



**İÇ BASINÇ VE SICAKLIK ETKİSİNDEKİ METAL VE FONKSİYONEL
DERECELENDİRİLMİŞ KOMPOZİT YAPININ MATEMATİKSEL
MODELLENMESİ**

Muhammed Furkan ERHAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MART 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Muhammed Furkan ERHAN

25/03/2021

İÇ BASINÇ VE SICAKLIK ETKİSİNDEKİ METAL VE FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ KOMPOZİT YAPININ MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Muhammed Furkan ERHAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2021

ÖZET

Bu çalışmada, iç basınç ve sıcaklık etkisinde bulunan bir ortamda silindirik geometriye (silah veya tank namlusu gibi) sahip iki farklı malzemeden oluşan bir sistem incelenmiştir. Metal ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) ile oluşturulan hibrit sistem (MFHS), iç içe geçmiş iki silindirden meydana gelmektedir. Sistemin iç basınç yüklemesine maruz kaldığı varsayımı ile matematiksel modeli oluşturularak gerilme değerlerinin bulunması amaçlanmıştır. Bu sistemde oluşturulan yapının eksenel simetriye sahip olduğu ve silindirik koordinatlar üzerinde yalnızca radyal doğrultuda değişim olduğu kabul edilerek çözümüne gidilmiştir. Sistem için sıcaklık denklemleri iki farklı silindir için ayrı ayrı çıkartılmış ve elastisite denklemleri ile çözüm yapılmıştır. FDM parametrelerinin silindirik yapının termoelastik davranışına etkileri matematiksel olarak incelenmiş ve optimum tasarım için belirli bir kriter olarak değerlendirilmeye alınmıştır.

Bilim Kodu : 91414
Anahtar Kelimeler : Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme, Elastisite, Silindir, Matematiksel Modelleme
Sayfa Adedi : 117
Danışman : Dr. Öğretim Üyesi Osman Selim TÜRKBAŞ

MATHEMATICAL MODELLING OF METAL AND FUNCTIONALLY GRADED
COMPOSITE STRUCTURE UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL PRESSURE
AND TEMPERATURE

(M. Sc. Thesis)

Muhammed Furkan ERHAN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

March 2021

ABSTRACT

In this study, a system consisting of two different materials having cylindrical geometry (such as gun or tank barrel) was investigated in an environment under the effect of internal pressure and temperature. The hybrid system (MFHS) created by metal and functionally graded material (FGM) consists of two intertwined cylinders. It was aimed to find the stress values by creating a mathematical model with the assumption that the system was exposed to internal pressure loading. The solution was made by assuming that the structure created in this system had axial symmetry and that there was only a change in radial direction on cylindrical coordinates. The temperature equations for the system were extracted separately for two different cylinders and the solution was made with the elasticity equations. The effects of FGM parameters on the thermoelastic behavior of the cylindrical structure were mathematically analyzed and evaluated as a specific criterion for optimum design.

Science Code : 91414

Key Words : Functionally Graded Material, Elasticity, Cylinder, Mathematical Modelling

Page Number : 117

Supervisor : Assist. Prof. Osman Selim TÜRKBAŞ

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca doğru noktalara odaklanmamı sağlayan, arkamda varlığını her zaman hissettiğim ve desteğini esirgemeyen tez danıőmanım Dr. Öğr. Üyesi Osman Selim TÜRKBAŞ' a "Gazi Üniversitesi", çalıőmalarımın analitik kısımlarında yol gösteren ve sonuca ulaşmamda değerli katkıları bulunan Doç. Dr. Tunç APATAY' a "Gazi Üniversitesi", bilgisi ve tecrübeleri ile tezimi daha güzel hale getirebilmemde zamanını ve desteğini benden esirgemeyen mesai arkadaşım ve aynı zamanda hocam Arő. Gör. Dr. Ömer BAYRAKTAR' a "Gazi Üniversitesi", manevi desteklerini her zaman hissettiğim anneme, babama ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|---|--------------|
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT..... | v |
| TEŞEKKÜR..... | vi |
| ÇİZELGELERİN LİSTESİ..... | ix |
| ŞEKİLLERİN LİSTESİ..... | x |
| SİMGELER VE KISALTMALAR..... | xii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI | 3 |
| 3. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELER..... | 11 |
| 3.1. Mekanik Özellikleri | 13 |
| 3.2. Üretim Yöntemleri..... | 15 |
| 3.2.1. Toz metalurjisi | 15 |
| 3.2.2. Eritme işlemleri..... | 22 |
| 3.3. Kullanım Alanları | 26 |
| 3.3.1. Havacılık endüstrisi | 27 |
| 3.3.2. Otomotiv endüstrisi | 27 |
| 3.3.3. Biyomedikal | 27 |
| 3.3.4. Enerji..... | 28 |
| 3.3.5. Diğer kullanım alanları | 28 |
| 4. GENEL TEORİK TANIMLAR VE DENKLEMLER | 31 |
| 4.1. Genel Elastisite Denklemleri | 31 |
| 4.2. Silindir İçin Sıcaklık Dağılımı Denklemleri..... | 33 |

| | |
|---|-----|
| 5. METAL VE FDM İLE OLUŞTURULAN HİBRİT SİSTEMİN (MFHS) MATEMATİKSEL MODELLENMESİ | 35 |
| 5.1. MFHS' nin Sıcaklık (T) Denklemlerinin Çıkarılması | 37 |
| 5.2. MFHS' nin Elastisite Denklemlerinin Çıkarılması | 46 |
| 5.3. MFHS' nin Sayısal Uygulamalarının Teorik Olarak Değerlendirilmesi | 72 |
| 6. SONUÇ VE ÖNERİLER | 97 |
| KAYNAKLAR | 101 |
| EKLER..... | 107 |
| EK-1. Eksenel gerinim denklemi | 108 |
| ÖZGEÇMİŞ | 117 |

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

| Çizelge | Sayfa |
|--|--------------|
| Çizelge 3.1. FDM' nin üretim yöntemlerine genel bakış..... | 25 |
| Çizelge 3.2. FDM tiplerinin kullanım alanları..... | 29 |
| Çizelge 5.1. MFHS' de kullanılabilir malzeme örneklerinin mekanik ve fiziksel özellikleri | 72 |
| Çizelge 5.2. Standart olarak verilen silah ve tank namlu iç çap ve hesaplanan diğer çapların değerleri | 73 |
| Çizelge 5.3. FDM' lerin çap oranlarına göre hesaplanan homojensizlik katsayıları | 74 |

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

| Şekil | Sayfa |
|--|-------|
| Şekil 3.1. Kompozit malzeme biçimi (a) ve Mg/SiC kompoziti TEM görüntüsü (b) | 11 |
| Şekil 3.2. Sürekli (a) ve kademeli (b) derecelendirilmiş yapılar | 12 |
| Şekil 3.3. Fonksiyonel derecelendirme yapılmış malzeme parametrelerinin değişimi .. | 14 |
| Şekil 3.4. Aynı açısal hız değerinde FDM ve homojen diskte oluşan gerilmeler..... | 15 |
| Şekil 3.5. FDM' ler için üretim akış şeması | 16 |
| Şekil 3.6. Lazer destekli deney düzeneği..... | 18 |
| Şekil 3.7. Çoklu faz jet katılaştırma ekipmanı için yapılmış iki piston | 19 |
| Şekil 3.8. Santrifüj toz karıştırma işlemi | 20 |
| Şekil 3.9. Elektroforetik işleyiş şeması (a) süspansiyon karıştırması ve sirkülasyonu (b) biriktirme hücresinin yan kesiti..... | 21 |
| Şekil 3.10. Santrifüj döküm yöntemleri (a) yer çekimli (b) santrifüj | 22 |
| Şekil 3.11. Partikül çökmesinin şematik gösterimi..... | 23 |
| Şekil 3.12. İnfiltrasyon işlemi şematik gösterimi (a) sıkıştırılmalı döküm (b) gaz basınçlı..... | 24 |
| Şekil 3.13. FDM' nin potansiyel kullanım alanları..... | 26 |
| Şekil 5.1. MFHS' nin 2 boyutlu (a) ve 3 boyutlu (b) görünümü | 36 |
| Şekil 5.2. FDM çap oranları %10 iken elastisite modülleri..... | 75 |
| Şekil 5.3. FDM çap oranları %25 iken elastisite modülleri..... | 75 |
| Şekil 5.4. FDM çap oranları %50 iken elastisite modülleri..... | 76 |
| Şekil 5.5. AISI 4340 ve bor karbür ile oluşturulmuş FDM' ye sahip MFHS' nin çap oranlarına göre kalınlığa bağlı olarak oluşan radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri | 78 |
| Şekil 5.6. Nikel ve bor karbür ile oluşturulmuş FDM' ye sahip MFHS' nin çap oranlarına göre kalınlığa bağlı olarak oluşan radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri | 79 |

| Şekil | Sayfa |
|--|--------------|
| Şekil 5.7. Alüminyum ve bor karbür ile oluşturulmuş FDM' ye sahip MFHS' nin çap oranlarına göre kalınlığa bağlı olarak oluşan radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri | 80 |
| Şekil 5.8. Nikel alaşım ve 4340 çeliğinin alüminyum oksit ve bor karbürle oluşturduğu FDM' nin yer değiştirmeleri | 82 |
| Şekil 5.9. Alüminyum ve farklı seramik malzemelerle oluşturulan FDM' nin yer değiştirmeleri | 83 |
| Şekil 5.10. AISI 4340 ve silisyum karbür ile oluşturulan FDM' nin 300 [MPa] basınç altında farklı sıcaklık değerlerinin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmelerine etkisi..... | 85 |
| Şekil 5.11. Nikel ve bor karbür ile oluşturulan FDM' nin 1000 [K] sıcaklık altında farklı basınç değerlerinin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmelerine etkisi | 87 |
| Şekil 5.12. Alüminyum oksit ile farklı metallerin oluşturdukları FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri | 89 |
| Şekil 5.13. Bor karbür ile farklı metallerin oluşturdukları FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri | 90 |
| Şekil 5.14. Homojen alüminyum alaşım ve alüminyum alaşıma nikel alaşım eklenerek oluşturulan FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri | 92 |
| Şekil 5.15. Homojen nikel alaşım ve nikel alaşıma alüminyum alaşım eklenerek oluşturulan FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri | 93 |

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler | Açıklamalar |
|-----------------|--|
| r | Silindirik koordinatlarda radyal eksen |
| θ | Silindirik koordinatlarda teğetsel eksen |
| z | Silindirik eksenel koordinat |
| t | Euler-Cauchy denklem dönüşüm sembolü |
| a | Metal malzeme iç yarıçap |
| b | Metal malzeme dış, FDM iç yarıçap |
| c | FDM dış yarıçap |
| m, m_1, m_2 | Diferansiyel çözümün katsayıları |
| E | Elastisite modülü |
| E_0 | Sabit elastisite modülü |
| E_1 | Birinci durum elastisite modülü |
| E_2 | İkinci durum elastisite modülü |
| E_c | c noktasındaki elastisite modülü |
| ν | Poisson oranı |
| β | Homojensizlik katsayısı |
| α | Isıl genleşme katsayısı |
| α_0 | Sabit ısı genleşme katsayısı |
| α_1 | Birinci durum ısı genleşme katsayısı |
| α_2 | İkinci durum ısı genleşme katsayısı |
| k | Isıl iletkenlik katsayısı |
| k_0 | Sabit ısı iletkenlik katsayısı |
| k_1 | Birinci durum ısı iletkenlik katsayısı |
| k_2 | İkinci durum ısı iletkenlik katsayısı |

Simgeler**Açıklamalar**

| | |
|-------------------------------|--|
| u | Yer değiştirme (x-doğrultusunda) |
| u_1 | Birinci durum için yer değiştirme denklemi |
| u_2 | İkinci durum için yer değiştirme denklemi |
| v | Yer değiştirme (y-doğrultusunda) |
| w | Yer değiştirme (z-doğrultusunda) |
| ρ | Malzeme yoğunluğu |
| C_p | Malzeme ısı kapasite |
| \dot{q} | Zamana bağlı olarak üretilen iç enerji |
| γ | Özel çözüm sabiti |
| ξ | Özel çözüm sabiti |
| T | Sıcaklık |
| T_0 | Sıcaklık (c noktası) |
| T_1 | Birinci durum sıcaklık denklemi |
| T_2 | İkinci durum sıcaklık denklemi |
| T_i | İç sıcaklık |
| T_m | Sıcaklık (b noktası) |
| T_{atm} | Çevre sıcaklığı (atmosfer) |
| $C_i (i : 1, 2, \dots, 8)$ | Diferansiyel denklem çözüm sabitleri |
| $A_i (i : 1, 2, \dots, 20)$ | Keyfi sabitler |
| $D_i (i : 1, 2, \dots, 16)$ | Keyfi sabitler |
| P | İç basınç |
| $\varepsilon_i (i : 1, 2, 3)$ | Yerel eksenlerde bulunan gerinimler |
| ε_0 | Sabit gerinim |
| ε_x | Gerinim (x-doğrultusunda) |
| ε_y | Gerinim (y-doğrultusunda) |
| ε_r | Gerinim (radyal doğrultuda) |

Simgeler**Açıklamalar**

| | |
|--------------------------------------|---|
| ε_{θ} | Gerinim (teğetsel doğrultuda) |
| ε_z | Gerinim (eksenel doğrultuda) |
| σ_i ($i : 1, 2, 3$) | Yerel eksenlerde bulunan gerilmeler |
| σ_x | Gerilme (x-doğrultusunda) |
| σ_y | Gerilme (y-doğrultusunda) |
| σ_r | Gerilme (radyal doğrultuda) |
| σ_{θ} | Gerilme (teğetsel doğrultuda) |
| σ_z | Gerilme (eksenel doğrultuda) |
| σ_{r1} | Birinci durum için radyal gerilme |
| $\sigma_{\theta1}$ | Birinci durum için teğetsel gerilme |
| σ_{z1} | Birinci durum için eksenel gerilme |
| σ_{r2} | İkinci durum için radyal gerilme |
| $\sigma_{\theta2}$ | İkinci durum için teğetsel gerilme |
| σ_{z2} | İkinci durum için eksenel gerilme |
| τ_{ij} ($i, j : 1, 2, 3$) | Yerel eksenlerde bulunan kayma gerilmeleri |
| τ_x | Kayma gerilmesi (x-doğrultusunda) |
| τ_y | Kayma gerilmesi (y-doğrultusunda) |
| τ_z | Kayma gerilmesi (z-doğrultusunda) |
| $\tau_{r\theta}$ | Radyal doğrultuda teğetsel kayma gerilmesi |
| τ_{rz} | Radyal doğrultuda eksenel kayma gerilmesi |
| $\tau_{\theta z}$ | Teğetsel doğrultuda eksenel kayma gerilmesi |
| γ_{ij} ($i, j : 1, 2, 3$) | Yerel eksenlerde bulunan kayma gerinimleri |
| C_{ij} ($i, j : 1, 2, \dots, 6$) | Rijitlik matrisi sabitleri |
| F_x | Gövde kuvveti (x-doğrultusunda) |

Simgeler F_y

Gövde kuvveti (y-doğrultusunda)

 F_r

Gövde kuvveti (radyal doğrultuda)

 F_θ

Gövde kuvveti (teğetsel doğrultuda)

 F_z

Gövde kuvveti (eksenel doğrultuda)

Açıklamalar**Kısaltmalar****C**

Rijitlik matrisi sembolü

CAD

Bilgisayar destekli tasarım

CPF

Santrifüj toz işleme

FGM

Functionally graded material

FDM

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme

PDM

Polimer derecelendirilmiş malzeme

MFHS

Metal ve FDM ile oluşturulan hibrit sistem

S

Esneklik matrisi sembolü

TEM

Tarama elektron mikroskobu

Açıklamalar

1. GİRİŞ

Günümüzde ekonomi ve güç eğilimleri teknolojik gelişmeler ile paralellik göstermektedir. Bu değişimleri sağlayan en önemli sektörlerden biri savunma sanayidir ve gelişmekte dünyada söz sahibi olabilme potansiyelini de beraberinde getirmektedir.

Savunma sanayinin gelişmesinde, üretilmesi planlanan ve/veya üretilen her yeni ürün için malzeme kavramı oldukça etkili bir parametre olarak karşımıza çıkmaktadır. Son yıllarda özellikle teknolojinin de gelişmesiyle beraber kullanılan geleneksel malzemelerin yetersiz kaldığı görülmektedir. Bu yetersizliklerden dolayı “ileri malzeme” kavramı üzerinde çalışılmaktadır.

İleri malzemeler, geleneksel malzemelere göre etki alanı geniş, özellikle fiziksel ve mekanik özellikleri üstün, kullanım alanlarına göre ağırlıkça daha hafif olarak üretilen ve yüksek performans gösterebilen değerli malzemelerdir.

Günümüzde kompozit malzemeler, havacılık, otomotiv, uzay, savunma gibi daha birçok sektörlerde kullanımı artan ileri malzeme türlerindedir. Kompozit malzemenin farklı bir biçimi olan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM, Ing. “Functionally Graded Material (FGM)”) kavramı, son yıllarda ileri malzemede adını sıkça duyuran bir malzeme çeşididir. Kompozit malzeme ile kıyaslandığında, ısıl kalıntı gerilmelerini azaltmak, çatlakların büyümesine daha iyi mukavemet gösterebilmek, maksimum gerilmenin şiddetini azaltmak ve kompozit malzemenin en büyük problemlerinden olan ara yüzey bağlanma problemlerine çözüm geliştirmek gibi avantajlara sahiptir.

Bu tez çalışmasının amacı, iç basınç ve sıcaklık etkisinde bulunan silindirik bir ortamda, (silah veya tank namlusu gibi) iç içe geçmiş iki farklı malzeme yapısına sahip bir sistemin matematiksel modellenmesidir. Metal ve FDM ile oluşturulan hibrit sistem (MFHS), iç içe geçmiş iki silindirden meydana gelmektedir. Sistemin elastisite denklemleri, iç basınç yüklemesine maruz kaldığı varsayımı ile matematiksel olarak çıkarılmıştır. Çözüme giderken oluşturulan sistem, statik olarak ele alınmış ve böylelikle gövde iç kuvvetleri (body force) ve buna bağlı olarak meydana gelen atalet değişimlerinin olmadığı kabul edilmiştir.

Literatürde genel olarak tek tip ya da iç içe geçmiş iki farklı tekil malzeme ile genellikle de sıcaklık veya basınç gibi tek bir etki altında olduğu varsayımları ile oluşturulmuş sistemler mevcuttur. Bu çalışma ile tek tip ve FDM ortak düşünülerek bir sistem oluşturulmuş ve hem sıcaklık hem basınç etkisi birlikte göz önünde bulundurularak elastisite denklemleri için matematiksel model geliştirilmiştir.

Tez çalışması kapsamında, FDM kullanılarak geliştirilmiş olan matematiksel model sayesinde her yönde aynı fiziksel ve ısıl değerlere sahip malzeme yerine yükün uygulanacağı yönde yeterli (hasara yol açmayacak) mekanik özellikleri sağlayabilen bir malzeme modeli, kullanım alanına göre minimum maliyet ve maksimum verim alabilecek şekilde oluşturulmuştur. Burada FDM kullanılması ile kompozit malzemelerde oluşan en büyük problemlerden olan ara yüzey bağlanma problemi, ayrıca buna bağlı olarak meydana gelen çatlak ve kırılma deformasyonlarının minimuma indirilmesi amaçlanmıştır. Böylelikle yerli ve milli savunma sanayinde, belirtilen çalışma koşulları altında bulunan alanlarda kullanılacak ileri özellikli bir malzemenin matematiksel modeli oluşturulmuş ve uygulamalarda kullanım yerine göre tasarımı için malzeme seçiminde kolaylık sağlaması düşünülmüştür.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Kompozit ve FDM kavramları; gelişen ve gelişmeye devam eden, teknolojiye yön veren en önemli konulardandır. Bu alanlarda yapılan ve yapılmaya devam eden birçok çalışma, bilimsel araştırmalarda sıkça yer bulabilmektedir.

Bununla ilgili olarak öncelikle Topal (2006: 1-6, 30-52, 90-100, 125-127) tarafından yapılan tez çalışmasında, içi dolu FDM' den yapılmış ve radyal sıcaklık dağılımı etkisinde bulunan bir silindir sistemi ele alınmıştır. İlgili çalışmada FDM' nin içindeki malzeme dağılım oranları eksen boyunca farklılık gösterdiği için elastisite modülünün, ısıl genleşme ve iletim katsayılarının sabit bir malzeme katsayısına ve yer değiştirmeye bağlı birer değişken fonksiyon olmasını göz önünde bulundurulmuştur. Buna bağlı olarak bu tez çalışmasında ilgili malzemenin elastik ve termoelastik özelliklerinin gerilme, gerinim ve radyal yer değiştirme kavramlarına etkileri incelenmiştir.

FDM homojen olmayan bir yapıya sahip olduğundan dolayı izotropik homojen bir malzemenin aksine termoelastik özellikleri her referans noktasında aynı değildir.

Ayrıca Topal' ın söz konusu bu tez çalışması ile ısıl yükler nedeniyle meydana gelen gerilme ve gerinim değerleri izotropik homojen malzeme ile FDM için karşılaştırılmış ve bunun sonucunda referans yüzey sıcaklığında FDM' nin izotropik homojen malzemeye kıyasla plastik akma durumuna geçmeden daha iyi dayanabildiği ortaya konulmuştur.

Manthana ve Kedar (2018) tarafından yapılan çalışmada, FDM' den yapılmış içi boş silindir bir yapı üzerinde durulmuştur. Burada silindirin üst yüzeyi yalıtılmışken alt yüzeye ısı akısı uygulanacak şekilde bir iç ısı üretimi olayı göz önüne alınarak sistemin matematiksel modeli oluşturulmuştur. Sistem çözümünde integral dönüşüm tekniği ve Kirchhoff değişken dönüşümü ile lineer olmayan ısıl iletim denklemi kullanılmıştır. Bunun sonucunda bulunan gerilme, sıcaklık ve yer değiştirme gibi parametreleri homojen ve fonksiyonel derecelendirmiş yani homojen olmayan durum için grafikler halinde gösterilmiştir.

Statik çalışmaların aksine Rahimi ve Nejad (2008) çalışması incelendiğinde, FDM' den yapılmış iç ve dış basınç etkisinde bulunan içi boş dönen bir silindir ele alınmıştır. Bu sistem için elastisite teorisi denklemleri kullanılmış ve ısı gerilme hareketliliği farklı elastisite modülü üstel sabitleri için matematiksel olarak modellenmiştir. Bu çalışma sonucunda FDM' nin eksen boyunca değişen fiziksel özelliklerine (E, elastisite modülü, α , ısı genleşme katsayısı ve k, ısı iletim katsayısı) üstel fonksiyon sabitlerinin büyük etkisinin olduğu ve söz konusu fiziksel özelliklerin de ısı gerilmeyi önemli ölçüde etkilediği öne sürülmüştür.

Dönen içi dolu FDM' den yapılmış başka bir disk sistemi de Apatay, Gülgeç ve Eraslan (2007) tarafından ele alınmış ve malzeme fiziksel özelliklerinin (E, elastisite modülü, ν poisson oranı ve ρ , kütle yoğunluğu) lineer olarak değiştiği göz önünde bulundurularak Von Mises Akma Kriteri' ne göre her bir parametrenin gerilmeye ve plastik akmaya etkisi analitik olarak incelenmiştir. Temel elastisite denklemleri boyutsuz forma indirgenerek denklemler çözümlenmiş ve bunun sonucunda uygun parametrelerin seçilmesiyle homojen bir malzemeye göre FDM' nin mekanik dayanımının daha iyi olduğu grafiklerle gösterilmiştir.

Gülgeç ve Türkbaş (2002) çalışmasında, iki ucu ankastre ve iç ısı üretimine sahip bir silindirde zamana bağlı olarak değişen sıcaklık dağılımından dolayı meydana gelen ısı gerilmeler incelenmiştir. FDM kabulü yapılmamıştır ancak iç ısı etkisinde tekil bir malzemeli silindirde radyal sıcaklık dağılımının oluşturduğu ısı gerilmeler ortaya konmuştur. Bu çalışmada ısı gerilme denklemleri sıfır ve birinci derece Bessel Fonksiyonu ile tanımlanmış ve Tresca Akma Kriteri kullanılarak akmanın başladığı zaman, yarıçap ve yük belirlenerek grafikler halinde değişimleri gösterilmiştir.

Benzer bir çalışma Akış (2006) tarafından gerçekleştirilmiş ve burada FDM kabulü kullanılarak sistem tanımlanmıştır. Silindirik FDM, radyal eksen boyunca değişken ısı iletim katsayısına ve elastisite modülüne sahip olarak ele alınmış ve plastik akmanın başlangıcına etkisi incelenmiştir. Akış tarafından analitik olarak ele alınan bu çalışmada homojen ve FDM için iki ayrı çözüm yapılmış ve bunun sonucunda homojen malzemede plastik akmanın başladığı noktada FDM' nin dayanabildiği ve akmayı geciktirdiği ortaya konulmuştur.

Tutuncu ve Temel (2009) çalışmasında, basınçlandırılmış FDM' den yapılan silindir ve küre yapıları ele alınmış ve gerilme analizi yapılmıştır. Aksisimetrik (eksenel simetri) ve üniform iç basınç etkisinde iki farklı geometrik şekil sistemi düzlem elastisite teorisi ve tamamlayıcı

(complementary) fonksiyon yöntemi ile çözümlenmiştir. Bu çalışmada sistem, basınçlı kaplarda gerilme analizi için yeni bir yaklaşım olan infüzyon (içine harmanlama) tamamlayıcı fonksiyonu yani beşinci mertebeden Runge-Kutta sayısal çözümü yöntemi ile çözümlenmiştir. Böylelikle iki sınır şartlı bir problem tek sınır şartına dönüştürülerek basit bir çözüme ulaşılmıştır.

Bu tez çalışması kapsamında silindirik bir yapı ele alınacaktır. Ancak homojen malzeme ve FDM (homojen olmayan malzeme) arasındaki farklılıkları ortaya koyabilmenin geometrik yapı ile doğrudan ilişkilendirilmesine gerek yoktur. Hangi geometriye sahip olursa olsun malzemenin iç yapısı bu farklılıkları ortaya koyabilmek için yeterli olacaktır.

Bu kapsamda Arslan (2016) çalışmasında, tabakalı ve fonksiyonel derecelendirilmiş iç ve dış basınç etkisinde bulunan küresel bir yapı analiz edilmiştir. Bu çalışmada homojen ve heterojen olarak iki ayrı analitik model sunulmuş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda elastik limit üst değerinin FDM için daha yüksek olduğu gözlemlenmiş ve akmanın olduğu yüzeyleri iki malzeme durumu için de belirlenerek üretim yönteminin nasıl olabileceğine dair üretici firmalara ışık tutar nitelikte bir çalışma ortaya konulmuştur.

Boğa (2018) tarafından yapılan çalışmada, iç basınca maruz kalan FDM' den yapılmış silindir sistemi ele alınmıştır. Poisson oranının, ν , radyal eksen boyunca sabit kaldığı ve elastisite modülünün ise bir güç fonksiyonuna bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Sistem çözümü için hem analitik hem ANSYS paket programı ile sonlu elemanlar analizi yapılarak sonuçlar grafikler ile karşılaştırılmıştır. Burada dört farklı metal-seramik malzemelerin karışımı yapılarak FDM' ler oluşturulmuş ve bunlara ait güç fonksiyonu katsayıları karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Yapılan işlemler sonucunda analitik ve sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan sonuçların neredeyse birebir uyum içerisinde olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca güç fonksiyon katsayısının FDM tipi ile birlikte uygun yükleme koşullarına göre belirlenebileceği öne sürülmüştür.

Analitik çözümlü ve paket programlı ANSYS sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan karşılaştırmalı bir çalışma da Nejad, Abedi, Lotfian ve Ghannad (2012) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada iç ve dış basınç etkisinde bulunan küresel geometriye sahip FDM' nin gerilme ve yer değiştirmesinin gerçek (exact) çözümü yapılmıştır.

Homojensizlik katsayısı olarak da bilinen FDM mekanik özelliklerinin (poisson oranı sabit kabul edilmiştir) tanımlanabilmesi için gerekli güç fonksiyonu keyfi seçilerek farklı sonuçlar ortaya konulmuştur. Çalışma sonucunda bulunan veriler hem analitik hem de sonlu elemanlar yöntemi için kullanılan ANSYS programında çok iyi bir uyum göstermiş ve homojensizlik katsayısının malzemenin gerilme gibi diğer mekanik özellikleri üzerinde de önemli derecede etkili olduğu ortaya konulmuştur. Bundan dolayı FDM tasarımı yapılırken homojensizlik katsayısının seçiminin önemi vurgulanmıştır.

Chen ve Lin (2008) çalışmasında, FDM' den yapılmış silindir ve küresel geometriye sahip basınçlı kapların elastik analizi yapılmıştır. Gerilme dağılımı radyal doğrultu boyunca çalışılmış bununla birlikte malzeme özelliklerine göre homojensizlik katsayısı alınmış ve üstel fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Sayısal sonuçları grafiklerle göstererek malzemenin düşük gerilme seviyesine sahip bazı kısımlarına rağmen elastik cisimde gerilme dağılımının düzenlenmesi yaklaşımının homojen malzeme durumunda olmadığı belirtilmiştir. Ayrıca küresel ya da silindirik geometri fark etmeksizin yapı FDM' den oluşturulduğunda basınçlı kapların gerilme dağılımının önemli ölçüde değiştiği bulunmuştur.

Kurşun, Kara, Çetin, Aksoy ve Kesimli (2014) çalışmasında, mekanik, termal ve termomekanik olarak ayrı ayrı yükleme koşullarında FDM' den yapılmış silindir analitik olarak kapalı formda elastik gerilme ve yer değiştirme için çözüme ulaştırılmıştır. Mekanik yükleme durumunda, dönen silindirik bir cisim kabulünden dolayı eylemsizlik kuvveti dikkate alınmış ve çevresel gerilmenin iç yüzeyden dış yüzeye doğru azaldığı ortaya konmuştur. Termal yükleme koşullarında ise homojensizlik katsayısı negatif bir değere sahip olduğunda malzemede meydana gelen çevresel gerilmenin iç yüzeyden dış yüzeye doğru azaldığını ve iç yüzeyde çekme gerilmesinin dış yüzeyde ise basma gerilmesinin en yüksek değere sahip olduğu grafiklerle gösterilmiştir. Son olarak termomekanik yüklemde cismin hem döndüğü hem de termal yüklemeye maruz kaldığı durum ele alınmış ve homojensizlik katsayısının artması halinde radyal gerilmenin azaldığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak çoğu homojen malzemenin yükleme durumunda üstel güç fonksiyonu 0,5 olarak alındığında çevresel, boyuna ve eşdeğer gerilmenin cismin yarıçapı boyunca dağılım gösterdiği bulunmuştur. Ek olarak homojensizlik katsayısı ile yükleme koşullarının gerilme dağılımına çok önemli ölçüde etki ettiği mekanik, termal ve termomekanik durumlar için ayrı ayrı sonuçları ortaya konarak grafikler halinde gösterilmiştir.

Apatay, Arslan ve Mack (2017) çalışmasında, FDM merkezli termal yüklenme koşullarında elastik-plastik güç aktarma organının uygun boyutlandırma işlemi ele alınmıştır. Bu çalışmada bilezikler, kesme takımı tutucuları ve şaftlar üzerindeki dişliler gibi moment aktarma işlemi olan alanlardan bahsedilmektedir. Mühendislikte parçanın ağırlığını minimuma indirmek önemli bir işlemdir. Bu yüzden FDM' nin fiziksel özellikleri değişken olduğundan dolayı kullanımının önemi vurgulanmış ve artan sıcaklıklarda davranışı analitik olarak incelenmiştir. Burada içi boş merkezli kısmın FDM, merkeze montaj olacak kısmın homojen malzemeden meydana geldiği belirtilmiş ve uygun çap, basınç, homojensizlik katsayısı ile Tresca Akma Kriteri' ne göre plastik deformasyon incelenmiştir. Sonuç olarak uygun derecelendirme yapıldığında tasarımda avantaj sağlandığını ve homojensizlik katsayısının mutlak değerce büyüklüğünün çok etkili olduğu belirtilmiştir.

H. You, Zhang ve Y. You (2004) çalışmasında, FDM' den yapılmış küresel bir kabın iç basınca maruz kaldığı kabulü ile elastik analizi yapılmıştır. Bu çalışmada iki farklı durum ortaya konmuş, ilkinde iç ve dış yüzey homojen iken merkez FDM olarak ele alınmış ve ikincisinde ise sadece FDM ele alınarak çözüm yapılmıştır. Sadece FDM içeren kaptaki çevresel gerilmenin neredeyse sabit olduğu kabul edilmiştir. Gerekli matematiksel tanımlamalar yapıldıktan sonra Kummer' in ikinci dereceden diferansiyel denklemi ile çözüm geliştirilmiştir. Elastisite modülünün, homojensizlik katsayısının ve geometrik boyutlandırmanın etkileri grafiklerle desteklenerek ortaya konulmuştur. Çalışma sonucunda; analitik yöntemin önerilen yaklaşıma çok hızlı yakınsadığını ve çok iyi bir doğruluk oranı sağladığı tespit edilmiştir. FDM çalışıldığında, homojensizlik katsayısı seçiminin gerilmeyi önemli ölçüde etkilediğini ve elastisite modülünün radyal doğrultu boyunca değişiminin kontrol edilmesinin önemli olduğu vurgulanmıştır.

Topal Dağ (2013: 1-23, 117-119) tez çalışmasında, ortotropik FDM ve polimer derecelendirilmiş malzeme (PDM) ele alınarak ısı ve higroskopik (nem) yüklenme koşullarında dairesel geometri için kırılma analizi yapılmıştır. Bu çalışmada, elastisite ve kayma modüllerini, ısı iletim ve genleşme katsayılarını ve poisson oranını eksenlere göre değişen bir fonksiyon kabulü yapılarak çözüme gidilmiştir. İntegral bileşenlerini kurduktan sonra ANSYS sonlu elemanlar programı ile sıcaklık ve nem dağılımları hesaplanmıştır. Burada çözüm için öncelikle ortotropik yapı için gerekli analitik denklemler çıkartılmıştır. Ardından FDM için ısı yüklenme koşullarını göz önünde bulundurularak sistem kurulmuştur. Ortotropik FDM ve ısı yüklenme koşulları göz önüne alındığında; homojensizlik katsayısının

artması, malzemeler arası yumuşak geçişin sağlanmasında bir zorluğa ve termomekanik olarak uyumsuzluğun meydana gelmesine sebep olduğu belirtilmiştir. Bu çalışma ile ortotropik malzemelerin ısı ve higroskopik yükleme koşullarına uygun olacak çalışmalara ışık tutulmuştur.

Nejad ve diğerleri (2016) çalışmasında, üstel güç fonksiyonlu değişken fiziksel özelliklere sahip FDM kabulü ile ele alınmış silindirik basınçlı kabın analitik çözümü ve sonlu elemanlar analizi yapılarak sonuçların karşılaştırılması ortaya konmuştur. Farklı homojensizlik katsayıları ile radyal yer değiştirme hareketliliği, radyal ve çevresel gerilme değişimleri grafiklerle gösterilmiştir. Sistemin tanımı yapıldıktan sonra analitik olarak homojen hipergeometrik diferansiyel denkleme gerekli değişkenler konularak çözümlenmiştir. Homojensizlik katsayısı 1' den büyük olduğunda çevresel gerilmenin arttığı, aksi durumda azaldığı sonucuna ulaşılmıştır. Sonlu elemanlar analizi programı olan ANSYS kullanılarak sonuçlar grafiklerle desteklenmiştir. Bu çalışmanın radyal ve çevresel gerilme ile radyal yer değiştirmenin hesaplanması planlanan çalışmalar için incelenmesinin çok elverişli olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca homojensizlik katsayısının fiziksel özelliklere etkisi gösterilmiş ve sonlu elemanlar analizi ile analitik çözümlerin karşılaştırılmasında birbirine yakın sonuçlar elde edilmiştir. Bu analiz ve çözümler sonucunda mümkün uygun homojensizlik katsayısı değeri radyal doğrultuya göre hesaplanmıştır.

Silindirik çalışmaların yanı sıra Öktem (2014) çalışmasında, FDM' den yapılmış plakların statik analizi yapılmıştır. Ele alınan sistemde plağın iki kenarı basit mesnetli diğer iki kenarı ise ankastre olacak şekilde kabul edilmiştir. Elastisite ve kayma modülleri üstel değişkene sahip birer fonksiyon, poisson oranı ise sabit bir değer olarak alınmıştır. Enerjinin minimize prensibi ile oluşturulan denklemlere süresiz Fourier serileri ile çözüm geliştirilmiştir. Çözümlerin kontrolü için ANSYS programı kullanılmış ve olabildiğince az hata bulunmuştur. Analitik çözüm ve analiz programı arasındaki bu farkın meydana gelmesinde; kullanılan teorilerin farklılığı FDM modellenmesi durumunda yapılan hatalar gibi sebepler verilmiştir. Plak kalınlığı boyunca gerilme grafiği farklı en/boy oranları için üstel değer fonksiyonu ile değişimi verilmiştir. Sonuç olarak malzeme homojensizliğinin ve kalınlığının malzemenin mekanik davranışlarına büyük etkisi olduğu gösterilmiştir. FDM çalışmalarında tasarım sürecinde incelenebilecek bir çalışma ortaya konmuştur.

