

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DARBOUX HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Ömer ÇİÇEK

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

TEMMUZ, 2021

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

DARBOUX HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Tez Yazarı
Ömer ÇİÇEK

Danışman
Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ

TEMMUZ, 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Darboux Helisler ve Karakterizasyonları
Yazarı: Ömer ÇİÇEK
İlk Teslim 31.05.2021
Savunma 14.07.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Doç. Dr. Gülden ALTAY SUROĞLU Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Darboux Helisler ve Karakterizasyonları” yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

ELAZIĞ, 2021

Ömer ÇİÇEK



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında benden yardım ve desteklerini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ'a ve hayatımın her anında yanımda olan ve benden desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Ömer ÇİÇEK
ELAZIĞ, 2021



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYI E^3 DE DARBOUX HELİSLER	5
3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayı ve E^3 de Darboux Helis Kavramı	5
3.2. Darboux Helisin Eksenini	8
4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYI E^4 DE DARBOUX HELİSLER.....	11
4.1. Dört Boyutlu Öklid Uzayı E^4 de Darboux Helislerin Özellikleri	12
5. E_1^4 4-BOYUTLU MİNKOWSKI UZAYI VE DARBOUX HELİSLER.....	14
KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Darboux Helisler ve Karakterizasyonları

Ömer ÇİÇEK

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Temmuz 2021, Sayfa viii+24

Bu çalışmada 3 ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında Darboux helisler ve karakterizasyonları araştırılmıştır. Bunlara ek olarak 4-boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 de Darboux helis tanımlanarak, karakterizasyonları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eğri, Helis, Darboux Vektörü, Serret-Frenet Çatısı

ABSTRACT

Darboux Helices and Their Characterizations

Ömer ÇİÇEK

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
July 2021, Page viii+24

In this thesis Darboux helices and their characterizations are examined. In addition, Darboux helices are defined in 4-dimensional Minkowski space and their characterizations are also given..

Keywords: Curve, Helices, Darboux Vector, Serret-Frenet Frame

SİMGELER

B	: Eğrinin binormal vektör alanı
E^3	: 3-Boyutlu Öklid uzayı
E^n	: n -boyutlu Öklid uzayı
M	: Yüzey
N	: Eğrinin asli normal vektör alanı
T	: Eğrinin birim teğet vektör alanı
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu vektör uzayı
κ	: Eğrilik
τ	: Torsiyon
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\ , \ $	: Norm

1. GİRİŞ

Bilimin pek çok sahasında kullanım alanı bulunan helisler doğadaki en ilgi çekici eğrilerin başında gelir. Fraktal geometriden, grafik tasarım alanlarına, bilgisayar teknolojilerinden DNA üçlü sarmallarına kadar farklı pek çok yapıda helis eğrilerine rastlamak mümkündür [1-3].

Geometrik bakış açısı ile helis, sıfırdan farklı sabit k_1 ve k_2 eğrilik oranına sahip bir eğridir. Bu eğriler sabit eğimli eğri ya da teğeti sabit bir doğru ile sabit açı yapan eğriler olarak tanımlanır.

1802’de Lancert tarafından ifade edilen 1845’te Venant tarafından kanıtlanan bir eğrinin helis olabilmesi için gerek ve yeter şartın $\frac{k_1}{k_2}$ olarak bilinen eğriliğin torsiyona olan oranının sabit olmasıdır. Eğer hem k_1 hem de k_2 sıfırdan farklı sabitler ise bu tip helisler dairesel helisler olarak adlandırılır. Düz çizgi ve dairede dejenere helis olarak bilinirler [4-5].

Takeuchi ve Izumuya [6] numaralı çalışmalarında helis tanımında kullanılan teğet vektörünü asli normal vektör ile değiştirerek slant helis kavramını tanımlamışlardır, bu eğriler ile ilgili pek çok farklı karakterizasyon da mevcuttur [7-14].

Bu çalışmanın n -boyutlu E^n Öklid uzayına genelleştirilmesi ile yeni bir slant helis tipi V_n – slant helisler olarak bilinirler [5]. Buna göre bir V_n – slant helis sabit bir x doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapan eğrilerdir.

Burada $\langle V_n, x \rangle = \cos \theta$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $\theta = \text{sabittir}$ [15]. (k, m) tipinden slant helisler ise M. Bektaş ve M.Y. Yılmaz tarafından tanımlanarak çalışılmıştır [16]. Tezimizin temel çalışma alanı olan Darboux helisler ise [17] de çalışılmıştır. Bu helis tipinde Frenet vektörleri yerine Darboux vektörü kullanılmıştır. Bir regüler eğrinin Darboux helis olması için gerekli tanımlamalar yapılarak, Darboux helislerinde genel helis olduğu sonucuna varılmıştır.

Ayrıca $k_1^2 + k_2^2 = \text{sabit}$ özel durumunun sabit devinimli eğrilere karşılık geldiği gösterilmiştir. Darboux helislerin 4-boyutlu Öklid uzayındaki karşılıkları ve karakterizasyonlarda [17] de verilmiştir.

Bu çalışmanın amacı 3 ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında Darboux helis kavramını inceleyerek özelliklerini ele almaktır. Daha sonra bu çalışmaların ışığı altında 4-boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 de Darboux helisler tanımlanmıştır. Bu uzayda Darboux helislerin karakterizasyonları elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: Boş olmayan bir cümle A ve bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki üç önermeye uyan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A 'ya V ile eşleşen bir Afin uzay denir.

A1) $\forall P, Q \in A$ nokta çifti için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $\alpha \in V$ vektörü vardır.

A2) A 'da belli bir nokta seçildiğinde A 'daki geri kalan her noktaya V 'deki bir vektör karşılık gelir.

A3) $\forall P$ için $Q, R \in A$ $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ 'dir. $F = \mathbb{R}$, reel sayılar cismi olarak alınması halinde afin uzaya reeldir denir [18].

