

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

SHEFFER STROKE İŞLEMİ ÜZERİNE

Tuğçe KATICAN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 24.03.2021

Bornova-İzmir

2021

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “Sheffer Stroke İşlemi Üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarımı ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

24/03/2021

İmzası

Tuğçe KATICAN

ÖZET

SHEFFER STOKE İŞLEMİ ÜZERİNE

KATICAN, Tuğçe

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

24.03.2021, 112 sayfa

Bu tezde, ilk olarak, Sheffer stroke işleminin, Hilbert, birleşmeli olmayan MV- ve BL-cebirlerinin kısa tarihçeleri ile kullanıldığı alanlar ve çeşitli uygulamalarından söz edilmiş, araştırmacıların elde ettiği farklı bulgulara dair bilgiler verilmiş ve tezi oluşturan bölümlerin içerikleri kısaca özetlenmiştir. Tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla gerekli olan temel tanım ve kavramlar sunulmuştur. Ardından, Sheffer stroke Hilbert cebirler tanımlanarak, aksiyomlarının bağımsızlığı, idealleri/süzgeçleri, türetici sistemleri, bölüm grupları, homomorfizmaları, fuzzy yapıları ve kartezyen çarpımları inşa edilmiştir. Bunun yanı sıra, güçlü Sheffer stroke birleşmeli olmayan MV-cebirlerin tanımı verilerek, çeşitli özellikleri, altcebirleri, süzgeçleri, bölüm grupları ve homomorfizmaları yardımıyla bu cebir yapıları üzerinde temel izomorfizma teoremlerinin ispatları sunulmuştur. Ayrıca, Sheffer stroke BL-cebirlerin tanımı verilerek farklı süzgeç ve fuzzy süzgeç türleri tanıtılmıştır. Dahası, bu yapılar arasındaki ilişkiler ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Son olarak, tez boyunca yapılan çalışmalar ve bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar ortaya konmuştur.

Anahtar sözcükler: Sheffer stroke işlemi, Sheffer stroke Hilbert cebir, güçlü Sheffer stroke birleşmeli olmayan MV-cebir, Sheffer stroke BL-cebir, (fuzzy) süzgeç, homomorfizma.

ABSTRACT

ON SHEFFER STROKE OPERATION

KATICAN, Tuğçe

Ph.D. in Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tahsin ÖNER

24.03.2021, 112 pages

This thesis essentially consists of six chapters.

In the first chapter, we mentioned the traces of Sheffer stroke operation, Hilbert, nonassociative MV- and BL-algebras, their usage areas and many applications. Also, we presented information about different results of the researchers and summarized the contents of the chapters comprising the thesis.

In the second chapter, necessary fundamental definitions and notions were given in order to facilitate the legibility of the thesis.

In the third chapter, Sheffer stroke Hilbert algebras were defined and independency of the axiom system, ideals of filters, deductive systems, quotients, homomorphisms, fuzzy structures and cartesian products were constructed.

In the fourth chapter, we determined strong Sheffer stroke nonassociative MV-algebras and proved three fundamental isomorphism theorems on these algebraic structures by means of various properties, subalgebras, filters, quotients and homomorphisms.

In the fifth chapter, Sheffer stroke BL-algebras were described and their (fuzzy) filters were introduced. Then we investigated relationships between them in detail.

In the last chapter, it was broadly emphasized all studies done during the thesis and the conclusions.

Keywords: Sheffer stroke operation, Sheffer stroke Hilbert algebra, strong Sheffer stroke nonassociative MV-algebra, Sheffer stroke BL-algebra, (fuzzy) filter, homomorphism.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında, planlanmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda,

- engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşmaktan asla çekinmeyen, sunmuş olduğu desteği ile birlikte yaptığı yönlendirmelerle, bilgilendirme-lerle ve eleştirilerle kendimi ve akademik bilgimi geliştirmemi sağlayan, akademik yaşamıma ismi altında başlamaktan onur duyduğum değerli danışmanım Doç. Dr. Tahsin ÖNER’e,
- çalışmamı titizlikle inceleyen, değerli görüş ve tavsiyeleriyle bu tezin gelişimine katkı sağlayan başta Prof. Dr. Burak ORDİN ve Doç Dr. Vecdi AYTAÇ başta olmak üzere,
- her kararında koşulsuzca arkamda duran, sabırla beni dinleyen, destekleyen, kendi ayakları üzerinde durabilen bir birey olarak yetişmemi sağlayan biricik AİLEME ve
- FDK-2019-20772 numaralı projeye desteklerinden dolayı Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne

teşekkürlerimi sunarım.

TUĞÇE KATICAN

Mart 2021

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	6
3 SHEFFER STROKE HİLBERT CEBİRLERİ	13
3.1 İdealleri	25
3.2 Süzgeçleri	32
3.3 Fuzzy Süzgeçleri	33
3.4 Homomorfizmalar	38
3.5 Normal ve Maksimal Fuzzy Süzgeçler	44
3.6 Fuzzy Süzgeçlerin Kartezyen Çarpımları	52
4 GÜÇLÜ SHEFFER STROKE BİRLEŞMELİ OLMAYAN MV- CEBİRLERİNİN SÜZGEÇLERİ	59
4.1 Güçlü Sheffer stroke NMV-cebirlerinin Süzgeçleri	64
4.2 Güçlü Sheffer stroke NMV-cebirlerinin Homomorfizmaları	71
5 SHEFFER STROKE BL-CEBİRLER	81
5.1 Sheffer stroke BL-cebirlerinin Süzgeçleri	90
5.2 Sheffer stroke BL-cebirlerinin Fuzzy Süzgeçleri	93
6 SONUÇ	101
KAYNAKLAR DİZİNİ	103
ÖZGEÇMİŞ	109

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 H kümesinin Hasse diyagramı	14
3.2 $H/\sim$ kümesinin Hasse diyagramı	44
4.1 A kümesinin Hasse diyagramı	59
5.1 C kümesinin Hasse diyagramı	81
5.2 D kümesinin Hasse diyagramı	82



1 GİRİŞ

Günümüz teknolojisinin temelini oluşturan dijital kaynakların ve programlama dillerinin gelişmesini sağlayan Boole cebirleri, İngiliz matematikçi George Boole tarafından, evetleme $\wedge$, veyalama $\vee$ ve değilleme $\neg$ olarak adlandırılan işlemlere, 0 en küçük ve 1 en büyük elemanlarına sahip bir cebirsel yapı olarak tanımlanmıştır (Boole, 1854). Bu üç temel işlemi içeren mantıksal sistemlerin fonksiyonel olarak tam olması matematikçileri fonksiyonel olarak tam olan ve daha az sayıda işlem içeren sistemler aramaya yöneltmiştir. Bunlardan biri C. S. Peirce tarafından tanımlan ve Peirce' oku da denilen NOR operatörüdür (Büning and Lettmann, 1999) ve sadece NOR operatörünü sahip bir sistem fonksiyonel olarak tamdır. Diğerisi ise H. M. Sheffer tarafından tanımlan ve NAND operatörü ismiyle de bilinen Sheffer stroke işlemidir (Sheffer, 1913). Sadece Sheffer stroke işlemini içeren bir sistem fonksiyonel olarak tamdır; yani, diğer tüm Boole işlemleri veya aksiyomları bu işlem yardımıyla yeniden ifade edilebilmektedir (McCune et al., 2002). Böylece daha karmaşık yapıdaki mantıksal ifadeler daha kolay ve anlaşılır şekilde sunularak daha basit ve kolay denetlenebilir aksiyom sistemleri elde edilebilmektedir. Bu nedenle, Boole cebirleri dışındaki cebirsel yapılar üzerine çalışan matematikçilerin de ilgisini çekmektedir (Abbott, 1967; Chajda, 2005; Chajda et al., 2019; Oner et al., 2023, 2021a,b,c,d, 2019; Oner and Katican, 2020). Bununla birlikte, bilgisayar işlemcilerini oluşturan çiplerde her bir Boole işlemi için farklı diodlar bulunması gerekirken Sheffer stroke işlemi için tek bir diod bulunması yeterli olacaktır. Bu da üretimin daha kolay, daha hızlı ve daha ucuz olmasına olanak sağlayacaktır.

1950' lili yıllarda Henkin ve Skolem sezgisel ve diğer klasik olmayan lojiker üzerine yaptıkları çalışmaları geliştirmek adına Hilbert'in pozitif implikatif önermesel hesabının (Rasiowa, 1974) cebirsel yapısı olan Hilbert cebirlerini tanıttılar (Henkin, 1950). Bu cebirsel yapılar implikasyon (ya da gerektirme) işlemini ve 1 seçkin elemanını içeren önermesel hesabın cebirsel yapıları olarak düşünülebilir. Özellikle A. Diego Hilbert cebirler üzerinde

ayrıntılı olarak çalışmış ve bu cebirlerin bir varyete oluşturduğunu göstermiştir (Diego, 1966). Ayrıca, Rasiowa bu cebirsel yapıları pozitif implikatif cebirler olarak isimlendirmiştir (Rasiowa, 1974). Dahası, Hilbert cebirler pozitif implikatif BCK-cebirlerin düaline denktirler (Cornish, 1980; Iorgulescu, 2008; Iseki and Tanaka, 1978). 1980' li yıllarda Idziak, sınırlı Hilbert cebirlerini kafes işlemlerine sahip özel BCK-cebirleri olarak çalışmıştır (Idziak, 1984) ve ayrıca Busneag ve Jun, Hilbert cebirlerin türetici sistemlerini ve bölüm gruplarını araştırmışlardır (Busneag, 1985, 1988; Jun, 1996b).

