



T.C.  
EGE ÜNİVERSİTESİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü



# ÇİZGE TEORİSİNDE BASKINLIK SAYISI

Yüksek Lisans Tezi

Ayşen MUTLU ÖZCAN

Matematik Anabilim Dalı

İzmir  
2021



T.C.

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇİZGE TEORİSİNDE**

**BASKINLIK SAYISI**

**Ayşen MUTLU ÖZCAN**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Aysun AYTAÇ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Bilgisayar Bilimleri Yüksek Lisans Programı**

**İzmir**

**2021**



**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI**

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Çizge Teorisinde Baskınlık Sayısı**” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

19 / 03 / 2021

Ayşen MUTLU ÖZCAN



**ÖZET****ÇİZGE TEORİSİNDE****BASKINLIK SAYISI**

MUTLU ÖZCAN, Ayşen

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Aysun AYTAÇ

Mart 2021, 47 sayfa

Bu tez çalışmasında, baskınlık parametresinin bir türü olan çift baskınlık sayısı çalışılmıştır.  $S \subseteq V$  için eğer  $V$  deki her tepe  $S$  de en az iki tepe tarafından bastırılırsa,  $G$  çizgesinin çift baskın kümesi olarak tanımlanır ve  $DD$ -küme ( $DD$ -set) ile gösterilir.  $G$  çizgesinin çift baskınlık sayısı, en küçük elemanlı bir  $DD$ -küme nin eleman sayısıdır ve  $\gamma_{dd}(G)$  ile gösterilir.

Bir  $G$  çizgesinin gölge çizgesi J.A. Gallian tarafından, gölge uzunluklu (mesafeli) çizgesi ise B. Sooryanarayana tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada, network modeli olarak oldukça fazla kullanılan çizgelerden yol çizge, çevre çizge, tam çizge, yıldız çizge, tekerlek çizge, iki parçalı tam çizge gibi bilinen bazı çizgelerin gölge ve gölge uzunluklu çizgeleri için sonuçlar elde edilmiştir

**Anahtar sözcükler:** Çizge teorisi, baskınlık, çift baskınlık, gölge çizgeler, gölge uzunluklu (mesafeli) çizgeler.



**ABSTRACT**

**DOMINATION NUMBER OF**

**GRAPH THEORY**

MUTLU ÖZCAN, Ayşen

MSc in Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Aysun AYTAÇ

March 2021, 47 pages

In this thesis, double domination number, which is a type of domination parameter, has been studied. A set  $S \subseteq V$  is called a double dominating set (*DD-set*) of a graph  $G$  if every vertex in  $V$  is dominated by at least two vertices in  $S$ . The minimum cardinality of *DD-set* is called double domination number of  $G$  and is denoted by  $\gamma_{dd}(G)$ .

The shadow graph of a  $G$  graph was defined by J.A. Gallian, while the shadow distance graph was defined by B. Sooryanarayana. In this thesis, results were obtained for shadow graphs and shadow distance graphs of some known graphs such as path graph, cycle graph, star graph, complete graph, wheel graph, complete bipartite graph, which are widely used as network models.

**Keywords:** Graph theory, domination, double domination, shadow graphs, shadow distance graphs.



## ÖNSÖZ

Baskınlık sayısı, yıllar boyunca çizgeler (graflar) üzerinde çalışılan bir parametredir. Bir  $G$  çizgesinin çift baskınlık sayısı parametresi üzerinde de çalışmalar bulunmaktadır. Araştırmalar sonucunda gölge çizgelerin de çift baskınlık değerlerinin hesaplanabileceği görülmüştür.

Bu tez çalışmasında, bilinen bazı çizgeler üzerinde gölge çizgelerin ve gölge uzunluklu (mesafeli) çizgelerin çift baskınlık sayıları incelenmiştir.

İZMİR

19 / 03 / 2021

Ayşen MUTLU ÖZCAN



**İÇİNDEKİLER**

	<u>Sayfa</u>
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI.....	(v)
ÖZET .....	(vii)
ABSTRACT .....	(ix)
ÖNSÖZ .....	(xi)
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	(xiii)
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	(xv)
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	(xvii)
1. GİRİŞ.....	1
2. ÇİFT BASKINLIK SAYISININ BULUNMASI .....	7
2.1 Baskınlık sayısı.....	7
2.2 Çift baskınlık sayısı .....	7
2.3 Çift baskınlık sayısı ile ilgili literatürdeki bazı teorem ve sonuçlar .....	8
3. GÖLGE ÇİZGE VE GÖLGE UZUNLUKLU (MESAFELİ) ÇİZGELERDE ÇİFT BASKINLIK SAYISI.....	10
3.1 Gölge çizgelerde çift baskınlık sayısı.....	10
3.2 Gölge mesafeli çizgelerde çift baskınlık sayısı .....	21

## İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
4. SONUÇ .....	42
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	43
TEŞEKKÜR.....	46
ÖZGEÇMİŞ .....	47



**ŞEKİLLER DİZİNİ**

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.110 tepeli, 15 ayrıtlı birleştirilmiş bir $G$ çizgesi.....	7
3.1 $C_6$ çizgesinin gösterimleri.....	10
3.2 $C_6$ çizgesinin gölge çizgesi .....	10
3.3 $C_6$ çizgesinin 2 ve 3 uzunluklu gölge çizgeleri.....	21





## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$V(G)$	$G$ çizgesinin tepeler kümesi
$E(G)$	$G$ çizgesinin ayrıtlar kümesi
$ G $	$G$ kümesinin eleman sayısı
$\deg(V)$	$V$ tepesinin derecesi
$\delta(G)$	$G$ çizgesinin minimum tepe derecesi
$\Delta(G)$	$G$ çizgesinin maksimum tepe derecesi
$N(v)$	$v$ tepesinin açık komşuluğu
$N[v]$	$v$ tepesinin kapalı komşuluğu
$\kappa(G)$	$G$ çizgesinin bağlantılılık sayısı
$i(G)$	Bağımsız baskınlık sayısı
$\alpha(G)$	Bağımsızlık sayısı
$\gamma(G)$	Baskınlık sayısı
$\gamma_{dd}(G)$	Çift baskınlık sayısı
$\gamma_t(G)$	Toplam baskınlık sayısı
$D_2(G)$	Gölge çizge
$D_{sd}(G, \{2\})$	2 uzunluklu (mesafeli) gölge çizge

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)**

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\gamma_{pd}(G)$	Paired (eşleştirilmiş) baskınlık sayısı
$\gamma'(G)$	Ayrıt baskınlık sayısı
$\gamma_s(G)$	Güçlü baskınlık sayısı
$\gamma_w(G)$	Zayıf baskınlık sayısı
$\lceil a \rceil$	a reel sayısından büyük veya eşit olan en küçük tam sayı
$\lfloor a \rfloor$	a reel sayısından küçük veya eşit olan en büyük tam sayı
<u>Kısaltmalar</u>	
$DD - set$	Çift baskın küme





## 1. GİRİŞ

Gerçek hayat problemlerinin matematiksel modellenmesi diferansiyel denklemler, integral denklemler, cebirsel ilişkiler vb. kullanılarak yapılabilir. Çeşitli bileşenlerin birbiriyle nasıl ilişkili olduğunu gösteren bu tür problemlerin grafiksel gösterimi, onları incelemek ve çözmek için herkesi cezbeder. Bu grafik temsiller medeniyetten önce bile takip edilmiş olsa da, somut bir matematiksel yapı olarak, yeni bir matematik dalı olan çizge teorisinin formülasyonuna yardımcı olmuştur. Çizge teorisinin tanımlanmasından bu yana, bu yapıların çeşitli yönleri matematikçilerin ilgisini çekmiştir.

Ağ tasarımı gibi birçok graf uygulamasının bilinmesi matematikçilerin yanısıra bilgisayar bilimciler için de oldukça önemlidir.

$G$  çizgesi, iki kümeden oluşan sıralı bir çifttir  $G = (V(G), E(G))$ . Burada  $V = V(G)$  tepe kümesi olarak ve  $E = E(G)$  ayrıt kümesi olarak adlandırılır.  $u, v \in V$  olmak üzere bu iki tepe arasında bir ayrıt varsa,  $u$  ve  $v$  iki tepesinin komşu olduğu söylenir. Bu ayrıt  $uv$  olarak gösterilir.  $G$  çizgesinin tepe sayısı,  $|V|$  olarak gösterilen  $V$  kümesinin eleman sayısıdır. Bir  $G$  çizgesinde iki tepe arasındaki birden fazla olan ayrıtlara **kathı ayrıtlar**, bir tepe arasındaki bir ayrıta **döngü ayrıt** adı verilir. Bir  $G$  çizgesinin her tepe çifti arasında en az bir yol var ise,  $G$  çizgesine **bağlantılı (birleştirilmiş) çizge** denir. Eğer bir  $G$  çizgesindeki  $uv$  ayrıtı  $vu$  ayrıtıdan farklı ise bu grafa **yönlü çizge**, aksihalde grafa **yönsüz çizge** denir. **Trivial (aşıkâr) çizge** hiçbir ayrıtı olmayan çizgedir. Bir çizgede **izole edilmiş tepe** veya **izole tepe**, çizgede komşusu olmayan tepedir. Bir  $G$  çizgesindeki herhangi bir  $v$  tepesinin derecesi,  $v$  tepesine komşu olan  $G$ 'deki tepe sayısıdır ve  $\deg_G(v)$  ile gösterilir. Bir  $G$  çizgesinin tepe derecelerinin en küçüğüne, **çizgenin minimum tepe derecesi** ve tepe derecelerinin en büyüğüne ise, **çizgenin maksimum tepe derecesi** denir ve sırasıyla  $\delta(G)$  ve  $\Delta(G)$  ile gösterilir. Bir  $G$  çizgesinde  $v \in V$  olmak üzere,  $v$  tepesinin **açık komşuluğu**  $N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ , **kapalı komşuluğu** ise  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$  şeklinde tanımlanır. Bir çizgenin **yaprağı**, bir dereceli tepesidir ve bir yaprağa komşu olan

tepe ise çizgenin **destek (support) tepesidir**. (Chartrand et al., 1986; West, 2001; Harary, 1969)

$G$  çizgesinin tepelerinin herhangi bir  $S$  kümesi için, **etkilenmiş alt çizgesi**  $\langle S \rangle$ ,  $S$  tepeler kümesi ile oluşturulmuş maksimal alt çizgesidir.  $S$  deki iki tepe ancak ve ancak  $G$  çizgesinde bitişik ise  $\langle S \rangle$  çizgesinde birbirine bitişiktir.  $r \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere bir  $G$  çizgesinde,  $\forall v \in V(G)$  için  $d_\alpha(v) = r$  ise  $G$  çizgesine  $r$ -düzenli çizge denir. Bir  $G$  çizgesinin tümleyen (complement) çizgesi  $\bar{G}$ ,  $G$  çizgesi ile aynı tepeler kümesine sahiptir ve  $G$  çizgesinde komşu olmayan iki tepe  $\bar{G}$  çizgesinde komşu iken,  $G$  çizgesinde komşu olan iki tepe  $\bar{G}$  çizgesinde komşu değildir. (Chartrand et al., 1986; West, 2001; Harary, 1969)

Zedelenebilirlik, bir iletişim ağındaki bazı merkezlerin ya da bağlantı hatlarının zarar görmesinden sonra geriye kalan ağdaki, iletişim kesilene kadar geçecek olan sürede ağın dayanma gücünün ölçümüdür. (Barefoot et al., 1987)

Örneğin, iletişim ağları kopmalara ve saldırılara maruz kalabilir. İletişim ağları tasarlanırken, iletişimin kopmaması amacıyla gerekli önlemler alınmalıdır. Ağın bozulmalar karşısında gösterdiği dirence ağın zedelenebilirlik değeri denir. Çizgelerde iletişim ağlarının dayanıklılığını ve güvenilirliğini ölçüp hesaplayabilmek için birçok parametre kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları bağlantılılık (connectivity), dayanıklılık (toughness), bütünlük (integrity), bağımlılık sayısı (bondage number), baskınlık sayısı (domination number) vb. olarak adlandırılmıştır.

Çizgelerde baskınlık, çizge teorisinin kapsamlı bir şekilde araştırılmış bir dalı olmuştur. Çizge teorisi, modern matematik ve bilgisayar uygulamalarının en gelişen dallarından biridir. Son 30 yıl, ayrık optimizasyon problemlerine, kombinatoriyal problemlere ve klasik cebirsel problemlere, geniş uygulamaları nedeniyle çizge teorisinin büyümesine tanık olmuştur. Mühendislik, fiziksel, sosyal ve biyolojik bilimler, dilbilim vb. gibi birçok alanda çok geniş bir uygulama yelpazesine sahip olan baskınlık teorisi son zamanlarda çizge teorisinde araştırma faaliyetlerinin çekirdeği olmuştur.

