ve $(x, y) \notin (\bigcap \mathcal{O})^\circ$ dir. Böylece $(x, y) \in \bigcap \mathcal{O}$ olduğundan her $i \in \omega$ için $(x, y) \in A_i^x \times A_i^y \subseteq O_i$ olacak biçimde $A_i^x, A_i^y \in \tau(G)$ açıkları vardır. Şimdi $x \in (\bigcap_{i < \omega} A_i^x)^\circ$ ve $y \in (\bigcap_{i < \omega} A_i^y)^\circ$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $i \in \omega$ için $(x, y) \in (\bigcap_{i < \omega} A_i^x)^\circ \times (\bigcap_{i < \omega} A_i^y)^\circ \subseteq O_i$ olup $(x, y) \in (\bigcap_{i < \omega} A_i^x)^\circ \times (\bigcap_{i < \omega} A_i^y)^\circ \subseteq \bigcap \mathcal{O}$ ve $(\bigcap_{i < \omega} A_i^x)^\circ \times (\bigcap_{i < \omega} A_i^y)^\circ \in \tau^*(G \times G)$ olduğundan $(x, y) \in (\bigcap \mathcal{O})^\circ$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkidenden varsayım yanlış olup $x \notin (\bigcap_{i < \omega} A_i^x)^\circ$ veya $y \notin (\bigcap_{i < \omega} A_i^y)^\circ$ dir. Yani G nin en az bir noktası P-nokta değildir. Bu durumda Uyarı 5.1.4'ten $e \in G$ noktası P-nokta değildir.

(8 $\Rightarrow$ 2): Her $i \in \omega$ için $\mathcal{U}_i$ ailesi G nin bir açık örtüsü olduğundan $e \in U_i^e$ olacak biçimde bir $U_i^e \in \mathcal{U}_i$ vardır. Eğer $(\bigcap_{i < \omega} U_i^e)^\circ = \emptyset$ ise e bir zayıf P-nokta değildir. Böylece e bir P-nokta değildir. Eğer $\bigcap_{i < \omega} U_i^e \notin \tau(G)$ ise bir $x \in \bigcap_{i < \omega} U_i^e$ noktası vardır ve $x \notin (\bigcap_{i < \omega} U_i^e)^\circ$ olur. Bu durumda x bir P-nokta değildir. Uyarı 5.1.4'ten e bir P-nokta değildir. $\square$

5.1.11. Teorem

X bir topolojik uzay olmak üzere X in açık örtülerinin bir $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ dizisi var ve her $i \in \omega$ için $U_i \in \mathcal{U}_i$ olmak üzere $(\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ = \emptyset$ olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda

k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k taktiği vardır.

Kanıt

Her $i \in \omega$ için $\mathcal{U}_i$ bir örtü olduğundan her $x \in X$ için $x \in U_i^x$ olacak biçimde bir $U_i^x \in \mathcal{U}_i$ vardır. Hipotezden $(\bigcap_{i < \omega} U_i^x)^\circ = \emptyset$ olduğundan X uzayının zayıf P-noktası yoktur. Teorem 5.1.5'ten $k \geq 2$ iken kanıt tamamlanmış olur. Şimdi $k = 1$ durumunu düşünelim. σ , Lemma 4.2.8'deki koşulları sağlayan Markov stratejisi olsun. Yukarıda tanımlanan U_i^x lerden oluşan bir $\mathcal{A}'_x = \{U_i^x : i \in \omega\}$ ailesini alalım. Eğer $x \in X$ ve $i \in \omega$ iken $A_i^x = \bigcap_{j \leq i} U_j^x$ olarak tanımlarsak içerme bağıntısına göre azalan $\mathcal{A}_x = \{A_i^x : i \in \omega\}$ ailesini elde ederiz ve her $j \leq i$ için $U_j^x \in \mathcal{U}_j$ iken $A_i^x \subseteq U_j^x$ olur.

Şimdi bir 1-taktik tanımlamak için $x \in O \in \tau^*(X)$ olan (O, x) ikilisini alalım.

$\{i \in \omega : \forall U \in \mathcal{U}_i, O \not\subseteq U\} \neq \emptyset$ dir. Çünkü $\{i \in \omega : \forall U \in \mathcal{U}_i, O \not\subseteq U\} = \emptyset$ olsa her $i \in \omega$ için en az bir $U_i \in \mathcal{U}_i$ var olup $O \subseteq U_i$ olması gerekir. Bu ise $O \subseteq \bigcap_{i < \omega} U_i$ olup O açık olduğundan $\emptyset \neq O \subseteq (\bigcap_{i < \omega} U_i)^\circ = \emptyset$ çelişkisini doğurur.

Bu durumda $\{i \in \omega : \forall U \in \mathcal{U}_i, O \not\subseteq U\} \neq \emptyset$ olduğundan $n_O = \min\{i \in \omega : \forall U \in \mathcal{U}_i, O \not\subseteq U\}$ vardır. $t(O, x) = \sigma(n_O, (O, x)) \cap A_{n_O}^x$ olarak tanımlayalım. t stratejisinin 1-taktik olduğunu görmek için DOLUCU'nun t ile oynadığı herhangi bir karşılaşmayı

$$((O_0, x_0), t(O_0, x_0), (O_1, x_1), t(O_1, x_1), (O_2, x_2), t(O_2, x_2), \dots).$$

biçiminde alalım. Kanıtı tamamlamak için $\bigcap_{m < \omega} O_m \neq \emptyset$ olduğunu görmeliyiz.

Bu karşılaşmada herhangi bir $m \in \omega$ için $O_{m+1} \subseteq t(O_m, x_m) = \sigma(n_{O_m}, (O_m, x_m)) \cap A_{n_{O_m}}^{x_m} \subseteq A_{n_{O_m}}^{x_m}$ dir. Böylece $O_{m+1} \subseteq A_{n_{O_m}}^{x_m}$ olur. Bu durumda her $j \leq n_{O_m}$ için $\mathcal{A}_{x_m}$ nin tanımı gereği $U_j^{x_m} \in \mathcal{U}_j$ iken $O_{m+1} \subseteq A_{n_{O_m}}^{x_m} \subseteq U_j^{x_m}$ olur. Yani $n_{O_m} < \min\{i \in \omega : \forall U \in \mathcal{U}_i, O_{m+1} \not\subseteq U\} = n_{O_{m+1}}$ olur. Böylece her $m \in \omega$ için $n_{O_m} < n_{O_{m+1}}$ olur. $n_{O_m} = a_m$ diyelim. O zaman (a_m) doğal sayıların kesin artan bir dizisi olur. Böylece $t(O_m, x_m) = \sigma(a_m, (O_m, x_m)) \cap A_{n_{O_m}}^{x_m}$ tanımını kullanarak yukarıdaki karşılaşmayı şöyle yazabiliriz:

$$((O_0, x_0), \sigma(a_0, (O_0, x_0)) \cap A_{n_{O_0}}^{x_0}, (O_1, x_1), \sigma(a_1, (O_1, x_1)) \cap A_{n_{O_1}}^{x_1}, (O_2, x_2), \sigma(a_2, (O_2, x_2)) \cap$$

$$A_{n_{O_2}}^{x_2}, \dots).$$

Böylece $Ch(X)$ oyununda

$$((O_0, x_0), \sigma(a_0, (O_0, x_0)), (O_1, x_1), \sigma(a_1, (O_1, x_1)), (O_2, x_2), \sigma(a_2, (O_2, x_2)), \dots)$$

karşılaşmasını elde ederiz. Lemma 4.2.8'den $\bigcap_{m < \omega} U_m \neq \emptyset$ olur. $\square$

Teorem 5.1.11 ve Önerme 5.1.9'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.1.12. Sonuç

X bir topolojik uzay olsun. $X \times X$ çarpım uzayının Δ yı içeren açıklarından oluşan sayılabilir bir $\mathcal{O}$ ailesi $(\cap \mathcal{O})^\circ = \emptyset$ biçiminde var olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği vardır.