C. C. Chang, Lukasiewicz' in çok-değerli lojiğinin cebirsel yapısı olarak MV-cebirlerini tanıtmıştır ve geliştirmiştir (Chang, 1958, 1959). Ayrıca, Cignoli ve arkadaşları (Cignoli et al., 2013) da MV-cebirlerinin güncel ve kısaltılmış bir aksiyomlaştırmasını sunmuşlardır. MV-cebirlerdeki ikili işlemin sahip olduğu birleşme özelliğinin uzman sistemler ve özellikle yapay zekada (Botur and Halaš, 2009) de olduğu gibi bir çok probleme yol açması sebebiyle Chajda ve arkadaşları birleşmeli olmayan MV-cebirlerini incelemişlerdir (Chajda and Kühr, 2007a; Chajda and Länger, 2017; Chajda et al., 2019). Hatta, Chajda ve Kühr, MV-cebirlerini birleşme özelliği olmaksızın kısmi sıralama bağıntısı aynı kalacak şekilde genelleştirdiler. Fakat bu sıralama bağıntısının geçişme özelliği MV-cebirlerin birleşme özelliği olmaksızın kanıtlanamayacağından bu özellik yerine iki yeni aksiyom ekleyerek bu kısmi sıralama bağıntısının geçişkenliğini göstermişlerdir (Chajda and Kühr, 2007a).

Yapay zekanın en önemli görevi insan düşünce, duygu ve davranışlarını taklit edebilen cihazların gelişmesine katkı sağlamaktır. Klasik lojik kesin bilgi ile ilgilenirken, fuzzy (bulanık) lojik ve çok-değerli lojikler gibi klasik olmayan ve sezgisel lojikler bilgidaki belirsizlik, bulanıklık ve rastgelelik ile ilgilenir. Bulanıklık ve rastgelelik insanın düşünce ve davranışları ile yakından ilişkili olduğundan, L. A. Zadeh tarafından tanımlanan Fuzzy Teori (Zadeh, 1965) bilimden teknolojiye pek çok alanda ve özellikle yapay zekanın geliştirilmesinde önemli bir yere sahiptir. Ayrıca, cebirsel yapılar üzerinde tanımlanabilen ideallerin ve süzgeçlerin fuzzy lojikle olan yakın ilişkisi lojik ve topoloji araştırma alanlarındaki bir çok çalışmada ortaya konmuştur.

P. Hájek, fuzzy önermesel hesabı için Temel Lojik'i (Basic Logic (kısaca, BL)) ve bu lojiğin cebirsel yapısı olarak da BL-cebirlerini tanıtmıştır. Hájek

bu cebirsel yapının asal süzgeçlerini tanımlamıştır ve bu süzgeçleri kullanarak Temel Lojik'in tamlığını ispatlamıştır (Hájek, 2013). Cignoli ve arkadaşları ise Temel Lojik'in Hájek tarafından öne sürülen sürekli t -normların lojigi olduğunu göstermişlerdir (Cignoli et al., 2013). Bu sebeple, BL-cebir kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için en bilinen örneklerden biri, sürekli bir t -norm tarafından indüklenen bir yapıya sahip olan $[0, 1]$ kapalı aralığıdır. Dahası, MV-cebirleri ve Gödel cebirleri de en bilinen BL-cebiri örnekleridirler. Ayrıca, BL-cebirlerinin Boole, pozitif implikatif, maksimal, asal ve öz süzgeçleri ile süzgeçlerin radikalleri ayrıntılı olarak incelenmiştir (Borumand Saeid and Motamed, 2009a,b; Haveshki et al., 2006; Haveshki and Eslami, 2008; Kondo and Dudek, 2008; Motamed and Borumand Saeid, 2011; Motamed et al., 2011). Bununla birlikte, BL-cebirlerin farklı fuzzy süzgeçleri araştırılarak ilginç sonuçlar ortaya konmuştur (Wei and Borumand Saeid, 2015; Liu and Li, 2005; Lianzhen and Kaitai, 2005; Zhan and Xu, 2008; Ma et al., 2007; Yin and Zhan, 2010). Esko Turunen BL-cebirleri ve ilgili olduğu diğer kavramları ayrıntılı olarak çalışmıştır (Turunen, 1999a, 2001, 1999b) ve Sessa ile birlikte lokal BL-cebirleri incelemişlerdir (Turunen and Sessa, 2001). Georgescu ve arkadaşları ise sağ, sol BL-cebirleri ve BL-cebirlerinin değişmeli olmayan genelleştirmelerini ifade eden pseudo BL-cebirleri üzerine çalışmışlardır Georgescu and Iorgulescu (2000); Di Nola et al. (2002).

Bu tezin amacı, klasik olmayan lojiklerin cebir yapılarını Sheffer stroke işlemi ile donatarak daha az sayıda ve daha kolay denetlenebilir aksiyomlara sahip yeni cebirsel yapılar inşa edilmesidir. Bununla birlikte, bu yeni yapıların çeşitli özelliklerini, sıralama ve kongrüans bağıntılarını, ideallerini veya süzgeçlerini, fuzzy yapılarını, homomorfizmalarını ve bölüm gruplarını inceleyerek esas cebir yapıları ve diğer cebir yapıları ile aralarındaki bağlantıların ortaya konulmasıdır. Böylece, Sheffer stroke işlemine sahip cebirsel yapılar yardımıyla lojik ve bilgisayar bilimleri arasında var olan köprünün daha da güçlendirilmesi hedeflenmektedir.

Tezin ilk bölümünde Sheffer stroke işlemi, Hilbert, BL-, birleşmeli olmayan MV-cebirleri ve fuzzy kavramı ile ilgili genel bilgilere yer verilerek kullanıldığı alanlar örneklerle ifade edilecektir. Ardından, bu alanlarda araştırmalar yapmış olan bilim insanları tarafından ortaya konulan çalışmalar

ve bu çalışmalara dair bilgiler sunulacaktır. Son olarak, tezi oluşturan bölümle-
rin içerikleri kısaca özetlenecektir.

Tezin ikinci bölümünde ise tezin okunabilirliğini kolaylaştıracak ve tezin devamında yararlanılacak olan temel tanımlar ve kavramlar sunulacaktır.

Tezin nc bölümünde, Sheffer stroke işlemine sahip Hilbert cebirleri tanımlanarak inşa edilen yeni cebirsel yapının aksiyomlarının bağımsızlığı gösterilecektir. Ardından, Sheffer stroke Hilbert cebiri örneklenerek çeşitli özellikleri incelenecektir. Ayrıca, bu yeni cebir yapısı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlanarak yarı-kafes ve kafes oluşturduğu durumlar araştırılacaktır. Son olarak, idealleri, türetici sistemleri, süzgeçleri, fuzzy süzgeçleri, homomorfizmaları ve kartezyen çarpımları tanıtılarak bu yapılar arasındaki bağlantılar ve bölüm grupları araştırılacaktır.

Tezin dördüncü bölümünde, güçlü Sheffer stroke birleşmeli olmayan MV-cebirlerinin tanımı ve özellikleri verildikten sonra süzgeçleri tanımlanacaktır. Bu süzgeçler yardımıyla bir kongrüans bağıntısı oluşturulacaktır ve ardından kongrüans bağıntısından faydalanılarak güçlü Sheffer stroke birleşmeli olmayan MV-cebirlerinin bölüm grupları inşa edilecektir. Bir güçlü Sheffer stroke birleşmeli olmayan MV-cebirinin süzgeçlerinin sınıfı ve kongranslarının sınıfının izomorf oldukları kanıtlanacaktır. Bölüm sonunda, güçlü Sheffer stroke birleşmeli olmayan MV-cebirlerinin homomorfizmaları tanıtılarak üç temel izomorfizma teoreminin ispatları sunulacaktır.

Tezin beşinci bölümünde, Sheffer stroke BL-cebirlerin tanımı sunulacaktır ve çeşitli özellikleri araştırılarak Sheffer stroke BL-cebirlerinin çeşitli süzgeçleri ve fuzzy süzgeçleri ayrıntılı olarak incelenecektir.

Tezin son kısmında, tez boyunca yapılan çalışmalar ve bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar özetlenecektir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla gerekli olan temel kavramlar, tanım ve teoremler verilmiştir (Grätzer, 2002), (Birkhoff, 1940).

Tanım 2.1. P boştan farklı bir küme olmak üzere, P üzerinde tanımlanan $\leq$ ikili bağıntısı

- (i) yansıma: $\forall x \in P$ için $x \leq x$,
- (ii) ters-simetri: $x, y \in P$ için $(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y$,
- (iii) geçişme: $x, y, z \in P$ için $(x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z$

özelliklerini sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir. Yukarıdaki özelliklere ek olarak,

- (iv) her $a, b \in P$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$

özellği gerçekleşiyorsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir tam sıralama bağıntısı denir.

Tanım 2.2. Üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlı olan bir P kümesine kısmi sıralı küme denir ve $(P, \leq)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. P bir kısmi sıralı küme, $Q \subseteq P$ ve $a \in Q$ olsun. Her $q \in Q$ için $q \leq p$ olacak şekilde bir $p \in P$ varsa, p elemanına Q kümesi için bir üst sınır denir. Eğer p , Q kümesi için bir üst sınır ve her $q \in Q$ için $q \leq a$ durumu $p \leq a$ durumunu gerektiriyorsa $p \in P$ elemanına Q kümesinin en küçük üst sınırı veya Q kümesinin supremumu denir.

Tanım 2.4. P bir kısmi sıralı küme, $Q \subseteq P$ ve $a \in Q$ olsun. Her $q \in Q$ için $p \leq q$ olacak şekilde bir $p \in P$ varsa, p elemanına Q kümesi için bir alt sınır denir. Eğer p , Q kümesi için bir alt sınır ve her $q \in Q$ için $a \leq q$ durumu $a \leq p$ durumunu gerektiriyorsa $p \in P$ elemanına Q kümesinin en büyük alt sınırı veya Q kümesinin infimumu denir.

Tanım 2.5. L boştan farklı bir küme ve $\vee$, L üzerinde join ikili operatörü olmak üzere, her $x, y, z \in L$ için

- eş güçlülük: $x \vee x = x$,
- değişmelilik: $x \vee y = y \vee x$,
- birleşmelilik: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

özelliklerini gerçekleyen $(L, \vee)$ grupoid yapısına bir join yarı-kafes denir.

Bir join-yarı kafes, her iki elemanın bir supremuma sahip olduğu $(A, \leq)$ kısmi sıralı kümesine karşılık gelir.

