T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYUMLU TÜREV VE EĞRİLER TEORİSİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Ravza BARIŞ

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

HAZİRAN 2021

T.C.
Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

UYUMLU TÜREV VE EĞRİLER TEORİSİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Tez Yazarı
Ravza BARIŞ

Danışman
Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

HAZİRAN 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Uyumlu Türev ve Eğriler Teorisinin Karakterizasyonları
Yazarı:	Ravza BARIŞ
İlk Teslim Tarihi:	17.05.2021
Savunma Tarihi:	21.06.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman:	Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ALTIN Bingöl Üniversitesi, TBMYO Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ..../......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Uyumlu Türev ve Eğriler Teorisinin Karakterizasyonları” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

21.06.2021

Ravza BARIŞ

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın amacı, klasik türevle inşa edilen eğrilerin karakterizasyonlarını uyumlu türevle ifade edilen Frenet formülleri için ifade ve ispat etmektir.

Tez konusunun belirlenmesinden tezin son aşamasına gelene kadar bana yol gösteren, destek ve yardımlarını esirgemeyen, tecrübeleriyle bana ışık tutan, olumlu ve yapıcı eleştirileriyle beni yönlendiren saygı değer hocam **Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ**' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca seminerlerime katılarak bana farklı bakış açıları katarak çalışmalarıma yön veren **Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN'** a da teşekkür ederim.

Son olarak eğitim hayatım boyunca her konuda bana destek olan aileme sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ravza BARIŞ
ELAZIĞ, 2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Uyumlu Türev ve Eğriler Teorisinin Karakterizasyonları

Ravza BARIŞ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Haziran 2021 , Sayfa: vi + 29

Bu çalışmada : uyumlu eğri için elde edilen $\alpha -$ frenet formülleriyle eğilim çizgilerinin (helislerin) karakterizasyonları elde edilmiştir. . $\beta(s)$ üzerinde elde edilen vektör alanlarının $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ ortogonal sistemine $\alpha -$ Frenet çatısı denir.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu Eğri , $\alpha -$Frenet Formülleri, Helis

ABSTRACT

Characterizations of Conformable Derivatives and Curves Theory

Ravza BARIŞ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
Fen Edebiyat Fakültesi
June 2021, Pages: vi + 29

In this study: The characterizations of trend lines(helices) are obtained with $\alpha -$Frenet formulas obtained for conformable curves. The $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ orthogonal system of vector fields obtained on β(s) is called the $\alpha -$Frenet frame.

Keywords: Conformable Curves, α -Frenet Formulas, Helix

SİMGELER

Simgeler

B	: Eğrinin binormal vektör alanı
$D^{\alpha}f(a)$	: $\alpha -$türev
$\{E_1, E_2, E_3\}$	: $\alpha -$frenet çatısı
κ	: Eğrilik
N	: Eğrinin asli normal vektör alanı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cismi
$s(t)$	: Yay uzunluğu
T	: Eğrinin birim vektör alanı
$T_{\alpha}(f)(x)$	: α -uyumlu türevi
τ	: Torsiyon
V_p	: Tanjant vektör
γ	: Uyumlu eğri

1. GİRİŞ

Geometrinin en temel konusu eğriler teorisidir. Eğriler teorisi türev kavramıyla çeşitli geometrik yapıların inşasına imkân sağlamıştır. Özellikle türev kavramı yardımıyla diferensiyel geometride Serret-Frenet formülleri ifade ve ispat edilmiştir. Bu formüller sayesinde üç boyutlu uzayda eğrinin birinci eğriliği κ (eğriliği) ve ikinci eğriliği τ (burulması) hesaplanabilmektedir. Eğrinin birinci eğriliği (eğriliği) ve ikinci eğriliği (burulması) arasındaki

$$\frac{\kappa}{\tau} = sabit$$

bağıntısı o eğrinin **genel helis** veya (eğilim çizgisi) olduğunu ve eğrinin birinci eğriliği κ (eğriliği) ve ikinci eğriliği τ (burulması) nin sabit olması **dairesel helis** olduğunu ifade etmektedir [1]. Helis eğrileri de gerek matematik ve gerekse birçok alanda oldukça fazla kullanım alanına sahiptir. Ayrıca helisler üzerine oldukça popüler teoriler yapılmıştır ve yapılmaya da devam etmektedir [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Tüm bunlara ilaveten Frenet formülleri Öklid uzayında, Minkowski (Lorentz uzayında), Galilean - Pseudo Galilean ve simplektik uzaylarda ifade ve ispat edilmiştir. Bu uzaylarda da helis eğrilerinin yapısı oluşturularak teoriler üretilmeye çalışılmaktadır [9, 10, 11,12, 13].

Tüm bu uzaylarda Frenet formülleri klasik (bu gün herkes tarafından kullanılan ve lise müfredatında dahi anlatılan) türev kullanılarak elde edilmiştir. Oysa günümüzde bu türevlere ilaveten Fractional türev, Caputo türev, Riemann-Liouville türevler tanımlanarak matematik başta olmak üzere çeşitli bilim alanlarında farklı teorilerin ortaya çıkmasına vesile olmuştur. O halde bu türevlerden herhangi biri tarafından tanımlanan Frenet Formülleri ifade ve ispat edilmişmidir? Eğer tanımlanmışsa geometrinin temel teoremleri ispatlanmışmıdır? sorularına cevap aranılırken U. Gözütok, H.A. Çoban ve Y Sağıroğlu nun **Frenet Frame with Respect to Conformable Derivative** [14] çalışması literatürde karşımıza çıkmıştır. Bu çalışmada: U. Gözütok, H.A. Çoban ve Y Sağıroğlu eğrilerin klasik diferansiyel geometrisini, uyumlu kesirli türev açısından incelemiştir. Bu nedenle uyumlu bir eğri tanımlanmış ve $\alpha -$ Frenet formülleri verilmiştir. $\alpha = 1$ ise, uyumlu eğriler teorisi, klasik eğriler teorisine denk geldiği görülmüştür. Uyumlu bir eğri, klasik bir eğrinin doğal genellemesi olduğu sonucuna varılmıştır. Bu problem üzerinde çalışıldığında, Caputo ve Riemann-Liouville dâhil olmak üzere diğer kesirli türevlerle karşılaştırıldığında çarpım kuralı ve zincir kural gibi uygun özellikleri için uyumlu türevler kullanılmıştır. Böylece uyumlu eğrilerin yerel teorisinin temel teoremi verilip, α türevlenebilir $\kappa > 0$ ve τ fonksiyonlar için, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler sistemi oluşturulup, daha sonra bu sistemin çözümü ile uyumlu bir eğri elde edilmiştir.

Bu çalışmada U. Gözütok, H.A. Çoban ve Y Sağıroğlu [14] tarafından elde edilen Uyumlu türevli Frenet formülleri kullanılarak Öklid uzayında, Minkowski (Lorentz uzayında), Galilean - Pseudo Galilean ve simplektik uzaylarında [9, 10, 11,12, 13] var olan teoriler incelenerek bu teorilerin varlığına bakılmıştır. Özellikle helis eğrileri için önemli teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2. 1. $\mathbb{R}^n$ standart reel afin uzay olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de bir

$$\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

iç çarpımı $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$\langle X \, , Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına $n-$boyutlu standart Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir [15].

Tanım 2. 2. $d: E^n x E^n \to \mathbb{R}$

$$(X, Y) \to d(X, Y) = \|XY\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(X, Y)$ reel sayısına da $X, Y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [15].

Tanım 2. 3. V, $n-$ boyutlu reel iç çarpım uzayı ve birleştiği Öklid uzayı E^n olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in E^n$ olmak üzere $\{P_0P_1, P_0P_2 \dots, P_0P_n\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine E^n de bir Öklid çatı veya dik çatı denir. Bu çatı yardımıyla tanımlanan $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ afin koordinat sistemine de Öklid koordinat sistemi veya dik koordinat sistemi denir. Bu sistemdeki

$$x_i: E^n \to \mathbb{R} \, , \;\; 1 \le i \le n$$

koordinat fonksiyonlarına da Öklid Koordinat Fonksiyonları denir [15].

Tanım 2. 4. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık ve

$$\alpha: I \to E^n$$

$$t \to \alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $\alpha(I) \subset E^n$ alt cümlesine E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametresi denir [15].

Tanım 2. 5. $I \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \to \mathbb{R}$$
$$t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu, $\|\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{t})\|$ reel sayısına da M nin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir. Eğer
$\|\alpha'(t)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri ve bu halde $t \in I$ parametresine de eğrinin yay-parametresi denir [15].