Küçüksucu (2011: 1-29, 87-90) tez çalışmasında, düşey yönde fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik malzemenin kayma teması durumunda iken gerilme dağılımları hesaplanmıştır. Genel elastisite denklemleri ortotropik bağıntılara göre düzenlenmiş ve sistem dikdörtgen profil için çözülmüştür. Elastisite modülü, poisson oranı, homojensizlik katsayısı gibi malzeme parametrelerinin temas gerilme dağılımlarına etkileri incelenmiştir. Temas mekaniğinde analitik yöntemlerin çoğu izotropik FDM ile ilgili olduğundan dolayı ortotropik FDM için de metotların yetersiz kaldığı vurgulanmış ve buna yönelik bir çalışma ile yeni bir metot geliştirmek hedeflenmiştir. Bu çalışma sonucunda, gerilme dağılımı yönünün aksenal kuvvetin etki ettiği yöne bağlı olduğu ve poisson oranının gerilme dağılımına etkisinin çok belirgin olmadığı belirtilmiştir. Ayrıca bu çalışma öncesinde homojen ortotropik bir malzeme için temas mekaniği çalışması bulunmadığından elde edilen sonuçlarla kıyaslama yapılamamıştır. Ortotropik FDM için matematiksel model çalışıldığında deneysel de çalışılırsa sonuçların daha destekleyici olabileceği önerisinde bulunulmuştur.

Kim ve Paulino (2002) çalışmasında, FDM' ler izotropik ve ortotropik olarak genelleştirilmiş denklemlerle tanımlanmıştır. Sistem her iki yapı için öncelikle üstel ve lineer olarak ayrılmış ardından çekme, eğilme ve parabolik olarak artan çekme yüklemesine göre çözümlenmiştir. Çözüm yolu olarak ise integral denklemleri, yüksek mertebeli modelleme, sınır şartlı elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri belirtilmiş ve FDM' ler için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Yapılan bu çalışmada özellikle lineer ve üstel fonksiyon durumunda FDM' nin davranışı ortaya konulmuş ve karşılaştırılmıştır. Ayrıca aynı geometri durumunda yüksek mertebelerde derecelendirilmiş malzemelerin geleneksel homojen malzemelere göre çok üstün özelliklere sahip olduğu belirtilmiştir. Ek olarak lineer fonksiyon çözümünde; malzemelerin eğim yönüne üniform yüklemenin paralel olduğu gibi durumlarda hesap doğruluğunun kaybolabileceği vurgulanmıştır.

Eraslan, Apatay ve Gülgeç (2008) çalışmasında, FDM' den yapılmış dönen içi dolu disklerde elastik-plastik gerilme durumu ele alınmıştır. Sistem çözümü için elastisite modülü, poisson oranı ve yoğunluk değerleri değişken fonksiyon olarak kabul edilerek nümerik bir model ortaya konulmuştur. Bu çalışma ile malzeme geometrisini ve özelliklerini ortaya koyan etken parametrelerin hepsini değiştirerek bir model oluşturmak ve elastik-plastik analizine sayısal bir çözüm sunmak amaçlanmıştır. Bulunan nümerik sonuçlar daha önce yapılmış bir analitik çalışma ile ek olarak malzeme fiziksel özelliklerinin lineer değiştiğini varsayarak oluşturulan

analitik bir çözüm ile karşılaştırılarak uyumları grafiklerle gösterilmiştir. Ayrıca elastik-plastik gerilme dağılımı homojen malzeme ile FDM için kıyas yapılarak verilmiş ve mekanik olarak incelendiğinde en uygun malzeme parametreleri belirlenmiştir.

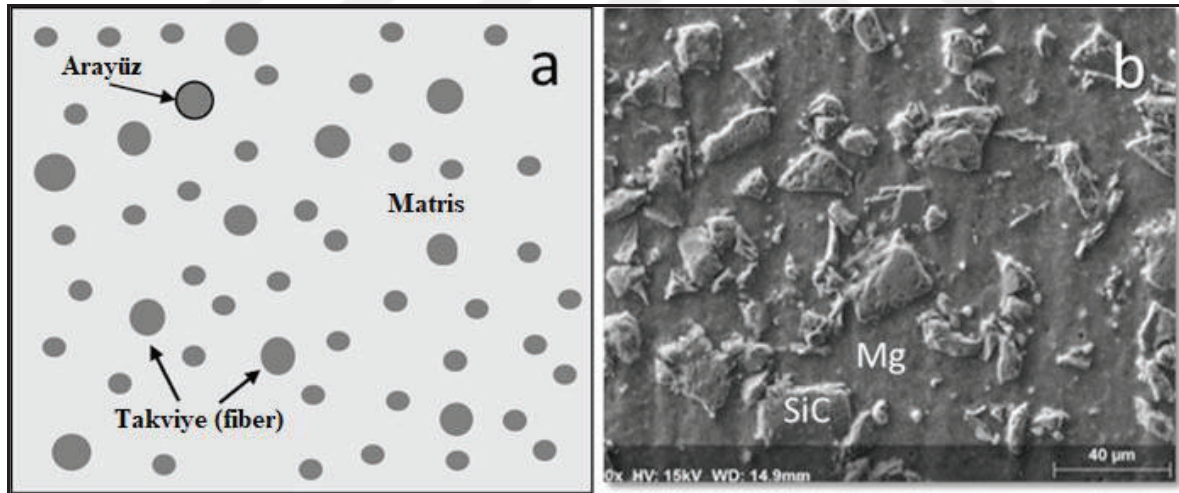
Reddy ve Chin (2007) çalışmasında, FDM' den yapılmış silindirik boru ve levha için termomekanik bağlantı durumunda sonlu elemanlar model formülasyonu geliştirilerek termoelastik davranışları incelenmiştir. Silindir için aksel simetri durumunda ısı transferi ile termoelastik denklemleri kullanılmış ve çeşitli hacim oranlarında seramik ve metal (Silikon Nitrat ve Paslanmaz Çelik) elementleri ele alınarak her iki geometri için sistemler çözümlenmiştir. Termomekanik bağlantının ısı ve mekanik enerji ile eylemsizlik etkisi arasındaki bağ olduğu tanımlanarak, FDM' nin buna tepkisi ortaya konulmuştur. denklemler oluşturulurken küçük uzamaların ve yer değiştirmelerin olduğu kabul edilerek işaret notasyonu kullanılmıştır. Ayrıca silindir için sıcak gaz ve yüksek ısı yüklemesi durumu ele alınmıştır. Silindirik FDM' nin ısı dağılımının termomekanik bağlantı olup olmaması durumundan önemli ölçüde etkilenmediği ancak termomekanik bağının çevresel gerilmeye kıyasla radyal gerilmede çok büyük etkisinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ek olarak, yüksek sıcaklık yüklemelerinde optimizasyonun sağlanması için seramik malzemenin hacminin küçük oranlarda tutulması gerektiği vurgulanmıştır.

Sonuç olarak; literatürde bulunan kaynaklar incelendiğinde FDM' ler ile ilgili çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Ancak bu alanda yapılan çalışmaların çoğunda tek bir yükleme koşulu göz önünde bulundurulmuştur. Bu çalışma ile iki farklı tip malzeme tek bir sistemde birleştirilmiş ve elastisite denklemlerinin matematiksel modellenmesi yapılmıştır. Ayrıca bu çalışmanın yükleme koşullarında iç basınç ve sıcaklık gibi karma bir problem şeklinde ele alınması ile uygulama alanında tek bir model ile çözümün karşılanması amaçlanmıştır.

3. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELER

Her malzemenin kendine özgü fiziksel ve kimyasal özellikleri vardır. Bu özellikler mühendislik uygulamalarında genellikle tek başlarına yeterli olmazlar. Örneğin bir malzemenin mukavemeti çok iyidir ancak yüksek sıcaklıklara çıktığında yeterli direnç gösterememektedir. Başka bir malzemenin ise mukavemeti çok iyi değildir ama yüksek sıcaklıklara dayanabilmektedir. O halde yüksek sıcaklık ortamında bulunmasına rağmen iyi mukavemet gösterebilme özelliği elde edebilmek için bu iki malzemenin de özelliğini birleştirmek gerekmektedir. Buna benzer şekilde düşünülerek iki ya da daha fazla malzemenin bir araya getirilmesiyle oluşturulan ve tek başlarına olduklarından daha iyi özelliklere sahip malzemelere “Kompozit Malzemeler” adı verilir.

Şekil 3.1’ de kompozit malzemenin oluşma biçimi ve buna örnek bir kompozitin TEM (Tarama Elektron Mikroskobu) görüntüsü verilmiştir (Cuevas, Becerril, Martinez ve Ruiz, 2018:2).



Şekil 3.1. Kompozit malzeme biçimi (a) ve Mg/SiC kompoziti TEM görüntüsü (b)

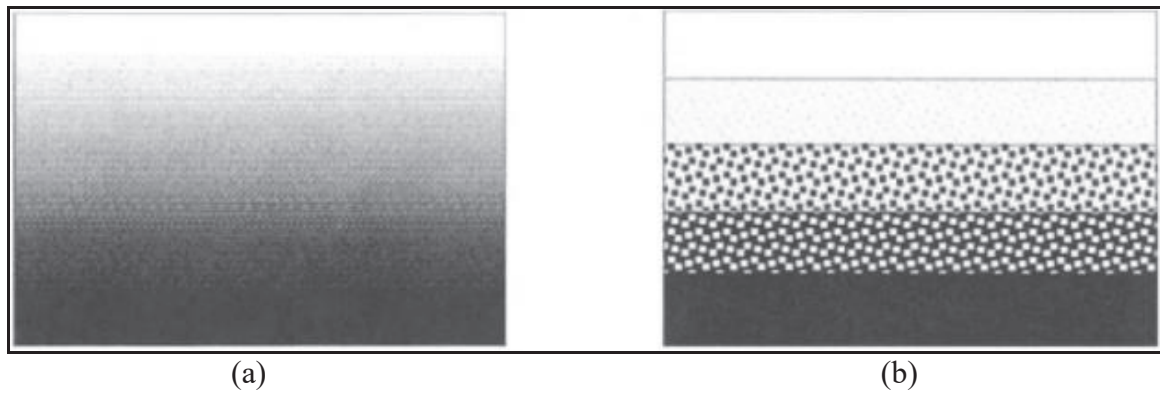
1900’ lerin ilk yıllarında sentetik plastikler gelişmiştir. Buna bağlı olarak 1930’ ların sonlarında plastikler, diğer malzemelerin çevresinde kendisinden söz ettirir duruma gelmiştir. Ancak korozyon dirençleri yüksek, yoğunlukları düşük, şekillendirilebilirlikleri iyi olsa da dayanım ve sertliklerinin düşük olması plastiklerin güçlendirilmesi çalışmalarına gereksinim oluşturmuştur. Böylelikle 1950’ lerde polimer kompozit kavramı ile kompozitlerin oluşumunda önemli bir gelişme yaşanmıştır (Aricasoy, 2006).

Kompozit malzemeler, matris (ana malzeme) ve fiber (takviye malzeme) kısımlarından oluşur. Kompozit malzemeler; matris kısmının (metal, polimer ve seramik) ve fiber kısmının (cam fiber, aramid fiber, karbon fiber vb.) malzeme türüne göre adlandırılır. Buna ek olarak takviye malzemesinin boyutları ve matris malzemesi ile birleştirilmesi biçimine ve yönüne bağlı olarak da kompozit malzemelerin türleri belirlenebilir (Sunar, 2015:8-16).

Kompozit malzemelerin farklı türlerde oluşturulma teknikleri ve yöntemleri mevcuttur. Ancak genellikle homojen ve izotropik halde bulunan kompozit malzemelerde fazlar arası direk geçiş olması sebebiyle çatlamlar, kalıcı gerilmeler ve ara yüzey bağlanma sorunu gibi problemler meydana gelmektedir. Buna ek olarak uygulama alanına ve yüküne göre gereksiz maliyet de oluşturmaktadır. Buna benzer sebeplerden dolayı kompozit malzemelerin oluşturulma biçiminde değişiklikler yapılarak daha avantajlı bir ileri malzeme elde edebilmek için çalışmalar geliştirilmektedir.

Fazlar arası yumuşak geçiş sağlayan, sürekli veya kademeli bir şekilde meydana getirilen ve homojen olmayan kompozit malzeme türüne “Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM)” denir.

Şekil 3.2’ de sürekli ve kademeli şekilde oluşturulmuş bir FDM görülmektedir (Miyamoto, Kaysser, Rabin, Kawasaki ve Ford, 1999: 2).



Şekil 3.2. Sürekli (a) ve kademeli (b) derecelendirilmiş yapılar

FDM’ ler kompozit malzemeler ile kıyaslandığında çeşitli avantajlara sahiptir (Shin, Natu, Dutta, Mazumder, 2003) :

- Malzemenin termomekanik performansını geliştirir,
- Malzemeleri birleştirme işleminde oluşan ara yüzey gerilmelerini azaltır,
- Plastik akma ve esneklik kusurunun oluşma süresini geciktirir,
- Ara yüzey çatlaklarının yayılmasını sınırlar,
- Malzeme tokluk ve mukavemet değerini artırır,
- İstenilen mukavemette azalma olmadan yapısal elementin ağırlığı minimuma indirilebilir,
- Ara yüzey serbest sınırındaki tekilliği ve gerilme yoğunlaşmasını önler.

3.1. Mekanik Özellikleri

FDM' ler fiziksel özellikleri bakımından diğer kompozit malzemelerle kıyaslandığında daha önemli etki alanlarına sahiptir. Küçük boyutlu çalışmalarda mekanik özellikler boyut, şekil ve ara yüzey şartlarından etkilenir. Genellikle büyük boyutlu FDM mekanik analizlerinde herhangi bir noktada malzemenin sadece etkili (elastik modülü, ısıl ve nem katsayısı, yoğunluk vb.) özellikleri ele alınır. FDM' nin mekanik davranışı; kompozit malzemeyi oluşturan karışımın uzaysal değişkenlerinin doğası olan ısıl genleşme katsayısı ve elastisite modülü gibi malzeme parametrelerinin değişiminden etkilenmektedir (Becker, Cannon ve Ritchie, 2000).

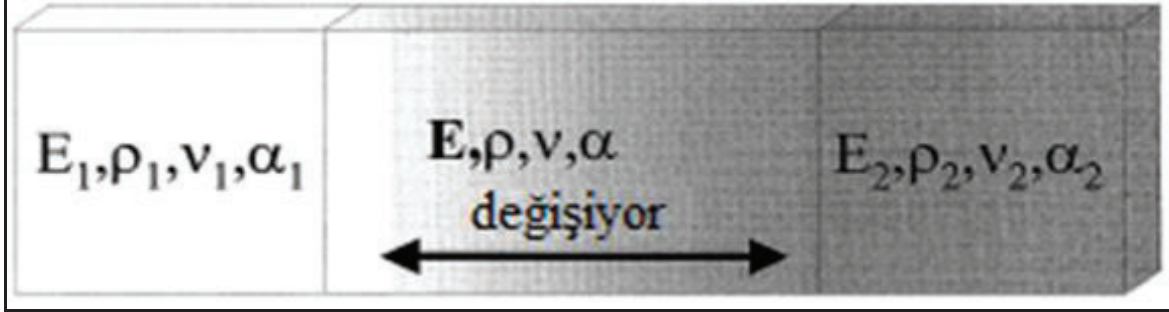
Malzemelerin ortalama olarak özelliklerinin belirlenebilmesi için şu mekanik özellikler sıralanabilir (Kaw, 2014: 56-57) :

- Rijitlik,
- Mukavemet,
- Isıl genleşme ve iletim katsayısı,

Ortalama özellikler genellikle malzemelerin homojen olduğu kabulü ile çıkartılır. Malzemelerin bu değerlerinin belirlemede fiziksel özelliklerin (yoğunluk, ısıl ve nem katsayıları, elastisite modülü vb.) etkileri önemlidir.

FDM' ler homojen olmayan yapılara örnektir. Bu nedenle konumlarına bağlı olarak malzeme fiziksel özellikleri değişkenlik göstermektedir.

Şekil 3.3' te bir FDM' nin elastisite modülü, yoğunluğu, poisson oranı ve ısıl genleşme katsayısının değişimi gösterilmiştir (Butcher, Roussea ve Tipper, 1998).

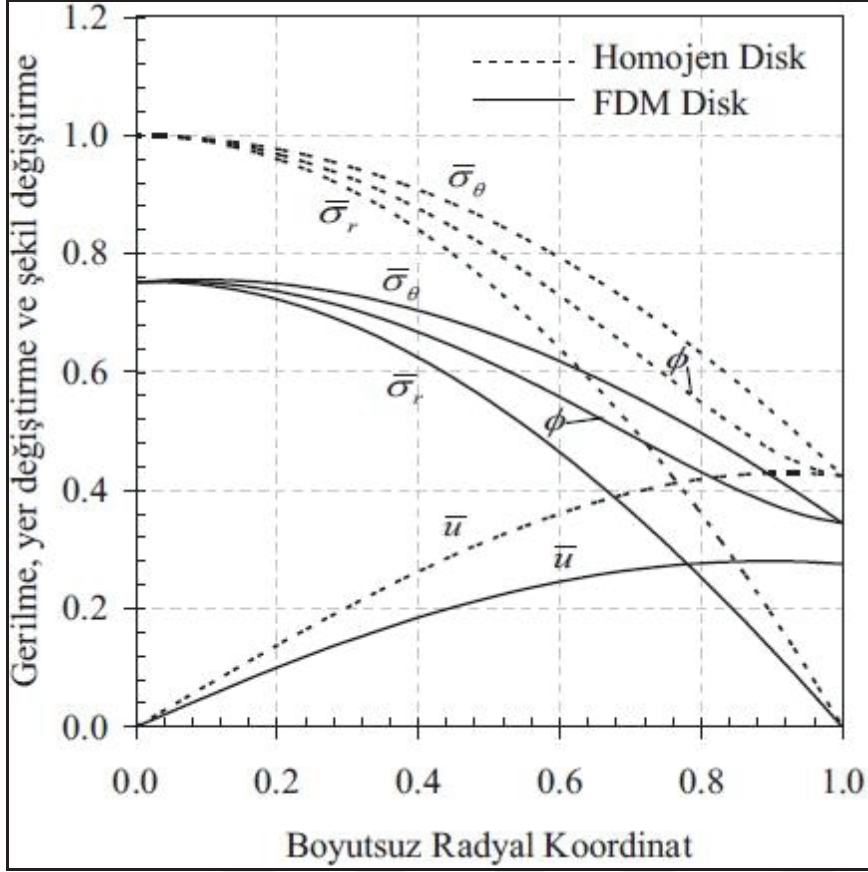


Şekil 3.3. Fonksiyonel derecelendirme yapılmış malzeme parametrelerinin değişimi

Homojen malzemelerin aksine, elastisite modülü (Young Modülü) FDM' ler için malzeme kalınlığı boyunca değişkenlik göstermektedir. Bu değişkenlik malzeme derecelendirmesine göre lineer, üstel, hacimsel yüzdeler ve tekil güç fonksiyonu şeklinde kabullere dayanılarak ifade edilebilmektedir (Boğa, 2016: 29-46). Sistem seçimi ve kabullerine göre malzeme yoğunluğu, poisson oranı, ısıl ve nem iletim katsayıları gibi parametreler de benzer şekilde ifade edilmektedir.

FDM' ler ile ilgili yapılan çeşitli çalışmalar sonucunda uygun parametreler seçildiğinde homojen malzemelere kıyasla FDM' lerin çok daha iyi mekanik dayanıma sahip olabileceği bulunmuştur (Apatay vd. , 2007).

Şekil 3.4' te dönen bir disk şeklinde bulunan FDM' nin homojen malzemeye göre mekanik dayanımının kıyaslaması verilmiştir (Apatay vd. , 2007).



Şekil 3.4. Aynı açısal hız değerinde FDM ve homojen diskte oluşan gerilmeler

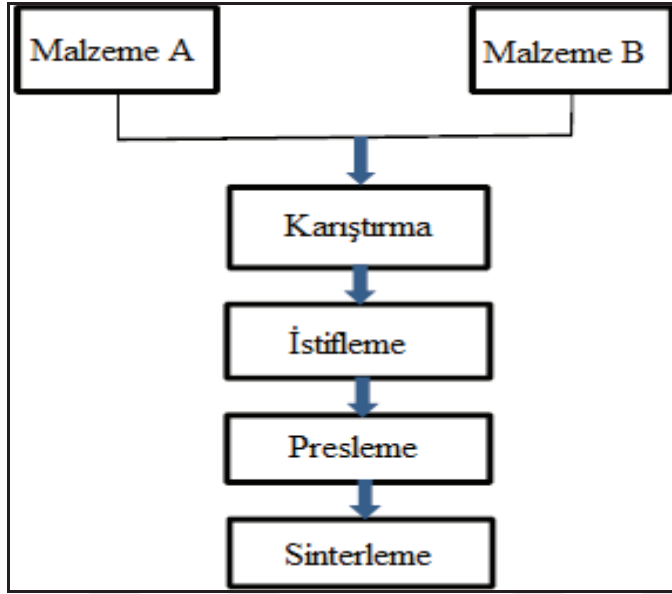
3.2. Üretim Yöntemleri

FDM'lerin birçok üretim yöntemi vardır. Bu yöntemlerden aşağıda kısaca bahsedilmiştir (Kieback, Neubrand, Riedel, 2003):

3.2.1. Toz Metalurjisi

Toz metalurjisi; toz üretim, toz işleme, şekillendirme işlemleri, sinterleme ve basınçlandırma işlemlerinin bütünüdür (Schatt ve Wieters, 1997:492).

FDM'lerin toz metalurjisi ile üretiminde bulunan aşamalar Şekil 3.5' te akış diyagramı halinde gösterilmiştir (Udupa, Rao ve Gangadharan, 2014):



Şekil 3.5. FDM' ler için üretim akış şeması

Toz metalurjisinin ele aldığı gradyanlar (Kieback vd. , 2003):

a. Gözeneklilik ve gözenek-büyükölük gradyanları: Farklı şekilli parçacık ile toz karışımının biriktirilmesi ile ya da çeşitli biriktirme parametrelerinin dâhilinde boşluk tutucuların kullanılması ile oluşturulabilmektedir.

b. Tekil faz malzemelerin kimyasal biriktirme gradyanları: Eğer faz diyagramı seçilen karışım aralığından fazla çözünürlük gösterirse, sinterleme süresince karışımın birleştirilmesinde sürekli değişimle tozun biriktirilmesi elementlerin hareketliliğinde pürüzsüz değişim ile tekil faz malzemesine neden olacaktır.

c. İki ya da çoklu faz malzemesinde fazların hacim içerikleri ve tane boyut gradyanları: Çoğu literatürde farklı fazların hacim içeriklerine odaklanılmaktadır. Fazlar metal-metal, metal-seramik ve seramik-seramik şeklinde oluşturulmaktadır. Mikro yapı gradyanları; yapının gradyanları ile sıvı faz sinterlemesi süresince faz dengesi kontrolünde üretilebilmektedir.

Toz istifleme

İstenilen boyut ve şekilde oluşturulması planlanan profilin ön tasarımına göre farklı karıştırma oranlarında tabakanın biriktirilmesi işlemidir (Watanabe, 1995).

Tabakaların kesintisiz kuru biriktirilmesi

Türbülans olmayan bir yüzeye yakın ince tabakaya difüzyon ile sürekli olarak gaz ya da parçacık transferi yapılması işlemidir. Bu işlem; çevresel, atmosferik, yüzeye ilgili, fiziksel ve kimyasal şartlar altında hesaplanmaktadır (Pryor ve Barthelmie, 2000).

Tabaka laminasyonu

Malzeme ince tabakalarının üç boyutlu metal parça şekillendirmek amacı ile birbirlerine yapıştırılması işlemidir (Norfolk ve Johnson, 2015).

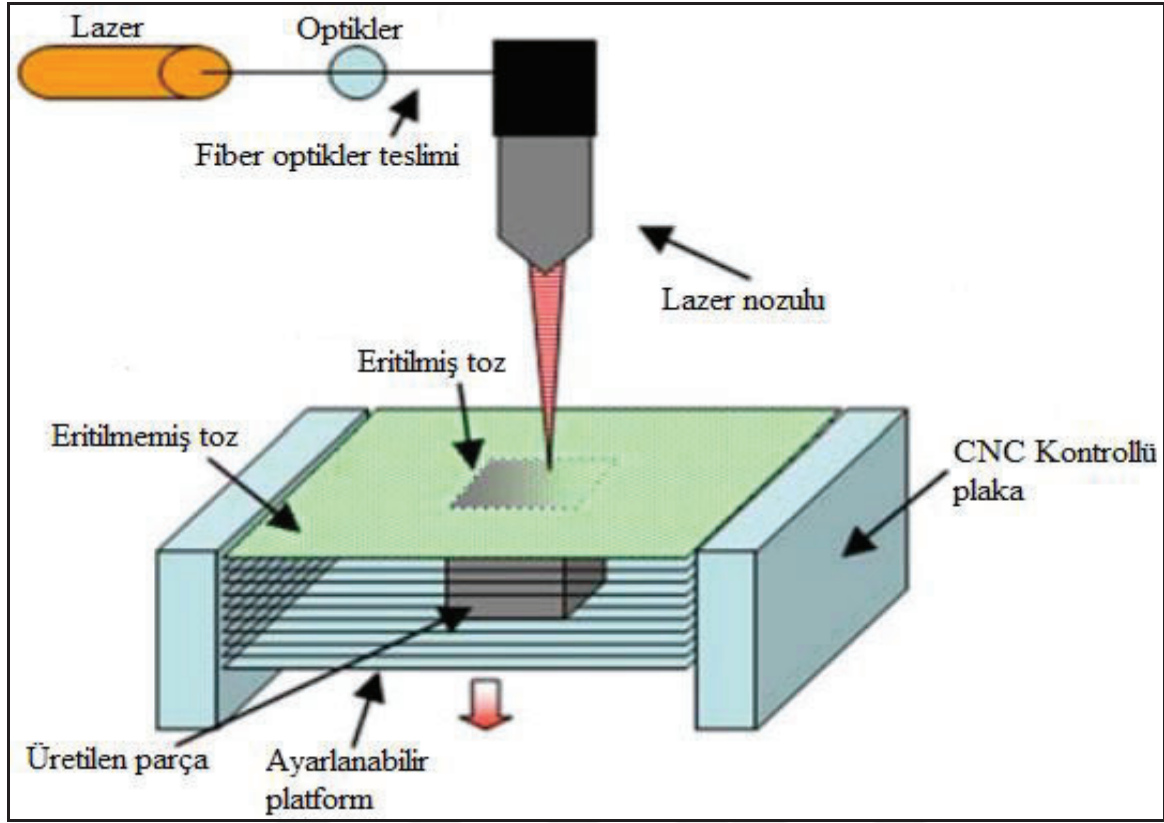
Yaş toz püskürtme

Süspansiyon spreyleme olarak da bilinen bu yöntem; düz yüzeyler, oluklu tabakalar, tüpler ve diğer çeşitli yüzeyler için kullanılabilen temassız bir teknik içerir (Shi, Zhou, Ran ve Shao, 2010).

Lazer kaplama

Birbirinden farklı iki ya da daha fazla malzemenin lazer ile birbirlerine bağlanması işlemidir. Toz halinde bulunan malzeme, kaplama amacı ile sisteme enjekte edilmektedir. Biriktirme işlemi için lazer eritme yapılmaktadır. Pahalı bir yöntem olduğundan dolayı seri üretime uygun değildir (Mumtaz ve Hopkinson, 2007).

Şekil 3.6' da nikel alaşım ve zirkonyum FDM' nin lazer eritme işlemi için kurulan deney düzeneği verilmiştir (Mumtaz ve Hopkinson, 2007).



Şekil 3.6. Lazer destekli deney düzeneği

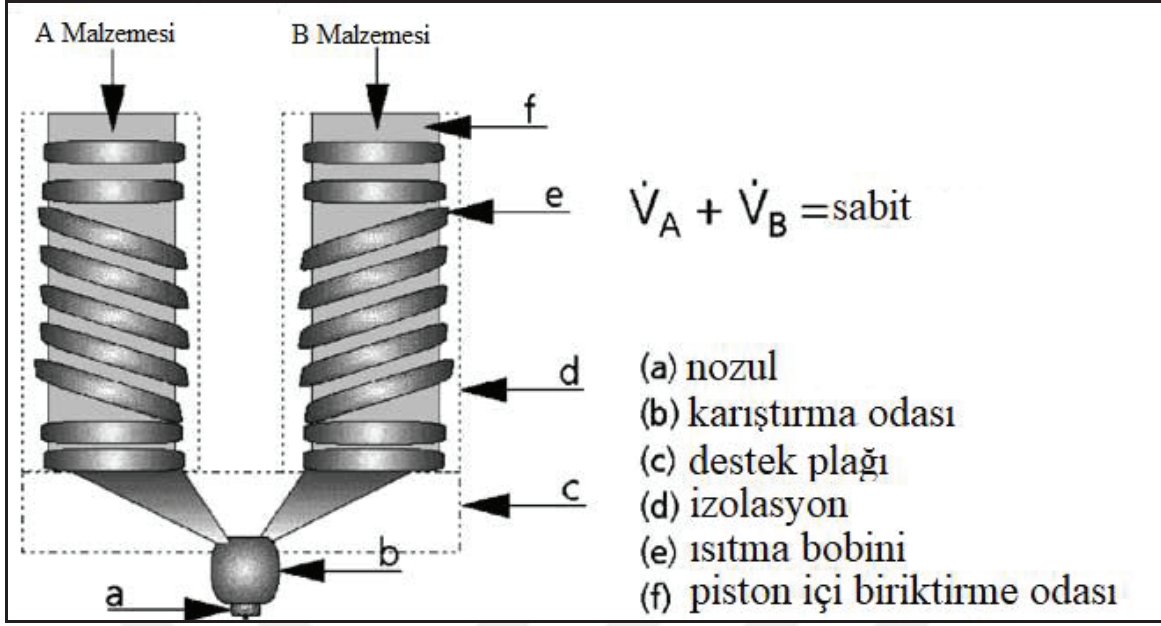
Bulamaç yapma ve slip döküm

Çeşitli toz biçimleri ile bulamaçlar içine gözenekli yapının ardışık daldırılması işlemidir. Aynı işlem slip döküm için de geçerlidir. Bu yöntemler, sınırlı sayıda işlemlerin seri üretimlerinin yapılabilmesi potansiyeline sahiptir (Kieback vd. , 2003) .

Katı serbest şekillendirme işlemi

Keyfi karmaşık şekilli parçaların üretimi için geliştirilen bir üretim yöntemidir. Üç boyutlu bilgisayar destekli tasarımla (CAD) üretilmektedir. Bu yöntemde amaç hızlı prototip uygulamaları için fiziksel şekilleri CAD modeline aktarmaktır (Beuth ve Klingbeil, 2001).

Şekil 3.7' de iki boyutlu jet ekstrüzyon hareketi ile biriktirme işlemi verilmiştir (Kieback vd. , 2003).

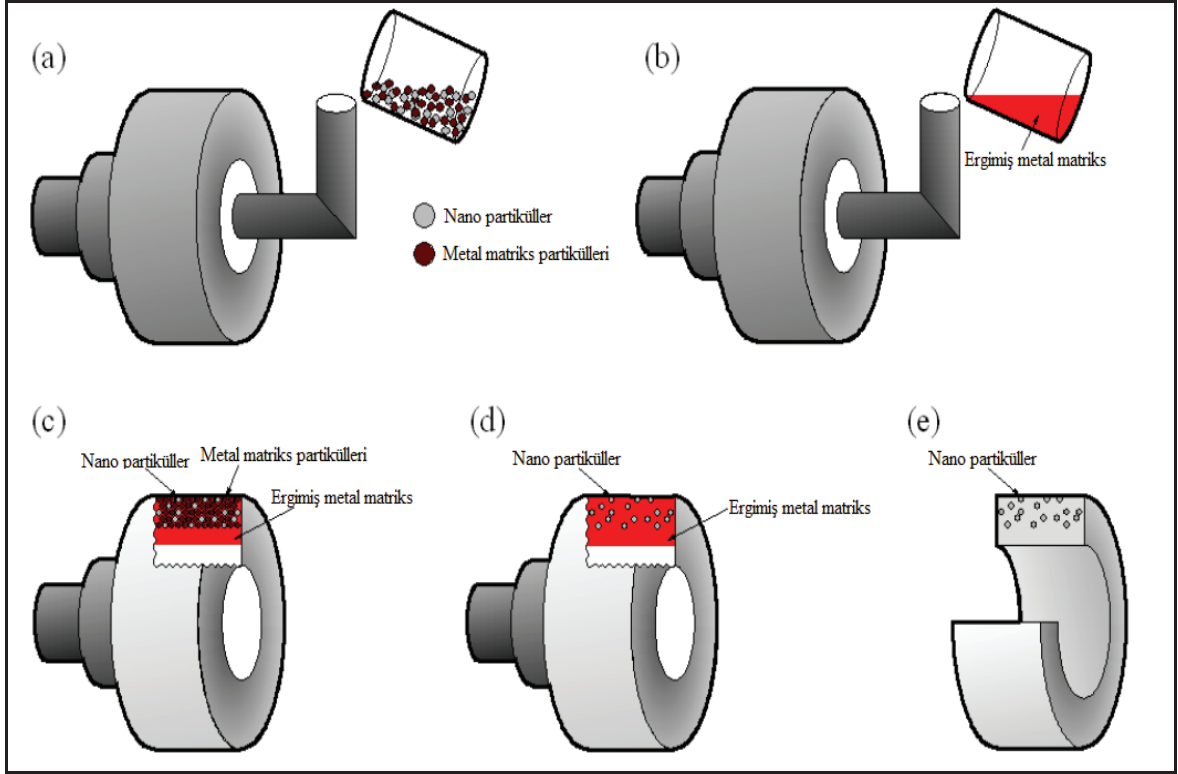


Şekil 3.7. Çoklu faz jet katılaştırma ekipmanı için yapılmış iki piston

Santrifüj toz işleme (CPF) ve pervane-kuru karıştırma

Sürekli toz karıştırma şeklinde ve bilgisayar kontrolünde olan kompozisyonun değişimi, dönen silindir iç duvarına doğru ivmelenen dağıtıcı dönen zeminlerin beslemesi ile gerçekleştirilmektedir (Kieback vd. , 2003).

Şekil 3.8’ de santrifüj toz karıştırma işleminin deneysel aşamaları sırası ile verilmiştir. Burada (a) partiküllerin eklenmesi, (b) başlangıç malzemesinin eritilmesi, (c) santrifüj kuvvetinin basınç uygulaması, (d) basınç etkisi ile eş zamanlı olarak ergimiş matris yapısının ısısı ile matris tozlarının ergimesi ve son olarak (e) FDM’ nin nano partikül hareketleri gösterilmiştir (Watanabe, Inaguma, Sato ve Fujiwara, 2009).



Şekil 3.8. Santrifüj toz karıştırma işlemi

Santrifüj çökmesi

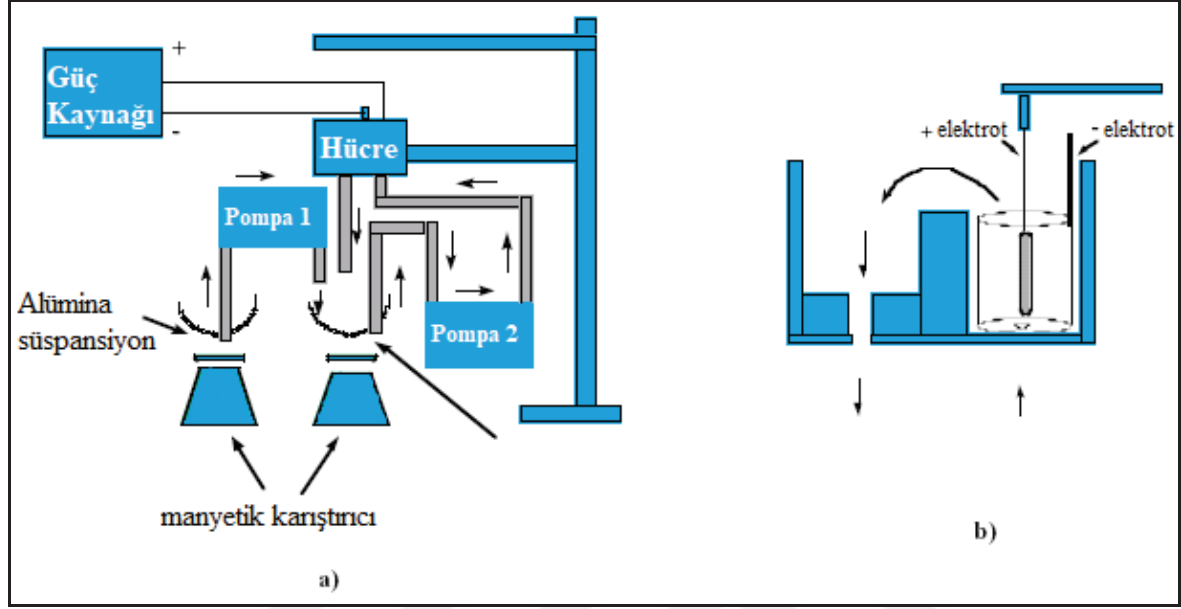
Askıda bulunan akışta batmayan partiküllerin (damlacık, kabarcık) karışımında santrifüj coriolis kuvveti tarafından tetiklenerek yapılan çökme işlemidir (Ungarish, 2003).

Elektroforetik biriktirme

Bu işlem ışığa duyarlı polimerler ve polimerlerin ışığa duyarlı üniform film yapıştırma uygulamalarında yapılan bir işlemdir (Emmons, Valley, Winkle, Lansdala ve Pa, 1986).

1970' lerde beta alümina seramiklerinin şekillendirilmesinde sodyum sülfür hücrelerinde elektrot gibi kullanılması ile başarılı uygulamalar yapılmıştır. Daha sonrasında alüminyum oksit ve magnezyum oksit gibi çeşitli oksit uygulamaları yapılmıştır (Zhao, Vleugels, Vandeperre, Basu ve Biest, 1999).

Şekil 3.9’ da Alümina-Seryum-Zirkonyum Oksit’ in işlenmesi için kurulmuş olan elektroforetik biriktirme işlemi düzeneği verilmiştir (Zhao, Vleugels, Vandeperre, Basu ve Biest, 1999).