Baskın küme problemi, belirli bir çizgenin baskınlık sayısının belirlenmesini gerektirir. Ayrıca çok sayıda tesis konum probleminde doğal uygulamalara sahiptir. Bu tür problemlerde, bir çizgenin tepeleri konumlara karşılık gelir, bitişiklik bazı erişilebilirlik kavramını temsil eder ve amaç, yangın istasyonlarının, otobüs duraklarının, postanelerin veya benzeri tesislerin kurulacağı diğer tüm konumlardan erişilebilen konumların bir alt kümesini bulmaktır. Kodlama teorisi ve sosyal ağlarda da baskın küme uygulamaları mevcuttur. (Gorodezky, 2007; Kelleher and Cozzens, 1988)

Baskınlık parametresinin bu şekilde yaygın çalışılmasının nedenlerinden biri, temel tanımından geliştirilebilecek çeşitli yeni parametrelerden kaynaklanmaktadır. Ayrıca, *NP-tam* diğer temel baskın problemleri ve diğer *NP-tam* problemleriyle olan yakın ilişkisi, baskınlık teorisindeki araştırma faaliyetinin büyümesine katkıda bulunmuştur.

De Jaenisch' in  $n \times n$  satranç tahtasını örtmek veya bastırmak için gerekli olan minimum vezir sayısını belirleme problemlerini incelediği 1862 yılına kadar uzanan tarihsel kökleri olmasına rağmen, çizge teorisindeki baskın kümeler üzerine titiz çalışma 1960 civarında başladı. İlk 1958' de Berge, bir çizgenin baskınlık sayısı kavramını tanımladı. Daha sonra 1962 yılında Ore baskınlık küme ve baskınlık sayısını çalıştı. 1977 yılında ise Cockayne ve Hedetniemi çizgelerde baskın kümeler hakkında o zamanlar bilinen sonuçlarla ilgili ilginç ve kapsamlı bir makale yaptılar. Cockayne ve Hedetniemi' nin bu konuda yapmış olduğu çalışmalar, çizgelerde baskınlık çalışmasına olan ilgiyi arttırdı. Baskınlık üzerine oluşturulan kitaplar da, bu çalışma alanının genişlemesine yol açan diğer faktörlerdendir.

Çizge teorisindeki araştırmaların çoğunda, araştırmacılar, belirli bir çizge parametresi ile bir çizgenin varlığını oluşturmaktan memnundur. Örneğin,  $n$  olarak baskınlık sayısı verildiğinde, bunun baskın sayısı olduğu bir çizge var mıdır? Benzer şekilde, belirli bağımlılık (bondage) sayısına sahip bir çizge var mıdır? Bu sorular başarılı bir şekilde araştırılmıştır.

Çizge teorisinde, baskınlığın temel tanımından geliştirilebilecek çeşitli yeni baskınlık parametreleri mevcuttur. Bu parametrelerden bazılarının tanımları aşağıda verilmiştir.

**Tanım 1.1:** (Harary and Haynes, 2000)  $S \subseteq V$  bir tepe alt kümesi olmak üzere,  $V$  nin her  $v$  tepesi için eğer  $|N[v] \cap S| \geq 1$  ise, o zaman  $S$  kümesine  $G$  çizgesinin bir **baskın kümesi** denir.  $G$  çizgesinin **baskınlık sayısı**, en az elemana sahip olan baskın kümesinin eleman sayısıdır ve  $\gamma(G)$  ile gösterilir. Eleman sayısı  $\gamma(G)$  olan  $G$  grafının bir baskın kümesi,  $\gamma(G)$ -kümesi ( $\gamma(G)$ -set) olarak isimlendirilir.

**Tanım 1.2:** (Allan and Laskar, 1978) Bir küme, içindeki iki tepe bitişik değilse bağımsızdır (veya kararludur).  $G$  çizgesinin bir bağımsız baskın kümesi,  $G$  'de hem baskın hem de bağımsız olan bir kümedir.  $i(G)$  ile gösterilen  $G$  'nin **bağımsız baskınlık sayısı**, bir bağımsız baskın kümenin en küçük eleman sayısıdır.  $\alpha(G)$  olarak gösterilen  $G$  'nin **bağımsızlık sayısı**,  $G$  'nin bağımsız kümeleri arasındaki en büyük eleman sayısıdır. Burada,  $\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G)$ .

**Tanım 1.3:** (Chartrand and Lesniak, 2004)  $E(G)$ ,  $G$  çizgesinin ayrıtlar kümesi olmak üzere  $F \subseteq E(G)$  olsun.  $E(G) - F$  kümesindeki her ayrıt;  $F$  kümesindeki herhangi bir ayrıtla ortak bir uç tepeye sahip ise,  $F$  kümesine **ayrıt baskın küme** (edge dominating set) denir.  $G$  çizgesinin ayrıt baskın kümeleri arasındaki en az elemana ait kümenin eleman sayısına **ayrıt baskınlık sayısı** (edge domination number) denir ve  $\gamma'(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.4:** (Sampathkumar and Pushpalatha, 1996)  $u$  ve  $v$  tepeleri  $G$  çizgesinin herhangi komşu iki tepesi olsun. Eğer  $d_G(u) \geq d_G(v)$  ( $d_G(u) \leq d_G(v)$ ) ise  $u$  tepesi  $v$  tepesini **güçlü bastırır** (**zayıf bastırır**) denir.  $V(G)$ ,  $G$  çizgesinin tepeler kümesi olmak üzere  $S \subseteq V(G)$  olsun.  $V(G) - S$  kümesindeki her tepe;  $S$  kümesindeki herhangi bir tepe tarafından güçlü (zayıf) bastırılıyorsa  $S$  kümesine **güçlü baskın küme**-strong dominating set (**zayıf baskın küme**-weak dominating set) denir. Güçlü (zayıf) baskın kümeler arasındaki en az elemana sahip kümenin

eleman sayısına  $G$  çizgesinin **güçlü baskınlık sayısı**-strong dominaton number (**zayıf baskınlık sayısı**-weak dominaton number) denir ve  $\gamma_s(G)$  ( $\gamma_w(G)$ ) ile gösterilir.

**Tanım 1.5:** (Cockayne et al., 1980)  $S \subseteq V$  bir tepe kümesi olmak üzere,  $V$  deki her tepe  $S$  kümesindeki en az bir tepeye bitişik ise,  $S$  kümesine  $G$  çizgesinin bir **toplam baskın kümesi** denir.  $G$  çizgesinin **toplam baskınlık sayısı**, çizgenin en az elemana sahip olduğu toplam baskın kümesinin eleman sayısıdır ve  $\gamma_t(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.6:** (Du et al., 2003) Bir  $G$  çizgesinin ayrıtlarının bir alt kümesi  $M$  olsun.  $M$  deki hiçbir ayrıt çifti ortak bir tepeye sahip değil ise  $M$  kümesine, grafın **eşleme kümesi** denir.  $G$  çizgesinin herhangi bir  $v$  tepesi çizgenin bir eşlemesindeki ayrıtlarının en az birinin uç noktası ise bu tepeye **doyurulmuş tepe** denir.  $G$  çizgesinin bir eşlemesine göre tüm tepeleri doyurulmuş ise bu eşlemeye **mükemmel eşleme** denir.

Bir  $G$  çizgesinin **paired (eşleştirilmiş) baskın kümesi**,  $G$  'nin her tepesi  $D$  'deki bir tepeye komşu ve  $D$  tarafından oluşan etkilenmiş alt çizgesi mükemmel eşleşme içerdiğinde bir baskın kümedir. Paired baskın kümenin en küçük eleman sayısına **paired baskınlık sayısı** denir ve  $\gamma_{pd}(G)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.7:** (Harary and Haynes, 2000)  $S \subseteq V$  bir tepe alt kümesi olmak üzere,  $V$  nin her  $v$  tepesi için eğer  $|N[v] \cap S| \geq k$  ise, yani eğer  $v \in S$  ise,  $S$  ' de en az  $k-1$  komşusu; eğer  $v \in (V-S)$  ise,  $S$  ' de en az  $k$  komşusu vardır, bu durumda  $S$  kümesine  $G$  çizgesinin bir  $k$  - **demet baskın kümesi** denir.  $G$  çizgesinin  $k$  - **demet baskınlık sayısı**, eğer böyle bir küme mevcut ise en az elemana sahip olan  $k$  - demet baskın kümesinin eleman sayısıdır ve  $\gamma_{xk}(G)$  ile gösterilir.  $\gamma(G) = \gamma_{x1}(G) \leq \gamma_{xk}(G)$  iken,  $\gamma_t(G) \leq \gamma_{x2}(G)$  olduğu açıktır. Bir çizgenin  $k$  - demet baskın kümeye sahip olabilmesi için, çizgenin minimum derecesi en azından  $\delta(G) = k-1$  olmalıdır. Böylece, ağaçlar için  $k \leq 2$  olmalıdır.  $k=2$  olan

bir  $k$  – demet baskın kümeye, **çift baskın küme** ( $DD$ – $set$ ) adı verilir. Eleman sayısı  $\gamma_{x_2}(G)$  olan  $G$  çizgesinin  $DD$ – $seti$  ,  $\gamma_{x_2}(G)$ – $set$  olarak isimlendirilir.

Çift baskınlık sayısı, izole tepe içermeyen her çizge için tanımlanabilir.  $k$  – demet baskınlıkta yer alan fazlalık, birçok uygulamada örneğin sağlamlık için onu kullanışlı hale getirir.

Bir uygulama örneği için mahkum ve gardiyanları ele alalım; burada baskınlık kavramı, her bir mahkumun bazı gardiyanlar tarafından görülebileceğidir. Burada çift baskınlık, her bir mahkumun iki veya daha fazla gardiyan tarafından korunmasını gerektirerek güvenliği artırır.

Çift baskınlık sayısı ile ilgili literatürde yapılan bazı çalışmalar şöyledir: çift baskın küme ve çift baskınlık sayısı ilk olarak F. Harary ve T. W. Haynes tarafından (Harary and Haynes, 1996) da belirtilmesine rağmen parametreyi (Harary and Haynes, 2000) deki yaptıkları makalede tanımladılar ve çalıştılar. Çift baskınlık için Nordhaus-Gaddum eşitsizlikleri de kuruldu. Blidia ve arkadaşları, paired ve çift baskınlık sayısı eşit olan ağaçları karakterize etti (Blidia et al., 2006). Atapour ve arkadaşları tepe derecesi açısından keyfi çizgeler için çift baskın altbölüm (subdivision) sayısı üzerine üst sınırlar oluşturdu (Atapour et al., 2007). Khelifi ve arkadaşları  $\gamma_{x_2}$  –*kritikal* çizgeleri inceledi (Khelifi et al., 2010). Ayrıca Khelifi ve Chellali, herhangi bir tepenin kaldırılmasının grafin çift baskınlık sayısı üzerindeki etkilerini incelediler (Khelifi and Chellali, 2012).

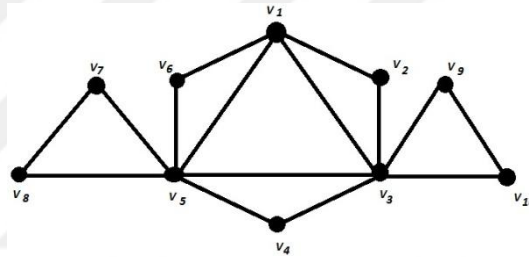
Tezin ikinci bölümde, baskınlık ve çift baskınlık parametreleri herhangi birleştirmiş bir çizgede çalıştırılıp, literatürdeki çift baskınlık ile ilgili yer alan bazı teoremler ve sonuçlar listelenmiştir. Son bölümde ise, gölge çizgeler ve gölge uzunluklu (mesafeli) çizgelerin tanımlarından yola çıkarak bilinen bazı çizgeler (yol çizge, çevre çizge, yıldız çizge, tam çizge, tekerlek çizge, iki parçalı tam çizge) için teoremler elde edilip ispatlanmıştır.

## 2. ÇİFT BASKINLIK SAYISININ BULUNMASI

Bu bölümde, baskınlık ve çift baskınlık sayısına yer verilmiş, ardından bu parametreler herhangi birleştirilmiş bir çizgede çalıştırılmıştır. Ayrıca, çift baskınlık sayısı ile ilgili bazı bilinen teorem ve sonuçlar verilmiştir.

### 2.1 Baskınlık sayısı

**Tanım 2.1.1:** (Haynes et al., 1998)  $S \subseteq V$  bir tepe alt kümesi olmak üzere,  $V$  nin her  $v$  tepesi için eğer  $|N[v] \cap S| \geq 1$  ise, o zaman  $S$  kümesine  $G$  çizgesinin bir **baskın kümesi** denir.  $G$  çizgesinin **baskınlık sayısı**, en az elemana sahip olan baskın kümesinin eleman sayısıdır ve  $\gamma(G)$  ile gösterilir.



Şekil 2.1: 10 tepeli, 15 ayrıtlı birleştirilmiş bir  $G$  çizgesi

Şekil 2.1' de verilen  $G$  çizgesinin tepeler kümesi  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$  olsun. Bu tepe kümelerinin bazı baskın kümeleri  $S_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ ,  $S_2 = \{v_3, v_6, v_7\}$ ,  $S_3 = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}\}$  şeklinde verilsin. Burada,  $G$  çizgesinin üç elemandan daha az olan herhangi bir baskın kümesinin bulunamadığı görülmektedir. Buna göre, Şekil 2.1' de verilen  $G$  çizgesinin baskınlık sayısı  $\gamma(G) = 3$  'tür.