Tanım 2.6. L boştan farklı bir küme ve $\wedge$, L üzerinde meet ikili operatörü olmak üzere, her $x, y, z \in L$ için

- eş güçlülük: $x \wedge x = x$,
- değişmelilik: $x \wedge y = y \wedge x$,
- birleşmelilik: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

özelliklerini gerçekleyen $(L, \wedge)$ grupoid yapısına bir meet yarı-kafes denir.

Bir meet-yarı kafes, her iki elemanın bir infimuma sahip olduğu $(A, \leq)$ kısmi sıralı kümesine karşılık gelir.

Lemma 2.1. Bir L kısmi sıralı kümesinin bir kafes olması için gerek ve yeter koşul L kümesinden seçilen her a, b elemanları için $\sup\{a, b\}$ ve $\inf\{a, b\}$ elemanlarının her ikisinin de L kümesinde olmasıdır.

Tanım 2.7. P bir kısmi sıralı küme olsun. O zaman P nin her A alt kümesi için P de $\sup A$ ve $\inf A$ mevcut ise P kısmi sıralı kümesine tamdır denir. Bir kısmi sıralı küme üzerinde tam olan kafese bir tam kafes denir.

Tanım 2.8. $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ bir kafes olsun. Her $x \in L$ için

$$(BL) \quad x \wedge 0 = 0$$

$$(BL)' \quad x \vee 1 = 1$$

özdeşliklerini sağlayan $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ yapısına sınırlı bir kafes denir.

Tanım 2.9. $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$$(D1) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$(D2) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

özdeşliklerini sağlayan $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ yapısına dağılmalı bir kafes denir.

Tanım 2.10. $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ bir dağılmalı kafes olsun. Her $x \in L$ için

$$(B1) \quad x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1,$$

$$(B2) \quad x \wedge x' = 0, \quad x \vee x' = 1$$

özdeşliklerini sağlayan $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ yapısına bir Boole cebiri denir.

Tanım 2.11. A boştan farklı bir küme ve $f : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in A$ için $x \leq y$ olduğunda $f(x) \leq f(y)$ koşulu gerçekleşiyorsa, f dönüşümüne sıra-koruyan bir dönüşüm denir.

Tanım 2.12. (Van Dalen, 2004) A boştan farklı bir küme, $R_1, \dots, R_n$ ler A üzerinde bağıntılar, $F_1, \dots, F_m$ ler A üzerinde fonksiyonlar ve her $i \in I$ için c_i ler A nın sabit elemanları olmak üzere $\langle A, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{c_i : i \in I\} \rangle$ sıralı dizisine bir yapı denir.

Tanım 2.13. (McCune et al., 2002) $\mathcal{A} = (A, |)$ bir grupoid olsun. Her $x, y, z \in A$ için

$$(S1) \quad x|y = y|x,$$

$$(S2) \quad (x|x)|(x|y) = x,$$

$$(S3) \quad x|((y|z)|(y|z)) = ((x|y)|(x|y))|z,$$

$$(S4) \quad (x|((x|x)|(y|y))|(x|((x|x)|(y|y)))) = x$$

aksiyomlarını gerçekleştiriyorsa $|$ işlemine bir Sheffer stroke işlemi denir. Buna ek olarak,

$$(S5) \quad y|(x|(x|x)) = y|y$$

özdeşliğini gerçekleştiriyorsa bir ortho-Sheffer stroke işlemi olarak adlandırılır.

Lemma 2.2. (McCune et al., 2002) $\mathcal{A} = (A, |)$ bir grupoid olsun. O zaman $\leq$ ikili bağıntısı A kümesi üzerinde $x, y \in A$ için

$$x \leq y \quad \text{eğer ve yalnız eğer} \quad x|y = x|x$$

şeklinde tanımlanırsa, $\leq$ bağıntısı A kümesi üzerinde bir kısmi sıralamadır.

Lemma 2.3. (McCune et al., 2002) $|$, A üzerinde bir Sheffer stroke ve $\leq$, $\mathcal{A} = (A, |)$ yapısı üzerinde endüklenmiş bir kısmi sıralama olsun. O zaman $x, y \in A$ için aşağıdaki önermeler gerçekleşir:

(i) $x \leq y$ olması için gerek ve yeter koşul $y|y \leq x|x$ olmasıdır.

(ii) $x|(y|(x|x)) = x|x$, $\mathcal{A}$ yapısının birimidir.

(iii) Her $z \in A$ için $x \leq y$ ise $y|z \leq x|z$ dir.

(iv) $a \in A$ için, $a \leq x$ ve $a \leq y$ ise $x|y \leq a|a$ dir.

Tanım 2.14. (Jun, 1996a) H boştan farklı bir küme olsun. O zaman $\longrightarrow$, H üzerinde bir ikili işlem ve 1 , H nin seçkin elemanı olmak üzere her $x, y, z \in H$ için

$$(a_1) \quad x \longrightarrow (y \longrightarrow x) = 1,$$

$$(a_2) (x \longrightarrow (y \longrightarrow z)) \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow z)) = 1 \text{ ve}$$

$$(a_3) x \longrightarrow y = y \longrightarrow x = 1 \text{ ise o zaman } x = y$$

aksiyomlarını gerçekleyen $\mathcal{H} = \langle H, \longrightarrow, 1 \rangle$ cebir yapısına bir Hilbert cebiri denir.

Lemma 2.4. (Jun, 1996a) $\mathcal{H} = \langle H, \longrightarrow, 1 \rangle$ bir Hilbert cebiri olsun. O zaman H kümesi üzerinde $x, y \in H$ için

$$x \leq y \text{ eğer ve yalnız eğer } x \longrightarrow y = 1$$

şeklinde tanımlanan $\leq$ ikili bağıntısı H üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Ayrıca, bu sıralama H üzerinde bir doğal sıralamadır ve bu sıralamaya göre 1, H nin en büyük elemanıdır.

Tanım 2.15. (Chajda et al., 2019) Her $x, y, z \in A$ için

1. $x \oplus y \approx y \oplus x$,
2. $x \oplus 0 \approx x$,
3. $x \oplus 1 \approx 1$,
4. $\neg(\neg x) \approx x$,
5. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$,
6. $\neg x \oplus (x \oplus y) \approx 1$,
7. $x \oplus (\neg(\neg(\neg(x \oplus y) \oplus y) \oplus z) \oplus z) \approx 1$

koşullarını sağlayan $(2, 1, 0)$ tipindeki bir $\mathcal{A} = (A, \oplus, \neg, 0)$ cebir yapısına birleşmeli olmayan MV-cebiri adı verilir ve $\neg 0$ cebirsel sabiti 1 ile gösterilir. Ayrıca, (5) koşuluna Łukasiewicz aksiyomu denir.

İngilizce "birleşmeli olmayan" anlamına gelen "non-associative" kelimesinden dolayı, birleşmeli olmayan MV-cebiri ifadesi kısaca NMV-cebiri olarak adlandırılır.

Lemma 2.5. (Chajda et al., 2019) $\mathcal{A} = (A, \oplus, \neg, 0)$ bir NMV-cebiri olsun. O zaman $\leq$ ikili bağıntısı A kümesi üzerinde $x, y \in A$ için

$$x \leq y \text{ eğer ve yalnız eğer } \neg x \oplus y = 1$$

şeklinde tanımlanırsa, $\leq$ ikili bağıntısı A kümesi üzerinde bir kısmi sıralamadır.

(Chajda and Kühr, 2007b) da gösterildiği gibi, $(A, \leq)$, 0 en küçük ve 1 en büyük elemanına sahip bir kısmi sıralı kümedir ve bu kümeye A tarafından endüklenen kısmi sıralı küme denir.

Tanım 2.16. (Chajda et al., 2019) Her $x, y, z \in A$ için

$$(n1) \ x|y \approx y|x,$$

$$(n2) \ x|0 \approx 1,$$

$$(n3) \ (x|1)|1 \approx x,$$

$$(n4) \ ((x|1)|y)|y \approx ((y|1)|x)|x,$$

$$(n5) \ (x|1)|((x|y)|1) \approx 1,$$

$$(n6) \ x|((((x|y)|y)|z)|z)|1) \approx 1$$

koşullarını sağlayan $(2, 0)$ tipindeki bir $(A, |, 1)$ yapısına bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri adı verilir ve $1|1$ cebirsel sabiti 0 ile gösterilir.

Teorem 2.1. (Chajda et al., 2019) $\mathcal{A} = (A, \oplus, \neg, 0)$ bir NMV-cebiri olsun ve her $x, y \in A$ için

$$x|y := \neg x \oplus \neg y$$

olarak tanımlansın. O zaman $\mathbb{S}(\mathcal{A}) = (A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir.

Teorem 2.2. (Chajda et al., 2019) $\mathcal{S} = (A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun ve her $x, y \in A$ için

$$x \oplus y := (x|1)|(y|1),$$

$$\neg x := x|1,$$

$$0 := 1|1$$

olarak tanımlansın. O zaman $\mathbb{A}(\mathcal{S}) = (A, \oplus, \neg, 0)$ bir NMV-cebiridir.

Tanım 2.17. (Hájek, 2013) $(C, \vee, \wedge, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve $(C, \odot, 1)$ bir değişmeli monoid olmak üzere her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için

$$(A1) \ c_1 \odot c_2 \leq c_3 \text{ eğer ve yalnız eğer } c_1 \leq c_2 \longrightarrow c_3,$$

$$(A2) \ c_1 \wedge c_2 = c_1 \odot (c_1 \longrightarrow c_2),$$

$$(A3) \ (c_1 \longrightarrow c_2) \vee (c_2 \longrightarrow c_1) = 1$$

koşullarını sağlayan $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ tipindeki bir $(C, \vee, \wedge, \odot, \longrightarrow, 0, 1)$ cebirsel yapısına bir BL-cebiri denir.