5.2. Bu Konu ile İlgili Açık Sorular

5.2.1. Soru

X her noktası zayıf P-nokta olan bir topolojik uzay olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği var mıdır?

Aşağıdaki soru Teorem 5.1.5 ile ilişkilidir.

5.2.2. Soru

X zayıf P-noktası olmayan bir topolojik uzay olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda 1-taktiği var mıdır?

6. OYUN BOYUT FONKSİYONLARI

Boyut teorisi ([26]) ve topolojik oyunlar ([1], [27]) genel topolojinin önemli iki dalıdır. Topolojik oyunlar ile topolojik uzayların boyutları arasındaki bazı ilişkiler, ayrılabilir metrik uzaylar için [28] de, topolojik gruplar için [29] da incelenmiştir. Biz burada bazı sonlu topolojik oyunlar tanımlayarak, oyun boyutları olarak adlandırdığımız bir takım boyut fonksiyonları elde edeceğiz. Bu fonksiyonların bazı özelliklerini inceleyeceğiz ve boyut teorisinin temel kavramlarından olan *Ind* ve *ind* fonksiyonlarını oyun boyutları ile karakterize edeceğiz.

Bu bölümde yapılanlar yayınlanmıştır [30].

6.1. Bu Bölüm İçin Gerekli Ön Bilgiler

Aşağıdaki tanım iyi bilinir.

6.1.1. Tanım

A ve B , X topolojik uzayının boştan farklı kesişmeyen alt kümeleri olsunlar. Eğer $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olan X in U ve V açıkları varsa $L = X - (U \cup V)$ kümesine A ile B arasında bir *ayraç* (*partition*) denir [26]. $\square$

6.1.2. Uyarı

X bir topolojik uzay $Y \subseteq X$ kapalı bir alt uzay olsun. Bu takdirde $A, B \subseteq Y$, Y altuzayının kesişmeyen kapalı alt kümeleri iken eğer L , A ile B arasında X uzayında bir ayraç ise $L \cap Y$ kümesi de Y alt uzayında A ile B arasında bir ayraç olur. Şöyle ki, kapalı alt uzayın kapalı alt kümesi üst uzayda kapalı ([14]) olduğundan A ve B kümeleri X uzayının kesişmeyen kapalı alt kümeleri olur. Şimdi $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olan X in U ve V açıkları için $L = X - (U \cup V)$, A ile B arasında ayraç olsun. Bu durumda $A \subseteq U \cap Y$ ve $B \subseteq V \cap Y$ olup Y uzayında $U \cap Y$ ve $V \cap Y$ açık olduklarında $Y \cap ((U \cap Y) \cup (V \cap Y))^c$ kümesi Y alt uzayında A ile B arasında ayraçtır. O halde $Y \cap ((U \cap Y) \cup (V \cap Y))^c = Y \cap ((U^c \cap V^c) \cup Y^c) = (U \cup V)^c \cap Y = L \cap Y$ olduğundan $L \cap Y$, Y alt uzayında A ile B arasında bir ayraç olur.

Aşağıdaki boyut tanımı *Menger-Urysohn boyutu* olarak da isimlendirilir ve [26] numaralı kaynakta bulunabilir.

6.1.3. Tanım

Herhangi bir X regüler uzayını $\{\infty, -1\} \cup \omega$ kümesinden bir elemanla eşleyen ve tümevarım kullanılarak aşağıdaki biçimde tanımlanan fonksiyona *küçük tümevarımsal boyut* (*small inductive dimension*) denir ve ind ile gösterilir.

- 1) $indX = -1$ olması için gerek ve yeter koşul $X = \emptyset$ olmasıdır;
- 2) $n \in \omega$ olmak üzere, $indX \leq n$ olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $x \in X$ ve x in herhangi bir U açık komşuluğu için V^s , V nin sınırı olmak üzere $indV^s \leq n - 1$ olan x in bir V açık komşuluğunun bulunmasıdır;
- 3) Eğer bir X uzayı için $n \in \omega$ iken $indX \leq n$ ve $indX \not\leq n - 1$ ise $indX = n$ yazılır;
- 4) Eğer bir X uzayı her bir $n \in \omega$ için $indX > n$ oluyorsa $indX = \infty$ yazılır. $\square$

Aşağıdaki boyut tanımı *Brouwer-Čech boyutu* olarak da isimlendirilir ve [26] da bulunabilir.

6.1.4. Tanım

Herhangi bir normal X uzayını $\{\infty, -1\} \cup \omega$ kümesinden bir elemanla eşleyen ve tümevarım kullanılarak aşağıdaki biçimde tanımlanan fonksiyona *geniş tümevarımsal boyut* (*large inductive dimension*) denir ve Ind ile gösterilir.

- 1) $IndX = -1$ olması için gerek ve yeter koşul $X = \emptyset$ olmasıdır;
- 2) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $IndX \leq n$ olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir kapalı $A \subseteq X$ alt kümesi ve $A \subseteq U$ olan U açığı için $A \subseteq V \subseteq U$ ve $IndV^s \leq n - 1$ olan X in bir V açık alt kümesinin bulunmasıdır;
- 3) $IndX = n$ ve $indX = \infty$ tanımları ind tanımındaki gibidir. $\square$

6.1.5. Tanım

Herhangi bir normal X uzayı ve $n \in \{-1\} \cup \omega$ verilsin. $\dim X \leq n$ olması için gerek ve yeter koşul X uzayının herhangi bir sonlu $\mathcal{U}$ açık örtüsü verildiğinde " $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{V} (|\mathcal{A}| \geq n+2 \rightarrow \bigcap \mathcal{A} = \emptyset)$ " koşulunu sağlayan $\mathcal{U}$ nun bir $\mathcal{V}$ açık incelişinin bulunmasıdır.

ind tanımındaki gibi $\dim X = n$ ve $\dim X = \infty$ tanımları yapılır. $\square$

Yukarıdaki boyut tanımı *Čech-Lebesgue boyutu* olarak da isimlendirilir ve [26] da bulunabilir.

Kabaca söyleyebiliriz ki bir topolojik uzayın boyutunu belirlemek için bu üç tanımdan birisi kullanılır. X ayrılabilir metrik uzay iken $\dim X = \text{Ind} X = \text{ind} X$ olur [26]. Özel olarak $X = \mathbb{R}^n$ için $\dim \mathbb{R}^n = \text{Ind} \mathbb{R}^n = \text{ind} \mathbb{R}^n = n$ olur [26]. X herhangi bir topolojik uzay iken X uzayının $\dim$, Ind veya ind anlamında boyutları aynı olmayabilir. Kabaca, boyut teorisi topolojik uzaylarda bu üç boyut tanımı arasındaki ilişkileri inceler diyebiliriz.