### 2.2 Çift baskınlık sayısı

**Tanım 2.2.1:** (Harary and Haynes, 2000)  $S \subseteq V$  için eğer  $V$  deki her tepe  $S$  de en az iki tepe tarafından bastırılırsa,  $G$  grafının **çift baskın kümesi** olarak tanımlanır ve  $DD$ -set ile gösterilir.  $G$  çizgesinin **çift baskınlık sayısı**, en küçük elemanlı

bir  $DD$ -set in eleman sayısıdır ve  $\gamma_{dd}(G)$  ile gösterilir. Eleman sayısı  $\gamma_{dd}(G)$  olan  $G$  çizgesinin bir çift baskın kümesi,  $\gamma_{dd}(G)$ -set olarak isimlendirilir.

Şekil 2.1' de verilen  $G$  grafi için,  $S_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_8, v_{10}\}$ ,  $S_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9\}$ ,  $S_3 = \{v_2, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$  kümeleri  $G$  grafinin çift baskın kümelerinden bazılarıdır. Burada,  $G$  grafinin beş elemandan daha az sayıda olan herhangi bir çift baskın kümesinin olmadığı görülmektedir. Buna göre, Şekil 2.1' de verilen  $G$  grafinin çift baskınlık sayısı  $\gamma_{dd}(G) = 5$ ' tir.

### 2.3 Çift baskınlık sayısı ile ilgili literatürdeki bazı teorem ve sonuçlar

**Teorem 2.3.1:** (Chen and Sun, 2005)  $G$  izole tepe içermeyen bir çizge ise,  $2 \leq \gamma_{dd}(G) \leq n$  dir.

**Teorem 2.3.2:** (Sivagnanam, 2012)  $G$  çizgesi için,  $\kappa(G) \leq \delta(G)$  dir.

**Teorem 2.3.3:** (Sivagnanam, 2012) Birleştirilmiş herhangi  $G$  çizgesi için,  $\gamma_{dd}(G) + \kappa(G) \leq 2n - 1$  dir.

**Teorem 2.3.4:** (Chen and Sun, 2005) İzole tepe içermeyen herhangi  $G$  çizgesi için,  $\gamma(G) \leq \gamma_{dd}(G) - 1$ .

**Teorem 2.3.5:** (Blidia et al., 2006)  $n \geq 2$  için,  $\gamma_{dd}(P_n) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$ .

**Teorem 2.3.6:** (Harary and Haynes, 2000)  $n \geq 3$  için,  $\gamma_{dd}(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ .

**Teorem 2.3.7:** (Chen and Sun, 2005)  $m > 1$  için  $\gamma_{dd}(K_{1,m}) = m + 1$ .

**Teorem 2.3.8:** (Chen and Sun, 2005) Bir  $G$  çizgesi için  $\delta(G) \geq 2$  ve  $n \neq 3, 5$  olmak üzere,  $\gamma_{dd}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \gamma(G) - 1$ .

**Teorem 2.3.9:** (Chen and Sun, 2005) İzole tepe içermeyen birleştirilmiş bir çizge için,  $\gamma_{dd}(\bar{G}) \leq 4$  tür.

**Teorem 2.3.10:** (Chen and Sun, 2005)  $G$  birleştirilmiş bir çizge olsun.  $G$  nin çapı en az 4 ise,  $\gamma_{dd}(\bar{G}) \leq 4$  olur.

**Teorem 2.3.11:** (Henning, 2005)  $n \geq 3$  olmak üzere,  $l$  yapraklı ve  $s$  destek (support) tepeli bir birleştirilmiş  $G$  çizgesi için,  $\gamma_{dd}(G) \leq (2n + l + s) / 3$  olur.

**Teorem 2.3.12:** (Henning, 2005) Eğer  $G$ ,  $\delta(G) \geq 2$  olacak şekilde  $n$  tepeli bir çizge ise, o zaman  $\gamma_{dd}(G) \leq 11n / 3$ .

**Teorem 2.3.13:** (Cuivillas and Canoy, 2016)  $G$ ,  $n$  tepeli ve  $n \geq 2$  olacak şekilde bir çizge olsun.  $G$  nin izole tepe içermediğini varsayalım.  $\gamma_{dd}(G) = 2$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$  nin  $n - 1$  dereceli iki tepe içermesidir.

**Teorem 2.3.14:** (Cuivillas and Canoy, 2016)  $G$ ,  $n$  tepeli ve  $n \geq 2$  olacak şekilde bir çizge olsun.  $G$  nin izole tepeleri olmadığını varsayalım.  $\gamma_{dd}(G) = n$  olması için gerek ve yeter koşul her  $v \in V(G)$  için,  $v$  tepesi ya bir yaprak ya da bir destek tepedir.

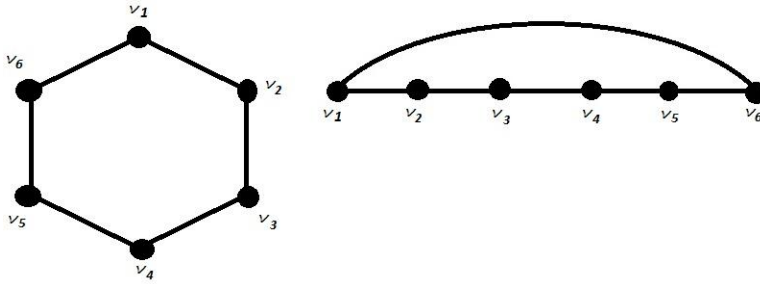
**Teorem 2.3.15:** (Chellali, 2006) Herhangi bir çizgenin her  $DD$ -seti, tüm yaprakları ve destek tepelerini içerir.

### 3. GÖLGE ÇİZGE VE GÖLGE UZUNLUKLU (MESAFELİ) ÇİZGELERDE ÇİFT BASKINLIK SAYISI

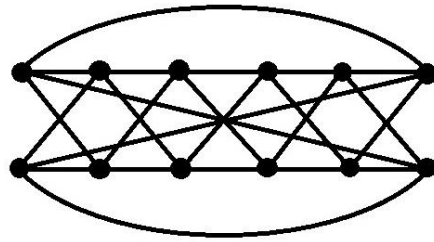
Bu bölümde, gölge çizgeler ve gölge uzunluklu (mesafeli) çizgelerde çift baskınlık sayısına yer verilmiştir. Çevre, yol, yıldız, tekerlek ve iki parçalı tam çizge gibi bazı özel çizgeler üzerinde sonuçlar elde edilip ispatlanmıştır.

#### 3.1. Gölge Çizgelerde Çift Baskınlık Sayısı

**Tanım 3.1.1:** (Gallian, 2014) Bağlantılı bir  $G$  çizgesinin **gölge çizgesi** olan  $D_2(G)$ ,  $G$  nin iki kopyası  $G_1$  ve  $G_2$  alınarak ve  $G_1$  deki her bir  $u$  tepesi  $G_2$  de karşılık gelen  $v$  tepesinin komşularıyla birleştirilerek oluşturulur.



Şekil 3.1:  $C_6$  çizgesinin gösterimleri



$D_2(C_6)$

Şekil 3.2:  $C_6$  çizgesinin gölge çizgesi

**Teorem 3.1.1:** Eğer  $G \cong P_n$ ,  $n$  tepeli bir yol çizge ise, o zaman

$$\gamma_{dd}(D_2(G)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil + 1, & n \equiv 1, 2 \pmod{7} \\ \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

**İspat:** Yol çizgenin gölge çizgesi olan  $D_2(G)$  nin tepeler kümesini;  $V(D_2(P_n)) = V(G) \cup V'(G)$  şeklinde iki parçaya ayıralım. Burada  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  ve  $V'(G) = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$  olsun. Öncelikle  $\gamma_{dd}(D_2(G))$  için üst sınırları kuralım.

$$S_1 = \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{7} \right\rceil - 1} \{(7i+2), (7i+3)\} \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-5}{7} \right\rceil - 1} (7i+6) \right\}$$

ve

$$S_2 = \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{7} \right\rceil - 1} (n+7i+2) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-4}{7} \right\rceil - 1} \{(n+7i+5), (n+7i+6)\} \right\} \quad \text{olmak üzere,}$$

$S = S_1 \cup S_2$  dir. Ayrıca  $|S| = 3 \left\lceil \frac{n-1}{7} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-5}{7} \right\rceil + 2 \left\lceil \frac{n-4}{7} \right\rceil$  dir. Eğer

$n \equiv i \pmod{7}$   $i \in \{0, 3, 6\}$  ise,  $D = S$  dir. Eğer  $n \equiv 1 \pmod{7}$  ise, o zaman  $D = S \cup \{(n-1), (2n-1)\}$  elde edilir. Eğer  $n \equiv 2 \pmod{7}$  ise  $S$  kümesine  $\{(n+1)\}$  tepesi gelir. Ancak  $D_2(G)$  çizgesinde  $(n+1) \notin V(D_2(P_n))$  olduğundan bu tepenin  $S$  kümesinden çıkartılması gerekir. Böylece  $D = (S - (n+1)) \cup \{(n-1)\}$  elde edilir. Eğer  $n \equiv 4 \pmod{7}$  ise  $D = S \cup \{(2n-1)\}$  olur. Eğer  $n \equiv 5 \pmod{7}$  için  $S$  kümesine  $\{(2n+1)\}$  tepesi gelir.  $(2n+1) \notin V(D_2(P_n))$  olduğu için,

$D = \{S - ((2n+1), (2n))\} \cup \{(n-1), (2n-1)\}$  dir.  $n \pmod{7}$  ' ye bağılı tüm durumlarda  $D$  kümesi  $D_2(P_n)$  nin bir  $DD$ -seti dir. Ayrıca  $n \equiv 1, 2 \pmod{7}$  ise  $|D| = \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil + 1$  ve diğeri tüm durumlar için  $|D| = \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  elde edilir. Böylece,

$$\gamma_{dd}(D_2(P_n)) \leq |D| = \begin{cases} \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil + 1, & n \equiv 1, 2 \pmod{7} \\ \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil, & \text{diğeri durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.

Eşitsizliğin tersini ispatlamak için öncelikle,  $T = \{v_1, \dots, v_t\}$  kümesinin bir  $\gamma_{dd}$ -seti olduğunu kabul edelim. Burada  $v_1 < \dots < v_i < \dots < v_m < v_{m+1} < \dots < v_j < \dots < v_t$  olduğunu  $1 \leq v_i \leq n$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve  $n+1 \leq v_j \leq 2n$ ,  $j \in \{m+1, \dots, t\}$  olacak şekilde  $v_i$  ve  $v_j$  pozitif tamsayılardır.  $x \neq m, m-1$  ve  $m-2$  olacak şekilde  $x \in \{1, \dots, t-3\}$  için  $f_x = v_{x+3} - v_x$  olsun.  $x \neq m, m-1$  ve  $m-2$  olacak şekilde  $x \in \{1, \dots, t-3\}$  için  $f_x \leq 7$  olduğunu ispatlamalıyız. Tam olarak sadece bir  $x$  değeri için  $f_x \geq 8$  olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmamak için  $f_1 = 8$  olsun. Bu iddiamıza uygun olarak:

$$S'_1 = \{2\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-5}{7} \right\rceil - 1} (7i+6) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-8}{7} \right\rceil - 1} \{(7i+9), (7i+10)\} \right\} \text{ ve}$$

$$S'_2 = \{(n+2), (n+3)\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-4}{7} \right\rceil - 1} \{(n+7i+5), (n+7i+6)\} \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-8}{7} \right\rceil - 1} (n+7i+9) \right\}$$

olmak üzere,  $T = S'_1 \cup S'_2$  dir.  $n$  değerinin tüm durumlarına göre, yukarıda ele alınan  $D$  kümesiyle aynı olduğu kolayca görülür. Yani  $T = D$  elde edilir. Bu

durumda en azından bir  $x$  için  $f_x \geq 9$  olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmamak için  $f_1 = 9$  olsun.

$$A = \{2\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-5}{7} \right\rfloor - 1} (7i+6) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-9}{7} \right\rfloor - 1} \{(7i+10), (7i+11)\} \right\} \text{ ve}$$

$$B = \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - 1} \{(n+7i+2), (n+7i+3)\} \right\} \cup$$

$$\left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-5}{7} \right\rfloor - 1} \{(n+7i+5), (n+7i+6), (n+7i+7)\} \right\} \text{ olmak üzere , } T = A \cup B \text{ dir.}$$

Bu durumda,  $\gamma_{dd}(D_2(P_n)) = |T| \geq 1 + 4 \left\lfloor \frac{n-5}{7} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n-9}{7} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor$  elde edilir. Bu ise  $\gamma_{dd}(D_2(P_n))$  üzerine daha önce oluşturmuş olduğumuz üst sınırlarla çelişir.