Tanım 2.2: $\mathbb{R}^n$ standart n boyutlu reel vektör uzayıyla birleşen Afin uzay E^n ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ de iç çarpım işlemi olarak Öklid iç çarpımı:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow (\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \vec{X} = (x_1, \dots, x_n), \quad \vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$$

olarak alınırsa bu iç çarpım yardımıyla E^n 'de uzaklık ve metrik gibi kavramlar tanımlanabilir. Böylece E^n afin uzayı n -boyutlu Öklid uzayı adını alır.

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{X} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \} \quad [18].$$

Tanım 2.3: Bir n -boyutlu reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^n$ ile birleşen E^n Öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta n -lisi için eğer $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ in bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına bir dik çatı veya Öklid çatısı denir. Böylece bir çatıda tanımlanan $\{x_1, \dots, x_n\}$ sistemine afin koordinat sistemi veya Öklid koordinat sistemi denir [18].

Tanım 2.4: E^n uzayında $E_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $E_n = (0, 0, \dots, 1)$ noktaları bir dik çatı oluştururlar. E^n uzayında $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına Öklid çatısı denir [18].

Tanım 2.5: $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha : I^{\circ} \rightarrow E^n$ fonksiyonuna E^n de bir eğri denir [19].

Tanım 2.6: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin.

$\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine (regüler eğri) denir [20].

Tanım 2.7: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3 ayaklısı;

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \cdot \alpha'(t)$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

şeklindedir [19].

Tanım 2.8: $\alpha: I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3 ayaklısı;

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

$$B(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}$$

şeklindedir [19].

Tanım 2.9: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi için;

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eğriliği ile belirli $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir. N vektör alanına α eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir [20].

Tanım 2.10: E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi için;

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir [20].

Tanım 2.11: E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi için;

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [20].

Tanım 2.12: Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere;

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma (torsiyon) fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması (torsiyonu) denir [20].

Tanım 2.13: $M(I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için;

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisine birim hızlı eğri denir. $s \in I$ ya da yay parametresi adı verilir [19].

Tanım 2.14: $M \subset E^3$ eğrisi;

$$\alpha: I \rightarrow E^3 \text{ ve } s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$$

şeklinde verilsin. Bu durumda;

$$\psi = \{\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(r)}(s)\}$$

sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in S_p(\psi)$ olmak üzere ψ 'de elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine eğrinin Frenet çatısı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ sistemine ise $m \in M$ noktasındaki Frenet çatısı denir. Burada $V_i, 1 \leq i \leq r$ 'ye Frenet vektörü adı verilir [18].

Tanım 2.15: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir U sabit vektörü ile sabit açı teşkil ediyor ise, M ye bir eğilim çizgisi (helis) ve $S_p\{U\}$ ya da M eğilim çizgisinin eğilim ekseni denir [21].

Tanım 2.16: Eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken $\{T, N, B\}$ vektörleri değişirler, dolayısıyla küresel göstergeler oluşurlar. Eğrinin, $\{T, B, N\}$ üç-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) ekseni denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör $w = \tau T + \kappa B = N \wedge N'$ olup eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü adını alır. $w = N \wedge N'$ olduğu,

$$N \wedge N' = \begin{bmatrix} T & N & B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \end{bmatrix}$$

ifadesinden kolayca görülebilir [21].

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYI E^3 DE DARBOUX HELİSLER

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux helisler tanımlanarak eğrilik ve torsiyon yardımı ile karakterize edilecektir.

3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayı ve E^3 de Darboux Helis Kavramı

Tanım 3.1: Herhangi bir birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ için,

$$C = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanın α nın modifiye edilmiş Darboux vektör alanı denir [17].

Tanım 3.2: α , E^3 de $\frac{\tau}{\kappa} \neq 0$ ve $\kappa \neq 0$ özelliğine sahip bir eğri olsun. α nın Darboux vektörü W olmak üzere W ile sabit bir açı yapan sabit d vektörü var ise yani,

$$\langle W, d \rangle = \text{sabit}$$

şartını sağlayan eğriye E^3 de bir Darboux helis denir. Burada $W = \tau T + \kappa B$ dir ve d vektörünün yönü Darboux helisin eksenidir.

Her genel helis bir slant helis olmasına rağmen her genel helis bir Darboux helis değildir [17].

Teorem 3.1: α eğrisinin Darboux helis olması için gerek ve yeter şart;

$$\delta^*(s) = \frac{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [17].

İspat: Eğer W , Darboux vektörünün küresel göstergesi bir çember veya çemberin bir parçası ise α eğrisi bir Darboux helistir. (c) eğrisinin parametresi S_c olsun. T_c de (c) nin birim teğet vektörü olsun. κ_c ile (c) nin E^3 de geodezik eğriliği gösterilsin.

$$\alpha(S_c) = c(s) = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} B$$

$$\alpha(S_c) = \sin \Phi T + \cos \Phi B$$

$$\frac{d\alpha}{dS_c} = \frac{dc}{ds} \frac{ds}{dS_c}$$

$$\frac{d\alpha}{dS_c} = (\Phi' \cos \Phi T - \Phi' \sin \Phi B + \kappa \sin \Phi N - \tau \cos \Phi M) \frac{ds}{dS_c}$$

$$T_c = \frac{d\alpha}{dS_c} = (\Phi' \cos \Phi T - \Phi' \sin \Phi B) \frac{ds}{dS_c}$$

$$\|T_c\| = \left\| (\Phi' \cos \Phi T - \Phi' \sin \Phi B) \frac{ds}{dS_c} \right\|$$

$$1 = \Phi' \frac{ds}{dS_c}$$

$$\frac{ds}{dS_c} = \frac{1}{\Phi'}$$

$$T_c = \cos \Phi T - \sin \Phi B \tag{3.1}$$

$$D_{T_c}^{T_c} = \frac{dT_c}{dS_c} \cdot \frac{ds}{dS_c}$$

$$D_{T_c}^{T_c} = (-\Phi' \sin \Phi T - \Phi' \cos \Phi B + \kappa \cos \Phi N + \tau \sin \Phi N) \frac{1}{\Phi'}$$

$$D_{T_c}^{T_c} = \left(-\sin \Phi T - \cos \Phi B + \frac{\|W\|}{\Phi'} N \right) \tag{3.2}$$

$$\kappa_c = \|D_{T_c}^{T_c}\| = \left\| -\sin \Phi T - \cos \Phi B + \frac{\|W\|}{\Phi'} N \right\|$$

$$\kappa_c = \|D_{T_c}^{T_c}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\|W\|}{\Phi'} \right)^2} \tag{3.3}$$

elde edilir.