Şekil 3.9. Elektroforetik işleyiş şeması (a) süspansiyon karıştırması ve sirkülasyonu (b) biriktirme hücresinin yan kesiti

Basınç filtrasyon/vakum slip döküm

Bilgisayar destekli FDM tasarımında kullanılan enjekte yöntemidir. Seramik kalıptan yapılmış vakum sistemi ve akışa uygulanan basınca dayalı bir yöntem olmasına rağmen slip döküm yöntemine çok benzerdir (Katayama, Sukenaga, Saito, Kagata ve Nakashima, 2011).

Sinterleme

Gözenek gidermek amacı ile yapılan sağlamlaştırma işlemidir. Sinterleme; sıcak ve soğuk olarak ikiye ayrılır. Eğer FDM sıcak sinterleme ile hazırlanır ise sinterleme, sıkıştırma işlemi ile eş zamanlı olarak gerçekleştirilir. Soğuk sinterleme işleminde ise sinterleme, tozlar sıkıştırıldıktan sonra yapılır. Elektrikli ocak ısıtma, yüksek frekanslı indüksiyon ısıtma ve boşluklu plazma sinterleme gibi yöntemleri vardır (Ebrahimi, 2016:7-8).

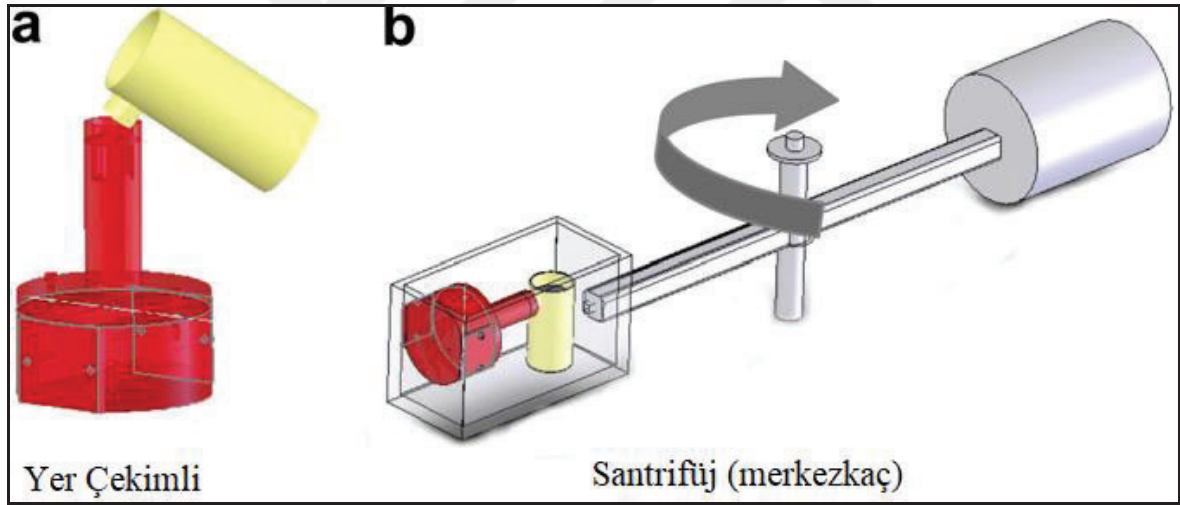
3.2.2. Eritme işlemleri

Eriyik durumda gradyan uygulaması taşıma ile daha elverişli olabilmektedir (Kieback vd. , 2003).

Santrifüj döküm

Geleneksel santrifüj döküm genellikle silindirik parçalar için kullanılmaktadır. Yatay ve dikey dönme eksenine göre iki farklı çeşidi vardır. Bunlar yer çekimli ve merkezkaç kuvvetli olarak adlandırılmaktadır (Chirita, Soares ve Silva, 2006).

Şekil 3.10' da santrifüj döküm yöntemi çeşitlerinin şematik gösterimi verilmiştir (Chirita, Soares ve Silva, 2006).

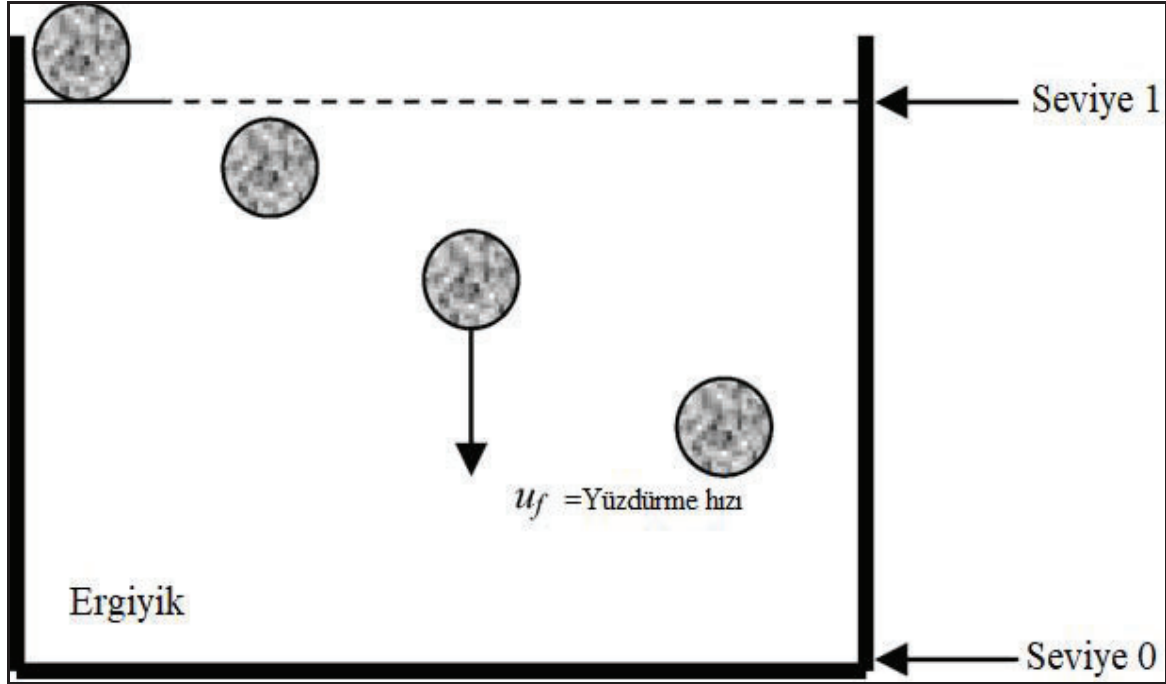


Şekil 3.10. Santrifüj döküm yöntemleri (a) yer çekimli (b) santrifüj

Sedimentasyon (çökelme) döküm

Takviye parçacıkları eriyik kabının yüzeyinde gezdirilir ve burada katılaştırma işlemini başlatarak uygulanan yöntemdir (Kambakas ve Tsakirooulos, 2006).

Şekil 3.11’ de çökeltme işleminin başlama seviyesinden ergiyik içine yüzdürme hızı ile nasıl gerçekleştiği şematik olarak verilmiştir. Burada seviye 1, ergiyik içine girmeden olan başlangıç kısmıdır ve burada parçacık düşüşü serbesttir. Seviye 0 ise eriyiğin en altındadır ve parçacık hareketinin bittiği kısımdır (Kambakas ve Tsakiroopoulos, 2006).



Şekil 3.11. Partikül çökmesinin şematik gösterimi

Kontrollü kalıp doldurma

Gradyan formasyonu kuvvet ve ısı taşınım ile yapılmaktadır. Derecelendirme ara yüzey genişliğinde ikinci eriyik döküldüğü anda ilk eriyiğin katılma derecesi tarafından kontrol gerçekleştirilir (Kieback vd. , 2003).

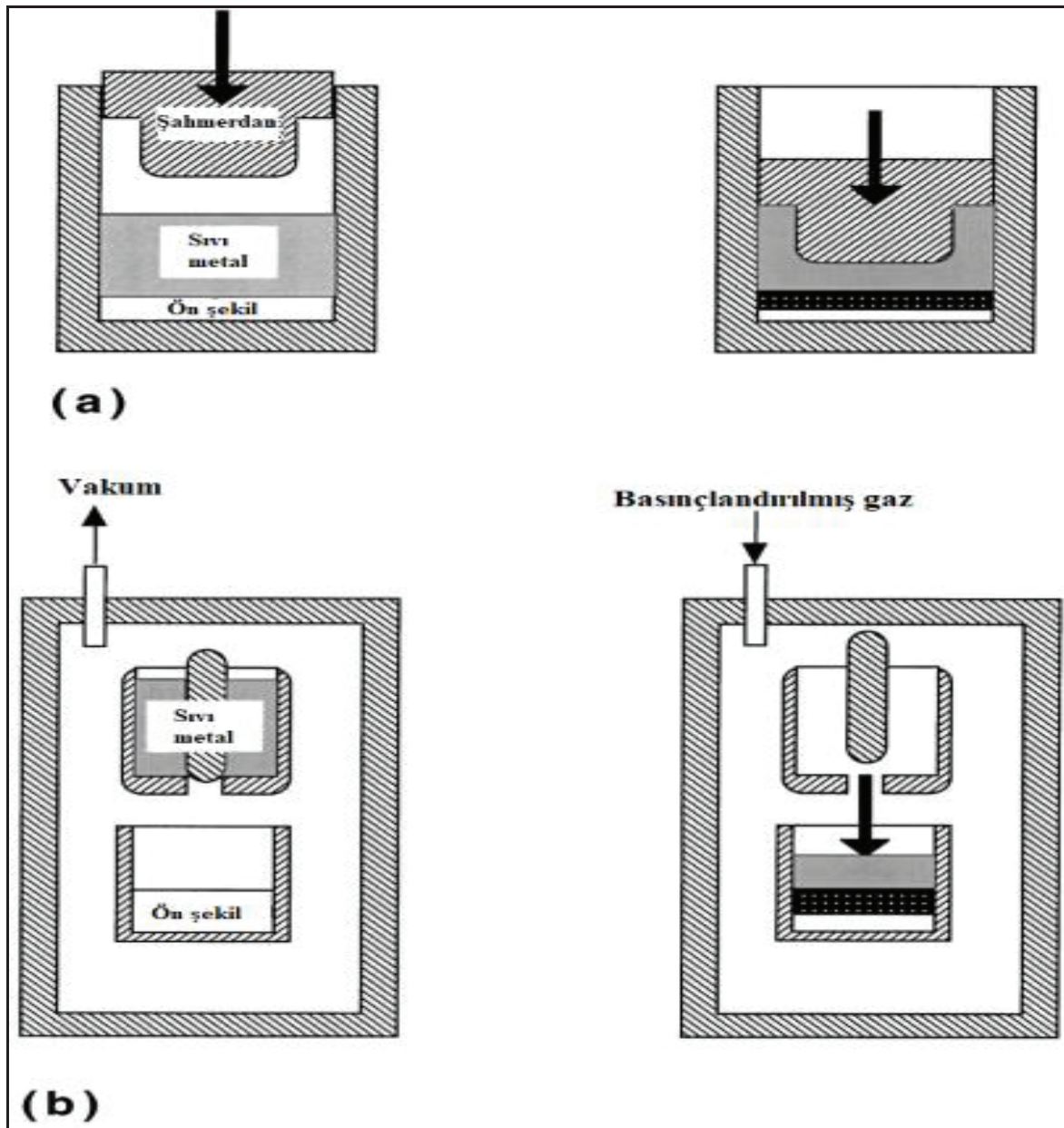
Doğrudan katılma

Bu işlemde FDM’ nin hazırlanmasında alaşımın doğrudan katılma işlemi boyunca katı ve sıvının arasındaki fark kullanılır (Kieback vd. , 2003).

İnfiltrasyon işlemi

Genellikle infiltrasyon; bir akış vasıtası ile başka bir akışın yerine geçmesi veya gözenekli katı malzemenin açık gözenek boşluğunda vakum veya gaz olarak bulunması olarak tanımlanmaktadır (Michaud ve Mortensen, 2000).

Şekil 3.12’ de metal matrisli bir kompozit malzemenin iki farklı infiltrasyon işlemi ile meydana getirilmesi şematik olarak gösterilmiştir (Michaud ve Mortensen, 2000).



Şekil 3.12. İnfiltrasyon işlemi şematik gösterimi (a) sıkıştırırmalı döküm (b) gaz basınçlı

Reaktif infiltrasyon

Reaktif infiltrasyon işleminde; ön şekil derecelendirilmiş kompozit malzemeyi şekillendirmek için infiltre edilmiş malzeme ile meydana gelmektedir. Düşük maliyet, hammadde kolaylığı ve iyi bir ıslatma sağlama gibi avantajlara sahiptir (Marple, Voyer, Bechard, Ceram, 2001).

Çizelge 3.1' de FDM üretim yöntemlerinin genel olarak özelliklerinin kıyaslaması tablo şeklinde verilmiştir (Udupa vd. , 2014).

Çizelge 3.1. FDM' nin üretim yöntemlerine genel bakış

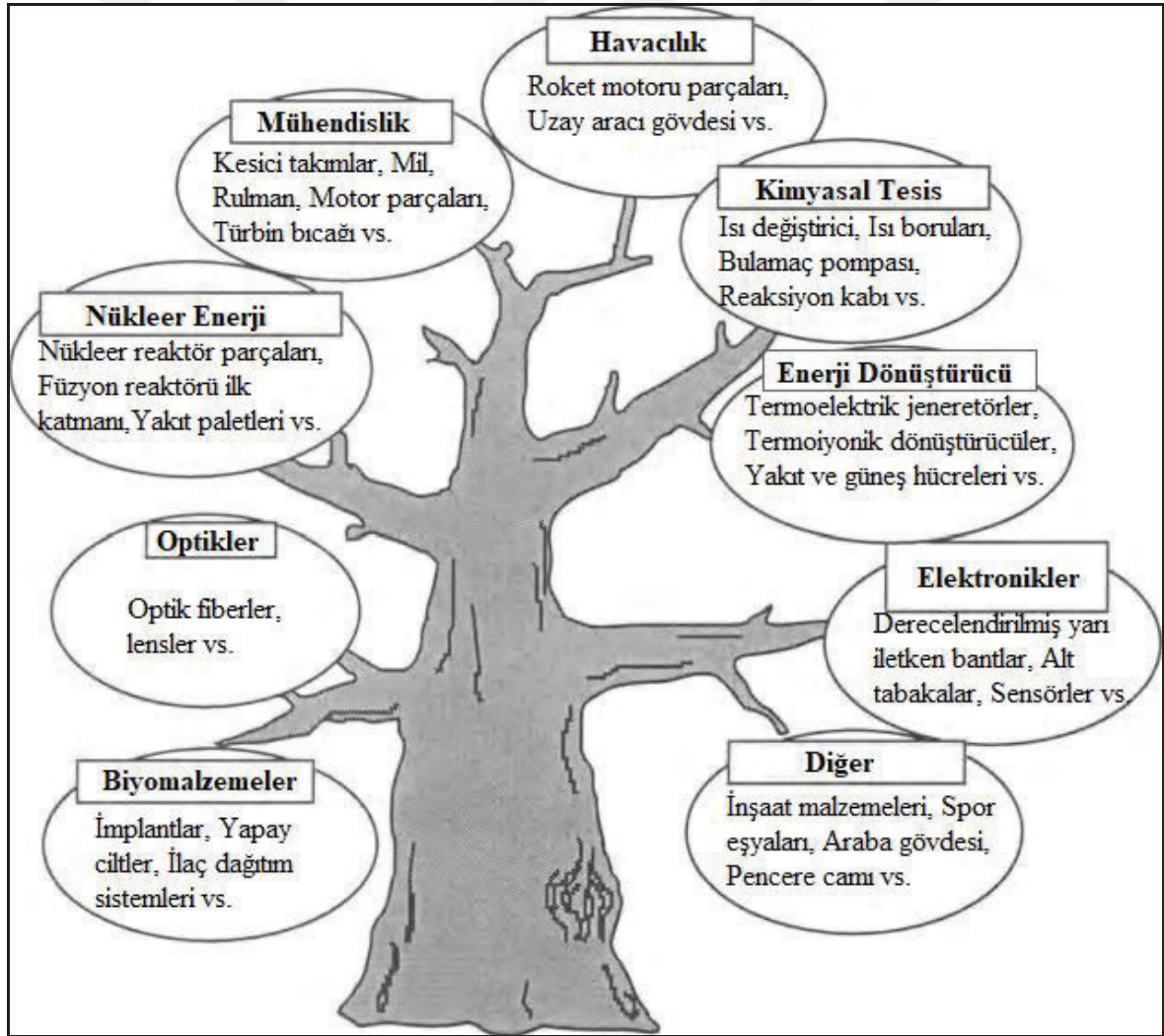
| Sıra No | İşlem | Geçiş Fonksiyonunun Değişkenliği | Faz İçeriğinde Çok Yönlülük | FDM Tipi | Bileşim Geometrisinde Çok Yönlülük |
|---------|--------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|-----------------|------------------------------------|
| 1 | Toz İstifleme | Çok İyi | Çok İyi | Hacim | Orta |
| 2 | Tabaka Laminasyonu | Çok İyi | Çok İyi | Hacim | Orta |
| 3 | Islak Toz Püskürtme | Çok İyi | Çok İyi | Hacim | Orta |
| 4 | Bulamaca Batırma | Çok İyi | Çok İyi | Kaplama | İyi |
| 5 | Jet Katılaşması | Çok İyi | Çok İyi | Hacim | Çok İyi |
| 6 | Çökeltme/Santrifüj | İyi | Çok İyi | Hacim | Zayıf |
| 7 | Filtrasyon/Slip Döküm | Çok İyi | Çok İyi | Hacim | İyi |
| 8 | Lazer Kaplama | Çok İyi | Çok İyi | Hacim, Kaplama | Çok İyi |
| 9 | Isıl Püskürtme | Çok İyi | Çok İyi | Kaplama, Hacim | İyi |
| 10 | Yayılma | Orta | Çok İyi | Ekleme, Kaplama | İyi |
| 11 | Doğrudan Katılaşma | Orta | Orta | Hacim | Zayıf |
| 12 | Elektrokimyasal Derecelendirme | Orta | İyi | Hacim | İyi |
| 13 | Polimer Köpüklemesi | Orta | İyi | Hacim | İyi |
| 14 | Buhar Biriktirme (CVD/PVD) | Çok İyi | Çok İyi | Kaplama | Orta |

Bu tez çalışması kapsamında FDM üretim yöntemlerinden genel olarak bahsedilmiştir. Ancak daha detaylı bilgiler için (Kieback vd. , 2003), (Udupa vd. , 2014) ve (Ebrahimi, 2016: 10-56) incelenebilir.

3.3. Kullanım Alanları

FDM' ler geliştirilmiş kompozit malzeme biçimidir. Bu nedenle günümüzde çoğu endüstri alanlarında kullanılmaktadır. Bununla birlikte üretimleri ile kullanımları artmakta ve yaygınlaşmaktadır. Çeşitli kullanım alanlarına sahip FDM' ler; sağlık alanlarından mühendislik alanlarına, enerji sektörlerinden ulaşım sektörlerine kadar farklı alanlarda değerlendirilmektedir.

Şekil 3.13' te FDM' nin kullanım alanları kollara ayrılmış bir biçimde örnekleri ile birlikte verilmiştir (Ebrahimi, 2016: 13).



Şekil 3.13. FDM' nin potansiyel kullanım alanları

FDM' lerin bazı kullanım alanları ile ilgili kısımlar başlıklar halinde aşağıda verilmiştir (Mahamood ve Akinlabi, 2017: 14-19).

3.3.1. Havacılık endüstrisi

FDM' lerin ilk uygulamaları uzay taşıtları gövdeleri için geliştirilmiştir. Bu alanda kullanımlarda son yıllarda artış olmuştur. Çoğu uzay ekipmanı ve yapısı FDM' den meydana gelmektedir. Bunlara örnek olarak; roket motoru parçaları, türbin bıçakları, burun kapakları füzeler, uzay uyduları, ısı değiştirici paneller gibi örnekler verilebilir (Mahamood ve Akinlabi, 2017: 16).

Kıbo uzay istasyonunda FDM, fişek olarak ve geri dönüştürülebilir bir roket motoru yerini olarak test cihazı için kullanılmıştır. Buna ek olarak özellikle havacılık alanında kullanılan roket ve uzay taşıtlarının geri dönüşümlü olabilmesi için de çalışmalar yapılmaktadır (Konez, Alagöz, Topal ve Gülgeç, 2005).

3.3.2. Otomotiv endüstrisi

Yüksek maliyetlerinden dolayı otomotiv alanında FDM kullanımını sınırlı kalmaktadır. Buna rağmen dizel motor pistonları için motor silindiri, sürüş milleri, şok emiciler, buji, yanmayakma odası, araç camları ve araç gövdesi gibi çeşitli otomobil parçalarında kullanılmaktadır. Bunlara ek olarak araç kaplamalarında da FDM kullanılabilir (Mahamood ve Akinlabi, 2017: 16).

3.3.3. Biyomedikal

Kemik yapıları için FDM' den yapılmış implantlar üzerine çalışılmaktadır. Yüksek moleküler ağırlıklı polietilen fiber takviyeli yüksek yoğunluğa sahip polietilen ile oluşturulan FDM, dizler için yapay biyomalzeme olarak geliştirilmektedir. Titanyum implantların zor dokular içinde büyümesini biyopolimer FDM kaplamalar geliştirebilmektedir. Ek olarak doku mühendisliği için iskelet yapımında kullanılabilir (Pompe, Worch, Epple, Gelinsky, Greil, Hempel, Scharnweber ve Schulte, 2003).

3.3.4. Enerji

FDM' lerin nükleer reaktör iç duvarı, termoelektrik dönüştürücü, güneş panelleri ve hücreleri, basıncılı tanklar ve ısıl bariyer kaplamalar gibi enerji konulu çeşitli alanlarda kullanımı mevcuttur (Mahamood ve Akinlabi, 2017: 17).

3.3.5. Diğer kullanım alanları

FDM' ler yangın söndürme fiekleri, yangın geciktirici kapılar ve koruyucu gözlükler gibi güvenlik ekipmanlarında kullanılmaktadır.

Ayrıca yakıt depoları, dizüstü bilgisayar kılıfları, müzik aletleri ve röntgen cihazı gibi alanlarda da kullanımı mevcuttur Ek olarak FDM' ler tenis raketleri ve kayaklar gibi spor aletlerinde de mevcuttur.

Ayrıca FDM' ler denizaltı araalarında bulunan pervane milleri, batma silindiri, kompozit boru sistemleri ve silindirik basıncı gövdesi gibi kısımlarda bulunmaktadır (Mahamood ve Akinlabi, 2017: 18-19).

FDM' lerin kullanım alanları ile ilgili daha kapsamlı bilgiler için (Mahamood ve Akinlabi, 2017: 9-21) ve (Ebrahimi, 2016: 12-32) incelenebilir.

Çizelge 3.2' de FDM' nin farklı bileşen örneklerinin çeşitli kullanım alanları verilmiştir (Udupa vd. , 2014).

Çizelge 3.2. FDM tiplerinin kullanım alanları

| Sıra No | FDM TİPİ | GEREKSİNİMLER | UYGULAMALAR |
|---------|---------------------------------|---|---|
| 1 | SiC-SiC | Aşınma direnci ve sertlik | Yanma odaları |
| 2 | Al-SiC | Sertlik ve tokluk | Yanma odaları |
| 3 | SiCw-/ Al alaşım | Termal ve kimyasal direnç | Doğalgaz depolama tankları, Dizel motor pistonları |
| 4 | E-Camı/ Epoksi | Sertlik ve ıslatma özellikleri | Fren rotorları, Yaprak yaylar |
| 5 | Al-C | | Sürüş milleri, Hubble uzay teleskopu ölçme destek yerleşimi, Türbin rotoru ve çarkları |
| 6 | Al-SiC | | Uçuş tekerlekleri, Yarış arabası frenleri |
| 7 | SiCp/ Al alaşım | Yüksek ergime noktası, düşük plastisite ve yüksek sertlik | Motosiklet sürüş dişlisi, Kasnaklar, Tork dönüştürücü reaktörleri, Şok emiciler |
| 8 | Karbon/ Cam fiber | | İtme mili |
| 9 | Cam/ Epoksi | | Basınçlı tank gövdeleri |
| 10 | TiAl-SiC Fiberleri | | Kompozit boru sistemleri, Dalış tüpleri |
| 11 | Be-Al | | Şamandıra, Tekne gövdesi, Rüzgâr tüneli bıçakları, Uzay aracı destek yapısı, Reflektörler, Güneş panelleri, Kamera muhafazası |
| 12 | Alümina/ Al alaşım | İyi termal ve aşınma direnci | Roket nozulu, Kanatlar, Döner fırlatıcılar, Motor gövdesi |
| 13 | Karbon/ Bismaleimit | | Sürüş milleri, Pervane bıçaklar, İniş takımı kapıları, Isı değiştiriciler, Motor parçaları |
| 14 | Karbon/ Epoksi | Hafif ve iyi ıslatma özellikleri | Helikopter parçaları (Rotor sürüş mili, ana rotor bıçakları vs.) |
| 15 | SiCw/ 6061 | Sertlik ve tokluk | Yarış bisikletleri ve araçları şasisi |
| 16 | Al alaşım/ Karbon Nanotüp | Hafif ve yüksek sertlik | Yapay bağlar, MR tarayıcı, Tekerlekli sandalyeler, Kalça eklem implantları, Gözlük çerçeveleri, Müzik aletleri |



4. GENEL TEORİK TANIMLAR VE DENKLEMLER

Kompozit malzemelerin mekaniğini tanımlayabilmek için homojen, homojen olmayan, izotropik, anizotropik, ortotropik malzemeler gibi bazı terimsel ifadelerin içerikleri ile birlikte bilinmesi gerekir. Böylelikle kompozit malzemenin ya da FDM' nin ana hatları ile ortaya konulması mümkündür.

Bu terimler sadece kavramsal olarak değil aynı zamanda analitik olarak da malzemenin davranışsal tanımlamaları için kullanılmaktadır (Kaw, 2014: 56-59).

4.1. Genel Elastisite Denklemleri

Kompozit malzemeler için genel olarak lineer ve elastik davranış kabulleri yapılabilir. Bu varsayımlar ile yola çıkıldığı takdirde genel elastisite denklemlerinin temeli olan Hooke kanunu mevcuttur. Buradan hareketle malzemenin mekanik yapısına göre analitik denklemlerin ve değişkenlerin üzerinden sistemlerin tanımlamalarına gidilebilmektedir.

Hooke kanunu; bir noktada alınan birim küpün yüzeyleri üzerinden altı lineer denklem ile bağlantılıdır. Belirlenen bu nokta için altışar tane gerilme ve gerinme ile üç adet yer değiştirme olmak üzere 15 tane bilinmeyen parametre vardır. En genel hali ile denklemler rijitlik ve esneklik olmak üzere 6x6 matris formundadır. Çünkü bir malzemenin üç boyutta deformasyonunun bilinebilmesi için sadece gerilme bileşenleri yetersizdir ve gerilme-gerinme bağıntıları kullanılmalıdır (Kaw, 2014: 56-95).

Rijitlik (C) matrisi, esneklik (S) matrisinin tersi biçiminde olmak üzere:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Eşitlik 4.1' de verildiği gibi 6x6 boyutlu bir matristir. Bu 36 bağımsız elastik sabit (Kaw, 2014: 95);

Anizotropik Malzeme:21

Monoklinik Malzeme:13

Ortotropik Malzeme:9

Enine İzotropik Malzeme:5

İzotropik Malzeme:2

Verilen adetlerde olmak üzere matris yapıları malzemelerin türlerine göre farklılık göstermektedir. Sıcaklık etkisi göz önünde bulundurularak düzlemsel koordinatlar için genelleştirilmiş Hooke kanunu (Timoshenko ve Goodier, 1951):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha T \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T \quad (4.4)$$

Düzlemsel koordinatlarda denge denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (4.7)$$

Bu eşitliklerde F_x, F_y ve F_z iç (gövde) kuvvetlerdir.

Silindirik koordinatlarda denge denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0 \quad (4.10)$$

Bu eşitliklerde F_r, F_θ ve F_z iç kuvvetlerdir.

Yine silindirik koordinatlar için u, v, w yer değiştirmelerinin olduğu varsayımı ile:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.11)$$

Silindirik koordinatlarda gerinim denklemleri yazılabilir.

4.2. Silindir İçin Sıcaklık Dağılımı Denklemleri

Silindirik cisimler için genel sıcaklık ifadesi (Cengel, 2003):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(kr \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.12)$$

Eşitlik 4.1’de görüldüğü gibi yazılmaktadır. Burada silindirik koordinatlar r, θ ve z olmak üzere;

k =Isıl İletkenlik Katsayısı,

ρ =Yoğunluk,

C_p =Isıl Kapasite,

\dot{q} = Zamana Bağlı Olarak Üretilen İç Enerji,

T =Sıcaklık,

olarak ifade edilmektedir.

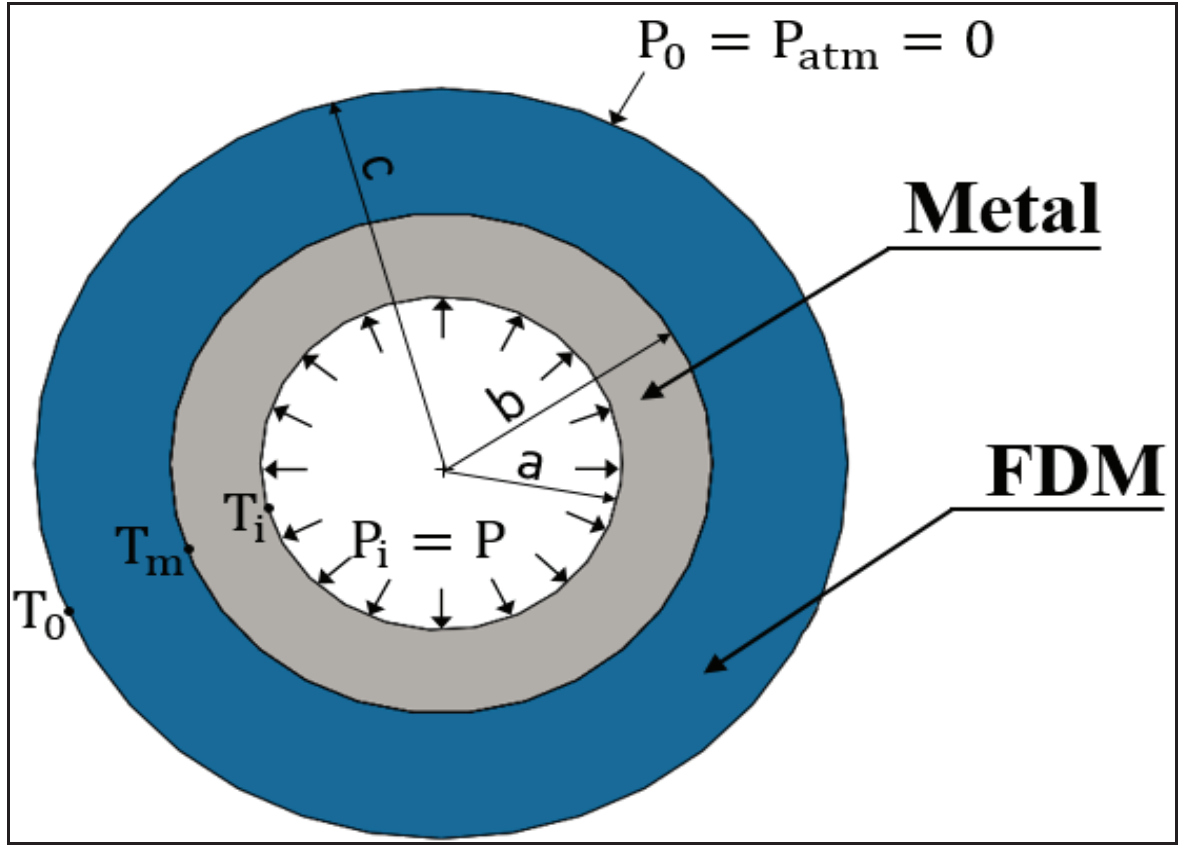
5. METAL VE FDM İLE OLUŞTURULAN HİBRİT SİSTEMİN (MFHS) MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

Bu bölümde, metal ve FDM ile oluşturulan hibrit sistem (MFHS) için silahlar, tanklar, obüsler ve denizaltı torpidoları gibi çeşitli namlulara sahip, iç basınç ve sıcaklık etkisinde olan sistemler göz önünde bulundurularak matematiksel modellenmesi yapılmış ve termomekanik özellikleri incelenmiştir. MFHS' nin elastisite denklemlerinin bulunması için iç içe geçmiş silindirlere göz önüne alınarak sınır şartları çözümünden önce sistem ikiye ayrılmıştır (Yang vd. , 2005-Apatay ve Mack, 2015). Bu çalışmada, analitik denklemlerin çözümünde ve sonuçlarında Wolfram Mathematica paket programı kullanılmıştır.

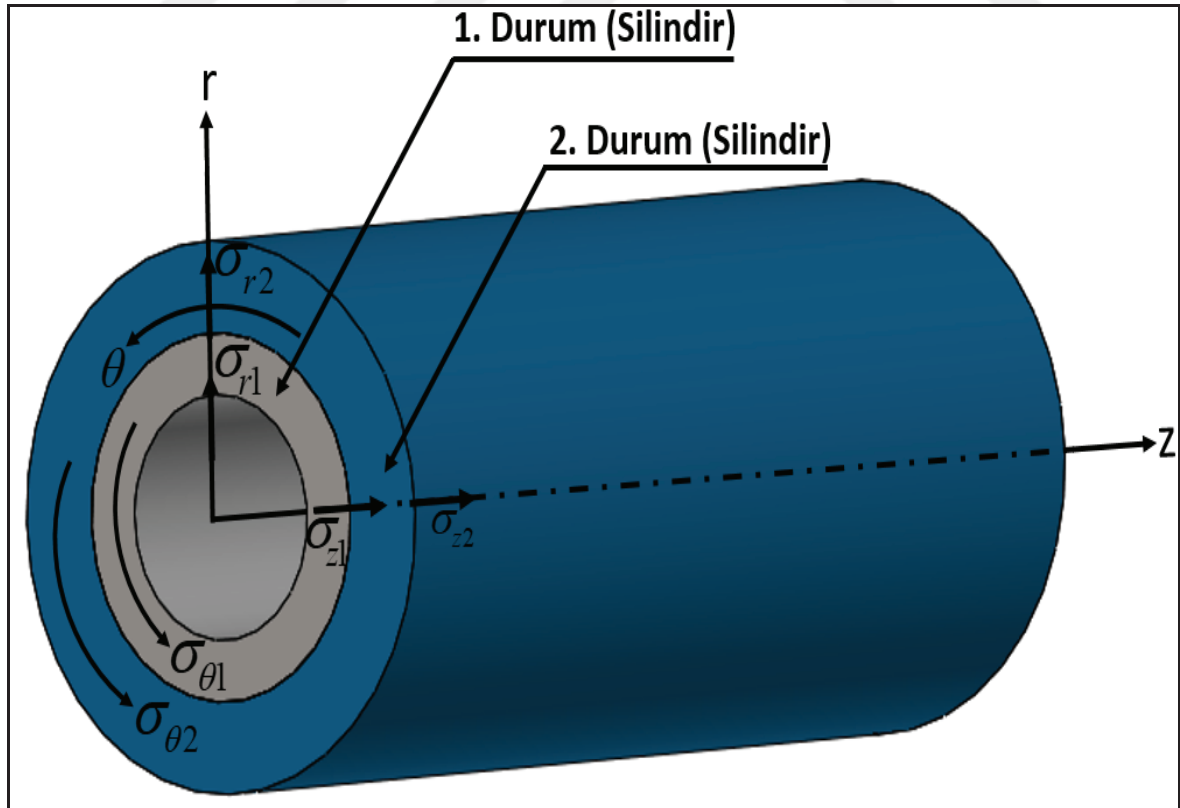
Şekil 5.1' de görüldüğü gibi iç kısımda parça ile bütünleşik tasarlanmış bir metal ve dış kısmında ise metal, seramik gibi farklı bir malzemenin FDM olarak birleştirilmesi ile oluşturulan kompozit malzeme vardır.

MFHS' nin 2 boyutlu (a) görünümünde T_i , T_m ve T_0 yarıçaplar üzerinde bulunan sıcaklıkları temsil etmektedir. Burada a , b ve c yarıçaplardır. Aynı zamanda sistemin iç basıncı P_i , dış basıncı P_0 olarak tanımlanmıştır. MFHS' nin iç basınç değerinin P , dış basıncın atmosfer basıncına (P_{atm}) eşit ve değerinin ihmal edilebilir düzeyde olduğu varsayılmıştır. MFHS' nin 3 boyutlu (b) görünümünde radyal, teğetsel ve eksenel gerilmeler eksenleri ile birlikte verilmiştir.