Tanım 2.18. *(Zadeh, 1965) X boştan farklı bir küme olsun. O zaman $f : X \rightarrow [0, 1]$ dönüşümüne X 'in bir fuzzy altkümesi denir.*

Bir cebirsel yapının aksiom sisteminin bağımsızlığı, o yapıyı oluşturan aksiomlardan herhangi birinin diğer aksiomlar kullanılarak türetilmediğini ifade eder. Bu nedenle, bir aksiom sisteminin bağımsızlığını göstermek için bağımsızlığı gösterilmek istenen aksiomun yanlış, diğerlerinin doğru olduğu bir model inşa edilmelidir. Eğer aksiom sisteminin her bir aksiomu için böyle bir model inşa edilebiliyorsa o zaman bu aksiom sistemi bağımsızdır denir.

3 SHEFFER STROKE HİLBERT CEBİRLERİ

Bu bölümde, Sheffer stroke Hilbert cebiri kavramı incelenecektir. Öncelikle, Sheffer stroke Hilbert cebiri tanımlanarak, bu yeni cebirsel sistemin aksiyomlarının bağımsızlığı gösterilecektir. Ayrıca, bu sistemin çeşitli özellikleri sunularak, bu sistem üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı verilecektir. Bu cebirsel sistem üzerinde tanımlanan bir birli işlem yardımıyla Hilbert cebirleri ve Sheffer stroke Hilbert cebirleri arasındaki ilişkiler ortaya konacaktır. Böylece, Sheffer stroke Hilbert cebirlerinin bir kafes yapısı oluşturduğu sonucuna ulaşılabilecektir. Son olarak, bir Sheffer stroke Hilbert cebirinin türetici sistemlerinin ve ideallerinin tanımları verilerek bu kavramlara ilişkin özellikler ve aralarındaki ilişkiler araştırılacaktır.

Tanım 3.1. H boştan farklı bir küme ve $|$, H üzerinde Sheffer stroke işlemi olmak her $x, y, z \in H$ için

$$(SHA_1) \quad x|((y|(z|z))|(y|(z|z))))|(((x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z))))|((x|(y|y))|(x|(z|z))|(x|(z|z)))) = x|(x|x),$$

$$(SHA_2) \quad x|(y|y) = y|(x|x) = x|(x|x) \text{ ise o zaman } x = y$$

aksiyomlarını sağlayan (2) tipindeki $\langle H, | \rangle$ yapısına bir Sheffer stroke Hilbert cebiri denir.

Lemma 3.1. (SHA_1) ve (SHA_2) aksiyomları bağımsızdır.

İspat. Aksiyomların bağımsızlığını ispatlamak için aksiyomlardan bağımsızlığını göstermek istediğimizi gerçeklemeyen fakat bir diğerini gerçekleyen bir model inşa etmemiz gerekir. Bunun için, $\langle \{a, b, 1\}, | \rangle$ yapısını göz önünde bulunduralım.

- (i) (SHA_1) aksiyomunun bağımsızlığını göstermek için $\{a, b, 1\}$ üzerindeki $|$ işlemini Çizelge 3.1 deki gibi tanımlayalım:

$ $	a	b	1
a	a	b	1
b	a	b	1
1	a	b	1

Çizelge 3.1: (SHA_1) in bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu

O halde $|$ işlemi (SHa₂) aksiyomunu sağlar fakat

$$\begin{aligned}
 a &= a|(a|a) \\
 &\neq (a|((a|(1|1))|(a|(1|1))))|(((a|(a|a))|((a|(1|1)) \\
 &\quad |(a|(1|1))))|((a|(a|a))|((a|(1|1))|(a|(1|1)))) \\
 &= 1|(1|1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

olduğundan (SHa₁) aksiyomunu sağlamaz.

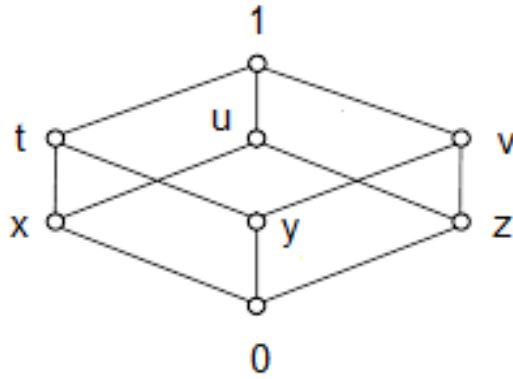
(ii) (SHa₂) aksiyomunun bağımsızlığını göstermek için $\{a, b, 1\}$ üzerindeki $|$ işlemini Çizelge 3.2 deki gibi tanımlayalım:

$ $	a	b	1
a	1	1	1
b	1	1	1
1	1	1	1

Çizelge 3.2: (SHa₂) nin bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu

O halde $|$ işlemi (SHa₁) aksiyomunu gerçekler fakat $a|(1|1) = 1 = 1|(a|a)$ iken $a \neq 1$ olduğundan (SHa₂) aksiyomunu sağlamaz. $\square$

Örnek 3.1. $H = \{0, x, y, z, t, u, v, 1\}$, Şekil 3.1’de bulunan Hasse diyagramına sahip bir küme ve H üzerindeki $|$ işlemi Çizelge 3.3’deki işlem tablosuna sahip bir ikili işlem olsun.



Şekil 3.1: H kümesinin Hasse diyagramı

O halde $\langle H, | \rangle$ yapısı bir Sheffer stroke Hilbert cebiri belirtir.

	0	x	y	z	t	u	v	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
x	1	v	1	1	v	v	1	v
y	1	1	u	1	u	1	u	u
z	1	1	1	t	1	t	t	t
t	1	v	u	1	z	v	u	z
u	1	v	1	t	v	y	t	y
v	1	1	u	t	u	t	x	x
1	1	v	u	t	z	y	x	0

Çizelge 3.3: H üzerindeki $|$ Sheffer stroke işleminin tablosu

Lemma 3.2. $\langle H, | \rangle$ bir Sheffer Stroke Hilbert cebir olsun. O zaman her $x, y \in H$ için $x|(x|x) = y|(y|y)$ dir.

İspat. (SHa₁) aksiyomunda, eş zamanlı olarak, z yerine y ve y yerine x yerleştirilirse, (S1), (S2) ve (S3) aksiyomları kullanılarak

$$\begin{aligned}
x|(x|x) &= (x|((x|(y|y))|(x|(y|y))))|(((x|(x|x))|(x|(y|y)))|((x|(y|y)))|((x|(x|x))|(x|(y|y)))) \\
&= (((x|x)|(x|x))|(y|y))|((((x|(x|x))|x)|((x|(x|x))|x))|(y|y))|(((x|(x|x))|x)|((x|(x|x))|x))|(y|y)) \\
&= (x|(y|y))|((((x|(x|x))|((x|x)|(x|x)))|((x|(x|x))|((x|x)|(x|x))))|(y|y))|((((x|(x|x))|((x|x)|(x|x)))|((x|(x|x))|((x|x)|(x|x))))|(y|y)) \\
&= (x|(y|y))|((((x|x)|(x|x))|((x|x)|x))|(((x|x)|(x|x))|((x|x)|x)))|(y|y))|((((x|x)|(x|x))|((x|x)|x))|(((x|x)|(x|x))|((x|x)|x)))|(y|y)) \\
&= (x|(y|y))|((((x|x)|(x|x))|((x|x)|x))|(((x|x)|(x|x))|((x|x)|x)))|(y|y))|((((x|x)|(x|x))|((x|x)|x))|(((x|x)|(x|x))|((x|x)|x)))|(y|y)) \\
&= (x|(y|y))|((((x|x)|(x|x))|(y|y))|(((x|x)|(x|x))|(y|y))) \\
&= (x|(y|y))|((x|(y|y))|(x|(y|y)))
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitlikte x yerine $x|y$ konulursa, (S1) ve (S2) aksiyomlarından

$$\begin{aligned}
(x|y)|((x|y)|(x|y)) &= ((x|y)|(y|y))|(((x|y)|(y|y))|((x|y)|(y|y))) \\
&= ((y|y)|(y|x))|(((y|y)|(y|x))|((y|y)|(y|x)))(S1) \\
&= y|(y|y)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. O halde (S1) aksiyomundan

$$\begin{aligned}
y|(y|y) &= (x|y)|((x|y)|(x|y)) \\
&= (y|x)|((y|x)|(y|x)) \\
&= x|(x|x)
\end{aligned}$$

dir. □

Uyarı 3.1. *Lemma 3.2' den de görüleceği üzere, tüm $\langle H, | \rangle$ Sheffer Stroke Hilbert cebirleri her $x, y \in H$ için $x|(x|x) = y|(y|y)$ özelliğini sağlayacağından $\langle H, | \rangle$ yapısı 1 ile gösterilen olan bir cebirsel sabite sahiptir.*

Lemma 3.3. *Bir $\langle H, | \rangle$ Sheffer Stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman her $x \in H$ için aşağıdaki özellikler vardır:*

$$(i) \ x|(1|1) = 1,$$

$$(ii) \ 1|(x|x) = x.$$

İspat. $\langle H, | \rangle$ bir Sheffer Stroke Hilbert cebiri olsun.

(i) Uyarı 3.1, (S1) ve (S3) aksiyomlarından

$$\begin{aligned} x|(1|1) &= x|((x|(x|x))|(x|(x|x))) \\ &= ((x|x)|(x|x))|(x|x) \\ &= (x|x)|((x|x)|(x|x)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Uyarı 3.1, (S1) ve (S2) aksiyomlarından

$$\begin{aligned} 1|(x|x) &= (x|(x|x))|(x|x) \\ &= (x|x)|(x|(x|x)) \\ &= x \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. □

Lemma 3.4. *$\langle H, | \rangle$ bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman H kümesi üzerinde $x, y \in H$ için*

$$x \leq y \quad \text{eğer ve yalnız eğer} \quad x|(y|y) = 1$$

şeklinde tanımlanan $\leq$ ikili bağıntısı H üzerinde doğal sıralama olarak adlandırılan bir kısmi sıralama bağıntısıdır ve bu sıralamaya göre 1, H nin en büyük elemanıdır.

İspat. $\langle H, | \rangle$ bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun ve H kümesi üzerinde $\leq$ ikili bağıntısı $x, y \in H$ için $x \leq y$ eğer ve yalnız eğer $x|(y|y) = 1$ şeklinde tanımlansın.