$$D_{T_c}^{T_c} = \nabla_{T_c}^{T_c} - c(s)$$

$$\kappa_c^2 = \kappa_g^2 + 1 \tag{3.4}$$

Gauss dönüşümü kullanılarak,

$$D_{T_c}^{T_c} = \nabla_{T_c}^{T_c} - \langle s(T_c), T_c \rangle c(s)$$

(3.3) ve (3.4) denklemlerinden,

$$1 + \left(\frac{\|W\|}{\Phi'} \right)^2 = \kappa_g^2 + 1$$

$$\kappa_g = \frac{\|W\|}{\Phi'} \quad (3.5)$$

Öte yandan türev alınırsa,

$$\tan \Phi = \frac{\tau}{\kappa}$$

$$\Phi' (1 + \tan^2 \Phi) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

$$\Phi' = \left(\frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \cdot \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (3.6)$$

(3.5) ve (3.6) denklemlerinden,

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\left(\frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \cdot \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'} \\ \kappa_g = \frac{(\kappa^2 + \tau^2) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'}}$$

elde edilir.

Burada $\|W\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir. (c) nin küresel göstergesi bir çember veya bir çemberin parçasıdır. Çemberin κ eğriliği sabit olduğundan $\kappa_c = \text{sabit}$, yani $\kappa_g = \text{sabittir}$. $\kappa_g = \sigma^*(s)$ ile belirtilirse,

$$\kappa_g = \frac{(\kappa^2 + \tau^2) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)'}} = \sigma^*(s)$$

$\sigma^*(s)$ sabit olur [17].

Teorem 3.2: $\alpha: I \rightarrow E^3$, E^3 de bir eğri olsun. κ eğrisinin eğriliği, τ da torsiyonu olmak üzere $\frac{\kappa}{\tau}$ oranının sabit olmadığı varsayılın. Buna göre α nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart α nın Darboux helis olmasıdır [17].

İspat: α bir slant helis olsun. Böylece,

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (3.7)$$

yazılabilir. Benzer şekilde, α Darboux helis ise,

$$\sigma^*(s) = \frac{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'} \quad (3.8)$$

elde edilir.

$$\sigma(s) \cdot \sigma^*(s) = \text{sabit}$$

elde edilir.

Şimdi de Teorem 3.1 den slant helisin bir Darboux helis olduğunu göz önüne alarak Darboux helisin eksenini bulunacaktır [17].

3.2. Darboux Helisin Eksenini

Önce α nın slant helis olduğu varsayılırsa d

$$\langle N, d \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$$

olacak şekilde bir vektör alanı olsun. Buna göre,

$$d = a_1 T + a_3 B + \cos \theta N \quad (3.9)$$

olacak şekilde a_1 ve a_3 değerleri vardır.

(3.9) denkleminin türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$d' = (a_1' - \cos \theta \kappa) T + (a_1 \kappa - \tau a_3) N + (a_3' + \cos \theta \tau) B$$

elde edilir.

$\{T, N, B\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan,

$$a_1' - \cos \theta \kappa = 0 \quad (3.10)$$

$$a_1\kappa - \tau a_3 = 0 \quad (3.11)$$

$$a_1 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) a_3 \quad (3.12)$$

$$\langle d, d \rangle = a_1^2 + a_3^2 + \cos^2 \theta = \text{sabit} \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 a_1^2 + a_3^2 + \cos^2 \theta = \text{sabit} \quad (3.14)$$

$$\left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + 1\right) a_3^2 = m^2 \quad (3.15)$$

(3.15) denkleminin türevi alınıp, (3.13) denklemi kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\kappa^2}{\left(\tau^2 + \kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \text{sabit} \quad (3.16)$$

d den α nın bir slant helis olduğu sonucuna varılır. Tersine, (3.16) denklemi sağlansın ve hesaplamaların kolaylaşması için (3.16) nın sabit olduğu kabul edilsin.

$$d = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} B + \cos \theta N \quad (3.17)$$

olarak tanımlansın. (3.17) nin türevi alınarak Frenet denklemleri kullanılırsa $d' = 0$ elde edilir. Yani d sabit bir vektördür. Diğer yandan,

$$\langle N, d \rangle = \cos \theta$$

dır ve bu da α nın slant helis olduğu anlamına gelir.

Şimdi $W = \tau T + \kappa B$ Darboux vektörünün,

$$d = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} B + \cos \theta N$$

Sabit yönü ile sabit açı yaptığı gösterilecektir. d sabit yönü hem slant helisin hem de Darboux helisin eksenidir. Eksenlerin çakışmasına rağmen bu helislerin d ile yaptıkları açı farklıdır. α slant helis olduğundan $\langle N, d \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$ tir.

$$d = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} B + \cos \theta N$$

$$d = \frac{W}{\|W\|} + \cos \theta N$$

$$\langle d, W \rangle = \|d\| \cdot \|W\| \cdot \cos \lambda$$

$$\langle d, W \rangle = \sqrt{1 + \cos^2 \theta} \|W\| \cdot \cos \lambda$$

$$\frac{\langle W, W \rangle}{\|W\|} = \sqrt{1 + \cos^2 \theta} \|W\| \cdot \cos \lambda$$

$$\cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}$$

$\cos \theta = \text{sabit}$ olduğundan $\cos \lambda$ da sabittir [17].