O halde  $f_x \leq 8$  olmalıdır. Ancak bu koşul sadece tam olarak bir tane  $x$  değeri olduğu zaman mümkün olup bu değer, her  $x$  değeri için  $f_x \leq 7$  olması durumundaki değer ile aynı olduğunu ispatladık. Bu yüzden fonksiyonun alt değerini bulmak için  $x \neq m, m-1, m-2$  olacak şekilde her  $x \in \{1, 2, \dots, t-3\}$  değeri için  $f_x \leq 7$  olarak alırız. Bu durumda,

$$\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} \leq 7(t-6)$$

olduğu kolayca görülür.  $v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 6, v_{m+1} = n+2, v_{m+2} = n+5$  ve  $v_{m+3} = n+6$  olduğu için,

$$\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} = v_m + v_{m-1} + v_{m-2} + v_t + v_{t-1} + v_{t-2} - (3n + 24).$$

Eğer  $n \equiv 0 \pmod{7}$  ise, o zaman

$$v_m = n-1, v_{m-1} = n-4, v_{m-2} = n-5, v_t = 2n-1, v_{t-1} = 2n-2 \text{ ve } v_{t-2} = 2n-5 \text{ dir.}$$

$$\text{Böylece, } 6n-42 = \sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} \leq 7(t-6) \text{ olur. Bu durumda, } |T| = t \geq \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$$

dir. Bu ise,  $\gamma_{dd}(D_2(P_n)) \geq \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 1 \pmod{7}$  ise, o zaman

$$v_m = n-1, v_{m-1} = n-2, v_{m-2} = n-5, v_t = 2n-1, v_{t-1} = 2n-2 \text{ ve } v_{t-2} = 2n-3 \text{ tür.}$$

$$\text{Böylece, } 6n-38 = \sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} \leq 7(t-6) \text{ ve buradan } t \geq \left\lceil \frac{6n+4}{7} \right\rceil \text{ elde}$$

edilir. Bu durumda,  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{6n+4}{7} \right\rceil = \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil + 1$  olur. Bu ise,

$$\gamma_{dd}(D_2(P_n)) \geq \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil + 1 \text{ olmasını gerektirir.}$$

Eğer  $n \equiv 2 \pmod{7}$  ise,

$$v_m = n, v_{m-1} = n-1, v_{m-2} = n-3, v_t = 2n, v_{t-1} = 2n-3, v_{t-2} = 2n-4 \text{ dir.}$$

$$\text{Böylece, } 6n-35 = \sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} \leq 7(t-6) \text{ ve buradan } t \geq \left\lceil \frac{6n+7}{7} \right\rceil \text{ elde}$$

edilir. Bu durumda,  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{6n+7}{7} \right\rceil = \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil + 1$  olur. Bu ise,

$$\gamma_{dd}(D_2(P_n)) \geq \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil + 1 \text{ olmasını gerektirir.}$$

Eğer  $n \equiv 3 \pmod{7}$  ise,  $v_m = n, v_{m-1} = n-1, v_{m-2} = n-4, v_t = 2n-1,$

$$v_{t-1} = 2n-4, v_{t-2} = 2n-5 \text{ dir. Böylece, } 6n-39 = \sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} \leq 7(t-6) \text{ ve}$$

buradan  $t \geq \left\lceil \frac{6n+3}{7} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda,  $|T|=t \geq \left\lceil \frac{6n+3}{7} \right\rceil = \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  olur.

Bu ise,  $\gamma_{dd}(D_2(P_n)) \geq \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 4 \pmod{7}$  ise,  $v_m = n-1, v_{m-1} = n-2, v_{m-2} = n-5, v_t = 2n-1,$

$v_{t-1} = 2n-2, v_{t-2} = 2n-5$  olur. Böylece,  $6n-40 = \sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} \leq 7(t-6)$  ve

buradan  $t \geq \left\lceil \frac{6n+2}{7} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda,  $|T|=t \geq \left\lceil \frac{6n+2}{7} \right\rceil = \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  olur.

Bu ise,  $\gamma_{dd}(D_2(P_n)) \geq \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 5 \pmod{7}$  ise,  $v_m = n-1, v_{m-1} = n-2, v_{m-2} = n-3, v_t = 2n-1,$

$v_{t-1} = 2n-3, v_{t-2} = 2n-6$  dır. Böylece,  $6n-40 = \sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} \leq 7(t-6)$  ve

buradan  $t \geq \left\lceil \frac{6n+2}{7} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda,  $|T|=t \geq \left\lceil \frac{6n+2}{7} \right\rceil = \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  olur.

Bu ise,  $\gamma_{dd}(D_2(P_n)) \geq \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 6 \pmod{7}$  ise,

$v_m = n, v_{m-1} = n-3, v_{m-2} = n-4, v_t = 2n, v_{t-1} = 2n-1, v_{t-2} = 2n-4$ . Böylece,

$6n-36 = \sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} \leq 7(t-6)$  ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{6n+6}{7} \right\rceil$  elde edilir. Bu

durumda,  $|T|=t \geq \left\lceil \frac{6n+6}{7} \right\rceil = \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$  olur. Bu ise,  $\gamma_{dd}(D_2(P_n)) \geq \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$

olmasını gerektirir.

Sonuç olarak, elde edilen alt ve üst sınırlardan teoremin ispatı tamamlanır.

Bir  $C_n$  çevre çizgesi için  $\gamma_{dd}(D_2(C_n))$  nin değeri,  $P_n$  yol çizgesinin  $\gamma_{dd}(D_2(P_n))$  değerine eşittir. Bu yüzden ispat Teorem 3.1.1' in ispatına benzerdir. Dolayısıyla ispat tezden çıkarılmıştır.

**Teorem 3.1.2:** Eğer  $G \cong C_n$ ,  $n$  tepeli bir çevre çizge ise, o zaman

$$\gamma_{dd}(D_2(G)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil + 1, & n \equiv 1, 2 \pmod{7} \\ \left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

**Teorem 3.1.3:** Eğer  $G \cong S_{1,n}$   $(n+1)$ -tepelili bir yıldız çizge ise, o zaman  $\gamma_{dd}(D_2(G)) = 3$  elde edilir.

**İspat:**  $D_2(G)$  çizgesinin tepeler kümesini,  $V(D_2(G)) = V \cup V'$  şeklinde iki kümenin birleşimi olarak etiketleyelim. Burada  $V = V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ve  $V' = V'(G) = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  dir.  $G$  çizgesinin merkez tepesi  $v_1$  olsun. Ayrıca,  $D$  kümesi  $D_2(G)$  çizgesinin  $\gamma_{dd}$ -seti olsun.

$$N_{D_2(G)}(v_1) = V \cup (V' - \{v'_1\}) = V(D_2(G)) - \{v'_1\} \text{ ve}$$

$$N_{D_2(G)}(v'_1) = V' \cup (V - \{v_1\}) = V(D_2(G)) - \{v_1\} \text{ olduğundan,}$$

$$\deg_{D_2(G)}(v_1) = \deg_{D_2(G)}(v'_1) = 2n - 2 \text{ dir.}$$

Bu ise  $v_1, v'_1 \in D$  olmasını gerektirir. Böylece  $V(D_2(G)) - \{v_1, v'_1\}$  kümesindeki tüm tepeler  $D$  ile çift bastırılır.  $v_1$  tepesi  $v'_1$  tepesine komşu olmadığından,  $D$  deki tepelere çiftlik verebilmek için her iki tepeye komşu olan herhangi bir tepeyi kümeye almamız gerekir. Genelliği bozmamak için bu tepenin  $v_2$  tepesi olduğunu kabul edelim. Böylece  $D = \{v_1, v'_1, v_2\}$  olur. Bu durumda,  $D$  kümesi ile  $D_2(G)$

çizgesinin tüm tepelerinin çift baskınlığı sağlanmış olur. Sonuç olarak,  $D_2(G)$  çizgesinin çift baskınlık sayısı  $\gamma_{dd}(D_2(G)) = |D| = 3$  elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.4:** Eğer  $G \cong K_n$ ,  $n$  tepeli bir tam çizge ise, o zaman  $\gamma_{dd}(D_2(G)) = 3$  elde edilir.

**İspat:**  $D_2(G)$  çizgesinin tepeler kümesini,  $V(D_2(G)) = V \cup V'$  olarak iki kümenin birleşimi şeklinde etiketleyelim. Burada  $V = V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ve  $V' = V'(G) = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  dür.  $D_2(G)$  çizgesinin yapısından, çizgedeki her tepe kendisi ve kopyası dışındaki tüm tepelere komşudur. Dolayısıyla  $\forall w \in V(D_2(G))$  için  $\deg(w) = 2n - 2$  dir. Bu durumda  $D_2(G)$  çizgesi, aynı zamanda  $(2n - 2)$ -düzenli bir çizgedir.  $D$  kümesi  $D_2(G)$  nin bir  $\gamma_{dd}$ -seti olsun.

Teorem 2.3.1' den,  $|D| \geq 2$  olmalıdır. Kabul edelim ki,  $|D| = 2$  olsun. Bu durumda, tepelere göre iki durum söz konusu olur.

**Durum 1:**  $v_i, v'_i \in D$  olsun. Bu durumda  $(V(D_2(G)) - D)$  kümesindeki tüm tepelerin çift baskınlığı sağlanır.  $D$  deki tepelere çift baskınlık verebilmek için her iki tepeye komşu olan bir  $w$  tepesi  $D$  ye eklenmelidir. Böylece  $|D| = 3$  olur.

**Durum 2:**  $v_i, v_j \in D$  ( ya da  $v'_i, v'_j \in D$  ) olsun. Bu durumda  $D$  deki tepelerin kopyaları hariç tüm tepelerin çift baskınlığı sağlanır.  $D$  deki tepelere çift baskınlık verebilmek için her iki tepeye komşu olan bir  $w$  tepesi  $D$  ye eklenmelidir. Böylece  $|D| = 3$  olur.

Sonuç olarak, **Durum 1** ve **Durum 2** den,  $D_2(G)$  grafının çift baskınlık sayısı  $\gamma_{dd}(D_2(G)) = 3$  elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.5:** Eğer  $G \cong W_n$ ,  $n$  tepeli bir tekerlek çizge ise, o zaman  $\gamma(D_2(G)) = 2$  elde edilir.

**İspat:**  $G$  çizgesinin tepeleri,  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ve  $v_1$  tepesi merkez tepe olsun.  $v_1$  tepesi  $D_2(G)$  de kopyası olan  $v_1'$  tepesi hariç tüm tepeler komşu olduğundan,  $\deg_{D_2(G)}(v_1) = 2(n-1)$  dir. Eğer  $S$  kümesi  $D_2(G)$  çizgesinin  $\gamma_{dd}$ -seti ise, o zaman  $v_1$  tepesi (ya da kopyası olan  $v_1'$  tepesi)  $S$  kümesine eklenmelidir.

Kabul edelim ki,  $v_1 \in S$  olsun. Bu durumda  $D_2(G)$  nin  $v_1'$  tepesi hariç tüm tepeleri  $S$  ile bastırılır.  $v_1'$  tepesini de bastırabilmek için  $S$  ye  $N_{D_2(G)}[v_1']$  kümesindeki herhangi bir tepeyi eklememiz gerekir. Böylece  $|S| = 2$  olur. Bu durumda,  $\gamma(D_2(G)) = |S| = 2$  elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.6:** Eğer  $G \cong W_n$ ,  $n$  tepeli bir tekerlek çizge ise, o zaman  $\gamma_{dd}(D_2(G)) = 3$  elde edilir.

**İspat:** Teorem 2.3.4' den  $\gamma_{dd}(G) \geq \gamma(G) + 1$  olduğu biliniyor.

$D_2(G)$  nin tepeler kümesi,  $V(D_2(G)) = V(G) \cup V'(G)$  şeklinde iki kümeye ayrılınsın. Burada  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ve  $V'(G) = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$  olsun.  $v_1$  tepesi  $G$  çizgesinin ilk kopyasına ait merkez tepe iken,  $v_1'$  tepesi  $G$  çizgesinin ikinci kopyasına ait merkez tepedir.

Teorem 3.1.5 ve Teorem 2.3.4' den ,  $\gamma_{dd}(D_2(G)) \geq 3$  elde edilir. Eşitsizliğin tersini ispatlamak için, kabul edelim ki  $S = \{v_1, v_1', v_2\}$  olsun. Böylece  $D_2(G)$  çizgesinin tüm tepeleri  $S$  kümesi ile çift bastırılır. Bu durumda  $S$  kümesi  $D_2(G)$  nin bir  $\gamma_{dd}$ -seti dir. Böylece  $\gamma_{dd}(D_2(G)) \leq 3$  olur. Sonuç olarak, elde edilen alt

ve üst sınırlardan çizgenin çift baskınlık sayısı  $\gamma_{dd}(D_2(G))=3$  elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.7:** Eğer  $G \cong K_{m,n}$ ,  $(m+n)$ -tepelili bir tam iki parçalı çizge ise, o zaman  $\gamma(D_2(G))=2$  elde edilir.

**İspat:** (Nicolas and Eric, 2021) den  $\gamma(G)=2$  olduğu biliniyor. Bu değeri veren  $\gamma$ -set,  $S$  olsun.  $S$  kümesinin aynı zamanda  $D_2(G)$  çizgesinin de bir  $\gamma_{dd}$ -seti olduğu kolayca görülür. Böylece  $\gamma(D_2(G))=2$  elde edilir. Teoremin ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.8:** Eğer  $G \cong K_{m,n}$ ,  $(m+n)$ -tepelili bir tam iki parçalı çizge ise, o zaman  $\gamma_{dd}(D_2(G))=4$  elde edilir.

