

**UYUMLU TÜREVLİ İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL
DENKLEMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLAN ELBADİ

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
MAYIS- 2021**

**UYUMLU TÜREVLİ İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL
DENKLEMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLAN ELBADİ

ORCID ID: 0000-0002-7977-0088

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Fatma Ayça ÇETİNKAYA

ORCID ID: 0000-0003-0601-3112

**MERSİN
MAYIS - 2021**

ÖZET

UYUMLU TÜREVLİ İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu tezde, 2015 yılında D. R. Anderson ve D. J. Ulness tarafından tanımlanan ve “uyumlu türev operatörü” olarak isimlendirilen operatör yardımıyla tanımlanan ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem ele alınmıştır. Bu denklem ile oluşturulan başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılmış, daha sonra ilgili denklemin hangi koşullar altında özeşlenik biçimde yazılabileceğini sorusunun cevabı aranmıştır. Ayrıca, ikinci mertebeden uyumlu bir diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile oluşturulan bir sınır değer problemi incelenmiş ve bu problemin Green fonksiyonu ifade edilmiştir. Bunlara ek olarak, uyumlu türev yardımıyla verilen bir Sturm-Liouville problemi ele alınmış ve bu problemin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu Türev, Başlangıç Değer Problemi, Sınır Değer Problemi, Sturm-Liouville Problemi, Green Fonksiyonu.

Danışman: Doç. Dr. Fatma Ayça ÇETİNKAYA, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS USING A CONFORMABLE DERIVATIVE

In this thesis, we deal with a second order differential equation generated by a conformable derivative which was defined in 2015 by D. R. Anderson and D. J. Ulness. We investigate the existence and uniqueness of solutions of an initial value problem which is written by the above-mentioned differential equation and we address the question under which circumstances an equation of this kind can be written in self-adjoint form. We are also concerned with a Sturm-Liouville problem and we examine its eigenvalue and eigenfunction properties. Moreover, we present a boundary value problem generated by a conformable differential equation and boundary conditions and construct its Green function.

Keywords: Conformable Derivative, Initial Value Problem, Boundary Value Problem, Sturm-Liouville Problem, Green's Function.

Advisor: Assoc. Prof. Fatma Ayca CETINKAYA, Mersin University, Department of Mathematics, Mersin.



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca değerli ilgi ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Fatma Ayça ÇETİNKAYA' ya, tezin gelişimine olan katkılarından dolayı jüri üyelerim Prof. Dr. Hamza MENKEN'e ve Dr. Öğr. Üyesi Gülistan KAYA GÖK'e ayrıca desteklerini benden esirgemeyen aileme ve nişanlım Nusret Kurt'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	ii
ONAY	iii
ETİK BEYAN	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
KISALTMALAR ve SİMGELER	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	5
3. MATERYAL ve YÖNTEM	9
3.1. Uyumlu Kesirli Türev ve İntegral	9
3.1.1 Uyumlu Kesirli Türev Tanımı ve Özellikleri	9
3.1.2 Uyumlu Kesirli İntegral	15
3.2 Uyumlu Türev ve İntegral	17
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	28
4.1 İkinci Mertebeden Uyumlu Lineer Denklemler	28
4.2 Uyumlu Özeşlenik Denklemler	32
4.2.1 Bir Özel Durum	41
4.2.1.1 Cauchy Fonksiyonu ve Sabitlerin Değişimi Yöntemi	46
4.2.1.2 Sınır Değer Problemleri ve Green Fonksiyonu	48
4.3 Sturm-Liouville Problemleri	52
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	58

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
D^α	α mertebeli uyumlu türev
D_t^α	α mertebeli uyumlu kısmi türev
$e_p(t, s)$	Uyumlu üstel fonksiyon
$W(x, y)$	x ve y fonksiyonlarının Wronskiyeni
$\{x, y\}$	x ve y fonksiyonlarının Lagrange parantezi
$\langle f, g \rangle$	f ve g fonksiyonlarının iç çarpımı
$G(t, s)$	Green fonksiyonu



1. GİRİŞ

Kesirli analiz, tam sayı olmayan mertebeden türev ve integral hesabı anlamına gelir. Keyfi mertebeli türev ve integrasyon kavramı ilk kez 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital tarafından ortaya atılmıştır. Kesirli mertebeli türevlere ilişkin farklı tanımlar olmasına karşılık bu türevlerden en çok kullanılanları aşağıdaki gibi verilen Caputo ve Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevleridir.

i) Caputo Tanımı: $\alpha \in [n-1, n)$ olmak üzere bir f fonksiyonunun α mertebeli Caputo türevi

$$D_a^\alpha (f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx$$

eşitliği ile tanımlıdır, burada n bir tamsayı ve α bir reel sayıdır [1].

ii) Riemann-Liouville Tanımı: $\alpha \in [n-1, n)$ olmak üzere bir f fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville türevi

$$D_a^\alpha (f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx$$

eşitliği ile tanımlıdır, burada n bir tamsayı ve α bir reel sayıdır [1].

Caputo ve Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevleri de dahil literatürdeki tüm kesirli mertebeden türev tanımlarının klasik türev tanımıyla tek ortak yönü, hem kesirli mertebeden türevin hem de klasik türevin lineerlik özelliğini sağlamasıdır. Gerçekten, λ ve μ keyfi reel sayılar olmak üzere, aşağıdaki ifade kesirli mertebeden türevin Riemann-Liouville tanımı kullanılarak kolayca elde edilebilir:

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (\lambda f + \mu g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{(\lambda f(x) + \mu g(x))}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{g(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx \\ &= \lambda D_a^\alpha f(t) + \mu D_a^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Kesirli mertebeden türev ve klasik türev arasında lineerlik dışındaki özelliklerle ilgili olarak herhangi bir uyuma rastlanmamaktadır. Örneğin, herhangi bir sabit sayının Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi klasik türeve benzer şekilde sıfır olmamaktadır. Benzer şekilde, iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün klasik anlamdaki türevleri ile bunların kesirli

mertebeden türevleri de herhangi bir uyum sergilemez. Yine, bütün kesirli mertebeden türev tanımları klasik türevin sağladığı zincir kuralını sağlamaz.

Yakın zamanda, uyumlu kesirli türev olarak isimlendirilen ve klasik türev tanımına dayandırılarak verilen yeni bir yerel türev tanımı ortaya konmuştur [2]. Khalil ve arkadaşları tarafından tanımlanan bu uyumlu kesirli türev, klasik türevin doğal özelliklerini koruyarak, bilinen anlamdaki türev tanımlarını genişletmeyi ve bu türev tanımı kullanılarak elde edilen uyumlu kesirli diferansiyel denklemler yardımıyla diferansiyel denklemler teorisine yeni bakış açıları kazandırmayı amaçlar.

Tanım 1.1. [2] (Uyumlu Kesirli Türev) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde bir fonksiyon olmak üzere, tüm $t \geq 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için f fonksiyonunun α mertebeden “uyumlu kesirli türevi”

$$D_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Eğer bazı $a > 0$ sayıları için f fonksiyonu $(0, a)$ aralığında α diferansiyellenebilirse ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcutsa f fonksiyonunun 0 noktasındaki α mertebeden kesirli türevi $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ biçimindedir. Bazen, f in α mertebeden uyumlu kesirli türevi $D_\alpha(f)(t)$ yi belirtmek için $f^{(\alpha)}(t)$ gösterimi de kullanılabilir. Eğer f in α mertebeden türevi mevcutsa, kısaca f α türevlenebilirdir denir.

Anderson ve Ulness [3] 2015 yılında yayımladıkları çalışmalarında Khalil ve arkadaşları [2] tarafından tanımlanan uyumlu kesirli türevdeki “uyumlu” kelimesinin uygunluğunu tartışmaya açmışlardır. Bu tartışmanın birinci sebebi Khalil ve arkadaşlarının verdiği tanımda $\alpha \rightarrow 0$ iken $D_0 f = f$ olmaması ve ikinci sebebi ise bu tanımın $t \geq 0$ koşulunu sağlaması gerektiğidir. Anderson ve Ulness $\alpha \in [0, 1]$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere, D_0 birim operatöre ve D_1 klasik türev operatörüne karşılık gelecek biçimde yeni bir uyumlu türev tanımı vermişlerdir.

Tanım 1.2 [3] (Uyumlu Türev) $\alpha \in [0, 1]$ olsun. Bir D_α türev operatörünün uyumlu olması için gerek ve yeter koşul D_0 operatörünün birim operatöre ve D_1 operatörünün klasik türev operatörüne karşılık gelmesidir. Bu durumda türevlenebilir bir $f(t)$ fonksiyonu için

$$D_0 f(t) = f(t) \quad \text{ve} \quad D_1 f(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$$

yazılabilir.

Burada, bu son tanıma göre, Tanım 1.1 de verilen türevin uyumlu olmadığına dikkat etmekte yarar vardır.

Matematik ve mühendislikte kullanılan dinamik sistemlerin davranışlarıyla ilgilenen bir teori olarak bilinen kontrol teoride iki düzenleyici parametreye sahip u kontrol çıktısının t zamanındaki oransal türev kontrolörü

$$u(t) = \kappa_p E(t) + \kappa_d \frac{d}{dt} E(t) \quad (1.1)$$

algoritmasına sahiptir. Burada, κ_p oransal artış, κ_d türev artışı ve E durum değişkeni ve işlem değişkeni arasındaki hatadır. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.3 [3] (Uyumlu Türevin Bir Sınıfı) $\alpha \in [0,1]$ ve $\kappa_1, \kappa_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde sürekli fonksiyonlar olsunlar:

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_1(\alpha, t) = 1, & \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_0(\alpha, t) = 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_1(\alpha, t) = 0, & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_0(\alpha, t) = 1, \\ \kappa_1(\alpha, t) \neq 0, \quad \alpha \in [0,1), & \kappa_0(\alpha, t) \neq 0, \quad \alpha \in (0,1]. \end{cases}$$

O halde f fonksiyonunun t noktasında türevli olması durumunda aşağıdaki biçimde tanımlanan türev operatörü D_α uyumlu türev operatörü olur:

$$D_\alpha f(t) = \kappa_1(\alpha, t) f(t) + \kappa_0(\alpha, t) f'(t).$$

Burada κ_1 (1.1) eşitliğinde verilen κ_p oransal artışına, κ_0 , κ_d türev artışına, f fonksiyonu hataya ve $D_\alpha f$ uyumlu türevi ise u kontrol çıktısına karşılık gelir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan bu “Giriş” bölümünden sonra, önceki çalışmalara değinilen “Kaynak Araştırmaları” isimli ikinci bölümde, ele alınan konu ve denklemlerle ilgili literatür özeti verilmiştir. Üçüncü bölüm olan “Materyal ve Yöntem” isimli bölüm, sonraki bölümde kullanılacak olan bazı temel kavramların hatırlatılmasına ayrılmıştır. Başlığı “Bulgular ve Tartışma” olan dördüncü bölüm üç alt bölüm içermektedir. Birinci alt bölümde, $aD^\alpha D^\alpha y(t) + bD^\alpha y(t) + cy(t) = 0$ ikinci mertebeden sabit katsayılı uyumlu homojen lineer denklemi ve $atD^\alpha [tD^\alpha y(t)] + btD^\alpha y(t) + cy(t) = 0$ Cauchy-Euler tipli uyumlu diferansiyel denklemi ele alınmış ve bu denklemlerin genel çözümlerinin biçimleri verilmiştir. İkinci alt bölümde, $Lx(t) = D^\alpha [p(D^\alpha x - \kappa_1(\alpha, \cdot)x)](t) + q(t)x(t) = 0$ denklemi ile ilgili incelemeler yapılmaya başlanmıştır. Öncelikle bu denklem yardımıyla yazılan homojen olmayan $Lx(t) = f(t)$ denklemi ile oluşturulan bir başlangıç değer probleminin çözümlerinin varlığı ve tekliğini veren bir teorem ispatlanmıştır. Sonra, iki fonksiyonun Wronskiyeni, Lagrange parantezi ve Cauchy fonksiyonu tanımları verilmiştir. Daha sonra, son yazılan denklemin bir özel hali olan $Lx(t) = D^\alpha [pD^\alpha x](t) + q(t)x(t) = h(t)$ denklemi ile ilgili sonuçlar ifade

edilmiştir. Bu denklem ile oluşturulan sınır değer problemlerinin özelliklerinin incelenmiş ve Green fonksiyonu verilmiştir. Üçüncü alt bölümde ise, $D^\alpha [p(D^\alpha x - \kappa_1(\alpha, \cdot)x)](t) + (\lambda r(t) + q(t))x(t) = 0$ Sturm-Liouville denklemi ele alınmış ve bu denklemin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir. Son bölüm olan beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere değinilmiştir.

Bu tez çalışmasında uyumlu türev konusu ile ilgili detaylı bir literatür taraması yapılmıştır. Tezin Bulgular ve Tartışma kısmında [3] ve [20] kaynaklarda elde edilen sonuçlar derlenmiştir. Bu tez çalışması ile literatüre bu makalelerdeki sonuçların detaylı bir biçimde incelenerek alana katkı sunmak ve bu alandaki lisansüstü eğitime yardımcı bir kaynak sağlamak amaçlanmıştır.



2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Khalil ve arkadaşları tarafından 2014 yılında tanımlanan ve uyumlu kesirli türev operatörü olarak isimlendirilen türev operatörü, klasik türev operatörüne olan benzerliği ile dikkat çekmiş ve bu benzerlik sayesindeki kullanılabilirliği ile birçok problemin çözümü için motivasyon kaynağı olmuştur. Katugampola [4] Khalil ve arkadaşlarının verdiği tanıma benzer başka bir uyumlu kesirli türev tanımı vererek bu tanımın klasik türevin sağladığı lineerlik, iki fonksiyonun çarpımının türevi, iki fonksiyonun bölümünün türevi, zincir kuralı, sabit bir fonksiyonun türevinin sıfır olması gibi özelliklerini incelemiş ve ayrıca Rolle ve Ortalama Değer teoremlerinin ispatlarını vermiştir. Anderson ve Avery [5] ikinci mertebeden konjüge sınır değer problemlerini uyumlu kesirli türev yardımıyla yeniden formüle etmişler ve problemin pozitif çözümünün varlığını ispatlamışlardır. Pospisil ve Skripkova [6] uyumlu kesirli türev operatörü yardımıyla tanımladıkları diferansiyel denklemler için Sturm ayırma ve Sturm karşılaştırma teoremlerini ispatlamışlardır. Al-Refai ve Abdeljawad [7] uyumlu kesirli türev yardımıyla tanımlanan bir diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile oluşturulmuş bir sınır değer probleminin spektral özelliklerini incelemiştir. Çetinkaya [8] uyumlu kesirli bir dalga denklemine genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanarak elde edilen uyumlu sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özelliklerini incelemiştir. Silva ve arkadaşları [9] uyumlu kesirli türev yardımıyla oluşturulan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemleri ele almış ve klasik diferansiyel denklemler teorisinin yöntemlerini kullanarak bu denklemin çözümleri için yeterli koşulu uyumlu kesirli Laplace dönüşümü metodu yardımıyla elde etmişlerdir. Anderson ve arkadaşları [10] lineer diferansiyel denklemler, özdeşliklik, Sturm-Liouville sistemleri ve integral dönüşümler gibi başlıkları inceledikten sonra uyumlu kesirli türevin fiziğe ve mühendisliğe olan uygulamaları ile ilgili analizler yapmıştır. Allahverdiev ve Tuna [11] uyumlu kesirli bir Dirac denklemler sistemini ele almıştır. Bu sistem için varlık ve teklik teoremini ispatlamış ve özdeşlik bir sınır değer problemi formüle etmiştir. Ayrıca uyumlu kesirli Dirac sistemi için bir Green matrisi inşa etmiş ve özfonksiyon açılımlarını vermiştir. Mortazaasl ve Akbarfam [12] uyumlu kesirli türev yardımıyla tanımladıkları ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile oluşturulmuş sınır değer probleminin düz ve nodal noktalara göre ters problemini incelemişlerdir. Keskin [13] uyumlu kesirli bir boyutlu Dirac tipli integro diferansiyel denklem sistemini ele almış ve bu sistemin düz ve nodal noktalara göre ters problemini incelemiştir. Ulu Akdaş [14] uyumlu kesirli türev ve integralin uygulamalarını incelemiştir. Bozkurt [15] kesirli integral ve türev formüllerini iki değişkenli fonksiyonlar için genelleştirerek, bu tanımlar yardımıyla bazı yeni sonuçlar elde etmiştir. Sarıkaya ve arkadaşları [16] uyumlu kesirli türev için (α, k) - gamma fonksiyonu, (α, k) - beta fonksiyonu, $(x)_{n,k}^\alpha$ Pochhammer sembolü ve Laplace dönüşümlerini vermiş ve klasik gamma, beta fonksiyonlarının

ve Pochhammer sembolünün sağladıkları özellikleri genelleştirmiştir. Ercan ve Baş [17] uyumlu bir Dirac sistemini ayrık sınır koşullarıyla birlikte ele almış ve problemin çözümlerinin gösterimini elde etmiş ve özdeğer ve özfonksiyonların asimtotik formüllerini bulmuşlardır. Ceylan [18] (ayrıca bkz. [19]) zaman skalası üzerinde uyumlu türev operatörü yardımıyla tanımlanan ikinci mertebeden uyumlu dinamik bir operatör ele alınmıştır. Bu operatör yardımıyla oluşturulmuş bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılmış, uyumlu Lagrange özleşliği ispatlanmış ve daha sonra uyumlu bir özdeğer probleminin bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

Literatürde Khalil ve arkadaşlarının [2] “uyumlu kesirli türev” tanımını merkeze alarak yapılan çok sayıda çalışma olmasına rağmen, bu tanımdaki “kesirli” kelimesinin uygunluğunu tartışan birçok makale olduğunu da söylemekte yarar vardır. Bu çalışmalar, bu tartışmanın nedeninin Khalil ve arkadaşlarının [2] verdiği türev tanımının kesirli türevlerin taşıması gereken özellikleri taşınamaması olarak belirtmişlerdir. Ortigueira ve Machado [20] “Verilen bir operatörün kesirli türev operatörü olduğu nasıl söylenir? Bir kesirli türevin farkına nasıl varılır?” sorularına cevap aradıkları çalışmalarında bir operatörün kesirli türev operatörü olması için “geniş anlamdaki kriterler” (wide sense criterion, WSC) olarak adlandırdıkları aşağıdaki kriterleri sağlaması gerektiğini savunmuşlardır:

1. Lineerlik: Operatör lineer olmalıdır.
2. Özdeşlik: Bir fonksiyonun sıfıncı mertebeden türevi fonksiyonun kendisini vermelidir.
3. Önceki durumla uyumluluk: Bir fonksiyonun tamsayı mertebeden kesirli türevi fonksiyonun klasik türeviyle aynı sonucu vermelidir.
4. Index kuralı: $\alpha < 0$ ve $\beta < 0$ için $D_\alpha D_\beta f(t) = D_{\alpha+\beta} f(t)$ eşitliği sağlanmalıdır.
5. Genelleştirilmiş Leibniz kuralı: $D_\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} D_i f(t) D_{\alpha-i} g(t)$ eşitliği sağlanmalıdır.