MFHS probleminin sınır şartları belirlenirken eksenel simetriye uygun olduğu düşünülerek yalnızca radyal doğrultuda değişimlerin olduğu varsayımı ile çözüme gidilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 5.1. MFHS' nin 2 boyutlu (a) ve 3 boyutlu (b) görünümü

5.1. MFHS' nin Sıcaklık (T) Denklemlerinin Çıkarılması

MFHS' nin sıcaklık denkleminin çıkarılmasında silindirik sistemler için genel sıcaklık denklemi göz önünde bulundurularak, zamandan bağımsız bir şekilde yalnızca radyal doğrultudaki değişimler, hem içinde enerji üreten bir nesnenin olmaması hem de zamandan bağımsız incelenmesinden dolayı iç enerji üretiminin de olmadığı şartlar ele alınarak incelendiğinde;

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(kr \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

Eşitlik 5.1 denklemleri ile birlikte,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.2)$$

Eşitlik 5.2 elde edilmektedir. Bu denklem, sistemde bulunan iki farklı durum göz önüne alınarak çözülmüşür:

1. Durum $a \leq r \leq b$ için ;

$$k_1 = k_0 = \text{sabit} \quad (5.3)$$

2. Durum $b \leq r \leq c$ için;

$$k_2 = k_2(r) = k_0 \left(\frac{r}{b} \right)^\beta \quad (5.4)$$

Burada β =FDM' ler İçin Homojensizlik Katsayısı olmak üzere;

Eşitlik 5.2 ifadesi açılarak,

$$\frac{1}{r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial r} + k \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} + kr \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (5.5)$$

Eşitlik 5.5 elde edilir ve 1. durum için olan Eşitlik 5.3 göz önüne alınarak bu eşitlik düzenlenirse;

$$\frac{1}{r} \left[k_0 \frac{\partial T}{\partial r} + k_0 r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (5.6)$$

Eşitlik 5.6 elde edilir ve sadeleştirilirse;

$$\frac{k_0}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0 \quad (5.7)$$

Eşitlik 5.7 elde edilir ve ifade son olarak düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (5.8)$$

Sonuç diferansiyel denklemi elde edilir ve tek değişkene bağlı kısmi diferansiyel denklem olan Eşitlik 5.8,

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (5.9)$$

Eşitlik 5.9 gibi kabul edilir ve bu denklem Euler-Cauchy diferansiyel denklem çözümü yöntemi uygulanırsa;

$$r = r(t) = e^t, \quad dr = e^t dt, \quad \frac{dr}{dt} = r'(t) = e^t, \quad \frac{dt}{dr} = t'(r) = e^{-t} \quad (5.10)$$

Eşitlik 5.10 tanımlamaları yapılarak,

$$T'(r) = \frac{dT(r)}{dr} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{dr} = e^{-t} \frac{dT}{dt} \quad (5.11)$$

$$T''(r) = \frac{d^2T}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{dT}{dr} \right] = \frac{dt}{dr} \frac{d}{dt} \left[\frac{dT}{dt} \right] \quad (5.12)$$

Eşitlik 5.12 ifadesi t cinsinden yazılırsa;

$$T''(t) = e^{-t} \left[-e^{-t} \frac{dT}{dt} + e^{-t} \frac{d^2T}{dt^2} \right] = e^{-2t} \left[\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{dT}{dt} \right] \quad (5.13)$$

Eşitlik 5.13 elde edilir ve Eşitlik 5.9, t cinsinden ifade edilirse;

$$e^{-2t} \frac{d^2T}{dt^2} - e^{-2t} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{e^{-t}} \left[e^{-t} \frac{dT}{dt} \right] = 0 \quad (5.14)$$

Eşitlik 5.14 bulunur ve denklem düzenlenirse;

$$\frac{d^2T}{dt^2} = 0, \quad T = T(t) \quad (5.15)$$

Çözülmesi gereken denklemin t cinsinden ifadesi bulunur. Burada çözüme gidebilmek için Eşitlik 5.15' in integrali alınır;

$$\frac{dT(t)}{dr} = C_1 \quad (5.16)$$

Eşitlik 5.16 elde edilir ve bu ifadenin de integrali alınır;

$$T(t) = C_1 r + C_2 \quad (5.17)$$

Çözülen denklem t cinsinden bulunmuş olup bulmak istenilen ana denklem türüne yani r cinsinden ifadesine geçilir;

$$T_1(r) = C_1 r + C_2 = C_1 \ln r + C_2 \quad (5.18)$$

Eşitlik 5.5, 2. durum için olan Eşitlik 5.4 göz önüne alınarak düzenlenirse;

$$\frac{1}{r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\beta k_0 r^{\beta-1}}{b^\beta} \right) + \frac{k_0 r^\beta}{b^\beta} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{k_0 r^{\beta+1}}{b^\beta} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (5.19)$$

Eşitlik 5.19 elde edilir ve sadeleştirilirse;

$$\frac{k_0 r^\beta}{b^\beta} \left[\beta r^{\beta-1} \frac{\partial T}{\partial r} + r^{\beta-1} \frac{\partial T}{\partial r} + r^\beta \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (5.20)$$

Eşitlik 5.20 elde edilir ve ifade son olarak düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1 + \beta}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (5.21)$$

Sonuç diferansiyel denklemi elde edilir ve tek değişkene bağlı kısmi diferansiyel olan Eşitlik 5.21,

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1 + \beta}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (5.22)$$

Eşitlik 5.22 gibi kabul edilir ve bu denklemi çözmek için Euler-Cauchy diferansiyel denklem çözümü yöntemi uygulanırsa;

$$r = r(t) = e^t, \quad dr = e^t dt, \quad \frac{dr}{dt} = r'(t) = e^t, \quad \frac{dt}{dr} = t'(r) = e^{-t} \quad (5.23)$$

Eşitlik 5.23 tanımlamaları yapılarak,

$$T'(r) = \frac{dT(r)}{dr} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{dr} = e^{-t} \frac{dT}{dt} \quad (5.24)$$

$$T''(r) = \frac{d^2T}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{dT}{dr} \right] = \frac{dt}{dr} \frac{d}{dt} \left[\frac{dT}{dt} \right] \quad (5.25)$$

Eşitlik 5.22 ifadesi t cinsinden yazılırsa;

$$T''(t) = e^{-t} \left[-e^{-t} \frac{dT}{dr} + e^{-t} \frac{d^2T}{dr^2} \right] = e^{-2t} \left[\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{dT}{dt} \right] \quad (5.26)$$

Eşitlik 5.26 elde edilir ve Eşitlik 5.22, t cinsinden ifade edilirse;

$$e^{-2t} \frac{d^2T}{dt^2} - e^{-2t} \frac{dT}{dt} + \frac{1+\beta}{e^t} \left[e^{-t} \frac{dT}{dt} \right] = 0 \quad (5.27)$$

Eşitlik 5.27 bulunur ve Eşitlik düzenlenirse;

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \beta \frac{dT}{dt} = 0, \quad T = T(t) \quad (5.28)$$

Çözülmesi gereken denklemin t cinsinden ifadesi bulunur. Burada çözüme gidebilmek için;

$$T(t) = e^{mt}, \quad dT(t) = me^{mt} dt, \quad d^2T(t) = m^2 e^{mt} dt \quad (5.29)$$

Eşitlik 5.29 ifadeleri yazılır ve Eşitlik 5.28 buna göre düzenlenirse;

$$m^2 e^{mt} + \beta m e^{mt} = 0 \quad (5.30)$$

Çözülmesi gerekli ifade Eşitlik 5.30 gibi olur. Burada;

$$e^{mt} (m^2 + \beta m) = 0 \quad (5.31)$$

e^{mt} ifadesi sıfıra eşit olamayacağı için;

$$m^2 + m\beta = 0 \quad (5.32)$$

Eşitlik 5.32' nin kökleri:

$$m_1 = -\beta, \quad m_2 = 0 \quad (5.33)$$

İkinci dereceden diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$T(t) = C_3 e^{m_1 t} + C_4 e^{m_2 t} = C_3 e^{-\beta t} + C_4 e^0 = C_3 e^{-\beta t} + C_4 \quad (5.34)$$

Eşitlik 5.34 gibi bulunur ve r cinsinden ifadesi yazılırsa FDM için sıcaklık denklemi:

$$T_2(r) = C_3 (e^t)^{-\beta} + C_4 = C_3 \left(\frac{1}{r} \right)^\beta + C_4 \quad (5.35)$$

MFHS' nin sınır şartlarında;

$$r = a \quad \rightarrow \quad T(r) = T_i \quad (5.36)$$

$$r = b \quad \rightarrow \quad T(r) = T_m \quad (5.37)$$

$$r = c \quad \rightarrow \quad T(r) = T_0 = T_{atm} = 300[K] \quad (5.38)$$

Silindirik parçanın metal ve FDM kısımlarının sıcaklık durumları farklı aralıklarda oluşacağından dolayı birinci ve ikinci kısım olarak malzemelerin durumlarını incelemek gerekmektedir. Bu nedenle durumlar için ifadeler yazılır:

$$a \leq r \leq b \rightarrow T_1(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \quad (5.39)$$

$$a \leq r \leq b \rightarrow k_1 = k_0 = \text{sabit} \quad (5.40)$$

$$a \leq r \leq b \rightarrow \alpha_1 = \alpha_0 = \text{sabit} \quad (5.41)$$

$$b \leq r \leq c \rightarrow T_2(r) = C_3 \left(\frac{1}{r} \right)^\beta + C_4 \quad (5.42)$$

$$b \leq r \leq c \rightarrow k_2 = k_2(r) = k_0 \left(\frac{r}{b} \right)^\beta \quad (5.43)$$

$$b \leq r \leq c \rightarrow \alpha_2 = \alpha_2(r) = \alpha_0 \left(\frac{r}{b} \right)^\beta \quad (5.44)$$

Buna göre sınır şartları düzenlenir ve iletimle ısı transferi denklemi şartı da eklenirse;

$$r = a \rightarrow T_1(a) = T_i \quad (5.45)$$

$$r = c \rightarrow T_2(c) = T_0 = 300[K] \quad (5.46)$$

$$r = b \rightarrow T_1(b) = T_2(b) = T_m \quad (5.47)$$

$$r = b \rightarrow k_1 \frac{\partial T_1(r)}{\partial r} = k_2 \frac{\partial T_2(r)}{\partial r} \quad (5.48)$$

Sınır şartları ile birlikte denklemler yerine yazılır ve ifadeler düzenlenirse;

$$T_1(a) = C_1 \ln(a) + C_2 = T_i \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial T_1(r)}{\partial r} = C_1 r^{-1} \quad (5.50)$$

$$T_2(c) = C_3 \left(\frac{1}{c}\right)^\beta + C_4 = 300 \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial T_2(r)}{\partial r} = -C_3 \beta \left(\frac{1}{r}\right)^{1+\beta} \quad (5.52)$$

$$T_1(b) = C_1 \ln(b) + C_2 \quad (5.53)$$

$$T_2(b) = C_3 \left(\frac{1}{b}\right)^\beta + C_4 \quad (5.54)$$

Yazılan denklemler sınır şartları içerisinde birbirleri ile işleme alınırsa;

$$k_1 \frac{\partial T_1(b)}{\partial r} = k_2 (b) \frac{\partial T_2(b)}{\partial r} = k_0 C_1 b^{-1} = -k_0 \left(\frac{b}{b}\right)^\beta C_3 \beta \left(\frac{1}{b}\right)^{1+\beta} \quad (5.55)$$

Eşitlik 5.55 sadeleştirilirse;

$$C_1 = -\beta b^{-\beta} C_3 \quad (5.56)$$

Eşitlik 5.56 bulunur ve Eşitlik 5.49 ve Eşitlik 5.51 düzenlenirse;

$$C_2 = T_i - C_1 \ln(a) \quad (5.57)$$

$$C_4 = 300 - C_3 \left(\frac{1}{c} \right)^\beta \quad (5.58)$$

Eşitlik 5.57 ve Eşitlik 5.58 oluşur ve birlikte çözülürse;

$$C_1 \ln(b) + T_i - C_1 \ln(a) = C_3 b^{-\beta} + 300 - C_3 c^{-\beta} \quad (5.59)$$

Eşitlik 5.59 bulunur. Bu denklem C_1 ortak parantezine alınır ve aynı zamanda;

$$\gamma = \beta \ln \left(\frac{a}{b} \right) - b^{-\beta} + c^{-\beta} \quad (5.60)$$

Eşitlik 5.60 tanımlanırsa;

$$C_1 = - \frac{\beta b^{-\beta} (300 - T_i)}{\gamma} = \frac{\beta b^{-\beta} (T_i - 300)}{\gamma} \quad (5.61)$$

$$C_2 = \frac{T_i \gamma + \beta b^{-\beta} (300 - T_i) \ln(a)}{\gamma} \quad (5.62)$$

$$C_3 = \frac{300 - T_i}{\gamma} \quad (5.63)$$

$$C_4 = \frac{300 \gamma - (300 - T_i) c^{-\beta}}{\gamma} \quad (5.64)$$

Diferansiyel denklem sabitleri bulunur. Böylelikle sıcaklık ile ilgili denklemler yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned}
T_1(r) &= \frac{\beta b^{-\beta} (T_i - 300)}{\gamma} \ln(r) + \frac{T_i \gamma + \beta b^{-\beta} (300 - T_i) \ln(a)}{\gamma} \\
&= \frac{\beta b^{-\beta} (T_i - 300) \ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\gamma} + T_i
\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
T_2(r) &= \frac{300 - T_i}{\gamma} r^{-\beta} + \frac{300\gamma - (300 - T_i)c^{-\beta}}{\gamma} \\
&= 300 + \frac{(T_i - 300)c^{-\beta}}{\gamma} - \frac{(T_i - 300)r^{-\beta}}{\gamma}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Sıcaklık ifadelerinin türevleri alınır;

$$\frac{dT_1(r)}{dr} = \frac{\beta b^{-\beta} (T_i - 300)}{\gamma r} \tag{5.67}$$

$$\frac{dT_2(r)}{dr} = \frac{\beta (T_i - 300)}{\gamma} r^{-\beta-1} \tag{5.68}$$

Eşitlik 5.67 ve Eşitlik 5.68 bulunmuş olur. Böylelikle MFHS' nin elastik çözümüne geçmeden sıcaklık denklemleri çıkarılmıştır.

5.2. MFHS' nin Elastisite Denklemlerinin Çıkarılması

MFHS' de parçanın metal ve FDM şeklinde iki kısma ayrılması neticesinde sıcaklık, ısıl genişleme ve iletkenlik gibi değerlerde farklılık olduğu şekilde elastisite (Young Modülü) modülünde de farklılık olacaktır. Elastisite modülleri tanımlanırsa;

$$a \leq r \leq b \quad \rightarrow \quad E_1 = E_0 = \text{sabit} \tag{5.69}$$

$$b \leq r \leq c \quad \rightarrow \quad E_2 = E_2(r) = E_0 \left(\frac{r}{b} \right)^\beta \quad (5.70)$$

Eşitlik 5.69 ve Eşitlik 5.70 gibi olur. Burada radyal doğrultudaki değişimler göz önünde bulundurularak $u = u(r)$ yazılır. Aynı zamanda küçük deformasyonların söz konusu olduğu ve genelleştirilmiş bir düzlem gerinme durumu olduğu varsayımı ile Eşitlik 4.10 düzenlenirse;

$$\varepsilon_r(r) = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta(r) = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z(r) = \varepsilon_0 = \text{sabit} \quad (5.71)$$

Radyal doğrultudaki değişimler göz önünde bulundurularak silindirik koordinatlar için genelleştirilmiş Hooke kanunu:

$$\varepsilon_r(r) = \frac{1}{E(r)} \left[\sigma_r(r) - \nu (\sigma_\theta(r) + \sigma_z(r)) \right] + \alpha(r)T(r) \quad (5.72)$$

$$\varepsilon_\theta(r) = \frac{1}{E(r)} \left[\sigma_\theta(r) - \nu (\sigma_r(r) + \sigma_z(r)) \right] + \alpha(r)T(r) \quad (5.73)$$

$$\varepsilon_z(r) = \frac{1}{E(r)} \left[\sigma_z(r) - \nu (\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)) \right] + \alpha(r)T(r) \quad (5.74)$$

Şeklinde yazılır ve silindirik parçanın eksenel simetri durumunda radyal doğrultudaki değişimi göz önüne alınarak, $u = u(r)$ eşitliği yazılarak Eşitlik 5.71, Eşitlik 5.72, Eşitlik 5.73 ve Eşitlik 5.74 ile birlikte çözülürse;

$$\sigma_r(r) = \frac{E(r)\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\left(\frac{\nu-1}{\nu} \right) \frac{du(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r} \right) u(r) \right] - \frac{\alpha(r)T(r)(1-\nu)}{E(r)\nu} - \varepsilon_0 \quad (5.75)$$

$$\sigma_{\theta}(r) = \frac{E(r)\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} -\frac{du(r)}{dr} + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{r}\right)u(r) \\ \frac{\alpha(r)T(r)(1-\nu)}{E(r)\nu} - \varepsilon_0 \end{array} \right] \quad (5.76)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{E(r)\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} -\frac{du(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r}\right)u(r) \\ \frac{2(1-\nu)\alpha(r)T(r)}{E(r)\nu} \\ -2\nu\varepsilon_0 \end{array} \right] + E(r)\varepsilon_0 - \alpha(r)T(r) \quad (5.77)$$

Gerilme denklemleri türetilir ve böylelikle MFHS' nin silindirik koordinatlarda $a \leq r \leq b$ birinci durumu için düzenlenirse;

$$\sigma_{r_1}(r) = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{du_1(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r}\right)u_1(r) \\ \frac{\alpha_0 T_1(r)(1-\nu)}{E_0\nu} - \varepsilon_0 \end{array} \right] \quad (5.78)$$

$$\sigma_{\theta_1}(r) = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} -\frac{du_1(r)}{dr} + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{r}\right)u_1(r) \\ \frac{\alpha_0 T_1(r)(1-\nu)}{E_0\nu} - \varepsilon_0 \end{array} \right] \quad (5.79)$$

$$\sigma_{z1}(r) = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} -\frac{du_1(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r}\right)u_1(r) \\ -\frac{2(1-\nu)\alpha_0 T_1(r)}{E_0\nu} \\ -2\nu\varepsilon_0 \end{array} \right] + E_0\varepsilon_0 - \alpha_0 T_1(r) \quad (5.80)$$

Şeklinde yazılmış olur ve silindirik koordinatlarda denge denklemi aksenal simetri, radyal doğrultuda yer değişimi ve gövde kuvveti etkisinin olmadığı durum ile yeniden düzenlenirse Eşitlik 4.8;

$$\frac{\partial\sigma_r(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_r(r) - \sigma_\theta(r)}{r} = 0 \quad (5.81)$$

Şeklinde olur ve buradaki ifadeleri yerine koyabilmek için;

$$\frac{d\sigma_{r1}(r)}{dr} = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{d^2u_1(r)}{dr^2} - \left(\frac{1}{r}\right)\frac{du_1(r)}{dr} \\ + \left(\frac{1}{r^2}\right)u_1(r) - \frac{\alpha_0(1-\nu)}{E_0\nu}\frac{dT_1(r)}{dr} \end{array} \right] \quad (5.82)$$

$$\frac{\sigma_{r1}(r) - \sigma_{\theta1}(r)}{r} = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du_1(r)}{dr} \\ - \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)u_1(r) \end{array} \right] \quad (5.83)$$

Eşitlik 5.81 ile Eşitlik 5.82 türetilir ve Eşitlik 5.83' te yerine konursa;

$$\frac{d\sigma_{r1}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{r1}(r) - \sigma_{\theta1}(r)}{r} = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) \frac{d^2u_1(r)}{dr^2} + \\ \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) \left(\frac{1}{r}\right) \frac{du_1(r)}{dr} \\ + \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) \left(\frac{1}{r^2}\right) u_1(r) \\ - \frac{\alpha_0(1-\nu)}{E_0\nu} \frac{dT_1(r)}{dr} \end{array} \right] = 0 \quad (5.84)$$

Eşitlik 5.84 bulunur ve böylelikle;

$$\frac{d^2u_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} u_1(r) + \frac{\beta\alpha_0 b^{-\beta} (T_i - 300)}{E_0\gamma} r^{-1} = 0 \quad (5.85)$$

Eşitlik 5.85 yazılabilir ve bu diferansiyel denklemin genel çözümü:

$$\xi = \frac{\beta\alpha_0 b^{-\beta} (T_i - 300)}{E_0\gamma} \quad (5.86)$$

Eşitlik 5.86 sabiti tanımlandığı gibi olmak üzere;

$$u_1(r) = \frac{\xi}{2} r \ln(r) - \frac{\xi}{4} r + \frac{C_5}{r} + C_6 r \quad (5.87)$$

Eşitlik 5.87 bulunur. Burada C_5 ve C_6 diferansiyel denklem sabitleridir. Gerilmeleri bulabilmek için Eşitlik 5.87'nin türevi alınırsa;

$$\frac{du_1(r)}{dr} = \frac{\xi}{2} \ln(r) - \frac{C_5}{r^2} + C_6 + \frac{\xi}{4} \quad (5.88)$$

Eşitlik 5.88 türetilir ve ilgili denklemler, Eşitlik 5.78, Eşitlik 5.79 ve Eşitlik 5.80 gerilme denklemlerinde yerine konursa;

$$\sigma_{r1}(r) = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{\xi}{2}\ln(r) - \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)\frac{C_5}{r^2} - \left(\frac{1}{\nu}\right)C_6 \\ & + \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)\frac{\xi}{4} - \frac{(1-\nu)\alpha_0 T_i}{E_0\nu} - \varepsilon_0 \\ & - \frac{\beta b^{-\beta}(1-\nu)\alpha_0(T_i-300)\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{E_0\nu\gamma} \end{aligned} \right] \quad (5.89)$$

$$\sigma_{\theta1}(r) = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{\xi}{2}\ln(r) + \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)C_5 \\ & - \left(\frac{1}{\nu}\right)C_6 - \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)\frac{\xi}{4} - \frac{\alpha_0(1-\nu)T_i}{E_0\nu} - \varepsilon_0 \\ & - \frac{\beta b^{-\beta}\alpha_0(1-\nu)(T_i-300)\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{E_0\nu\gamma} \end{aligned} \right] \quad (5.90)$$

$$\sigma_{z1}(r) = \frac{E_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{aligned} & -\xi\ln(r) - 2C_6 - \frac{2(1-\nu)\alpha_0 T_i}{E_0\nu} - 2\nu\varepsilon_0 \\ & - \frac{\beta b^{-\beta}2(1-\nu)\alpha_0(T_i-300)\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{E_0\nu\gamma} \end{aligned} \right] \quad (5.91)$$

$$+ E_0\varepsilon_0 - \frac{\beta b^{-\beta}\alpha_0(T_i-300)\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\gamma} - \alpha_0 T_i$$

Eşitlik 5.89, Eşitlik 5.90 ve Eşitlik 5.91’de olduğu gibi gerilmeler bulunur. MFHS $b \leq r \leq c$ ikinci durumu için incelenirse;

Eşitlik 5.70, Eşitlik 5.43 ve Eşitlik 5.44’ün bilindiği gibi türevleri:

$$\frac{dE_2(r)}{dr} = \beta \frac{E_0}{b^\beta} r^{\beta-1} = \frac{\beta}{r} E_2(r) \quad (5.92)$$

$$\frac{dk_2(r)}{dr} = \beta \frac{k_0}{b^\beta} r^{\beta-1} = \frac{\beta}{r} k_2(r) \quad (5.93)$$

$$\frac{d\alpha_2(r)}{dr} = \beta \frac{\alpha_0}{b^\beta} r^{\beta-1} = \frac{\beta}{r} \alpha_2(r) \quad (5.94)$$

Şeklinde bulunur ve böylelikle gerilme denklemleri yazılırsa;

$$\sigma_{r_2}(r) = \frac{E_2(r)\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\nu-1}{\nu} \right) \frac{du_2(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r} \right) u_2(r) \\ - \frac{\alpha_2(r)T_2(r)(1-\nu)}{E_2(r)\nu} - \varepsilon_0 \end{array} \right] \quad (5.95)$$

$$\sigma_{\theta_2}(r) = \frac{E_2(r)\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{l} - \frac{du_2(r)}{dr} + \left(\frac{\nu-1}{\nu} \right) \left(\frac{1}{r} \right) u_2(r) \\ - \frac{\alpha_2(r)T_2(r)(1-\nu)}{E_2(r)\nu} - \varepsilon_0 \end{array} \right] \quad (5.96)$$

$$\sigma_{z_2}(r) = \frac{E_2(r)\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} -\frac{du_2(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r}\right)u_2(r) \\ -\frac{2(1-\nu)\alpha_2(r)T_2(r)}{E_2(r)\nu} \\ -2\nu\varepsilon_0 \end{array} \right] \quad (5.97)$$

$$+E_2(r)\varepsilon_0 - \alpha_2(r)T_2(r)$$

Bölüm 4' te verilen denge denklemleri ilgili ifadeleri yerine koyabilmek için Eşitlik 5.95 ve Eşitlik 5.96 ile gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{d\sigma_{r_2}(r)}{dr} = \frac{E_2(r)\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{d^2u_2(r)}{dr^2} + \left(\frac{1-\beta}{r^2}\right)u_2(r) \\ + \left(\frac{\beta\nu-\beta-\nu}{\nu}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du_2(r)}{dr} \\ - \left(\frac{\beta}{r}\right)\frac{\alpha_2(r)T_2(r)(1-\nu)}{E_2(r)\nu} \\ - \frac{\alpha_2(r)(1-\nu)}{E_2(r)\nu}\frac{dT_2(r)}{dr} - \frac{\beta\varepsilon_0}{r} \end{array} \right] \quad (5.98)$$

$$\frac{\sigma_{r_2}(r) - \sigma_{\theta_2}(r)}{r} = \frac{E_2(r)\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du_2(r)}{dr} \\ - \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)u_2(r) \end{array} \right] \quad (5.99)$$

Eşitlik 5.98 ve Eşitlik 5.99, denge denklemlerinde yerine konursa;

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{r_2}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{r_2}(r) - \sigma_{\theta_2}(r)}{r} &= \frac{E_2(r)(\nu-1)}{(2\nu-1)(1+\nu)} \frac{d^2u_2(r)}{dr^2} \\
+ \frac{E_2(r)(\beta\nu - \beta + \nu - 1)}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left(\frac{1}{r}\right) \frac{du_2(r)}{dr} \\
+ \frac{E_2(r)(1 - \nu\beta - \nu)}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left(\frac{1}{r^2}\right) u_2(r) - \frac{\beta\alpha_2(r)T_2(r)}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left(\frac{1}{r}\right) \\
- \frac{(1-\nu)\alpha_2(r)}{(2\nu-1)(1+\nu)} \frac{dT_2(r)}{dr} - \frac{E_2(r)\nu\beta\varepsilon_0}{(2\nu-1)(1+\nu)} \left(\frac{1}{r}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{5.100}$$

Eşitlik 5.100 bulunur ve böylelikle;

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u_2(r)}{dr^2} + \frac{(\beta\nu - \beta + \nu - 1)}{(\nu-1)} \left(\frac{1}{r}\right) \frac{du_2(r)}{dr} + \frac{(1 - \nu\beta - \nu)}{(\nu-1)} \left(\frac{1}{r^2}\right) u_2(r) \\
- \frac{300\beta\alpha_0}{E_0(\nu-1)} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\beta\alpha_0\nu(T_i - 300)}{E_0\gamma(\nu-1)} \left(\frac{1}{r}\right)^{1+\beta} \\
- \frac{\beta\alpha_0(T_i - 300)c^{-\beta}}{E_0\gamma(\nu-1)} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\nu\beta\varepsilon_0}{(\nu-1)} \left(\frac{1}{r}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Eşitlik 5.101 diferansiyel denklemini yazılır. Burada denklemin çözümünden önce;

$$A_1 = \frac{\beta\nu - \beta + \nu - 1}{\nu - 1} \tag{5.102}$$

$$A_2 = \frac{1 - \beta\nu - \nu}{\nu - 1} \tag{5.103}$$

$$A_3 = \frac{300\beta\alpha_0}{E_0(\nu - 1)} \tag{5.104}$$

$$A_4 = \frac{\beta\alpha_0\nu(T_i - 300)}{E_0\gamma(\nu - 1)} \quad (5.105)$$

$$A_5 = \frac{\beta\alpha_0(T_i - 300)c^{-\beta}}{E_0\gamma(\nu - 1)} \quad (5.106)$$

$$A_6 = \frac{\nu\beta\varepsilon_0}{(\nu - 1)} \quad (5.107)$$

$$A_7 = \frac{\alpha_0\nu(T_i - 300)}{E_0\gamma(1 - 2\nu)} \quad (5.108)$$

$$A_8 = \frac{(T_i - 300)\alpha_0c^{-\beta}}{E_0\gamma} \quad (5.109)$$

$$A_9 = \frac{300\alpha_0}{E_0} \quad (5.110)$$

$$A_{10} = \sqrt{\frac{4 + \beta^2 - (2 + \beta)^2\nu}{1 - \nu}} \quad (5.111)$$

Sabitleri Eşitlik 5.102-5.111 şeklinde tanımlanır ve bununla birlikte Eşitlik 5.101 yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_2(r)}{dr^2} + A_1 \frac{du_2(r)}{dr} r^{-1} + u_2(r)A_2r^{-2} - (A_3 + A_5 + A_6)r^{-1} \\ + A_4r^{-1-\beta} = 0 \end{aligned} \quad (5.112)$$

Eşitlik 5.112 diferansiyel denklemi oluşur ve bu denklemin genel çözümü:

$$u_2(r) = -C_7 r^{\left(\frac{-A_{10} + \beta}{2}\right)} - C_8 r^{\left(\frac{A_{10} - \beta}{2}\right)} - A_7 r^{1-\beta} - (A_8 + A_9 + \varepsilon_0 \nu) r \quad (5.113)$$

Eşitlik 5.113 olarak bulunur ve gerilme denklemlerini bulabilmek için bu ifadenin türevi:

$$\begin{aligned} \frac{du_2(r)}{dr} &= \left(\frac{A_{10} + \beta}{2}\right) C_7 r^{\left(\frac{-A_{10} + \beta + 2}{2}\right)} - \left(\frac{A_{10} - \beta}{2}\right) C_8 r^{\left(\frac{A_{10} - \beta - 2}{2}\right)} \\ &+ (\beta - 1) A_7 r^{-\beta} - (A_8 + A_9 + \varepsilon_0 \nu) \end{aligned} \quad (5.114)$$

Eşitlik 5.114 olarak bulunur. Burada C_7 , C_8 diferansiyel denklem sabitleridir. Böylelikle $b \leq r \leq c$ ikinci durumu için gerilme denklemleri:

$$D_1(r) = \frac{(2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1)) E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} C_7 r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \quad (5.115)$$

$$D_2(r) = \frac{(2\nu - (A_{10} - \beta)(\nu - 1)) E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} C_8 r^{\left(\frac{A_{10} + \beta - 2}{2}\right)} \quad (5.116)$$

$$D_3 = \frac{(1 + \nu\beta - \beta) E_0 A_7}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} \quad (5.117)$$

$$D_4(r) = \frac{(A_8 + A_9 + \varepsilon_0 \nu) E_0}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} r^\beta \quad (5.118)$$

$$D_5(r) = \frac{300\alpha_0(1 - \nu)}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} r^\beta \quad (5.119)$$

$$D_6 = \frac{\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta \gamma} \quad (5.120)$$

$$D_7(r) = \frac{\alpha_0(1-\nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(bc)^\beta \gamma} r^\beta \quad (5.121)$$

$$D_8(r) = \frac{E_0 \varepsilon_0 \nu}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} r^\beta \quad (5.122)$$

$$D_9(r) = \frac{(\nu A_{10} + \beta \nu + 2\nu - 2) E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} C_7 r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \quad (5.123)$$

$$D_{10}(r) = \frac{(\nu A_{10} - \beta \nu - 2\nu + 2) E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} C_8 r^{\left(\frac{A_{10} + \beta - 2}{2}\right)} \quad (5.124)$$

$$D_{11} = \frac{(2\nu - \beta \nu - 1) E_0 A_7}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} \quad (5.125)$$

$$D_{12}(r) = \frac{E_0 \nu (2 - A_{10} - \beta)}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} C_7 r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \quad (5.126)$$

$$D_{13}(r) = \frac{E_0 \nu (2 + A_{10} - \beta)}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} C_8 r^{\left(\frac{A_{10} + \beta - 2}{2}\right)} \quad (5.127)$$

$$D_{14}(r) = \frac{E_0 \nu \left((2 - \beta) A_7 + 2A_8 r^\beta + 2A_9 r^\beta + 2\nu \varepsilon_0 r^\beta \right)}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} \quad (5.128)$$

$$D_{15}(r) = \frac{(1 - \nu)}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} \left(\begin{aligned} &600\alpha_0 r^\beta - \frac{2\alpha_0 (T_i - 300)}{\gamma c^\beta} r^\beta \\ &+ \frac{2(T_i - 300)\alpha_0}{\gamma} \end{aligned} \right) \quad (5.129)$$

$$D_{16}(r) = -\frac{2E_0\nu^2\varepsilon_0}{(2\nu-1)(1+\nu)b^\beta}r^\beta + \frac{E_0\varepsilon_0}{b^\beta}r^\beta - \frac{300\alpha_0}{b^\beta}r^\beta - \frac{\alpha_0(T_i-300)}{\gamma(bc)^\beta}r^\beta + \frac{\alpha_0(T_i-300)}{\gamma b^\beta}r^\beta \quad (5.130)$$

Eşitlik 5.115-5.130 tanımlanarak;

$$\sigma_{r_2}(r) = D_1(r) + D_2(r) + D_3 + D_4(r) - D_5(r) + D_6 - D_7(r) - D_8(r) \quad (5.131)$$

$$\sigma_{\theta_2}(r) = -D_9(r) + D_{10}(r) - D_{11} + D_4(r) - D_5(r) + D_6 - D_7(r) - D_8(r) \quad (5.132)$$

$$\sigma_{z_2}(r) = D_{12}(r) + D_{13}(r) + D_{14}(r) - D_{15}(r) + D_{16}(r) \quad (5.133)$$

Eşitlik 5.131, Eşitlik 5.132 ve Eşitlik 5.133 gerilme denklemleri bulunur. Eşitlik 5.74, Eşitlik 5.87 ve Eşitlik 5.113' te bulunan $\varepsilon_z, C_5, C_6, C_7$ ve C_8 ifadelerini bulabilmek için ve iç basınç P olmak üzere;

$$1. \text{ Sınır Şartı: } \sigma_{r_1}(a) = -P \quad (5.134)$$

Sınır şartı yazılır. MFHS' nin dış noktasında gerilme olmadığı varsayımı ile;

$$2. \text{ Sınır Şartı: } \sigma_{r_2}(c) = 0 \quad (5.135)$$

Eşitlik 5.135 sınır şartı yazılır ve silindirin b noktasında yer değiştirmeler ve gerilmeler eşit olacağından dolayı;

$$3. \text{ Sınır Şartı: } u_1(b) = u_2(b) \quad (5.136)$$

$$4. \text{ Sınır Şartı: } \sigma_{r1}(b) = \sigma_{r2}(b) \quad (5.137)$$

Sınır şartları yazılır ve MFHS' nin kuvvet denge denklemi gerilmeler cinsinden, silindire uygulanan herhangi bir eksenel yük olmadığı varsayımı ile;

$$5. \text{ Sınır Şartı: } 2\pi \int_a^b \sigma_{z1}(r) r dr + 2\pi \int_b^c \sigma_{z2}(r) r dr = 0 \quad (5.138)$$

Eşitlik 5.138 yazılır ve böylelikle beş adet bilinmeyen için beş adet sınır şartı yazılmış olur. Denklemler yazılmadan önce;

$$A_{11} = \frac{P(\nu+1)a^2}{E_0} + \frac{\xi a^2 \ln(a)}{2(1-2\nu)} + \frac{\varepsilon_0 a^2 \nu}{(1-2\nu)} + \frac{\alpha_0 a^2 (1-\nu) T_i}{(1-2\nu) E_0} + \frac{a^2 \xi}{4} \quad (5.139)$$

$$A_{12} = -\frac{2c^{\frac{A_{10}+\beta+2}{2}} \left((A_8 + A_9) E_0 + 300\alpha_0 (-1+\nu) \right)}{E_0 (2\nu + (A_{10} + \beta)(-1+\nu))} \quad (5.140)$$

$$-\frac{2c^{\frac{A_{10}-\beta+2}{2}} (1 + \beta(-1+\nu)) A_7}{(2\nu + (A_{10} + \beta)(-1+\nu))}$$

$$A_{13} = \frac{c^{A_{10}} (2\nu + (-1+\nu)(\beta - A_{10}))}{(2\nu + (A_{10} + \beta)(-1+\nu))} \quad (5.141)$$

$$A_{14} = \frac{\xi}{4} b^2 - A_7 b^{2-\beta} - (A_8 + A_9 + \varepsilon_0 \nu) b^2 - \frac{\xi}{2} b^2 \ln(b) \quad (5.142)$$

$$A_{15} = -\frac{\xi E_0 \ln(b)}{2(2\nu-1)(1+\nu)} + \frac{\xi E_0}{4(1+\nu)} - \frac{(1-\nu)\alpha_0 T_i}{(2\nu-1)(1+\nu)}$$

$$-\frac{E_0 \varepsilon_0 \nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{\beta b^{-\beta} (1-\nu)\alpha_0 (T_i - 300) \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{(2\nu-1)(1+\nu)\gamma} \quad (5.143)$$

$$A_{16} = \frac{(1+\nu\beta - \beta)E_0 A_7}{(2\nu-1)(1+\nu)b^\beta} + \frac{(A_8 + A_9)E_0}{(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{300\alpha_0(1-\nu)}{(2\nu-1)(1+\nu)}$$

$$+ \frac{\alpha_0(1-\nu)(T_i - 300)}{(2\nu-1)(1+\nu)b^\beta \gamma} - \frac{\alpha_0(1-\nu)(T_i - 300)}{(2\nu-1)(1+\nu)c^\beta \gamma} \quad (5.144)$$

$$A_{17} = -\frac{(1-2\nu)A_{12}b^{\left(\frac{2-A_{10}-\beta}{2}\right)}}{(a^2 + (1-2\nu)b^2)} + \frac{(A_{14} - A_{11})(1-2\nu)}{(a^2 + (1-2\nu)b^2)} \quad (5.145)$$

$$A_{18} = \frac{(1-2\nu)}{(a^2 + (1-2\nu)b^2)} \left(A_{13}b^{\left(\frac{2-A_{10}-\beta}{2}\right)} - b^{\left(\frac{2+A_{10}-\beta}{2}\right)} \right) \quad (5.146)$$

$$A_{19} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)(A_{15} - A_{16})b^2}{E_0(a^2 - b^2)} - \frac{A_{11}(1-2\nu)}{(a^2 - b^2)}$$

$$+ A_{12} \frac{(2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1))b^{\left(\frac{2-\beta-A_{10}}{2}\right)}}{2(a^2 - b^2)} \quad (5.147)$$

$$A_{20} = \frac{(2\nu - (A_{10} - \beta)(\nu - 1))b^{\left(\frac{A_{10}-\beta+2}{2}\right)}}{2(a^2 - b^2)}$$

$$- \frac{(2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1))A_{13}b^{\left(\frac{2-\beta-A_{10}}{2}\right)}}{2(a^2 - b^2)} \quad (5.148)$$