Tanım 2. 6. M, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve $\psi = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{(r)})$ sistemi lineer bağımsız olsun. $\alpha^k \in Sp\{\psi\}$ ve $k > r$ olmak üzere ψ lineer bağımsız sisteminden elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r ayaklı alanı, $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ **ye** $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı ve her bir V_i $(1 \leq i \leq r)$ vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir [15].

Tanım 2. 7. M, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen birim hızlı bir eğri ve $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ de $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı olsun. Bu

$$k_i: I \to \mathbb{R}$$
$$s \to k_i(s) = \langle V_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $\forall s \in I$ için $\boldsymbol{k_i(s)}$ reel sayısına da M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki i -yinci eğriliği denir [15].

Tanım 2. 8. M, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen yay parametreli bir eğri olsun. M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki i -yinci eğriliği $\boldsymbol{k_i(s)}$ **ve** Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} (V_1)' &= \kappa_1(s)\, V_2(s) \\ (V_i)' &= -\kappa_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + \kappa_{i+1}(s) V_{i+1}(s) \ , \ \ 1 < i < r \\ (V_r)' &= -\kappa_{r-1}(s)\, V_{r-1}(s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

bağıntıları sağlanır [15].

Tanım 2. 9. (2.1) formüllerine Frenet Formülleri adı verilir. Bu formüller matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} {V_1}' \\ {V_2}' \\ {V_3}' \\ \vdots \\ {V_{r-2}}' \\ {V_{r-1}}' \\ {V_r}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\kappa_{r-2} & 0 & \kappa_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$n = 3$ özel halinde bir M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı genellikle $\{T, N, B\}$ ile gösterilir. Bu halde T ye teğet vektör alanı, N ye asal (asli) normal vektör alanı, B ye de binormal vektör alanı denir. Ayrıca bu durumda M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki birinci ve ikinci eğriliği, sırası ile κ ve τ ile gösterilir. κ ya M nin eğriliği, τ ya da burulması denir. Böylece Frenet formülleri

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

şeklindedir [15].

Tanım 2. 10. E^3, 3-boyutlu bir Öklid uzayı, $M \subset E^3$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. M eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve U da sabit bir birim vektör olmak üzere, $\forall(s) \in I$ için T ile U arasındaki açı sabit ise $M \subset E^3$ eğrisine bir eğilim çizgisi (genel helis) denir [15].

Tanım 2. 11. E^3, 3-boyutlu bir Öklid uzayı, $M \subset E^3$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. M nin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla κ ve τ olmak üzere:

$$M \text{ bir eğilim çizgisidir} \Leftrightarrow \forall(s) \in I \text{ için } \frac{\kappa}{\tau} = sabit$$

dir.

Eğer κ eğriliği ve τ burulması sabit ise dairesel helis olarak adlandırılır [16].

3. UYUMLU TÜREV

Tanım 3. 1. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun α uyumlu türevi $\forall x>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ için

$$T_\alpha(f)(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hx^{1-\alpha})-f(x)}{h}$$

şeklinde tanımlanır [17].

Teorem 3. 2. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha\in(0,1]$ için $t_0>0$ için α türevlenebilir ise, f t_0 noktasında süreklidir [17].

Teorem 3. 3. $\alpha\in(0,1]$ ve f,g fonksiyonları $t>0$ noktasında türevlenebilir olsun. O zaman

1) $T_\alpha(af+bg)=aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g)$ $\quad a,b\in\mathbb{R}$ dir.

2) $T_\alpha(t^p)=pt^{p-\alpha}$ $\quad p\in\mathbb{R}$ dir.

3) $T_\alpha(\lambda)=0$ bütün sabit fonksiyonlar $f(t)=\lambda$ olur.

4) $T_\alpha(fg)=fT_\alpha(g)+gT_\alpha(f)$ sağlanır.

5) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gT_\alpha(f)-fT_\alpha(g)}{g^2}$ sağlanır.

6) Ayrıca f türevlenebilirse o zaman

$$T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t)$$

dir [17].

Tanım 3. 4. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bütün $t>\alpha$ ve $\alpha\in(0,1]$ için α mertebeden (sol) uyumlu türevi,

$$(T_\alpha^a f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon(t-\alpha)^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Burada $a = 0$ olduğu zaman notasyon T_α şeklinde yazılır. Eğer $(T_\alpha^a f)(t)$, (a, b) aralığında oluşursa o zaman

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{t \to a^+} (T_\alpha^a f)(t)$$

dır [18].

Ayrıca Teorem 3.2 de verilen bütün özellikler t yerine $(t - a)$ yazılırsa Tanım 3.1 için de sağlanır. Tanım 3.1 için bazı fonksiyonların uyumlu türevi aşağıdaki gibidir

a) $T_\alpha^\alpha((t-a)^p) = p(t-a)^p$ bütün $p \in \mathbb{R}$ için,

b) $T_\alpha^\alpha\left(e^{\lambda\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}\right) = \lambda e^{\lambda\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$

c) $T_\alpha^\alpha\left(\sin\left(\omega\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c\right)\right) = \omega cos\left(\omega\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c\right), \omega, c \in \mathbb{R}$

d) $T_\alpha^\alpha\left(\cos\left(\omega\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c\right)\right) = -\omega sin\left(\omega\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c\right), \omega, c \in \mathbb{R}$

e) $T_\alpha^\alpha\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}\right) = 1$

Tanım 3. 5. $f: [-\infty, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bütün $t < b$ ve $\alpha \in (0,1]$ için α mertebeden (sağ) uyumlu türevi,

$$\left({}_\alpha^b T f\right)(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}\right) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\left({}_\alpha^b T f\right)(b)$, (a, b) aralığında oluşursa o zaman,

$$\left({}_\alpha^b T f\right)(b) = \lim_{t \to b^-} \left({}_\alpha^b T f\right)(t)$$

biçiminde elde edilir[18].

Tanım 3. 6. $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = a - n$ olsun. Bir $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α'dan başlayarak a −mertebeden (sol) türevi, $f^n(t)$ vardır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$T_\alpha^a(f)(t) = T_\beta^a(f)^n(t)$$

Burada $a = 0$ olduğu zaman notasyon T_α şeklinde yazılır. f'nin b' de sona eren sıralı

a −mertebeden (sağ) türevi,

$$({}_{\alpha}^{b}Tf)(b) = (-1)^{n+1}({}_{\alpha}^{b}Tf)(t)$$

şeklinde olur.

$\alpha = n + 1$ ise $\beta = 1$ ve f'nin uyumlu türevi $f^{(n+1)}(t)$ olur. Ayrıca $n = 0$ olduğunda (veya $\alpha \in (0,1))\beta = \alpha$ olur ve Tanım 3.1 dekiyle aynı durum oluşur [18].

Bazı fonksiyonların uyumlu türevleri aşağıda verilmiştir [17].

a) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$, bütün $p \in \mathbb{R}$ için

b) $T_\alpha(1) = 0$

c) $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}, c \in \mathbb{R}$

d) $T_\alpha(sinbx) = bx^{1-\alpha}cosbx, b \in \mathbb{R}$

e) $T_\alpha(cosbx) = -bx^{1-\alpha}sinbx, b \in \mathbb{R}$

f) $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$

g) $T_\alpha\left(sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha$

h) $T_\alpha\left(cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha$

i) $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$

4. UYUMLU EĞRİ

Bundan sonraki bölümlerde ilk kez Uyumlu kesirli türevleri kullanılarak Frenet formullerinini elde ederek literatüre çok önemli bir kaynak oluşturan U. Gözütok, H.A. Çoban ve Y Sağıroğlu' nun **Frenet Frame with Respect to Conformable Derivative** çalışması baz alınmıştır**.** Özellikle bu çalışmanın diferensiyel geometriye getirdiği yenilikler incelenmiştir.

Çalışmada aksi belirtilmedikçe bu ve bundan sonraki bölümde U. Gözütok, H.A. Çoban ve Y Sağıroğlu' nun **Frenet Frame with Respect to Conformable Derivative** [14] çalışması kaynak olarak kullanılacaktır.

Bu bölümde uyumlu eğriler ve onların basit özelliklerini tanımlanacaktır.

Tanım 4. 1 Eğer γ , $\alpha -$ türevlenebiliyorsa $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonuna. $\mathbb{R}^3$ te *uyumlu eğri* denir.

Böylece γ uyumlu bir eğri için

$$\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\big)$$

ve

$$D^\alpha \gamma(t) = T_\alpha \gamma(t) = \big(T_\alpha \gamma_1(t), T_\alpha \gamma_2(t), T_\alpha \gamma_3(t)\big)$$

ifadeleri yazılabilir.