Index kuralı pozitif sayıları içerecek biçimde genişletilirse Ortigueira ve Machado'nun [20] “katı anlamdaki kriterler” (strict sense criterion, SSC) olarak adlandırdıkları ve dördüncü kuralın “her α ve β için $D_\alpha D_\beta f(t) = D_{\alpha+\beta} f(t)$ eşitliği sağlanmalıdır” olarak değiştiği beş kuralın geçerli olması gerekir. Buna göre Khalil ve arkadaşlarının [2] “uyumlu kesirli türev” olarak isimlendirdikleri türev “kesirli” olmamaktadır. Gerçekten, Tanım 1.1 ile verilen “uyumlu kesirli türev” tanımından da görüleceği üzere, $D_0 f(t)$ ifadesi

$$D_0 f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f[t(1 + \varepsilon)] - f(t)}{1 + \varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}$$

biçiminde elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikteki ikinci çarpan sonsuza gider. Dolayısıyla “uyumlu kesirli türev” özdeşlik kuralını sağlamaz. Ayrıca, index kuralı ve genelleştirilmiş Leibniz kuralı da sağlanmaz. Dolayısıyla Ortigueira ve Machado’nun [20] iddia ettiği üzere, Khalil ve arkadaşlarının “uyumlu kesirli türev” olarak adlandırdıkları türev kesirli türev sınıfına dahil edilemez.

2017 yılında Jarad ve arkadaşları [21] Khalil ve arkadaşlarının [2] tanımladıkları uyumlu türevin Riemann-Liouville ve Caputo anlamındaki gerçek kesirli versiyonunu tanımlamıştır. Kesirli analizin standart prosedürüne dayandırılarak verilen bu tanımın “uyumlu kesirli türev” adlandırmasını, Khalil ve arkadaşlarının [2] verdiği tanımdan daha çok hakettiği düşünülür.

2015 yılında Anderson ve Ulness [3] konuyu başka bir açıdan ele almış ve Khalil ve arkadaşlarının [2] tanımladığı uyumlu türevdeki uyumlu sıfatının uygunluğunu tartışmaya açmışlardır. Anderson ve Ulness’in bu tartışmayı başlatmalarındaki birincil sebep Khalil ve arkadaşlarının verdiği türev tanımında $\alpha \rightarrow 0$ durumunda birim operatöre ulaşılmaması yani $D_0 f = f$ eşitliğinin sağlanmaması ve ayrıca bu tanımdaki t değişkenine konan $t > 0$ olma koşuludur. Bunların ışığında, Anderson ve Ulness tüm $t \in \mathbb{R}$ sayıları için $\alpha \in [0,1]$ mertebeli yeni bir uyumlu türev tanımlamış ve bu yeni türevde D_0 operatörünün birim operatöre ve D_1 operatörünün ise klasik türev operatörüne denk gelmesini sağlamışlardır.

Tanım 2.1 [3] (Uyumlu Türev) $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bir D_α türev operatörünün uyumlu olması için gerek ve yeter koşul D_0 operatörünün birim operatöre ve D_1 operatörünün klasik türev operatörüne karşılık gelmesidir. Bu durumda türevlenebilir bir $f = f(t)$ fonksiyonu için

$$D_0 f(t) = f(t) \quad \text{ve} \quad D_1 f(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$$

yazılabilir.

Matematik ve mühendislikte kullanılan dinamik sistemlerin davranışlarıyla ilgilenen bir teori olarak bilinen kontrol teoride iki düzenleyici parametreye sahip u kontrol çıktısının t zamanındaki oransal türev kontrolörü

$$u(t) = \kappa_p E(t) + \kappa_d \frac{d}{dt} E(t)$$

algoritmasına sahiptir. Burada, κ_p oransal artış, κ_d türev artışı ve E durum değişkeni ve işlem değişkeni arasındaki hatadır. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.3 [3] (Uyumlu Türevin Bir Sınıfı) $\alpha \in [0,1]$ ve $\kappa_1, \kappa_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde sürekli fonksiyonlar olsunlar:

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_1(\alpha, t) = 1, & \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_0(\alpha, t) = 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_1(\alpha, t) = 0, & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_0(\alpha, t) = 1, \\ \kappa_1(\alpha, t) \neq 0, \quad \alpha \in [0, 1), & \kappa_0(\alpha, t) \neq 0, \quad \alpha \in (0, 1]. \end{cases}$$

O halde f fonksiyonunun t noktasında türevli olması durumunda aşağıdaki biçimde tanımlanan türev operatörü D_α uyumlu türev operatörü olur:

$$D_\alpha f(t) = \kappa_1(\alpha, t)f(t) + \kappa_0(\alpha, t)f'(t).$$

Burada κ_1 , yukarıda bahsi geçen κ_p oransal artışına, κ_0 , κ_d türev artışına, f , hataya ve $D_\alpha f$ ise u kontrol çıktısına karşılık gelir.

Anderson ve Ulness'in verdikleri bu yeni tanım kullanılarak yapılan çalışmaların sayısı oldukça fazladır. Usta [22] uyumlu adi bir diferansiyel denklemi nümerik bir yöntem kullanarak çözmüş ve yöntemin uygunluğunu destekleyecek nitelikte örnekler ele almıştır. Anderson [23] ikinci mertebeden uyumlu türev kullanılarak ifade edilen diferansiyel denklemlerin detaylı bir analizini yapmıştır. Anderson bu denklemlerin belli bir iççarpıma ve belirli özeşlenik sınır koşullarına göre özeşlenik olduğunu göstermiş, Wronskiyen tanımı vermiş ve Lagrange özdeşliği ve Abel formülünü ispatlamıştır. Bunlara ek olarak, bu diferansiyel denklemler yardımıyla yazılan sınır değer problemlerinin çeşitli özelliklerini incelemiştir. Jarad ve arkadaşları [24] Caputo ve Riemann-Liouville genelleştirilmiş uyumlu kesirli türevlerini ele almış, bu türev ve integral yardımıyla Laplace dönüşümlerini tanımlamış ve tanımladıkları bu Laplace dönüşümünden yararlanarak lineer kesirli Cauchy problemlerinin çözümlerini araştırmışlardır. Bayour, Hammoudi ve Torres [25] zaman skalasında tanımlı uyumlu türev ve integralle ilgili bazı tanım ve teoremlerden bahsettikleri çalışmalarında, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemleri ve hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonları inceleme fırsatı bulmuşlardır. Alzabut ve arkadaşları [26] genelleştirilmiş uyumlu Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerini kullanarak Gronwall-Bellman eşitsizliklerinin yeni versiyonlarını elde etmişler ve Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri ile oluşturulan başlangıç değer problemlerinin çözümleri ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir. Abbas ve Ragusa [27] kesirli türev yardımıyla tanımlanan bir hibrid diferansiyel denkleminin çözümünün varlığı ile ilgili teoremi ispat etmişlerdir. Açıy ve arkadaşları [28] uyumlu türev yardımıyla ventilatörün mekanik işlem modelini oluşturmuşlardır ve böylece bu yeni türevin klinik tıp alanına bir uygulamasını elde etmişlerdir. Çetinkaya ve Cuchta [29] zaman skalasında Sturm-Liouville ve Riccati denklemlerini ele almıştır bu denklemlerin çözümlerinin varlığını göstermiş, Sturm-Liouville ve Riccati denklemleri arasındaki ilişkiyi incelemiş ve Wintner teoreminin uyumlu benzerini ispatlamışlardır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır ve bir sonraki bölüm olan “Bulgular ve Tartışma” başlıklı bölümde verilen sonuçların elde edilmesini sağlayan tanım ve teoremleri içermektedir. İlk alt bölümde uyumlu kesirli türev ve integralin çeşitli özelliklerinden bahsedilecektir. Bunun için Kaynaklar kısmında verilen [2] numaralı makaleden yararlanılacaktır. İkinci alt bölümde, bu sefer [3] ve [23] numaralı makalelerden faydalanarak, uyumlu türev ve integral ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilecektir. α mertebeden uyumlu kesirli türev [2] makalesinde T_α sembolü ile gösterilmesine karşılık, burada hem [3] ve [23] makaleleri ile, hem de tezin “Bulgular ve Tartışma” bölümüyle bütünlük oluşturulması açısından D_α sembolünün kullanılması tercih edilmiştir.

3.1 Uyumlu Kesirli Türev ve İntegral

3.1.1 Uyumlu Kesirli Türev Tanımı ve Özellikleri

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t > 0$ olsun. f fonksiyonunun t noktasındaki türevi $\frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$ biçiminde tanımlıdır. Bu tanıma göre, $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$ olduğu kolayca görülebilir. Burada akla şu soru gelebilir: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, yukarıda verilen türev tanımına benzer biçimde tanımlanabilecek α mertebeden bir kesirli türev var mıdır? Benzer türev tanımı, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$ için de yapılabilir mi?

D_α ile α mertebeden kesirli türev olarak isimlendirilen operatör belirtilsin. $\alpha = 1$ iken D_1 operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i) Tüm $a, b \in \mathbb{R}$ elemanları ve D_1 in tanım kümesinden alınan her f, g fonksiyonu için $D_1(af + bg) = aD_1(f) + bD_1(g)$ dir.
- ii) Tüm $p \in \mathbb{R}$ için $D_1(t^p) = pt^{p-1}$ dir.
- iii) $D_1(fg) = fD_1(g) + gD_1(f)$ dir.
- iv) $D_1\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_1(f) - fD_1(g)}{g^2}$ dir.
- v) Tüm sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonları için $D_1(\lambda) = 0$ dir.

Aşağıdaki tanım, $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere, α mertebeden kesirli türevin en basit, en doğal ve en etkili tanımıdır. Burada bu tanımın, herhangi bir α sayısı için genelleştirilebileceğini

belirtmekte yarar vardır. Fakat yine de $\alpha \in (0,1]$ durumu en önemli durumdur ve türev tanımını bu durum için yapıldıktan sonra, diğer durumları elde etmek kolaydır.

Tanım 3.1.1.1: [2] (Uyumlu Kesirli Türev) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tüm $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için f fonksiyonunun α mertebeden “uyumlu kesirli türevi”

$$D_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Eğer bazı $a > 0$ sayıları için f fonksiyonu $(0, a)$ aralığında α diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcutsa f fonksiyonunun 0 noktasındaki α mertebeden kesirli türevi $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ biçimindedir.

Bazen, f fonksiyonunun α mertebeden uyumlu kesirli türevi $D_{\alpha}(f)(t)$ yi belirtmek için $f^{(\alpha)}(t)$ gösterimi de kullanılabilir. Eğer f in α mertebeden türevi mevcutsa, kısaca f α türevlenebilir denir. Ayrıca $D_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}$ eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem, yukarıdaki tanımın bir sonucu olarak verilebilir.

Teorem 3.2.1.1: [2] $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $t_0 > 0$ noktasında α türevlenebilir, o halde f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

İspat: $f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \varepsilon$ eşitliğinin her iki tarafından $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınarak,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$$

yazılabilir. Burada $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alınırsa son eşitlik

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0$$

halini alır ve dolayısıyla $\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$ eşitliği sağlanır. Bu ise f fonksiyonunun t_0 noktasındaki sürekliliğini verir. Böylece ispat biter. \square

Tanım 3.2.1.1 ile verilen D_α uyumlu türevinin sağladığı özellikler aşağıdaki teoremden belirtilmiştir.

Teorem 3.1.1.2: [2] $\alpha \in (0,1]$ olsun ve f ve g fonksiyonlarının bir $t > 0$ noktasında α türevlenebilir fonksiyonlar olduğu kabul edilsin. Bu durumda

- 1) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha (af + bg) = aD_\alpha (f) + bD_\alpha (g)$ dır.
- 2) Her $p \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha (t^p) = pt^{p-\alpha}$ dır.
- 3) Tüm sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonları için $D_\alpha (\lambda) = 0$ sağlanır.
- 4) $D_\alpha (fg) = fD_\alpha (g) + gD_\alpha (f)$ dır.
- 5) $D_\alpha \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{gD_\alpha (f) - fD_\alpha (g)}{g^2}$ sağlanır.
- 6) Eğer f fonksiyonu türevlenebilirse $D_\alpha (f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ olur.

İspat: (1)-(3) şıklarının ispatları tanımdan direkt olarak elde edilebilir. (4) ün ispatı için, sabitlenmiş $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
 D_\alpha (fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \cdot g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
 &= D_\alpha (f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) D_\alpha (g)(t)
 \end{aligned}$$

elde edilir. g fonksiyonu t noktasında sürekli olduğundan $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ yazılabilir.

Böylece (4) ispatlanmış olur. (5) buna benzer biçimde ispatlanabilir. (6) yı ispatlamak için Tanım 3.1.1.1 de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ alınırsa $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ yazılabilir. Dolayısıyla,

$$D_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} = t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$$

elde edilir ve böylece ispat biter. \square

Aşağıda belirli bazı fonksiyonların uyumlu türevleri verilmiştir:

1) Her $p \in \mathbb{R}$ için $D_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dır.

2) $D_{\alpha}(1) = 0$ dır.

3) Her $c \in \mathbb{R}$ için $D_{\alpha}(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}$ dır. Gerçekten Tanım 3.1.1.1 kullanılarak

$$D_{\alpha}(e^{cx}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{c(x+\varepsilon x^{1-\alpha})} - e^{cx}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{cx}(e^{c\varepsilon x^{1-\alpha}} - 1)}{\varepsilon} = e^{cx} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c\varepsilon x^{1-\alpha}}{1} = cx^{1-\alpha}e^{cx}$$

olduğu görülür.

4) Her $b \in \mathbb{R}$ için $D_{\alpha}(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx$ dir. Gerçekten Tanım 3.1.1.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} D_{\alpha}(\sin bx) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin[b(x + \varepsilon x^{1-\alpha})] - \sin bx}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin bx \cos(b\varepsilon x^{1-\alpha}) + \sin(b\varepsilon x^{1-\alpha}) \cos bx - \sin bx}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sin bx (bx^{1-\alpha}) \sin(b\varepsilon x^{1-\alpha}) + bx^{1-\alpha} \cos(bx) \cos(b\varepsilon x^{1-\alpha})}{1} = bx^{1-\alpha} \cos bx \end{aligned}$$

olduğu görülür.