Eşitlik 5.139-5.148 sabitleri tanımlanır ve Eşitlik 5.134 kullanılarak C_5 sabiti, C_6 cinsinden yazılırsa;

$$C_5 = A_{11} + \frac{a^2 C_6}{(1-2\nu)} \quad (5.149)$$

Eşitlik 5.149 meydana gelir. Eşitlik 5.135 sınır şartını kullanabilmek için Eşitlik 5.115-5.122 “ c ” cinsinden yazılırsa;

$$D_1(c) = \frac{(2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1))E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} C_7 c^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \quad (5.150)$$

$$D_2(c) = \frac{(2\nu - (A_{10} - \beta)(\nu - 1))E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} C_8 c^{\left(\frac{A_{10} + \beta - 2}{2}\right)} \quad (5.151)$$

$$D_3 = \frac{(1 + \nu\beta - \beta)E_0 A_7}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} \quad (5.152)$$

$$D_4(c) = \frac{(A_8 + A_9 + \varepsilon_0 \nu)E_0}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} c^\beta \quad (5.153)$$

$$D_5(c) = \frac{300\alpha_0(1 - \nu)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} c^\beta \quad (5.154)$$

$$D_6 = \frac{\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta \gamma} \quad (5.155)$$

$$D_7(c) = \frac{\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta \gamma} \quad (5.156)$$

$$D_8(c) = \frac{E_0 \varepsilon_0 \nu}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} c^\beta \quad (5.157)$$

Eşitlik 5.150-5.157 oluşur ve böylelikle,

$$\begin{aligned} \sigma_{r2}(c) &= 2c^{\frac{A_{10}+2\beta+2}{2}} \left((A_8 + A_9) E_0 + 300\alpha_0 (-1 + \nu) \right) \\ &+ A_{10} c^{\beta/2} (-1 + \nu) E_0 (C_7 - c^{A_{10}} C_8) \\ &+ c^{\beta/2} E_0 (C_7 + c^{A_{10}} C_8) (\beta(-1 + \nu) + 2\nu) \\ &+ 2c^{\frac{A_{10}+2}{2}} E_{10} (1 + \beta(-1 + \nu)) A_7 = 0 \end{aligned} \quad (5.158)$$

Eşitlik 5.158 yazılır. Burada, C_7 sabiti C_8 cinsinden yazılırsa;

$$\begin{aligned} C_7 &= -\frac{2c^{\frac{A_{10}+\beta+2}{2}} \left((A_8 + A_9) E_0 + 300\alpha_0 (-1 + \nu) \right)}{E_0 (2\nu + (A_{10} + \beta)(-1 + \nu))} \\ &- \frac{2c^{\frac{A_{10}-\beta+2}{2}} (1 + \beta(-1 + \nu)) A_7}{(2\nu + (A_{10} + \beta)(-1 + \nu))} - \frac{c^{A_{10}} C_8 (2\nu + (-1 + \nu)(\beta - A_{10}))}{(2\nu + (A_{10} + \beta)(-1 + \nu))} \end{aligned} \quad (5.159)$$

Eşitlik 5.159 oluşur. Ardından 3. sınır şartı için “b” cinsinden yer değiştirmeler yazılır ve eşitlenirse;

$$u_1(b) = \frac{\xi}{2} b \ln(b) - \frac{\xi}{4} b + \frac{C_5}{b} + C_6 b \quad (5.160)$$

$$u_2(b) = -C_7 b^{\left(\frac{A_{10}+\beta}{2}\right)} - C_8 b^{\left(\frac{A_{10}-\beta}{2}\right)} - A_7 b^{1-\beta} - (A_8 + A_9 + \varepsilon_0 \nu) b \quad (5.161)$$

$$C_5 = -C_6 b^2 - C_7 b^{\left(\frac{2-A_{10}-\beta}{2}\right)} - C_8 b^{\left(\frac{2+A_{10}-\beta}{2}\right)} + A_{14} \quad (5.162)$$

C_5 sabiti, C_6 , C_7 ve C_8 cinsinden Eşitlik 5.162'de yazılmış olur. Gerilmelerin b noktasında eşit olmasından dolayı ifadeler sırayla düzenlenirse;

$$T_1(b) = \frac{\beta b^{-\beta} (T_i - 300) \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \gamma T_i}{\gamma} \quad (5.163)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}(b) = & -\frac{\xi E_0 \ln(b)}{2(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{E_0}{(1+\nu)b^2} C_5 - \frac{E_0}{(2\nu-1)(1+\nu)} C_6 \\ & + \frac{\xi E_0}{4(1+\nu)} - \frac{(1-\nu)\alpha_0 T_i}{(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{E_0 \varepsilon_0 \nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \\ & - \frac{\beta b^{-\beta} (1-\nu)\alpha_0 (T_i - 300) \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{(2\nu-1)(1+\nu)\gamma} \end{aligned} \quad (5.164)$$

Denklemin 1. durum için gerilme ifadesi Eşitlik 5.164 olarak bulunmuş olur. 2. durum gerilmesini bulmak için:

$$T_2(b) = \frac{300\gamma + (T_i - 300)c^{-\beta}}{\gamma} - \frac{(T_i - 300)b^{-\beta}}{\gamma} \quad (5.165)$$

$$D_1(b) = \frac{(2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1))E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)} C_7 b^{\left(\frac{-\beta + A_{10} + 2}{2}\right)} \quad (5.166)$$

$$D_2(b) = \frac{(2\nu - (A_{10} - \beta)(\nu - 1))E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)} C_8 b^{\left(\frac{A_{10} - \beta - 2}{2}\right)} \quad (5.167)$$

$$D_3 = \frac{(1 + \nu\beta - \beta)E_0 A_7}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} \quad (5.168)$$

$$D_4(b) = \frac{(A_8 + A_9 + \varepsilon_0 \nu) E_0}{(2\nu - 1)(1 + \nu)} \quad (5.169)$$

$$D_5(b) = \frac{300\alpha_0(1 - \nu)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)} \quad (5.170)$$

$$D_6 = \frac{\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta \gamma} \quad (5.171)$$

$$D_7(b) = \frac{\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)c^\beta \gamma} \quad (5.172)$$

$$D_8(b) = \frac{E_0 \varepsilon_0 \nu}{(2\nu - 1)(1 + \nu)} \quad (5.173)$$

Eşitlik 5.165-5.173 yazılır ve böylelikle;

$$\begin{aligned} \sigma_{r2}(b) = & A_{16} + \frac{(2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1))E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)} C_7 b^{\left(\frac{-\beta + A_{10} + 2}{2}\right)} \\ & + \frac{(2\nu - (A_{10} - \beta)(\nu - 1))E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)} C_8 b^{\left(\frac{A_{10} - \beta - 2}{2}\right)} \end{aligned} \quad (5.174)$$

2. durum için de gerilme denklemi olan Eşitlik 5.174 bulunmuş olur. Ardından C_5 sabiti, C_6 , C_7 ve C_8 cinsinden yazılırsa;

$$\begin{aligned} C_5 = & \frac{(1 + \nu)(A_{15} - A_{16})b^2}{E_0} - \frac{(2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1))}{2(2\nu - 1)} C_7 b^{\left(\frac{2 - \beta - A_{10}}{2}\right)} \\ & - \frac{(2\nu - (A_{10} - \beta)(\nu - 1))}{2(2\nu - 1)} C_8 b^{\left(\frac{A_{10} - \beta + 2}{2}\right)} - \frac{b^2}{(2\nu - 1)} C_6 \end{aligned} \quad (5.175)$$

Eşitlik 5.175 elde edilmiş olur. C_5, C_6, C_7 ve C_8 sabitleri bulunan denklemlerden birbirleri cinsinden yazılırsa C_6 ifadesi C_8 cinsinden;

$$C_6 = A_{17} + A_{18}C_8 \quad (5.176)$$

$$C_6 = A_{19} + A_{20}C_8 \quad (5.177)$$

İki ayrı denklem ile ifade edilir ve böylelikle sırayla;

$$C_8 = \frac{A_{17} - A_{19}}{A_{20} - A_{18}} \quad (5.178)$$

$$C_6 = \frac{A_{17}(A_{20} - A_{18}) + A_{18}(A_{17} - A_{19})}{A_{20} - A_{18}} \quad (5.179)$$

$$C_7 = \frac{A_{12}(A_{20} - A_{18}) - A_{13}(A_{17} - A_{19})}{A_{20} - A_{18}} \quad (5.180)$$

$$C_5 = A_{11} + \frac{a^2(A_{17}(A_{20} - A_{18}) + A_{18}(A_{17} - A_{19}))}{(A_{20} - A_{18})(1 - 2\nu)} \quad (5.181)$$

C_5, C_6, C_7 ve C_8 sabitleri bulunmuş olur. ε_0 sabitini bulabilmek için Eşitlik 5.138 düzenlenirse;

$$\begin{aligned} 2\pi \int_a^b \sigma_{z1}(r)rdr + 2\pi \int_b^c \sigma_{z2}(r)rdr &= 2\pi \left(\int_a^b \sigma_{z1}(r)rdr + \int_b^c \sigma_{z2}(r)rdr \right) \\ &= \int_a^b \sigma_{z1}(r)rdr + \int_b^c \sigma_{z2}(r)rdr = 0 \end{aligned} \quad (5.182)$$

Eşitlik 5.182 meydana gelir ve buradaki terimleri bulabilmek için gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sigma_{z1}(r) r dr &= -\frac{E_0 \nu \xi (\ln(b)b^2 - \ln(a)a^2)}{2(2\nu-1)(1+\nu)} \\
&- \frac{E_0 \nu (b^2 - a^2) C_6}{(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{(1-\nu) \alpha_0 T_i (b^2 - a^2)}{(2\nu-1)(1+\nu)} + \frac{E_0 \nu \xi (b^2 - a^2)}{4(2\nu-1)(1+\nu)} \\
&- \frac{\beta b^{-\beta} (1-\nu) \alpha_0 (T_i - 300)}{(2\nu-1)(1+\nu) \gamma} \ln\left(\frac{b}{a}\right) b^2 \\
&+ \frac{\beta b^{-\beta} (1-\nu) \alpha_0 (T_i - 300) (b^2 - a^2)}{2(2\nu-1)(1+\nu) \gamma} - \frac{\alpha_0 T_i (b^2 - a^2)}{2} \\
&+ \frac{E_0 \varepsilon_0 (b^2 - a^2) (\nu - 1)}{2(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{\beta b^{-\beta} \alpha_0 (T_i - 300)}{\gamma} \ln\left(\frac{b}{a}\right) b^2 \\
&+ \frac{\beta b^{-\beta} \alpha_0 (T_i - 300) (b^2 - a^2)}{2\gamma}
\end{aligned} \tag{5.183}$$

1. durum için gerekli işlem bulunmuş olur ve 2. durum için;

$$\begin{aligned}
\int_b^c \sigma_{z2}(r) r dr &= \int_b^c D_{12}(r) r dr + \int_b^c D_{13}(r) r dr + \int_b^c D_{14}(r) r dr \\
&- \int_b^c D_{15}(r) r dr + \int_b^c D_{16}(r) r dr
\end{aligned} \tag{5.184}$$

Eşitlik 5.184 yazılır ve ifadeler ayrı ayrı bulunursa;

$$\begin{aligned}
\int_b^c D_{12}(r) r dr &= \frac{E_0 \nu (2 - A_{10} - \beta) C_7}{(2\nu-1)(1+\nu)(2 + \beta - A_{10})} b^\beta c^{\left(\frac{\beta - A_{10} + 2}{2}\right)} \\
&- \frac{E_0 \nu (2 - A_{10} - \beta) C_7}{(2\nu-1)(1+\nu)(2 + \beta - A_{10})} b^{\left(\frac{-\beta - A_{10} + 2}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{5.185}$$

$$\int_b^c D_{13}(r) r dr = \frac{E_0 \nu (2 + A_{10} - \beta) C_8}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(2 + A_{10} + \beta) b^\beta} c^{\left(\frac{2 + A_{10} + \beta}{2}\right)}$$

$$- \frac{E_0 \nu (2 + A_{10} - \beta) C_8}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(2 + A_{10} + \beta) b^\beta} b^{\left(\frac{2 + A_{10} + \beta}{2}\right)} \quad (5.186)$$

$$\int_b^c D_{14}(r) r dr = \frac{E_0 \nu (2 - \beta) A_7 (c^2 - b^2)}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta}$$

$$+ \frac{2E_0 \nu (A_8 + A_9 + \nu \varepsilon_0) (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(2 + \beta) b^\beta} \quad (5.187)$$

$$\int_b^c D_{15}(r) r dr = \left(\frac{600\alpha_0}{2 + \beta} - \frac{2\alpha_0 (T_i - 300)}{(2 + \beta) \gamma c^\beta} \right) \frac{(1 - \nu) (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta}$$

$$+ \frac{(1 - \nu) (T_i - 300) \alpha_0 (c^2 - b^2)}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) \gamma b^\beta} \quad (5.188)$$

$$\int_b^c D_{16}(r) r dr = - \frac{2E_0 \nu^2 \varepsilon_0 (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(2 + \beta) b^\beta} + \frac{E_0 \varepsilon_0 (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})}{(2 + \beta) b^\beta}$$

$$- \frac{300\alpha_0 (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})}{(2 + \beta) b^\beta} + \frac{\alpha_0 (T_i - 300) (c^2 - b^2)}{2\gamma b^\beta} \quad (5.189)$$

$$- \frac{\alpha_0 (c^{2+\beta} - b^{2+\beta}) (T_i - 300)}{(2 + \beta) \gamma (bc)^\beta}$$

$$\begin{aligned}
\int_b^c \sigma_{z2}(r) r dr &= \frac{E_0 \nu (2 - A_{10} - \beta) C_7 c^{\left(\frac{\beta - A_{10} + 2}{2}\right)}}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(2 + \beta - A_{10}) b^\beta} \\
&- \frac{E_0 \nu (2 - A_{10} - \beta) C_7 b^{\left(\frac{\beta - A_{10} + 2}{2}\right)}}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(2 + \beta - A_{10}) b^\beta} \\
&+ \frac{E_0 \nu (2 + A_{10} - \beta)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(2 + A_{10} + \beta) b^\beta} C_8 \left(c^{\left(\frac{2 + A_{10} + \beta}{2}\right)} - b^{\left(\frac{2 + A_{10} + \beta}{2}\right)} \right) \\
&+ \frac{E_0 \nu (2 - \beta) A_7 (c^2 - b^2)}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} + \frac{2E_0 \nu (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})(A_8 + A_9)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(2 + \beta) b^\beta} \\
&- \left(\frac{600\alpha_0}{2 + \beta} - \frac{2\alpha_0 (T_i - 300)}{(2 + \beta)\gamma c^\beta} \right) \frac{(1 - \nu)(c^{2+\beta} - b^{2+\beta})}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} \\
&- \frac{(1 - \nu)(T_i - 300)\alpha_0 (c^2 - b^2)}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)\gamma b^\beta} \\
&+ \frac{E_0 \varepsilon_0 (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})}{(2 + \beta) b^\beta} - \frac{300\alpha_0 (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})}{(2 + \beta) b^\beta} \\
&+ \frac{\alpha_0 (T_i - 300)(c^2 - b^2)}{2\gamma b^\beta} - \frac{\alpha_0 (c^{2+\beta} - b^{2+\beta})(T_i - 300)}{(2 + \beta)\gamma (bc)^\beta}
\end{aligned} \tag{5.190}$$

Bulunan denklemler $\int_a^b \sigma_{z1}(r) r dr + \int_b^c \sigma_{z2}(r) r dr = 0$ denkleminde yerine konursa ε_0 sabiti (Ekler bölümünde verilmiştir) bulunmuş olur.

“ $E_c = c$ noktasında ki malzemenin elastisite modülü” olarak tanımlanmak üzere MFHS çözümünde kullanılması için “ β ” homojensizlik katsayısı parametresi (Boğa, 2015, Boğa, 2020, Yıldırım, 2015);

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln\left(\frac{b}{c}\right)} \quad (5.191)$$

Eşitlik 5.191 olarak tanımlanır ve böylelikle MFHS' nin gerilme denklemleri:

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}(r) = & -\frac{E_0\xi}{2(2\nu-1)(1+\nu)} \ln(r) - \frac{E_0\varepsilon_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \\ & + \frac{a^2 E_0 (A_{17}(A_{20}-A_{18}) + A_{18}(A_{17}-A_{19}))}{(2\nu-1)(1+\nu)(A_{20}-A_{18})} \frac{1}{r^2} - \frac{E_0 A_{11}}{(1+\nu)} \frac{1}{r^2} \\ & - \frac{E_0 (A_{17}(A_{20}-A_{18}) + A_{18}(A_{17}-A_{19}))}{(2\nu-1)(1+\nu)(A_{20}-A_{18})} + \frac{E_0\xi}{4(1+\nu)} \\ & - \frac{(1-\nu)\alpha_0 T_i}{(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{\beta b^{-\beta} (1-\nu)\alpha_0 (T_i - 300)}{(2\nu-1)(1+\nu)\gamma} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \end{aligned} \quad (5.192)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 1}(r) = & -\frac{E_0\xi}{2(2\nu-1)(1+\nu)} \ln(r) + \frac{E_0 A_{11}}{(1+\nu)} \frac{1}{r^2} \\ & + \frac{a^2 E_0 (A_{17}(A_{20}-A_{18}) + A_{18}(A_{17}-A_{19}))}{(1+\nu)(A_{20}-A_{18})(1-2\nu)} \frac{1}{r^2} \\ & - \frac{E_0 (A_{17}(A_{20}-A_{18}) + A_{18}(A_{17}-A_{19}))}{(2\nu-1)(1+\nu)(A_{20}-A_{18})} - \frac{E_0\xi}{4(1+\nu)} \\ & - \frac{\alpha_0 (1-\nu) T_i}{(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{E_0\varepsilon_0\nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \\ & - \frac{\beta b^{-\beta} \alpha_0 (1-\nu)(T_i - 300)}{(2\nu-1)(1+\nu)\gamma} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \end{aligned} \quad (5.193)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z1}(r) = & -\frac{E_0 \xi \nu}{(2\nu-1)(1+\nu)} \ln(r) - \frac{2(1-\nu)\alpha_0 T_i}{(2\nu-1)(1+\nu)} \\
& - \frac{2E_0 \nu (A_{17}(A_{20}-A_{18}) + A_{18}(A_{17}-A_{19}))}{(2\nu-1)(1+\nu)(A_{20}-A_{18})} \\
& - \frac{2E_0 \varepsilon_0 \nu^2}{(2\nu-1)(1+\nu)} - \frac{2\beta b^{-\beta} E_0 \nu (1-\nu)\alpha_0 (T_i-300)}{(2\nu-1)(1+\nu)\gamma} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \\
& + E_0 \varepsilon_0 - \frac{\beta b^{-\beta} \alpha_0 (T_i-300)}{\gamma} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \alpha_0 T_i
\end{aligned} \tag{5.194}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r2}(r) = & \frac{(2\nu - (A_{10} - \beta)(\nu - 1)) E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} \left(\frac{A_{17} - A_{19}}{A_{20} - A_{18}} \right) r^{\left(\frac{A_{10} + \beta - 2}{2}\right)} \\
& + \frac{A_{12} (A_{20} - A_{18}) E_0 (2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1))}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) (A_{20} - A_{18}) b^\beta} r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \\
& - \frac{A_{13} (A_{17} - A_{19}) E_0 (2\nu + (A_{10} + \beta)(\nu - 1))}{2(2\nu - 1)(1 + \nu) (A_{20} - A_{18}) b^\beta} r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \\
& + \frac{(1 + \nu \beta - \beta) E_0 A_7}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} + \frac{(A_8 + A_9 + \varepsilon_0 \nu) E_0}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} r^\beta \\
& + \frac{\alpha_0 (1 - \nu) (T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta \gamma} - \frac{\alpha_0 (1 - \nu) (T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu) (bc)^\beta \gamma} r^\beta \\
& - \frac{300 \alpha_0 (1 - \nu)}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} r^\beta - \frac{E_0 \varepsilon_0 \nu}{(2\nu - 1)(1 + \nu) b^\beta} r^\beta
\end{aligned} \tag{5.195}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta_2}(r) = & -\frac{A_{12}E_0(\nu A_{10} + \beta\nu + 2\nu - 2)(A_{20} - A_{18})}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta(A_{20} - A_{18})} r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \\
& + \frac{A_{13}E_0(\nu A_{10} + \beta\nu + 2\nu - 2)(A_{17} - A_{19})}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta(A_{20} - A_{18})} r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \\
& + \frac{(\nu A_{10} - \beta\nu - 2\nu + 2)E_0}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} \left(\frac{A_{17} - A_{19}}{A_{20} - A_{18}} \right) r^{\left(\frac{A_{10} + \beta - 2}{2}\right)} \\
& - \frac{(2\nu - \beta\nu - 1)E_0 A_7}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} + \frac{(A_8 + A_9 + \varepsilon_0\nu)E_0}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} r^\beta \\
& + \frac{\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta \gamma} - \frac{\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)(bc)^\beta \gamma} r^\beta \\
& - \frac{300\alpha_0(1 - \nu)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} r^\beta - \frac{E_0\varepsilon_0\nu}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} r^\beta
\end{aligned} \tag{5.196}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z_2}(r) = & \frac{A_{12}E_0\nu(2 - A_{10} - \beta)(A_{20} - A_{18})}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta(A_{20} - A_{18})} r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} \\
& - \frac{A_{13}E_0\nu(2 - A_{10} - \beta)(A_{17} - A_{19})}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta(A_{20} - A_{18})} r^{\left(\frac{\beta - A_{10} - 2}{2}\right)} - \frac{2E_0\nu^2\varepsilon_0}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} r^\beta \\
& + \frac{E_0\nu(2 + A_{10} - \beta)}{2(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} \left(\frac{A_{17} - A_{19}}{A_{20} - A_{18}} \right) r^{\left(\frac{A_{10} + \beta - 2}{2}\right)} + \frac{E_0\varepsilon_0}{b^\beta} r^\beta - \frac{300\alpha_0}{b^\beta} r^\beta \\
& + \frac{E_0\nu((2 - \beta)A_7 + 2A_8r^\beta + 2A_9r^\beta + 2\nu\varepsilon_0r^\beta)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} \\
& - \frac{600\alpha_0(1 - \nu)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)b^\beta} r^\beta + \frac{2\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)\gamma c^\beta b^\beta} r^\beta \\
& - \frac{2\alpha_0(1 - \nu)(T_i - 300)}{(2\nu - 1)(1 + \nu)\gamma b^\beta} - \frac{\alpha_0(T_i - 300)}{\gamma(bc)^\beta} r^\beta + \frac{\alpha_0(T_i - 300)}{\gamma b^\beta}
\end{aligned} \tag{5.197}$$

Eşitlik 5.192-5.197 'de görüldüğü gibi yazılır.

5.3. MFHS' nin Sayısal Uygulamalarının Teorik Olarak Değerlendirilmesi

MFHS' nin analitik denklemleri bir önceki bölümde çıkarılmıştır. Bu bölümde denklemlerin sayısal olarak teorik değerlendirmeleri yapılmıştır.

Silah, tank, basınçlı kaplar gibi sıcaklık ve/veya basınç etkisinin bulunduğu ortamlarda çelik, nikel alaşım ve alüminyum gibi malzemeler sıklıkla kullanılmaktadır. Bu nedenle MFHS' nin iç kısmında tekil olarak bulunan metal malzeme için bu örnekler ele alınmıştır. Bunlara ek olarak metal malzemelere alüminyum oksit, silisyum karbür ve bor karbür gibi malzemelerin FDM oluşturmak amacı ile eklendiği düşünülerek sabit ve değişken tutulan bazı parametrelerin MFHS' nin sonuçlarına etkileri ortaya konmuştur.

Çizelge 5.1' de MFHS' de iç içe geçmiş durumda bulunan iki farklı silindirik yapıya uygun olarak verilen malzeme özellikleri mevcuttur.

Çizelge 5.1. MFHS' de kullanılacak malzeme örneklerinin mekanik ve fiziksel özellikleri

| Malzeme Grubu | Malzemeler | E[GPa] | $\alpha[1/^{\circ}\text{C}]*10^{-6}$ | ν |
|---------------|---|--------|--------------------------------------|-------|
| METALLER | AISI 4340 (34CrNiMo6) | 190 | 14,30 | 0,30 |
| | Nikel Alaşım (Ni) | 207 | 13,75 | 0,31 |
| | Alüminyum Alaşım (Al) | 69 | 22,00 | 0,33 |
| SERAMİKLER | Alüminyum Oksit (Al_2O_3) | 370 | 8,10 | 0,30 |
| | Silisyum Karbür (SiC) | 410 | 4,30 | 0,14 |
| | Bor Karbür (B_4C) | 427 | 5,54 | 0,18 |

Namlu çapları, silahlar ve tanklar gibi kullanıldığı yere göre farklılıklar göstermektedir. Standart olarak tabanca, silah, tank ve yerli savunma sanayinde kullanılan obüslerin iç çap olarak ortalama değerleri Çizelge 5.2' de verilmiştir.

Çizelge 5.2. Standart olarak verilen silah ve tank namlu iç çap ve hesaplanan diğer çapların değerleri

| No | 2a[mm] | 2b[mm] | 2c[mm] | Çap Oranı[%] | Namlu Özelliği |
|----|--------|--------|--------|--------------|------------------------------------|
| 1 | 7,62 | 8,38 | 9,22 | 10,00% | Standart silah, tabanca namlu çapı |
| | 7,62 | 9,53 | 11,91 | 25,00% | |
| | 7,62 | 11,43 | 17,15 | 50,00% | |
| 2 | 9,00 | 9,90 | 10,89 | 10,00% | |
| | 9,00 | 11,25 | 14,06 | 25,00% | |
| | 9,00 | 13,50 | 20,25 | 50,00% | |
| 3 | 52,00 | 57,20 | 62,92 | 10,00% | Standart obüs, tank namlu çapı |
| | 52,00 | 65,00 | 81,25 | 25,00% | |
| | 52,00 | 78,00 | 117,00 | 50,00% | |
| 4 | 120,00 | 132,00 | 145,20 | 10,00% | |
| | 120,00 | 150,00 | 187,50 | 25,00% | |
| | 120,00 | 180,00 | 270,00 | 50,00% | |

Burada 2a, 2b ve 2c değerleri MFHS' nin çaplarıdır (Bkz. Şekil 5.1). Çizelge 5.2' de verilen iç çap, standart değerler olarak alınmıştır. Bu değerler, her iki silindirin de ayrı ayrı dış yarıçapları kendi iç yarıçaplarının %10, %25 ve %50 kat fazlası alınarak oluşturulmuştur. Standart olarak verilen tekil malzemenin iç çapı (2a), hesaplanan diğer çaplarla birlikte numaralandırılmıştır.

Top veya mermi atışlarında gerçekleşen patlamalar, namlu boyu ve çapı, barut miktarı ve kalitesi vb. durumlardan etkilense de MFHS' nin teorik sonuçları için iç basınç değeri 300 [MPa] ve iç sıcaklık değeri 1000 [K] olarak alınmıştır (Bozali, 2015, Gündüzer, 2011, Şentürk, 2015, Yıldırım, 2013).

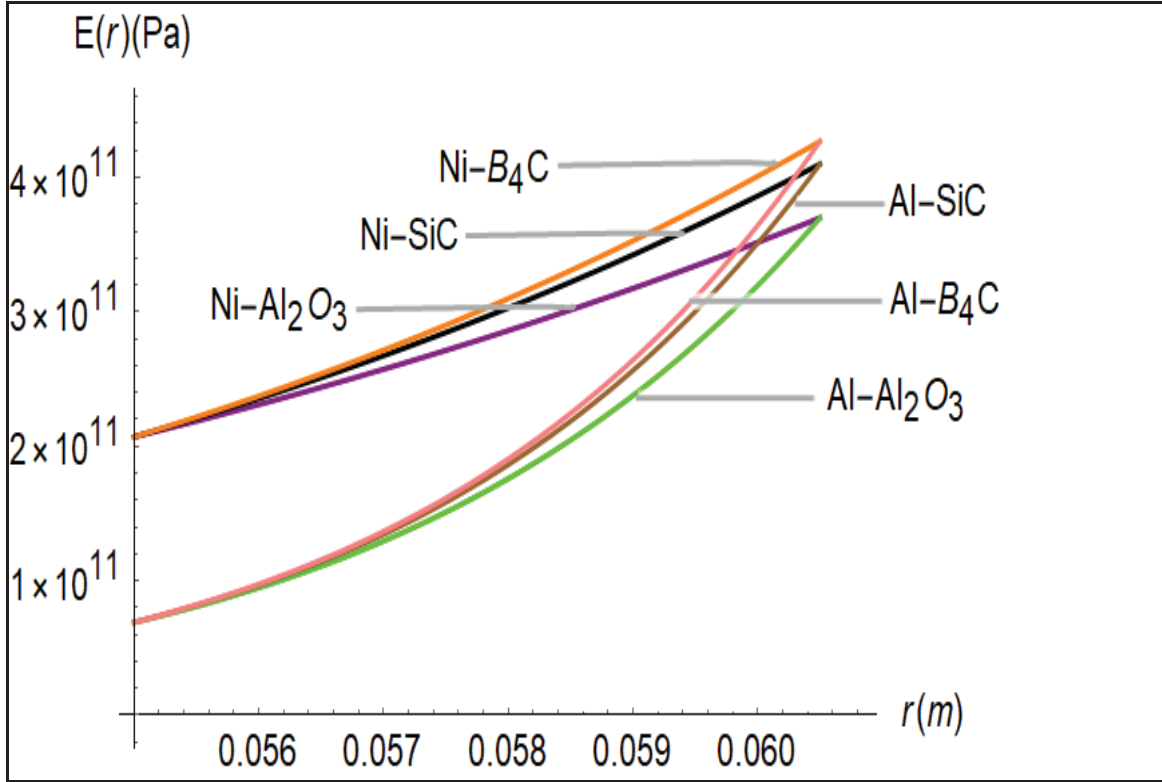
Çizelge 5.1'de verilen malzemelerin metal-seramik eşleşmelerinden ortaya çıkan FDM' lerin homojensizlik katsayıları, Çizelge 5.2'de verilen çap oranlarına göre hesaplanarak Çizelge 5.3' de verilmiştir.

Çizelge 5.3. FDM' lerin çap oranlarına göre hesaplanan homojensizlik katsayıları

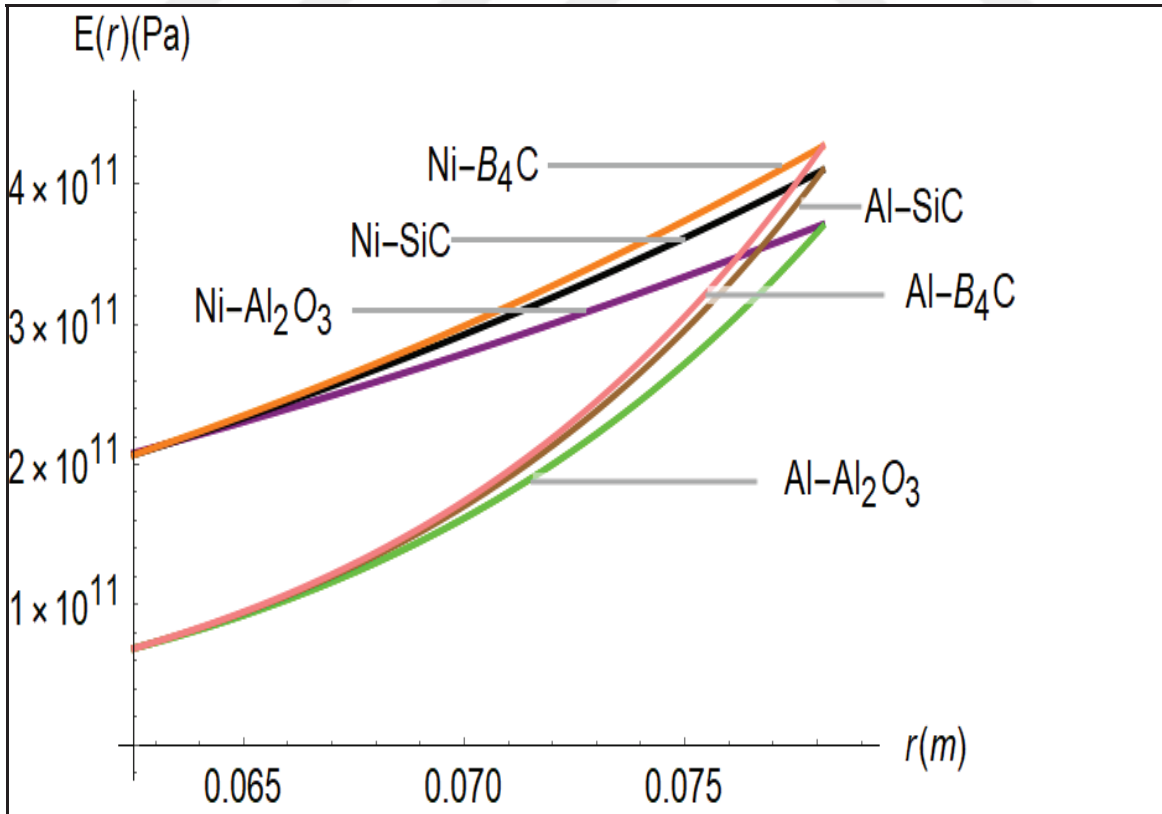
| Malzeme | E_0 [GPa] | E_c [GPa] | β (%10 Çap Oranı) | β (%25 Çap Oranı) | β (%50 Çap Oranı) |
|---------------------------------------|-------------|-------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 4340 – Al ₂ O ₃ | 190 | 370 | 6,99274 | 2,98677 | 1,64374 |
| 4340 – SiC | 190 | 410 | 8,06979 | 3,44681 | 1,89692 |
| 4340 – B ₄ C | 190 | 427 | 8,49605 | 3,62887 | 1,99711 |
| Ni – Al ₂ O ₃ | 207 | 370 | 6,09362 | 2,60274 | 1,43239 |
| Ni – SiC | 207 | 410 | 7,17068 | 3,06277 | 1,68557 |
| Ni – B ₄ C | 207 | 427 | 7,59693 | 3,24484 | 1,78576 |
| Al – Al ₂ O ₃ | 69 | 370 | 17,6203 | 7,52608 | 4,1419 |
| Al – SiC | 69 | 410 | 18,6974 | 7,98612 | 4,39508 |
| Al – B ₄ C | 69 | 427 | 19,1236 | 8,16818 | 4,49528 |

MFHS metal ve FDM kısımlarından oluştuğu için fiziksel özellikleri de iki durum için farklı olacaktır. Bu nedenle metal malzeme elastisite modülü kalınlığa bağlı olarak sabit bir değere sahip iken FDM elastisite modülü, oluşturulan malzemelere göre kalınlığa bağlı olarak farklı değerlere sahip olacaktır.

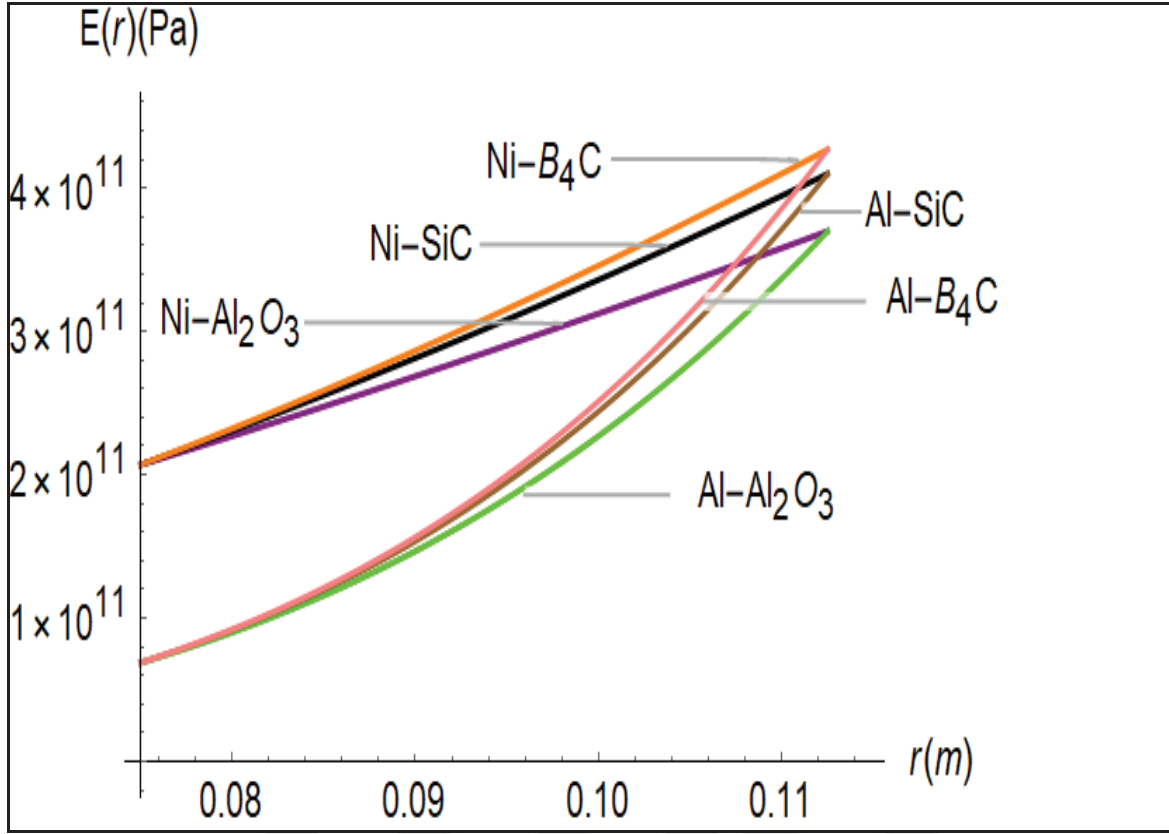
Şekil 5.2, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4' te çap oranlarına göre Çizelge 5.3' de verilen malzemelerin metal-seramik eşleşmelerinden ortaya çıkan FDM elastisite modülleri verilmiştir.