Tanım 4. 2. $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri olsun. γ nın hız vektörü tüm $t \in (0, \infty)$ için

$$\frac{T_\alpha \gamma(t)}{t^{1-\alpha}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4. 3. $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri ve, $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\alpha -$ türevlenebilir fonksiyon olsun. Bu taktirde γ uyumlu eğrisi ile h nin yeniden parametrelendirilmesi

$$\beta = \gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4. 4. $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri olsun. γ nın v ile gösterilen hız fonksiyonu $\forall t \in (0, \infty)$ için

$$v(t) = \frac{\|T_\alpha \gamma(t)\|}{t^{1-\alpha}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4. 5. $\gamma: (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri olsun. γ nın yay uzunluğu fonksiyonu $\forall t \in (0, \infty)$ için

$$s(t) = \mathbf{I}|_{\alpha}^{0} \|T_\alpha \gamma(t)\|$$

eşitliği ile tanımlanır. Eğer $\forall t \in (0, \infty)$ için $v(t) = 1$ ise γ eğrisine birim hızlı denir.

Yardımcı Teorem 4. 6. $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(0, \infty)$ üzerinde artan (yada azalan) olsun. f fonksiyonu bütün $x \in (0, \infty)$ ve $T_\alpha f(x) \neq 0$ için $\alpha -$ türevlenebilirse

$$f^{-1}: (f(0^+), f(b^-)) \to \mathbb{R}$$

$f^{-1}: (f(b^-), f(0^+)) \to \mathbb{R}$ ters fonksiyonu $y = f(x)$, $b \in (0, \infty)$ da $\alpha -$ türevlenebilirdir. Ayrıca

$$(T_\alpha f^{-1})(y) = \frac{xy^{1-\alpha}}{T_\alpha f(x)}$$

dir.

Tanım 4. 7. γ bir uyumlu eğri olsun. Tüm $t \in (0, \infty)$ için $T_\alpha \gamma(t) \neq 0$ ise γ ya *uyumlu düzenli eğri* denir.

Teorem 4. 8. γ bir uyumlu eğri olsun. Eğer γ nın yeniden parametrizelendirmesi β eğrisi ise β eğrisi de birim hızlı eğri olur.

5. α −FRENET FORMÜLLERİ

$\beta = \beta(s)$ birim hızlı uyumlu eğrisi $\forall s \in (0,\infty)$ için

$$\frac{T_\alpha \beta(s)}{s^{1-\alpha}}$$

dir. Böylece

$$E_1(s) = \frac{T_\alpha \beta(s)}{s^{1-\alpha}}$$

e $\beta(s)$ üzerindeki *birim vektör alan* denir. $E_1(s)$ in sabit uzunluğu 1 olduğundan $T_\alpha E_1(s)$ in normuna $\beta(s)$ nın *eğrilik vektör alan* denir. $\forall s \in (0,\infty)$ için

$$\kappa(s) = \|T_\alpha E_1(s)\|$$

reel değerli fonksiyonu β nın eğrilik fonksiyonu olarak adlandırılır.

$E_1(s)$ birim olduğundan $< E_1(s), E_1(s) >= 1$ olup bu ifadenin her iki tarafının α −uyumlu türevi alınırsa

$$< T_\alpha E_1(s), E_1(s) >= 0$$

olur. Böylece $T_\alpha E_1(s)$ her zaman $E_1(s)$ e dik olup yani $\beta(s)$ ya normaldir.

$\beta(s)$ nın birim vektör alanı

$$E_2(s) = \frac{T_\alpha E_1(s)}{\kappa(s)}$$

olup $\beta(s)$ nın *asli normal vektör alan* denir. $\beta(s)$ üzerindeki bir diğer birim vektör alanı

$$E_3(s) = E_1(s) \mathrm{x} E_2(s)$$

dir. $\beta(s)$ nın *binormal vektör alan* denir. Böylece $\beta(s)$ üzerinde elde edilen vektör alanlarının $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ ortogonal sistemine α Frenet çatısı denir [14].

Hatırlatma 5. 1. Şimdi $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ cinsinden $\{T_\alpha E_1(s), T_\alpha E_2(s), T_\alpha E_3(s)\}$terimlerini ifade edelim.

$$E_1(s) = T_\alpha \beta(s)$$

olduğundan

$$T_\alpha E_1(s) = \kappa E_2(s)$$

olur. $T_\alpha E_3(s)$ hesaplamaya çalışalım

$$\langle E_3(s) \mathrm{x} E_3(s) \rangle = 1$$

olduğundan bu ifadenin her iki tarafının $\alpha -$ uyumlu türevi alınırsa

$$\langle T_\alpha E_3(s) \mathrm{x} E_3(s) \rangle = 0$$

olur. Böylece $T_\alpha E_3(s)$ her zaman $E_3(s)$ e dik olur.

Diğer taraftan

$$< E_3(s), E_1(s) >= 0$$

olduğundan

$$< T_\alpha E_3(s), E_1(s) > + < T_\alpha E_1(s), E_3(s) >= 0$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} < T_\alpha E_3(s), E_1(s) > &= -< T_\alpha E_1(s), E_3(s) > \\ &= -< \kappa(s) E_2(s), E_3(s) > \\ &= -\kappa(s) < E_2(s), E_3(s) > \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur yani $T_\alpha E_3(s)$, $E_1(s)$ e ortogonaldir.

Son olarak, $T_\alpha E_3(s)$ hem $E_1(s)$ hem de $E_3(s)$ için ortogonal olduğundan $T_\alpha E_3(s)$ her noktada $E_2(s)$ nin bir skaler katıdır. Böylece

$$T_\alpha E_3(s) = -\tau(s) E_2(s)$$

olur, burada gerçek değerli $\tau(s)$ fonsiyonuna $\beta(s)$ uyumlu eğrinin burulma fonksiyonu denir.

Teorem 5. 2. Eğriliği $\kappa(s) > 0$ ve burulması $\tau(s)$ olan bir birim hızlı eğri $\beta(s)$ ise

$$\begin{aligned} T_\alpha E_1(s) &= \kappa(s) E_2(s) \\ T_\alpha E_2(s) &= -\kappa(s) E_1(s) + \tau(s) E_3(s) \\ T_\alpha E_3(s) &= -\tau(s) E_2(s) \end{aligned} \tag{5.1}$$

dir [14].

İspat: Teoremin ifadesindeki ikinci denklem; $T_\alpha E_2(s)$ i $E_1(s), E_2(s), E_3(s)$ cinsinden;

$$T_\alpha E_2(s) = \langle T_\alpha E_2(s), E_1(s)\rangle E_1(s) + \langle T_\alpha E_2(s), E_2(s)\rangle E_2(s) + \langle T_\alpha E_2(s), E_3(s)\rangle E_3(s) \tag{5.2}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\langle E_2(s), E_1(s)\rangle = 0$$

ifadesinin her iki tarafının $\alpha -$ uyumlu türevi alınırsa

$$\langle T_\alpha E_2(s), E_1(s)\rangle + \langle T_\alpha E_1(s), E_2(s)\rangle = 0$$

veya

$$\langle T_\alpha E_2(s), E_1(s)\rangle = -\langle T_\alpha E_1(s), E_2(s)\rangle$$

ve burada (5.1) in ilk denklemi kullanılırsa

$$= -\langle \kappa(s) E_2(s), E_2(s)\rangle$$

$$= -\kappa(s)\langle E_2(s), E_2(s)\rangle$$

$$= -\kappa(s) \tag{5.3}$$

bulunur. $E_2(s)$ birim vektör alan olduğundan

$$\langle E_2(s), E_2(s)\rangle = 1$$

ifadesinin her iki tarafının $\alpha -$ uyumlu türevi alınırsa

$$\langle T_\alpha E_2(s), E_2(s)\rangle = 0 \tag{5.4}$$

olur. Son olarak

$$\langle E_2(s), E_3(s)\rangle = 0$$

ifadesinin her iki tarafının $\alpha -$ uyumlu türevi alınırsa

$$\langle T_\alpha E_2(s), E_3(s)\rangle + \langle T_\alpha E_3(s), E_2(s)\rangle = 0$$

veya

$$\langle T_\alpha E_2(s), E_3(s)\rangle = -\langle T_\alpha E_3(s), E_2(s)\rangle$$

$$= -\langle -\tau(s) E_2(s), E_2(s)\rangle$$

$$= \tau(s)\langle E_2(s), E_2(s)\rangle$$

$$= \tau(s) \tag{5.5}$$

yazılır. (5.3), (5.4) ve (5.5) ifadeleri (5.2) de yazılırsa (5.1) in ikinci denklemi bulunur [14].