**İspat:**  $G$  grafının tepeler kümesini  $V(G)=V_1 \cup V_2$  şeklinde iki kümeye ayıralım. Burada  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  ve  $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  dir. Bu durumda  $D_2(G)$  çizgesinin tepeler kümesi,  $V(D_2(G))=V_1 \cup V_2 \cup V_1' \cup V_2'$  den oluşur.  $D$  kümesi  $D_2(G)$  nin bir  $\gamma_{dd}$ -seti olsun.

Teorem 3.1.7 ve Teorem 2.3.4' den,  $\gamma_{dd}(D_2(G)) \geq 3$  elde edilir. Kabul edelim ki  $\gamma_{dd}(D_2(G))=3$  olsun.  $V_1$  kümesindeki her bir tepeli çift bastırabilmek için  $D$  kümesinde iki tepe mutlaka olmalıdır. Bu tepelerin ikisi de  $V_2$  de ya da  $V_2'$  de, ya da biri  $V_2$  diğeri  $V_2'$  de olabilir. Böylece  $V_1$  ve  $V_1'$  deki tüm tepelerin çift baskınlığı  $D$  kümesi ile sağlanır. Geriye kalan  $V_2$  ve  $V_2'$  tepelerine çift baskınlık verebilmek için bir tepe yeterli olmaz. Bu ise  $D_2(G)$  çizgesi için,  $\gamma_{dd}(D_2(G))=|D| \geq 4$  olmasını gerektirir.

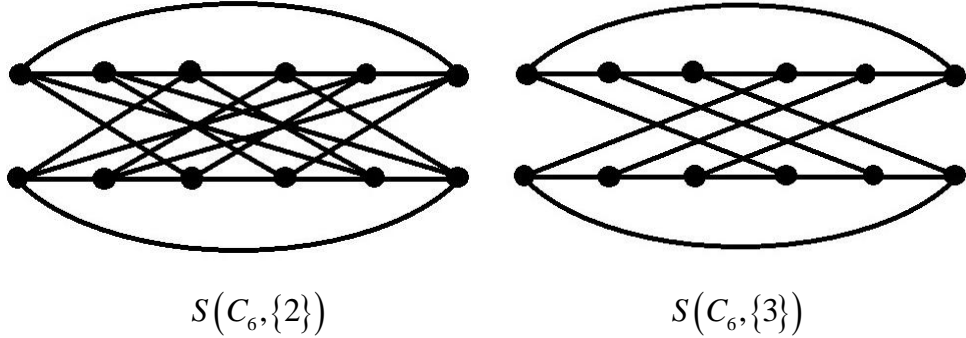
Şimdi, eşitsizliğin tersini ispatlayalım. Kabul edelim ki  $S$ ,  $D_2(G)$  nin bir  $\gamma_{dd}$ -seti olsun.  $S = \{v_i, v_j, u_k, u_t\}$ , burada  $v_i, v_j \in V_1$  ve  $u_k, u_t \in V_2$  olsun. Böylece  $D_2(G)$  çizgesindeki tüm tepelerin çift baskınlığı  $S$  ile sağlanır. Bu durumda,  $\gamma_{dd}(D_2(G)) = |S| \leq 4$  olur. Sonuç olarak, elde edilen alt ve üst sınırlardan çizgenin çift baskınlık sayısı  $\gamma_{dd}(D_2(G)) = 4$  elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.



### 3. 2. Gölge Uzunluklu (Mesafeli) Çizgelerde Çift Baskınlık Sayısı

**Tanım 3.2.1:** (Kumar and Murali, 2016; Sooryanarayana, 1998)  $G$  nin **gölge mesafe çizgesi**,  $D_{sd}(G, D_s)$  ile tanımlanmış ve  $G$  için aşağıdaki koşullarla oluşturulmuştur:

- i)  $G$  ve  $G'$ ,  $G$  nin iki kopyası olsun
- ii) Eğer  $u \in V(G)$  (ilk kopya) ise, o zaman buna karşılık gelen tepeli  $u' \in V(G')$  (ikinci kopya) olarak gösteririz.
- iii)  $D_{sd}(G, D_s)$  nin tepe kümesi  $V(G) \cup V(G')$  dir.
- iv)  $D_{sd}(G, D_s)$  nin ayrıt kümesi  $E(G) \cup E(G') \cup E_{ds}$ , burada  $E_{ds}$   $G$  deki  $d(u, v) \in D_s$  koşulunu sağlayan farklı  $u \in V(G)$  ve  $v' \in V(G')$  tepeleri arasındaki tüm ayrıtların kümesidir.



Şekil 3.3 :  $C_6$  çizgesinin 2 ve 3 uzunluklu gölge çizgeleri

**Teorem 3.2.1:** Eğer  $G \cong P_n$  ve  $n \geq 8$  ise, o zaman

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil & , n \equiv 3, 4 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 1 & , n \equiv 0, 2 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 2 & , n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

elde edilir.

**İspat:**  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinin tepeler kümesini  $V(D_{sd}(G, \{2\})) = V_1 \cup V_2$  şeklinde iki kümeye ayıralım. Burada  $V_1 = \{1, 2, \dots, n\}$  ve  $V_2 = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$  olsun.  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  üzerinde ilk olarak üst sınırlar oluşturalım.

$$S_1 = \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1} \{(5i+2), (5i+3)\} \quad \text{ve} \quad S_2 = \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1} \{(n+5i+2), (n+5i+3)\} \quad \text{olmak üzere,}$$

$S = S_1 \cup S_2$  dir.

Eğer  $n \equiv 0 \pmod{5}$  ise, o zaman  $D = S \cup \{(n-1), (2n-1)\}$  olur. Eğer  $n \equiv i \pmod{5}$  ve burada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  ise, o zaman  $D = S \cup \{(n-1), (n-2), (2n-1), (2n-2)\}$  elde edilir. Tüm durumlarda  $D$  kümesi  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinin bir  $DD$ -seti dir. Ayrıca eğer  $n \equiv 0, 2 \pmod{5}$

ise, o zaman  $|D| = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 1$  dir. Eğer  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ise, o zaman

$|D| = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 2$  elde edilir. Son olarak; eğer  $n \equiv 3, 4 \pmod{5}$  ise, o zaman

$|D| = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil$  olur. Böylece,

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil & , n \equiv 3, 4 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 1 & , n \equiv 0, 2 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 2 & , n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  üzerinde alt sınırları ispatlayalım.

$T = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_j, \dots, v_t\}$  kümesinin bir  $\gamma_{dd}$ -seti olduğunu kabul edelim. Burada;  $v_1 < v_2 < \dots < v_i < \dots < v_m < v_{m+1} < \dots < v_j < \dots < v_t$  olacak şekilde  $v_i$  ve  $v_j$  herhangi pozitif iki tamsayı ve  $1 \leq v_i \leq n$   $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve  $n+1 \leq v_j \leq 2n$   $j \in \{n+1, \dots, t\}$  dir.  $x \in \{1, 2, \dots, t-2\}$  ve  $x \neq m-1$  için  $f_x = v_{x+2} - v_x$  dir.

Eşitsizliğin tersini göstermek için  $f_x \leq 5$  olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, en az bir  $x$  değeri için  $f_x \geq 6$  olsun. Genelliği bozmamak için  $f_x = 6$  olduğunu iddia edelim. Bu iddiaya uygun olarak;

$$S_1' = \{2, 3, 8, 9\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-12}{5} \right\rceil - 1} \{(5i+13), (5i+14)\} \right\} \text{ ve}$$

$$S_2' = \{(n+2), (n+3), (n+4), (n+8), (n+9), (n+10)\} \cup$$

$$\left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-12}{5} \right\rceil - 1} \{(n+5i+13), (n+5i+14)\} \right\}$$

kümesi oluşturulur.  $T = S_1' \cup S_2'$  dir.  $|T| = 10 + 4 \left\lceil \frac{n-12}{5} \right\rceil$  elde edilir.

$n \equiv 3 \pmod{5}$  için  $|T| = 10 + 4 \left( \frac{n-8}{5} \right) = \frac{4n+18}{5}$  olur. Ancak bu değer daha önce

$n \equiv 3 \pmod{5}$  için  $|D| = \frac{4n+8}{5}$  şeklinde bulduğumuz üst değer ile çelişir. Benzer durum,  $T$  kümesine göre  $n \equiv 0,1,2,4 \pmod{5}$  için elde edilen değerlerin, daha önce elde ettiğimiz üst sınırlar ile de çeliştiği kolayca görülür.

mod 5' e göre  $n$ ' nin tüm değerleri için,  $v_1 = 2$ ,  $v_2 = 3$ ,  $v_{m+1} = n+2$  ve  $v_{m+2} = n+3$  olduğundan  $v_1 + v_2 + v_{m+1} + v_{m+2} = 2n+10$  olduğu kolayca görülür.

Eğer  $n \equiv 0 \pmod{5}$  ise, o zaman  $\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} \leq 5(t-6) + 4$  dir.

Böylece,  $\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} = (v_{m-1} + v_{m-2} + v_{t-1} + v_{t-2}) - (2n+10) + f_{m-2} + f_{t-2}$  olur.

$n \equiv 0 \pmod{5}$  için  $v_{m-1} = n-2$ ,  $v_{m-2} = n-3$ ,  $v_{t-1} = 2n-2$  ve  $v_{t-2} = 2n-3$ ,  $f_{m-2} = f_{t-2} = 2$  dir. Bu durumda,  $6n-10-2n-10+4 \leq 5t-30+4$

ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda

$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 1$  dir. Bu ise  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 1$

olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ise, o zaman

$\sum_{x_1=1}^{m-4} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-4} f_{x_2} + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-3} + f_{t-2} \leq 5(t-8) + 8$  dir.

$\sum_{x_1=1}^{m-4} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-4} f_{x_2} = (v_{m-2} + v_{m-3} + v_{t-2} + v_{t-3}) - (2n+10) + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-3} + f_{t-2}$

olur.  $n \equiv 1 \pmod{5}$  için  $v_{m-2} = n-3$ ,  $v_{m-3} = n-4$ ,  $v_{t-2} = 2n-3$ ,  $v_{t-3} = 2n-4$  ve  $f_{m-3} = f_{m-2} = f_{t-3} = f_{t-2} = 2$  dir. Böylece,  $6n-14-2n-10 \leq 5t-40$  ve buradan

$t \geq \left\lceil \frac{4n+16}{5} \right\rceil$  olur. Bu durumda  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+16}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 2$  dir. Bu

ise  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 2$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 2 \pmod{5}$  ise, o zaman

$$\sum_{x_1=1}^{m-4} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-4} f_{x_2} + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-3} + f_{t-2} \leq 5(t-8) + 16 \text{ dir. } n \equiv 2 \pmod{5} \text{ için}$$

$$v_{m-2} = n-4, v_{m-3} = n-5, v_{t-2} = 2n-4, v_{t-3} = 2n-5 \text{ ve } f_{m-3} = f_{m-2} = f_{t-3} = f_{t-2} = 4$$

olur. Bu durumda,  $6n-18-2n-10 \leq 5t-40$  ve buradan

$$t \geq \left\lceil \frac{4n+12}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 1 \text{ olur. Bu durumda}$$

$$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+12}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 1 \text{ dir. Bu ise } \gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil + 1$$

olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 3 \pmod{5}$  ise, o zaman  $\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} \leq 5(t-4)$  dir. Böylece,

$$\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} = (v_m + v_{m-1} + v_t + v_{t-1}) - (2n+10) \text{ dir. } n \equiv 3 \pmod{5} \text{ için}$$

$$v_m = n, v_{m-1} = n-1, v_t = 2n, v_{t-1} = 2n-1 \text{ olduğundan, } 6n-2-2n-10 \leq 5t-20$$

olur. Böylece,  $t \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda,

$$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil \text{ dir. Bu ise, } \gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil$$

olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 4 \pmod{5}$  ise, o zaman  $\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} \leq 5(t-4)$  olur. Böylece,

$$\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} = (v_m + v_{m-1} + v_t + v_{t-1}) - (2n+10). n \equiv 4 \pmod{5} \text{ için}$$

$$v_m = n-1, v_{m-1} = n-2, v_t = 2n-1, v_{t-1} = 2n-2 \text{ olduğundan,}$$

$6n-6-2n-10 \leq 5t-20$  ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n+4}{5} \right\rceil$  olur. Böylece

$$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+4}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil \text{ elde edilir. Bu ise,}$$

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{5} \right\rceil \text{ olmasını gerektirir.}$$

Sonuç olarak ispat,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  için elde edilen alt ve üst sınırlar ile tamamlanır.

**Teorem 3.2.2:** Eğer  $G \cong C_n$  ve  $n \geq 11$  ise, o zaman

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil & , n \equiv 0, 4 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1 & , n \equiv 1, 3 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 2 & , n \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

elde edilir.

**İspat:**  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinin tepeleri için  $V(D_{sd}(G, \{2\})) = V_1 \cup V_2$  ve burada

$V_1 = \{1, 2, \dots, n\}$  ve  $V_2 = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$  şeklinde iki kümeye ayrılınsın.