5) Her $b \in \mathbb{R}$ için $D_{\alpha}(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx$ dir. Gerçekten Tanım 3.1.1.1 kullanılarak

$$D_{\alpha}(\cos bx) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos[b(x + \varepsilon x^{1-\alpha})] - \cos bx}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos bx \cos(b\varepsilon x^{1-\alpha}) - \sin(b\varepsilon x^{1-\alpha}) \sin bx - \cos bx}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\cos bx (bx^{1-\alpha}) \sin(b\varepsilon x^{1-\alpha}) - bx^{1-\alpha} \sin(bx) \cos(b\varepsilon x^{1-\alpha})}{1} = -bx^{1-\alpha} \sin bx$$

olduğu görülür.

6) $D_{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}t\right) = 1$ dir. Gerçekten Tanım 3.1.1.1 kullanılarak

$$D_{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\alpha}(x + \varepsilon x^{1-\alpha})^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}x^{\alpha}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\alpha}x^{1-\alpha}\alpha(x + \varepsilon x^{1-\alpha})^{\alpha-1}}{1} = 1$$

olduğu görülür.

Bunlara ek olarak, aşağıdaki eşitlikler de verilebilir:

i) $D_{\alpha}\left(\sin \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = \cos \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}.$

ii) $D_{\alpha}\left(\cos \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}.$

iii) $D_{\alpha}\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}.$

Uyumlu kesirli türevin en önemli durumu α nın $(0,1]$ aralığında olduğu durum olmasına rağmen, bu türevin $\alpha \in (n, n+1]$ iken nasıl tanımlanması gerektiği aşağıda belirtilmiştir.

Tanım 3.1.1.2: [2] $\alpha \in (n, n+1]$ olmak üzere f , $t > 0$ noktasında n mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f in α mertebeden uyumlu kesirli türevi aşağıdaki gibidir:

$$D_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\varepsilon}.$$

Burada, $\lceil \alpha \rceil$ α sayısının tam değerini belirtir.

Tanım 3.1.1.2 nin ışığında $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f, t > 0$ noktasında $(n+1)$ mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$D^\alpha (f)(t) = t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} f^{(\lceil \alpha \rceil)}(t)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Uyumlu kesirli türev için yukarıda verilen tanımlar, α türevlenebilir fonksiyonların analizini yapmayı gerektirmese de, klasik analizin Rolle Teoremi ve Ortalama Değer Teoremi gibi önemli teoremlerinin uyumlu kesirli türev için yapılan genelleştirmelerinin verilmesine engel de değildir.

Teorem 3.1.1.3: [2] (Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar için Rolle Teoremi)

$a > 0$ olsun ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayalım:

- i) $f, [a, b]$ de süreklidir.
- ii) Bazı $\alpha \in (0, 1)$ ler için f fonksiyonu α türevlenebilirdir.
- iii) $f(a) = f(b)$ dir.

Bu durumda $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak biçimde bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan ve $f(a) = f(b)$ eşitliği sağlandığından f fonksiyonunun bir $c \in (a, b)$ yerel ekstremum noktası vardır. Genelliği kaybetmeksizin c nin bir yerel minimum nokta olduğu kabul edilsin. O halde

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Bu eşitlikteki ilk limit negatif olmayan, ikinci limit ise pozitif olmayan bir değer olduğundan $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olması gerekir. Böylece ispat biter. \square

Teorem 3.1.1.4: [2] (Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi)

$a > 0$ olsun ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

- i) $f, [a, b]$ de süreklidir.
- ii) Bazı $\alpha \in (0, 1)$ ler için f α türevlenebilirdir.

Bu durumda $f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$ olacak biçimde bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

İspat: Aşağıda verilen g fonksiyonu ele alınsın:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha \right).$$

Bu durumda, g fonksiyonu teorem 3.1.1.3 ile verilen Rolle teoreminin koşullarını sağlar. Yani, $g^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak biçimde bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır. $D_\alpha \left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha \right) = 1$ olması gerçeğinden yararlanarak istenen sonuca ulaşılır. Böylece ispat biter. \square

3.1.2 Uyumlu Kesirli İntegral

$\alpha \in (0, \infty)$ olsun ve $\alpha \neq -p$ olmak üzere keyfi $p \in \mathbb{R}$ için $J_\alpha(t^p) = \frac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha}$ fonksiyonu

tanımlansın. Eğer $f(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$ ise $J_\alpha(f)$ ifadesi

$$J_\alpha(f) = \sum_{k=0}^n b_k J_\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^n b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$$

ile ve $f(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$ ise, serinin düzgün yakınsak olması durumunda

$$J_{\alpha}(f) = \sum_{k=0}^n b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$$

ile tanımlıdır. J_{α} nın tanım kümesinde lineer olduğu açıktır. Ayrıca, eğer $\alpha = 1$ ise, o halde J_{α} klasik integral ile örtüşür.

Bu tanıma göre, $\alpha = \frac{1}{2}$ iken,

$$J_{\alpha}(\sin t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+\frac{3}{2}}}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)(2n+1)!}$$

olur. Herhangi $\alpha \in (0,1)$ için $\cos t$ ve e^t ifadeleri de benzer biçimde hesaplanabilir. Bu örnekler, $a \geq 0$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun α integralini aşağıdaki gibi tanımlamamıza olanak sağlar.

Tanım 3.1.2.1: [2] $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$I_{\alpha}^a(f)(t) = I_1^a(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

ile tanımlıdır. Burada integral klasik Riemann genelleştirilmiş integralidir.

Teorem 3.1.2.1: [2] $t \geq a$ ve f fonksiyonu I_{α} nın tanımlı olduğu bölgede sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$D_{\alpha} I_{\alpha}^a(f)(t) = f(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu sürekli olduğundan $I_{\alpha}^a(f)(t)$ fonksiyonu türevlenebilirdir. O halde,

$$D_\alpha (I_\alpha^a(f))(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_\alpha^a(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx = t^{1-\alpha} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} = f(t)$$

yazılabilir ve böylece ispat biter. \square

3.2 Uyumlu Türev ve İntegral

Bu alt bölümde [3] ve [15] numaralı kaynaklardan yararlanarak uyumlu türev ve integral ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 3.2.1:[3] (Uyumlu Türev) $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bir D^α diferansiyel operatörünün uyumlu olması için gerek ve yeter koşul D^0 operatörünün birim operatöre ve D^1 operatörünün klasik türev operatörüne karşılık gelmesidir. Bu durumda $f = f(t)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$D^0 f(t) = f(t) \quad \text{ve} \quad D^1 f(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t) \quad (3.2.1)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada, Tanım 3.1.1.1 de verilen “uyumlu kesirli türevin” Tanım 3.2.1 de verilen (3.2.1) eşitliklerini sağlamadığını belirtmekte yarar vardır.

Matematik ve mühendislikte kullanılan dinamik sistemlerin davranışlarıyla ilgilenen bir teori olarak bilinen kontrol teoride iki düzenleyici parametreye sahip u kontrol çıktısının t zamanındaki oransal türev kontrolörü

$$u(t) = \kappa_p E(t) + \kappa_d \frac{d}{dt} E(t) \quad (3.2.2)$$

algoritmasına sahiptir. Burada κ_p oransal artış, κ_d türevsel artışı ve E ise durum değişkeni ve işlem değişkeni arasındaki hatadır. Buradan hareketle aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.2.2: [3] (Uyumlu Türevin Bir Sınıfı) $\alpha \in [0,1]$ olsun ve $\kappa_0, \kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde sürekli fonksiyonlar oldukları kabul edilsin:

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_1(\alpha, t) = 1, & \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_0(\alpha, t) = 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_1(\alpha, t) = 0, & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_0(\alpha, t) = 1, \\ \kappa_1(\alpha, t) \neq 0, \alpha \in [0, 1), & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_0(\alpha, t) = 1, \alpha \in (0, 1]. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

0 halde f fonksiyonunun t noktasında türevli olması durumunda aşağıdaki biçimde tanımlanan türev operatörü D^α uyumlu türev operatörü olarak adlandırılır:

$$D^\alpha f(t) = \kappa_1(\alpha, t) f(t) + \kappa_0(\alpha, t) f'(t). \quad (3.2.4)$$

Burada κ_1 , (3.2.) eşitliğinde bahsi geçen κ_p oransal artışına, κ_0 , aynı eşitlikteki κ_d türevsel artışına, f fonksiyonu, E hata fonksiyonuna ve $D^\alpha f$ türevi ise u kontrol çıktısına karşılık gelir.

Tanım 3.2.3: [3] (Uyumlu Kısmi Türev) $\alpha \in [0, 1]$ olsun ve $\kappa_0, \kappa_1 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının sürekli fonksiyonlar oldukları ve (3.2.3) eşitliğindeki koşulları sağladıkları varsayalım. Sabitlenmiş her $s \in \mathbb{R}$ için $\frac{\partial}{\partial t} f(t, s)$ türevi mevcut olacak biçimde bir $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun verildiği kabul edilsin. Bu durumda uyumlu kısmi türev operatörü

$$D_t^\alpha f(t, s) = \kappa_1(\alpha, t) f(t, s) + \kappa_0(\alpha, t) \frac{\partial}{\partial t} f(t, s) \quad (3.2.5)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Uyarı 3.2.1: [3] \mathbb{T} herhangi bir zaman skalası (reel sayıların boştan farklı herhangi bir kapalı alt kümesi) olsun. Bu durumda (3.2.1) eşitliği ile uyumlu türev \mathbb{T} zaman skalasına aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$D^\alpha f(t) = \kappa_1(\alpha, t) f(t) + \kappa_0(\alpha, t) f^\Delta(t).$$

Burada, f fonksiyonu \mathbb{T} zaman skalası üzerinde tanımlanmış Δ türevlenebilir bir fonksiyon ve f^Δ fonksiyonu f fonksiyonunun Δ türevidir.

Tanım 3.2.4: [3] (Uyumlu Üstel Fonksiyon) $\alpha \in (0,1]$ olsun. $s \leq t$ olmak üzere $s, t \in \mathbb{R}$ sayıları göz önüne alınsın ve $p: [s, t] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun. $\kappa_0, \kappa_1: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının sürekli fonksiyonlar oldukları ve (3.2.3) eşitliğinde verilen koşulları sağladıkları varsayılınsın, ayrıca p/κ_0 ve κ_1/κ_0 fonksiyonlarının $[s, t]$ aralığı üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonlar olduğu kabul edilsin. O halde, (3.2.4) eşitliği ile verilen D^α uyumlu türevine göre tanımlanan uyumlu üstel fonksiyon

$$e_p(t, s) := e^{\int_s^t \frac{p(\tau) - \kappa_1(\alpha, \tau)}{\kappa_0(\alpha, \tau)} d\tau}, \quad e_0(t, s) = e^{-\int_s^t \frac{\kappa_1(\alpha, \tau)}{\kappa_0(\alpha, \tau)} d\tau} \quad (3.2.6)$$

eşitlikleri ile verilir. Bu fonksiyon ayrıca

$$D^\alpha e_p(t, s) = e_p(t, s) \quad \text{ve} \quad D^\alpha e_0(t, s) = 0 \quad (3.2.7)$$

eşitliklerini sağlar.

Uyumlu üstel fonksiyonun temel özellikleri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 3.2.1: [23] (Uyumlu Üstel Fonksiyon Özellikleri) κ_0 ve κ_1 fonksiyonları (3.2.3) ile verilen eşitlikleri sağlasın, p ve q fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olsun ve $t, s, r \in \mathbb{R}$ olarak alınsın. Bu durumda, (3.2.6) eşitliği ile tanımlanan uyumlu üstel fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $e_p(t, t) \equiv 1.$

(ii) $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r).$

(iii) $\frac{1}{e_p(t, s)} = e_p(s, t) = e_{(2\kappa_1 - p)}(t, s).$

(iv) $e_{\kappa_1}(t, s) \equiv 1.$

$$(v) \quad e_{-\kappa_1}(t, s) = 1.$$

$$(vi) \quad \frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{(p-q+\kappa_1)}(t, s).$$

$$(vii) \quad \frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{(p-q+\kappa_1)}(t, s).$$

$$(viii) \quad D_t^\alpha [e_p(s, t)] = (2\kappa_1 - p)(t)e_p(s, t).$$

(ix) p fonksiyonu diferansiyellenebilir ve pozitif bir fonksiyon ise, o halde

$$e_{\left(\frac{-D^\alpha p}{p}\right)}(t, t_0) = \frac{p(t_0)}{p(t)} e_0^2(t, t_0) \quad \text{ve} \quad e_{\left(\frac{D^\alpha p}{p}\right)}(t, t_0) = \frac{p(t)}{p(t_0)}$$

eşitlikleri sağlanır.

D^α uyumlu türevinin aşağıda verilen temel türev alma kurallarını gerçeklediği kolayca gösterilebilir.

Lemma 3.2.2: [3] (Temel Türev Alma Kuralları) $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere D^α operatörü (3.2.4) eşitliği ile tanımlanan uyumlu türev olsun. $p: [s, t] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olarak alınsın. $\kappa_0, \kappa_1: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının sürekli fonksiyonlar oldukları ve eşitlik (3.2.3) deki koşulları sağladıkları varsaylınsın, ayrıca p/κ_0 ve κ_1/κ_0 fonksiyonlarının $[s, t]$ aralığı üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonlar olduğu kabul edilsin ve f ve g fonksiyonlarının uyumlu türevlenebilir fonksiyonlar oldukları varsaylınsın. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(i) \quad \text{Tüm } a, b \in \mathbb{R} \text{ sayıları için } D^\alpha [af + bg] = aD^\alpha [f] + bD^\alpha [g] \text{ dir.}$$

$$(ii) \quad \text{Tüm } c \in \mathbb{R} \text{ sayıları için } D^\alpha c = c\kappa_1(\alpha, \cdot) \text{ dir.}$$

$$(iii) \quad D^\alpha [fg] = fD^\alpha [g] + gD^\alpha f - fg\kappa_1(\alpha, \cdot) \text{ dir.}$$

$$(iv) \quad D^\alpha [f/g] = \frac{gD^\alpha [f] - fD^\alpha [g]}{g^2} + \frac{f}{g} \kappa_1(\alpha, \cdot) \text{ dir.}$$

(v) $\alpha \in (0,1]$ ve sabitlenmiş $s \in \mathbb{R}$ için (3.2.6) ile tanımlanan uyumlu üstel fonksiyon

$$D_t^\alpha [e_p(t, s)] = p(t)e_p(t, s) \quad (3.2.8)$$

eşitliğini sağlar.

(vi) $\alpha \in (0,1]$ için ve (3.2.6) eşitliği ile verilen üstel e_0 fonksiyonu için

$$D^\alpha \left[\int_\alpha^t \frac{f(s)e_0(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \right] = f(t) \quad (3.2.9)$$

eşitliği sağlar.

İspat: (i) özelliği (3.2.4) eşitliği yardımıyla

$$D^\alpha [af + bg] = \kappa_0(af' + bg') + \kappa_1(af + bg) = (a\kappa_0f' + a\kappa_1f) + (b\kappa_0g' + b\kappa_1g) = aD^\alpha f + bD^\alpha g$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde (ii) özelliği de aynı eşitlik kullanılarak gösterilebilir. (iii) özelliği için

$$\begin{aligned} D^\alpha [fg] &= \kappa_0(fg' + f'g) + \kappa_1(fg) = (f\kappa_0g' + f\kappa_1g) + (g\kappa_0f' + g\kappa_1f) - fg\kappa_1 \\ &= fD^\alpha g + gD^\alpha f - fg\kappa_1 \end{aligned}$$

yazılabilir. (iv) özelliği (iii) özelliğine benzer biçimde elde edilir. (v) özelliğini doğrulamak için (3.2.6) ile tanımlanan e_p fonksiyonuna (3.2.5) eşitliği ile tanımlanan uyumlu kısmi türev operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} D_t^\alpha e_p(t, s) &= \kappa_0(\alpha, t) \left(\frac{p(t) - \kappa_1(\alpha, t)}{\kappa_0(\alpha, t)} \right) e_p(t, s) + \kappa_1(\alpha, t) e_p(t, s) \\ &= (p(t) - \kappa_1(\alpha, t)) e_p(t, s) + \kappa_1(\alpha, t) e_p(t, s) = p(t) e_p(t, s) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (vi) ile verilen eşitliği görmek için tekrar (3.2.4) ve (3.2.6) dan faydalanılır ve böylece

$$\begin{aligned}
D^\alpha \left[\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds \right] &= \kappa_0(\alpha,t) \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds \right) + \kappa_1(\alpha,t) \int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds \\
&= \kappa_0(\alpha,t) \left(\frac{-\kappa_1(\alpha,t)}{\kappa_0(\alpha,t)} \int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds + \frac{f(t)e_0(t,t)}{\kappa_0(\alpha,t)} \right) + \kappa_1(\alpha,t) \int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds \\
&= -\kappa_1(\alpha,t) \int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds + f(t) + \kappa_1(\alpha,t) \int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds = f(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat biter. \square

Tanım 3.2.5: [3] (Uyumlu İntegral) $\alpha \in (0,1]$ olsun ve $t_0 \in \mathbb{R}$ olduğu kabul edilsin. Bir f fonksiyonunun uyumlu belirsiz integrali

$$\int D^\alpha f(t) d_\alpha t = f(t) + c e_0(t, t_0), \quad c \in \mathbb{R}$$

ile tanımlıdır. Benzer biçimde f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerindeki uyumlu belirli integrali

$$\int_a^t f(s) e_0(t,s) d_\alpha s := \int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds, \quad d_\alpha s = \frac{1}{\kappa_0(\alpha,s)} ds \quad (3.2.10)$$

eşitliği ile tanımlıdır. Burada (3.2.6) eşitliği yardımıyla $e_0(t,s) = e^{-\int_s^t \frac{\kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)} d_\alpha \tau} = e^{-\int_s^t \kappa_1(\alpha,\tau) d_\alpha \tau}$ yazılabileceğini hatırlamakta yarar vardır.