- **Yansıma:** Uyarı 3.1' den her $x \in H$ için $x|(x|x) = 1$ olduğundan $x \leq x$ dir.
- **Ters simetri:** $x \leq y$ ve $y \leq x$ olsun. Bu durumda $x|(y|y) = 1$ ve $y|(x|x) = 1$ dir. O halde (SHa₂) aksiyomundan $x = y$ elde edilir.
- **Geçişme:** $x \leq y$ ve $y \leq z$ olsun. O zaman $x|(y|y) = 1$ ve $y|(z|z) = 1$ dir. Böylece, Uyarı 3.1, (SHa₁) ve Lemma 3.3'den

$$\begin{aligned}
1 &= x|(x|x) \\
&= (x|((y|(z|z))|(y|(z|z))))|(((x|(y|y))|((x|(z|z))| \\
&\quad |(x|(z|z))))|((x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z)))) \\
&= (x|(1|1))|((1|((x|(z|z))|(x|(z|z))))|(1|((x|(z|z))|(x|(z|z))))) \\
&= (x|(z|z))
\end{aligned}$$

elde edilir, yani, $x \leq z$ sonucuna ulaşılır.

O halde bu bağıntı H üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Ayrıca, Lemma 3.3 (i)'den her $x \in H$ için $x|(1|1) = 1$ olduğundan 1, H nin en büyük elemanıdır. $\square$

Lemma 3.5. *Bir $\langle H, | \rangle$ Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman her $x, y, z \in H$ için aşağıdaki özellikler vardır:*

$$(Shb_1) \quad x \leq y|(x|x),$$

$$(Shb_2) \quad x|((y|(z|z))|(y|(z|z))) = (x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z))),$$

$$(Shb_3) \quad (x|(y|y))|(y|y) = (y|(x|x))|(x|x),$$

$$(Shb_4) \quad x|((y|(z|z))|(y|(z|z))) = y|((x|(z|z))|(x|(z|z))),$$

$$(Shb_5) \quad x \leq (x|(y|y))|(y|y),$$

$$(Shb_6) \quad ((x|(y|y))|(y|y))|(y|y) = x|(y|y),$$

$$(Shb_7) \quad x|(y|y) \leq (y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z))),$$

$$(Shb_8) \quad x \leq y \text{ ise o zaman } z|(x|x) \leq z|(y|y) \text{ and } y|(z|z) \leq x|(z|z) \text{ dir.}$$

İspat. $\langle H, | \rangle$ bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun.

(Shb₁) Uyarı 3.1, (S1), (S3) ve Lemma 3.3 (i)'den

$$\begin{aligned}
 x|((y|(x|x))|(y|(x|x))) &= x|(((x|x)|y)|((x|x)|y)) \\
 &= ((x|(x|x))|(x|(x|x)))|y \\
 &= (1|1)|y \\
 &= y|(1|1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ve böylece Lemma 3.4'den $x \leq y|(x|x)$ elde edilir.

(Shb₄) (S1) ve (S3)'den

$$\begin{aligned}
 x|((y|(z|z))|(y|(z|z))) &= x|(((z|z)|y)|((z|z)|y)) \\
 &= ((x|(z|z))|(x|(z|z)))|y \\
 &= y|((x|(z|z))|(x|(z|z)))
 \end{aligned}$$

dir.

(Shb₅) (S1), (S3) ve Uyarı 3.1'den

$$\begin{aligned}
 &x|(((x|(y|y))|(y|y))|((x|(y|y))|(y|y))) \\
 &= x|(((y|y)|(x|(y|y)))|((y|y)|(x|(y|y)))) \\
 &= ((x|(y|y))|(x|(y|y)))|x|(y|y) \\
 &= (x|(y|y))|((x|(y|y))|(x|(y|y))) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ve böylece Lemma 3.4'den $x \leq (x|(y|y))|(y|y)$ sonucuna ulaşılır.

(Shb₂) (SHa₁) ve Uyarı 3.1'den $(x|((y|(z|z))|(y|(z|z))))|(((x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z))))|((x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z)))) = x|(x|x) = 1$ olduğundan Lemma 3.4'den

$$x|((y|(z|z))|(y|(z|z))) \leq (x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z))) \quad (3.1)$$

bulunur. Ayrıca, (Shb₁)'den $y \leq x|(y|y)$ olduğu bilindiğine göre Lemma 2.3 (iii) ve (Shb₄)'den

$$\begin{aligned}
 (x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z))) &\leq y|((x|(z|z))|(x|(z|z))) \\
 &= x|((y|(z|z))|(y|(z|z)))
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. Bu durumda, (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinden

$$(x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z))) = x|((y|(z|z))|(y|(z|z)))$$

sonucuna ulaşılır.

(Shb₆) (Shb₅)’den $x|(y|y) \leq ((x|(y|y))|(y|y))|(y|y)$ dir. Ayrıca, (Shb₂), (Shb₄), (S1), (S2) ve Uyarı 3.1’den

$$\begin{aligned}
& (((x|(y|y))|(y|y))|(y|y))|((x|(y|y))|(x|(y|y))) \\
&= x|((((x|(y|y))|(y|y))|(y|y))|(y|y))|((((x|(y|y))|(y|y))|(y|y))|(y|y))) \\
&= (x|((((x|(y|y))|(y|y))|(y|y))|((x|(y|y))|(y|y)))) \\
&\quad |((x|(y|y))|(x|(y|y)))) \\
&= (((x|(y|y))|(y|y))|((x|(y|y))|(x|(y|y))))|((x|(y|y))|(x|(y|y))) \\
&= (((x|(y|y))|(x|(y|y)))|((x|(y|y))|(y|y)))|((x|(y|y))|(x|(y|y))) \\
&= (x|(y|y))|((x|(y|y))|(x|(y|y))) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğuna göre Lemma 3.4’den $((x|(y|y))|(y|y))|(y|y) \leq x|(y|y)$ elde edilir.

O halde $((x|(y|y))|(y|y))|(y|y) = x|(y|y)$ dir.

(Shb₇) (Shb₂), (Shb₄), Uyarı 3.1 ve Lemma 3.3 (i)’den

$$\begin{aligned}
& (x|(y|y))|(((y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z))))|((y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z)))) \\
&= (y|(z|z))|(((x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z))))|((x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z)))) \\
&= (y|(z|z))|((x|((y|(z|z))|(y|(z|z|z))))|((x|((y|(z|z))|(y|(z|z|z))))| \\
&\quad (x|((y|(z|z))|(y|(z|z|z)))) \\
&= x|(((y|(z|z))|((y|(z|z))|(y|(z|z|z))))|((y|(z|z))|((y|(z|z))|(y|(z|z|z)))) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

bulunur ve Lemma 3.4’den $x|(y|y) \leq (y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z)))$ dir.

(Shb₈) $x \leq y$ olsun. O halde Lemma 3.4’den $x|(y|y) = 1$ dir. (Shb₂) ve Lemma 3.3 (i)’den $(z|(x|x))|((z|(y|y))|(z|(y|y))) = z|((x|(y|y))|(x|(y|y))) = z|(1|1) = 1$ olduğuna göre Lemma 3.4’den $z|(x|x) \leq z|(y|y)$ elde edilir. Aynı zamanda, Lemma 3.3 (ii) ve (Shb₇)’den dolayı

$$\begin{aligned}
(y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z))) &= 1|(((y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z))))|((y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z)))) \\
&= (x|(y|y))|(((y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z))))|((y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z|z)))) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan, Lemma 3.4'den $y|(z|z) \leq x|(z|z)$ sonucuna ulaşılır.

(Shb₃) $x \leq y$ olsun. O halde $x|(y|y) = 1$ dir. (Shb₂), (Shb₄), (Shb₆), (S1), (S2) ve Uyarı 3.1'den

$$\begin{aligned}
& ((x|(y|y))|(y|y))|(((y|(x|x))|(x|x))|((y|(x|x))|(x|x))) \\
&= (((x|(y|y))|(y|y))|(y|y))|(((x|(y|y))|(y|y))| \\
&\quad (x|x))|(((x|(y|y))|(y|y))|(x|x)))|(((x|(y| \\
&\quad y))|(y|y))|(x|x))|(((x|(y|y))|(y|y))|(x|x))) \\
&= ((x|(y|y))|(((x|(y|y))|(y|y))|(x|x))| \\
&\quad (((x|(y|y))|(y|y))|(x|x))))|(((x|(y|y))| \\
&\quad (y|y))|(x|x))|(((x|(y|y))|(y|y))|(x|x))) \\
&= (((x|(y|y))|(y|y))|(((x|(y|y))|(x|x))| \\
&\quad ((x|(y|y))|(x|x))))|(((x|(y|y))|(y| \\
&\quad y))|(x|x))|(((x|(y|y))|(y|y))|(x|x))) \\
&= (((x|(y|y))|(y|y))|(x|x))|(((x|(y|y))| \\
&\quad (y|y))|(x|x))|(((x|(y|y))|(y|y))|(x|x))) \\
&= 1
\end{aligned}$$

sonucu bulunur ve Lemma 3.4'den $(x|(y|y))|(y|y) \leq (y|(x|x))|(x|x)$ elde edilir. Benzer şekilde, $(y|(x|x))|(x|x) \leq (x|(y|y))|(y|y)$ dir. Buradan $(x|(y|y))|(y|y) = (y|(x|x))|(x|x)$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Lemma 3.6. $\langle H, | \rangle$ bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman her $x, y, z \in H$ için

$$x|(y|y) \leq (z|(x|x))|((z|(y|y))|(z|(y|y)))$$

dir.

İspat. (Shb₂), (Shb₄), Uyarı 3.1 ve Lemma 3.3 (i)'den

$$\begin{aligned}
& (x|(y|y))|(((z|(x|x))|((z|(y|y))|(z|(y|y))))|((z|(x|x))|((z|(y|y))|(z|(y|y))))) \\
&= (x|(y|y))|((z|((x|(y|y))|(x|(y|y))))|((z|((x|(y|y))|(x|(y|y))))) \\
&= z|(((x|(y|y))|((x|(y|y))|(x|(y|y))))|((x|(y|y))|((x|(y|y))|(x|(y|y))))) \\
&= z|(1|1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan, her $x, y, z \in H$ için $x|(y|y) \leq (z|(x|x))|((z|(y|y))|(z|(y|y)))$ dir. $\square$

Teorem 3.1. $\langle H, | \rangle$ bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. Eğer $x \longrightarrow y := x|(y|y)$ şeklinde tanımlanırsa, o zaman $\langle H, \longrightarrow, 1 \rangle$ yapısı bir Hilbert cebiridir.