4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYI E^4 DE DARBOUX HELİSLER

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ n -boyutlu Öklid uzayında keyfi bir eğri olsun. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$, eğrisini birim hızlı olarak alalım (uzunluk fonksiyonu s olsun).

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^n \text{ için } \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

ile E^n 'deki standart iç çarpım belirtilir.

Özel olarak $x \in E^n$ vektörünün normu $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$ ile verilir. $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ birim hızlı α eğrisi boyunca hareketli Frenet çatısı olsun. Burada $V_i (i=1, 2, \dots, n)$ Frenet vektör alanlarıdır.

$$\begin{cases} V'(s) = k_1(s)V_s(s), \\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ V_n'(s) = -k_{n-1}(s)V_{n-1}(s) \end{cases} \quad (4.1)$$

$k_i (i=1, 2, \dots, n-1)$, eğrinin i . Eğrilik fonksiyonunu göstermektedir [14]. Eğrinin tüm eğrilikleri $I \subset \mathbb{R}$, boyunca sıfırdan farklı ise, bu eğri dejenere olmayan eğri olarak adlandırılır. Bu çalışma Darboux helis, genel helis ve V_n slant helis ile ilgili olduğundan ilk olarak tanımları verelim:

Tanım 4.1: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ için s parametrelili s ile E^n de bir eğri olsun. X' 'de E^n de sabit birim vektör olsun. Tüm $s \in I$ eğer $\langle \alpha'(s), X \rangle = \cos \varphi$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \text{sabit}$ ise α eğrisi genel helis olarak adlandırılır [4, 5].

Tanım 4.2: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ E^n $k_i (i=1, 2, \dots, n)$ sıfır olmayan eğriliklere sahip birim hızlı eğri olsun. $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ de α eğrisinin Frenet çatısını gösterebilir. Eğer n 'inci Frenet vektörü V_n olmak üzere V_n birim vektör alanı, sabit X doğrultusu ile sabit φ açısını yapıyorsa yani $\langle V_n(s), X \rangle = \cos \varphi$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \text{sabit}$ ise α 'ya V_n -slant helis denir [15].

Tanım 4.3: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, E^n de sıfır olmayan eğimli birim hızlı eğri olsun. $k_i (i=1, 2, \dots, n)$ harmonik eğrilikleri $H_i: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $i=1, 2, \dots, n-2$ olmak üzere;

$$H_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \frac{k_1}{k_2} & i = 1 \\ \{H_{i-1} + H_{i-1}\} \frac{1}{k_{i+1}}, & i = 2, 3, \dots, n-2 \end{cases} \quad (4.2)$$

dir [24].

Tanım 4.4: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, E^n de birim hızlı dejenere olmayan eğri olsun.

$\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, $\{H_1, H_2, \dots, H_{n-2}\}$ de sırasıyla Frenet çatısını ve eğrinin yüksek mertebeden eğriliklerini gösterebilir.

$$D = V_1 + H_1 V_2 + \dots + H_{n-2} V_{n-1}$$

olarak tanımlı D vektörü α eğrisinin genelleştirilmiş Darboux vektörü olarak adlandırılır [12].

Tanım 4.5: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, E^n de birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux vektörü D , sabit bir birim U doğrultusu ile sabit φ açısı yaparsa α Darboux helis olarak adlandırılır [17]. Yani $\langle D, U \rangle = \text{sabit} \neq 0$

4.1. Dört Boyutlu Öklid Uzayı E^4 de Darboux Helislerin Özellikleri

Bu bölümde E^n de sıfır olmayan k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir α eğrisinin Darboux helis, genel helis ve V_4 -slant helis olması için gerekli bazı karakterizasyon teoremleri verildi.

Teorem 4.1: α E^4 de sıfır olmayan ve sabit olmayan k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip yay parametrelili bir eğri ve $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri olsun. α nın E^4 de Darboux helis olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının,

$$\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \left(\cos \int k_3(s) ds \right) + \lambda_2 \left(\sin \int k_3(s) ds \right) \quad (4.3)$$

şartını sağlamasıdır. Burada λ_1 ve λ_2 sıfır olmayan sabitlerdir [24].

Teorem 4.2: α E^4 de sıfır olmayan ve sabit olmayan k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip yay parametrelili bir eğri ve $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ eğrinin Frenet vektörleri olsun. Buna göre α nın E^4 de bir genel helis olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının;

$$\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \left(\cos \int k_3(s) ds \right) + \lambda_2 \left(\sin \int k_3(s) ds \right) \quad (4.4)$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada λ_1 ve λ_2 sıfır olmayan sabitlerdir [24].

Teorem 4.3: : α E^4 de sıfır olmayan ve sabit olmayan k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip yay parametrelili bir eğri ve $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ eğrinin Frenet vektörleri olsun. Buna göre α nın V_4 te slant helis olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının;

$$\frac{k_1.k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' = 0$$

eşitliğini sağlamasıdır [24].

Sonuç 4.1: $\forall s \in \mathbb{R}$ için $k_1(s) = k_3(s)$ durumunda aşağıdakiler eşdeğerdir.

α , Teorem 4.1'i sağlıyor ise E^4 te bir Darboux helistir.

α , Teorem 4.2'yi sağlıyor ise E^4 te bir genel helistir.

α , Teorem 4.1'i sağlıyor ise E^4 te bir V_4 -slant helistir [24].

5. E_1^4 4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYI VE DARBOUX HELİSLER

Bu kısımda E_1^4 4-boyutlu Minkowski uzayının temel yapısı ele alınarak, bu uzayda Darboux helisler tanımlanacak ve karakterizasyonları elde edilecektir.

(x_1, x_2, x_3, x_4) E_1^4 de dik koordinat sistemi olmak üzere E_1^4 4-boyutlu Minkowski uzayı,

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

yarı-tanımlı g metriği ile donatılmış 4-boyutlu Öklid uzayıdır.