$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  üzerinde öncelikle üst sınırlar oluşturalım.

$$S_1 = \{1, n\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-6}{5} \right\rceil - 1} \{(5i+5), (5i+6)\} \right\} \text{ ve}$$

$$S_2 = \{(n+1), (2n)\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-6}{5} \right\rceil - 1} \{(n+5i+5), (n+5i+6)\} \right\} \text{ olmak üzere, } S = S_1 \cup S_2$$

dir.

Eğer  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ise, o zaman  $D = S \cup \{(n-1), (2n-1)\}$  iken, diğer durumlarda  $D = S$  dir.

Tüm durumlarda  $D$  kümesi  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinin bir  $DD$ -seti dir. Ayrıca, eğer  $n \equiv 0, 4 \pmod{5}$  ise, o zaman  $|D| = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$  dir. Eğer  $n \equiv 1, 3 \pmod{5}$  ise, o zaman  $|D| = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1$  elde edilir. Eğer  $n \equiv 2 \pmod{5}$  ise, o zaman  $|D| = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 2$  olur. Böylece,

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil & , n \equiv 0, 4 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1 & , n \equiv 1, 3 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 2 & , n \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  üzerinde alt sınırları ispatlayalım.

$T = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_j, \dots, v_t\}$  kümesinin bir  $\gamma_{dd}$ -seti olduğunu kabul edelim. Burada;  $v_1 < v_2 < \dots < v_i < \dots < v_m < \dots < v_j < \dots < v_t$  olacak şekilde  $v_i$  ve  $v_j$  herhangi pozitif iki tamsayı ve  $1 \leq v_i \leq n$   $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve  $n+1 \leq v_j \leq 2n$   $j \in \{n+1, \dots, t\}$  dir.  $x \in \{1, 2, \dots, t-2\}$  ve  $x \neq m-1$  için  $f_x = v_{x+2} - v_x$  dir. Eşitsizliğin tersini göstermek için  $f_x \leq 5$  olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, en azından bir  $x$  değeri için  $f_x \geq 6$  olsun. Genelliği bozmamak için  $f_x = 6$  olduğunu iddia edelim. Bu iddiaya uygun olarak;

$$S_1' = \{1, n\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-7}{5} \right\rceil - 1} \{(5i+6), (5i+7)\} \right\} \text{ ve}$$

$$S_2' = \{(n+1), (n+2), (n+5), (2n)\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-7}{5} \right\rceil - 1} \{(n+5i+6), (n+5i+7)\} \right\}$$

kümesi oluşturulur.  $T = S_1' \cup S_2'$  dir. Buradan  $|T| = 6 + 4 \left\lceil \frac{n-7}{5} \right\rceil$  elde edilir.

$n \equiv 0 \pmod{5}$  için,  $|T| = 6 + 4 \left( \frac{n-5}{5} \right) = \frac{4n+10}{5}$  olur. Ancak, bu değer daha önce

$n \equiv 0 \pmod{5}$  için  $|D| = \frac{4n}{5}$  şeklinde bulduğumuz üst değer ile çelişir. Benzer

durum  $T$  kümesine göre  $n \equiv i \pmod{5}$   $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  için elde edilen değerlerin, daha önce elde ettiğimiz üst sınırlar ile çeliştiği kolayca görülür. Bu da iddiamız

ile çelişir. Böylece  $f_x \leq 5$  olmalıdır. Bu durumda,  $\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} \leq 5(t-4)$

olur. Ayrıca mod 5' e göre oluşan  $n$ 'nin tüm değerleri için  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = 6$ ,  $v_{m+1} = n+1$ ,  $v_{m+2} = n+5$  olduğundan  $v_1 + v_2 + v_{m+1} + v_{m+2} = 2n+13$  elde edilir.

Eğer  $n \equiv 0 \pmod{5}$  ise, o zaman  $\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} \leq 5(t-6) + 8$  olur.

$\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} = (v_{m-1} + v_{m-2} + v_{t-1} + v_{t-2}) - (2n+13) + f_{m-2} + f_{t-2}$  elde

edilir.  $n \equiv 0 \pmod{5}$  için  $v_{m-1} = n-4$ ,  $v_{m-2} = n-5$ ,  $v_{t-1} = 2n-4$  ve

$v_{t-2} = 2n-5$ ,  $f_{m-2} = f_{t-2} = 4$  olur. Böylece,  $6n-18-2n-13 \leq 5(t-6)$  ve

buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n-1}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n-1}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$  dir.

Bu ise  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ise, o zaman  $\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} \leq 5(t-4)$  olur. Ayrıca,

$\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} = (v_m + v_{m-1} + v_t + v_{t-1}) - (2n+13)$  dir.  $n \equiv 1 \pmod{5}$  için

$v_m = n$ ,  $v_{m-1} = n-1$ ,  $v_t = 2n$ ,  $v_{t-1} = 2n-1$  olduğundan,  $6n-2-2n-13 \leq 5t-20$

ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n+5}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1$  olur. Böylece,  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1$  dir. Bu

ise,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 2 \pmod{5}$  ise,  $\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} \leq 5(t-6) + 4$  olur. Burada

$$\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} = (v_{m-1} + v_{m-2} + v_{t-1} + v_{t-2}) + f_{m-2} + f_{t-2} - (2n+13) \text{ tür.}$$

$$n \equiv 2 \pmod{5} \quad \text{için} \quad v_{m-1} = n-1, v_{m-2} = n-2, v_{t-1} = 2n-1, v_{t-2} = 2n-2$$

olduğundan,  $6n-6-2n-13 \leq 5(t-6)$  ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n+12}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 2$

elde edilir. Bu durumda,  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 2$  dir. Bu ise

$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 2$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 3 \pmod{5}$  ise,  $\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} \leq 5(t-6) + 6$  olur. Ayrıca

$$\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} = (v_{m-1} + v_{m-2} + v_{t-1} + v_{t-2}) - (2n+13) + f_{m-2} + f_{t-2} \text{ dir.}$$

$$n \equiv 3 \pmod{5} \text{ için } v_{m-1} = n-2, v_{m-2} = n-3, v_{t-1} = 2n-2, v_{t-2} = 2n-3 \text{ ve}$$

$f_{m-2} = f_{t-2} = 3$  olduğundan,  $6n-10-2n-13 \leq 5(t-6)$  ve buradan

$$t \geq \left\lceil \frac{4n+7}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1 \text{ elde edilir. Bu durumda, } |T| = t \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1 \text{ dir. Bu}$$

ise  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil + 1$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 4 \pmod{5}$  ise, o zaman  $\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} \leq 5(t-6) + 8$  dir.

Ayrıca

$$\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} = (v_{m-1} + v_{m-2} + v_{t-1} + v_{t-2}) - (2n+13) + f_{m-2} + f_{t-2} \text{ dir.}$$

$n \equiv 4 \pmod{5}$  için  $v_{m-1} = n-3$ ,  $v_{m-2} = n-4$ ,  $v_{t-1} = 2n-3$ ,  $v_{t-2} = 2n-4$  ve

$f_{m-2} = f_{t-2} = 4$  olduğundan,  $6n-14-2n-13 \leq 5(t-6)$  ve buradan

$t \geq \left\lceil \frac{4n+3}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda,  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$  dir. Bu ise,

$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \geq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$  olmasını gerektirir.

Sonuç olarak; ispat,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  için elde edilen alt ve üst sınırlar ile tamamlanır.

**Teorem 3.2.3:** Eğer  $G \cong K_{m,n}$ ,  $(m+n)$ -tepelili iki parçalı tam çizge ise ( $m \geq 1$  ve  $n \geq 2$  için), o zaman  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) = 4$  tür.

**İspat:**  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinin tepeler kümesi  $V(D_{sd}(G, \{2\})) = V_1 \cup V_2 \cup V_1' \cup V_2'$  şeklinde dört parçaya ayrılabilir. Burada  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ,  $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $V_1' = \{v_1', v_2', \dots, v_m'\}$  ve  $V_2' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$  şeklinde etiketleyelim. İlk önce  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  için üst sınır oluşturalım. Eğer  $S = \{v_1, v_1', v_1', v_1'\}$  ise, o zaman  $S$  kümesi  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinin  $DD$ -seti dir. Böylece,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \leq 4$  olur.

Alt sınır için,  $T$  kümesi  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$ -set olsun. Kabul edelim ki,  $|T| = 3$  olsun. Bu ise,  $T$  deki her tepenin en azından bir komşusunun yine  $T$  de olmasını gerektirir.  $V_1 \cong V_1'$  ve  $V_2 \cong V_2'$  olduğunu dikkate alarak, aşağıdaki durumlar elde edilir.

**Durum 1:**  $u_i \in V_1$ ,  $v_j \in V_2$ ,  $v_t' \in V_2'$  olacak şekilde  $T = \{u_i, v_j, v_t'\}$   $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j, t \in \{1, \dots, n\}$  ve  $j \neq t$  olsun. Ancak bu durumda,  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinde çift bastırılmayan tepeler olur.

**Durum 2:**  $u_i, u_j \in V_1$  ,  $u_t \in V_1'$  olacak şekilde  $i, j, t \in \{1, \dots, m\}$  ve  $i \neq j \neq t$  için  $T = \{u_i, u_j, u_t\}$  olsun. Ancak bu durumda,  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinde çift bastırılmayan tepeler olur.

**Durum 3:**  $v_i, v_j \in V_2$  ,  $v_t \in V_2'$  olacak şekilde  $i, j, t \in \{1, \dots, n\}$  ve  $i \neq j \neq t$  için  $T = \{v_i, v_j, v_t\}$  olsun. Ancak bu durumda,  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinde çift bastırılmayan tepeler olur.

**Durum 4:**  $u_i \in V_1$  ,  $u_j \in V_1'$  ,  $v_t \in V_2'$  olacak şekilde  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  ,  $t \in \{1, \dots, n\}$  ve  $i \neq j$  için  $T = \{u_i, u_j, v_t\}$  olsun. Ancak bu durumda,  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinde çift bastırılmayan tepeler olur.

**Durum 5:**  $v_j \in V_2$  ,  $v_t \in V_2'$  ,  $u_i \in V_1'$  olacak şekilde  $j, t \in \{1, \dots, n\}$  ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  ve  $j \neq t$  için  $T = \{v_j, v_t, u_i\}$  olsun. Ancak bu durumda,  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinde çift bastırılmayan tepeler olur.

**Durum 6:**  $u_i \in V_1$  ,  $v_j \in V_2$  ,  $u_t \in V_1'$  olacak şekilde  $i, t \in \{1, \dots, m\}$  ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  ve  $i \neq t$  için  $T = \{u_i, v_j, u_t\}$  olsun. Ancak bu durumda,  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinde çift bastırılmayan tepeler olur.

Tüm durumlarda, çizgenin bazı tepeleri çift bastırılmaz. Böylece,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) = |T| \geq 4$  elde edilir.

Sonuç olarak, ispat,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  için elde edilen alt ve üst sınırlar ile tamamlanır.

**Sonuç:** Eğer  $n \geq 2$  için  $G \cong K_{1,n}$  ,  $(n+1)$ -tepelili yıldız çizge ise,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) = 4$  dür.

**İspat:** Eğer  $m=1$  ,  $n \geq 2$  ise, o zaman  $K_{m,n} \cong K_{1,n}$  dir. Böylece, sonucun ispatı Teorem 3.2.3' den kolayca görülür.

**Teorem 3.2.4:** Eğer  $n \geq 4$  için  $G \cong W_{1,n}$  ,  $(n+1)$ -tepelikli tekerlek çizge ise, o zaman  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) = 4$  dür.

**İspat:**  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinin tepeler kümesi,  $V(D_{sd}(G, \{2\})) = V(G) \cup V(G')$  şeklinde iki parçaya ayrılabilir. Burada  $V(G) = \{c_1, u_1, \dots, u_n\}$  ve  $V(G') = \{c'_1, u'_1, \dots, u'_n\}$  ile etiketlensin.  $c_1$  ,  $G$  çizgesinin merkez tepesi olsun. İlk önce,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  için üst sınır oluşturalım. Eğer  $S = \{c_1, u_1, c'_1, u'_1\}$  ise, o zaman  $S$  kümesi  $D_{sd}(G, \{2\})$  çizgesinin bir  $DD$ -seti dir. Böylece,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) \leq 4$  olur.

İspatı tamamlamak için, alt sınırı ispatlamamız gerekir.  $T$  , bir  $\gamma_{dd}(S(G, \{2\}))$ -set olsun.  $|T| = 3$  olduğunu kabul edelim.  $T$  deki tepelerin çift baskınlığı sağlanabilmesi için, her tepenin en az bir komşusu  $T$  de olmalıdır. Böylece, aşağıdaki durumlara sahip olunur.

**Durum 1:**  $T$  deki tüm tepeler  $V(G)$  de olsun.  $\deg(c_1) = n$  olduğundan tepelerden biri  $c_1$  olması gerekir. ( Benzer durum  $T$  deki tüm tepelerin  $V(G')$  de olması ile aynıdır ) Ancak bu durumda çizgede hiç bastırılmayan ve çift baskınlığı sağlanmayan tepeler olur.