Örnek 5. 3.

$$\gamma(s) = -\frac{1}{125}\left(160\sqrt{s} - 9cos10\sqrt{s} - 8\pi, -15sin10\sqrt{s} + 15{,}120\sqrt{s} + 12cos10\sqrt{s}\right) - 6\pi$$

şeklinde verilen uyumlu eğrisini eğriliği $\kappa(s) = 3$ ve torsiyonu $\tau(s) = 4$ olmak üzere

$$E_1(s) = \left(\frac{9}{25}sin10\sqrt{s} + \frac{16}{25}, -\frac{3}{5}cos10\sqrt{s}, -\frac{12}{25}sin10\sqrt{s + \frac{12}{25}}\right),$$

$$E_2(s) = \left(\frac{3}{5}cos10\sqrt{s}, sin10\sqrt{s}, -\frac{4}{5}cos10\right),$$

$$E_3(s) = \left(-\frac{12}{25}sin10\sqrt{s} + \frac{12}{25}, \frac{4}{5}cos10\sqrt{s}, \frac{16}{25}sin10 + \frac{9}{25}\right),$$

dir [14].

6. HELİSLER İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

Teorem 6.1 $\gamma(s)$, bir regüler uyumlu eğri ve bu eğrinin uyumlu $\alpha -$ Frenet çatısı $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ olsun.

$\gamma(s)$ bir genel helis ise $\Leftrightarrow$ $\forall s \in I$ için $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)}$ = sabittir.

Çalışmanın bundan sonra ki kısmında kısalığın hatırı için

$$\kappa = \kappa(s),\ \tau = \tau(s), E_1 = E_1(s),\ E_2 = E_2(s) \text{ ve } E_3 = E_3(s)$$

olarak kullanılacaktır.

İspat: (⟹) $\gamma(s)$ bir genel helis olsun. O zaman $\gamma(s)$ nin α −uyumlu Frenet çatısı $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ olmak üzere

$$< E_1, u >= cos\varphi = sabit$$

dir. Bu ifadenin her iki tarafının α −uyumlu türevi alınırsa

$$< T_\alpha E_1, u >= 0$$

ve $\alpha -$ frenet formülleri kullanılırsa

$$< \kappa E_2, u >= 0$$

veya $\kappa \neq 0$ olmak üzere

$$< E_2, u >= 0 \tag{6.1}$$

yazılabilir. O halde $u \in S_p\{E_1, E_3\}$ dür. Bu ise

$$u = cos\varphi E_1 + sin\varphi E_3$$

demektir. Tekrar (6.1) ın türevi alınırsa

$$<-\kappa E_1 + \tau E_3, u >= 0$$

veya

$$-\kappa < E_1, u > +\tau < E_3, u >= 0$$

$$-\kappa cos\varphi + \tau sin\varphi = 0$$

veya

$$\frac{\kappa}{\tau} = tg\theta = sabit$$

elde edilir.

(⟸): $\forall$s $\in$ I için $\frac{\kappa}{\tau} = \lambda = sabit$ olsun $\lambda = tg\varphi$ olmak üzere

$$u = cos\varphi E_1 + sin\varphi E_3$$

olsun.

1) u sabit bir vektördür. Çünkü

$$D_\alpha u = cos\varphi\kappa E_2 - sin\varphi\tau E_2$$

veya

$$D_\alpha u = (cos\varphi\kappa - sin\varphi\tau)E_2$$

dir. $\frac{\kappa}{\tau} = tg\varphi$ ise

$D_\alpha u = 0$ olup u sabittir.

2) $\gamma(s)$ bir helis ise

$$< E_1, u > = < E_1, cos\varphi E_1 + sin\varphi E_3 >$$

veya

$$= cos\varphi < E_1, E_1 > + sin\varphi < E_1, E_3 >$$

veya

$$= sabit$$

dir.

Teorem 6.2 $\gamma(s)$, bir regüler uyumlu eğri olsun. O zaman $\gamma(s)$ bir genel helis ise yani

$< E_1, u > = c_1 = sabit$ ve $l = < u, u >$ şeklinde bir sabit olmak üzere

$$l = {c_1}^2 \left[1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right]$$

şekilde yazılabilir.

İspat: $\gamma(s)$ uyumlu eğrisi genel helis ise

$$< E_1, u > = c_1 \tag{6.2}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir c_1 sabiti vardır. (6.2) ifadesinin $\alpha -$ uyumlu türevi alınır ve $\alpha -$Frenet çatısı kullanılırsa $\kappa \neq 0$ olmak üzere

$$< E_2, u > = 0 \tag{6.3}$$

veya $\tau \neq 0$ olmak üzere

$$-\kappa < E_1, u > + \tau < E_3, u > = 0 \tag{6.4}$$

elde edilir. (6.4) eşitliğinde (6.1) ifadesi yazılırsa

$$< E_3, u >= \frac{\kappa}{\tau} c_1 \qquad (6.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan u sabit bir vektör olduğundan

$$u =< E_1, u > E_1 + < E_2, u > E_2 + < E_3, u > E_3 = 0 \qquad (6.6)$$

veya (6.2), (6.3) ve (6.5) ifadeleri (6.6) da yerine yazılırsa

$$u = c_1 E_1 + \frac{\kappa}{\tau} c_1 E_3$$

bulunur. Böylece u sabit bir vektör olduğundan l sabit bir vektör olmak üzere

$$l = {c_1}^2 \left[1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right]$$

bulunur.

Teorem 6.3 $\gamma(s)$ uyumlu bir eğri olsun. γ eğrisinin uyumlu $\alpha -$ Frenet çatısı $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ olmak üzere E_3 binormal vektörünün sabit bir u vektörü ile sıfırdan farklı iç çarpımı sabit ise (yani $< E_3, u > = c_3$ ise) c_3 ve M birer reel sabit $M \geq {c_3}^2$ olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa} = \sqrt{\frac{M}{{c_3}^2} - 1} = sabit \qquad (6.7)$$

dir.

İspat: $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin E_3 binormal vektörünün sabit bir u vektörü ile iç çarpımı sabit ise yani

$$< E_3, u > = c_3 = sabit \qquad (6.8)$$

olsun. (6.8) ifadesinin $\alpha -$ uyumlu türevi alınır

$$< T_\alpha E_3, u > = 0$$

ve $\alpha -$ Frenet çatısı kullanılırsa

$$-\tau < E_2, u > = 0$$

$\tau \neq 0$ olduğundan

$$< E_2, u > = 0 \qquad (6.9)$$

bulunur. (6.9) ifadesinden $\alpha -$ uyumlu türevi alınırsa ve $\alpha -$ Frenet çatısı kullanılırsa

$$-\kappa < E_1, u > +\tau < E_3, u >= 0$$

veya (6.8) kullanılırsa $\kappa \neq 0$ olmak üzere

$$< E_1, u > = \frac{\tau}{\kappa} c_3 \tag{6.10}$$

bulunur. Diğer taraftan u sabit bir vektör olduğundan

$$u =< E_1, u > E_1 + < E_2, u > E_2 + < E_3, u > E_3 \tag{6.11}$$

ve (6.8), (6.9) ve (6.10) denklemleri (6.11) da kullanılırsa

$$u = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) c_3 E_1 + c_3 E_3$$

bulunur.

Ayrıca u sabit vektör olduğundan M bir sabit olmak üzere

$$M = < u, u > = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 {c_3}^2 + {c_3}^2$$

veya

$$\frac{M}{{c_3}^2} = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + 1$$

veya

$$\frac{M}{{c_3}^2} - 1 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2$$

veya

$$\frac{\tau}{\kappa} = \sqrt{\frac{M}{{c_3}^2} - 1} = sabit$$

bulunur.

Teorem 6. 4 . $\gamma(s)$ uyumlu bir eğri ve γ eğrisinin uyumlu $\alpha -$ Frenet çatısı $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki teğet vektör alanı $E_1(s)$, eğriliği κ $(\kappa \neq 0)$ ve burulması τ $(\tau \neq 0)$ olmak üzere birim hızlı $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1 - \frac{3T_\alpha\kappa}{\kappa} T_\alpha T_\alpha E_1 - \left\{\frac{T_\alpha T_\alpha \kappa}{\kappa} - \frac{3(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa^2} - \kappa^2 - \tau^2\right\} T_\alpha E_1 = 0 \tag*{(6.12)$_1$}$$

veya

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1 - \frac{3T_\alpha\tau}{\tau} T_\alpha T_\alpha E_1 - \left\{\frac{T_\alpha T_\alpha \kappa}{\kappa} - \frac{3(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2} - \kappa^2 - \tau^2\right\} T_\alpha E_1 = 0 \tag*{(6.12)$_2$}$$

denklemlerinden birinin sağlanmasıdır.