$v \in E_1^4 - \{0\}$ keyfi vektörü

i) Eğer $g(v, v) > 0$ ise spacelike

ii) Eğer $g(v, v) < 0$ ise timelike

iii) Eğer $g(v, v) = 0$ ise null (lightlike)

olarak adlandırılır [23, 4].

v vektörünün normu $\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$ 'dir.

$v \in w$ vektörleri için $g(v, w) = 0$ şartı sağlanıyorsa bu vektörlere ortogonaldirler denir.

E_1^4 de keyfi bir $\alpha(s)$ eğrisinin $\alpha'(s)$ hız vektörü spacelike, timelike veya null (lightlike)

ise bu eğri sırasıyla lokal olarak spacelike, timelike veya null eğri olur.

Bir spacelike veya timelike eğri için,

$$g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \mp 1$$

şartı sağlanırsa birim hızlıdır [22, 23, 4].

Pseudo küre, pseudo hiperbolik uzay ve light koni E_1^4 de hiper kuadriklerdir ve sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlanırlar.

$$S_1^3(m, r) = \{x \in E_1^4; g(x - m, x - m) = r^2\}$$

$$H_0^3(m, r) = \{x \in E_1^4; g(x - m, x - m) = -r^2\}$$

$$C^3(m) = \{x \in E_1^4; g(x - m, x - m) = 0\}$$

Burada $r > 0$ yarıçap ve $m \in E_1^4$ de hiper kuadriğin merkezidir.

E_1^4 de null olmayan birim hızlı bir α eğrisi boyunca hareketli Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$

olsun. Burada T, N, B_1, B_2 sırasıyla teğet, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları olarak adlandırılırlar [23, 4].

Eğer α bir spacelike eğri ise bu eğrinin Frenet çatısının sadece null olmayan vektör alanlarını içerdiği kabul edilecektir. Böylece $\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal çatı olur.

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{-1, 1\}$$

olmak üzere

$$g(T, T) = \varepsilon_1, \quad g(N, N) = \varepsilon_2, \quad g(B_1, B_1) = \varepsilon_3, \quad g(B_2, B_2) = \varepsilon_4$$

olarak alınsın. Dahası her $j \neq i$ ($i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$) için $\varepsilon_i = -1$ ise $\varepsilon_j = 1$ ve $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 = -1$ 'dir.

$\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal çatısı için T', N', B_1', B_2' vektör alanları aşağıdaki biçimde verilir.

$$T' = \varepsilon_1 g(T', T)T + \varepsilon_2 g(T', N)N + \varepsilon_3 g(T', B_1)B_1 + \varepsilon_4 g(T', B_2)B_2$$

$$N' = \varepsilon_1 g(N', T)T + \varepsilon_2 g(N', N)N + \varepsilon_3 g(N', B_1)B_1 + \varepsilon_4 g(N', B_2)B_2$$

$$B_1' = \varepsilon_1 g(B_1', T)T + \varepsilon_2 g(B_1', N)N + \varepsilon_3 g(B_1', B_1)B_1 + \varepsilon_4 g(B_1', B_2)B_2$$

$$B_2' = \varepsilon_1 g(B_2', T)T + \varepsilon_2 g(B_2', N)N + \varepsilon_3 g(B_2', B_1)B_1 + \varepsilon_4 g(B_2', B_2)B_2$$

$$k_1(s), k_2(s), k_3(s)$$

eğrilik fonksiyonları,

$$k_1(s) = g(T'(s), N(s))$$

$$k_2(s) = g(N'(s), B_1(s))$$

$$k_3(s) = g(B_1'(s), B_2(s))$$

olarak tanımlanır ve Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ -k_1 \varepsilon_1 & 0 & k_2 \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & -k_2 \varepsilon_2 & 0 & -k_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & -k_3 \varepsilon_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklemler

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = g(B_1, B_2) = 0$$

şartlarını sağlar [23, 4].

E_1^4 'deki bir α eğrisi $\forall s \in I$ için $k_3(s) \neq 0$ ise tamamen E_1^4 'de yatıyor denir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 k_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1 & 0 & \varepsilon_3 k_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 = \{1, -1\}$ ve $[T, N, B_1, B_2]$ Frenet vektörleri,

$$\begin{aligned}
T' &= \varepsilon_2 k_1 N \\
N' &= -\varepsilon_1 k_1 T + \varepsilon_3 k_2 B_1 \\
B_1' &= -\varepsilon_2 k_2 N - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 B_2 \\
B_2' &= -\varepsilon_3 k_3 B_1
\end{aligned}$$

Teorem 5.1: α, E_1^4 de sıfır olmayan ve sabit olmayan k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip yay parametrelili bir eğri $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet vektörleri olsun. α 'nın E_1^4 de Darboux helis olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının;

$$\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \left(\cos \int k_3(s) ds \right) + \lambda_2 \left(\sin \int k_3(s) ds \right) \quad (5.1)$$

şartını sağlamalıdır. λ_1 ve λ_2 sıfır olmayan sabitlerdir.

İspat: Varsayalım α, E_1^4 Darboux helis olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned}
H_j : I &\rightarrow \mathbb{R} \\
\langle V_{j+2}, x \rangle &= H_j \cosh(\varphi) \text{ ve } H_0 = 0 \\
\langle V_{j+2}, x \rangle &= H_j \langle V_1, x \rangle, \quad 1 \leq j \leq n-1
\end{aligned}$$

Eğer α, x ekseninde yatan bir helis ise bu sonuç yazılabilir.