Şekil 5.2. FDM çap oranları %10 iken elastisite modülleri



Şekil 5.3. FDM çap oranları %25 iken elastisite modülleri



Şekil 5.4. FDM çap oranları %50 iken elastisite modülleri

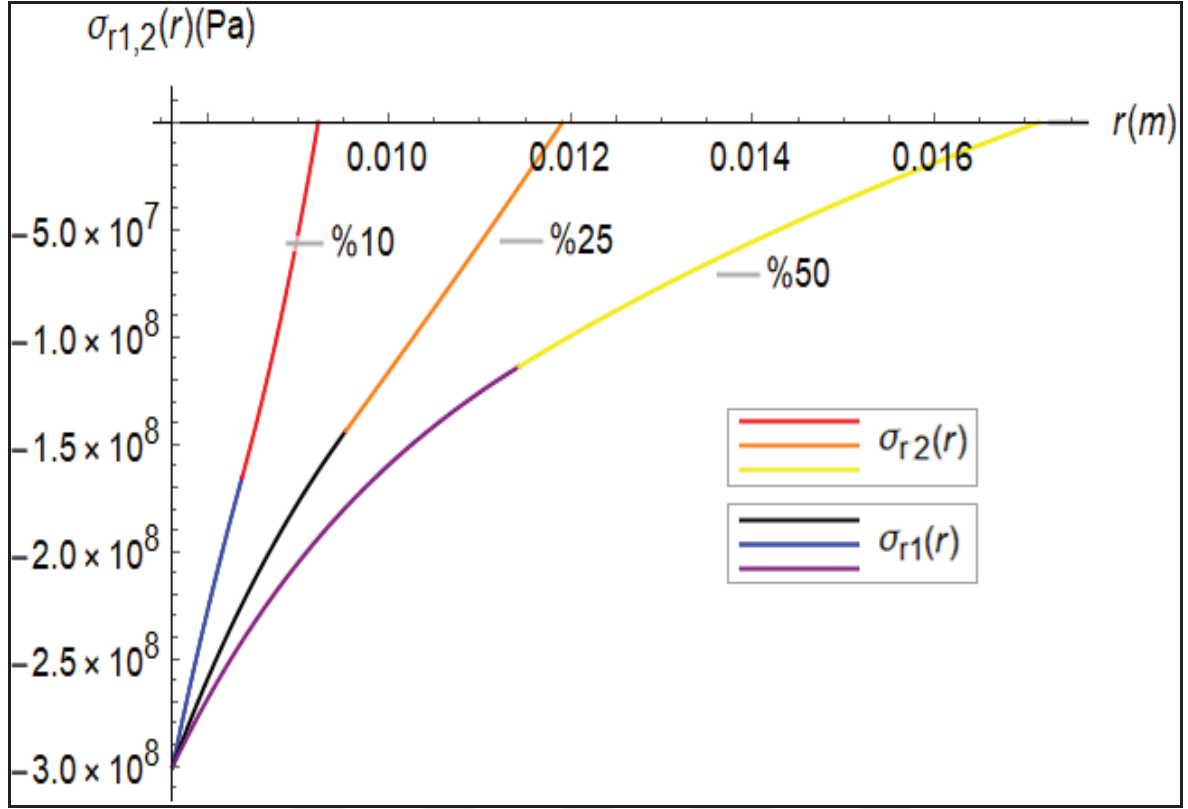
Çap oranlarına göre verilen Şekil 5.2, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 incelendiğinde, FDM' lerin elastisite modüllerinin silindirin kalınlığı boyunca arttığı görülmektedir. Çap oranlarının farklılaşması kalınlık boyunu olarak değiştirirse de elastisite modüllerinin davranışı üzerinde belirgin bir etkiye sahip olmadığı görülmektedir. Burada FDM olarak birleştirilen malzemelerin elastisite modülleri arasında bulunan fark çoğaldıkça parabolik, fark azaldıkça lineer bir artışın olduğu görülmektedir.

Aynı tür metal ile oluşturulan FDM' nin başlangıç noktaları ve aynı tür seramik ile oluşturulan FDM' nin ise bitiş noktalarının aynı olduğu görülmektedir. Metal ile başlayıp seramik ile biten bir FDM' de kalınlığa bağlı olarak kademelendirme olsa da, başlangıç ve bitiş noktalarında malzemeler tekil olarak %100 oranlarında bulunmaktadır. Bu oran kalınlığa bağlı olarak değişmektedir. FDM özelliğinden kaynaklı bu durum elastisite modüllerinin davranışlarında görülmektedir.

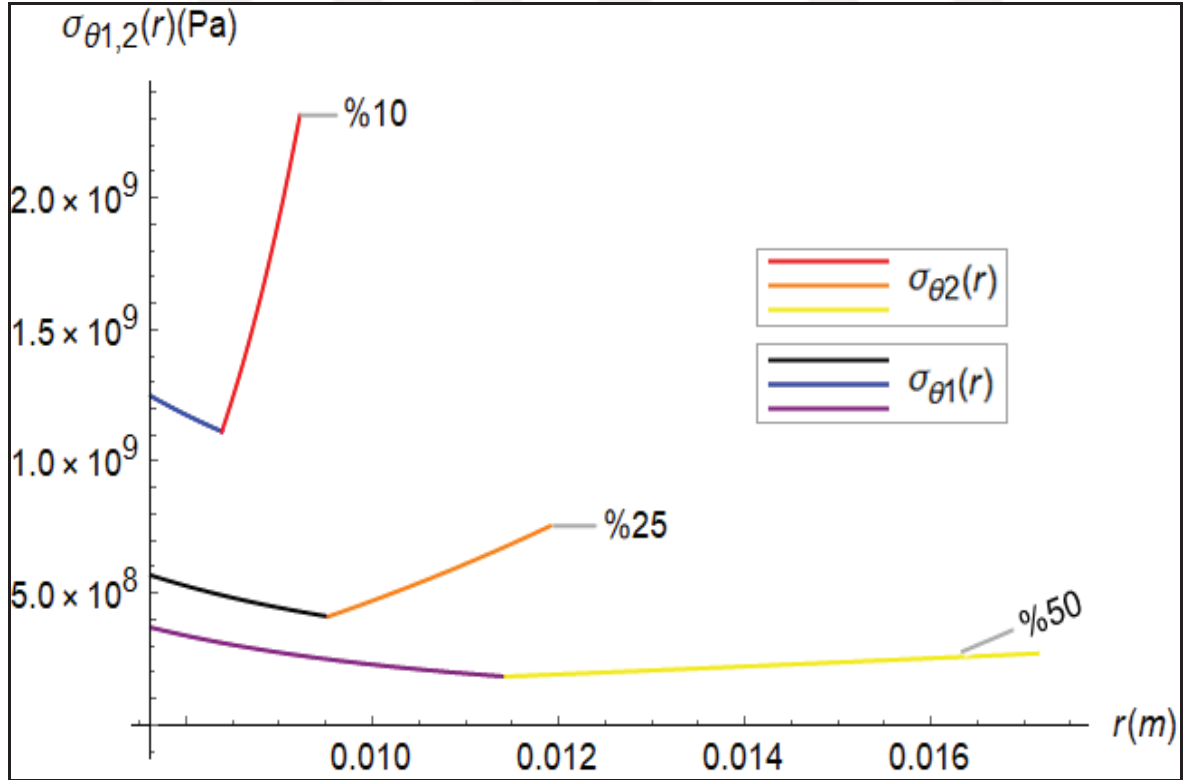
Ek olarak FDM olarak birleştirilen malzemelerin elastisite modülleri arasında ki fark arttıkça homojensizlik katsayısı artmaktadır. Farklı metal malzemelerle karıştırılan aynı seramik malzemelerde homojensizlik katsayısı arttıkça elastisite modülünün azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.1’de verilen metal malzemeler, en yüksek elastisite modül değerine sahip bor karbür ile karıştırılarak FDM elde edilmiştir. Çizelge 5.2’de verilen 1 numaralı durum göz önüne alınarak MFHS’ nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmelerinin %10, %25 ve %50 çap oranları için değişimleri Şekil 5.5, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7’ de verilmiştir.



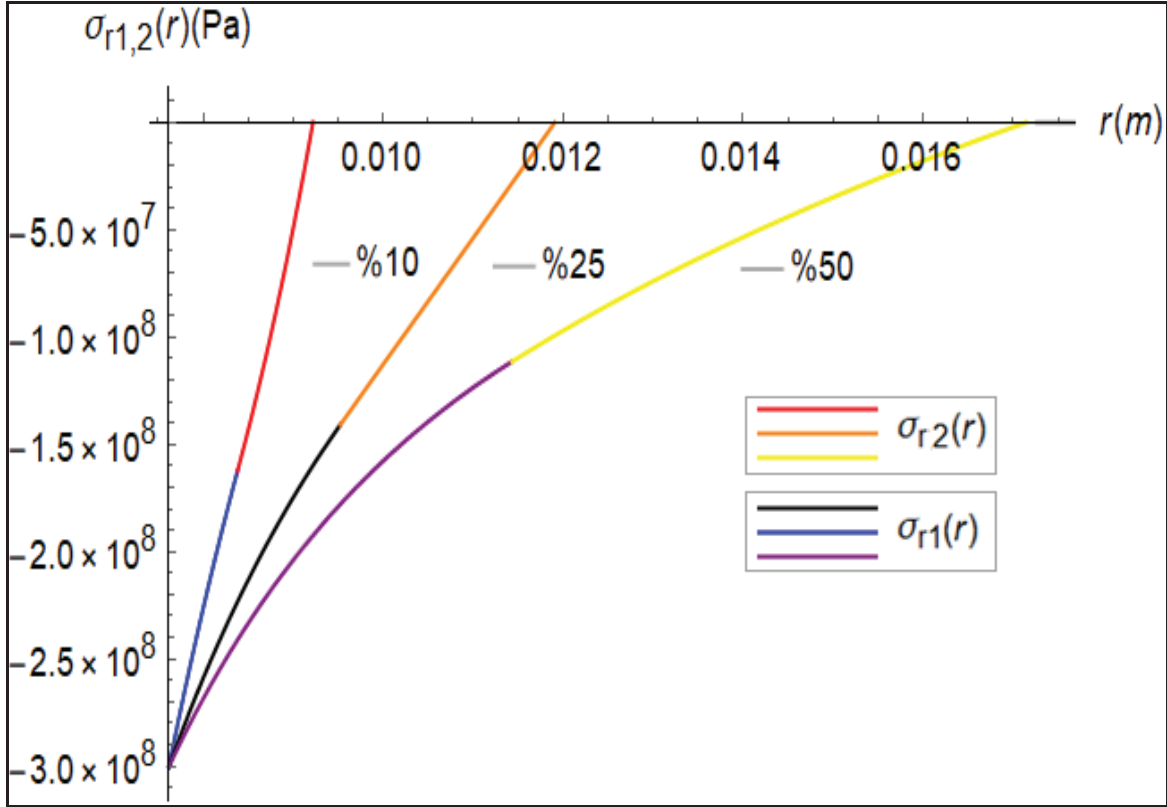


(a)

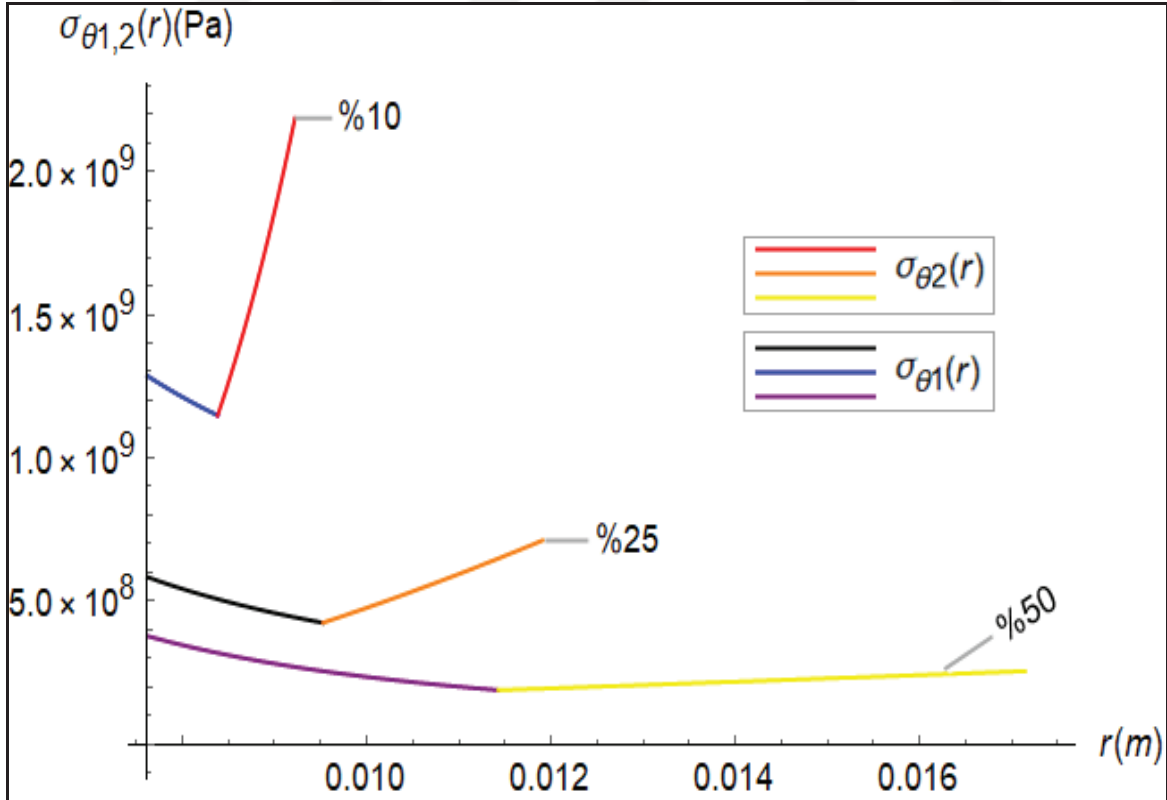


(b)

Şekil 5.5. AISI 4340 ve bor karbür ile oluşturulmuş FDM' ye sahip MFHS' nin çap oranlarına göre kalınlığa bağlı olarak oluşan radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri

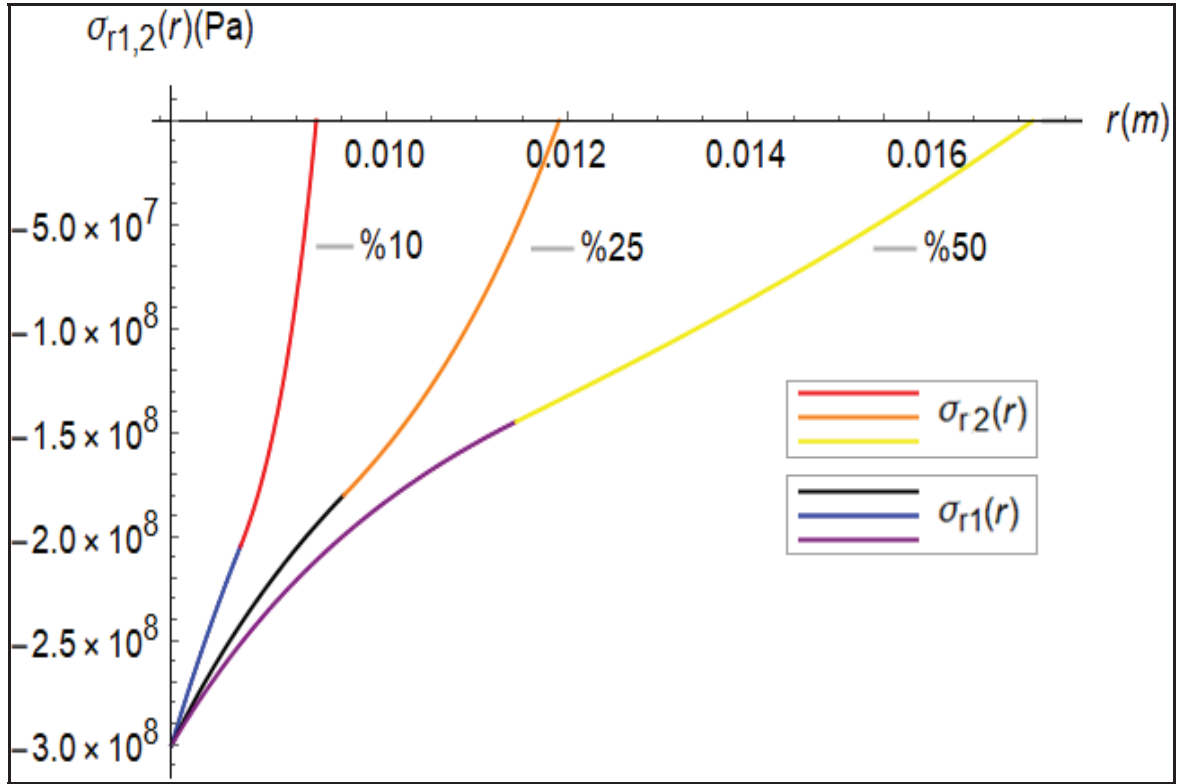


(a)

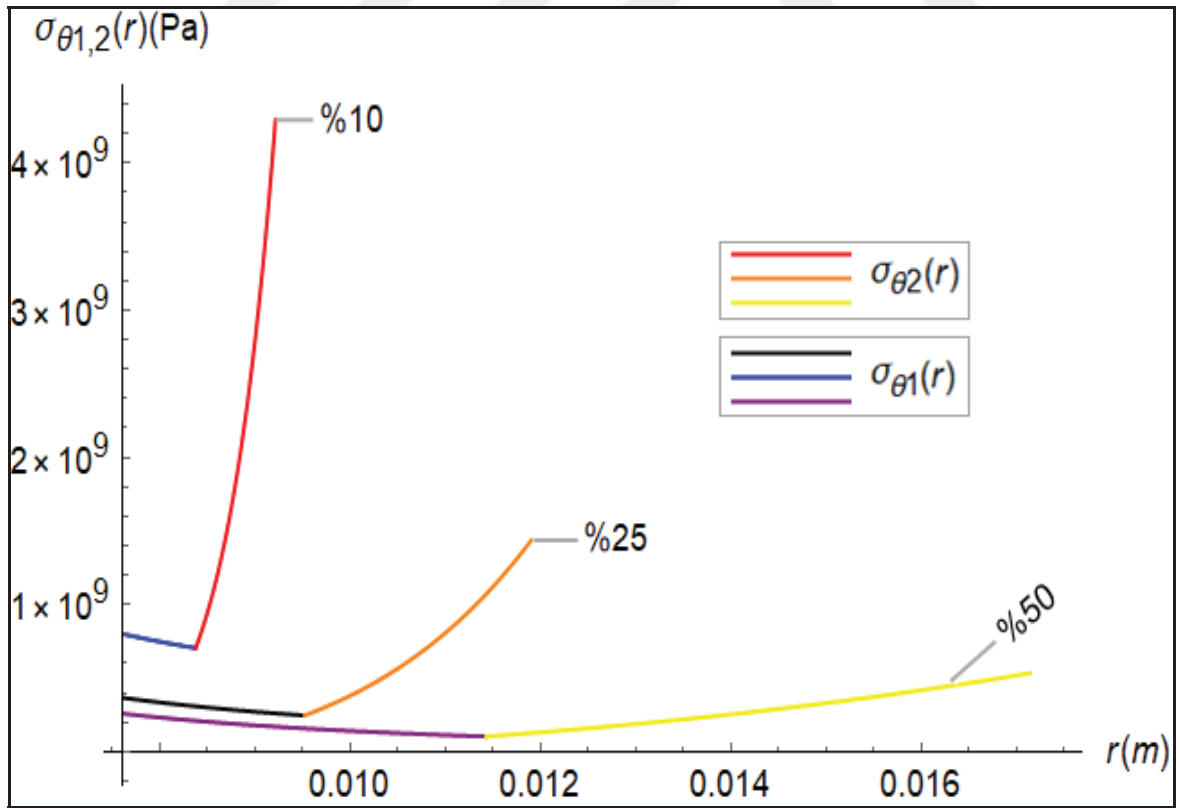


(b)

Şekil 5.6. Nikel ve bor karbür ile oluşturulmuş FDM' ye sahip MFHS' nin çap oranlarına göre kalınlığa bağlı olarak oluşan radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri



(a)



(b)

Şekil 5.7. Alüminyum ve bor karbür ile oluşturulmuş FDM' ye sahip MFHS' nin çap oranlarına göre kalınlığa bağlı olarak oluşan radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri

Radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmelerin çap oranlarına göre değişimlerinin gösterildiği Şekil 5.5, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7’ de metal ve FDM birlikte verilmiş ve farklı renklerle geçişin olduğu bölge belirgin hale getirilmiştir.

Metal malzemeler bor karbür haricinde diğer seramik malzemeler ile karıştırıldığında ve standart iç çap değerleri 1 numaralı durum yerine diğer numaralı durumlar da göz önüne alındığında sonuçların sadece sayısal olarak değiştiği ancak konumlarında önemli bir değişimin olmadığı görülmüştür. Bu durum, çaplar değişse dahi çap oranlarının ve ortamın değişmemesi ile açıklanabilir.

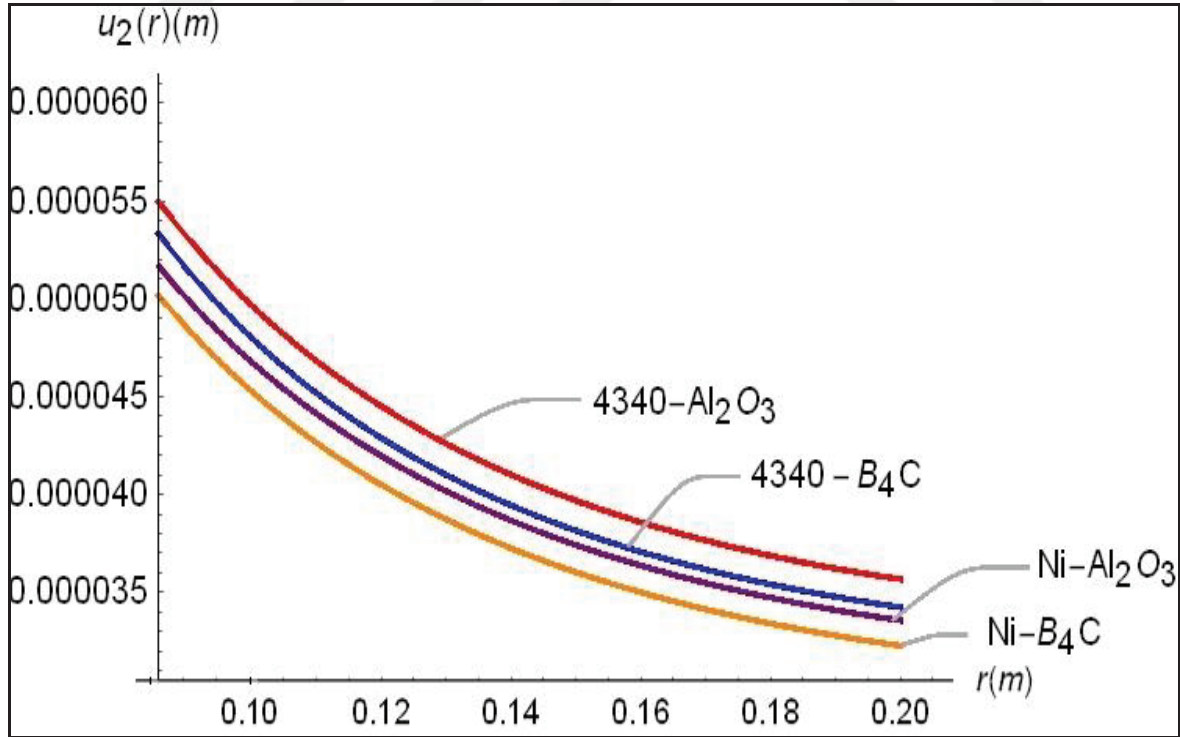
Şekil 5.5, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7 incelendiğinde, MFHS’ nin sınır şartlarının sağlandığı görülmektedir. Başlangıçta iç basınç değerine eşit olan radyal (a) gerilme değeri dış çap noktasında “0” değerine eşittir. Bu nedenle verilen iç basınç değerinden sıfıra doğru giden grafikler ortaya çıkmıştır. Radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme dağılımının bütün malzeme kombinasyonlarında çap oranlarının büyümesi ile arttığı görülmektedir.

Alüminyum malzemenin özellikle radyal (a) gerilme davranışı nikel alaşım ve 4340 çelik malzemeleri kullanılan FDM’ ye göre farklılıklar göstermektedir. Nikel alaşım ve 4340 çelik malzemenin elastisite modülleri birbirlerine yakın değerlerdir. Ancak alüminyum alaşımının elastisite modül değeri diğer metal malzemelere kıyasla küçük ve seramik malzemeler ile farkının yüksek olması bu durumu ortaya çıkarmıştır.

Radyal (a) gerilme dağılımları incelendiğinde, %50 çap oranı daha çok parabolik bir hareket sergilerken diğer çap oranları daha lineere yakın bir hareket göstermektedir. Gerilme değerleri belirli sınırlar arasında olduğu için çap oranının artması ile birlikte daha geniş alana yayılan bir dağılım göstermektedir. Metal ve FDM’ nin radyal (a) gerilme değerleri Şekil 5.5, 5.6 ve 5.7’de bulunan aynı çap oranları için kıyaslandığında büyükten küçüğe doğru sırası ile alüminyum alaşım, 4340 çeliği ve nikel alaşım şeklinde olduğu görülmektedir. Alüminyum içeren radyal (a) gerilme dağılımı FDM’ ye geçişle birlikte daha parabolik artış gösteren bir dağılım sergilemektedir. Bunun sebebi ise alüminyum alaşımının elastisite modül değeri bor karbüre kıyasla çok küçüktür ve geçişin bu değerden çok daha yüksek bir değere doğru olmasıdır.

Teğetsel (b) gerilmeler incelendiğinde, metal malzemede kalınlığa bağlı olarak azalırken FDM’ de bir artış söz konusudur. Kalınlığa bağlı azalma, FDM içeren silindirde devam edememektedir. Bunun en belirgin sebebi, elastisite modülü değerinin FDM boyunca değişken olması ve başlangıç malzemesinin elastisite modülü değerinin bitiş malzemesinden daha az olmasıdır. Burada eğer elastisite modülü değeri yüksek bir metal malzemeden elastisite modülü değeri daha düşük başka bir malzemeye geçiş olsaydı kalınlığa bağlı olarak azalma eğilimi devam edecektir. Çap oranlarına bakıldığında %10 çap oranlarında oluşan bir teğetsel (b) gerilme çok keskin bir değişim gösterir iken %50 çap oranlarında oluşan teğetsel (b) gerilme daha yumuşak bir geçiş göstermektedir. Ayrıca çap oranları büyüdükçe teğetsel (b) gerilme değerinin azaldığı da görülmektedir.

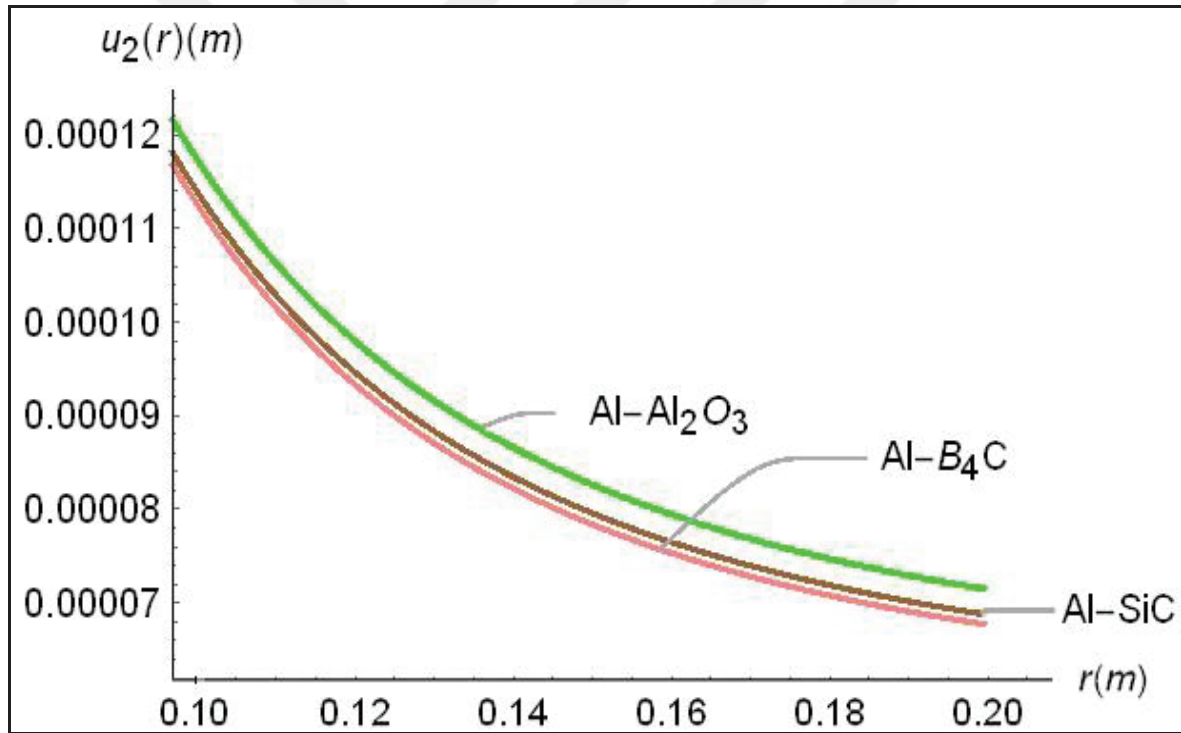
Hooke kanununda gerilme değerleri gerinimlerden elde edilebildiği gibi gerinimlerde o doğrultuda bulunan malzemedeki yer değiştirmelerden elde edilebilmektedir. Bu nedenle aynı ortam şartlarında radyal yer değiştirmeler de incelenmeye değerdir. Şekil 5.8’ de nikel alaşım ve 4340 çeliğinin alüminyum oksit ve bor karbürle oluşturulan FDM’ nin radyal yer değiştirmeleri verilmiştir.



Şekil 5.8. Nikel alaşım ve 4340 çeliğinin alüminyum oksit ve bor karbürle oluşturduğu FDM’ nin yer değiştirmeleri

Şekil 5.8 oluşturulurken MFHS' nin yarıçapları $a=50$ [mm], $b=100$ [mm] ve $c=200$ [mm] alınmıştır. Burada yer değiştirmenin 4340 çeliği ile oluşturulan FDM' lerde daha fazla olduğu ve FDM' de içten dışa doğru azalarak gittiği görülmektedir. Basıncın ve sıcaklığın etkisi içten dışa doğru azalma göstermesinden kaynaklı bu durumun oluşması beklenen bir sonuçtur. Seramik malzemelerden silisyum karbür ve bor karbürün elastisite modülü değerleri birbirlerine yakın olmasından kaynaklı olarak benzer sonuçlar verdiği için Şekil 5.5' te silisyum karbür ile oluşturulan FDM tercih edilmemiştir.

Alüminyum ve diğer seramik malzemelerle oluşturulmuş olan FDM' nin radyal yer değiştirmesi Şekil 5.9' da verilmiştir. Şekil 5.9 oluşturulurken MFHS' nin yarıçapları $a=50$ [mm], $b=100$ [mm] ve $c=200$ [mm] alınmıştır.

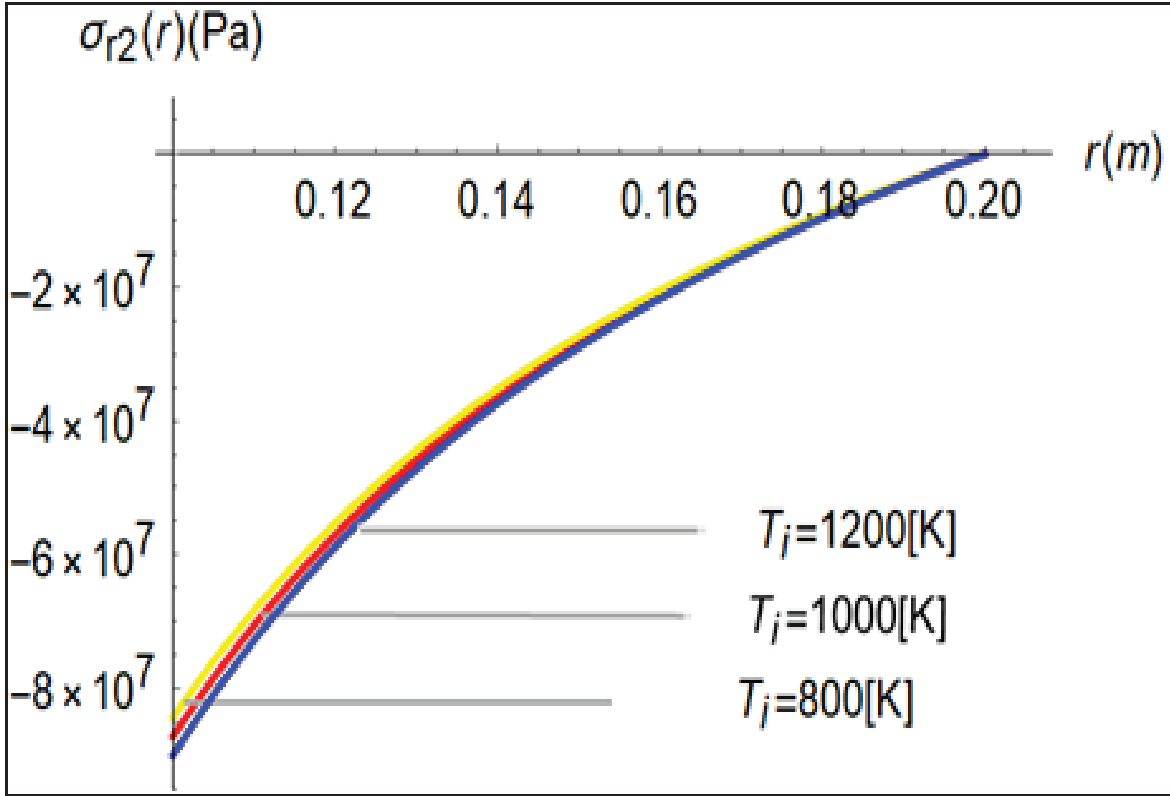


Şekil 5.9. Alüminyum ve farklı seramik malzemelerle oluşturulan FDM' nin yer değiştirmeleri

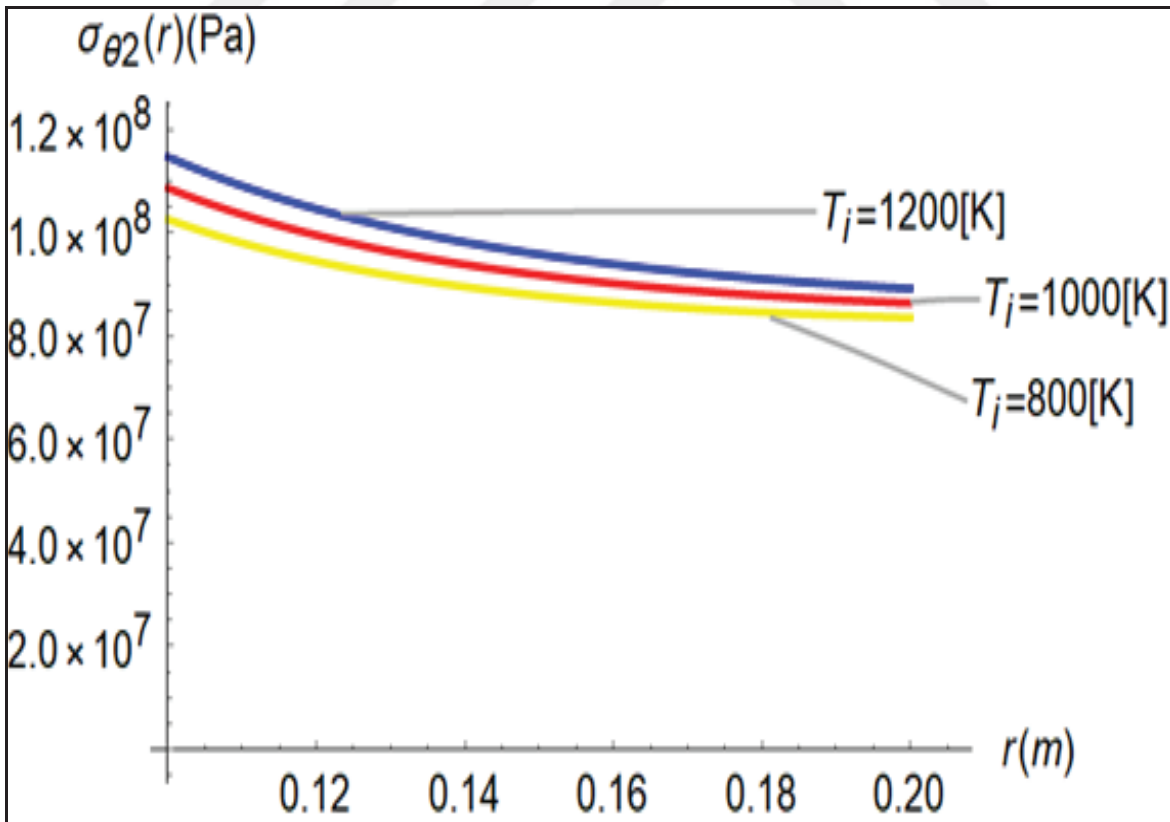
Alüminyum ile oluşturulan FDM' nin yer değiştirme değerleri arasında 2.5 kata yakın farklar mevcut olduğundan dolayı Şekil 5.8' de verilmemiştir. Şekil 5.9'da görüldüğü üzere elastisite modül değeri en düşük olan seramik ile oluşturulan FDM' nin yer değiştirmesi diğerlerine kıyasla daha fazladır. Burada yer değiştirme hareketi Şekil 5.8' de olduğu gibi radyal doğrultuda içten dışa doğru gidildiğinde azalmaktadır.