Uyumlu integral aşağıda verilen özellikleri sağlar.

Lemma 3.2.3: [3] (Temel İntegral Alma Kuralları) D^α operatörü (3.2.4) eşitliği ile tanımlı uyumlu türev olsun ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere uyumlu integral (3.2.10) eşitliği ile tanımlansın. κ_0 ve κ_1 fonksiyonlarının sürekli fonksiyonlar oldukları ve (3.2.3) ile verilen koşulları

sağladıkları varsayılın, ayrıca f ve g fonksiyonlarının uyumlu türevlenebilir fonksiyonlar oldukları kabul edisin. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) Bir f fonksiyonunun belirli integralinin uyumlu türevi

$$D^\alpha \left[\int_a^t f(s) e_0(t,s) d_\alpha s \right] = f(t)$$

eşitliği ile verilir.

(ii) Bir f fonksiyonunun uyumlu türevinin belirli integrali

$$\int_a^t D^\alpha \left[f(s) e_0(t,s) d_\alpha s \right] = f(s) e_0(t,s) \Big|_{s=a}^t := f(t) - f(a) e_0(t,a)$$

eşitliği ile verilir.

(iii) Kısmi integrasyon kuralı

$$\int_a^b f(t) D^\alpha \left[g(t) \right] e_0(b,t) d_\alpha t = f(t) g(t) e_0(b,t) \Big|_{t=a}^b - \int_a^b g(t) \left(D^\alpha \left[f(t) \right] - \kappa_1(\alpha, t) f(t) \right) e_0(b,t) d_\alpha t$$

eşitliği ile verilir.

(iv) Integralin uyumlu türevini almak için kullanılan Leibniz kuralı (3.2.5) eşitliği yardımıyla

$$D^\alpha \left[\int_a^t f(t,s) e_0(t,s) d_\alpha s \right] = \int_a^t \left(D_t^\alpha \left[f(t,s) \right] - \kappa_1(\alpha, t) f(t,s) e_0(t,s) \right) d_\alpha s + f(t,t)$$

eşitliği ile veya $e_0(t,s) \equiv 0$ olduğu durumda $D^\alpha \left[\int_a^t f(t,s) d_\alpha s \right] = f(t,t) + \int_a^t D_t^\alpha \left[f(t,s) \right] d_\alpha s$

eşitliği ile verilir.

İspat: (i) in ispatı (3.2.9) ve (3.2.10) dan kolayca elde edilir. Lemma 3.2.2 nin (ii) şıkında $c = 1$ alınarak (ii) özelliğinin (iii) numaralı özelliğın özel bir durumu olduğu görölür. (iii) ü ispatlamak için Lemma 3.2.2 (iii) ve integralin (3.2.10) ile verilen tanımı göz önüne alınırsa, (iii) deki ikinci ifade için D^α operatörünün (3.2.4) ile verilen tanımı ve (3.2.10) kullanılarak $\alpha \neq 0$ iken

$$f'(t)dt = \frac{D^\alpha f(t) - \kappa_1(\alpha, t) f(t)}{\kappa_0(\alpha, t)} dt = (D^\alpha f(t) - \kappa_1(\alpha, t) f(t)) d_\alpha t$$

elde edilir. (iv) ü ispatlamak için ($\alpha = 1$) Leibniz kuralı kullanılırsa

$$\begin{aligned} D^\alpha \left[\int_a^t f(t, s) e_0(t, s) d_\alpha s \right] &= D^\alpha \left[\int_a^t \frac{f(t, s) e_0(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \right] = \kappa_0(\alpha, t) \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(t, s) e_0(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \\ &\quad + \kappa_1(\alpha, t) \int_a^t \frac{f(t, s) e_0(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \\ &= \kappa_0(\alpha, t) \int_a^t \frac{e_0(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} \left(\frac{-\kappa_1(\alpha, t) f(t, s)}{\kappa_0(\alpha, T)} + \frac{\partial}{\partial t} f(t, s) \right) ds + f(t, t) \\ &\quad + \kappa_1(\alpha, t) \int_a^t \frac{f(t, s) e_0(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \\ &= \int_a^t (D_t^\alpha [f(t, s)] - \kappa_1(\alpha, t) f(t, s)) e_0(t, s) d_\alpha s + f(t, t) \end{aligned}$$

elde edilir. (iv) deki ikinci ifadenin sağlandığı ise

$$\begin{aligned} D^\alpha \left[\int_a^t f(t, s) d_\alpha s \right] &= D^\alpha \left[\int_a^t \frac{f(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \right] = \kappa_0(\alpha, t) \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds + \kappa_1(\alpha, t) \int_a^t \frac{f(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \\ &= \kappa_0(\alpha, t) \left[\frac{f(t, t)}{\kappa_0(\alpha, t)} + \int_a^t \frac{\frac{\partial}{\partial t} f(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \right] + \kappa_1(\alpha, t) \int_a^t \frac{f(t, s)}{\kappa_0(\alpha, s)} ds \end{aligned}$$

$$= f(t, t) + \int_a^t D_t^\alpha [f(t, s)] d_\alpha s$$

biçiminde gösterilir. Böylece ispat biter. \square

Teorem 3.2.1: [23] (Rolle Teoremi) $\alpha \in (0, 1]$ olsun. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir ve $f(a) = e_0(a, b)f(b)$ eşitliği sağlanıyorsa, o halde $D^\alpha f(c) = 0$ olacak biçimde en az bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

Teorem 3.2.2: [23] (Ortalama Değer Teoremi) $\alpha \in (0, 1]$ olsun. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilirse $D^\alpha f(c) = \frac{e_0(c, b)f(b) - e_0(c, a)f(a)}{h_1(b, a)}$ eşitliği sağlanacak biçimde en az bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır, burada $d_\alpha s := \frac{ds}{K_0(s)}$ için $h_1(b, a) = \int_a^b 1 \cdot d_\alpha s$ olarak tanımlıdır.

Bir sonraki teorem, Lemma 3.2.3 ün (ii) şikkında ispatlanmış olsa da, yukarıda verilen Rolle ve Ortalama Değer Teoremlerinden sonra aşağıda bir başka ispat yöntemi daha verilmiştir.

Teorem 3.2.3 (İntegral Hesabın Temel Teoremi) $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında türevlenebilir olduğu ve f' fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olduğu varsayalım. O halde $\int_a^b D^\alpha [f(t)] e_0(b, t) d_\alpha t = f(b) - f(a) e_0(b, a)$ eşitliği sağlanır, burada $d_\alpha t := \frac{dt}{\kappa_0(t)}$ dir.

İspat: $P, [a, b]$ aralığının $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ biçimindeki herhangi bir parçalanışı olsun ve

$h_1(t, a) = \int_a^t 1 d_\alpha s$ eşitliği göz önünde bulundursun. Teorem 3.2.2 ile verilen Ortalama Değer

Teoremi f fonksiyonuna $[t_{i-1}, t_i]$ aralığında uygulanırsa

$$D^\alpha f(c_i) = \frac{e_0(c_i, t_i) f(t_i) - e_0(c_i, t_{i-1}) f(t_{i-1})}{h_1(t_i, t_{i-1})}$$

eşitliği veya bu eşitliğe denk olan

$$D^\alpha [f(c_i)] e_0(b, c_i) h_1(t_i, t_{i-1}) = e_0(b, t_i) f(t_i) - e_0(b, t_{i-1}) f(t_{i-1})$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ sayısı var olduğu görülebilir. f fonksiyonunun

$$S(P, f, \mu) = \sum_{i=1}^n D^\alpha [f(c_i)] e_0(b, c_i) (\mu(t_i) - \mu(t_{i-1})), \quad \mu(t) := \int_a^t 1 d_\alpha s = h_1(t, a),$$

biçimindeki Riemann-Stieltjes toplamı yazılırsa

$$S(P, f, \mu) = \sum_{i=1}^n e_0(b, t_i) f(t_i) - e_0(b, t_{i-1}) f(t_{i-1}) = f(b) - e_0(b, a) f(a).$$

olduğu görülür. P parçalanışı keyfi olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^b D^\alpha [f(t)] e_0(b, t) d\mu(t) &= \int_a^b D^\alpha [f(t)] e_0(b, t) \mu'(t) dt = \int_a^b D^\alpha [f(t)] e_0(b, t) d_\alpha t \\ &= f(b) - e_0(b, a) f(a) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece ispat biter. \square

Bir sonraki lemma birinci merteben uyumlu diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılabilir.

Lemma 3.2.4: [3] (Sabitlerin Değişimi) κ_0 ve κ_1 fonksiyonlarının (3.2.3) eşitliği ile verilen koşulları sağladığı varsayalım. $f, p: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun, e_p fonksiyonu (3.2.6) eşitliğindeki gibi tanımlansın ve $u_0 \in \mathbb{R}$ olsun. O halde,

$$D^\alpha u(t) - p(t)u(t) = f(t), \quad u(t_0) = u_0$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$u(t) = u_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, s) f(s) d_\alpha s, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (3.2.11)$$

eşitliği ile verilir.

İspat. u fonksiyonunun (3.2.11) eşitliği ile tanımlandığı varsayalım. Lemma 3.2.2 (v) ve Lemma 3.2.3 (iv) ifadeleri kullanılarak

$$D^\alpha u(t) = u_0 p(t) e_p(t, t_0) + e_p(t, t) f(t) + \int_{t_0}^t p(t) e_p(t, s) f(s) d_\alpha s = p(t)u(t) + f(t)$$

elde edilir. Böylece ispat biter. \square

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde [3] ve [23] numaralı kaynaklarda elde edilen sonuçlar derlenmiştir. Bu makalelerdeki sonuçlar detaylı bir biçimde incelenmiştir.

4.1 İkinci Mertebeden Uyumlu Lineer Denklemler

Matematik, matematiksel fizik, matematiksel biyoloji fiziksel kimya ve mühendislik problemlerinin birçoğunda aşağıdaki gibi ifade edilen ikinci mertebeden lineer homojen sabit katsayılı adi diferansiyel denklem önemli bir yere sahiptir:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bu bölümde, yukarıda verilen denklemin (3.2.3) eşitliği ile tanımlanan D^α uyumlu türevi yardımıyla yazılan benzeri yani, ikinci mertebeden lineer homojen sabit katsayılı uyumlu diferansiyel denklem ele alınacaktır:

$$aD^\alpha D^\alpha y(t) + bD^\alpha y(t) + cy(t) = 0, \quad t \in [t_0, \infty).$$

Bu bölümde, ayrıca,

$$atD^\alpha [tD^\alpha y(t)] + btD^\alpha y(t) + cy(t) = 0, \quad t \in [t_0, \infty), \quad t_0 > 0$$

biçiminde verilen Cauchy-Euler tipli uyumlu diferansiyel denklemlerle ilgili incelemeler yapılacaktır.

Teorem 4.1.1 $\kappa_0, \kappa_1 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının sürekli oldukları ve (3.2.3) deki koşulları sağladıkları varsayılınsın, D^α uyumlu türevi (3.2.4) deki gibi tanımlansın, $a, b, c \in \mathbb{R}$ sayıları keyfi reel sayılar olarak alınsın ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. (3.2.6) eşitliğinden yararlanarak herhangi bir sabit λ sayısı için

$$e_\lambda(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \frac{\lambda - \kappa_1(\alpha, \tau)}{\kappa_0(\alpha, \tau)} d\tau} = e^{\int_{t_0}^t (\lambda - \kappa_1(\alpha, \tau)) d_\alpha \tau}$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$aD^\alpha D^\alpha y(t) + bD^\alpha y(t) + cy(t) = 0, \quad t \in [t_0, \infty), \quad (4.1.1)$$

sabit katsayılı homojen uyumlu diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (4.1.2)$$

biçiminde ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin genel çözümü aşağıdaki üç durumdan biri ile ifade edilir:

(i) λ_1 ve λ_2 sayıları (4.1.2) denkleminin birbirinden farklı reel kökleri ise (4.1.1) denkleminin çözümü $y(t) = c_1 e_{\lambda_1}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda_2}(t, t_0)$ biçimindedir.

(ii) $\lambda = \frac{-b}{2a}$ sayısı (4.1.2) denkleminin katlı reel kökü ise (4.1.1) denkleminin çözümü

$$y(t) = c_1 e_{\lambda}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda}(t, t_0) \int_{t_0}^t 1 d_{\alpha} s \text{ biçimindedir.}$$

(iii) $\lambda = \xi \pm i\beta$ sayısı (4.2.2) denkleminin karmaşık kompleks kökü ise (4.1.1) denkleminin

$$\text{çözümü } y(t) = c_1 e_{\xi}(t, t_0) \cos \left(\int_{t_0}^t \beta d_{\alpha} s \right) + c_2 e_{\xi}(t, t_0) \sin \left(\int_{t_0}^t \beta d_{\alpha} s \right) \text{ biçimindedir.}$$

İspat. λ belirlenecek kompleks bir sabit olmak üzere $y = y(t) = e_{\lambda}(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \frac{\lambda - \kappa_1(\alpha, \tau)}{\kappa_0(\alpha, \tau)} d\tau}$ çözümü ele alınsın. y çözümü (4.1.1) de yerine yazılırsa ve (3.2.8) ifadesi göz önünde bulundurulursa, $\alpha = 1$ olduğu klasik durumdaki karakteristik denklem, yani (4.1.2) elde edilir.

Doğrusıyla üç durum söz konusudur. Eğer karakteristik denklemin birbirinden farklı iki reel kökü varsa, çözüm (i) şıkında verildiği gibi iki üstel fonksiyonun bir lineer kombinasyonu biçiminde elde edilir. Şimdi, $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısının (4.1.2) denkleminin iki katlı kökü olduğu varsayalım, yani $\lambda = \frac{-b}{2a}$ olsun. O halde $y_1(t) = e_{\lambda}(t, t_0) = e_{\frac{-b}{2a}}(t, t_0)$ fonksiyonu (4.1.1)

denkleminin bir çözümü olur. $\alpha = 1$ durumunda, $y_2 = ty_1$ fonksiyonunun ikinci lineer bağımsız

çözüm olduğu dikkate alınarak $y_2(t) = e_\lambda(t, t_0)h_1(t, t_0) = e_\lambda(t, t_0) \int_{t_0}^t 1d_\alpha s$ yazılabilir. Buradan

(3.2.4) eşitliği yardımıyla

$$D^\alpha y_2(t) = e_\lambda(t, t_0) \left(1 + \lambda \int_{t_0}^t 1d_\alpha s \right), \quad D^\alpha D^\alpha y_2(t) = e_\lambda(t, t_0) \left(2\lambda + \lambda^2 \int_{t_0}^t 1d_\alpha s \right)$$

elde edilir. $\lambda = \frac{-b}{2a}$ olduğu göz önünde bulundurularak, bu ifadeler

$$aD^\alpha D^\alpha y_2(t) + bD^\alpha y_2(t) + cy_2(t)$$

ifadesinde yerine yazılırsa, λ nın karakteristik denklemin bir kökü olması durumunda

$$ae_\lambda(t, t_0) \left(2\lambda + \lambda^2 \int_{t_0}^t 1d_\alpha s \right) + be_\lambda(t, t_0) \left(1 + \lambda \int_{t_0}^t 1d_\alpha s \right) + ce_\lambda(t, t_0) \int_{t_0}^t 1d_\alpha s = e_\lambda(t, t_0) (a\lambda^2 + b\lambda + c) \int_{t_0}^t 1d_\alpha s = 0$$

bulunur. Son olarak, (4.1.2) karakteristik denkleminin $\lambda = \xi \pm i\beta$ kompleks köklerine sahip olduğu varsayılınsın. Bu durumda (4.1.1) denkleminin kompleks değerli bir çözümü Euler formülünün ve (3.2.6) ifadesinin yardımıyla

$$y(t) = e_{(\xi+i\beta)}(t, t_0) = e_\xi(t, t_0) \left(\cos \left(\int_{t_0}^t \beta d_\alpha s \right) + i \sin \left(\int_{t_0}^t \beta d_\alpha s \right) \right)$$

biçiminde yazılabilir. Bu çözümün reel ve sanal kısımları (4.1.1) denkleminin lineer bağımsız çözümlerini oluşturur. \square

Aşağıdaki teorem, ikinci mertebeden lineer homojen Cauchy-Euler tipli uyumlu diferansiyel denkleminin genel çözümlerinin biçimleri hakkında bilgi vermektedir.