İspat $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin bir genel helis olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin eğriliği κ $(\kappa \neq 0)$ ve burulması τ $(\tau \neq 0)$ olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabittir.}$ Bu eşitlikten $\alpha -$uyumlu türev alınırsa

$$\frac{T_\alpha \kappa}{\kappa} = \frac{T_\alpha \tau}{\tau} \tag{6.13}$$

bulunur. Ayrıca (5.1) ifadesinin ilk eşitliği olan

$$T_\alpha E_1 = \kappa E_2$$

eşitliğinden $\alpha -$ uyumlu türev alınırsa

$$T_\alpha(T_\alpha E_1) = (T_\alpha \kappa)E_2 + \kappa T_\alpha E_2$$

ve (5.1) eşitliği kullanılıp

$$= (T_\alpha \kappa)E_2 + \kappa(-\kappa E_1 + \tau E_3)$$

düzenlenirse

$$= -\kappa^2 E_1 + (T_\alpha \kappa)E_2 + \kappa\tau E_3 \tag{6.14}$$

elde edilir. Bu ifadenin tekrar $\alpha -$ türevi alınırsa

$$T_\alpha(T_\alpha T_\alpha E_1) = -2\kappa(T_\alpha \kappa)E_1 - \kappa^2 T_\alpha E_1 + T_\alpha(T_\alpha \kappa)E_2 + (T_\alpha \kappa)T_\alpha E_2$$
$$+(T_\alpha \kappa)\tau E_3 + \kappa(T_\alpha \tau)E_3 + \kappa\tau T_\alpha E_3$$

olup (6.13) eşitliği kullanılırsa

$$= -2\kappa(T_\alpha \kappa)E_1 - \kappa^2 T_\alpha E_1 + (T_\alpha T_\alpha \kappa)E_2 + (T_\alpha \kappa)T_\alpha E_2$$
$$+2(T_\alpha \kappa)\tau E_3 + \kappa\tau T_\alpha E_3 \tag{6.15}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$T_\alpha E_2 = \frac{-T_\alpha \kappa}{\kappa^2} T_\alpha E_1 + \frac{1}{\kappa} T_\alpha T_\alpha E_1 \tag{6.16}$$

ve

$$E_2 = \frac{1}{\kappa} T_\alpha E_1 \tag{6.17}$$

ve

$$T_\alpha E_3 = \frac{-\tau}{\kappa} T_\alpha E_1 \tag{6.18}$$

ve

$$-2\kappa(T_\alpha \kappa)E_1 + 2\tau(T_\alpha \kappa)E_3 = \frac{-2(T_\alpha \kappa)^2}{\kappa^2} T_\alpha E_1 + \frac{2(T_\alpha \kappa)}{\kappa} T_\alpha T_\alpha E_1 \tag{6.19}$$

ifadeleri (6.15) de kullanılırsa

$$T_\alpha(T_\alpha T_\alpha E_1) = \frac{-2(T_\alpha \kappa)^2}{\kappa^2} T_\alpha E_1 + \frac{2(T_\alpha \kappa)}{\kappa} T_\alpha T_\alpha E_1 - \kappa^2 T_\alpha E_1 + (T_\alpha T_\alpha \kappa)E_2$$
$$+(T_\alpha \kappa)T_\alpha E_2 + \kappa\tau T_\alpha E_3$$

veya

$$= \frac{-2(T_\alpha \kappa)^2}{\kappa^2} T_\alpha E_1 + \frac{2(T_\alpha \kappa)}{\kappa} T_\alpha T_\alpha E_1 - \kappa^2 T_\alpha E_1 + (T_\alpha T_\alpha \kappa)\frac{1}{\kappa} T_\alpha E_1$$

$$+(T_\alpha\kappa)\left(\frac{-T_\alpha\kappa}{\kappa^2}T_\alpha E_1\right)+(T_\alpha\kappa)\frac{1}{\kappa}T_\alpha T_\alpha E_1-\tau^2T_\alpha E_1$$

veya

$$=\frac{-3(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa^2}T_\alpha E_1+\frac{3(T_\alpha\kappa)}{\kappa}T_\alpha T_\alpha E_1-\kappa^2T_\alpha E_1+\frac{(T_\alpha T_\alpha\kappa)}{\kappa}T_\alpha E_1-\tau^2T_\alpha E_1$$

yada

$$T_\alpha(T_\alpha T_\alpha E_1)-\frac{3T_\alpha\kappa}{\kappa}T_\alpha T_\alpha E_1-\left(\frac{T_\alpha T_\alpha\kappa}{\kappa}-\frac{3(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa}-\kappa^2-\tau^2\right)T_\alpha E_1=0$$

olup $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin bir genel helis olduğunu yani

$$\frac{T_\alpha\kappa}{\tau}=\frac{T_\alpha\tau}{\kappa}$$

ifadesini gözönüne alınırsa

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1-\frac{3T_\alpha\tau}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_1-\left(\frac{T_\alpha T_\alpha\kappa}{\kappa}-\frac{3(T_\alpha\tau)^2}{\tau}-\kappa^2-\tau^2\right)T_\alpha E_1=0$$

elde edilir.

Böylece

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1-\frac{3T_\alpha\kappa}{\kappa}T_\alpha T_\alpha E_1-\left\{\frac{T_\alpha T_\alpha\kappa}{\kappa}-\frac{3(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa^2}-\kappa^2-\tau^2\right\}T_\alpha E_1=0$$

veya

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1-\frac{3T_\alpha\tau}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_1-\left\{\frac{T_\alpha T_\alpha\kappa}{\kappa}-\frac{3(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2}-\kappa^2-\tau^2\right\}T_\alpha E_1=0$$

eşitlikleri bulunur.

Tersine kabul edelim ki $(6.12)_1$ (veya $(6.12)_2$ geçerli olsun). Gösterelim ki γ bir genel helistir.

$$T_\alpha E_2=-\kappa E_1+\tau E_3$$

eşitliğinden

$$E_3=\frac{1}{\tau}T_\alpha E_2+\frac{\kappa}{\tau}E_1$$

elde edilir. Bu ifadenin α −uyumlu türevi alınırsa

$$T_\alpha E_3=\frac{-T_\alpha\tau}{\tau^2}T_\alpha E_2+\frac{1}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_2+T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)E_1+\frac{\kappa}{\tau}T_\alpha E_1 \tag{6.20}$$

bulunur. Diğer taraftan (6.16) ifadesinin α −uyumlu türevi alınırsa

$$T_\alpha T_\alpha E_2=\frac{-(T_\alpha T_\alpha\kappa)\kappa^2+2(T_\alpha\kappa)^2\kappa}{\kappa^4}T_\alpha E_1-\frac{T_\alpha\kappa}{\kappa^2}T_\alpha T_\alpha E_1-\frac{T_\alpha\kappa}{\kappa^2}T_\alpha T_\alpha E_1+\frac{1}{\kappa}T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1$$

veya

$$=\frac{-(T_\alpha T_\alpha\kappa)}{\kappa^2}T_\alpha E_1+\frac{2(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa^3}T_\alpha E_1-\frac{2T_\alpha\kappa}{\kappa^2}T_\alpha T_\alpha E_1+\frac{1}{\kappa}T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1 \tag{6.21}$$

bulunur. Böylece (6.15) ve (6.20) ifadeleri (6.21) da yazılırsa

$$T_\alpha E_3=\frac{-(T_\alpha\tau)}{\tau^2}\left(\frac{-T_\alpha\kappa}{\kappa^2}T_\alpha E_1+\frac{1}{\kappa}T_\alpha T_\alpha E_1\right)$$
$$+\frac{1}{\tau}\left(\frac{-T_\alpha T_\alpha\kappa}{\kappa^2}T_\alpha E_1+\frac{2(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa^3}T_\alpha E_1-\frac{2T_\alpha\kappa}{\kappa^2}T_\alpha T_\alpha E_1+\frac{1}{\kappa}T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1\right)$$
$$+T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)E_1+\frac{\kappa}{\tau}T_\alpha E_1$$

veya

$$=\frac{(T_\alpha\tau)(T_\alpha\kappa)}{\tau^2\kappa^2}T_\alpha E_1-\frac{T_\alpha\tau}{\kappa\tau^2}T_\alpha T_\alpha E_1-\frac{T_\alpha T_\alpha\kappa}{\tau\kappa^2}T_\alpha E_1+\frac{2(T_\alpha\kappa)^2}{\tau\kappa^3}T_\alpha E_1$$
$$-\frac{2T_\alpha\kappa}{\tau\kappa^2}T_\alpha T_\alpha E_1+\frac{1}{\kappa\tau}T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1+T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)E_1+\frac{\kappa}{\tau}T_\alpha E_1$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafına $\frac{T_\alpha\kappa}{\tau\kappa^2}$, $\frac{(T_\alpha\kappa)^2}{\tau\kappa^2}$ ve $\frac{\tau}{\kappa}T_\alpha E_1$ terimlerini ekleyip çıkarırsak