Şekil 5.8 ve Şekil 5.9 birlikte incelendiğinde elastisite modülü en düşük olan metal ve seramik malzemeler ile FDM oluşturulduğunda en yüksek yer değiştirme değeri elde edilmektedir. Burada çıkan sonuca göre elastisite modül değerleri hem iç kısımda hem dış kısımda yüksek malzemeler seçilirse en az yer değiştirme meydana gelecektir. Ayrıca tasarım açısından MFHS' ye benzer sistemler için yer değiştirmenin minimum düzeyde tutulması, özellikle iç kısımda kullanılan metal malzemenin elastisite modül değeri yüksek seçilmesi gerekmektedir.

Standart olarak iç basınç ve iç sıcaklığın sırası ile 300 [MPa] ve 1000 [K] olduğu durumlara göre gerilme durumları farklı parametreler ile oluşan durumları ortaya konmuştur. 4340 çeliği ve silisyum karbür ile oluşturulan FDM' nin basınç değeri değiştirilmeden kalınlığa bağlı olarak sıcaklığın radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmelerine olan etkisi Şekil 5.10' da verilmiştir. Şekil 5.10 oluşturulurken MFHS' nin yarıçapları $a=50$ [mm], $b=100$ [mm] ve $c=200$ [mm] alınmıştır.



(a)



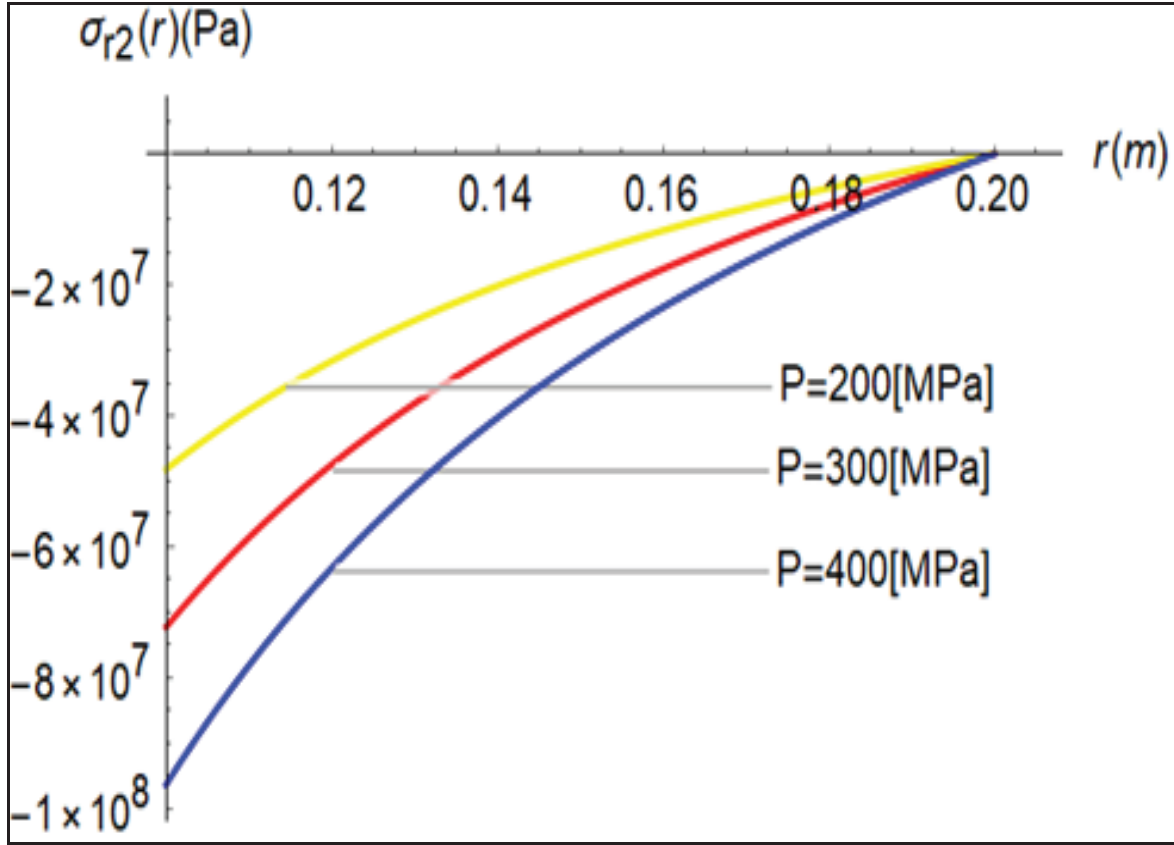
(b)

Şekil 5.10. AISI 4340 ve silisyum karbür ile oluşturulan FDM' nin 300 [MPa] basınç altında farklı sıcaklık değerlerinin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmelerine etkisi

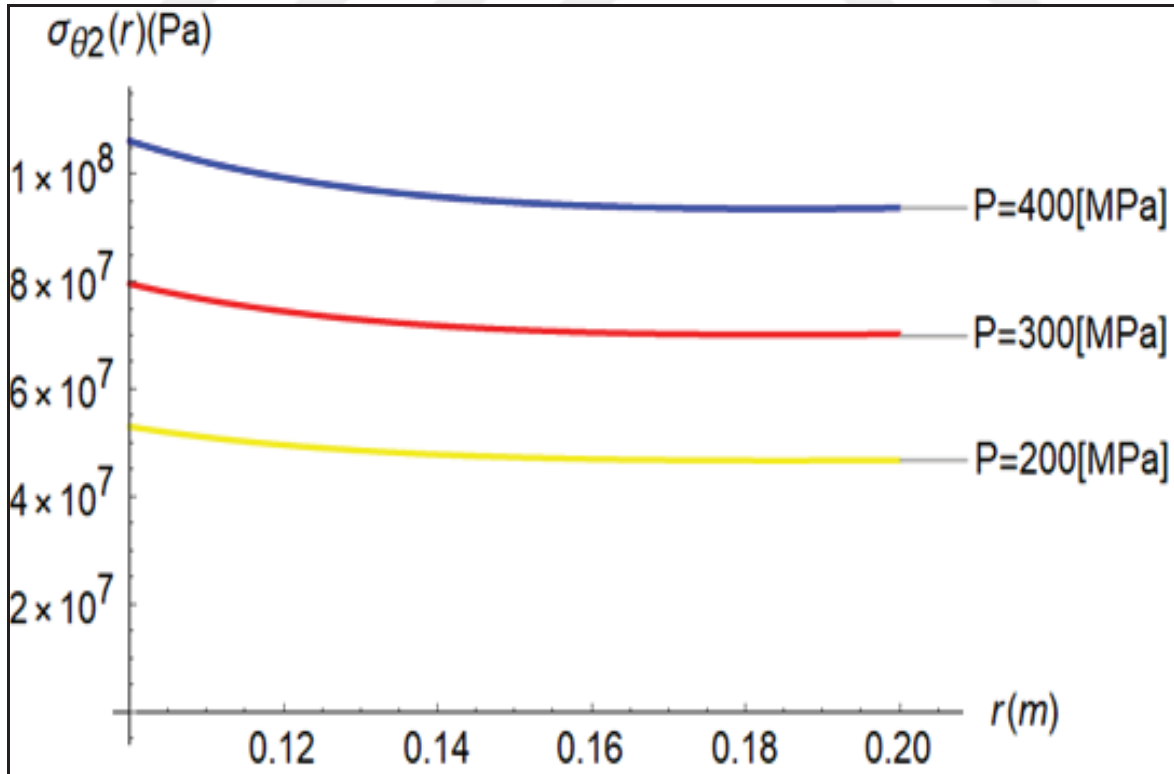
Şekil 5.10 incelendiğinde, hem radyal (a) hem teğetsel (b) gerilme değerlerinin iç sıcaklık değerinden etkilendiği görülmektedir. İç sıcaklık değerinin artması her iki gerilme değerinde artış meydana getirmektedir. Ancak radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmenin kalınlığa bağlı olarak mutlak değerce azalma eğiliminin olduğu görülmektedir. Farklı metal ve seramik malzeme ile FDM oluşturulduğunda iç sıcaklığın oluşturduğu etki değişmemektedir.

İç basıncın da etkisini inceleyebilmek için sıcaklık 1000 [K] sabit değerinde iken, nikel alaşım ve bor karbür ile oluşturulan FDM' nin kalınlığa bağlı olarak radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değişimleri Şekil 5.11' de verilmiştir. Şekil 5.11 oluşturulurken MFHS' nin yarıçapları $a=50$ [mm], $b=100$ [mm] ve $c=200$ [mm] alınmıştır.





(a)



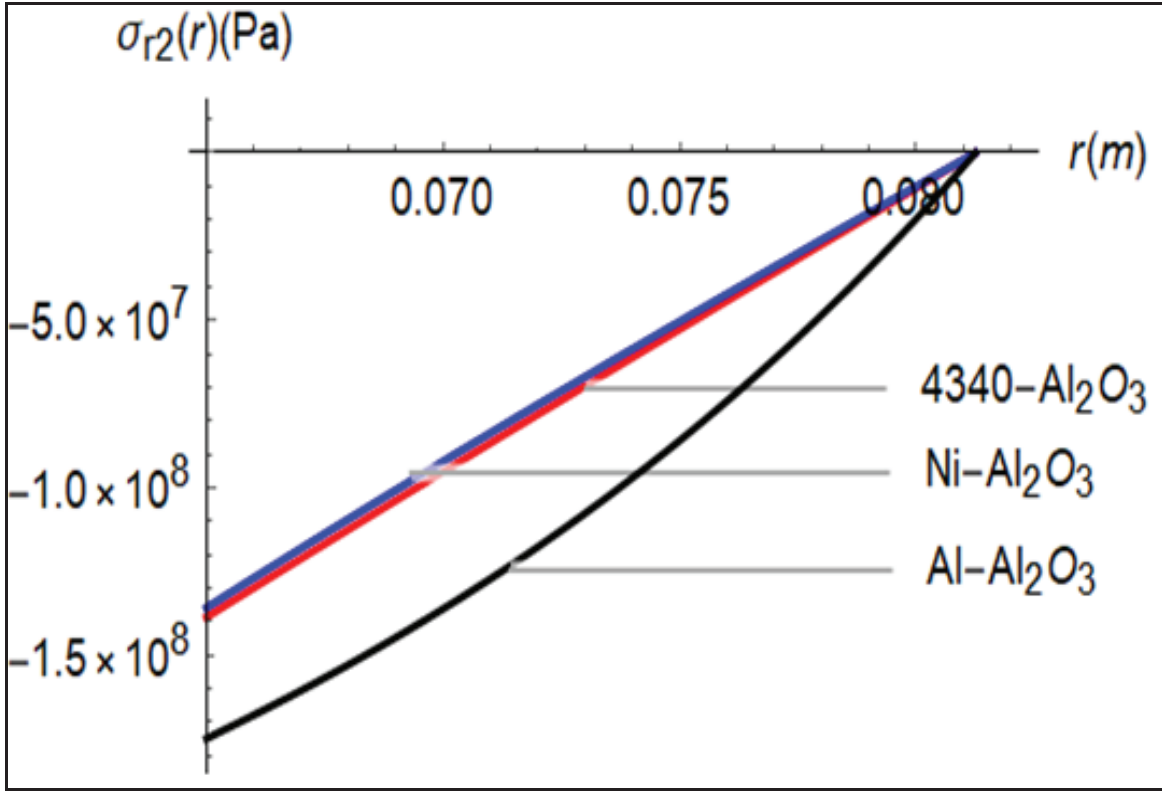
(b)

Şekil 5.11. Nikel ve bor karbür ile oluşturulan FDM' nin 1000 [K] sıcaklık altında farklı basınç değerlerinin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmelerine etkisi

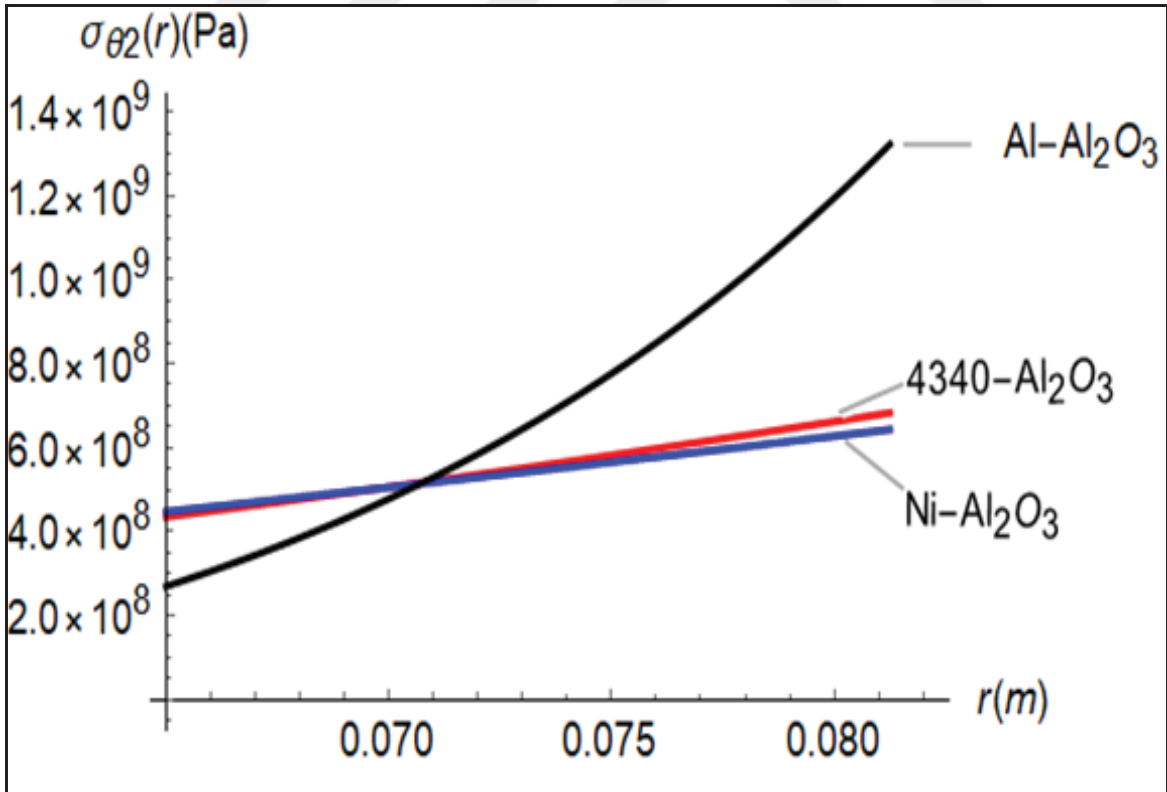
Şekil 5.11 incelendiğinde basıncın FDM üzerinde olan etkisinin sıcaklık ile benzerlik göstermekte olduğu söylenebilir. Burada basıncın artması ile birlikte FDM' nin kalınlığa bağlı olarak radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri artmaktadır. Ancak verilen bütün basınç değerlerinde kalınlığa bağlı olarak her iki gerilme değerinin de mutlak değerce azalma eğiliminde olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.2' de verilen 3 numaralı durum için %25 kat oranında alınan değerler ile metallerin alüminyum oksit ile oluşturdukları FDM' nin radyal (a) ve teğetsel gerilme (b) değerleri Şekil 5.12' de verilmiştir.

Çizelge 5.2' de verilen 2 numaralı durum için %50 kat oranında alınan değerler ile metallerin bor karbür ile oluşturdukları FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri Şekil 5.13' de verilmiştir.

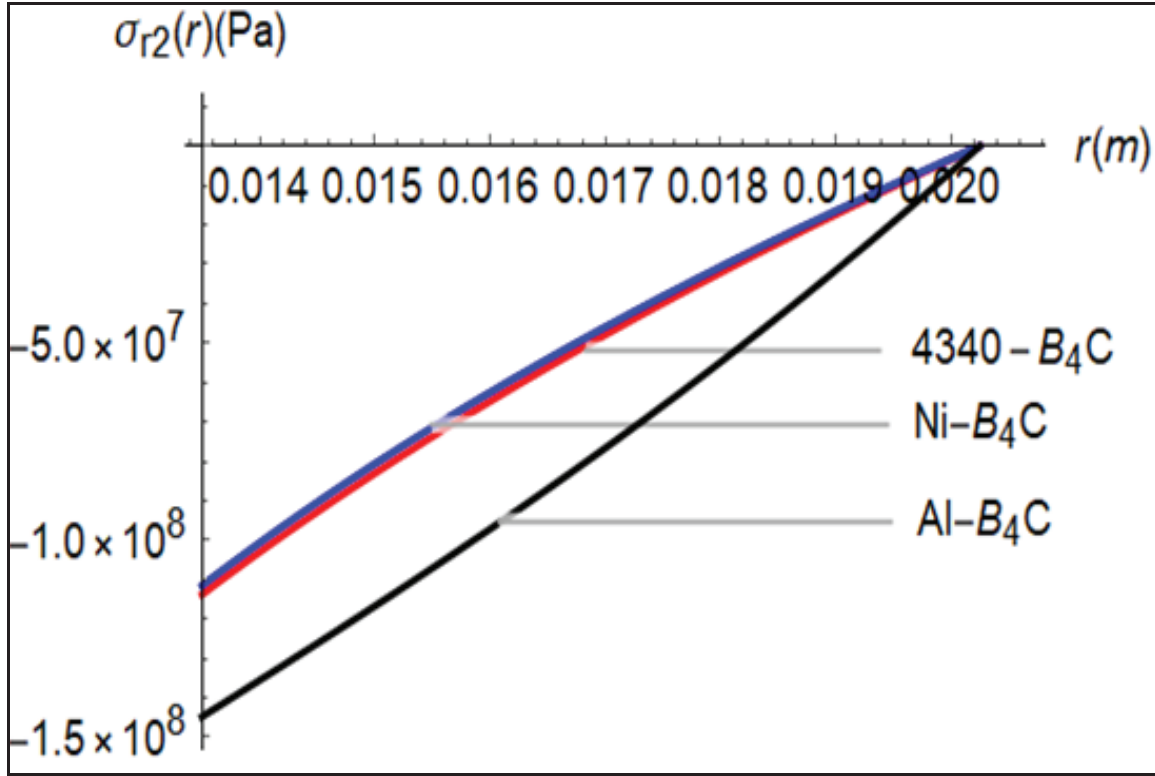


(a)

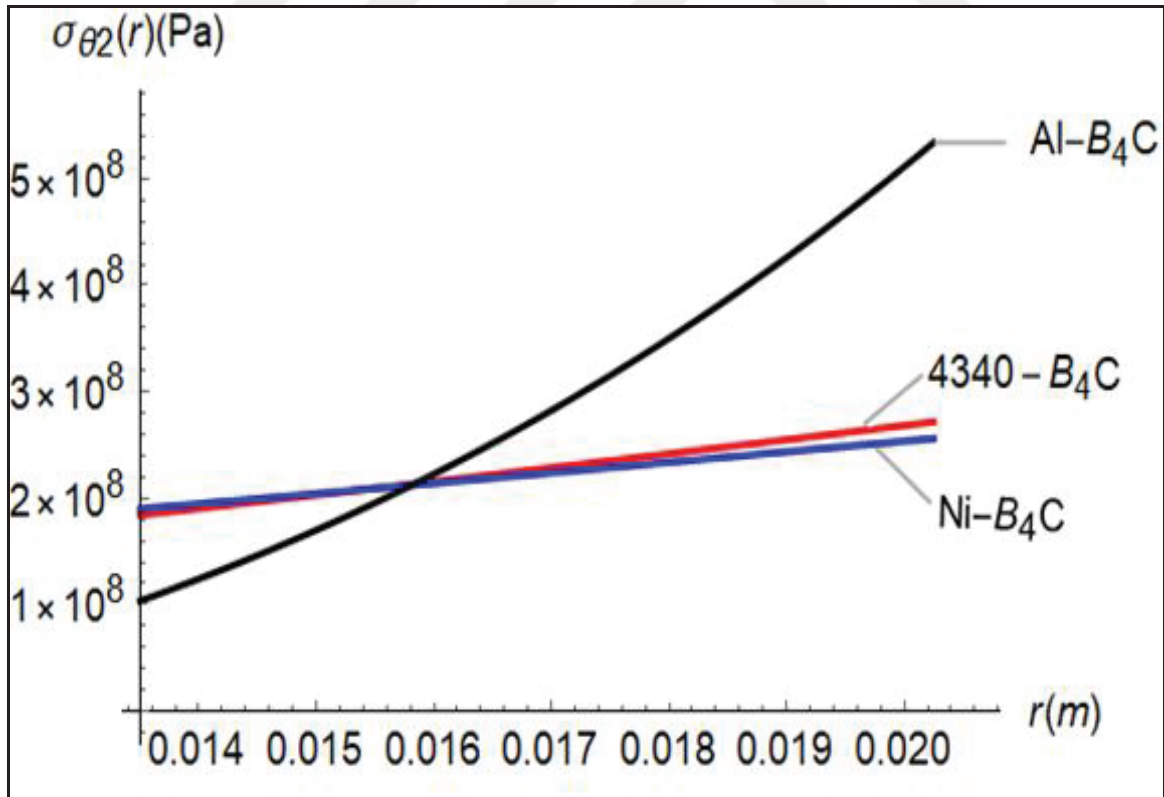


(b)

Şekil 5.12. Alüminyum oksit ile farklı metallerin oluşturdukları FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri



(a)



(b)

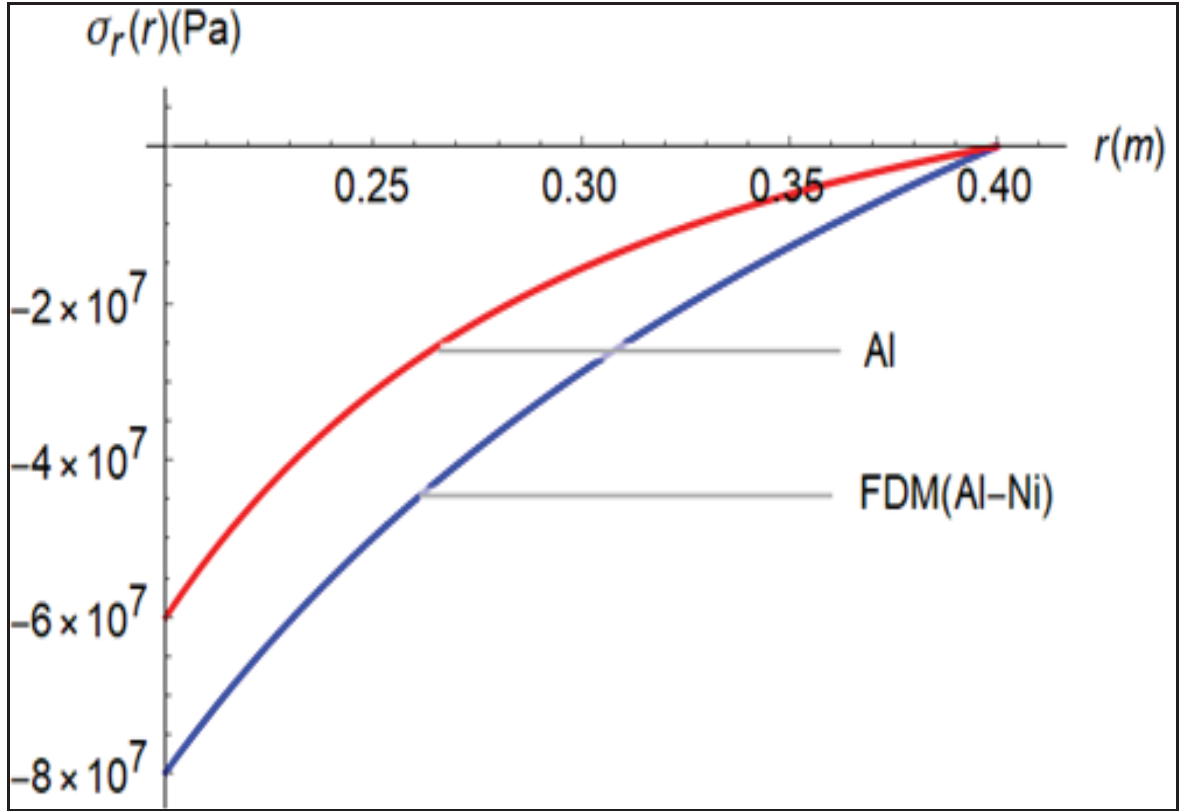
Şekil 5.13. Bor karbür ile farklı metallerin oluşturdukları FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri

Şekil 5.12 ve Şekil 5.13 incelendiğinde, farklı metal ve seramik malzemelerin farklı çap değerlerinde birleşmeleri ile oluşan FDM'lerin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri gösterilmektedir. Burada en yüksek radyal (a) gerilme değerleri gösteren FDM, alüminyum alaşımın kullanıldığı kompozitlerdir. Şekil 5.5, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7' de farklı metaller ayrı ayrı grafiklerde gösterilmiştir. Burada ise farklı metallerin aynı seramik malzemelerle karıştırıldığında oluşan sonuçlar gösterilmektedir.

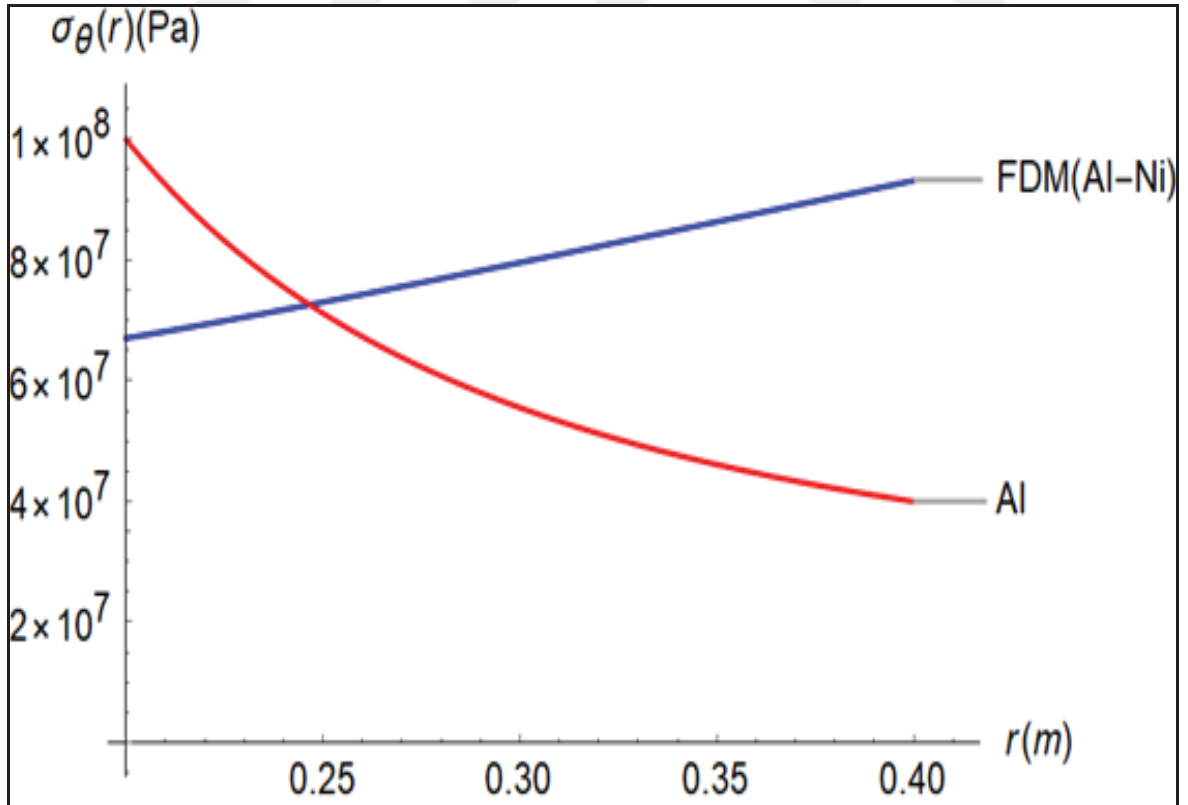
Homojen (tekil) malzeme ve FDM arasında bulunan farkları incelemek için Şekil 5.14 ve Şekil 5.15 verilmiştir. Bu şekiller için MFHS' nin yarıçapları $a=100$ [mm], $b=200$ [mm] ve $c=400$ [mm], iç basınç ve sıcaklık değerleri sırası ile 300 [MPa] ve 1000 [K] alınmıştır. Homojen malzeme oluşturmak için FDM' nin denklemlerinde bulunan homojensizlik katsayısına sıfıra oldukça yakın bir değer (10^{-6}) verilerek sonuca ulaşılmıştır.

Şekil 5.14' te MFHS' de bulunan FDM yerine, homojen olan alüminyum alaşım kullanımı ile bu metal malzemeye nikel alaşım eklenerek oluşturulan FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri verilmiştir.

Şekil 5.15' te MFHS' de bulunan FDM yerine, homojen olan nikel alaşım kullanımı ile bu metal malzemeye alüminyum alaşım eklenerek oluşturulan FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri verilmiştir.

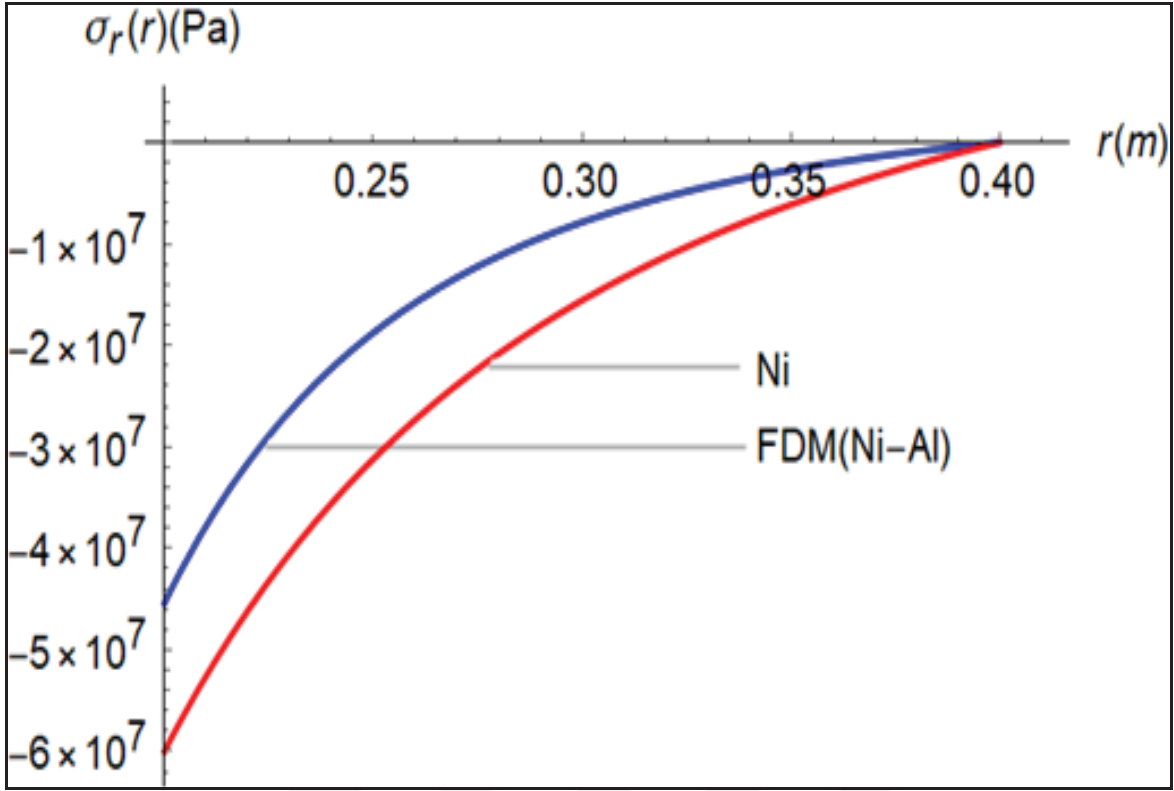


(a)

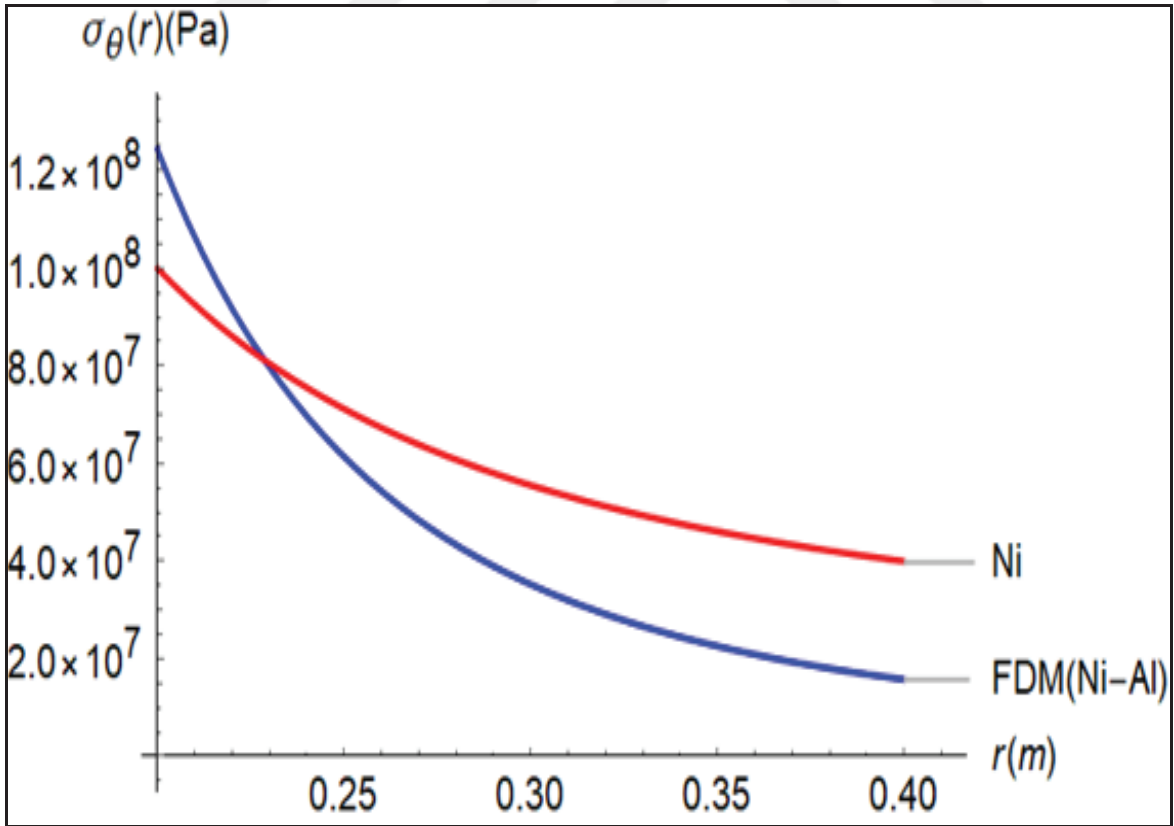


(b)

Şekil 5.14. Homojen alüminyum alaşım ve alüminyum alaşıma nikel alaşım eklenerek oluşturulan FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri



(a)



(b)

Şekil 5.15. Homojen nikel alaşım ve nikel alaşıma alüminyum alaşım eklenerek oluşturulan FDM' nin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerleri

Şekil 5.14 ve Şekil 5.15' te verilen konum değerleri sadece FDM' nin olduğu bölge ile sınırlandırılmıştır. Burada, FDM yerine kullanılan homojen malzemeler alüminyum alaşım ve nikel alaşımdan oluşmaktadır. Şekil 5.14' te alüminyum alaşıma nikel alaşım, Şekil 5.15' te ise nikel alaşıma alüminyum alaşım eklenerek FDM oluşturulmuştur.

Şekil 5.14 ve Şekil 5.15 incelendiğinde, MFHS' de bulunan FDM' nin yerine nikel alaşım ve alüminyum alaşım homojen olarak ayrı ayrı kullanıldıklarında, radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerlerinin neredeyse hiç değişmediği görülmektedir. Bu durumun sebeplerinden birisi olarak yarıçap, iç basınç ve iç sıcaklık değerlerinin eşit olması gösterilebilir. Bir diğer sebebi ise iç sıcaklık değerinin eşit olmasının yanı sıra sisteme göre düşük olmasıdır. Eğer iç sıcaklık değerleri yükselirse, tekil olarak bulunan nikel alaşımın alüminyum alaşıma göre radyal (a) ve teğetsel (b) gerilme değerlerinin daha düşük olduğu görülmüştür. Ek olarak, MFHS için poisson oranı ve ısıl genleşme katsayısı değerlerinin radyal (a) ve teğetsel (b) gerilmeler üzerinde belirgin değişimlere sebep olmadığı söylenebilir.

Şekil 5.14 incelendiğinde, kalınlığa bağlı olarak homojen malzemenin radyal (a) gerilme değerinin FDM' ye kıyasla düşük olduğu görülmektedir. Kalınlığa bağlı olarak teğetsel (b) gerilme değeri, homojen malzemedede azalırken FDM' de artma eğilimindedir. Homojen malzemedede teğetsel (b) gerilme değeri, belirli bir konuma kadar FDM' ye göre daha yüksek olsa da genel olarak FDM' nin teğetsel (b) gerilme değerinin homojen malzemededen daha yüksek olduğu söylenebilir.

Şekil 5.15' te bulunan homojen malzemenin kalınlığa bağlı olarak radyal (a) gerilme değerinin FDM' ye kıyasla yüksek olduğu görülmektedir. Teğetsel (b) gerilme değerleri incelendiğinde, kalınlığa bağlı olarak homojen malzemenin ve FDM' nin azalma eğiliminde olduğu görülmektedir. FDM' nin teğetsel (b) gerilme değeri, belirli bir konuma kadar homojen malzemeye kıyasla daha yüksek olsa da genel olarak FDM' nin teğetsel (b) gerilme değerinin homojen malzemededen daha düşük olduğu söylenebilir.