Teorem 4.1.2 $\kappa_0, \kappa_1 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının sürekli oldukları ve (3.2.3) ile verilen koşulları sağladıkları varsayılınsın, D^α uyumlu türevi (3.2.4) deki gibi tanımlansın, ayrıca $a, b, c \in \mathbb{R}$ keyfi reel sayılar olarak alınsın ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. O halde, aşağıdaki gibi verilen homojen Cauchy-Euler tipli uyumlu diferansiyel denklemi

$$aD^\alpha [tD^\alpha y(t)] + btD^\alpha y(t) + cy(t) = 0, \quad t \in [t_0, \infty), \quad t_0 > 0, \quad (4.1.3)$$

(4.1.2) ile verilen karakteristik denkleme sahiptir ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere (4.1.3) denkleminin genel çözümü aşağıdaki üç durumdan biri ile ifade edilir:

(i) λ_1 ve $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sayıları (4.1.2) denkleminin birbirinden farklı kökleri ise (4.1.3) denkleminin çözümü $y(t) = c_1 e_{\lambda_1/t}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda_2/t}(t, t_0)$ biçimindedir.

(ii) $\lambda = \frac{-b}{2a}$ sayısı (4.1.2) denkleminin katlı reel kökü ise (4.1.3) denkleminin çözümü

$$y(t) = c_1 e_{\lambda/t}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda/t}(t, t_0) \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s \text{ biçimindedir.}$$

(iii) $\lambda = \xi \pm i\beta$ sayısı (4.1.2) denkleminin bir kompleks kökü ise (4.1.3) denkleminin

$$\text{çözümü } y(t) = c_1 e_{\xi/t}(t, t_0) \cos \left(\beta \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s \right) + c_2 e_{\xi/t}(t, t_0) \sin \left(\beta \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s \right) \text{ biçimindedir.}$$

İspat. λ belirlenecek kompleks bir sabit ve üstel fonksiyon (3.2.6) eşitliği ile tanımlanan fonksiyon olmak üzere $y(t) = e_{\lambda/t}(t, t_0)$ çözümü ele alınsın. Bu çözüm (4.1.3) ile verilen denkleme yerine yazılırsa (4.1.2) karakteristik denklemi elde edilir ve dolayısıyla yine üç durum söz konusudur. Eğer karakteristik denklemin birbirinden farklı iki reel kökü varsa, çözüm (i) şıkında verildiği gibidir.

Şimdi, $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısının (4.1.2) denkleminin iki katlı kökü olduğu varsayılınsın, yani

$\lambda = \frac{-b}{2a}$ olsun. O halde, $y_1(t) = e_{\lambda/t}(t, t_0)$ fonksiyonu (4.1.3) denkleminin bir çözümü olur.

$$y_2(t) = y_1(t) \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s \text{ olarak alınır}$$

$$\begin{aligned}
atD^\alpha \left[tD^\alpha y_2(t) \right] + btD^\alpha y_2(t) + cy_2(t) &= 2atD^\alpha y_1(t) + atD^\alpha \left[tD^\alpha y_1(t) \right] \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s \\
&+ by_1(t) + \left(btD^\alpha y_1(t) \right) \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s + cy_1(t) \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s = 0
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece $\lambda = -b/2a$ olur ve y_1 in bir çözüm olduğu durumda (ii) doğrulanır. Son olarak, (4.1.2) karakteristik denkleminin $\lambda = \xi \pm i\beta$ kompleks köklerine sahip olduğu varsayalım. Bu durumda, (4.1.3) denkleminin kompleks değerli bir çözümü

$$y(t) = e_{(\xi+i\beta)/t}(t, t_0) = e_{\xi/t}(t, t_0) \left(\cos \left(\beta \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s \right) + i \sin \left(\beta \int_{t_0}^t s^{-1} d_\alpha s \right) \right)$$

biçiminde yazılabilir. Bu çözümün reel ve sanal kısımları (4.2.3) denkleminin lineer bağımsız çözümlerini oluşturur. \square

4.2 Uyumlu Öz Eşlenik Denklemler

$\alpha \in [0,1]$ olsun ve D^α uyumlu türevi (3.2.4) eşitliği ile tanımlansın. Bu alt bölümde

$$Lx(t) = D^\alpha \left[p \left(D^\alpha x - \kappa_1(\alpha, \cdot) x \right) \right](t) + q(t)x(t) = 0 \quad (4.2.1)$$

öz eşlenik denklemi ele alınacaktır. Bu alt bölüm boyunca, p ve q fonksiyonlarının $[t_0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar oldukları varsayılacaktır ve tüm $t \in [t_0, \infty)$ için $p(t) \neq 0$ olduğu kabul edilecektir. $D^\alpha x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $D^\alpha \left[p \left(D^\alpha x - \kappa_1(\alpha, \cdot) x \right) \right] : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olacak biçimdeki tüm $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesi \mathbb{D} ile gösterilsin. Her $t \in [t_0, \infty)$ için $Lx(t) = 0$ denklemini sağlayan $x \in \mathbb{D}$ fonksiyonuna (4.2.1) denkleminin çözümü denir.

Aşağıdaki teorem homojen olmayan öz eşlenik $Lx = f(t)$ denklemi ile oluşturulan başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili bilgi vermesi açısından önemlidir.

Teorem 4.2.1: p, q ve f fonksiyonları $[t_0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun, $p(t) \neq 0$ olduğu kabul edilsin ve $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ sayıları verilsin. O halde

$$Lx = f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad D^\alpha x(t_0) = x_1$$

başlangıç değer probleminin $[t_0, \infty)$ aralığında tek bir çözümü vardır.

İspat: x fonksiyonu $Lx = f$ denkleminin bir çözümü olsun ve

$$D^\alpha x(t) = \kappa_1(\alpha, t)x(t) + \frac{1}{p(t)}y(t) \quad \text{olmak üzere} \quad y(t) := p(t)(D^\alpha x(t) - \kappa_1(\alpha, t)x(t))$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. x fonksiyonunun (4.2.1) ile tanımlanan $Lx = f$ denkleminin bir çözümü olduğu göz önünde bulundurularak $D^\alpha y(t) = -q(t)x(t) + f(t)$ yazılabilir.

Dolayısıyla, $A(t) = \begin{bmatrix} \kappa_1(\alpha, t) & 1/p(t) \\ -q(t) & 0 \end{bmatrix}$, $b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$ olmak üzere, $z(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ vektörü

$D^\alpha z(t) = A(t)z(t) + b(t)$ vektör denkleminin bir çözümü olur. D^α 'nın (3.2.4) ile verilen tanımından

$$z'(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa_0(\alpha, t)p(t)} \\ \frac{-q(t)}{\kappa_0(\alpha, t)} & \frac{-\kappa_1(\alpha, t)}{\kappa_0(\alpha, t)} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{\kappa_0(\alpha, t)} \end{bmatrix}$$

yazılabilir ve tüm fonksiyonlar sürekli olduğundan istenen sonuç, $\alpha = 1$ standart durumunda olduğu gibi elde edilir (bknz. [30, Teorem 5.4]).

Teorem 4.2.2: κ_0 ve κ_1 fonksiyonlarının (3.2.3) koşullarını sağladıkları kabul edilsin. Eğer y_1 lineer homojen (4.2.1) denkleminin bir çözümü ise, diğer bir deyişle $Ly_1 = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, O halde, e_{Y_1} fonksiyonu (3.2.6) eşitliğinde tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$y_2(t) = y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} e_{Y_1}(s, a) d_\alpha s, \quad Y_1(s) := 2\kappa_1(\alpha, s) - \frac{2D^\alpha y_1(s)}{y_1(s)} \quad (4.2.2)$$

fonksiyonu, (4.2.1) denkleminin ikinci lineer bağımsız çözümü olur.

İspat: y_1 fonksiyonunun $Ly = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu kabul edilsin ve y_2 nin (4.2.2) deki eşitliği sağladığı varsayalım. Lemma 3.2.2 den

$$\begin{aligned} D^\alpha y_2(t) &= y_1(t) D^\alpha \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} e_{Y_1}(s, a) d_\alpha s + (D^\alpha y_1(t) - \kappa_1(\alpha, t) y_1(t)) \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} e_{Y_1}(s, a) d_\alpha s \\ &= \frac{y_1(t)}{p(t)} e_{Y_1}(t, a) + (D^\alpha y_1(t)) \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} e_{Y_1}(s, a) d_\alpha s \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} p(t)(D^\alpha y_2(t) - \kappa_1(\alpha, t) y_2(t)) \\ = y_1(t) e_{Y_1}(t, a) + p(t)(D^\alpha y_1(t) - \kappa_1(\alpha, t) y_1(t)) \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} e_{Y_1}(s, a) d_\alpha s, \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} D^\alpha [p(D^\alpha y_2 - \kappa_1 y_2)] &= y_1 Y_1 e_{Y_1} + e_{Y_1} (D^\alpha y_1 - \kappa_1 y_1) \\ + p(D^\alpha y_1 - \kappa_1 y_1) &\left(\frac{1}{p} e_{Y_1} + \kappa_1 \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} e_{Y_1}(s, a) d_\alpha s \right) - [q y_1 + \kappa_1 p (D^\alpha y_1 - \kappa_1 y_1)] \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} e_{Y_1}(s, a) d_\alpha s \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, yukarıdaki eşitliğin son satırında y_1 in bir çözüm olmasından yararlanılmıştır. Son yazılan eşitlik basitleştirilmeye devam edilirse, Y_1 in (4.2.2) deki biçimi de göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} D^\alpha [p(D^\alpha y_2 - \kappa_1 y_2)] &= -q y_2 + \left(y_1 \left(2\kappa_1 - 2 \frac{D^\alpha y_1}{y_1} \right) + D^\alpha y_1 - \kappa_1 y_1 \right) e_{Y_1} \\ + p(D^\alpha y_1 - \kappa_1 y_1) &\left(\frac{1}{p} e_{Y_1} + 0 \right) = -q y_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat biter. \square

Şimdi, $D^\alpha D^\alpha x + a(t)D^\alpha x + b(t)x = 0$ biçimindeki bir denklemin hangi koşullar altında (4.2.1) öz eşlenik biçiminde yazılabileceği araştırılacaktır.

Teorem 4.2.3 κ_0 ve κ_1 fonksiyonlarının (3.2.3) eşitliklerini sağladıkları varsayılınsın. Eğer κ_1 fonksiyonu $[t_0, \infty)$ aralığında diferansiyellenebilir ve $a, b: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklirse, o halde,

$$D^\alpha D^\alpha x + a(t)D^\alpha x + b(t)x = 0, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (4.2.3)$$

uyumlu diferansiyel denklemi (4.2.1) öz eşlenik biçiminde yazılabilir, burada $t \in [t_0, \infty)$ için

$$p(t) = e_a + 2\kappa_1(t, t_0), \quad q(t) = (\kappa_1(\alpha, t)a(t) + b(t) + D^\alpha \kappa_1(\alpha, t)) \quad (4.2.4)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. x in (4.2.3) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayılınsın. (4.2.4) den $pa = D^\alpha p - 2p\kappa_1$, $pb = q - p\kappa_1 - pD^\alpha \kappa_1 = q - D^\alpha(p\kappa_1) + p\kappa_1^2$, (4.2.5)

yazılabilir. (4.2.3) eşitliğinin her tarafı p ile çarpılarak ve (4.2.5) kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= pD^\alpha D^\alpha x + paD^\alpha x + pbx \\ &= pD^\alpha(D^\alpha x) + (D^\alpha p - 2p\kappa_1)D^\alpha x + (q - D^\alpha(p\kappa_1) + p\kappa_1^2)x \\ &= pD^\alpha(D^\alpha x) + (D^\alpha x)(D^\alpha p - p\kappa_1) - p\kappa_1 D^\alpha x + (q - D^\alpha(p\kappa_1) + p\kappa_1^2)x \\ &= D^\alpha[pD^\alpha x] - D^\alpha[p\kappa_1 x] + qx \end{aligned}$$

elde edilir. D^α in lineerliği ve p ve q nun (4.2.4) de verilen biçimleri dikkate alınarak bu denklemin öz eşlenik olduğu görülür. Böylece ispat biter. \square

Tanım 4.2.1: $\kappa_0, \kappa_1: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsun ve (3.2.3) ile verilen eşitlikleri sağlasın. Eğer $x, y: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[t_0, \infty)$ aralığında türevlenebilirse, o

halde D^α (3.2.4) de tanımlanan uyumlu türevi göstermek üzere, x ve y fonksiyonlarının uyumlu Wronskiyeni $t \in [t_0, \infty)$ için

$$W(x, y) = \det \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ D^\alpha x(t) & D^\alpha y(t) \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 4.2.2 Eğer $x, y: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[t_0, \infty)$ aralığında türevlenebilirse, Wronskiyen (4.2.6) eşitliği ile verildiği gibi olmak üzere, $t \in [t_0, \infty)$ için x ve y fonksiyonlarının Lagrange parantezi $\{x; y\}(t) = p(t)W(x, y)(t)$ eşitliği ile tanımlıdır.

Teorem 4.2.4 Eğer $x, y \in \mathbb{D}$ ise, o halde

$$x(t)Ly(t) - y(t)Lx(t) = D^\alpha \{x; y\}(t), \quad t \in [t_0, \infty) \quad (4.2.7)$$

eşitliği ile sağlanır.

İspat. İki fonksiyonun çarpımının uyumlu türevi kuralından $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde

$$\begin{aligned} D^\alpha \{x; y\} &= D^\alpha [xp(D^\alpha y - \kappa_1 y) - yp(D^\alpha x - \kappa_1 x)] \\ &= xD^\alpha [p(D^\alpha y - \kappa_1 y)] + p(D^\alpha y - \kappa_1 y)(D^\alpha x - \kappa_1 x) - yD^\alpha [p(D^\alpha x - \kappa_1 x)] \\ &\quad - p((D^\alpha x - \kappa_1 x)(D^\alpha y - \kappa_1 y) = xD^\alpha [p(D^\alpha y - \kappa_1 y)] - yD^\alpha [p(D^\alpha x - \kappa_1 x)] \\ &= x\{qy + D^\alpha [p(D^\alpha y - \kappa_1 y)]\} - y\{qx + D^\alpha [p(D^\alpha x - \kappa_1 x)]\} = xLy - yLx \end{aligned}$$

yazılabilir, böylece ispat biter. \square

Aşağıda verilen sonuçlar Teorem 4.2.4 den kolayca elde edilir.

Sonuç 4.2.1 x ve y fonksiyonları (4.2.1) denkleminin birer çözümü ise, $c \in \mathbb{R}$ herhangi bir sabit olmak üzere, her $t \in [t_0, \infty)$ için

$$W(x, y)(t) = \frac{ce_0(t, t_0)}{p(t)} \quad (4.2.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: x ve y nin (4.2.1) denkleminin çözümleri olduğu kabul edilsin. Teorem 4.2.4 den her $t \in [t_0, \infty)$ için $D^\alpha \{x; y\}(t) = 0$ yazılabilir, o halde D^α türevine göre $\{x; y\}(t)$ ifadesi bir sabite eşit olmalıdır. Bu durumda her $c \in \mathbb{R}$ için, $t \in [t_0, \infty)$ olmak üzere $\{x; y\}(t) = ce_0(t, t_0)$ yazılabilir. \square

Sonuç 4.2.2: x ve y fonksiyonları (4.2.1) denkleminin birer çözümü ise, o halde tüm $t \in [t_0, \infty)$ için $W(x, y)(t) \equiv 0$ veya $W(x, y)(t) \neq 0$ ifadelerinden biri sağlanır. İlk durum x ve y fonksiyonlarının $t \in [t_0, \infty)$ aralığı üzerinde lineer bağımlı olduğu durumda, ikinci durum ise bu fonksiyonların aynı aralık üzerinde lineer bağımsız olduğu durumda geçerlidir.