**Durum 2:**  $T$  deki iki tepe  $V(G)$  de, diğer tepe  $V(G')$  de olsun. Burada  $\deg(c_1) = n$  olduğundan  $V(G)$  deki tepelerden biri  $c_1$  olması gerekir. ( Benzer durum  $T$  deki iki tepenin  $V(G')$  de, diğer tepenin  $V(G)$  de olması ile aynıdır ) Ancak bu durumda çizgede hiç bastırılmayan ve çift baskınlığı sağlanmayan tepeler olur.

Tüm durumlarda, kabulümüz yanlıştır. Böylece  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\})) = |T| \geq 4$  elde edilir.

Sonuç olarak ispat,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{2\}))$  için elde edilen alt ve üst sınırlar ile tamamlanır.

**Teorem 3.2.5:** Eğer  $G \cong P_n$  ve  $n \geq 10$  ise, o zaman

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil + 1, & n \equiv 1 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

**İspat:**  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\}))$  üzerinde öncelikle üst sınırların bulmaya çalışalım.

Çizgede tepelerin dereceleri  $\deg(v_1) = \deg(v_n) = \deg(v_{n+1}) = \deg(v_{2n}) = 2$ ,  
 $\deg(v_i) = 2$ ,  $i \in \{2, 3, n-1, n-2, n+2, n+3, 2n-1, 2n-2\}$  ve  
 $\deg(v_j) = 4$ ,  $j \in \{4, \dots, n-3, n+4, 2n-3\}$  dir.  $S$  kümesi  $D_{sd}(G, \{3\})$   
çizgesinin bir  $DD$ -seti olsun.

Dolayısıyla  $v_1$  tepesini çift bastrabilmek için, mutlaka komşuları  $S$  de olmalıdır. Benzer şekilde kopyası olan  $v_{n+1}$  tepesini de çift bastrabilmek için, mutlaka komşuları  $S$  de olmalıdır. Böylece  $\{v_2, v_4, v_{n+2}, v_{n+4}\} \in S$  dir.  $S$  deki tepelerin de çift baskınlığı sağlanabilmesi için  $v_5$  ve kopyası olan  $v_{n+5}$  tepesinin  $S$  ye eklenmesi gerekir.

Bu durumda  $v_6, v_7$  tepeleri ve benzer şekilde bu tepelerin kopyaları olan  $v_{n+6}, v_{n+7}$  tepeleri  $S$  kümesi ile çift bastırılır.  $v_6$  ve  $v_7$  tepelerine çiftlik verebilmek için,  $S$   $DD$ -set olduğundan  $v_{n+9}, v_{n+10}$  tepeleri  $S$  ye eklenir.  $v_{n+6}$  ve  $v_{n+7}$  için de  $v_9, v_{10}$  tepeleri eklenir.

Bu şekilde işleme devam edildiğinde,  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\}))$  üzerinde üst sınırlar oluşur.

$$S = \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1} \{v_{5i+4}, v_{5i+5}, v_{n+5i+4}, v_{n+5i+5}\} \cup \{v_2, v_{n+2}\}$$

olsun. Eğer  $n \equiv 0 \pmod{5}$  ise, o zaman  $D = S$  dir. Eğer  $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{5}$  ise

$D = S \cup \{v_n, v_{2n}\}$  olur. Aksi halde, yani  $n \equiv 4 \pmod{5}$  için,

$D = S \cup \{v_n, v_{n-1}, v_{2n}, v_{2n-1}\}$  dir. Tüm durumlarda  $D$  kümesi  $D_{sd}(G, \{3\})$

çizgesinin bir  $DD$ -seti dir. Ayrıca eğer  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ise  $|D| = \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil + 1$ ,

aksi halde  $|D| = \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil$  elde edilir.

Böylece,

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil + 1, & n \equiv 1 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\}))$  üzerinde alt sınırların ispatlayalım.

$T = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_j, \dots, v_t\}$  kümesinin  $\gamma_{dd}(S(G, \{3\}))$ -set olduğunu

kabul edelim. Burada;  $v_1 < v_2 < \dots < v_i < \dots < v_m < \dots < v_j < \dots < v_t$  olacak şekilde  $v_i$

ve  $v_j$  herhangi iki pozitif tamsayı ve  $1 \leq v_i \leq n$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve  $n+1 \leq v_j \leq 2n$ ,

$j \in \{n+1, \dots, t\}$  dir.  $x \in \{1, 2, \dots, t-2\}$  ve  $x \neq m-1$ ,  $m$  için  $f_x = v_{x+2} - v_x$  dir.

Eşitsizliğin tersini göstermek için  $f_x \leq 5$  olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, en azından bir  $x$  değeri için  $f_x \geq 6$  olsun. Genelliği bozmamak için  $f_x = 6$  olduğunu iddia edelim. Bu iddiaya uygun olarak;

$$S' = \{2, 4, 5, (n+2), (n+4), (n+6), (n+9)\} \cup$$

$$\left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-9}{5} \right\rfloor - 1} \{(5i+10), (5i+11), (n+5i+10), (n+5i+11)\} \right\} \text{ kümesi oluşturulur.}$$

$T = S'$  dür.  $|T| = 8 + 4 \left\lfloor \frac{n-9}{5} \right\rfloor$  elde edilir.  $n \equiv 0 \pmod{5}$  için,

$|T| = 8 + 4 \left( \frac{n-5}{5} \right) = \frac{4n+20}{5}$  olur. Ancak bu değer daha önce  $n \equiv 0 \pmod{5}$  için

$|D| = \frac{4n+10}{5}$  şeklinde bulduğumuz üst sınır ile çelişir. Benzer durum,  $T$

kümesine göre  $n \equiv i \pmod{5}$   $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  için elde edilen değerlerin, daha önce elde ettiğimiz üst sınırlar ile aynı ya da daha büyük olduğu kolayca görülür.

Bu da iddiamız ile çelişir. Böylece  $f_x \leq 5$  olmalıdır. Bu ise,

$\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} \leq 5(t-4)$  olur. mod 5'e göre  $n$ ' nin tüm durumları için,

$$v_1 = 2, v_2 = 4, v_m = n+2, v_{m+1} = n+4 \text{ olup } v_1 + v_2 + v_m + v_{m+1} = 2n+12 \text{ dir.}$$

Eğer  $n \equiv 0 \pmod{5}$  ise,  $\sum_{x_1=1}^{m-2} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-2} f_{x_2} = (v_m + v_{m-1} + v_t + v_{t-1}) - (2n+12)$  dir.

Burada  $v_m = n, v_{m-1} = n-1, v_t = 2n$  ve  $v_{t-1} = 2n-1$  olduğundan

$6n-2-2n-12 \leq 5(t-4)$  ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n+6}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda

$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+6}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil$  dir. Bu ise  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil$  olmasını

gerektirir.

Eğer  $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$  ise, o zaman

$$\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} \leq 5(t-6) + f_{m-2} + f_{t-2} \text{ olur. Ayrıca,}$$

$$\sum_{x_1=1}^{m-3} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-3} f_{x_2} + f_{m-2} + f_{t-2} = (v_{m-2} + v_{m-1} + v_{t-2} + v_{t-1}) - (2n+12) + f_{m-2} + f_{t-2} \text{ dir.}$$

Eğer  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ise,  $v_{m-2} = n-2$ ,  $v_{m-1} = n-1$ ,  $v_{t-2} = 2n-2$ ,  $v_{t-1} = 2n-1$  ve

$$f_{m-2} = f_{t-2} = 2 \text{ olduğundan, } 4n-18 \leq 5(t-6) \text{ ve buradan } t \geq \left\lceil \frac{4n+12}{5} \right\rceil \text{ elde}$$

edilir. Bu durumda  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+12}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil + 1$  dir. Bu ise,

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil + 1 \text{ olmasını gerektirir.}$$

Eğer  $n \equiv 2 \pmod{5}$  ise,  $v_{m-2} = n-3$ ,  $v_{m-1} = n-2$ ,  $v_{t-2} = 2n-3$ ,  $v_{t-1} = 2n-2$  ve

$$f_{m-2} = f_{t-2} = 3 \text{ olduğundan, } 6n-10-2n-12 \leq 5(t-6) \text{ ve buradan } t \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil$$

elde edilir. Bu durumda  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil$  dir. Bu ise,

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil \text{ olmasını gerektirir.}$$

Eğer  $n \equiv 3 \pmod{5}$  ise,  $v_{m-2} = n-4$ ,  $v_{m-1} = n-3$ ,  $v_{t-2} = 2n-4$ ,  $v_{t-1} = 2n-3$  ve

$$f_{m-2} = f_{t-2} = 4 \text{ olduğundan, } 6n-14-2n-12 \leq 5(t-6) \text{ ve buradan } t \geq \left\lceil \frac{4n+4}{5} \right\rceil$$

elde edilir. Bu durumda  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+5}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil$  dir. Bu ise,

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil \text{ olmasını gerektirir.}$$

Eğer  $n \equiv 4 \pmod{5}$  ise, o zaman

$$\sum_{x_1=1}^{m-4} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-4} f_{x_2} + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-3} + f_{t-2} \leq 5(t-8) + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-3} + f_{t-2} \quad \text{olur.}$$

$$\text{Ayrıca } \sum_{x_1=1}^{m-4} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-4} f_{x_2} = (v_{m-2} + v_{m-3} + v_{t-2} + v_{t-3}) - (2n+12) \text{ dir.}$$

$n \equiv 4 \pmod{5}$  için,  $v_{m-2} = n-4$ ,  $v_{m-3} = n-5$ ,  $v_{t-2} = 2n-4$ ,  $v_{t-3} = 2n-5$  ve  $f_{m-3} = f_{m-2} = f_{t-3} = f_{t-2} = 4$  olduğundan,  $6n-18-2n-12 \leq 5t-40$  ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda,  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil$  dir. Bu ise,

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+8}{5} \right\rceil \text{ olmasını gerektirir.}$$

Sonuç olarak, ispat  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\}))$  için elde edilen alt ve üst sınırlar ile tamamlanır.

**Teorem 3.2.6:** Eğer  $G \cong C_n$  ise, o zaman

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil - 1, & n \equiv 1 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil + 1, & n \equiv 3 \pmod{5} \\ \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} .$$

**İspat:**  $D_{sd}(G, \{3\})$  çizgesinin tepeleri  $V(D_{sd}(G, \{3\})) = V_1 \cup V_2$ , burada  $V_1 = \{1, 2, \dots, n\}$  ve  $V_2 = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$  şeklinde iki kümeye ayrılınsın. İlk önce  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\}))$  üzerinde üst sınırlar oluşturulsun.

$$S_1 = \{n, (n-1), (n-2)\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-7}{5} \right\rfloor - 1} \{(5i+4), (5i+5)\} \right\} \text{ ve}$$

$$S_2 = \{2n, 2n-1, 2n-2\} \cup \left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-7}{5} \right\rfloor - 1} \{(n+5i+4), (n+5i+5)\} \right\} \text{ olmak üzere,}$$

$S = S_1 \cup S_2$  dir.

Eğer  $n \equiv 0, 1, 3, 4 \pmod{5}$  ise, o zaman  $D = S$  olur. Eğer  $n \equiv 2 \pmod{5}$  ise, o zaman  $D = S \cup \{n-3, 2n-3\}$  elde edilir. Tüm durumlarda  $D$  kümesi

$D_{sd}(G, \{3\})$  çizgesinin bir  $DD$ -seti dir. Ayrıca, eğer  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ise,

$|D| = \left\lfloor \frac{4n+10}{5} \right\rfloor - 1$  ve eğer  $n \equiv 3 \pmod{5}$  ise,  $|D| = \left\lfloor \frac{4n+10}{5} \right\rfloor + 1$  dir. Diğer

durumlarda  $|D| = \left\lfloor \frac{4n+10}{5} \right\rfloor$  elde edilir. Böylece

$$\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{4n+10}{5} \right\rfloor - 1, & n \equiv 1 \pmod{5} \\ \left\lfloor \frac{4n+10}{5} \right\rfloor + 1, & n \equiv 3 \pmod{5} \\ \left\lfloor \frac{4n+10}{5} \right\rfloor, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\}))$  üzerinde alt sınırları ispatlayalım.  $T$  kümesi  $D_{sd}(G, \{3\})$

üzerinde bir  $\gamma_{dd}(S(G, \{3\}))$ -set olsun.  $T = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_j, \dots, v_t\}$

kümesi  $v_1 < v_2 < \dots < v_i < \dots < v_m < \dots < v_j < \dots < v_t$  olacak şekilde  $v_i$  ve  $v_j$  herhangi

iki pozitif tamsayı ve  $1 \leq v_i \leq n$   $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve  $n+1 \leq v_j \leq 2n$   $j \in \{n+1, \dots, t\}$

olduğunu kabul edelim.  $x \in \{1, 2, \dots, t-5\}$  ve  $x \neq m, m-1, m-2$  için

$f_x = v_{x+2} - v_x$  dir. Eşitsizliğin tersini göstermek için  $f_x \leq 5$  olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, en azından bir  $x$  değeri için  $f_x \geq 6$  ve  $S'$ ,  $DD$ -set olsun. Genelliği bozmamak için  $f_x = 6$  olduğunu iddia edelim. Bu iddiaya uygun olarak;

$$S' = \{n, (n-1), (n-2), 2n, 2n-1, 2n-2\} \cup$$

$$\left\{ \bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-7}{6} \right\rfloor - 1} \{(6i+4), (6i+5), (n+6i+4), (n+6i+5)\} \right\} \text{ kümesi oluşturulur.}$$

Ancak  $(6i+6)$ ,  $(n+6i+6)$  tepeleri bu kümeyle çift bastırılmaz. Bu durumda,  $S'$  kümesine tepeler eklenmesi gerekir. Bu ise, daha önce bulduğumuz üst sınırla çelişir. Dolayısıyla,  $f_x \leq 5$  olmalıdır. Böylece

$$\sum_{x_1=1}^{m-5} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-5} f_{x_2} + f_{m-4} + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-4} + f_{t-3} + f_{t-2} \leq 5(t-10) + f_{m-4} + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-4} + f_{t-3} + f_{t-2} \text{ elde edilir.}$$

$$\sum_{x_1=1}^{m-5} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-5} f_{x_2} + f_{m-4} + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-4} + f_{t-3} + f_{t-2} = (v_{m-4} + v_{m-3} + v_{t-4} + v_{t-3}) + f_{m-4} + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-4} + f_{t-3} + f_{t-2} \text{ dir.}$$

mod 5'e göre  $n$ 'nin tüm durumlarında  $v_1 = 4$ ,  $v_2 = 5$ ,  $v_{m+1} = n+4$ ,  $v_{m+2} = n+5$  olup  $v_1 + v_2 + v_{m+1} + v_{m+2} = 2n+18$  dir.