MFHS üzerinden homojen malzeme ve FDM kıyaslandığında, homojensizlik katsayısının oldukça önemli bir parametre olduğu görülmektedir. Homojensizlik katsayısı pozitif bir değer olduğunda, genel olarak FDM' nin homojen malzemeye göre iyi sonuçlar vermediği görülmektedir. Ancak homojensizlik katsayısı negatif bir değer olduğunda FDM' nin homojen malzemeye kıyasla daha iyi bir malzeme olduğu ve FDM kullanımının avantajlı olduğu söylenebilmektedir. MFHS ve benzer sistemler için FDM kullanıldığında, derecelendirme işleminin elastisite modülü değeri yüksek bir malzemedan düşük bir malzeme doğru olması gerektiği görülmektedir.

Homojensizlik katsayısının artması ile radyal ve teğetsel gerilme değerleri artmaktadır. Bu nedenle, homojen bir malzemeye kıyasla homojensizlik katsayısı düşük olan bir FDM' nin gerilme değerini düşüreceği söylenebilir. Sistemlerin tasarımı yapılırken, malzeme mekanik özellikleri gibi homojensizlik katsayısını etkileyen faktörlere dikkat edilmesi gerekmektedir.

Çizelge 5.3' de verilen metal ve seramik malzemeler ile oluşturulan 9 adet FDM mevcuttur. Yarıçap değerleri $a=50$ [mm], $b=100$ [mm] ve $c=200$ [mm], iç basınç ve sıcaklık değerleri sırası ile 300 [MPa] ve 1000 [K] olarak alınmıştır. Bu değerler ile yapılan optimizasyon sonucuna göre radyal ve teğetsel gerilme değerleri en düşük FDM' nin nikel alaşım ve alüminyum oksit ile oluşturulduğu görülmüştür. Bu sonuca göre MFHS' de homojensizlik katsayısının en düşük olduğu FDM' nin en yüksek verimli olduğu söylenebilmektedir.

Sayısal örnekler yarıçaplar ve oranları, basınç, sıcaklık ve farklı birçok malzeme kullanılarak çoğaltılabilir. Bu bölümde genel olarak verilen bazı örnekler ve bunların sonuçları gösterilmiştir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma kapsamında, iç basınç ve sıcaklık etkisinde bulunan içi boş silindirik geometriye sahip bir sistem ele alınmıştır. Burada iç içe geçmiş iki silindir, iki farklı malzemeden meydana gelmektedir. Metal ve FDM ile oluşturulan bu hibrit sisteme “MFHS” adı verilmiştir. MFHS, iç kısmında bulunan silindirin malzemesi metal, dış kısmında bulunan silindirin ise iç kısmında bulunan metal malzemenin farklı bir malzeme ile birleştirilmesi ile oluşturulan FDM olarak ele alınmıştır. Silah veya tank namlusu gibi silindirik ve içinde patlama gerçekleşen durumlar göz önüne alınarak ortam koşulları oluşturulmuştur. Belirlenen koşullara ve sınır şartlarına göre MFHS’ nin radyal doğrultuya bağımlı elastisite denklemlerinin matematiksel modellenmesi yapılmış ve örneklerle sonuçlar gösterilmiştir.

Eksenel simetriye sahip ve silindirik koordinatlarda yalnızca radyal doğrultuda değişimin olduğu varsayımı ile MFHS’ nin çözümüne gidilmiştir. Burada genel elastisite denklemleri göz önüne alındığında, sıcaklık ayrı bir problem haline gelmektedir. Bu nedenle, iki farklı malzemeden oluşan silindir iki kısma ayrılmış ve her bir silindir için radyal doğrultuya bağımlı olan sıcaklık denklemleri, MFHS’ nin genel çözümünde kullanılmak için bulunmuştur. Genel elastik çözüm için, ikiye ayrılan silindirlerin analitik denklemlerine, bulunan sıcaklık denklemleri yerleştirilmiştir.

Malzemelerin elastisite modülü, poisson oranı, ısıl genleşme ve ısıl iletim katsayısı gibi fiziksel özellikleri metal malzeme kısmında sabit bir değer iken FDM kısmında radyal doğrultuda konuma bağlı değerler olmaktadır. MFHS’ de FDM oluşturulurken, bu malzemenin özelliğinden kaynaklı olarak kompozit yapılması planlanan malzemeler kalınlığa bağlı olarak derecelendirilmektedir. Ancak eksenel doğrultuda alınan silindir kesitinden bakılırsa, FDM’ de radyal doğrultu boyunca karıştırılan birinci malzeme başlangıç düzleminde %100 olarak, ikinci malzeme ise bitiş düzleminde %100 olarak bulunmaktadır. Bu çalışmada fonksiyonel olarak derecelendirmenin üstel fonksiyon şeklinde yapıldığı varsayımı ile çözüme gidilmiştir. MFHS’ de FDM’ nin çözümü için yalnızca poisson oranı sabit bir değer olarak alınırken elastisite modülü, ısıl genleşme ve ısıl iletim katsayıları radyal doğrultuya ve üstel olarak homojensizlik katsayısına bağlı olarak alınmıştır.

MFHS çözümü için sınır şartları, metal malzeme ve FDM olarak ikiye ayrılmadan tek bir sistem üzerinden verilmiştir. Ancak radyal, teğetsel ve eksenel gerilmelerin, metal malzeme ve FDM için ayrı ayrı analitik sonuçları elde edilmiştir. MFHS' de iç silindirin dış çapı, dış silindirin iç çapı olduğundan dolayı (Bkz. Şekil 5.1) iç kısımda kullanılan metal malzeme FDM' nin başlangıç malzemesi olmuştur.

Analitik sonuçlara göre bütün gerilme değerleri yarıçaplar, malzemelerin mekanik ve fiziksel özellikleri, iç basınç ile iç ve dış sıcaklık değerlerine bağlıdır. Bu nedenle ortaya konmak istenen sonuçlar için bu şartların bilinmesi veya değer olarak verilmesi gerekmektedir.

Bulunan analitik denklemler sınır şartlarını sağlamakla beraber, gerilme dağılımı yönünden beklenen sonuçları göstermektedir. Gerilme dağılımına ek olarak metal ve FDM elastisite modüllerinin farkları ile basınç ve sıcaklık, çap oranı gibi özelliklerin gerilme değerlerine etkileri ortaya konmuştur.

Bulunulan ortam koşullarına göre homojensizlik katsayısı etkilerinin değişiklik gösterdiği ve gerilmelerin dağılımlarını önemli ölçüde etkilediği görülmüştür. Homojensizlik katsayısının artması ve azalması durumlarında gerilme dağılımlarında meydana gelen değişimler gösterilmiştir. Homojensizlik katsayısının FDM tasarımında çok önemli bir parametre olduğu görülmüştür. MFHS ve benzer sistemler için FDM' den homojen malzemeye kıyasla daha iyi sonuç alabilmek için homojensizlik katsayısı değerinin negatif olması gerekmektedir. Bu durum, derecelendirme işleminin elastisite modülü değeri yüksek bir malzemedan düşük malzemeye doğru yapılması gerektiğini göstermektedir. Alınan teorik sonuçlara göre elastisite modülü değeri, MFHS için oldukça önemli parametre haline gelmektedir.

Belirli değerlerle yapılan bir optimizasyon çalışmasına göre FDM için seçilen en uygun malzemelerin homojensizlik katsayısının en düşük olduğu durumda meydana geldiği görülmüştür. Malzemeler, yarıçaplar, iç basınç, iç ve dış sıcaklık gibi değerler değiştirilerek yapılacak optimizasyon çalışmalarında farklı sonuçlar almak mümkündür. Bu çalışma ile, radyal, teğetsel ve eksenel gerilmelerin optimum değerini bulmak için, verilen parametrelerin değiştirilmesi ile çıkan sonuçları kıyaslayarak yapılmasına olanak sağlanmıştır.

Bu çalışma sonucunda, FDM kullanılarak geliştirilen matematiksel model ile her yönde aynı fiziksel ve mekanik özellikler kullanmak yerine yükün uygulandığı yönü karşılamak için yeterli olan özelliklerde bir sistem oluşturulmuştur. MFHS' de FDM kullanımı sebebi ile düşük maliyet ve yüksek verim elde edilebilmesi uygun hale gelmiştir. MFHS çözümünden elde edilen denklemler ile belirlenen ortam koşullarının değerleri kullanılarak gerilme değerlerinin radyal konuma bağlı olarak elde edilmesi sağlanmıştır. Bu nedenle, MFHS' ye benzer ve tasarım aşamasında bir sistem için radyal doğrultuda bulunması gereken gerilme değerlerine ulaşılabilmesi analitik olarak sağlayarak özellikle maliyet ve zaman kaybını en aza indirmesi amaçlanmıştır. Ek olarak, bu çalışma ile MFHS' de verilen silindirik yapıya benzer tasarımlar yapılmadan önce parametrelerin uygunluğuna ve sonuçlarına bakarak tasarımın şekillenmesine katkı sağlanmaktadır.

Bu çalışma ile verilen namlu tasarımı ve ortam koşullarına göre oluşturulan MFHS' nin matematiksel modellenmesi yapılmıştır. MFHS çözümünde bulunan analitik denklemler, silah, tank ve özellikle yerli ve milli savunma sanayinde kullanılan obüslerin namlu tasarımları için ortam şartlarına göre uygun malzeme seçiminde pratik bir yol gösterici olduğu düşünülmektedir.

Bulunan analitik denklemler MFHS' de verilen sınır şartları ile oluşturulmuştur. MFHS' nin temel diferansiyel denklemleri radyal doğrultuya bağımlı yer değiştirmeler kullanılarak çıkarılmıştır. Bu nedenle ortam koşullarına göre sınır şartları değiştirilerek daha farklı bir sistem için de çözüm elde edilebilmektedir. Sınır şartları sistemin sonuç denklemlerini değiştirmektedir ancak temel denklemler aynı kaldığından dolayı farklı çalışmalara kolaylık sağladığı söylenebilir. MFHS oluşturulurken namlu tasarımı göz önüne alınmıştır. Ancak bu çalışmada verilen geometrik yapı ya da bu yapıya benzer yapıların kullanıldığı farklı alanlar için de burada çözüm olarak bulunan denklemler uygundur. Bu durum farklı çalışmalar için bir avantaj sağlamaktadır.

Bu çalışmada iç basınç ve sıcaklık parametreleri mevcuttur. Bunlara ek olarak, bazı durumlarda nem ve dış basınç gibi parametrelerin de incelenmesi gerekebilir. Bu durumda, çalışmada bulunan çözüm denklemlerine belirtilen parametrelerin eklenmesi ya da sıcaklık gibi var olan parametrelerin çıkarılması mümkündür. Böylelikle farklı çalışmalar yapılabilmesi için ve sonuçlara ulaşılabilmesi açısından analitik bir ortam hazırlanmış olmaktadır.



KAYNAKLAR

- Akış, T. (2006). Isı etkisi altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış uzun tüplerde plastik akmanın başlaması. *Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 21(4), 737-743.
- Apatay, T., Arslan, E. and Mack, W. (2017). Thermally loaded elastic-plastic shrink fit with FGM-hub. *PAMM*, 17(1), 255-256.
- Apatay, T., Gülgeç, M. and Eraslan, A. N. (2007, 3-7 Eylül). *Fonksiyonel derecelendirilmiş içi dolu dönen bir diskin elastik analitik çözümü*. XV. Ulusal Mekanik Kongresinde sunuldu, Isparta
- Apatay, T. and Mack, W. (2015). On the optimum design of rotating two-layered composite tubes subject to internal heating or pressure. *Forschung im Ingenieurwesen*, 79(3-4), 109-122.
- Arıcasoy, O. (Editör) (2006). *Kompozit sektör raporu*. İstanbul Ticaret Odası Yayınları, 1, 4-5.
- Arslan, E. (2017). Tabakalı ve fonksiyonel olarak kademelendirilmiş küresel basınç kapları üzerine analiz. *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, 23(1), 24-35.
- Becker Jr, T. L., Cannon, R. M. and Ritchie, R. O. (2000). An approximate method for residual stress calculation in functionally graded materials. *Mechanics of Materials*, 32(2), 55-97.
- Beuth, J. and Klingbeil, N. (2001). The role of process variables in laser-based direct metal solid freeform fabrication. *Jom*, 53(9), 36-39.
- Boğa, C. (2020). Effect of inhomogeneity constant on equivalent stresses in elastic analysis of hollow cylinder made from functionally graded material. *Gazi University Journal of Science*, 33(1).
- Boğa, C. (2018). Elastic analysis of an hollow cylinder made from functionally graded material exposed to internal pressure. *International Scientific and Vocational Studies Journal*, 2(1), 56-66.
- Boğa, C. (2016). *Analytical and Numerical Axisymmetric Elastic Stress Analyses of Stationary/Rotating Discs Made of Isotropic/Orthotropic Functionally Graded Materials by the Transfer Matrix Method*, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 29-46
- Bozali, U. (2015). *Namlu Modellenmesi ve Borlanmış AISI 4140 Namlu Malzemesinin Aşınma Davranışlarının İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Karabük, 55-58
- Butcher, R. J., Rousseau, C. E. and Tippur, H. V. (1995). A functionally graded particulate composite: preparation, measurements and failure analysis. *Acta Materialia*, 47(1), 259-265.

Cengel, Y. A. (2003). *Heat Transfer A Practical Approach* (Second edition). New York: McGraw Hill, 62-50.

Chen, Y. Z. and Lin, X. Y. (2005). Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials. *Computational Materials Science*, 44(2), 551-557.

Chirita, G., Soares, D. and Silva, F. S. (2005). Advantages of the centrifugal casting technique for the production of structural components with Al-Si alloys. *Materials & Design*, 29(1), 20-27.

Cuevas, A. C., Becerril, E. B., Martínez, M. S. and Ruiz, J. L. (2015). *Metal Matrix Composites*. Switzerland: Springer Nature, 221, 2.

Ebrahimi, F. (Ed.). (2016). *Advances in functionally graded materials and structures*. Croita: InTech Open, 5-56.

Emmons, W. D. and Winkle, M. R. (1956). *U.S. Patent No. 4,592,516*. Washington, DC: U.S. Patent and Trademark Office.

Eraslan, A. N., Apatay, T. ve Gülgeç, M. (2005). Homojen olmayan malzemeden yapılmış içi dolu dönen disklerin elastik-plastik gerilme analizi. *Journal of the Faculty of Engineering & Architecture of Gazi University*, 23(3).

Gülgeç, M. ve Türkbaş, O. S. (2002). Radyal sıcaklık dağılımı etkisinde iki ucu sabit bir silindirden ısı gerilme analizi. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 17(1), 1-9.

Gündüzer, O. (2011). *Namlu Cidarı Boyutlandırılmasına İç Balistik Davranışın Etkisi*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 46-55

Kambakas, K. and Tsakirooulos, P. (2006). Sedimentation casting of wear resistant metal matrix composites. *Materials Science and Engineering: A*, 435, 157-192.

Katayama, T., Sukenaga, S., Saito, N., Kagata, H. and Nakashima, K. (2011). *Fabrication of Al₂O₃-W functionally graded materials by slipcasting method*. Paper presented at the Fourteenth In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Osaka, Japan.

Kaw, A. K. (2014). *Kompozit Malzeme Mekaniği*, (Çev. B. O. Baba ve R. Karakuzu). 1. Basım, Efil Yayınevi. (Eserin orijinali 2006'da yayımlandı), 56-57.

Kieback, B., Neubrand, A. and Riedel, H. (2003). Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 51-106.

Kim, J. H. and Paulino, G. H. (2002). Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *J. Appl. Mech.*, 69(4), 502-514.

Konez, A., Alagöz, H., Topal, S. ve Gülgeç, M. (2005). Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin üretim teknikleri ve kullanım alanları. *Mühendis ve Makine*, 46(547), 1-25.

- Kurşun, A., Kara, E., Çetin, E., Aksoy, Ş. And Kesimli, A. (2014). Mechanical and thermal stresses in functionally graded cylinders. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 5(2), 303-305.
- Küçüksucu, A. (2011). *Ortotropik Derecelendirilmiş Malzemelerin Temas Mekanizmasının Analizi*, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 1-29, 57-90
- Mahamood, R. M. and Akinlabi, E. T. (2017). *Functionally Graded Composite Materials*. Switzerland: Springer, 14-19.
- Manthena, V. R., Lamba, N. K. and Kedar, G. D. (2015). Mathematical modeling of thermoelastic state of a thick hollow cylinder with nonhomogeneous material properties. *Journal of Solid Mechanics*, 10(1), 142-156.
- Marple, B. R., Voyer, J. and Béchar, P. (2001). Sol infiltration and heat treatment of alumina–chromia plasma-sprayed coatings. *Journal of the European Ceramic Society*, 21(7), 561-565.
- Michaud, V. and Mortensen, A. (2001). Infiltration processing of fibre reinforced composites: governing phenomena. *Composites Part A: applied science and manufacturing*, 32(5), 951-996.
- Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., and Ford, R. G. (1999). *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, New York: Springer, 2.
- Mumtaz, K. A. and Hopkinson, N. (2007). Laser melting functionally graded composition of Waspaloy® and Zirconia powders. *Journal of materials science*, 42(15), 7647-7656.
- Nejad, M. Z., Abedi, M., Lotfian, M. H., and Ghannad, M. (2012). An exact solution for stresses and displacements of pressurized FGM thick-walled spherical shells with exponential-varying properties. *Journal of mechanical science and technology*, 26(12), 4051-4057.
- Nejad, M. Z., Abedi, M., Lotfian, M. H., & Ghannad, M. (2016). Exact and numerical elastic analysis for the FGM thick-walled cylindrical pressure vessels with exponentially-varying properties. *Archives of Metallurgy and Materials*, 61.
- Norfolk, M. and Johnson, H. (2015). Solid-state additive manufacturing for heat exchangers. *JOM*, 67(3), 655-659.
- Öktem, A. (2014). Fonksiyonel derecelendirilmiş (fd) ileri kompozit plakların statik analizi. *Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 29(1).
- Pompe, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P. and Schulte, K. J. M. S. (2003). *Functionally graded materials for biomedical applications*. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 40-60.
- Pryor, S. C. and Barthelmie, R. J. (2000). Particle dry deposition to water surfaces: processes and consequences. *Marine Pollution Bulletin*, 41(1-6), 220-231.

Rahimi, G. H. and Nejad, M. Z. (2005). Exact solutions for thermal stresses in a rotating thick-walled cylinder of functionally graded materials. *Journal of Applied Sciences*, 5(15), 3276-3272.

Reddy, J. N. and Chin, C. D. (1995). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of thermal Stresses*, 21(6), 593-626.

Shi, H., Zhou, W., Ran, R., and Shao, Z. (2010). Comparative study of doped ceria thin-film electrolytes prepared by wet powder spraying with powder synthesized via two techniques. *Journal of Power Sources*, 195(2), 393-401.

Shin, K. H., Natu, H., Dutta, D., and Mazumder, J. (2003). A method for the design and fabrication of heterogeneous objects. *Materials & Design*, 24(5), 339-353.

Schatt, W., and Wieters, K. P. (1997). *Powder Metallurgy: Processing And Materials*. European Powder Metallurgy Association. Shrewsbury, 492

Sunar, T. (2015). *Karbon-Fiber Takviyeli Kompozit Malzemelerin Talaşlı İmalatının Sonlu Elemanlar Simulasyonu*, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, 5-16.

Şentürk, A. (2015). *Namlu İç Balistiği ve Termo - Mekanik Analizi*, Yüksek Lisans Tezi, Kara Harp Okulu Komutanlığı Savunma Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 42-46

Timoshenko, S. and Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*, by S. Timoshenko and J. N. Goodier, New York: McGraw-Hill book Company, 7-58.

Topal Dağ, S. (2013). *Isıl ve Higroskopik Yükleme Altındaki Ortotropik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerde Hesaplamalı Yöntemlerle Kırılma Analizi*, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1-23, 117-119

Topal, S. (2006). *Radyal Sıcaklık Dağılımı Etkisinde Bulunan, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemedeki Yapılmış İçi Dolu Bir Silindirde Isıl Gerilme Analizi*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1-6, 30-52, 90-100, 125-127.

Tutuncu, N. and Temel, B. (2009). A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres. *Composite Structures*, 91(3), 355-390.

Udupa, G., Rao, S. S., and Gangadharan, K. V. (2014). Functionally graded composite materials: an overview. *Procedia Materials Science*, 5, 1291-1299.

Ungarish, M. (2002, 2-6 September). *Centrifugal sedimentation processes in suspensions—fundamentals and challenges of efficient simulation*. Paper presented at the Sedimentation and Sediment Transport Symposium, Monte Verita.

Watanabe, R. (1995). Powder processing of functionally gradient materials. *MRS Bulletin*, 20(1), 32-34.

Watanabe, Y., Inaguma, Y., Sato, H. and Miura-Fujiwara, E. (2009). A novel fabrication method for functionally graded materials under centrifugal force: The centrifugal mixed-powder method. *Materials*, 2(4), 2510-2525.

Yang, Y. C., Lee, H. L., Hsu, J. C. and Chu, S. S. (2005). Thermal stresses in multilayer gun barrel with interlayer thermal contact resistance. *Journal of Thermal Stresses*, 31(7), 624-637.

Yıldırım, F. (2013). *Büyük Kalibre Mühimmatta Kullanılan Barutların Geometrik Şekil Değişiminin Namlu İç Basıncı ve Namlu Çıkış Hızı Üzerindeki Etkisi*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 39-51

Yıldırım, V. (2015). A parametric study on the centrifugal force-induced stress and displacements in power-law graded hyperbolic discs. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 15(4).

You, L. H., Zhang, J. J. and You, X. Y. (2005). Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 52(5), 347-354.

Zhao, C., Vleugels, J., Vandeperre, L., Basu, B. and Van der Biest, O. (1999). Graded tribological materials formed by electrophoresis. *Materials Science Forum*, Vol. 305-308, 95-100.





EKLER

EK-1. Aksel gerinim denklemi

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_z = -\frac{S_1}{S_2} \text{ olmak üzere,}$$

$$S_1 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + F_9$$

$$S_2 = F_1 + F_2$$

Sabitleri tanımlanır ve ifadeler yazılırsa:

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \nu^2 A_{13} A_{23} E_0 b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{21} (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & + \frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) \nu^2 A_{24} E_0 b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
 & - \frac{A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) E_0 A_{23} \nu^2 b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
 & - \frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) E_0 A_{24} \nu^2 b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & + \frac{a^2 (b^2 - a^2) \nu^2 E_0}{(a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & - \frac{a^2 A_{18} (b^2 - a^2) E_0 \nu^2}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & + \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \nu^2 A_{13} A_{23} E_0 b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)(2\nu - 1)}
 \end{aligned}$$

EK-1. (devam) Eksenel gerinim denklemi

$$\begin{aligned}
 F_2 = & \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) \nu^2 A_{24} E_0 b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & - \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) E_0 A_{24} \nu^2 b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & - \frac{a^2 A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) E_0 A_{23} \nu^2 b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{21} (\nu + 1)(2\nu - 1)} + \frac{1}{2} (b^2 - a^2) E_0 \\
 & + \frac{(b^2 - a^2) \nu^2 A_{18} E_0 b^2}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & - \frac{(b^2 - a^2) E_0 \nu^2 b^2}{(a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} + \frac{(a^2 - b^2) \nu^2 E_0}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & - \frac{A_{18} (b^2 - a^2) E_0 \nu^2 b^2}{(A_{20} - A_{18})(a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} + \frac{(c^{\beta+2} - b^{\beta+2}) E_0 b^{-\beta}}{\beta + 2} \\
 & \frac{a^2 (b^2 - a^2) \nu^2 A_{18} E_0}{(A_{20} - A_{18})(a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)(2\nu - 1)}
 \end{aligned}$$

Burada;

$$A_{21} = \beta - A_{10} + 2$$

$$A_{22} = \beta + A_{10} + 2$$

$$A_{23} = -\beta - A_{10} + 2$$

$$A_{24} = -\beta + A_{10} + 2$$

EK-1. (devam) Eksenel gerinim denklemi

$$\begin{aligned}
 F_3 = & -\frac{(b^2 - a^2) \nu A_7 A_{18} E_0 b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)} \\
 & -\frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}}\right) \nu A_{16} A_{24} b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22}} - \frac{(b^2 - a^2) \nu A_7 E_0 b^{2-\beta}}{(a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)} \\
 & -\frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}}\right) \nu A_8 A_{13} A_{23} E_0 b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)} \\
 & -\frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}}\right) \nu A_9 A_{13} A_{23} E_0 b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)} \\
 & -\frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}}\right) \beta \nu A_{13} A_{23} (T_i - 300) \alpha_0 b^{2-2\beta}}{4(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{21} (\nu + 1) \gamma} \\
 & -\frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}}\right) \ln \beta (1 - \nu) \nu A_{24} (T_i - 300) \alpha_0 b^{3-2\beta}}{a(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1)(2\nu - 1) \gamma} \\
 & -\frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}}\right) \beta \nu A_{24} (T_i - 300) \alpha_0 b^{2-2\beta}}{4(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1) \gamma} \\
 & -\frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}}\right) (1 - \nu) \nu A_{24} T_i \alpha_0 b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & + \frac{A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}}\right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{23} \beta \nu b^{2-2\beta}}{4(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1) \gamma}
 \end{aligned}$$

EK-1. (devam) Eksenel gerinim denklemi

$$\begin{aligned}
F_4 = & \frac{A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{23} \beta \nu \ln b b^{2-2\beta}}{2(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{21} (\nu + 1)(2\nu - 1) \gamma} \\
& + \frac{A_8 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) E_0 A_{24} \nu b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
& + \frac{A_9 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) E_0 A_{24} \nu b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
& + \frac{A_{13} A_{16} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) A_{23} \nu b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{21}} + \frac{A_{18} b^{2-\beta} (b^2 - a^2) (T_i - 300) \alpha_0 \beta \nu}{4(A_{20} - A_{18})(a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1) \gamma} \\
& + \frac{A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) T_i \alpha_0 A_{23} (1 - \nu) \nu b^{2-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{21} (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
& + \frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{24} \beta \nu b^{2-2\beta}}{4(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1) \gamma} \\
& + \frac{A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{23} \beta (1 - \nu) \nu \ln b b^{2-2\beta}}{a(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{21} (\nu + 1)(2\nu - 1) \gamma} \\
& + \frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \nu ((\beta + A_{10})(\nu - 1) + 2\nu) A_{12} A_{13} A_{23} E_0 b^{\frac{A_{23}}{2} - \beta}}{2(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{21} (\nu + 1)(2\nu - 1)}
\end{aligned}$$

EK-1. (devam) Eksenel gerinim denklemi

$$\begin{aligned}
 F_5 = & - \frac{A_{12} \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) E_0 A_{24} \nu b^{\frac{A_{23}}{2} - \beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
 & - \frac{A_{12} \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) E_0 A_{24} \nu ((\beta + A_{10})(\nu - 1) + 2\nu) b^{\frac{A_{23}}{2} - \beta}}{2(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & - \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) P \nu A_{13} A_{23} b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu))} - \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) P \nu A_{24} b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22}} \\
 & + \frac{(c^2 - b^2)(2 - \beta) \nu A_7 E_0 b^{-\beta}}{2(\nu + 1)(2\nu - 1)} + \frac{2(c^{\beta+2} - b^{\beta+2}) \nu A_8 E_0 b^{-\beta}}{(\beta + 2)(\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & + \frac{2(c^{\beta+2} - b^{\beta+2}) \nu A_9 E_0 b^{-\beta}}{(\beta + 2)(\nu + 1)(2\nu - 1)} + \frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \nu A_{12} A_{23} E_0 b^{-\beta}}{A_{21} (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & + \frac{a^3 \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \ln \beta \nu A_{13} A_{23} (T_i - 300) \alpha_0 b^{-2\beta}}{2(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)(2\nu - 1) \gamma} \\
 & + \frac{a^2 b^{-\beta} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \beta \nu (1 - 2\nu) A_{13} A_{23} (T_i - 300) \alpha_0 b^{-\beta}}{4(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)(2\nu - 1) \gamma} \\
 & + \frac{a^3 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) \ln \beta \nu A_{24} (T_i - 300) \alpha_0 b^{-2\beta}}{2(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1)(2\nu - 1) \gamma} \\
 & - \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) \beta \nu A_{24} (T_i - 300) \alpha_0 b^{-2\beta}}{4(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1) \gamma}
 \end{aligned}$$

EK-1. (devam) Eksenel gerinim denklemi

$$\begin{aligned}
 F_6 = & + \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) (1-\nu) \nu A_{13} A_{23} T_i \alpha_0 b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2 (1-2\nu)) (\nu+1) (2\nu-1)} \\
 & - \frac{300 (c^{\beta+2} - b^{\beta+2}) \alpha_0 b^{-\beta}}{\beta+2} - \frac{(c^2 - b^2) (T_i - 300) \alpha_0 (1-\nu) b^{-\beta}}{2(\nu+1)(2\nu-1)\gamma} \\
 & - \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{24} \beta \nu \ln ab^{-2\beta}}{2(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1-2\nu)) (\nu+1) (2\nu-1) \gamma} \\
 & + \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{24} \beta \nu b^{-2\beta}}{4(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1-2\nu)) (\nu+1) \gamma} \\
 & - \frac{a^2 A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{23} \beta \nu \ln ab^{-2\beta}}{2(A_{20} - A_{18}) (a^2 - b^2) A_{21} (\nu+1) (2\nu-1) \gamma} \\
 & + \frac{a^2 A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{23} \beta \nu b^{-2\beta}}{4(A_{20} - A_{18}) (a^2 - b^2) A_{21} (\nu+1) \gamma} \\
 & - \frac{(c^{\beta+2} - b^{\beta+2}) (1-\nu) \left(\frac{600 \alpha_0}{\beta+2} - \frac{2c^{-\beta} (T_i - 300) \alpha_0}{(\beta+2)\gamma} \right) b^{-\beta}}{(\nu+1)(2\nu-1)} \\
 & - \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) T_i \alpha_0 A_{24} (1-\nu) \nu b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1-2\nu)) (\nu+1) (2\nu-1)} \\
 & - \frac{a^2 A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) T_i \alpha_0 A_{23} (1-\nu) \nu b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) (a^2 - b^2) A_{21} (\nu+1) (2\nu-1)}
 \end{aligned}$$

EK-1. (devam) Eksenel gerinim denklemi

$$\begin{aligned}
F_7 = & + \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) P A_{24} \nu b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu))} - \frac{(b^2 - a^2) \nu A_8 E_0 b^2}{(a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
& + \frac{a^2 A_{13} \left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) P A_{23} \nu b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18}) (a^2 - b^2) A_{21}} - \frac{(b^2 - a^2) \nu A_{12} E_0 b^{\frac{A_{23}}{2}}}{(a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
& + \frac{A_7 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) E_0 A_{24} \nu b^{2-2\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} + \frac{b^{2-\beta} (b^2 - a^2) (T_i - 300) \alpha_0 \beta \nu}{4 (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1) \gamma} \\
& \frac{(b^2 - a^2) \nu ((\beta + A_{10}) (\nu - 1) + 2\nu) A_{12} A_{18} E_0 b^{\frac{A_{23}}{2}}}{2 (A_{20} - A_{18}) (a^2 - b^2) (\nu + 1) (2\nu - 1)} \\
& - \frac{(b^2 - a^2) \nu A_{12} A_{18} E_0 b^{\frac{A_{23}}{2}}}{(A_{20} - A_{18}) (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
& - \frac{(b^2 - a^2) \nu A_9 E_0 b^2}{(a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} - \frac{(b^2 - a^2) \nu A_8 A_{18} E_0 b^2}{(A_{20} - A_{18}) (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
& - \frac{(b^2 - a^2) \nu A_9 A_{18} E_0 b^2}{(A_{20} - A_{18}) (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1)} \\
& - \frac{A_{16} A_{18} \nu b^2}{(A_{20} - A_{18})} - \frac{A_{18} T_i \alpha_0 (1 - \nu) \nu b^2}{(A_{20} - A_{18}) (\nu + 1) (2\nu - 1)} \\
& - \frac{(b^2 - a^2) \ln \beta \nu (T_i - 300) \alpha_0 b^{3-\beta}}{2 (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1) \gamma} - \frac{b^{2-\beta} (T_i - 300) \alpha_0 \beta (1 - \nu) \ln b}{a ((\nu + 1) (2\nu - 1) \gamma)} \\
& - \frac{(b^2 - a^2) \ln \beta \nu A_{18} (T_i - 300) \alpha_0 b^{3-\beta}}{2 (A_{20} - A_{18}) (a^2 + b^2 (1 - 2\nu)) (\nu + 1) \gamma}
\end{aligned}$$

EK-1. (devam) Eksenel gerinim denklemi

$$\begin{aligned}
F_8 = & - \frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) \ln \beta \nu A_{24} (T_i - 300) \alpha_0 b^{3-2\beta}}{2(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma} \\
& - \frac{A_{18} b^{2-\beta} (T_i - 300) \alpha_0 \beta \nu \ln b}{2(A_{20} - A_{18})(\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma} - \frac{a^2 (b^2 - a^2) P \nu}{(a^2 + b^2 (1 - 2\nu))} \\
& - \frac{a^2 (b^2 - a^2) P \nu A_{18}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 + b^2 (1 - 2\nu))} - \frac{b^{-\beta} (T_i - 300) \alpha_0 \beta \nu (b^2 \ln b - a^2 \ln a)}{2(\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma} \\
& + \frac{b^{-\beta} (b^2 - a^2) \beta (1 - \nu) (T_i - 300) \alpha_0}{2(\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma} \\
& + \frac{b^{-\beta} (b^2 - a^2) \beta \nu (T_i - 300) \alpha_0}{4(\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma} \\
& + \frac{a^3 b^{-\beta} (b^2 - a^2) \ln \beta \nu (T_i - 300) \alpha_0}{2(a^2 + b^2 (1 - 2\nu))(\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma} \\
& - \frac{a^2 b^{-\beta} (b^2 - a^2) \beta \nu (T_i - 300) \alpha_0}{4(a^2 + b^2 (1 - 2\nu))(\nu + 1)\gamma} + \frac{(c^2 - b^2)(T_i - 300) \alpha_0 b^{-\beta}}{2\gamma} \\
& + \frac{a^3 b^{-\beta} (b^2 - a^2) \ln \beta \nu A_{18} (T_i - 300) \alpha_0}{2(A_{20} - A_{18})(a^2 + b^2 (1 - 2\nu))(\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma} \\
& + \frac{b^{2-\beta} \beta \nu A_{18} (T_i - 300) \alpha_0}{4(A_{20} - A_{18})(\nu + 1)\gamma} + \frac{b^{-\beta} (b^2 - a^2) \beta (T_i - 300) \alpha_0}{2\gamma} \\
& - \frac{a^2 b^{-\beta} (b^2 - a^2) \beta \nu A_{18} (T_i - 300) \alpha_0}{4(A_{20} - A_{18})(a^2 + b^2 (1 - 2\nu))(\nu + 1)\gamma} - \frac{1}{2} (b^2 - a^2) T_i \alpha_0 \\
& + \frac{a^2 (b^2 - a^2) (1 - \nu) \nu A_{18} T_i \alpha_0}{(A_{20} - A_{18})(a^2 + b^2 (1 - 2\nu))(\nu + 1)(2\nu - 1)}
\end{aligned}$$

EK-1. (devam) Eksenel gerinim denklemi

$$\begin{aligned}
 F_9 = & \frac{a^2 (b^2 - a^2)(1 - \nu) \nu T_i \alpha_0}{(a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & - \frac{b^{2-\beta} (T_i - 300) \alpha_0 \beta \ln b}{a\gamma} - \frac{(bc)^{-\beta} (c^{\beta+2} - b^{\beta+2})(T_i - 300) \alpha_0}{(\beta + 2)\gamma} \\
 & + \frac{a^2 A_{18} b^{-\beta} (T_i - 300) \alpha_0 \beta \nu \ln a}{2(A_{20} - A_{18})(\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma} - \frac{a^2 A_{18} b^{-\beta} (T_i - 300) \alpha_0 \beta \nu}{4(A_{20} - A_{18})(\nu + 1)\gamma} \\
 & - \frac{A_{18} b^{2-\beta} (T_i - 300) \alpha_0 \beta (1 - \nu) \nu \ln b}{a((A_{20} - A_{18})(\nu + 1)(2\nu - 1)\gamma)} - \frac{a^2 A_{18} P \nu}{(A_{20} - A_{18})} \\
 & + \frac{(b^2 - a^2) T_i \alpha_0 (1 - \nu)}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} + \frac{a^2 A_{18} T_i \alpha_0 (1 - \nu) \nu}{(A_{20} - A_{18})(\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & + \frac{a^2 \left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) (1 - \nu) \nu A_{24} T_i \alpha_0 b^{-\beta}}{(A_{20} - A_{18})(a^2 - b^2) A_{22} (\nu + 1)(2\nu - 1)} \\
 & - \frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \ln \beta \nu A_{13} A_{23} (T_i - 300) \alpha_0 b^{3-2\beta}}{2(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)\gamma} \\
 & - \frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \nu A_7 A_{13} A_{23} E_0 b^{2-2\beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)} \\
 & - \frac{\left(c^{\frac{A_{21}}{2}} - b^{\frac{A_{21}}{2}} \right) \nu A_{12} A_{13} A_{23} E_0 b^{\frac{A_{23}}{2} - \beta}}{(A_{20} - A_{18}) A_{21} (a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)} \\
 & + \frac{\left(c^{\frac{A_{22}}{2}} - b^{\frac{A_{22}}{2}} \right) (T_i - 300) \alpha_0 A_{24} \beta \nu \ln b b^{2-2\beta}}{2(A_{20} - A_{18}) A_{22} (a^2 + b^2(1 - 2\nu))(\nu + 1)\gamma}
 \end{aligned}$$



GAZİ GELECEKTİR..