İspat. x ve y fonksiyonlarının (4.2.1) denkleminin birer çözümü olduğu kabul edilsin. (4.2.8)

den tüm $t \in [t_0, \infty)$ için $W(x, y)(t) = \frac{ce_0(t, t_0)}{p(t)}$ yazılabilir. Eğer x ve y lineer bağımlıysa her

$t \in [t_0, \infty)$ için $W(x, y)(t) \equiv 0$ olduğu açıktır. Diğer yandan, eğer $t \in [t_0, \infty)$ için

$W(x, y)(t) \equiv 0$ sağlanırsa, o halde

$0 = xD^\alpha y - yD^\alpha x = x(\kappa_0 y' + \kappa_1 y) - y(\kappa_0 x' + \kappa_1 x) = \kappa_0(xy' - x'y)$ yazılabilir ve bu durumda x

ve y lineer bağımlı olur. \square

Üstel fonksiyon (3.2.6) eşitliği ve integral (3.2.10) eşitliği ile tanımlandığı şekilde olmak

üzere iki sürekli fonksiyonun iç çarpımı $\langle y, z \rangle = \int_a^b y(t)z(t)e_0(b, t)d_\alpha t$ eşitliği ile tanımlıdır.

(4.2.7) eşitliği bu iç çarpım ile yeniden yazılarak

$$\begin{aligned} \langle x, Ly \rangle - \langle y, Lx \rangle &= \int_a^b D^\alpha \{x; y\}(t) e_0(b, t) d_\alpha t = \{x; y\}(b) - \{x; y\}(a) e_0(b, a) \\ &= p(b)W(x, y)(b) - p(a)W(x, y)(a) e_0(b, a) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, (4.2.1) denkleminin yukarıda tanımlanan iç çarpıma göre öz eşlenik olduğu sonucuna varılır. Bu, x ve y fonksiyonlarının a ve b noktalarında öz eşlenik sınır koşullarını sağlaması durumunda $\langle x, Ly \rangle = \langle y, Lx \rangle$ eşitliğinin sağlandığı veya $p(b)W(x, y)(b) = p(a)W(x, y)(a)e_0(b, a)$ eşitliğinin geçerli olduğu anlamına gelir.

Bir sonraki tanımda yer verilecek olan Cauchy fonksiyonu kavramı öz eşlenik denklemler teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Tanım 4.2.3 Bir $x: [t_0, \infty) \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ele alınsın. Bu x fonksiyonunun sabitlenmiş her $s \in [t_0, \infty)$ için

$$Lx(\cdot, s) = 0, \quad x(s, s) = 0, \quad D^\alpha x(s, s) = \frac{1}{p(s)}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olması durumunda, bu fonksiyona (4.2.1) denkleminin bir Cauchy fonksiyonu adı verilir.

Aşağıdaki teorem (4.2.1) denkleminin Cauchy fonksiyonunun biçimi ile ilgilidir.

Teorem 4.2.5: u ve v fonksiyonlarının (4.2.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olması durumunda, (4.2.1) denkleminin $x(t, s)$ Cauchy fonksiyonu her $t, s \in [t_0, \infty)$ için

$$x(t, s) = \frac{u(s)v(t) - v(s)u(t)}{p(s)[u(s)D^\alpha v(s) - v(s)D^\alpha u(s)]} \quad (4.2.9)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

İspat. $y(t, s)$ fonksiyonu (4.2.9) eşitliğinin sağ tarafı ile tanımlansın. O halde, sabitlenmiş her s sayısı için, $y(\cdot, s)$ fonksiyonu u ve v fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonudur ve dolayısıyla (4.2.1) denkleminin bir çözümüdür. $y(s, s) = 0$ eşitliğinin sağlandığı kolayca

görülür. Ayrıca $D^\alpha y(t, s) = \frac{u(s)D^\alpha v(t) - v(s)D^\alpha u(t)}{p(s)[u(s)D^\alpha v(s) - v(s)D^\alpha u(s)]}$ yazılabilir. (4.2.6) ile verilen

Wronskiyen tanımı kullanılırsa

$$D^\alpha y(s, s) = \frac{W(u, v)(s)}{p(s)W(u, v)(s)} = \frac{1}{p(s)}$$

tekliliğinden (Teorem 4.2.1) sabitlenmiş her s sayısı için $x(t, s) = y(t, s)$ elde edilir. Bu istenen sonuçtur. Böylece ispat biter. \square

Teorem 4.2.6 f fonksiyonu $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $a \in [t_0, \infty)$ olsun. $x(t, s)$ fonksiyonunun (4.2.1) denkleminin bir Cauchy fonksiyonu olduğu kabul edilsin. O halde,

$$x(t) = \int_a^t x(t, s) f(s) d_\alpha s, t \in [t_0, \infty) \text{ ifadesi } Lx = f(t), \quad x(a) = 0, \quad D^\alpha x(a) = 0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

İspat. $x(t, s)$ fonksiyonu (4.2.1) denkleminin bir Cauchy fonksiyonu olsun ve $x(t) = \int_a^t x(t, s) f(s) d_\alpha s$ olarak alınsın. Buradan $x(a) = 0$ koşulunun sağlandığı görülür. Son eşitliğin her iki yanından uyumlu türev alınır ve Lemma 3.2.3 (iv) kullanılırsa ve Cauchy fonksiyonunun $x(t, t) = 0$ eşitliğini sağladığı göz önünde bulundurulursa

$$D^\alpha x(t) = x(t, t) f(t) + \int_a^t D^\alpha [x(t, s)] f(s) d_\alpha s = \int_a^t D^\alpha [x(t, s)] f(s) d_\alpha s \text{ eşitliği yazılabilir.}$$

Burada integralin içindeki D^α 'nın ilk değişken olan t ye göre alınan türev olduğunu ve dolayısıyla $D^\alpha x(a) = 0$ eşitliğinin sağlandığını belirtmekte yarar vardır.

$$p(t)(D^\alpha x(t) - \kappa_1(\alpha, t)x(t)) = \int_a^t p(t)(D^\alpha x(t, s) - \kappa_1(\alpha, t)x(t, s)) f(s) d_\alpha s \text{ eşitliğinden ve}$$

Lemma 3.2.3 (iv) den, Cauchy fonksiyonunun özellikleri de kullanılarak

$$D^\alpha [p(t)(D^\alpha x(t) - \kappa_1(a, t)x(t))] = p(t)(D^\alpha x(t, t) - \kappa_1(\alpha, t)x(t, t) f(t)) \\ + \int_a^t D^\alpha [p(t)(D^\alpha x(t, s) - \kappa_1(\alpha, t)x(t, s))] f(s) d_\alpha s$$

$$= f(t) + \int_a^t (-q(t)x(t,s))f(s)d_\alpha s = f(t) - q(t)x(t)$$

yazılabilir. Sonuç olarak $Lx(t) = f(t)$ elde edilir ve ispat biter. \square

Aşağıda verilen sonuç bu teoremin direkt bir sonucudur.

Sonuç 4.2.3 f fonksiyonu $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $a \in [t_0, \infty)$ olsun.

$x(t, s)$ nin (4.2.1) denkleminin Cauchy fonksiyonu olduğu kabul edilsin. O halde

$x(t) = u(t) + \int_a^t x(t, s)f(s)d_\alpha s, t \in [t_0, \infty)$ fonksiyonu, A ve B keyfi sabitler ve u fonksiyonu

$Lu = 0, u(a) = A, D^\alpha u(a) = B$ başlangıç değer probleminin bir çözümü olmak üzere

$Lx = f(t), x(a) = A, D^\alpha x(a) = B$ başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.2.7 (4.2.1) denkleminin x Cauchy fonksiyonu her $t \geq s$ için $x(t, s) \geq 0$ eşitsizliğini

sağlasın. Eğer $u, v \in D$ fonksiyonları her $t \in [a, b]$ için

$$Lu(t) \geq Lv(t), \quad u(a) = v(a), \quad D^\alpha u(a) = D^\alpha v(a)$$

koşullarını sağlıyorsa, o halde her $t \in [a, b]$ için $u(t) \geq v(t)$ olur.

İspat. u ve v fonksiyonlarının teoremin ifadesinde verilen koşulları sağladığı varsayılın ve tüm $t \in [a, b]$, için $\omega(t) := u(t) - v(t)$ olarak alınsın. O halde, her $t \in [a, b]$ için

$h(t) := L\omega(t) = Lu(t) - Lv(t) \geq 0$ eşitsizliği sağlanır ve sonuç olarak ω fonksiyonu

$L\omega(t) = h(t), \quad \omega(a) = D^\alpha \omega(a) = 0$ başlangıç değer probleminin bir çözümü olur.

Teorem 4.2.6 dan $\omega(t) = \int_a^t x(t, s)h(s)d_\alpha s \geq 0$ -yazılabilir ve böylece ispat biter. \square

4.2.1 Bir Özel Durum

p ve q bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun ve her $t \in I$ için $p(t) > 0$ eşitsizliği sağlansın. Bu alt bölümde, ikinci mertebeden uyumlu öz eşlenik homojen $Lx = 0$ diferansiyel denklemi ve h sürekli bir fonksiyon olmak üzere homojen olmayan

$$Lx = h, \quad Lx(t) := D^\alpha [pD^\alpha x](t) + q(t)x(t) \quad (4.2.1.1)$$

denklemi ele alınacaktır, burada $t \in I$ ve $\alpha \in (0, 1]$ dir ve ele alınan L operatörü alt bölüm 4.2 de ele alınan operatörden daha basit ve daha kullanışlıdır.

Tanım 4.2.1.1: $D^\alpha x$ ve $D^\alpha [pD^\alpha x]$ fonksiyonları I aralığında sürekli olacak biçimdeki I aralığında tüm sürekli x fonksiyonlarından oluşan küme \mathbb{D} ile gösterilsin. Bu durumda L operatörü (4.2.1.1) ile verilen operatör olmak üzere her $t \in I$ için $Lx(t) = 0$ eşitliğini sağlayan $x \in \mathbb{D}$ fonksiyonuna $Lx = 0$ homojen denkleminin bir çözümüdür denir.

Aşağıdaki teorem, a fonksiyonu I aralığı üzerinde sıfırdan farklı a, b, c ve g fonksiyonları aynı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar iken

$$a(t)D^\alpha D^\alpha x(t) + b(t)D^\alpha x(t) + c(t)x(t) = g(t)$$

biçimindeki denklemin hangi şartlar altında (4.2.1.1) öz eşlenik biçiminde yazılabileceğine cevap arayan bir teoremdir.

Teorem 4.2.1.1: κ_0 ve κ_1 fonksiyonlarının (3.2.3) eşitliklerini sağladığı kabul edilsin ve $t_0 \in I$ olsun. Eğer I aralığında $\alpha \neq 0$ ise ve $a, b, c, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar ise, o halde

$$a(t)D^\alpha D^\alpha x + b(t)D^\alpha x + c(t)x = g(t), \quad t \in I \quad (4.2.1.2)$$

uyumlu diferansiyel denklemi $Lx = h$ öz eşlenik biçiminde yazılabilir, burada $t \in I$ için

$$p(t) = e_{\left(\frac{b+\kappa_1}{a}\right)}(t, t_0), \quad q(t) = p(t)c(t)/a(t) \quad (4.2.1.3)$$

ve $h = gp/a$ ile tanımlıdır.

İspat: x fonksiyonunun (4.2.1.2) ile verilen denklemin bir çözümü olduğu varsayalım. (4.2.1.3) den kolayca

$$pb/a = D^\alpha p - \kappa_1 p \quad (4.2.1.4)$$

olduğu görülür. (4.2.1.2) nin her iki tarafı p/a ile çarpılarak ve (4.2.1.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} h = \frac{gp}{a} &= pD^\alpha D^\alpha x + \frac{pb}{a} D^\alpha x + \frac{pc}{a} x \\ &= pD^\alpha [D^\alpha x] + (D^\alpha p - \kappa_1 p) D^\alpha x + qx = D^\alpha [pD^\alpha x] + qx = Lx \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat biter. \square

Bir sonraki teorem, homojen olmayan öz eşlenik $Lx = h(t)$ denklemi ile oluşturulan başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgilidir.

Teorem 4.2.1.2: p, q ve h fonksiyonları I aralığında sürekli fonksiyonlar olsun, $p(t) \neq 0$ olduğu kabul edilsin ve $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ sayıları verilsin. O halde, $Lx = h(t)$, $x(t_0) = x_0$, $D^\alpha x(t_0) = x_1$ başlangıç değer probleminin I aralığında tek bir çözümü vardır.

İspat: $x \in \mathbb{D}$ fonksiyonu $Lx = h$ denkleminin bir çözümü olsun ve $y := pD^\alpha x$, $D^\alpha x = y/p$ olarak tanımlansın. x fonksiyonunun (4.2.1.1) ile tanımlanan $Lx = h$ denkleminin bir çözümü olduğu göz önünde bulundurularak $D^\alpha y = -qx + h$ yazılabilir. Dolayısıyla, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/p \\ -q & 0 \end{bmatrix}$,

$b = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$ olmak üzere $z := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü $D^\alpha z = Az + b$ vektör denkleminin bir çözümü olur. D^α

nın (3.2.4) ile verilen tanımından $z' = \begin{bmatrix} -\frac{\kappa_1}{\kappa_0} & \frac{1}{\kappa_0 p} \\ -q & -\frac{\kappa_1}{\kappa_0} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ \kappa_0 \end{bmatrix}$ yazılabilir ve tüm fonksiyonlar

sürekli olduğundan istenen sonuç $\alpha = 1$ standart durumdakine benzer biçimde elde edilir (bkz.[26, Teorem5.4]).

Tanım 4.2.1.2: $\kappa_0, \kappa_1 : [0,1] \times I \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsun ve (3.2.3) ile verilen eşitlikleri sağlasın. Eğer $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları I aralığında türevlenebilir fonksiyonlarsa, bu fonksiyonların uyumlu Wronskiyeni her $t \in I$ için

$$W(x, y)(t) = \det \begin{pmatrix} x(y) & y(t) \\ D^\alpha x(t) & D^\alpha y(t) \end{pmatrix} \quad (4.2.1.5)$$

ile tanımlıdır.

Teorem 4.2.1.3: L operatörü (4.2.1.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $x, y \in \mathbb{D}$ ise o halde $x(Ly) - y(Lx) = D^\alpha [pW(x, y)] + \kappa_1 pW(x, y)$, $t \in I$ eşitliği ve buna denk olan

$$e_0(t, b) D^\alpha \left[\frac{pW(x, y)(t)}{e_0(t, b)} \right] = x(Ly) - y(Lx) \quad (4.2.1.6)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x, y \in \mathbb{D}$ fonksiyonları ele alınsın. Lemma 3.2.2 (iii) ile verilen iki fonksiyonun çarpımının uyumlu türevi kuralından I aralığı üzerinde

$$\begin{aligned} D^\alpha [pW(x, y)] &= D^\alpha [xpD^\alpha y - ypD^\alpha x] = xD^\alpha [pD^\alpha y] + p(D^\alpha x)(D^\alpha y) - \kappa_1 pxD^\alpha y \\ &\quad - yD^\alpha [pD^\alpha x] - p(D^\alpha x)(D^\alpha y) + \kappa_1 pyD^\alpha x \\ &= x(Ly) - y(Lx) - \kappa_1 pW(x, y) \end{aligned}$$

eşitliğinin doğru olduğu görülür. Ayrıca, iki fonksiyonun bölümünün uyumlu türevi kuralından, türevlenebilir her f fonksiyonu için $e_0(t, b) D^\alpha \left[\frac{f(t)}{e_0(t, b)} \right] = D^\alpha f + \kappa_1 f$ olduğu görülür ve

böylece (4.2.1.6) nın doğruluğu gösterilmiş olur. \square

Tanım 4.2.1.3: $\alpha \in (0,1]$ olsun ve e_0 fonksiyonu (3.2.6) daki gibi tanımlansın. Bu durumda $f, g \in C(I)$ fonksiyonlarının $[a,b] \subseteq I$ aralığı üzerindeki iç çarpımı

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)e_0^2(b,t)d_\alpha t, \quad d_\alpha t := \frac{dt}{\kappa_0(t)} \quad (4.2.1.7)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Sonuç 4.2.1.1: L operatörü (4.2.1.1) ile tanımlansın. Eğer $x, y \in \mathbb{D}$ ise, o halde

$$\langle x, Ly \rangle - \langle Ly, x \rangle = e_0^2(b,t)p(t)W(x,y)(t) \Big|_{t=a}^b \quad (4.2.1.8)$$

Green formülü sağlanır. Ayrıca, L operatörü (4.2.1.7) ile tanımlanan iç çarpıma göre öz eşleniktir, yani $x, y \in \mathbb{D}$ iken ve x, y fonksiyonları

$$e_0^2(b,t)p(t)W(x,y)(t) \Big|_{t=a}^b = 0 \quad (4.2.1.9)$$

öz eşlenik sınır koşullarını sağlarken $\langle Lx, y \rangle = \langle x, Ly \rangle$ özdeşliği gerçekleşir. Burada, W Tanım 4.2.1.2 ile verilen uyumlu Wronskiyene karşılık gelmektedir.