Şimdi bu bölümün devamında vereceğimiz tanım ve teoremlerin kaynağı olan fikirden biraz bahsedelim. X bir normal uzay iken $\dim X \leq n \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul X in kapalı ve kesişmeyen alt kümelerinin (A, B) ikililerinden oluşan keyfi sonlu bir $((A_0, B_0), (A_1, B_1), \dots, (A_n, B_n))$ dizisi verildiğinde L_i , A_i ile B_i arasında ayraç olmak üzere $L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_n = \emptyset$ olan $L_0, L_1, \dots, L_n$ ayraçlarının bulunmasıdır (Teorem 3.2.6, [26]). Örneğin, $\dim X = 1$ olan keyfi bir X topolojik uzayı alalım. Bu teorem gereği X in kesişmeyen kapalılarından oluşan $((A_0, B_0), (A_1, B_1))$ dizisi verildiğinde $L_0 \cap L_1 = \emptyset$ olan L_0 ve L_1 ayraçlarını bulabiliriz. Şimdi bu X uzayında kesişmeyen kapalı alt kümelerden oluşan (A_0, B_0) ikilisi verilsin. A_0 ve B_0 arasında bir L_0 ayracını $((A_1, B_1))$ ikilisini görmeksizin) seçmek zorunda olalım. Biz L_0 ayracını seçtikten sonra X uzayının kesişmeye kapalılarından oluşan (A_1, B_1) ikilisi verilsin. Soru: Şimdi biz yine $L_0 \cap L_1 = \emptyset$ olan A_1 ile B_1 arasında bir L_1 ayracı bulabilir miyiz? Yukarıdaki teorem bu soruya evet cevabını vermemiz için yeterli değildir. Eğer böyle bir L_1 bulabiliyorsak X uzayının ayraç oyun boyutu en fazla 1 diyeceğiz ve $\text{ab} X \leq 1$ yazacağız. Aşağıda ayraç oyunu olarak isimlendirdiğimiz bir oyun tanımlayarak ab boyut tanımını elde edeceğiz. Ayrılabilir metrik uzaylarda ab ile bilinen oyun boyut fonksiyonlarının çakıştığını göreceğiz. X normal uzay iken $\text{ab} X \geq \text{Ind} X$ olduğunu ve X kalıtsal normal uzay (her alt uzayı normal olan uzaylara kalıtsal normal

uzay denir) iken $abX = IndX$ olduğunu göreceğiz. Bu oyun boyut fonksiyonu üzerinde bazı değişiklikler yaparak Ind ve ind fonksiyonlarını normal uzaylarda karakterize eden oyun boyut fonksiyonları bulacağız.

6.2. Oyunlar

6.2.1. Tanım

İki oyuncu ve bir normal X uzayımız olsun. I ile birinci oyuncuyu II ile ikinci oyuncuyu gösterelim. I, bileşenleri X uzayının kesişmeyen kapalı alt kümelerinden oluşan (A_0, B_0) ikilisini seçerek oyunu başlatır. II, A_0 ile B_0 arasında bir L_0 ayracını seçerek hamle yapar. Böylece $((A_0, B_0), L_0)$ sonlu dizisi oluşur ve birinci raunt tamamlanır. Bu sonlu diziye *0-dereceli karşılaşma* diyelim. Eğer $L_0 = \emptyset$ ise bu 0-dereceli karşılaşmayı II kazanmıştır, aksi halde I kazanmıştır diyeceğiz. İkinci rauntta; I, bileşenleri X uzayının kesişmeyen kapalı alt kümelerinden oluşan (A_1, B_1) ikilisini oynayarak hamle yapar. II, A_1 ile B_1 arasında bir L_1 ayracını seçerek hamle yapar. Böylece 1-dereceli karşılaşma olarak adlandırdığımız $((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1)$ sonlu dizisi oluşur. Eğer $L_0 \cap L_1 = \emptyset$ ise bu 1-dereceli karşılaşmayı II kazandı aksi halde I kazandı diyeceğiz. 3. ve diğer rauntlar benzer biçimde oynanır. Özetle, $((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1), \dots, (A_n, B_n), L_n)$ sonlu dizisi herhangi n doğal sayısı için oluşur. Eğer $L_0 \cap \dots \cap L_n = \emptyset$ ise bu n-dereceli karşılaşmayı II kazanır aksi halde I kazanır. Açıkça II eğer bir n-dereceli karşılaşmayı kazanmışsa artık bu karşılaşma devam ettiği her durumda kazanır. Bu biçimdeki n-dereceli karşılaşmalardan oluşan aileye X üzerindeki *ayraç oyunu* diyelim ve bu oyunu $ao(X)$ ile gösterelim. $\square$

6.2.2. Önerme

$ao(X)$ oyununda $((A_0, B_0), L_0, \dots, L_{i-1})$ herhangi bir karşılaşma olsun. Eğer I, (A_i, B_i) hamlesini aşağıdakia a ve b den en az birini sağlayacak biçimde yaparsa, o zaman II bu karşılaşmayı kazanır, yani $L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_i = \emptyset$ olan II' nin bir L_i hamlesi vardır.

a) $A_i \cap (L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_{i-1}) = \emptyset$ veya $B_i \cap (L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_{i-1}) = \emptyset$.

b) $A_i \subseteq \bigcup_{j < i} (A_j \cup B_j)$ veya $B_i \subseteq \bigcup_{j < i} A_j \cup B_j$.

Kanıt

Genelliği bozmadan $A_i \cap (L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_{i-1}) = \emptyset$ veya $A_i \subseteq \bigcup_{j < i} (A_j \cup B_j)$ diyelim.

Eğer $A_i \cap (L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_{i-1}) = \emptyset$ ise $L^* = L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_{i-1}$ ve $B^* = L^* \cup B_i$ diyelim. X normal olduğundan B^* ile A_i arasında bir L ayracı vardır. Bu durumda $L \cap B^* = \emptyset$ olur. $L_i = L$ dersek, $L^* \subseteq B^*$ olduğundan $L_i \cap L^* = \emptyset$ yani $L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_{i-1} \cap L_i = \emptyset$ olur. Böylece bu karşılaşmayı II kazanır.

Eğer $A_i \subseteq \bigcup_{j < i} A_j \cup B_j$ ise $A_i \cap (L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_{i-1}) = \emptyset$ olur ve yukarıda yapılanlar bu durum için de geçerlidir. $\square$

6.2.3. Uyarı

Eğer $ao(X)$ oyununda (A, B) ikilisi I'in bir hamlesi ise $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olmalı ve (A, B) yukarıdaki önermenin koşullarını sağlamamalıdır. Aksi halde II kazanır. Bundan dolayı, genelliği bozmadan bu çalışma boyunca I'in oyunu kazanmak istediğini varsayarak (A, B) ikilisi I'in bir hamlesi iken $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olduğunu ve (A, B) ikilinin yukarıdaki önermedeki a ve b koşullarını sağlamadığını varsayacağız. $\square$

Bu önerme bize eğer I kazanmak istiyorsa hamlesini bazı koşullar altında yapması gerektiğini söylüyor. Yani $ao(X)$ oyununda I üzerinde bazı doğal kısıtlamalar var. Bu kısıtlamaların oluşu bizi aşağıdaki tanımları yapmaya yönlendirdi.