$$\begin{aligned}
x &= \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n \\
x &= \lambda_1 V_1 \text{ alınırsa,} \\
\lambda_j &= \langle V_j, x \rangle = H_{j-2} \langle V_1, x \rangle \\
\langle V_1, x \rangle &= \cosh \theta \\
\lambda_1 &= \langle V_1, x \rangle = \cosh \theta \\
\lambda_2 &= \langle V_2, x \rangle = H_0 \langle V_2, x \rangle = 0 \quad \langle V_2, x \rangle = 0 \\
\lambda_3 &= \langle V_3, x \rangle = H_1 \langle V_1, x \rangle = \frac{k_1}{k_2} \langle V_1, x \rangle = \frac{k_1}{k_2} \cosh \theta \\
\lambda_4 &= \langle V_4, x \rangle = H_2 \langle V_1, x \rangle = H_1' + \varepsilon_0 H_0 k_2 \cdot \frac{\varepsilon_2}{k_3} \cosh \theta \\
x &= \cosh \theta (V_1 + H_1 V_3 + H_2 V_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= V_1 + H_1 V_3 + H_2 V_4 = V_1 + \frac{k_1}{k_2} B_1 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2} \right)' + \underbrace{\varepsilon_0 H_0 k_2}_0 \right) \frac{\varepsilon_2}{k_3} B_2 \\
&= V_1 + \frac{k_1}{k_2} B_1 + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \cdot \frac{\varepsilon_2}{k_3} B_2
\end{aligned}$$

E_1^4 de sabit bir U doğrultusu ile açı yapar öyle ki,

$$U = c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2$$

Burada c_1, c_2, c_3, c_4 sıfırdan farklı sabitlerdir. Böylece,

$$\langle D, U \rangle = \text{sabit} \neq 0 \quad (5.2)$$

dir.

(5.2) eşitliğinde s ye göre türev alırsak

$$\langle D', U \rangle = 0 \quad (5.3)$$

bulunur.

$$D = T + \frac{k_1}{k_2} B_1 + \frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_2$$

$$U = c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2$$

$\langle D, U \rangle$ sabit olduğunu gösterelim.

$$\langle D, U \rangle = \left\langle T + \frac{k_1}{k_2} B_1 + \frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_2, c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2 \right\rangle$$

$$c_1 \langle T, T \rangle + 0 + 0 + 0 + c_3 \frac{k_1}{k_2} \langle B_1, B_1 \rangle + 0 + 0 + 0 + c_4 \frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \langle B_2, B_2 \rangle$$

$$c_1 + c_3 \frac{k_1}{k_2} + c_4 \frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' = \text{sabit} \quad \text{olur.}$$

$$D' = T' + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_1 + \frac{k_1}{k_2} B_1' + \left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' B_2 + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_2'$$

$$D' = \varepsilon_2 k_1 N + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_1 + \frac{k_1}{k_2} (-\varepsilon_2 k_2 N - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 B_2) + \left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' B_2 + \frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' (-\varepsilon_3 k_3 B_1)$$

$$D' = \varepsilon_3 k_1 N + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_1 - k_2 \varepsilon_2 N - \frac{k_1 k_3}{k_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 B_2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' B_2 - \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_1$$

$$D' = (\varepsilon_2 k_1 - \varepsilon_2 k_1) N + \left[\left(\frac{k_1}{k_2} \right)' - \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right] B_1 + \left[\left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' - \frac{k_1 k_3}{k_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \right] B_2$$

$$D' = \left[\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' \right] B_2$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle D', U \rangle &= \left\langle \left[\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' \right] B_2, c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2 \right\rangle \\ &= 0 + c_4 \left(\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' \right) \langle B_2, B_2 \rangle = 0 \\ &= c_4 \left(\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' \right) = 0 \end{aligned}$$

$c_4 \neq 0$ olduğundan,

$$\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' = 0$$

elde edilir.

$$\frac{k_1}{k_2} = y(s) \text{ ve } \frac{\varepsilon_2}{k_3} = \frac{1}{p(s)} \text{ alınır ise,}$$

$$y'(s) = \frac{dy}{ds}, \quad y'(t) = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$$p(s)(y'(t))' + y(s) = 0$$

$$(y(t))'' + y(s) = 0$$

$$y'' + y = 0$$

olur. Buradan $\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \cdot \cos\left(\int k_3(s) ds\right) + \lambda_2 \cdot \sin\left(\int k_3(s) ds\right)$ elde edilir.

$$D = T + \frac{k_1}{k_2} B_1 + \frac{\varepsilon_2}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_2$$

O halde

$$D' = \left[\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' \right] B_2$$

Buradan $D' = 0$ olur. O halde Tanım 4.5'e göre Darboux helistir.

Teorem 5.2: α , E_1^4 sıfır olmayan ve sabit olmayan k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip yay parametrelili bir eğri ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ eğrinin Frenet vektörleri olsun. Buna göre α nın E_1^4 de bir genel helis olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının,

$$\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \cdot \cos\left(\int k_3(s) ds\right) + \lambda_2 \cdot \sin\left(\int k_3(s) ds\right)$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada λ_1 ve λ_2 sıfır olmayan sabitlerdir.

İspat: Farz edelim ki α , E_1^4 de yay parametrelili sabit ve sıfır olmayan k_1, k_2, k_3 eğrilik ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet vektörlerine sahip bir genel helis olsun. Buna göre E_1^4 de sabit bir $U = c_1T + c_2N + c_3B_1 + c_4B_2$ doğrultusu için,

$$\langle T, U \rangle = c_1 \neq 0 = \text{sabit}$$

yazılabilir. Türevini alarak ve Frenet formüllerini kullanarak bazı U bileşenleri aşağıdaki gibi olur.

$$T' = \varepsilon_2 k N$$

$$N' = -\varepsilon_1 k_1 T + \varepsilon_3 k_2 B_1$$

$$B_1' = -\varepsilon_2 k_2 N - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 B_2$$

$$B_2' = -\varepsilon_3 k_3 B_1$$

$$[\langle T, U \rangle]' = 0$$

$$\begin{aligned} & \langle T', U \rangle + \langle T, c_1 T' + c_2 N' + c_3 B_1' + c_4 B_2' \rangle \\ &= \langle \varepsilon_2 k_1 N, c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2 \rangle + \langle T, c_1 \varepsilon_2 k_2 N \rangle \\ & \quad + \langle T, c_2 (-\varepsilon_1 k_1 T + \varepsilon_3 k_2 B_1) \rangle + \langle T, c_3 (-\varepsilon_2 k_2 N - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 B_2) \rangle \\ & \quad + \langle T, c_4 (-\varepsilon_3 k_3 B_1) \rangle \end{aligned}$$

$$= c_2 \varepsilon_2 k_1 \langle N, N \rangle - c_2 \varepsilon_1 k_1 \langle T, T \rangle + 0 + 0$$

$$= c_2 \varepsilon_2 k_1 - c_2 \varepsilon_1 k_1 = 0$$

elde edilir.