$$T_\alpha E_3=\frac{1}{\kappa\tau}\left[T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1-\frac{3(T_\alpha\kappa)}{\kappa}T_\alpha T_\alpha E_1-\left(\frac{T_\alpha T_\alpha\kappa}{\kappa}-\frac{3(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa^2}-\kappa^2-\tau^2\right)T_\alpha E_1\right]$$
$$+\left(\frac{T_\alpha\kappa}{\tau\kappa^2}-\frac{T_\alpha\tau}{\kappa\tau^2}\right)T_\alpha T_\alpha E_1+\left(\frac{-(T_\alpha\kappa)^2}{\tau\kappa^3}+\frac{(T_\alpha\tau)(T_\alpha\kappa)}{\kappa^2\tau^2}\right)T_\alpha E_1+T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)E_1-\frac{\tau}{\kappa}T_\alpha E_1 \qquad (6.22)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$T_\alpha E_1=\kappa E_2$$

ifadesinin α −uyumlu türevi alınır ve düzenlenirse

$$T_\alpha T_\alpha E_1=-\kappa^2E_1+(T_\alpha\kappa)E_2+\kappa\tau E_3$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left(\frac{T_\alpha\kappa}{\tau\kappa^2}-\frac{T_\alpha\tau}{\kappa\tau^2}\right)T_\alpha T_\alpha E_1=\left(\frac{T_\alpha\kappa}{\tau\kappa^2}-\frac{T_\alpha\tau}{\kappa\tau^2}\right)(-\kappa^2E_1+(T_\alpha\kappa)E_2+\kappa\tau E_3)$$

$$=\left[-\frac{(T_\alpha\kappa)}{\tau}+\frac{(T_\alpha\tau)\kappa}{\tau^2}\right]E_1+\left[\frac{(T_\alpha\kappa)^2}{\tau\kappa^2}-\frac{(T_\alpha\tau)(T_\alpha\kappa)}{\kappa\tau^2}\right]E_2+\left[\frac{T_\alpha\kappa}{\kappa}-\frac{T_\alpha\tau}{\tau}\right]E_3$$

ve

$$\left(\frac{-(T_\alpha\kappa)^2}{\tau\kappa^3}+\frac{(T_\alpha\tau)(T_\alpha\kappa)}{\kappa^2\tau^2}\right)T_\alpha E_1=\left(\frac{-(T_\alpha\kappa)^2}{\tau\kappa^3}+\frac{(T_\alpha\tau)(T_\alpha\kappa)}{\kappa^2\tau^2}\right)\kappa E_2$$

$$=\left[\frac{-(T_\alpha\kappa)^2}{\tau\kappa^2}+\frac{(T_\alpha\tau)(T_\alpha\kappa)}{\kappa\tau^2}\right]E_2$$

olacağından

$$\left(\frac{T_\alpha\kappa}{\tau\kappa^2}-\frac{T_\alpha\tau}{\kappa\tau^2}\right)T_\alpha T_\alpha E_1+\left(\frac{-(T_\alpha\kappa)^2}{\tau\kappa^3}+\frac{(T_\alpha\tau)(T_\alpha\kappa)}{\kappa^2\tau^2}\right)T_\alpha E_1=$$
$$\left[-\frac{T_\alpha\kappa}{\tau}+\frac{(T_\alpha\tau)\kappa}{\tau^2}\right]E_1+\left[\frac{T_\alpha\kappa}{\kappa}-\frac{T_\alpha\tau}{\tau}\right]E_3 \qquad (6.23)$$

ifadesini verir. Böylece (6.23) , (6.22) de yazılıp düzenlenirse

$$T_\alpha E_3 = \frac{1}{\kappa\tau}[0] + \left[\frac{-\tau(T_\alpha\kappa) + \kappa(T_\alpha\tau)}{\tau^2}\right]E_1 + \left[\frac{\tau(T_\alpha\kappa) - \kappa(T_\alpha\tau)}{\kappa\tau}\right]E_3 + T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)E_1 - \tau E_2$$

veya

$$T_\alpha E_3 = 2\,T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)E_1 + \left(\frac{T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)}{\kappa\tau^3}\right)E_3 - \tau E_2$$

elde edilir. Bu son eşitlikle $\alpha -$ Frenet çatısı birlikte gözönüne alınırsa

$$T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) = 0$$

elde edilir ki buradan

$$\frac{\kappa}{\tau} = sabit$$

bulunur. Bu ise $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin bir genel helis olması demektir.

Sonuç 6. 5. $\gamma(s)$ uyumlu türevlenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki teğet vektör alanı E_1, eğrinin eğriliği κ $(\kappa = sabit)$ ve burulması τ $(\tau = sabit)$ olmak üzere birim hızlı $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin dairesel helis olması için gerek ve yeter şart

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1 + \{\kappa^2 + \tau^2\}T_\alpha E_1 = 0 \qquad (6.24)$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat Teorem 6. 4. da $\gamma(s)$ uyumlu eğrinin eğriliği $\kappa = sabit$ ve burulması $\tau = sabit$ alınırsa ispat kolayca yapılır.

Teorem 6. 6 . $\gamma(s)$ uyumlu bir eğri ve γ eğrisinin uyumlu $\alpha -$ Frenet çatısı $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki aslinormal vektör alanı $E_2(s)$, eğriliği κ $(\kappa = sabit)$ ve burulması τ $(\tau = sabit)$ olmak üzere birim hızlı $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$T_\alpha T_\alpha E_2 - \frac{T_\alpha\kappa}{\kappa}T_\alpha E_2 + \{\kappa^2 + \tau^2\}E_2 = 0 \qquad (6.25)$$

veya

$$T_\alpha T_\alpha E_2 - \frac{T_\alpha\tau}{\tau}T_\alpha E_2 + \{\kappa^2 + \tau^2\}E_2 = 0 \qquad (6.26)$$

denklemlerinden birinin sağlanmasıdır.

İspat Birim hızlı $\gamma(s)$ uyumlu eğrisi bir genel helis olsun. Buna göre

$$T_\alpha E_2 = -\kappa E_1 + \tau E_3$$

eşitliğinden türev alınırsa

$$T_\alpha T_\alpha E_2 = -(T_\alpha \kappa)E_1 - \kappa T_\alpha E_1 + (T_\alpha \tau)E_3 + \tau T_\alpha E_3$$

veya

$$= -(T_\alpha \kappa)E_1 - \kappa^2 E_2 + (T_\alpha \tau)E_3 - \tau^2 E_2$$

veya

$$= -(T_\alpha \kappa)E_1 + (T_\alpha \tau)E_3 - \{\kappa^2 + \tau^2\}E_2 \tag{6.27}$$

bulunur. $\gamma(s)$ uyumlu eğrisi bir genel helis olduğundan

$$\frac{T_\alpha \tau}{\tau} = \frac{T_\alpha \kappa}{\kappa}$$

veya

$$T_\alpha \tau = \frac{(T_\alpha \kappa)\tau}{\kappa}$$

yazılabilir. O halde (6.26), (6.27) de yazılırsa

$$T_\alpha T_\alpha E_2 = -(T_\alpha \kappa)E_1 + \frac{(T_\alpha \kappa)\tau}{\kappa}E_3 - \{\kappa^2 + \tau^2\}E_2$$

veya

$$T_\alpha T_\alpha E_2 + (T_\alpha \kappa)E_1 - \frac{(T_\alpha \kappa)\tau}{\kappa}E_3 - \{\kappa^2 + \tau^2\}E_2 = 0$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik Serret-Frenet denklemi yardımıyla düzenlenirse;

$$T_\alpha T_\alpha E_2 - \frac{T_\alpha \kappa}{\kappa} T_\alpha E_2 + \{\kappa^2 + \tau^2\}E_2 = 0$$

(6.25) denklemi elde edilir. (6.26) da verilen eşitlik düzenlenirken $\frac{T_\alpha \kappa}{\kappa} = \frac{T_\alpha \tau}{\tau}$ eşitliği de kullanılırsa;

$$T_\alpha T_\alpha E_2 - \frac{T_\alpha \tau}{\tau} T_\alpha E_2 + \{\kappa^2 + \tau^2\}E_2 = 0$$

bulunur. Tersine (6.25) ve (6.26) denklemleri sağlansın gösterelim ki $\gamma(s)$ uyumlu eğrisi bir genel helistir.

$$T_\alpha E_2 = -\kappa E_1 + \tau E_3$$

eşitliğinden

$$E_1 = -\frac{1}{\kappa} T_\alpha E_2 + \frac{\tau}{\kappa} E_3$$

bulunur. Bu eşitlikten türev alınırsa;

$$T_\alpha E_1 = \frac{T_\alpha \kappa}{\kappa^2} T_\alpha E_2 - \frac{1}{\kappa} T_\alpha T_\alpha E_2 + T_\alpha \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) E_3 + \frac{\tau}{\kappa} T_\alpha E_3$$

veya

$$= -\frac{1}{\kappa}\left\{T_\alpha T_\alpha E_2 - \frac{T_\alpha \kappa}{\kappa} + (\tau^2 + \kappa^2)\right\} E_2 + \kappa E_2 + T_\alpha \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) E_3$$

elde edilir. Bu eşitlikte (6.15) denklemi ve Serret-Frenet denklemleri kullanılırsa ;

$$T_\alpha E_1 = \kappa E_2 + T_\alpha\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)E_3$$

veya

$$\kappa E_2 = \kappa E_2 + T_\alpha\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)E_3$$

olur. Yani

$$T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) = 0$$

veya

$$\frac{\kappa}{\tau} = sabit$$

bulunur. Bu ise $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin bir genel helis olması demektir.