$n \equiv 0 \pmod{5}$  için  $v_{m-4} = n-6$ ,  $v_{m-3} = n-5$ ,  $v_{t-4} = 2n-6$ ,  $v_{t-3} = 2n-5$  ve  $f_{m-4} = f_{t-4} = f_{m-3} = f_{t-3} = 4$ ,  $f_{m-2} = f_{t-2} = 2$  olduğundan,

$6n-22-2n-18 \leq 5t-50$  ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda

$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$  dir. Bu ise  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$  olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ise, o zaman

$$v_{m-4} = n-7, v_{m-3} = n-6, v_{t-4} = 2n-7, v_{t-3} = 2n-6 \text{ ve}$$

$$f_{m-4} = f_{m-3} = f_{t-4} = f_{t-3} = 3, f_{m-2} = f_{t-2} = 2 \text{ olduğundan,}$$

$$6n-26-2n-18 \leq 5(t-10) \text{ ve buradan } t \geq \left\lceil \frac{4n+6}{10} \right\rceil \text{ elde edilir. Bu durumda}$$

$$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+6}{10} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+10}{6} \right\rceil - 1 \text{ dir. Bu ise } \gamma_{dd}(S(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+10}{6} \right\rceil + 1$$

olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 2 \pmod{5}$  ise, o zaman

$$\sum_{x_1=1}^{m-4} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-4} f_{x_2} + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-3} + f_{t-2} \leq 5(t-8) + f_{m-3} + f_{m-2} + f_{t-3} + f_{t-2} \text{ dir.}$$

$n \equiv 2 \pmod{5}$  için  $f_{m-3} = f_{m-2} = f_{t-3} = f_{t-2} = 2$  dir. Burada

$$\sum_{x_1=1}^{m-4} f_{x_1} + \sum_{x_2=m+1}^{t-4} f_{x_2} + 28 = (v_{m-3} + v_{m-2} + v_{t-3} + v_{t-2}) - (2n+18) + 8 \text{ olur. Ayrıca}$$

$$v_{m-3} = n-3, v_{m-2} = n-2, v_{t-3} = 2n-3, v_{t-2} = 2n-2 \text{ olduğundan}$$

$$6n-10-2n-18 \leq 5t-40 \text{ ve buradan } t \geq \left\lceil \frac{4n+12}{5} \right\rceil \text{ elde edilir. Bu durumda}$$

$$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+12}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil \text{ dir. Bu ise } \gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$$

olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 3 \pmod{5}$  ise, o zaman  $n \equiv 0,1 \pmod{5}$  durumundaki formül

geçerlidir.  $n \equiv 3 \pmod{5}$  için

$$v_{m-4} = n-4, v_{m-3} = n-3, v_{t-4} = 2n-4, v_{t-3} = 2n-3 \text{ ve}$$

$f_{m-4} = f_{m-3} = f_{m-2} = f_{t-4} = f_{t-3} = f_{t-2} = 2$  olduğundan,

$6n - 14 - 2n - 18 \leq 5(t - 10)$  ve buradan  $t \geq \left\lceil \frac{4n+18}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda

$|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+18}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil + 1$  dir. Bu ise  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil + 1$

olmasını gerektirir.

Eğer  $n \equiv 4 \pmod{5}$  ise, o zaman  $n \equiv 0, 1, 3 \pmod{5}$  durumundaki formül

geçerlidir.  $n \equiv 4 \pmod{5}$  için

$v_{m-4} = n - 5$ ,  $v_{m-3} = n - 4$ ,  $v_{t-4} = 2n - 5$ ,  $v_{t-3} = 2n - 4$  ve  $f_{m-4} = f_{m-3} = f_{t-4} = f_{t-3} = 3$

ve  $f_{m-2} = f_{t-2} = 2$  olduğundan,  $6n - 18 - 2n - 18 \leq 5(t - 10)$  ve buradan

$t \geq \left\lceil \frac{4n+14}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$  elde edilir. Bu durumda  $|T| = t \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$  dir. Bu

ise  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\})) \geq \left\lceil \frac{4n+10}{5} \right\rceil$  olmasını gerektirir.

Sonuç olarak, ispat  $\gamma_{dd}(D_{sd}(G, \{3\}))$  için elde edilen alt ve üst sınırlar ile tamamlanır.

#### 4. SONUÇ

Çizgelerde baskınlık, iletişim ağlarında, tesis planlamalarında, elektrik şebekelerinde vb. birçok alanda uygulamaya sahiptir. Üzerinde çalışılan önemli baskınlık parametrelerinden bir tanesi de çift baskınlık sayısıdır. Bu parametrenin bazı özel çizge sonuçlarından ilham alarak araştırmalarımız başlamıştır.

Bu tezde, çift baskınlık sayısının gölge çizgeler üzerindeki sonuçları araştırılmış,  $P_n$ ,  $C_n$ ,  $S_{1,n}$ ,  $W_n$ ,  $K_{m,n}$  gibi yaygın olarak kullanılan bazı çizgeler için, genel sonuçlar elde edilmiştir.

Sooryanarayana tarafından, 1998 yılında ilk olarak tanımlanan ve daha sonrasında Kumar ve Murali' nin 2016 yılında üzerinde çalıştıkları çizge yapısı gölge uzaklıklı (mesafeli) çizgelerdir. Biz de bu çalışmalardan esinlenerek, bu tez çalışmasında iki ve üç uzunluklu gölge çizgeler üzerinde çift baskınlık sayısı değerleri hesaplayıp ispatları gerçekleştirdik.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Allan, R.B. and Laskar, R.**, 1978, On domination and independent domination numbers of a graph, *Discrete Mathematics*, 23:73-76 pp.
- Amjadi, J.**, 2015, An upper bound on the double domination number of trees, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 39(2):133-139 pp.
- Atapour, M., Khodkar, A. and Sheikholeslami S.M.**, 2007, Characterization of double domination subdivision number of trees, *Discrete Applied Mathematics*, 155:1700-1707 pp.
- Barefoot, C.A, Entringer, R., Swart, H.**, 1987, Vulnerability in graphs-a comperative study, *Journal Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 13-22 pp.
- Blidia, M., Chellali, M. and Haynes T.W.**, 2006, Characterization of trees with equal paired and double domination numbers, *Discrete Mathematics*, 306:1840-1845 pp.
- Blidia, M. , Chellali, M., Haynes T. W. and Henning M. A.**, 2006, Independent and double domination in trees, *Util. Math.*,70:159-173 pp.
- Buckley, F. and Harary, F.**, 1990, *Distance in graphs*, Addison-Wesley, Redwood city.
- Chartrand, G., Lesniak, L., and Zhang, P.**, 2010, *Graphs and digraphs*, Crc Press, 39:598p.
- Chellali, M.**, 2006, A note on the double domination number in trees, *Akce International Journal of Graphs Combinatorics*, 3(2):147-150 pp.
- Chen, X. and Sun, L.**, 2005, Some new reults on double domination in graphs, *Journal of Mathematical Research and Exposition*, Vol.25, No.3.
- Cockayne E.J., Dawes R.M. and Hedetniemi S.T.**, 1980, Total domination in graphs, *Networks*, 10:211–219 pp.
- Cuivillas, A.M.**, 2014, Double domination in graphs under some binary operations, *Applied Mathematical Sciences*, 8(41):2015-2024 pp.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Du, D.Z., Qiao, H., Kang, L. and Cardei, M.**, 2003, Paired Domination of Trees, *Journal of Global Optimization*, 25(1):43–54 pp.
- Gallian, J.A.**, 2014, A dynamic survey of graph labeling, *The Electronics Journal of Combinatorics*, 17:60-62 pp.
- Gomathi, P. And Murali, R.**, 2019, Hamiltonian laceability in the shadow distance graph of path graphs, *Malaya journal of matematik*, 7(1):118-121 pp.
- Hajian, M. and Rad, N.J.**, 2019, A new lower bound on the double domination number of a graph, *Discrete Applied Mathematics* 254:280-282 pp.
- Harant, J. and Henning, M.A.**, 2005, On double domination in graphs, *Discussiones mathematicae, Graph Theory* 25, 29-34 pp.
- Harary F.**, 1969, *Graph Theory*, Addison Wesley Pub., Massachusetts, California.
- Harary, F. and Haynes, T.W.**, 1996, Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs, *Discrete Mathematics*, 155:99-105 pp.
- Harary, F. and Haynes, T.W.**, 2000, Double domination in graphs, *Ars Combin*, 55:201-213 pp.
- Henning, M.A.**, 2000, Graphs with large total domination number, *Journal of graph theory*, 35:21-45 pp.
- Henning, M.A.**, 2005, Graphs with large double domination numbers, *Discussiones mathematicae, Graph Theory* 25, 13-28 pp.
- Jayagopal, R. and Raju, V.**, 2018, Domination parameters in shadow graph and path connected graph, *International Journal of Mathematics and Its Applications*, 6(2-B):167-172 pp.
- Kelleher, L.L. and Cozzens, M.B.**, 1988, Dominating sets in social network graphs, *Mathematical Social Sciences*, 16(3):267–279 pp.
- Khelifi, S., Blidia, M., Chellali, M. and Maffray, F.**, 2010, Double domination edge removal critical graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 48:285-299 pp.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Khelifi, S. and Chellali, M.**, 2012, Double domination critical and stable graphs upon vertex removal, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 32:643-657 pp.
- Kumar, U.V. and Murali, R.**, 2016, Edge domination in shadow distance graphs, *International Journal of Mathematics and Its Applications*, 4(2-D):125-130 pp.
- Leonida, R.E.**, 2015, Connected 2-domination in the join of graphs, *Applied Mathematical Sciences*, 9(64):3181-3186 pp.
- Nicolas, B. and Eric W.E.**, Domination number, <https://mathworld.wolfram.com/DominationNumber> , (2021) (Erişim tarihi: 27 Şubat 2021)
- Padma, P., Murugaiyan, P. and Dhayabaran, D.P.**, 2012, A note on varieties of double domination, *Asian Journal of Current Engineering and Maths*, 230-232 pp.
- Sampathkumar, E. and Pushpalatha, L.**, 1996, Strong (weak) domination and domination balance in graph, *Discrete Mathematics*, 161:235-242 pp.
- Shiama, J.**, 2012, Permutation labeling for some shadow graphs, *International Journal of Computer Applications*, 40(6):31-35 pp.
- Sivagnanam, C.**, 2012, Double domination number and connectivity of graphs, *International Journal of Digital Information and Wireless Communications (IJDWC)*, 2(1):40-45 pp.
- Sooryanarayana, B.**, 1998, Certain combinatorial connections between groups, graphs and surfaces (Doctoral dissertation, Ph.D. Thesis).
- West, D.B.**, 2001, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, 2:588 p.

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren, bilgisini ve desteğini esirgemeyen, anlayışını eksik etmeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Aysun AYTAÇ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman bana destek olan ve bugünlere gelebilmem için maddi manevi desteklerini esirgemeyen babam Ahmet MUTLU, annem Selime MUTLU ve eşim Hüseyin ÖZCAN' a, ayrıca bilimin ışığından ayrılmasını istemediğim doğacak olan çocuğuma teşekkürü borç bilirim.

19 / 03 / 2021

Ayşen MUTLU ÖZCAN

## ÖZGEÇMİŞ

**Ayşen MUTLU ÖZCAN**

### **Eğitim Durumu**

Yüksek Lisans : 2018 - Devam Ediyor, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik Anabilim Dalı / Bilgisayar Bilimleri Bilim Dalı

Lisans : 2012 - 2017, Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü

Lise : 2009 - 2012, Çimentaş Anadolu Lisesi