$$c_0 = \langle T, U \rangle$$

$$c_0 = \langle T, c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2 \rangle$$

$$c_0 = c_1 \langle T, T \rangle$$

$$c_0 = c_1$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \langle T', U \rangle \\
c_1 &= \langle \varepsilon_2 k_1 N, c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2 \rangle \\
c_1 &= \varepsilon_2 k_1 c_2 \langle N, N \rangle = 0 \\
c_1 &= \varepsilon_2 k_1 c_2 = 0 \\
\varepsilon_2 k_1 &\neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan $c_2 = 0$

Buradan

$$U = c_0 T + 0N + c_3 B_1 + c_4 B_2$$

$$U = c_0 T + c_3 B_1 + c_4 B_2$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= \langle N, U \rangle = \langle N, c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2 \rangle \\
\langle N', U \rangle &= \langle -\varepsilon_1 k_1 T + \varepsilon_3 k_2 B_1, c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2 \rangle \\
&= \varepsilon_1 k_1 c_1 \langle T, T \rangle + 0 + 0 + \varepsilon_2 k_3 c_3 \langle B_1, B_1 \rangle + 0 + 0 \\
&= \varepsilon_1 k_1 c_1 + \varepsilon_2 k_3 c_3 = 0 \\
&= c_3 = \frac{\varepsilon_1 k_1}{\varepsilon_2 k_3} c_1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \\
&= c_3 = \frac{k_1}{k_3} c_1, \quad c_1 = c_0 \\
&= c_3 = \frac{k_1}{k_2} c_0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$U = c_0 T + \frac{k_1}{k_2} c_0 B_1 + c_4 B_2$$

$$U' = c_0 T' + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_0 B_1 + \frac{k_1}{k_2} c_0 B_1' + c_4 B_2'$$

$$\begin{aligned}
\langle N', U' \rangle &= \left\langle N', c_0 T' + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_0 B_1 + \frac{k_1}{k_2} c_0 B_1' + c_4 B_2' \right\rangle \\
&= \left\langle -\varepsilon_1 k_1 T + \varepsilon_3 k_2 B_1, c_0 \varepsilon_2 k_1 N + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_0 B_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{k_1}{k_2} c_0 (\varepsilon_2 k_2 N - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 B_2) + c_4 (-\varepsilon_3 k_3 B_1) \right\rangle \\
&= \varepsilon_3 k_2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_0 \langle B_1, B_1 \rangle + \varepsilon_3 k_2 c_4 (-\varepsilon_3 k_3) \langle B_1, B_1 \rangle \\
&= \varepsilon_3 k_2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_0 - \varepsilon_3 k_2 \varepsilon_3 k_3 c_4 = 0
\end{aligned}$$

$$c_4 = \frac{\varepsilon_3 k_2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_0}{\varepsilon_3 k_2 \varepsilon_3 k_3}, \quad \varepsilon_3 = 1$$

$$c_4 = \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_0$$

elde edilir. Buradan

$$U = c_0 T + \frac{k_1}{k_2} c_0 B_1 + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_0 B_2$$

$$U = c_0 \left[T + \frac{k_1}{k_2} B_1 + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_2 \right]$$

Türevini alırsak,

$$U' = c_0 \left[T' + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_1 + \frac{k_1}{k_2} B_1' + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' B_2 + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right) B_2' \right]$$

$$U' = c_0 \left[\varepsilon_2 k_2 N + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_1 - \varepsilon_2 k_2 N - \frac{k_1 k_3}{k_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 B_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' B_2 + -\varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_1 \right]$$

$$U' = c_0 \left[\underbrace{(\varepsilon_2 k_2 - \varepsilon_2 k_2)}_{=0} N + \underbrace{\left(\left(\frac{k_1}{k_2} \right)' - \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)}_{=0} B_1 \right. \\ \left. + \left(-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' \right) B_2 \right]$$

$$U' = c_0 \left[\underbrace{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}_{-1} \frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' \right] B_2$$

$c_0 \neq 0$ ve $B_2 \neq 0$ olduğundan,

$$\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} &= c_1 \cos \left(\int k_3(s) ds \right) + c_2 \sin \left(\int k_3(s) ds \right) \\ U &= c_0 \left(T + \frac{k_1}{k_2} B_1 + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_2 \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$c_0 \in \mathbb{R}$ ve $U' = 0$ dolayısıyla U sabit bir vektördür.

$\langle T, U \rangle = c_1 \neq 0 = \text{sabit}$ olur. Bu da Tanım 4.2'ye göre E_1^4 de genel helistir.

Teorem 5.3: α , E_1^4 de sıfır olmayan ve sabit olmayan k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip yay parametrelili bir eğri ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ eğrinin Frenet vektörleri olsun. Buna göre α 'nın B_2 'de slant helis olması için gerek ve yeter şart;

$$\frac{k_1 k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' = 0$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: Varsayalım ki α , E_1^4 de yay parametrelili sabit ve sıfır olmayan k_1, k_2, k_3 eğrilikli ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet vektörlerine sahip bir genel helis olsun. Buna göre U vektörü,

$$U = c_1 T + c_2 N + c_3 B_1 + c_4 B_2$$

için

$$\langle B_2, U \rangle = c_4 = \text{sabit} \neq 0 \quad (5.4)$$

dir.