İspat. $\langle H, |, 1 \rangle$ bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun ve $x \longrightarrow y := x|(y|y)$ ile tanımlansın.

(a₁) Sırasıyla, (Shb₄), Uyarı 3.1 ve Lemma 3.3 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned} x \longrightarrow (y \longrightarrow x) &= x|((y|(x|x))|(y|(x|x))) \\ &= y|((x|(x|x))|(x|(x|x))) \\ &= y|(1|1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

elde edilir.

(a₂) Sırasıyla, (SHa₁) ve Uyarı 3.1 uygulanırsa

$$\begin{aligned} (x \longrightarrow (y \longrightarrow z)) \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow z)) \\ &= (x|((y|(z|z))|(y|(z|z))))|(((x|(y|y))|((x|(z|z))| \\ &\quad (x|(z|z))))|(((x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z)))) \\ &= x|(x|x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(a₃) $x \longrightarrow y = y \longrightarrow x = 1$ olsun. O halde Uyarı 3.1'den $x|(y|y) = y|(x|x) = 1 = x|(x|x)$ olur. Bu durumda, (SHa₂)'den $x = y$ elde edilir.

□

Örnek 3.2. $H := \{0, p, q, 1\}$ olmak üzere Çizelge 3.4'de verilen işlem tablosuna sahip $\langle H, | \rangle$ Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım:

$ $	1	p	q	0
1	0	q	p	1
p	q	q	1	1
q	p	1	p	1
0	1	1	1	1

Çizelge 3.4: H üzerindeki $|$ Sheffer stroke işlem tablosu

O halde bu Sheffer stroke Hilbert cebiri aracılığıyla tanımlanan Hilbert cebiri Çizelge 3.5' deki işlem tablosuna sahiptir:

$\longrightarrow$	1	p	q	0
1	1	p	q	0
p	1	1	q	q
q	1	p	1	p
0	1	1	1	1

Çizelge 3.5: H üzerindeki $\longrightarrow$ işlem tablosu

$\langle H, | \rangle$ yapısı, 0 en küçük elemanına sahip bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun ve H üzerinde bir "*" birli işlemi her $x \in H$ için $x^* = x|(0|0)$ ile tanımlansın.

Lemma 3.7. $\langle H, | \rangle$, 0 elemanına sahip bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun.

O zaman her $x \in H$ için aşağıdaki özellikler vardır:

- (i) $0|0 = 1$ ve $1|1 = 0$,
- (ii) $1^* = 0$ ve $0^* = 1$,
- (iii) $x|1 = x|x$,
- (iv) $x^* = x|x$,
- (v) $x|0 = 1$,
- (vi) $(x^*)^* = x$,
- (vii) $x|x^* = 1$.

İspat. $\langle H, | \rangle$, 0 elemanına sahip bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun.

- (i) 0, H nin en küçük elemanı olduğundan her $x \in H$ için $0 \leq x$ ve $0 \leq x|x$ dir. O halde Lemma 2.3 (iv)'den $x|(x|x) \leq 0|0$ sonuçlandırılır. 1, H nin en büyük elemanı olduğundan ve Uyarı 3.1'den $0|0 = 1$ elde edilir. Öyleyse, (S2)'den $1|1 = (0|0)|(0|0) = 0$ elde edilir.
- (ii) Sırasıyla, Uyarı 3.1 ve Lemma 3.3 (ii)'den $0^* = 0|(0|0) = 1$ ve $1^* = 1|(0|0) = 0$ bulunur.
- (iii) 1, H nin en büyük elemanı olduğundan ve Lemma 2.2'den $x|1 = x|x$ elde edilir.
- (iv) (i) ve (iii) şıklarından $x^* = x|(0|0) = x|1 = x|x$ elde edilir.
- (v) (i) şikkından ve Lemma 3.3 (i)'den $x|0 = x|(1|1) = 1$ bulunur.

(vi) (iv) ve (S2)'den $(x^*)^* = (x|x)|(x|x) = x$ sonucuna ulaşılır.

(vii) (iv) ve Uyarı 3.1'den $x|x^* = x|(x|x) = 1$ elde edilir.

□

Teorem 3.2. $\langle H, \longrightarrow, 1 \rangle$, 0 elemanına sahip bir Hilbert cebiri olsun. O zaman $x|y := x \longrightarrow y^*$ ile tanımlı $\langle H, | \rangle$ yapısı bir Sheffer stroke Hilbert cebiridir.

İspat. $\langle H, \longrightarrow, 1 \rangle$, 0 elemanına sahip bir Hilbert cebiri olsun ve $x|y := x \longrightarrow y^*$ ile tanımlansın.

(SHA₁): Tanım 2.14 (a₁) ve Lemma 3.7 (vi)'den

$$\begin{aligned}
 & (x|((y|(z|z))|(y|(z|z))))|(((x|(y|y))|((x|(z|z))| \\
 & (x|(z|z))))|(((x|(y|y))|((x|(z|z))|(x|(z|z)))))) \\
 & = x \longrightarrow (y \longrightarrow z) \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow z)) \\
 & = 1 \\
 & = x \longrightarrow x \\
 & = x|(x|x)
 \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

(SHA₂): $x|(y|y) = y|(x|x) = x|(x|x)$ olsun. O halde $x \longrightarrow y = y \longrightarrow x = x \longrightarrow x = 1$ ve böylece Tanım 2.14 (a₃)'den $x = y$ elde edilir. □

Örnek 3.3. $H = \{0, x, y, z, t, u, v, 1\}$ olmak üzere Çizelge 3.6'daki işlem tablosuna sahip $\langle H, \longrightarrow, 1 \rangle$ Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım:

$\longrightarrow$	0	x	y	z	t	u	v	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
x	v	1	v	v	1	1	v	1
y	u	u	1	u	1	u	1	1
z	t	t	t	1	t	1	1	1
t	z	u	v	z	1	u	v	1
u	y	t	y	v	t	1	v	1
v	x	x	t	u	t	u	1	1
1	0	x	y	z	t	u	v	1

Çizelge 3.6: H üzerindeki $\longrightarrow$ işlem tablosu

O halde bu Hilbert cebiri aracılığıyla tanımlanan Sheffer stroke Hilbert cebiri Örnek 3.1'de bulunan Sheffer stroke Hilbert cebiridir.

Önerme 3.1. $\langle H, | \rangle$ bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve $\leq$ bağıntısı H üzerinde bir doğal sıralama olsun. O zaman $\langle H, \leq \rangle$ yapısı 1 en büyük elemanına sahip bir join-yarı kafestir ve $x \vee y = (x|(y|y))|(y|y)$ dir.

İspat. $\langle H, | \rangle$ bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve $\leq$ bağıntısı H üzerinde bir doğal sıralama olsun. O halde (Shb₃) ve (Shb₅)’den $x \leq (x|(y|y))|(y|y)$ ve $y \leq (y|(x|x))|(x|x) = (x|(y|y))|(y|y)$ elde edilir. Bu durumda, $(x|(y|y))|(y|y)$; x ve y için bir üst sınırdır. $x, y \leq z$ olduğunu varsayalım. O zaman (Shb₈), (Shb₃) ve Lemma 3.3 (ii) kullanılarak $(x|(y|y))|(y|y) \leq (z|(y|y))|(y|y) = (y|(z|z))|(z|z) = 1|(z|z) = z$ sonucuna varılır. Öyleyse, $(x|(y|y))|(y|y)$; x ve y ’nin en küçük üst sınırı (supremumu), yani $x \vee y = (x|(y|y))|(y|y)$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.2. $\langle H, | \rangle$, 0 elemanlı bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve $\leq$ bağıntısı H üzerinde bir doğal sıralama olsun. O halde $\langle H, \leq \rangle$ yapısı 0 en küçük elemanına sahip bir meet-yarı kafes ve $x \wedge y = ((x|x) \vee (y|y))|((x|x) \vee (y|y))$ dir.

İspat. $\langle H, | \rangle$, 0 elemanlı bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve $\leq$ bağıntısı H üzerinde bir doğal sıralama olsun. O zaman Lemma 2.3 (i), Önerme 3.1 ve (S2)’den $((x|x) \vee (y|y))|((x|x) \vee (y|y)) \leq (x|x)|(x|x) = x$ ve $((x|x) \vee (y|y))|((x|x) \vee (y|y)) = ((y|y) \vee (x|x))|((y|y) \vee (x|x)) \leq (y|y)|(y|y) = y$ elde edilir. Böylece $((x|x) \vee (y|y))|((x|x) \vee (y|y))$, x ve y ’nin bir alt sınırıdır. $z \leq x, y$ olsun. O zaman Önerme 3.1, (S2) ve Lemma 2.3 (i)’den

$$\begin{aligned} z &= (z|z)|(z|z) \\ &= ((z|z) \vee (y|y))|((z|z) \vee (y|y)) \\ &\leq ((x|x) \vee (y|y))|((x|x) \vee (y|y)) \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse $((x|x) \vee (y|y))|((x|x) \vee (y|y))$, x ve y ’nin en büyük alt sınırı (infimumu) ve buradan $x \wedge y = ((x|x) \vee (y|y))|((x|x) \vee (y|y))$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.1. $\langle H, | \rangle$, 0 elemanlı bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman $(H, \vee, \wedge, 0, 1)$ bir kafestir.

Teorem 3.3. $\langle H, |_H \rangle$ ve $\langle G, |_G \rangle$ iki Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman $H \times G$ kümesi üzerinde her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H \times G$ için $(x_1, y_1)|_{H \times G}(x_2, y_2) = (x_1|_H x_2, y_1|_G y_2)$ ile tanımlı $|_{H \times G}$ Sheffer stroke işlemi olmak üzere $\langle H \times G, |_{H \times G} \rangle$ yapısı da bir Sheffer stroke Hilbert cebiridir.