Sonuç 6.7. $\gamma(s)$ uyumlu türevlenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki asli normal vektör alanı E_2 , eğrinin eğriliği $\kappa = sabit$ ve $\tau = sabit$ olmak üzere birim hızlı $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin dairesel helis olması için gerek ve yeter şart

$$T_\alpha T_\alpha E_2 + \{\kappa^2 + \tau^2\}E_2 = 0 \tag{6.28}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat Teorem 6.6. de $\gamma(s)$ uyumlu eğrinin eğriliği $\kappa = sabit$ ve $\tau = sabit$ alınarak ispat kolayca yapılır.

Teorem 6.8. $\gamma(s)$ uyumlu bir eğri ve γ eğrisinin uyumlu $\alpha -$ Frenet çatısı $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki binormal vektör alanı $E_3(s)$, eğrinin eğriliği κ $(\kappa \neq 0)$ ve burulması τ $(\tau \neq 0)$ olmak üzere birim hızlı $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3 = -\frac{3T_\alpha\kappa}{\kappa}T_\alpha T_\alpha E_3 - \left\{\frac{T_\alpha(T_\alpha\tau)}{\tau} - \frac{3(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa^2} - \kappa^2 - \tau^2\right\}T_\alpha E_3 = 0 \tag{6.29}$$

veya

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3 = -\frac{3T_\alpha\tau}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_3 - \left\{\frac{T_\alpha(T_\alpha\tau)}{\tau} - \frac{3(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2} - \kappa^2 - \tau^2\right\}T_\alpha E_3 = 0 \tag{6.30}$$

denklemlerinden birinin sağlanmasıdır.

İspat Birim hızlı $\gamma(s)$ uyumlu eğrisi bir genel helis olsun. Buna göre

$$T_\alpha E_3 = -\tau E_2$$

eşitliğinden $\alpha -$ uyumlu türev alınırsa

$$T_\alpha T_\alpha E_3 = -(T_\alpha\tau)E_2 - \tau(-\kappa E_1 + \tau E_3)$$

$$\kappa\tau E_1 - (T_\alpha\tau)E_2 - \tau^2 E_3 \tag{6.31}$$

ve tekrar α −uyumlu türev alınırsa

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3 = (T_\alpha\kappa)\tau E_1 + \kappa(T_\alpha\tau)E_1 + (\kappa\tau)T_\alpha E_1 - (T_\alpha T_\alpha\tau)E_2 - (T_\alpha\tau)T_\alpha E_2$$
$$-2\tau(T_\alpha\tau)E_3 - \tau^2 T_\alpha E_3$$

veya $\gamma(s)$ uyumlu eğrisi bir genel helis olduğu göz önüne alınırsa

$$= 2\kappa(T_\alpha\tau)E_1 + (\kappa\tau)T_\alpha E_1 - (T_\alpha T_\alpha\tau)E_2 - (T_\alpha\tau)T_\alpha E_2$$
$$-2\tau(T_\alpha\tau)E_3 - \tau^2 T_\alpha E_3$$

veya

$$= 2\kappa(T_\alpha\tau)E_1 - 2\tau(T_\alpha\tau)E_3 + (\kappa\tau)T_\alpha E_1 - (T_\alpha T_\alpha\tau)E_2 - (T_\alpha\tau)T_\alpha E_2 - \tau^2 T_\alpha E_3$$

veya

$$= \frac{-2(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2}T_\alpha E_3 + \frac{2(T_\alpha\tau)}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_3 - \kappa^2 T_\alpha E_3 - \frac{(T_\alpha T_\alpha\tau)}{\tau}T_\alpha E_3 - \frac{(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2}T_\alpha E_3$$
$$+\frac{T_\alpha\tau}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_3 - \tau^2 T_\alpha E_3$$
$$= \frac{-3(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2}T_\alpha E_3 + \frac{3(T_\alpha\tau)}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_3 - \kappa^2 T_\alpha E_3 - \frac{T_\alpha T_\alpha\tau}{\tau}T_\alpha E_3 - \tau^2 T_\alpha E_3$$

ve nihayet

$$= \frac{3(T_\alpha\tau)}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_3 - \left\{\frac{T_\alpha T_\alpha\tau}{\tau} - \frac{3(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2} - \kappa^2 - \tau^2\right\}T_\alpha E_3 \tag{6.32}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$T_\alpha E_1 = -\frac{\kappa}{\tau}T_\alpha E_3$$
$$T_\alpha E_2 = \frac{(T_\alpha\tau)}{\tau^2}T_\alpha E_3 - \frac{1}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_2$$

ve

$$2\kappa(T_\alpha\tau)E_1 - 2\tau(T_\alpha\tau)E_3 = \frac{-2(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2}T_\alpha E_3 + \frac{2(T_\alpha\tau)^2}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_3$$

eşitlikleri (6.32) denkleminde kullanılırsa;

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3 - \frac{3T_\alpha\kappa}{\kappa}T_\alpha T_\alpha E_3 - \left\{\frac{T_\alpha(T_\alpha\tau)}{\tau} - \frac{3(T_\alpha\kappa)^2}{\kappa^2} - \kappa^2 - \tau^2\right\}T_\alpha E_3 = 0$$

denklemi bulunur. (6.32) denklemi düzenlenirken $\frac{T_\alpha\kappa}{\kappa} = \frac{T_\alpha\tau}{\tau}$ eşitliği de kullanılırsa;

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3 - \frac{3T_\alpha\tau}{\tau}T_\alpha T_\alpha E_3 - \left\{\frac{T_\alpha(T_\alpha\tau)}{\tau} - \frac{3(T_\alpha\tau)^2}{\tau^2} - \kappa^2 - \tau^2\right\}T_\alpha E_3 = 0$$

denklemi elde edilir.

Tersine kabul edelim ki (6.29) (veya 6.30 geçerli olsun).

Gösterelim ki γ bir genel helistir.

$$T_\alpha E_2 = -\kappa E_1 + \tau E_3$$

eşitliğinden

$$E_1 = -\frac{1}{\kappa}T_\alpha E_2 + \frac{\tau}{\kappa}E_3$$

elde edilir. Bu eşitlikten türev alınırsa

$$T_\alpha E_1 = \frac{T_\alpha \kappa}{\kappa^2} T_\alpha E_2 - \frac{1}{\kappa} T_\alpha T_\alpha E_2 + T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) E_3 + \frac{\tau}{\kappa} T_\alpha E_3$$

bulunur. Bu eşitlikte α-Frenet eşitlikleri ve (6.29) nolu denklemler yardımıyla düzenleme yapılırsa;

$$T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) = 0$$

veya

$$\frac{\kappa}{\tau} = sabit$$

bulunur. Bu ise $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin bir genel helis olması demektir.

Sonuç 6.9 $\gamma(s)$ uyumlu türevlenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki binormal vektör alanı E_3, eğrinin eğriliği κ $(\kappa = sabit)$ ve burulması τ $(\tau = sabit)$ olmak üzere birim hızlı $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin dairesel helis olması için gerek ve yeter şart

$$T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3 + \{\kappa^2 + \tau^2\} T_\alpha E_3 = 0 \tag{6.33}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat Teorem 6.8. da $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin eğriliği $\kappa = sabit$ ve burulması $\tau = sabit$ alınarak ispat kolayca yapılır.

Teorem 6.10 $\gamma(s)$ uyumlu eğri olsun. γ bir helis ise gerek ve yeter şart

$$det(T_\alpha E_1, T_\alpha T_\alpha E_1, T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1) = 0$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $\gamma(s)$ bir helis olsun. O zaman $\frac{\kappa}{\tau}$ sabittir.