(5.4) ifadesinin türevi alınarak ve U nun bileşenlerinin hesaplanması aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} U &= -c_4 \left[\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' T + \frac{k_2}{k_3} N + B_2 \right] \\ U' &= -c_4 \left[\left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' T + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' T' + \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' N + \frac{k_3}{k_2} N' + B_2' \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U' &= -c_4 \left[\left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' T + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' (\varepsilon_2 k_1 N) + \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' N \right. \\
&\quad \left. + \frac{k_3}{k_2} (-\varepsilon_1 k_1 T + \varepsilon_2 k_2 B_1) - \varepsilon_3 k_3 B_1 \right] \\
U' &= -c_4 \cdot \left[\left(\left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' - \varepsilon_1 \frac{k_1 \cdot k_3}{k_2} \right) T + \left(\underbrace{\left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \varepsilon_2 + \left(\frac{k_3}{k_2} \right)'}_{=0} \right) N \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{(\varepsilon_3 k_3 - \varepsilon_3 k_3)}_{=0} B_1 \right] \\
U' &= -c_0 \left[\left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' + \frac{k_1 \cdot k_3}{k_2} \right] T
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\langle B_2', U' \rangle &= \langle B_2', c_1 T' + c_2 N + c_3 B_1' + c_4 B_2' \rangle \\
&= \langle -\varepsilon_3 k_3 B_1, c_1 \varepsilon_2 k_1 N + c_2 (-\varepsilon_1 k_1 T + \varepsilon_3 k_2 B_1) \\
&\quad + c_3 (-\varepsilon_2 k_2 N - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 B_2) + c_4 (-\varepsilon_3 k_3) B_1 \rangle \\
&= -\varepsilon_3 k_3 c_2 \varepsilon_2 k_2 \langle B_1, B_1 \rangle + \varepsilon_3 k_3 \varepsilon_3 k_3 c_4 \langle B_1, B_1 \rangle \\
&\quad - \varepsilon_3 \varepsilon_2 k_3 k_2 c_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_3 k_3 k_3 c_4 = 0
\end{aligned}$$

$$c_4 = \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_2 k_2 k_3 c_2}{\varepsilon_3 \varepsilon_3 k_3 k_3}, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon_2 = 1$$

$$c_4 = c_2 \frac{k_2}{k_3}$$

elde edilir. Böylece;

$$U = c_4 \left[- \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' - \frac{k_1 k_3}{k_2} \right] T = 0$$

$c_4 \neq 0$ ve $T \neq 0$ olduğundan,

$$\left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)' + \frac{k_1 k_3}{k_2} = 0$$

elde edilir. Bu da istenendir.

KAYNAKLAR

- [1] Barros, M., Ferrandez, A., (2009). A conformal variational approach for helices in nature. J. Math Phys., 50(10):103529.
- [2] Chouaieb, N., Goriely, A., Maddocks, J.H. (2006). Helices. Proc natl Acad Sci, USA. 103(25):9398-403.
- [3] Forterre, Y., Dumaïs, J. (2011). Generating helices in nature. Science., 333(6050): 1715-1716.
- [4] Kuhnel, W. (1999). Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds, Student mathematical library, vol. 16. Providence, RI: American Mathematical Society; 1999.
- [5] Lancret, M.A. (1806). Mémoire sur les courbes a double courbure. Mémoires présentés a l'Institut. 1:416-454.
- [6] Izumiya, S., Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. Turkish J. Math., 28: 531-537.
- [7] Ali, A. (2012). Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. J. Egyptian Math Soc. 20:1-6.
- [8] Kula, L., Yaylı, Y. (2005). On slant helix and its spherical indicatrix. Appl Math Comput. 169:600-607.
- [9] Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y., İlarslan, K. (2010). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. Turkish J. Math., 34:261-273.
- [10] Turgut, M., Yılmaz, S. (2008). Characterizations of some special helices in E^4 . Sci Magna. 4:51-55.
- [11] Yang, X. (2003). High accuracy approximation of helices by quintic curve. Comput Aided Geometric Design, 20, 303-17.
- [12] Camcı, C., İlarslan, K., Kula, L., Hacısalihoğlu, H.H. (2008). Harmonic curvatures and generalized helices in E^n . Chaos, Solitons Fractals. 40(5): 2590-2596.
- [13] Özdamar, E., Hacısalihoğlu, H.H. (1975). A characterization of inclined curves in Euclidean n-space. Comm Fac Sci Univ Ankara Ser A1. 24:15-23.
- [14] Gluck, H. (1966). Higher curvatures of curves in Euclidean space. Amer Math Monthly, 73:699-704.
- [15] Gök, İ., Camcı, Ç., Hacısalihoğlu, H.H., (2009). V_n -slant helices in Euclidean n-space E^n . Math Commun., 14(2):317-329.
- [16] Yılmaz, Y.M., Bektaş, M. (2018). Slant helices of (k, m) type in E^4 , Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, 10(2), 395-401.
- [17] Zıplar, E., Şenol, A., Yaylı, Y. (2012). On Darboux helices in Euclidean 3-space. Global J Sci Front Res Mathem Decision Sci, 12(13):73-80. Version 1.0.
- [18] Hacısalihoğlu, H.H. (1983). Diferansiyel Geometri I, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- [19] Hacısalihoğlu, H.H. (2000). Diferansiyel Geometri II, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- [20] Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferansiyel Geometri, Nobel Yayınları, Ankara.
- [21] Hacısalihoğlu, H.H. (2000). Diferansiyel Geometri IV, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- [22] Verstraeten, L., Van de Woestyne, I. (1995). Curves and surfaces in Minkowski Space
- [23] İlarslan, K., Nesovic, E. (2009). Spacelike and Timelike normal curves in Minkowski Space-Time Nouvelle serie, tome 85(99), 111-118.
- [24] İlarslan, K., Yıldırım, M. (2018). On Darboux helices in Euclidean 4-space, Math. Met. Appl. Sci. Special Issue, 2018, 1-6.

ÖZGEÇMİŞ

Ömer ÇİÇEK

[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]
[REDACTED]	[REDACTED]