6.2.4. Tanım

$ao(X)$ oyununun kurallarında değişiklikler yaparak aşağıdaki oyunu elde ediyoruz. $((A_0, B_0), L_0)$ aynı $ao(X)$ oyunundaki gibi olacak. $i > 0$ iken I, (A_i, B_i) hamlesini $A_i, B_i \subseteq L_{i-1}$ koşuluyla ve II, L_i hamlesini L_{i-1} alt uzayında A_i ile B_i arasında ayraç olması koşuluyla yapacak. Böyle tanımlanan yeni oyuna X üzerinde kısıtlanmış ayraç oyunu diyeceğiz ve $kao(X)$ ile göstereceğiz.

Aşağıda tanımladığımız oyunla ind fonksiyonunu karakterize edeceğiz.

6.2.5. Tanım

kao(X) oyununa I, her bir (A_i, B_i) hamlesini $A_i = \{x_i\}$ biçiminde tek noktadan oluşan bir küme şeklinde yapar" koşulu getirilerek elde ettiğimiz oyuna X üzerindeki noktalı ayraç oyunu diyeceğiz ve $nao(X)$ ile göstereceğiz.

Yukarıdaki oyunlarda kazanma stratejisi tanımı

Önceki bölümlerde bir oyuncu için kazanma stratejinin ne olduğundan bahsedildi. Bu oyunlarda da kazanma stratejisi tanımı benzerdir. Okuyucuya kolaylık olması için yine de açıkça yazacağız. $ao(X)$ oyununda II, için bir kazanma stratejisi tanım kümesi $((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1, \dots, (A_m, B_m))$ biçiminde $ao(X)$ oyununun legal hamlelerinden oluşan sonlu diziler ailesi iken değer kümesi II için legal bir hamle olan L_m ayraçlarından oluşan kümedir ve II bu strateji ile oynadığında her karşılaşmayı kazanır.

Örneğin, II için $ao(X)$ oyununda σ , n-dereceli karşılaşmaları kazanacak bir strateji olsun. σ ile II oynasın, o zaman bir karşılaşma; $((A_0, B_0), \sigma(A_0, B_0) = L_0, (A_1, B_1), \sigma((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1)) = L_1), \dots, (A_n, B_n), \sigma(\dots, (A_n, B_n)) = L_n)$ biçiminde olacak ve $L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_n = \emptyset$ olacaktır.

Eğer II'nin $ao(X)$ oyununda n-dereceli karşılaşmaları kazanacağı bir stratejisi varsa $m \geq n$ iken bu oyunda m -dereceli karşılaşmaları da kazanacağı açıktır (başlangıçtan n. raunda kadar bu strateji ile oynar sonra herhangi bir ayraç seçerek oynar).

Diğer oyunlar için de herhangi bir oyuncunun kazanma stratejisi benzer biçimde tanımlanır.

6.3. Oyun Boyut Fonksiyonları

6.3.1. Tanım

Tanım kümesi normal uzaylar sınıfı değer kümesi $\omega \cup \{-1, \infty\}$ olan ve aşağıdaki biçimde tanımlanan fonksiyona *ayraç oyun boyutu* denir ve ab ile gösterilir.

(1) $abX = -1$ olması için gerek ve yeter koşul $X = \emptyset$ olmasıdır;

(2) $abX \leq n$ olması için gerek ve yeter koşul II nin $ao(X)$ oyunundaki n -dereceli karşılaşmaları kazanacak stratejisinin var olmasıdır;

(3) $abX = n$ olması için gerek ve yeter koşul $abX \leq n$ ve $abX \not\leq n - 1$ olmasıdır;

(4) $abX = \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $abX \not\leq n$ (her $n \in \omega$ için) olmasıdır. $\square$

Sırasıyla kısıtlanmış ayraç oyunu ve noktalı ayraç oyunu kullanarak yukarıdaki tanıma benzer biçimde normal uzaylar için *kısıtlanmış ayraç oyun boyut fonksiyonu*, kab , ve regüler uzaylar için *noktalı ayraç oyun boyut fonksiyonu*, nab , tanımlanır.

6.4. Oyun Boyut Fonksiyonlarının Bazı Özellikleri

Aşağıdaki ilk iki önerme bilinen bir önermedir ve [26] da (sırasıyla, Proposition 1.6.2 ve Proposition 1.1.4) bulunabilir.

6.4.1. Önerme

X bir normal uzay ve $n \geq 0$ bir tam sayı olsun. $IndX \leq n$ olması için gerek ve yeter koşul X uzayının kesişmeyen kapalı A ve B alt kümeleri arasında $IndL \leq n - 1$ olan bir L ayracının bulunmasıdır [26]. $\square$

6.4.2. Önerme

X bir regüler uzay ve $n \geq 0$ bir tam sayı olsun. $indX \leq n$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve $x \notin B$ olan her kapalı $B \subseteq X$ alt kümesi için $\{x\}$ ile B arasında $indL \leq n - 1$ olan bir L ayracının bulunmasıdır [26]. $\square$

6.4.3. Teorem

X bir normal uzay olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir:

1) $kabX = 0$;

2) $abX = 0$;

3) $IndX = 0$;

4) $dimX = 0$.

Kanıt

$(IndX = 0 \Leftrightarrow dimX = 0)$ denkliği [26] da (Teorem 1.6.11) bulunabilir. $(kabX = 0 \Leftrightarrow abX = 0)$ ilgili oyunlar ilk rauntta aynı olduğundan elde edilir.

$(IndX = 0 \Rightarrow abX = 0)$: I, ilk hamlesini (A_0, B_0) yapsın. Önerme 6.4.1'den $IndL_0 = -1$ olan A_0 ile B_0 arasında bir L_0 ayracı vardır. Bu durumda Ind tanım gereği $L_0 = \emptyset$ olur. II için stratejiyi $\sigma((A_0, B_0)) = L_0$ olarak tanımlarsak II, $ao(X)$ oyununda 0-dereceli karşılaşmaları, $L_0 = \emptyset$ olacağından, kazanır. Böylece $abX \leq 0$ olur. $X \neq \emptyset$ olduğundan $abX = 0$ elde edilir.

$(abX = 0 \Rightarrow IndX = 0)$: II için $abX = 0$ yapacak bir σ stratejisi vardır. Herhangi kesişmeyen kapalı $A, B \subseteq X$ alt kümelerini alalım. $\sigma((A, B)) = L$ diyelim. $abX = 0$ olduğundan $L = \emptyset$ ve L, A ile B arasında bir ayraktır. Önerme 6.4.1'den ve $X \neq \emptyset$ olduğundan $IndX = 0$ olur. $\square$

6.4.4. Teorem

Eğer II'nin $ao(X)$ oyununda ($kao(X)$ oyununda) $n \geq 0$ iken n -dereceli karşılaşmaları kazanacağı bir σ stratejisi varsa keyfi $A, B \subseteq X$ kesişmeyen kapalı alt kümeleri için $\sigma(A, B) = L$, A ile B arasında $abL \leq n - 1$ ($kabL \leq n - 1$) olan bir ayraktır.