İspat: Teorem 4.2.1.3 de verilen (4.2.1.6) eşitliğinin her iki tarafı $e_0^2(b,t)$ ile çarpılıp a dan b

ye integre edilirse $\int_a^b D^\alpha \left[\frac{pW(x,y)(t)}{e_0(t,b)} \right] e_0(b,t)d_\alpha t = \langle x, Ly \rangle - \langle Ly, x \rangle$ eşitliğine ulaşılır. Teorem

3.2.3 den $\int_a^b D^\alpha \left[\frac{pW(x,y)(t)}{e_0(t,b)} \right] e_0(b,t)d_\alpha t = e_0(b,t) \frac{pW(x,y)(t)}{e_0(t,b)} \Big|_{t=a}^b$ yazılır ve böylece

(4.2.1.8) eşitliği ile verilen Green formülü sağlanır. Dolayısıyla $x, y \in \mathbb{D}$ fonksiyonlarının (4.2.1.9) öz eşlenik sınır koşullarını sağlamaları durumunda $\langle x, Ly \rangle = \langle Ly, x \rangle$ eşitliği elde edilir.

Böylece ispat biter. \square

Sonuç 4.2.1.2: x ve y fonksiyonları $Lx=0$ denkleminin I aralığındaki çözümleri ise, sabitlenmiş her $b \in I$ için, $t \in I$ olmak üzere $W(x, y)(t) = \frac{ce_0^2(t, b)}{p(t)}$ eşitliği sağlanır, burada $c = p(b)W(x, y)(b)$ bir sabit sayıdır.

İspat. (4.2.1.6) eşitliğinde x ve y fonksiyonların (4.2.1.1) denkleminin çözümleri olduğu göz önüne alınırsa eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşit olur: $e_0(t, b)D^\alpha \left[\frac{pW(x, y)(t)}{e_0(t, b)} \right] = 0$. Buradan

$D^\alpha \left[\frac{pW(x, y)(t)}{e_0(t, b)} \right] = 0$ elde edilir ve sonuç olarak $c = p(b)W(x, y)(b)$ bir sabit olmak üzere

$\frac{p(t)W(x, y)(t)}{e_0(t, b)} = ce_0(t, b)$ yazılabilir. \square

Sonuç 4.2.1.3: Eğer x ve y fonksiyonları I aralığında (4.2.1.1) denkleminin birer çözümü ise, o halde her $t \in I$ için $W(x, y)(t) = 0$ veya $W(x, y)(t) \neq 0$ durumlarından biri geçerlidir.

Teorem 4.2.1.4 (4.2.1.1) denkleminin I aralığı üzerinde tanımlı iki lineer bağımsız çözümü vardır ve (4.2.1.1) in I aralığı üzerindeki her çözümü bu iki çözümün lineer kombinasyonudur.

Teorem 4.2.1.5 $x \neq 0$ fonksiyonu I aralığı üzerinde $Lx=0$ denkleminin bir çözümü olsun.

Eğer $y \in \mathbb{D}$ fonksiyonu bazı $c \in \mathbb{R}$ sabitleri için $W(x, y)(t) = \frac{ce_0^2(t, b)}{p(t)}$ eşitliğini sağlıyorsa, o

halde y fonksiyonu da $Lx=0$ denkleminin bir çözümü olur.

Teorem 4.2.1.6 a, b, c fonksiyonları I aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ve $a(t) \neq 0$ olmak üzere

$$a(t)D^\alpha D^\alpha x(t) + b(t)D^\alpha x(t) + c(t)x(t) = 0 \quad (4.2.1.10)$$

denklemini göz önüne alalım. Eğer x ve y fonksiyonları bu denklemin çözümleri ise her $t, t_0 \in I$ için $W(x, y)(t) = W(x, y)(t_0)e_{(-b/a)-\kappa_1}(t, t_0)$ biçiminde verilen Liouville formülü sağlanır.

İspat. Eğer x ve y (4.2.1.10) denkleminin çözümleri ise, bu iki fonksiyonun Wronskiyeni için I aralığı üzerinde

$$\begin{aligned} D^\alpha W &= D^\alpha [xD^\alpha y - yD^\alpha x] = xD^\alpha D^\alpha y + (D^\alpha x)(D^\alpha y) - \kappa_1 xD^\alpha y - yD^\alpha D^\alpha x - (D^\alpha x)(D^\alpha y) \\ &+ \kappa_1 yD^\alpha x = x\left(\frac{-b}{a}D^\alpha y - \frac{c}{a}y\right) - y\left(\frac{-b}{a}D^\alpha x - \frac{c}{a}x\right) - \kappa_1 W = \frac{-b}{a}W - \kappa_1 W \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. (3.2.7) den $W(x, y)(t) = W(x, y)(t_0)e_{(-b/a)-\kappa_1}(t, t_0)$ elde edilir ve böylece ispat biter. \square

4.2.1.1 Cauchy Fonksiyonu ve Sabitlerin Değişimi Yöntemi

Bu bölümde, (4.2.1.1) ile verilen homojen olmayan öz eşlenik L diferansiyel denklemi için Cauchy fonksiyonu tanımlanacak ve sabitlerin değişimi formülü ifade edilecektir. Aşağıdaki teoremin ispatı D^α operatörünün lineerliğinin ve Teorem 4.2.1.2 nin direkt bir sonucudur.

Teorem 4.2.1.1.1: x_1 ve x_2 fonksiyonları uyumlu homojen $Lx = 0$ denkleminin I aralığındaki iki lineer bağımsız çözümü ve y homojen olmayan $Lx = h$ denkleminin I aralığındaki bir çözümü ise, o halde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = c_1x_1 + c_2x_2 + y$ fonksiyonu $Lx = h$ denkleminin genel çözümü olur.

Aşağıdaki tanıma alt bölüm 4.2 de yer verilmiş olmasına rağmen, burada da bütünlüğü bozmamak adına bir hatırlatma olarak yer alması uygundur.

Tanım 4.2.1.1.1: Bir $x: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sabitlenmiş her $s \in I$ için $Lx(\cdot, s) = 0$,

$$x(s, s) = 0, \quad D^\alpha x(s, s) = \frac{1}{p(s)}$$

(4.2.1.1) denkleminin bir Cauchy fonksiyonu denir.

Örnek 4.2.1.1.1: (4.2.1.1) denkleminde $q, h \equiv 0$ olarak alınsın 0 halde $D^\alpha [pD^\alpha x](t) = 0$

denkleminin Cauchy fonksiyonu her $t, s \in I$ için $x(t, s) = e_0(t, s) \int_s^t \frac{1}{p(\tau)} d_\alpha \tau$ ile verilir.

Aşağıda verilen teoremin ispatı Teorem 4.2.5 e benzer olarak yapılabilir.

Teorem 4.2.2.1.2: u ve v fonksiyonlarının (4.2.1.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olması durumunda, $Lx = 0$ denkleminin $x(t, s)$ Cauchy fonksiyonu

$$x(t, s) = \frac{u(s)v(t) - v(s)u(t)}{p(s)[u(s)D^\alpha v(s) - v(s)D^\alpha u(s)]} \quad (4.2.1.1.1)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Teorem 4.2.1.1.3 h fonksiyonu I aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $a \in I$ olsun. $x(t, s)$ fonksiyonunun $Lx = 0$ denkleminin bir Cauchy fonksiyonu olduğu kabul edilsin. O halde,

$$x(t) = \int_a^t x(t, s)h(s)d_\alpha s, \quad t \in I \quad (4.2.1.1.2)$$

fonksiyonu $Lx = h(t)$, $x(a) = 0$, $D^\alpha x(a) = 0$ başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

İspat: $x(t, s)$ fonksiyonu $Lx = 0$ denkleminin Cauchy fonksiyonu olsun ve

$x(t) = \int_a^t x(t, s)h(s)d_\alpha s$ olarak alınsın. Buradan $x(a) = 0$ koşulunun sağlandığı görülür. Son

eşitliğin her iki yanından uyumlu türev alınırsa ve Lemma 3.2.3 (iv) kullanılırsa, Cauchy fonksiyonunun $x(t, t) = 0$ eşitliğini sağladığı göz önünde bulundurularak

$$D^\alpha x(t) = x(t, t)h(t) + \int_a^t D^\alpha [x(t, s)]h(s)d_\alpha s = \int_a^t D^\alpha [x(t, s)]h(s)d_\alpha s \quad (4.2.1.1.3)$$

ifadesi yazılabilir. Burada integralin içindeki D^α ilk değişken olan t ye göre alınan türevdir ve dolayısıyla $D^\alpha x(a) = 0$ dır. (4.2.1.1.2) den ve (4.2.1.1.3) den

$pD^\alpha x(t) = \int_a^t p(t)D^\alpha [x(t, s)]h(s)d_\alpha s$ yazılabilir. Bu eşitlikten, tekrar Lemma 3.2.3 (iv)

kullanılarak ve Cauchy fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} D^\alpha [pD^\alpha x](t) &= p(t)D^\alpha [x(t,t)]h(t) + \int_a^t D^\alpha [p(t)D^\alpha x(t,s)]h(s)d_\alpha s = h(t) - \int_a^t q(t)x(t,s)h(s)d_\alpha s \\ &= h(t) - q(t)x(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $Lx(t) = h(t)$ olur ve böylece ispat biter. \square

4.2.1.2 Sınır Değer Problemleri ve Green Fonksiyonu

Bu alt bölümde (4.2.1.1) ile tanımlanan L operatörü ile ifade edilen genel bir sınır değer probleminin Green fonksiyonu elde edilecektir.

Teorem 4.2.1.2.1: Aşağıda verilen homojen sınır değer probleminin sadece aşikar çözümünün var olduğu kabul edilsin:

$$Lx = 0, \quad \xi x(a) - \beta D^\alpha x(a) = \gamma x(b) + \delta D^\alpha x(b) = 0. \quad (4.2.1.2.1)$$

0 halde, A ve B verilmiş sabitler ve h sürekli fonksiyon olmak üzere

$$Lx = h(t), \quad \xi x(a) - \beta D^\alpha x(a) = A, \quad \gamma x(b) + \delta D^\alpha x(b) = B \quad (4.2.1.2.2)$$

homojen olmayan sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

Örnek 4.2.1.2.1: $a < b$ olmak üzere

$$D^\alpha [pD^\alpha x](t) = 0, \quad D^\alpha x(a) = D^\alpha x(b) = 0 \quad (4.2.1.2.3)$$

sınır değer problemi ele alınsın. (4.2.1.2.3) sınır değer problemi (4.2.1.2.1) sınır değer probleminin $q(t) \equiv 0$, $\xi = \gamma = 0$, $\beta = \delta = 1$ durumundaki bir özel halidir. (4.2.1.2.3) sınır

değer probleminin bir genel çözümü $x(t) = c_1 e_0(t, a) + c_2 e_0(t, a) \int_a^t \frac{1}{p(\tau)} d_\alpha \tau$, $t \in [a, b]$

biçimindedir. Sınır koşullarından $D^\alpha x(a) = \frac{c_2}{p(a)} = 0$ ve $D^\alpha x(b) = \frac{c_2 e_0(b, a)}{p(b)} = 0$ yazılabilir.

Buradan $c_2 = 0$ elde edilir. O halde, (4.2.1.2.3) sınır değer probleminin genel çözümü herhangi bir $c_1 \in \mathbb{R}$ için $x(t) = c_1 e_0(t, a)$ biçiminde yazılır.

Teorem 4.2.1.2.2: (4.2.1.2.1) ile verilen sınır değer probleminin sadece aşikar çözümü olduğunu varsayalım. Sabitlenmiş her $s \in [a, b]$ için $x(t, s)$ fonksiyonu (4.2.1.1) ile tanımlanan $Lx = 0$ denkleminin Cauchy fonksiyonu olmak üzere $u(\cdot, s)$

$$Lu(\cdot, s) = 0, \quad \xi u(a, s) - \beta D^\alpha u(a, s) = 0, \quad \gamma u(b, s) + \delta D^\alpha u(b, s) = -\gamma x(b, s) - \delta D^\alpha x(b, s) \quad (4.2.1.2.4)$$

sınır değer probleminin tek çözümü olsun. $t, s \in [a, b]$ için $v(t, s) := u(t, s) + x(t, s)$ olmak üzere (4.2.1.2.1) sınır değer probleminin Green fonksiyonu $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(t, s) = \begin{cases} u(t, s): & a \leq t \leq s \leq b, \\ v(t, s): & a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Bu durumda sabitlenmiş her $s \in [a, b]$ için $v(\cdot, s)$ fonksiyonu $Lx = 0$ denkleminin bir çözümü olur ve (4.2.1.2.1) deki ikinci sınır koşulunu sağlar. Eğer h fonksiyonu

sürekliyse, o halde $x(t) := \int_a^b G(t, s)h(s)d_\alpha s$ fonksiyonu (4.2.1.2.2) sınır değer probleminin

$A = B = 0$ durumundaki çözümü olur.

İspat: $u(t, s)$ çözümünün varlığı ve tekliği Teorem 4.2.1.2.1 den söylenebilir. Sabitlenmiş her $s \in [a, b]$ için $u(\cdot, s)$ ve $x(\cdot, s)$ fonksiyonları $Lx = 0$ denkleminin birer çözümü olduğundan $v(\cdot, s) = u(\cdot, s) + x(\cdot, s)$ fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümü olur. (4.2.1.2.4) den $v(\cdot, s)$ fonksiyonunun (4.2.1.2.1) deki ikinci sınır koşulunu sağladığı söylenebilir ve

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_a^b G(t, s)h(s)d_\alpha s = \int_a^t G(t, s)h(s)d_\alpha s + \int_t^b G(t, s)h(s)d_\alpha s \\ &= \int_a^t v(t, s)h(s)d_\alpha s + \int_t^b u(t, s)h(s)d_\alpha s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^t [u(t,s) + x(t,s)]h(s) d_\alpha s + \int_t^b u(t,s)h(s) d_\alpha s \\
&= \int_a^b u(t,s)h(s) d_\alpha s + \int_a^t x(t,s)h(s) d_\alpha s \\
&= \int_a^b u(t,s)h(s) d_\alpha s + \omega(t)
\end{aligned}$$

yazılabilir, burada ω , Teorem 4.2.1.1.3 ile verilen sabitlerin değişimi formülünden,

$$L\omega = h(t), \quad \omega(a) = D^\alpha \omega(a) = 0 \quad (4.2.1.2.5)$$

başlangıç değeri probleminin çözümüdür. 0 halde $Lx(t) = \int_a^b Lu(t,s)h(s) d_\alpha s + L\omega(t) = L\omega(t) = h(t)$ yazılabilir. Dolayısıyla, x fonksiyonu, $Lx = h(t)$ homojen olmayan denkleminin bir çözümüdür. Şimdi x in (4.2.1.2.1) deki sınır koşullarını sağladığı gösterilsin:

$$\xi x(a) - \beta D^\alpha x(a) = \int_a^b [\xi u(a,s) - \beta D^\alpha u(a,s)]h(s) d_\alpha s = 0$$

eşitliğinin sağlandığı $u(\cdot, s)$ fonksiyonunun (4.2.1.2.1) deki ilk koşulu sağlamasından ve ω nın (4.2.1.2.5) i sağlamasından söylenebilir. O halde x fonksiyonu (4.2.1.2.1) deki ilk sınır koşulunu sağlar. x fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_a^b u(t,s)h(s) d_\alpha s + \int_a^t x(t,s)h(s) d_\alpha s = \int_a^b v(t,s)h(s) d_\alpha s - \int_t^b x(t,s)h(s) d_\alpha s \\
&= \int_a^b v(t,s)h(s) d_\alpha s + \int_b^t x(t,s)h(s) d_\alpha s \\
&= \int_a^b v(t,s)h(s) d_\alpha s + y(t)
\end{aligned}$$

yazılabilir, burada y , Teorem 4.2.1.1.3 ile verilen sabitlerin değişimi formülünden,

$$Ly = h(t), \quad y(b) = D^\alpha y(b) = 0 \quad (4.2.1.2.6)$$

probleminin çözümüdür. O halde, $\gamma x(b) + \delta D^\alpha x(b) = \int_a^b [\gamma v(b,s) + \delta D^\alpha v(b,s)] h(s) d_\alpha s = 0$ eşitliği $v(\cdot, s)$ fonksiyonu (4.2.1.2.1) deki ikinci koşulu ve y fonksiyonu (4.2.1.2.6) yı sağladığı için doğru olur ve x fonksiyonu da (4.2.1.2.1) deki ikinci sınır koşulunu sağlar. (4.2.1.2.2) ile verilen sınır değer probleminin çözümlerinin $A = B = 0$ durumundaki tekliği Teorem 4.2.1.2.1 den söylenebilir. \square

Yukarıdaki teoremin ispatındaki Cauchy fonksiyonu yaklaşımı yerine, aşağıdaki teoremden (4.2.1.2.1) sınır değer probleminin Green fonksiyonunu bulmak için başka bir yaklaşım kullanılacaktır.