3.1 İdealleri

Bu kısımda, Sheffer Stroke Hilbert cebirlerinin idealleri ve türetici sistemleri tanıtılarak, bu kavramlara ilişkin özellikler ve aralarındaki bağlantılar incelenecektir. Okunabilirliği kolaylaştırmak adına, aksi belirtilmedikçe, bir Sheffer stroke Hilbert cebiri kısaca H ile gösterilecektir.

Tanım 3.2. Her $x, y \in H$ için

$$(i) \ 1 \in S,$$

$$(ii) \ x \in S \text{ ve } x|(y|y) \in S \text{ ise o zaman } y \in S$$

koşullarını sağlayan H 'nin bir S altkümesine H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir türetici sistemi denir.

Tanım 3.3. Her $x, y \in H$ için

$$(SSH1) \ 0 \in I,$$

$$(SSH2) \ (x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I \text{ ve } y \in I \text{ ise o zaman } x \in I$$

koşullarını sağlayan H 'nin boştan farklı bir I altkümesine H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir ideali denir.

Örnek 3.4. Örnek 3.2'de verilen Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman H 'nin kendisi ile $\{0\}$, $I_1 = \{0, p\}$ ve $I_2 = \{0, q\}$ altkümeleri H 'nin idealleridir.

Teorem 3.4. $0 \in I$ olmak üzere I , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir altkümesi olsun. O zaman I 'nin H 'nin ideali olması için gerek ve yeter koşul her $x \in H$ için $x \leq y$ ve $y \in I$ olduğunda $x \in I$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ I , H 'nin bir ideali, $y \in I$ ve $x \leq y$ olsun. O zaman Lemma 3.4'den $x|(y|y) = 1$ nülünür. Lemma 3.7 (i)'den $(x|(y|y))|(x|(y|y)) = 1|1 = 0 \in I$ ve böylece (SSH2)'den $x \in I$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $0 \in I$ olacak şekilde I , H 'nin bir alt kümesi olsun. Her $x \in H$ için $x \leq y$ ve $y \in I$ ise o zaman $x \in I$ olduğunu kabul edelim. O zaman Lemma 3.7 (i)'den $(x|(y|y))|(x|(y|y)) = 1|1 = 0 \in I$ ve $y \in I$ olduğundan $x \in I$ sonucuna ulaşılır. O halde I , H 'nin bir idealidir. $\square$

Sonuç 3.2. I , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir ideali ve $y \in I$ olsun. Eğer $y|y \leq x|x$ ise o zaman $x \in I$ dir.

İspat. Lemma 2.3 (i), (S2) ve Theorem 3.4'den elde edilir $\square$

H nin boştan farklı bir altkümesi için, bir

$$C(I) = \{x|x : x \in I\}$$

altkümesi tanımlansın.

Teorem 3.5. I 'nin H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul $C(I)$ 'nin H 'nin türetici sistemi olmasıdır.

İspat. I , H 'nin bir ideali olsun. O zaman (SSHI1)'den $0 \in I$ ve Lemma 3.7 (i)'den $0|0 = 1 \in C(I)$ elde edilir. Her $x, y \in H$ için $x \in C(I)$ ve $x|(y|y) \in C(I)$ olsun. Bu durumda $x = a|a$ ve $x|(y|y) = b|b$ olacak şekilde $a, b \in I$ elemanları mevcuttur. (S1) ve (S2)'den

$$\begin{aligned} ((y|y)|(a|a))|((y|y)|(a|a)) &= ((a|a)|(y|y))|((a|a)|(y|y)) \\ &= (x|(y|y))|(x|(y|y)) \\ &= (b|b)|(b|b) \\ &= b \in I \end{aligned}$$

ve böylece (SSHI2)'den $y|y \in I$ elde edilir. Böylece (S2)'den $y = (y|y)|(y|y) \in C(I)$ sonucuna ulaşılır. O halde, $C(I)$ H 'nin bir türetici sistemidir.

Diğer taraftan, $C(I)$ 'nin H 'nin bir türetici sistemi olduğunu kabul edelim. $1 \in C(I)$ ve Lemma 3.7 (i)'den $1 = 0|0$ olduğundan $0 \in I$ dır. Her $x, y \in H$ için $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ ve $y \in I$ olsun. O halde (S1)-(S2) aksiyomlarından $(y|y)|((x|x)|(x|x) = x|(y|y) = ((x|(y|y))|(x|(y|y)))|((x|(y|y))|(x|(y|y))) \in C(I)$ ve $y|y \in C(I)$ ve böylece Tanım 3.2 (ii)'den $x|x \in C(I)$ olduğundan $x \in I$ elde edilir. O halde I , H 'nin bir idealidir. $\square$

Örnek 3.5. Örnek 3.4'ü göz önünde bulunduralım. O zaman H 'nin $I_1 = \{0, p\}$ ideali için $0|0 = 1$ ve $p|p = q$ olduğundan, $C(I_1) = \{q, 1\}$, H 'nin bir türetici sistemidir.

Gözlem 3.1. $\mathcal{I}$, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. O zaman $I = \cap \mathcal{I}$, H 'nin bir idealidir.

Tanım 3.4. A , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir altkümesi olsun. O zaman H 'nin A 'yı kapsayan en küçük idealine H Sheffer stroke Hilbert cebirinin A tarafından üretilen ideali denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir.

Gözlem 3.2. A ve B , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin iki altkütmesi olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $\langle \{0\} \rangle = \{0\}$ ve $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.
- (ii) $\langle H \rangle = H$ ve $\langle \{1\} \rangle = H$.
- (iii) $A \subseteq B$ ise o zaman $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ dir.
- (iv) $x \leq y$ ise o zaman $\langle \{x\} \rangle \subseteq \langle \{y\} \rangle$ dir.
- (v) Eğer A , H 'nin bir ideali ise, o zaman $\langle A \rangle = A$ dir.

Gözlem 3.3. Herhangi bir n doğal sayısı için $x^n|(y|y)$ rekürsif olarak aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$x^1|(y|y) = x|(y|y) \text{ ve } x^{n+1}|(y|y) = x|((x^n|(y|y))|(x^n|(y|y))).$$

(Shb₅)'den ve tümevarım ilkesinden

(Shb₉)

$$\begin{aligned} & z|((x_n|(\dots(x_2|((x_1|(y|y))|(x_1|(y|y))))\dots)|((x_n|(\dots(x_2|((x_1|(y|y))|(x_1|(y|y))))\dots))) \\ & = x_n|((\dots(x_1|((z|(y|y))|(z|(y|y))))\dots)|(\dots(x_1|((z|(y|y))|(z|(y|y))))\dots)) \end{aligned}$$

ve özel bir hali olarak

$$(Shb_{10}) \quad z|((x^n|(y|y))|(x^n|(y|y))) = x^n|((z|(y|y))|(z|(y|y)))$$

elde edilir.

$a, y, x_1, \dots, x_n \in H$ elemanları olsunlar. Sırasıyla, (Shb₄), (Shb₆), (Shb₄) ve Uyarı 3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} & (((x_n|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots)|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots))) \\ & (y|(a|a)))\dots)|((a|a))|(a|a))|((x_n|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots))) \\ & (a|a)))\dots)|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots)|((x_n|(\dots(x_1| \\ & ((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots)|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots))) = 1 \end{aligned}$$

ve Lemma 3.4'den

$$\begin{aligned} & (((x_n|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots)|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots))) \\ & |(a|a))|(a|a)) \leq (x_n|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots)|(\dots(x_1|((y|(a|a)) \\ & |(y|(a|a))))\dots))) \end{aligned} \quad (3.3)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (Shb₅)'den (Shb₁₁)

$$\begin{aligned} & (((x_n|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots)|(\dots \\ & (x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots)|((a|a))|(a|a)) \\ & = (x_n|(\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots)| \\ & (\dots(x_1|((y|(a|a))|(y|(a|a))))\dots))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (b_m|b_m)|((\dots(((b_1|b_1)|((a_n|a_n)|(\dots(((a_1|a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots)|(\dots(((a_1| \\ & |a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots))))|((b_1|b_1)|((a_n|a_n)|(\dots(((a_1|a_1)|x)|((a_1|a_1)|x)) \\ & \dots)|(\dots(((a_1|a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots))))))\dots)|(\dots(((b_1|b_1)|((a_n|a_n)|(\dots(((a_1| \\ & a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots)|(\dots(((a_1|a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots))))|((b_1|b_1)|((a_n|a_n) \\ & |(\dots(((a_1|a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots)|(\dots(((a_1|a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots))))))\dots) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $x \in U$ ve buradan U , H 'nin bir idealidir. V , H 'nin A 'yı kapsayan bir ideali ve $x \in U$ olsun. O zaman $a_1, \dots, a_n \in A$ için $(a_n|a_n)|((\dots((a_1|a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)|((a_1|a_1)|x))\dots) = 1$ 'dir. (S2) aksiyomundan

$$\begin{aligned}
1 &= (a_n|a_n)|(((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x) \\
&\quad \dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))) \\
&= (a_n|a_n)|((((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))) \\
&\quad |((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))|(((a_{n-1}| \\
&\quad a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots \\
&\quad ((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))|((((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1| \\
&\quad a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)| \\
&\quad (\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))|(((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)| \\
&\quad |x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))))
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
&((a_n|a_n)|((((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x) \\
&\quad \dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))| \\
&\quad (((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}| \\
&\quad a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))|((((a_{n-1}|a_{n-1})| \\
&\quad ((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1| \\
&\quad a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))|(((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x) \\
&\quad \dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1| \\
&\quad a_1)|x)\dots))))))|((a_n|a_n)|((((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots \\
&\quad ((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x) \\
&\quad \dots))))|(((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1} \\
&\quad |a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))|((((a_{n-1}|a_{n-1})| \\
&\quad ((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1) \\
&\quad |x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))|(((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1 \\
&\quad |a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))))) \\
&= 1|1 \\
&= 0 \in V
\end{aligned}$$

elde edilir. $a_n \in A \subseteq V$ olduğuna göre (S1), (SSH12) ve (S2)'den $((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots$
 $((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)$

...))) $\in V$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} & ((a_{n-1}|a_{n-1})|(((a_{n-2}|a_{n-2})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-2}| \\ & a_{n-2})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))))|((a_{n-1}|a_{n-1})|(((a_{n-2}|a_{n-2}) \\ & |((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-2}|a_{n-2})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots \\ & ((a_1|a_1)|x)\dots)))))) = ((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))| \\ & ((a_{n-1}|a_{n-1})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))) \in V \end{aligned}$$

ve $a_{n-1} \in A \subseteq V$ olduğuna göre (S1), (SSHI2) ve (S2)'den $((a_{n-2}|a_{n-2})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots)))|((a_{n-2}|a_{n-2})|((\dots((a_1|a_1)|x)\dots)|(\dots((a_1|a_1)|x)\dots))) \in V$ sonucuna ulaşılır.