Diğer bir ifadeyle, eğer $abX = n \geq 0$ ($kabX = n \geq 0$) ise X topolojik uzayının verilen herhangi kesişmeyen kapalı A ve B alt kümeleri arasında $abL \leq n - 1$ ($kabL \leq n - 1$) olan bir L ayracı vardır.

Yukarıda A ile B üzerinde bir kısıtlama olmadığından bu teorem A (veya B) tek noktadan oluşan küme iken de, yani nab için de doğrudur.

Kanıt

$abL \leq n - 1$ olduğunu görmek için $ao(L)$ oyununda II için bir σ_L stratejisi tanımlayacağız.

Benzer biçimde, $kao(L)$ oyununda ve $nao(L)$ oyununda σ_L tanımlanarak $kabL \leq n-1$ ve $nabL \leq n-1$ olduğu görülebilir, tekrardan kaçınmak için bu kısmı yazmayacağız.

$ao(L)$ oyunundaki anlamlı hamlelerden oluşan $m \leq n$ iken bir

$$((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1, \dots, (A_m, B_m))$$

sonlu dizisi verilsin. $\sigma_L((A_0, B_0), L_0, \dots, (A_m, B_m)) = L_m$ yi aşağıdaki gibi tanımlayalım. Eğer $ao(X)$ oyunundaki anlamlı hamlelerden oluşan ve $m > i \geq 0$ iken $L'_i = \sigma(((A, B), L, (A_0, B_0), L'_0, \dots, (A_i, B_i)))$ ve $L_i = L \cap L'_i$ olacak biçimde bir $((A, B), L, (A_0, B_0), L'_0, (A_1, B_1), L'_1, \dots, (A_m, B_m))$ sonlu dizisi varsa $L_m = L \cap \sigma((A, B), L, (A_0, B_0), L'_0, \dots, (A_m, B_m))$ olarak tanımlayalım. Eğer yoksa L_m, A_m ile B_m arasında L alt uzayında keyfi bir ayraç olsun (bu durum baştan σ_L ile oynanan karşılaşmalarda gerçekleşmeyecek).

σ_L nin $abL \leq n-1$ yapan bir strateji olduğunu (herhangi bir karşılaşmayı baştan oyunculara oynatarak) görelim. Şimdi $ao(L)$ oyununda I ilk hamlesini (A_0, B_0) biçiminde yapsın. Bu durumda $L \subseteq X$ kapalı ve $A_0, B_0 \subseteq L_0$ olduğundan A_0 ve B_0 X uzayında da kapalı olur. Böylece $((A, B), L, (A_0, B_0))$ sonlu dizisi $oa(X)$ oyununda olup $\sigma((A, B), L, (A_0, B_0)) = L'_0$ için L'_0, A_0 ile B_0 arasında X uzayında bir ayraç olur. Uyarı 6.1.2'den $L \cap L'_0 = L_0$, L alt uzayında A_0 ile B_0 arasında ayraç olur. σ_L tanımı gereği II, $\sigma_L((A_0, B_0)) = L_0$ hamlesini yapar. Şimdi $ao(L)$ oyununda I, ikinci hamlesini (A_1, B_1) biçiminde yapsın. Bu durumda ilk raunttakine benzer gerekçeyle $((A, B), L, (A_0, B_0), L'_0, (A_1, B_1))$ sonlu dizisi $oa(X)$ oyununda olup $\sigma((A, B), L, (A_0, B_0), L'_0, (A_1, B_1)) = L'_1$ için L'_1, A_1 ile B_1 arasında X uzayında bir ayraç olur. Bu durumda $L \cap L'_1 = L_1$, L alt uzayında A_1 ile B_1 arasında ayraç olur. σ_L tanımı gereği $\sigma_L((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1)) = L_1$ biçiminde II oynar. Bu karşılaşma böyle devam ettiğinde $ao(L)$ oyununda

$$((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1, \dots, (A_{n-1}, B_{n-1}), L_{n-1})$$

karşılığı oluşurken $ao(X)$ oyununda

$$((A, B), L, (A_0, B_0), L'_0, (A_1, B_1), L'_1, \dots, (A_{n-1}, B_{n-1}), L'_{n-1})$$

karşılığı oluşur. Burada σ , $ao(X)$ oyununda II'nin $ab(X) \leq n$ yapan bir stratejisi

olduğundan $\emptyset = L \cap L'_0 \cap L'_1 \cap \dots \cap L'_{n-1}$ olur. Böylece $L_i = L \cap L'_i$ olduğundan $\emptyset = L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_{n-1}$ olur. Bu durumda bu karşılaşma keyfi olduğundan σ_L stratejisi Π için $ab(L) \leq n - 1$ yapan bir stratejidir. $\square$

Aşağıdaki teorem Ind fonksiyonunu kab ile karakterize eder.

6.4.5. Teorem

Herhangi bir X normal uzayı için $kabX = IndX$ olur.

Kanıt

$kabX = n$ olması için gerek ve yeter koşulun $IndX = n$ olduğunu göreceğiz. $n = -1$ için bu denklik açıktır. $n = 0$ durumu Teorem 6.4.3'ten açıktır.

$n > 0$ olsun. Tümevarım kullanarak her $n > 0$ ve her normal X uzayı için eğer $IndX = n$ ise $kabX \leq n$ ve eğer $kabX = n$ ise $IndX \leq n$ olduğunu göreceğiz. Bu görüldüğünde kanıt tamamlanmış olacaktır. Şimdi tümevarım hipotezi olarak $0 \leq k < n$ olan her k için yukarıdaki iddia doğru olsun. X bir normal uzay ve $IndX = n$ olsun. Π için bir σ stratejisini aşağıdaki gibi tanımlayalım. İlk rauntta X uzayının kesişmeyen kapalı A_0, B_0 alt kümeleri verilsin. Önerme 6.4.1'den A_0 ile B_0 arasında $IndL_0 \leq n - 1$ olan bir L_0 ayracı seçebiliriz. $\sigma((A_0, B_0)) = L_0$ diyelim. Tümevarım hipotezinden $IndL_0 \leq n - 1$ olduğundan $kao(L_0)$ oyununda Π 'nin $(n - 1)$ -dereceli karşılaşmaları kazanabileceği bir σ^* stratejisi vardır. $i > 0$ için $kao(X)$ oyunundaki hamlelerden oluşan bir sonlu $((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1, \dots, (A_i, B_i))$ dizisi verilsin. Kısıtlanmış ayraç oyunu tanımından bu dizide L_i hamlesini L_{i-1} alt uzayında A_i ile B_i arasında ayraç olduğundan $(A_1, B_1), L_1, \dots, (A_i, B_i)$ sonlu dizisi $kao(L_0)$ oyununda olur ve

$$\sigma^*((A_1, B_1), L_1, \dots, (A_i, B_i))$$

vardır. Böylece

$$\sigma((A_0, B_0), L_0, \dots, (A_i, B_i)) = \sigma^*((A_1, B_1), L_1, \dots, (A_i, B_i))$$

olarak tanımlanabilir.