Teorem 4.2.1.2.3: (4.2.1.2.1) sınır değer probleminin yalnızca aşıkâr çözümü olduğu kabul edilsin. ϕ fonksiyonu $L\phi = 0$, $\phi(a) = \beta$, $D^\alpha \phi(a) = \xi$ başlangıç değer probleminin ψ fonksiyonu ise $L\psi = 0$, $\psi(b) = \delta$, $D^\alpha \psi(b) = -\gamma$ başlangıç değer probleminin çözümü olsun. Bu durumda, (4.2.1.2.1) sınır değer probleminin Green fonksiyonu

$$G(t,s) = \frac{1}{p(s)W(\phi,\psi)(s)} \begin{cases} \phi(t)\psi(s) & : a \leq t \leq s \leq b \\ \psi(t)\phi(s) & : a \leq s \leq t \leq b \end{cases} \quad (4.2.1.2.7)$$

ile verilir, burada W (4.2.1.5) ile tanımlanan Wronskiyendir. Ayrıca, G fonksiyonu $e_0(s,t)G(t,s) = e_0(t,s)G(s,t)$ özelliğini sağlar.

İspat: ϕ ve ψ fonksiyonları teoremden verilen koşulları sağlasın. (4.2.1.2.7) ile tanımlanan G fonksiyonunun (4.2.1.2.1) sınır değer probleminin Green fonksiyonu olduğunu göstermek için Teorem 4.2.1.2.2 kullanılacaktır. Burada $\xi\phi(a) - \beta D^\alpha \phi(a) = \xi\beta - \beta\xi = 0$ ve $\gamma\psi(b) + \delta D^\alpha \psi(b) = \gamma\delta - \delta\gamma = 0$ eşitliklerinin sağlandığını not etmekte yarar vardır. Buradan ϕ ve ψ nin sırasıyla (4.2.1.2.1) deki birinci ve ikinci sınır koşulunu sağladığı söylenebilir.

$$t, s \in [a, b] \text{ için } u(t,s) := \frac{\phi(t)\psi(s)}{p(s)W(\phi,\psi)(s)} \text{ ve } v(t,s) := \frac{\psi(t)\phi(s)}{p(s)W(\phi,\psi)(s)} \text{ olduğu kabul}$$

edilsin. Sabitlenmiş her $s \in [a, b]$ için $u(\cdot, s)$ ve $v(\cdot, s)$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde $Lx = 0$ denkleminin birer çözümüdür. Ayrıca sabitlenmiş her $s \in [a, b]$ için

$$\xi u(a, s) - \beta D^\alpha u(a, s) = \frac{\psi(s)}{p(s)W(\phi, \psi)(s)} [\xi \phi(a) - \beta D^\alpha \phi(a)] = 0$$

ve

$$\gamma v(b, s) + \delta D^\alpha v(b, s) = \frac{\phi(s)}{p(s)W(\phi, \psi)(s)} [\gamma \psi(b) + \delta D^\alpha \psi(b)] = 0$$

eşitlikleri sağlar. Dolayısıyla, sabitlenmiş her $s \in [a, b]$ için, $u(\cdot, s)$ ve $v(\cdot, s)$ fonksiyonları sırasıyla (4.2.1.2.1) deki birinci ve ikinci sınır koşulunu sağlar.

$\chi(t, s) := v(t, s) - u(t, s) = \frac{\psi(t)\phi(s) - \phi(t)\psi(s)}{p(s)W(\phi, \psi)(s)}$ olsun. Buradan $\chi(\cdot, s)$ fonksiyonunun

$Lx = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu, $\chi(s, s) = 0$ eşitliğinin sağlandığı ve

$$D^\alpha \chi(s, s) = \frac{\phi(s)D^\alpha \psi(s) - \psi(s)D^\alpha \phi(s)}{p(s)W(\phi, \psi)(s)} = \frac{1}{p(s)}$$
 olduğu görülebilir. Sonuç olarak,

$\chi(t, s) = x(t, s)$ fonksiyonu $Lx = 0$ denkleminin Cauchy fonksiyonudur ve

$v(t, s) = u(t, s) + x(t, s)$ yazılabilir. $u(\cdot, s)$ fonksiyonunun (4.2.1.2.4) eşitliğini sağladığı

$$\gamma u(b, s) + \delta D^\alpha u(b, s) = \gamma v(b, s) + \delta D^\alpha v(b, s) = [\gamma x(b, s) + \delta D^\alpha x(b, s)] = -\gamma x(b, s) - \delta D^\alpha x(b, s)$$

eşitliğinden görülebilir. O halde Teorem 4.2.1.2.2 den, (4.2.1.2.7) ile tanımlanan $G(t, s)$

fonksiyonunun (4.2.1.2.1) sınır değer probleminin Green fonksiyonu olduğu söylenebilir. Sonuç

4.2.1.2 den, G nin $e_0(t, s)G(s, t) = e_0(t, s)G(s, t)$, $s, t \in [a, b]$ koşulunu sağladığı görülür.

Böylece ispat biter. \square

4.3 Sturm-Liouville Problemleri

Bu alt bölümde,

$$D^\alpha [p(D^\alpha x - \kappa_1(\alpha, \cdot)x)](t) + (\lambda r(t) + q(t))x(t) = 0 \quad (4.3.1)$$

Sturm-Liouville diferansiyel denklemini ele alınacaktır. Bu alt bölüm boyunca, p , q ve r fonksiyonlarının reel ve $[t_0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar oldukları varsayılacaktır ve tüm $t \in [t_0, \infty)$ için $p(t) \neq 0$ olduğu ve $r(t) \geq 0$ fonksiyonunun özdeş olarak sıfıra eşit olmadığı kabul edilecektir. (4.2.1) denklemi yardımıyla (4.3.1) denklemi $Lx = -\lambda r(t)x$ biçiminde ifade edilebilir. Bu alt bölümde,

$$Lx = -\lambda r(t)x, \quad \xi x(a) - \beta D^\alpha x(a) = 0, \quad \gamma x(b) + \delta D^\alpha x(b) = 0 \quad (4.3.2)$$

Sturm-Liouville probleminin özellikleri incelenecektir, burada ξ , β , γ , δ reel sabitlerinin $\xi^2 + \beta^2 > 0$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$ eşitsizliklerini sağladıkları varsayılmaktadır.

Tanım 4.3.1: λ_0 sayısının (4.3.2) Sturm Liouville probleminin bir öz değeri olması için gerek ve yeter koşul, (4.3.2) probleminin bu $\lambda = \lambda_0$ sayısına karşılık gelen aşık olmayan (özdeş olarak sıfırdan farklı) bir x_0 çözümünün olmasıdır. Bu x_0 çözümüne λ_0 öz değerine karşılık gelen öz fonksiyon denir.

Örnek 4.3.1 $\kappa_0, \kappa_1 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olsun ve (3.2.3) ile verilen eşitlikleri sağlasın. $\kappa_1(\alpha, t) \equiv \kappa_1(\alpha)$ bir reel sabit olarak alınsın. (4.3.2) de $p(t) \equiv 1$, $\ell > 0$ olduğu kabul edilsin ve $2\xi = \kappa_1(a)$ olsun. Bu şartlar altında

$$D^\alpha D^\alpha x(t) - 2\xi D^\alpha x(t) + \lambda x(t) = 0, \quad x(0) = x(\ell) = 0$$

Sturm-Liouville probleminin öz değer ve öz fonksiyonları araştırılsın. Teorem 4.1.1 den, $m = \xi \pm \sqrt{\xi^2 - \lambda}$, $m^2 - 2\xi m + \lambda = 0$ karakteristik denkleminin bir kökü olmak üzere, yukarıda ele alınan Sturm-Liouville probleminin çözümlerinin $e_m(t, 0)$ biçiminde olduğu söylenebilir.

Eğer $\lambda < \xi^2$ ise, $x(t) = c_1 e_{\xi + \sqrt{\xi^2 - \lambda}}(t, 0) + c_2 e_{\xi - \sqrt{\xi^2 - \lambda}}(t, 0)$ elde edilir. 0 ve ℓ noktalarındaki sınır koşulları $c_1 = c_2 = 0$ olmasını gerektireceğinden $\lambda < \xi^2$ durumunda ele alınan problemin öz değeri yoktur.

Eğer $\lambda = \xi^2$ ise, $x(t) = c_1 e_\xi(t, 0) + c_2 e_\xi(t, 0) \int_0^t 1 d_\alpha s$ bulunur, fakat bu durumda da sınır

koşulları $c_1 = c_2 = 0$ olmasını gerektirir, dolayısıyla problemin öz değeri bulunamaz.

Eğer $\lambda > \xi^2$ ise, o halde

$x(t) = c_1 e_\xi(t, 0) \cos\left(\int_0^t \sqrt{\lambda - \xi^2} d_\alpha s\right) + c_2 e_\xi(t, 0) \sin\left(\int_0^t \sqrt{\lambda - \xi^2} d_\alpha s\right)$ bulunur. $x(0) = 0$ koşulu

$c_1 = 0$ olmasını gerektirirken, $x(\ell) = 0$ koşulundan $\int_0^\ell \sqrt{\lambda - \xi^2} d_\alpha s = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ elde edilir.

Buradan, problemin öz değerleri $\lambda = \lambda_n = \xi^2 + \left(\frac{n\pi}{\int_0^\ell 1 d_\alpha s}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ ve bu öz değerlere karşılık

gelen öz fonksiyonlar ise $x(t) = x_n(t) = e_\xi(t, 0) \sin\left(\frac{n\pi \int_0^t 1 d_\alpha s}{\int_0^\ell 1 d_\alpha s}\right)$ olarak bulunur. $\alpha = 1$ ($\xi = 0$)

durumunda öz değer ve öz fonksiyon çifti bilinen $(\lambda_n, x_n) = \left((n\pi/\ell)^2, \sin(n\pi t/\ell)\right)$ çiftine dönüşür.

Teorem 4.3.1: (4.3.2) Sturm-Liouville probleminin tüm öz değerleri reel ve basittir. Her öz değere reel bir öz fonksiyon karşılık gelir. (4.3.2) probleminin farklı öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar $[a, b]$ aralığı üzerinde r ağırlık fonksiyonuna ve e_0 a göre diktir, yani x_1 ve x_2 farklı öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonları göstermek üzere

$$\int_a^b x_1(t)x_2(t)r(t)e_0(b,t)d_\alpha t = 0 \text{ eşitliği sağlanır.}$$

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde, 2015 yılında D. R. Anderson ve D. J. Ulness tarafından tanımlanan ve “uyumlu türev operatörü” olarak isimlendirilen operatör yardımıyla tanımlanan ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem ele alınmıştır. Bu denklem ile oluşturulan başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılmış, daha sonra ilgili denklemin hangi koşullar altında özeşlenik biçimde yazılabileceğini sorusunun cevabı aranmıştır. Ayrıca uyumlu türev yardımıyla ifade edilen bir Sturm-Liouville problemi ele alınmış ve bu problemin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelendikten sonra ikinci mertebeden uyumlu bir diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile oluşturulan bir sınır değer problemi ele alınmış ve bu problemin Green fonksiyonu elde edilmiştir. Bu tez çalışmasından ifade edilen sonuçlar matematikçiler için yardımcı kaynak rolü oynayacak niteliktedir.

5.2 Öneriler

Bu çalışmanın devamı olarak uyumlu diferansiyel denklemlerin farklı sınır koşullarıyla ele alınmasıyla oluşturulan farklı sınır değer problemlerinin özellikleri incelenerek literatüre katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Samko, S.G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I.(1993). *Fractional integrals and derivatives, theory and applications*. Gordon and Breach: Yverdon, Switzerland.
- [2] Khalil, R., Horani, M. Al., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- [3] Anderson, D. R., Ulness, D. J. (2015). Newly defined conformable derivatives. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 10 (2), 109-137.
- [4] Katugampola, U. N. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 6 (4), 1-15.
- [5] Anderson, D. R., Avery, R. I. (2015). Fractional order boundary value problem with Sturm-Liouville boundary conditions. *Electron. J. Differential Equations*, Pages No. 29, 10.
- [6] Pospisil, M., Skripkova, L. P. (2016). Sturm's theorems for conformable fractional differential equations. *Math. Commun.*, 21, 273-281.
- [7] Al-Refai, M., Abdeljawad, T. (2017). Fundamental results of conformable Sturm-Liouville eigenvalue problems. *Complexity*, 2017, Article ID 3720471, 7 pages, doi:10.1155/2017/3720471
- [8] Çetinkaya, F. A. (2018). Uyumlu kesirli bir dalga denklemi üzerine. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22(3), 1110-1113, doi:10.19113/sdufenbed.430296
- [9] Silva, F. S., Moreina, D. M., Moret, M. A. (2018). Conformable Laplace transform of fractional differential equations. *Axioms*, 7(55), doi:10.3390/axioms7030055
- [10] Anderson, D. R., Camrud, E., Ulness, D. J. (2019). On nature of the conformable derivative and its applications to physics. *J. Fract. Calc. Appl.*, 10 (2), 92-135.
- [11] Allahverdiev, B. P., Tuna, H. (2020). One-dimensional conformable fractional Dirac system. *Bol. Soc. Mat. Mex* (3). 26 (1), 121-146.
- [12] Mortazaasl, H., Akbarfam, A. J. (2019). Trace formula and inverse nodal problem for a conformable fractional Sturm-Liouville problem, *Inverse Problems in Science and Engineering*, doi:10.1080/17415977.2019.1615909
- [13] Keskin, B. (2020). Inverse problems for one dimensional conformable fractional Dirac type integro differential system, *Inverse Problems*, in press, doi:10.1088/1361-6420/ab7e03
- [14] Ulu Akdaş, F. (2019). *Uyumlu kesirli türev ve integral uygulamaları*. Yayınlanmış yüksek lisans tezi, Uşak Üniversitesi, Uşak.
- [15] Bozkurt, M. V. (2020). *İki değişkenli fonksiyonlar için konformal türev ve integraller*. Yayınlanmış yüksek lisans tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş.
- [16] Sarıkaya, M. Z., Akkurt, A., Budak, H., Türkay, M. E., Yıldırım, H. (2020). On some special functions for conformable fractional integrals. *Konuralp Journal of Mathematics*, 8 (3), 376-383.

- [17] Ercan, A., Baş, E. (2021). Regular spectral problem for conformable Dirac system with simulation analysis. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*.
- [18] Ceylan, Z. (2021). Spectral properties of a conformable boundary value problem on time scales. *Journal of Universal Mathematics*, 4 (1), 73-80.
- [19] Ceylan, Z. (2020). *Zaman skalasında ikinci mertebeden uyumlu dinamik bir operatörün spektral özellikleri*. Yayımlanmış yüksek lisans tezi, Mersin Üniversitesi, Mersin.
- [20] Ortigueira, M. D., Machado, J. A. T. (2015). What is a fractional derivative? *J. Comput. Phys.*, 293, 4-13.
- [21] Jarad, F., Uğurlu, E., Abdeljawad, T., Baleanu, D. (2017). On a new class of fractional operators. *Adv. Difference Equ.*, Paper No: 447, 16 pages.
- [22] Usta, F. (2016). A mesh-free technique of numerical solution of newly defined conformable differential equations, *Konuralp J. Math.*, 4 (2), 149-157.
- [23] Anderson, D. R. (2016) Second order self adjoint differenatial equations using a proportional derivative, *arXiv preprint*, arXiv:1607.07354
- [24] Jarad, F., Abdeljawad, T., Alzabut, J. (2017). Generalized fractional derivatives generated by a class of local proportional derivatives, *Eur. Phys. J. Special Topics*, 226, 3457-3471.
- [25] Bayour, B. Hammoudi, A., Torres, D. F. M. (2018). A truly conformable calculus on time scales. *Glob. Stoch. Anal.*, 5(1), 1-14.
- [26] Alzabut, J., Sudsutad, W., Kayar, Z., Baghani, H. (2019). A new Gronwall-Bellman inequality in frame of generalized proportional derivative, *Mathematics*, 7, 747, 15 pages.
- [27] Abbas, M. I, Ragusa, M. A. (2021). On the hybrid fractional differential equations with fractional proportional derivatives of a function with respect to a certain function, *Symmetry*, 13, 264, 16 pages.
- [28] Açıy, B., İnç, M., Chu, Y. M., Almohsen, B. (2021). Modelling of pressure-volume controlled artificial respiration with local derivatives, *Advances in Difference Equations*, Article Number 49, 21 pages.
- [29] Çetinkaya, F. A., Cuchta, T. (2020). Sturm-Liouville and Ricatti conformable dynamic equations. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 15 (1), 1-13.
- [30] Kelley, W. G., Peterson, A. C. (2004). *The theory of differential equations: classical and qualitative*. Prentice Hall, New Jersey.