Ayrıca $$T_\alpha E_1 = \kappa E_2$$

ifadesinin α-uyumlu türevi alınır ve α-Frenet çatısı kullanılırsa

$$T_\alpha(T_\alpha E_1) = (T_\alpha \kappa) E_2 - \kappa^2 E_1 + \kappa\tau E_3$$

olur. Tekrar α-uyumlu türev alınırsa

$$T_\alpha\big(T_\alpha(T_\alpha E_1)\big) = (-2T_\alpha \kappa^2) E_1 + (T_\alpha T_\alpha \kappa - \kappa^3 - \kappa\tau^2) E_2 + 2(T_\alpha \kappa\tau) E_3$$

elde edilir. Böylece

$$det(T_\alpha E_1, T_\alpha T_\alpha E_1, T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^2 & T_\alpha \kappa & \kappa\tau \\ -2T_\alpha \kappa^2 & T_\alpha T_\alpha \kappa - \kappa^3 - \kappa\tau^2 & 2(T_\alpha \kappa\tau) \end{bmatrix}$$

$$= -\,\kappa[(-\,\kappa^2)(2T_\alpha \kappa\tau) + 2(\kappa\tau)T_\alpha \kappa^2]$$

$$= [(-\,\kappa^2)[2(T_\alpha \kappa)\tau + 2(T_\alpha \tau)\kappa] + 2(\kappa\tau)(T_\alpha \kappa)\kappa]$$

$$= -\kappa[-2\kappa^2\tau(T_\alpha \kappa) - 2\kappa^3 T_\alpha \tau + 4\kappa^2\tau T_\alpha \kappa]$$

$$= -\kappa[2\kappa^2\tau T_\alpha \kappa - 2\kappa^3 T_\alpha \tau]$$

$$= -\kappa 2\kappa^2[\tau T_\alpha \kappa - \kappa T_\alpha \tau]$$

$$= -2\kappa^3 T_\alpha \left[\frac{\kappa}{\tau}\right]$$

$$= 0$$

Tersine $det(T_\alpha E_1, T_\alpha T_\alpha E_1, T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_1) = 0$ ise $\frac{\kappa}{\tau} = sabit$ olur. İspat tamamlanır

Teorem 6.11 $\gamma(s)$ uyumlu eğri olsun. γ bir helis ise

$$det(T_\alpha E_3, T_\alpha T_\alpha E_3, T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3) = 0$$

dır.

İspat: $\gamma(s)$ bir helis olsun. O zaman $\frac{\kappa}{\tau}$ sabittir. Ayrıca

$$T_\alpha E_3 = -\tau E_2$$

ifadesinin α-uyumlu türevi alınır ve α-Frenet çatısı kullanılırsa

$$T_\alpha(T_\alpha E_3) = T_\alpha(-\tau E_2) = -(T_\alpha \tau)E_2 - \tau(-\kappa E_1 + \tau E_3\,)$$

$$= (\kappa\tau)E_1 - (T_\alpha \tau)E_2 - \tau^2 E_3$$

olur. Tekrar α-uyumlu türev alınırsa

$$T_\alpha(T_\alpha T_\alpha E_3) = T_\alpha(\kappa\tau)E_1 - (T_\alpha \tau)E_2 - \tau^2 E_3$$

$$\left(T_\alpha(\kappa\tau)\right)E_1 + (\kappa\tau)T_\alpha E_1 - (T_\alpha T_\alpha \tau)E_2 - (T_\alpha\tau)T_\alpha E_2 - T_\alpha(\tau^2)E_3 - \tau^2 T_\alpha E_3$$

$$= T_\alpha(\kappa\tau)E_1 + (\kappa^2\tau)E_2 - (T_\alpha T_\alpha\tau)E_2 + (T_\alpha\tau)\kappa E_1 - (T_\alpha\tau)\tau E_3 - T_\alpha(\tau^2)E_3 - \tau^3 E_2$$

$$= [T_\alpha(\kappa\tau) + (T_\alpha\tau)\kappa]E_1 + [(\kappa^2\tau) - T_\alpha T_\alpha\tau - \tau^3]E_2 + [-(T_\alpha\tau)\tau - T_\alpha\tau^2]E_3$$

O halde

$$det(T_\alpha E_3, T_\alpha T_\alpha E_3, T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3) = \begin{bmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ \kappa\tau & T_\alpha\tau & -\tau^2 \\ T_\alpha(\kappa\tau) + (T_\alpha\tau)\kappa & (\kappa^2\tau) - T_\alpha T_\alpha\tau - \tau^3 & -(T_\alpha\tau)\tau - T_\alpha\tau^2 \end{bmatrix}$$

$$= \tau[-(\kappa\tau^2)(T_\alpha\tau) - (\kappa\tau)T_\alpha\tau^2 + \tau^2 T_\alpha(\kappa\tau) + \tau^2\kappa(T_\alpha\tau)]$$

$$= [-(\kappa\tau)(2\tau T_\alpha\tau) + \tau^3(T_\alpha\kappa) + \tau^2\kappa T_\alpha\tau]$$

$$= \tau[-2\kappa\tau^2 T_\alpha\tau + \kappa\tau^2 T_\alpha\tau + \tau^3(T_\alpha\kappa)]$$

$$= \tau[-\kappa\tau^2 T_\alpha\tau + \tau^3 T_\alpha\kappa]$$

$$= \tau^3[-\kappa T_\alpha\tau + \tau T_\alpha\kappa]$$

$$= -\tau^3 T_\alpha\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)$$

$\frac{\kappa}{\tau} = sabit$ ise $det(T_\alpha E_3, T_\alpha T_\alpha E_3, T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3) = 0$ bulunur.

Tersine $det(T_\alpha E_3, T_\alpha T_\alpha E_3, T_\alpha T_\alpha T_\alpha E_3) = 0$ ise $\frac{\kappa}{\tau} = sabit$ olup $\gamma(s)$ bir helistir.

KAYNAKLAR

[1] Lancret M.A., (1806), M´emoire sur les courbes `a double courbure. M´emoires pr´esent´es `a l'Institut 1, 416-454.

[2] Barros M., (1997) General helices and a theorem of Lancret, Proc.Amer.Math.Soc.125(5) 1503–1509

[3] Ikawa, T. (1985). On curves and submanifolds in an indefinite-Riemannian manifold. Tsukuba J. Math., 9(2), 353-371.

[4] Barros M., Ferrandez A., Lucas P.and Merono M. A., (2001) General Helıces In The Three-Dımensıonal Lorentzıan Space Forms, Rocky Mountaın Journal Of Mathematıcs Volume 31, Number 2, Spring.

[5] Yampolsky A. and Opariy A. (2019) Generalized helices in three-dimensional Lie groups, Turk J Math. 43: 1447 – 1455.

[6] Choi, J-H, Kim, Y-H. (2013). Note on null helices in E31, Bull. Korean Math. Soc., 50 (3) , 885-899.

[7] Şahin, B., Kiliç, E., Güneş, R. (2001). Null helices in R31. Differ. Geom. Dyn. Syst., 3 (2), 31-36.

[8] Balgetir, H., Bektas, M. Ergut, M., (2001) On a characterization of null helices, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 29, 71–78.

[9] Balgetir, H., Bektas, M. and Inoguchi, J., (2004) Null Bertrand curves and their characterizations, Note Mat. 23, no. 1, 7–13.

[10] Bektas¸, M. (2004). On characterizations of general helices for ruled surfaces in the pseudo-Galilean space G1 3. J. Math. Kyoto Univ., 44(3), 523-528.

[11] Bektas¸, M. (2005). The characterizations of general helices in the 3-dimensional pseudo-Galilean space. Soochow J. Math., 31(3), 441-447.

[12] Özturk U, Özturk E.B.K, Nesovic E. (2018) On equiform Darboux helices in Galilean 3−space. Math Commun. **23**:145–59.

[13] Cetin E.Ç. ve Bektaş M., (2014) K-Type Slant Helıces For Symplectıc Curve In 4-Dımensıonal Symplectıc Space, Facta Unıversıtatıs (Nıs) Ser. Math. Inform. Vol. 35, No 3 (2020), 641-646

[14] Gözütok U., Çoban H.A. and Sağıroğlu Y., (2019), Frenet Frame with Respect to Conformable Derivative**,** Filomat, 33:6, 1541-1550.

[15] Hacısalihoğlu, H.H. (1983) Diferensiyel Geometri,İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları

[16] Sabuncuoğlu, A. (2014) Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları

[17] Khalil, R., AL Horani,M.; Yousef, A., Sabaheh, M., (2014) A New Definition of Fractional Derivative, Journal of Computaional and Applied Mathematics, 264,65-70.

[18] Abdeljawad, T. 2015. On conformable fractional calculus, Journal of computational and Applied Mathematics, 279, 57-66.

ÖZGEÇMİŞ

Ravza BARIŞ

[redacted]

[redacted]

[redacted]

ARAŞTIRMA DENEYİMİ

- ✓ Scientific WorkPlace bilgisayar programını kullanabiliyorum.