Π 'nin $ka(X)$ oyununda σ ile oynadığı keyfi bir $((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1, (A_n, B_n), L_n)$ karşılaşmasını alalım. Burada $((A_1, B_1), L_1, (A_n, B_n), L_n)$ karşılaşması Π 'nin $ka(L_0)$ oyununda σ^* ile oynadığı karşılaşma olur ve $L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_n \subseteq L_1 \cap \dots \cap L_n = \emptyset$ olur. Böylece $kabX \leq n$ elde edilir.

X bir normal uzay ve $kabX = n$ olsun. O zaman $kabX = n$ olmasını sağlayan Π 'nin bir σ stratejisi vardır.

X uzayının kesişmeyen kapalı A ve B alt kümelerini alalım. Teorem 6.4.4'ten A ile B arasında $kabL \leq n - 1$ olan bir L ayracı vardır. Tümevarım hipoteziden $IndL \leq n - 1$ olur ve böylece Önerme 6.4.1'den $IndX \leq n$ olur. $\square$

Aşağıdaki teorem ind fonksiyonunu nab ile karakterize eder.

6.4.6. Teorem

Herhangi bir X regüler uzayı için $nabX = indX$.

Kanıt

$nabX = n$ olması için gerek ve yeter koşulun $indX = n$ olduğunu göreceğiz. $n = -1$ ve $n = 0$ durumu Teorem 6.4.5'in kanıtındaki gibi açıktır. $n > 0$ durumu yine Teorem 6.4.5'in kanıtındaki gibi Önerme 6.4.1 yerine Önerme 6.4.2 kullanılarak kanıtlanır. $\square$

Yukarıdaki iki teorem $Ind = kab$ ve $ind = nab$ olduğunu söylüyor. Böylece literatürde ind ve Ind ile ilgili sonuçlar nab ve kab ile de ilgili olur. Yani nab ve kab ile ilgili görece yeterli bilgi vardır. Bu bakımdan ab fonksiyonunu incelemek daha anlamlı olacaktır.

6.4.7. Teorem

X bir normal uzay, $Y \subseteq X$ kapalı alt uzay ise $abY \leq abX$ olur.

Kanıt

$abX = n$ olsun ve σ_X , II için $abX \leq n$ yapan strateji olsun. $ab(Y)$ oyunundaki anlamlı hamlelerden oluşan sonlu bir $((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1, \dots, (A_i, B_i))$ dizisi verilsin. Bu takdirde $\sigma_Y((A_0, B_0), L_0, (A_1, B_1), L_1, \dots, (A_i, B_i)) = L_i$ ayracını aşağıdaki gibi tanımlayalım. $j < n$ iken $L_j = Y \cap \sigma_X(\dots, (A_j, B_j))$ olan bir

$$((A_0, B_0), \sigma_X((A_0, B_0)), (A_1, B_1), \sigma_X(\dots, (A_1, B_1)) \dots, (A_i, B_i), \sigma_X(\dots, (A_i, B_i)))$$

karşılaşması $ab(X)$ oyununda varsa $L_i = Y \cap \sigma_X(\dots, (A_i, B_i))$ olarak tanımlansın. Eğer yoksa (bu durum II'nin σ_Y ile baştan oynadığı herhangi bir karşılaşmada gerçekleşmeyecek) Y alt uzayında L_i, A_i ile B_i arasında herhangi bir ayraç olsun.

σ_Y nin $abY \leq n$ yapan bir strateji olduğunu görelim. Şimdi $ao(Y)$ oyununda I ilk hamlesini (A_0, B_0) biçiminde yapsın. $Y \subseteq X$ kapalı olduğundan $((A_0, B_0))$ sonlu dizisi $oa(X)$ oyununda olup $((A_0, B_0), \sigma_X((A_0, B_0)))$ 0-dereceli karşılaşması $ao(X)$ oyununda oluşur. Bu durumda Uyarı 6.1.2'den $Y \cap \sigma_X((A_0, B_0))$, A_0 ile B_0 arasında Y uzayında bir ayraç olur ve $ao(Y)$ oyununda σ_Y tanımından II, $\sigma_Y((A_0, B_0)) = Y \cap \sigma_X((A_0, B_0))$ hamlesini yapar. Böylece ilk raunt tamamlanır. Bu durumda $ao(Y)$ oyununda $((A_0, B_0), Y \cap \sigma_X((A_0, B_0)))$ karşılaşması oluşurken $ao(X)$ oyununda $((A_0, B_0), \sigma_X((A_0, B_0)))$ karşılaşması oluşur. Şimdi I, $ao(Y)$ oyununda ikinci hamlesini (A_1, B_1) biçiminde yapsın. İlk raunttaki gibi $((A_0, B_0), \sigma_X((A_0, B_0))), (A_1, B_1)$ sonlu dizisi $oa(X)$ oyununda olup

$$((A_0, B_0), \sigma_X((A_0, B_0)), (A_1, B_1), \sigma(\dots, (A_1, B_1)))$$

1-dereceli karşılaşması $ao(X)$ oyununda oluşur. Bu durumda ilk raunttakine benzer gerekçeyle $ao(Y)$ oyununda II, $\sigma_Y(\dots, (A_1, B_1)) = Y \cap \sigma_X(\dots, (A_1, B_1))$ hamlesini yapar ve oyun böyle devam eder. Bu durumda, oyun böyle devam ettiğinde n için, $ao(Y)$ oyununda

$$((A_0, B_0), Y \cap \sigma_X((A_0, B_0)), (A_1, B_1), \dots, (A_n, B_n), Y \cap \sigma(\dots, (A_n, B_n)))$$

karşılaşması oluşurken $ao(X)$ oyununda

$$((A_0, B_0), \sigma_X((A_0, B_0)), (A_1, B_1), \dots, (A_n, B_n), \sigma(\dots, (A_n, B_n)))$$

karşılaşması oluşur. Burada σ , $ao(X)$ oyununda II'nin $ab(X) \leq n$ yapan bir stratejisi olduğundan

$$\emptyset = \sigma_X((A_0, B_0)) \cap \dots \cap \sigma(\dots, (A_n, B_n)) \subseteq Y \cap \sigma_X((A_0, B_0)) \cap \dots \cap Y \cap \sigma(\dots, (A_n, B_n))$$

olur. Böylece bu karşılaşma keyfi olduğundan σ_Y stratejisi II için $ab(Y) \leq n$ yapan bir stratejidir. $\square$

Aşağıdaki tanım literatürde vardır.

6.4.8. Tanım

X bir topoljik uzay olmak üzere $\mathcal{B} \subseteq \tau(X)$ ailesi verilsin. Eğer her $A \subseteq X$ kapalı alt kümesi ve $A \subseteq U \in \tau(X)$ olan her U için $A \subseteq B \subseteq U$ olan bir $B \in \mathcal{B}$ bulunuyorsa $\mathcal{B}$ ailesine X uzayının *kapalı alt kümeleri için bir geniş tabanı (large base)* denir.

6.4.9. Önerme

X bir normal uzay $abX \leq n \geq 0$ olsun. X uzayının kapalı alt kümeleri için bir $\mathcal{B}$ geniş tabanı "her $B \in \mathcal{B}$ için $abB^s \leq n - 1$ " olacak biçimde vardır.

Kanıt

Herhangi bir kapalı A alt kümesi ve A kümesini içeren bir U açığı verilsin. $A \subseteq B_{A,U} \subseteq U$ ve $abB_{A,U}^s \leq n - 1$ olan bir $B_{A,U}$ açığı bulacağız. A ile U^c kesişmeyen kapalılar olduğundan Teorem 6.4.4'ten A ile U^c arasında $abL \leq n - 1$ olan bir L ayracı vardır. Bu durumda kesişmeyen O ve W açıkları var olup $L = (O \cup W)^c$, $A \subseteq O$, $U^c \subseteq W$ ve $O \cap W = \emptyset$ olur. $B_{A,U} = O$ diyelim. $B_{A,U}^s = \overline{O} - O \subseteq L$ ve $B_{A,U}^s$ kapalı olduğundan Teorem 6.4.7'den $abB_{A,U}^s \leq abL \leq n - 1$ olur. $\square$

6.4.10. Önerme

X bir normal uzay ise $IndX \leq abX$ dir.

Kanıt

Tümevarım ile her $n \geq -1$ tam sayısı ve her X normal uzayı için $abX = n$ ise $IndX \leq n$ olduğunu göreceğiz. $n = -1$ için açıktır. $n = 0$ için Teorem 6.4.3'ten açıktır. $0 \leq k < n$ olan her k için doğru, yani $abX = k$ olan her normal X uzayı için $IndX \leq k$ olsun. $abX = n$ olan bir X normal uzayı verilsin. O zaman Π 'nin $abX = n$ yapan bir σ stratejisi vardır. X in herhangi kesişmeyen kapalı A ve B alt kümelerini alalım. $\sigma((A, B)) = L$ diyelim. Teorem 6.4.4'ten L , A ile B arasında ayraç olup $abL \leq n - 1$ olur. Tümevarım hipotezinden $IndL \leq n - 1$ olur. Önerme 6.4.1'den $IndX \leq n$ elde edilir. Bu durumda tümevarım gereği kanıt biter. $\square$

6.4.11. Sonuç

X bir normal uzay ise $kabX \leq abX$ olur.

Kanıt

Teorem 6.4.5 ve Önerme 6.4.10 gereği bu kanıt açıktır. $\square$

Aşağıdaki lemma bilinmektedir. Bu lemma ve kanıtı için [26] da 1.2.9 Lemma'ya ve 1.2.10 Remark'a bakılabilir.

6.4.12. Lemma

X bir kalıtsal normal uzay ve $M \subseteq X$ kapalı alt uzay olsun. X in kesişmeyen kapalı A ve B alt kümeleri verilsin. Eğer L' , M alt uzayında $M \cap A$ ile $M \cap B$ arasında bir ayraç ise X uzayında A ile B arasında $M \cap L \subseteq L'$ olan bir L ayraç vardır ([26]).

6.4.13. Teorem

X bir kalıtsal normal uzay ise $abX = kabX$ olur.

Kanıt

Sonuç 6.4.11'den $kabX \leq abX$ olur. $abX \leq kabX$ olduğunu görmek için $kabX = n$ diyelim ve

II'nin $kabX = n$ olmasını gerektiren stratejisi σ olsun. II için $ao(X)$ oyununda bir σ^* stratejisi tanımlayacağız ve bu strateji ile $ab(X) \leq n$ olacak. Bu görüldüğünde $abX \leq kabX$ olur ve kanıt tamamlanır.

$ao(X)$ oyunundaki hamlelerden oluşan sonlu $((A_0, B_0), L_0^*, (A_1, B_1), L_1^*, \dots, (A_i, B_i))$ dizisi verilsin.

Eğer $i = 0$ ise $L_0^* = \sigma^*((A_0, B_0)) = \sigma((A_0, B_0))$ olarak tanımlayalım.

Eğer $i > 0$ ise $\sigma^*((A_0, B_0), L_0^*, \dots, (A_i, B_i)) = L_i^*$ yi aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Eğer $i > j > 0$ iken

(*) $L_0 = L_0^*$ ve $L_{j-1} \cap L_j^* \subseteq L_j$ olan bir $((A_0, B_0), L_0, (A_1 \cap L_0, B_1 \cap L_0), \dots, L_{i-1}, (A_i \cap L_{i-1}, B_i \cap L_{i-1}))$ karşılaşması $kao(X)$ oyununda vardır,

biçimindeki (*) koşulu sağlanıyorsa aşağıdakileri tanımlayalım. Eğer sağlanmıyorsa L_i^* , A_i ile B_i arasında herhangi bir ayraç olsun (Bu durum baştan σ^* ile oynandığında gerçekleşmeyecek).

$L_i = \sigma((A_0, B_0), L_0, (A_1 \cap L_0, B_1 \cap L_0), \dots, L_{i-1}, (A_i \cap L_{i-1}, B_i \cap L_{i-1}))$ diyelim. Lemma 6.4.12 den $L_{i-1} \subseteq X$ kapalı olduğundan X uzayında A_i ile B_i arasında $L_{i-1} \cap L_i^* \subseteq L_i$ koşulunu sağlayan bir L_i^* ayracı vardır. Böyle bir L_i^* seçelim ve $\sigma^*((A_0, B_0), L_0^*, \dots, (A_i, B_i)) = L_i^*$ biçiminde tanımlayalım.

Şimdi σ^* ın aradığımız strateji olduğunu görelim. II'nin $ao(X)$ oyununda σ^* ile oynadığı keyfi

$$((A_0, B_0), L_0^*, (A_1, B_1), L_1^*, \dots, (A_n, B_n), L_n^*)$$

karşılaşmasını alalım. Burada σ^* tanımı gereği kısıtlanmış ayraç oyununda II'nin σ ile oynadığı

$$((A_0, B_0), L_0, (A_1 \cap L_0, B_1 \cap L_0), \dots, L_{n-1}, (A_n \cap L_{n-1}, B_n \cap L_{n-1}), L_n)$$

karşılaşması oluşur. Burada karşılaşma baştan σ^* ile oynandığı için $L_0 = L_0^*$ ve $n \geq j > 0$ iken $L_{j-1} \cap L_j^* \subseteq L_j$ olur. σ II'nin kazanma stratejisi olduğu için $\emptyset = L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_n$ olur. Bu durumda $L_{j-1} \cap L_j^* \subseteq L_j$ kullanılarak $L_0 = L_0^*$ ise $L_0 \cap L_1^* = L_0^* \cap L_1^*$ olup $L_1 \supseteq L_0^* \cap L_1^*$ olur ve $L_1 \cap L_2^* \supseteq L_0^* \cap L_1^* \cap L_2^*$ elde edilir. Böyle devam edildiğinde ve kısıtlanmış ayraç oyunu tanımı gereği $L_n \subseteq L_{n-1} \subseteq \dots \subseteq L_0$ olup $\emptyset = L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_n = L_n$ olduğu için $\emptyset = L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_n = L_n \supseteq L_0^* \cap L_1^* \cap \dots \cap L_n^*$ olur. Böylece $abX \leq n$ elde edilir ve kanıt tamamlanır. $\square$

Teorem 6.4.13 ve Teorem 6.4.5 gereği aşağıdaki sonucun kanıtı açıktır.

6.4.14. Sonuç

X bir kalıtsal normal uzay olsun. Bu takdirde $IndX = kabX = abX$ olur.

X metriklenebilir bir uzay ise $dimX = IndX$ olduğu bilinmektedir (Teorem 4.1.3, [26]). Her X metrik uzayı kalıtsal normal olduğundan $IndX = dimX = abX = kabX$ olur. Ayrılabilir X metrik uzayı için $IndX = dimX = indX$ olduğu iyi bilinir ([26]). Böylece, X ayrılabilir metrik uzay ise $IndX = dimX = indX = abX = kabX = nabX$ elde edilir.

6.5. Bu Konu ile İlgili Açık Sorular

6.5.1. Soru

Eğer $abX = n > 0$ ise $abL = n - 1$ olan bir $L \subseteq X$ alt kümesi var mıdır?

Eğer yukarıdaki sorunun cevabı olumlu ise aşağıdaki sorunun cevabı da olumlu olur.

6.5.2. Soru

Eğer $abX = n > 0$ ise $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ için $abL = k$ olan $L \subseteq X$ alt uzayı var mıdır?

6.5.3. Soru

$kab(X) < ab(X)$ olan X topolojik uzayı var mıdır?

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde topolojik oyunlar ile ilgili bazı açık sorulara kısmi cevaplar verilmiş ve bazı yeni topolojik oyunlar tanımlanmıştır. Tanımlanan bu topolojik oyunların ilişkili olduğu bazı konular incelenmiştir. Her bölüm sonunda açık sorular bırakılmıştır. Bu soruların çoğu, genel topolojide önemli bir yeri olan *Topology and its Applications* isimli dergide yayınlanmıştır [11], [12]. Bu bakımdan önem kazanan bu soruların cevaplarının araştırıldığı yeni çalışmalar yapılabilir. Aşağıya bu sorulardan bazılarını yazdık.

- 1.) X Nöderyan tabanı olan bir T_1 -uzay olsun. Eğer $Ch(X)$ oyununda DOLUCU'nun kazanma stratejisi veya X regüler iken eşdeğer olarak kodlama stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda 1-taktiğinin (veya 2-taktiğinin) olması gerekir mi?
- 2.) DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği var mıdır?
- 3.) DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda $(k+1)$ -taktiği var mıdır?
- 4.) X bir T_1 -uzay olup bir Nöderyan tabanı var olsun. Eğer DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda k -Markov stratejisi varsa DOLUCU'nun bu oyunda k -taktiği (veya $(k+1)$ -taktiği) var mıdır?
- 5.) X bir T_1 -uzay olsun ve X uzayının $rank(\mathcal{B}) \leq \omega$ olan bir $\mathcal{B}$ Nöderyan tabanı bulunsun. DOLUCU'nun $Ch(X)$ oyununda kazanma stratejisi varken DOLUCU'nun bu oyunda 1-taktiği var mıdır?
- 6.) Bir X uzayı için GBM(X) oyununda (veya GCh(X) oyununda) DOLUCU'nun kazanma stratejisi varsa X yönlendirilmiş tam uzaydır diyebilir miyiz?
- 7.) Bir X uzayı için GBM(X) oyununda (veya GCh(X) oyununda) DOLUCU'nun kazanma stratejisi varsa X zayıf yönlendirilmiş tam uzaydır diyebilir miyiz?



KAYNAKLAR

1. Telgársky, R. (1987). Topological games: on the 50th anniversary of the Banach-Mazur game. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 17(2), 227-276.
2. De Meziriac, B. (1612) Problemes plaisants et delectables, qui se font par les nombres. *Contributions to the Theory of Games*, Lyon.
3. Bouton, C. L. (1901). Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 3(1/4), 35-39.
4. Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *In Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians II*, 501-504.
5. König, D. (1927). Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged*, 3(2-3), 121-130.
6. Kalmár, L. (1928). Zur Theorie der abstrakten Spiele. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged*, 4, 65-85.
7. Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. USA: Princeton University Press, 1-625.
8. Yılmaz, E. (2016). *Oyun teorisi* (Üçüncü Baskı). İstanbul: Literatür Yayıncılık, 1.
9. Berge, C. (1957). Topological games with perfect information. *Contributions to the Theory of Games*, 3, 165-178.
10. Fleissner, W. and Yengulalp, L. (2015). From subcompact to domain representable. *Topology and its Applications*, 195, 174-195.
11. Önal, S., Soyarslan, S., Vural, Ç. (2019). On generalizations of topological games. *Topology and its Applications*, 258, 524-533.
12. Önal, S. ve Soyarslan, S. (2020). On the strategies for NONEMPTY in topological games. *Topology and its Applications*, 278, 107236.
13. Jech, T. (2013). *Set theory*. New York: Springer Science, 1-606.
14. Engelking, R. (1989). *General topology*. Germany: Heldermann Verlag, 1-523.
15. Galvin, F., Telgársky, R. (1986). Stationary strategies in topological games. *Topology and its Applications*, 22(1), 51-69.
16. Scheepers, M. (1995). Games that involve set theory or topology. *Vietnam Journal of Mathematics*, 23(2), 169-220.
17. Hart, K. P., Nagata, J. I., Vaughan, J. E. (2003). *Encyclopedia of general topology*. USA: Elsevier, 350-351.

18. van Douwen, E. and Pfeffer, W. V. (1979). Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 81(2), 371-377.
19. Gruenhage, G. (2011). A survey of D-spaces. *Set Theory and Its Applications: Annual Boise Extravaganza in Set Theory*, 533(1), 1995-2010.
20. Önal, S. ve Vural, Ç. (2017). There is no domain representable dense proper subsemigroup of a topological group. *Topology and its Applications*, 216, 79-84.
21. Debs, G. (1985). Strategies gagnantes dans certains jeux topologiques. *Fundamenta Mathematicae*, 126(1), 93-105.
22. Yengualp, L. (2016). Coding strategies, the Choquet game, and domain representability. *Topology and its Applications*, 202, 384-396.
23. Bartoszyński, T., Just, W., Scheepers, M. (1993). Covering games and the Banach-Mazur game: k-tactics. *Canadian journal of mathematics*, 45(5), 897-929.
24. Dorais, F. G. and Mummert, C. (2010). Stationary and convergent strategies in Choquet games. *Fundamenta Mathematicae*, 209.
25. Arhangel'skii, A. and Tkachenko, M. (2008). *Topological Groups and Related Structures, An Introduction to Topological Algebra*. New York: Springer Science and Business Media, 1-98.
26. Engelking, R. (1978). *Dimension theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1-314.
27. Aurichi, L. F. and Dias, R. R. (2019). A minicourse on topological games. *Topology and its Applications*, 258, 305-335.
28. Babinkostova, L. (2011). Topological games and covering dimension. *Topology Proceedings*, 38, 99-120.
29. Babinkostova, L. (2011). Topological groups and covering dimension. *Topology and its Applications*, 158(12), 1460-1470.
30. Önal, S. ve Soyarslan S. (2021). A game dimension function. *Topology Proceedings*, 58, 233-239.



GAZİ GELECEKTİR..