Yukarıdaki yöntem $(n-2)$ defa tekrarlanarak $x \in V$ elde edilir. Böylece $U \subseteq V$ ispatlanmış olur. Bundan dolayı, $U = \langle A \rangle$ dir. $\square$

Eğer $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ için kısaca $\langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ yazılabilir. Teorem 3.6'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3. *Herhangi bir $a \in H$ için $\langle a \rangle = \{x \in H : \text{bir } n \text{ doğal sayısı için } x|(a|a)^n = 1\}$ 'dir.*

Aşağıdaki teorem bir Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir ideali ve bir elemanı yardımıyla yeni bir idealinin nasıl tanımlanabileceğini göstermektedir.

Teorem 3.7. *I, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir ideali ve $a \in H$ olsun. O zaman $\langle I \cup \{a\} \rangle = \{x \in H : \text{bir } n \text{ doğal sayısı için } (x|(a|a)^n)|(x|(a|a)^n) \in I\}$ 'dir.*

İspat. I, H 'nin bir ideali, $a \in H$ ve $U = \{x \in H : \text{bir } n \text{ doğal sayısı için } (x|(a|a)^n)|(x|(a|a)^n) \in I\}$ olsun. $(a|(a|a)^n)|(a|(a|a)^n) = 1|1 = 0 \in I$ olduğuna göre $a \in U$ elde edilir. $x \in I$ için

$$\begin{aligned} x|x & \leq (a|a)|((x|x)|(x|x)) \\ & = (a|a)|x \\ & = x|(a|a) \\ & = ((x|(a|a))|(x|(a|a)))|((x|(a|a))|(x|(a|a))) \end{aligned}$$

olduğundan Sonuç 3.2'den $(x|(a|a))|(x|(a|a)) \in I$ ve dolayısıyla $x \in U$ 'dur. O halde $I \cup \{a\} \subseteq U$ sonucuna ulaşılır. U 'nun H 'nin bir ideali olduğunu ispatlamak için $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in U$ ve $y \in U$ olsun. Sırasıyla,

(Shb₁₃) $((x|(y|y))|(x|(y|y))|(a|a)^n)|((x|(y|y))|(x|(y|y))|(a|a)^n) \in I$ ve
 (Shb₁₄) $(y|(a|a)^m)|(y|(a|a)^m) \in I$

olacak şekilde n ve m doğal sayıları vardır.

$u, v \in I$ için (Shb₁₃) ve (Shb₁₄)'den $((x|(y|y))|(x|(y|y))|(a|a)^n)|((x|(y|y))|(x|(y|y))|(a|a)^n) = u$ ve $(y|(a|a)^m)|(y|(a|a)^m) = v$ elde edilir. Bu durumda (S2) aksiyomundan

(Shb₁₅) $((x|(y|y))|(x|(y|y))|(a|a)^n) = u|u$ ve

(Shb₁₆) $y|(a|a)^m = v|v$

dir.

(Shb₁₅)'den $y|y \leq (u|u)|((x|(a|a)^n)|(x|(a|a)^n))$ olduğuna göre (Shb₄), (Shb₈) ve (Shb₁₆)'dan $v|v = y|(a|a)^m \leq (u|u)|((x|(a|a)^{m+n})|(x|(a|a)^{m+n}))$ elde edilir. Öyleyse $(v|v)|(((u|u)|((x|(a|a)^{m+n})|(x|(a|a)^{m+n})))|((u|u)|((x|(a|a)^{m+n})|(x|(a|a)^{m+n})))) = 1$ bulunur. $u, v \in I$ olduğundan Gözlem 3.2 (v) ve Theorem 3.6'dan $(x|(a|a)^{m+n})|(x|(a|a)^{m+n}) \in I$ ve buradan $x \in U$ elde edilir. Böylece $0 \in U$ olduğundan U, H 'nin bir idealidir.

Şimdi V, H 'nin I ve a 'yı içeren bir ideali olsun. Eğer $x \in U$ ise, o zaman $(x|(a|a)^n)|(x|(a|a)^n) \in I \subseteq V$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Buradan $((x|(a|a)^{n-1})|(x|(a|a)^{n-1}))|(a|a)|((x|(a|a)^{n-1})|(x|(a|a)^{n-1}))|(a|a) = (x|(a|a)^n)|(x|(a|a)^n) \in V$ elde edilir. $a \in V$ ve (SSHI2)'den $(x|(a|a)^{n-1})|(x|(a|a)^{n-1}) \in V$ olur. Yukarıda uygulanan yöntem $(n-1)$ defa tekrar edilerek $x \in V$ sonucuna ulaşılır. Böylece $U \subseteq V$, yani, U, H 'nin I ve a 'yı içeren en küçük idealidir. O halde $\langle I \cup \{a\} \rangle = U$ dur. $\square$

Örnek 3.6. Örnek 3.4'ü göz önünde bulunduralım. O zaman H 'nin $I_2 = \{0, q\}$ ideali ve $p \in H$ elemanı alınırsa

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } (0|(p|p)^n)|(0|(p|p)^n) = 1|1 = 0 \in I_2,$$

$$n = 1 \text{ için } (p|(p|p))|(p|(p|p)) = 1|1 = 0 \in I_2,$$

$$n = 1 \text{ için } (q|(p|p))|(q|(p|p)) = q \in I_2 \text{ ve}$$

$$n = 1 \text{ için } (1|(p|p))|(1|(p|p)) = q \in I_2$$

olduğuna göre $\langle I_2 \cup \{p\} \rangle = \{0, p, q, 1\} = H$, H 'nin bir idealidir.

3.2 Süzgeçleri

Bu kısımda, Sheffer stroke Hilbert cebirlerinin süzgeçleri tanıtılarak çeşitli özellikleri ve türetici sistemlerle arasındaki bağlantılar incelenecektir.

Tanım 3.5. Her $x, y, y_1, y_2 \in H$ için

$$(f_1) \ 1 \in F,$$

$$(f_2) \ x \in H \text{ ve } y \in F \text{ için } x|(y|y) \in F,$$

$$(f_3) \ x \in H \text{ ve } y_1, y_2 \in F \text{ için } (x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2) \in F$$

özelliklerini sağlayan H 'nin boştan farklı bir F altkümesine H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir süzgeci (filtresi) denir.

Örnek 3.7. Örnek 3.1'deki H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman $\{u, 1\}, \{v, 1\}, \{t, 1\}, \{x, t, u, 1\}, \{z, u, v, 1\}, \{y, v, t, 1\}, \{1\}$ ve H 'nin kendisi H 'nin süzgeçleridir.

Teorem 3.8. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman H 'nin bir F altkümesi H 'nin bir süzgecidir eğer ve yalnız eğer F , H 'nin türetici sistemidir.

İspat. $(\Rightarrow)$ F , H 'nin bir süzgeci olsun. O halde (f_1) 'den $1 \in F$ olur. $x \in F$ ve $x|(y|y) \in F$ olduğunu kabul edelim. (f_3) 'de eş zamanlı olarak y_1 yerine x , y_2 yerine $x|(y|y)$ ve x yerine y yazılırsa (S1)-(S3), (Shb₃), (Shb₆), Uyarı 3.1 ve Lemma 3.3'den

$$\begin{aligned} (y|(x|(x|(y|y))))|(x|(x|(y|y))) &= (((x|x)|y)|y)|y|(((x|x)|y)|y) \\ &= (y|((x|x)|y))|((x|x)|y) \\ &= (((x|x)|y)|((x|x)|y))|(y|y)|y \\ &= ((x|x)|((y|(y|y))|(y|(y|y))))|(y|y) \\ &= ((x|x)|(1|1))|(y|y) \\ &= y \in F \end{aligned}$$

elde edilir. O halde F , H 'nin bir türetici sistemidir.

$(\Leftarrow)$ F , H 'nin bir türetici sistemi olsun. O zaman

(f_1) : Tanım 3.2 (i)'den $1 \in F$ elde edilir.

(f_2) : $x \in H$ ve $y \in F$ olsun. $y \leq x|(y|y)$ olduğundan Lemma 3.4 ve Tanım 3.2 (i)'den

$$y|((x|(y|y))|(x|(y|y))) = 1 \in F$$

ve böylece Tanım 3.2 (ii)'den $x|(y|y) \in F$ elde edilir.

(f₃): $x \in H$ ve $y_1, y_2 \in F$ olsun. (Shb₄), Uyarı 3.1 ve Tanım 3.2 (i)'den $y_1|(((y_1|y_2)|y_2)|((y_1|y_2)|y_2)) = (y_1|y_2)|((y_1|y_2)|(y_1|y_2)) = 1 \in F$ olduğuna göre Tanım 3.2 (ii)'den $(y_1|y_2)|y_2 \in F$ ve ayrıca, (S1) ve (S2) aksiyomlarından $y_2|(((y_1|y_2)|(y_1|y_2))|((y_1|y_2)|(y_1|y_2))) = (y_1|y_2)|y_2 \in F$ olması nedeniyle Tanım 3.2 (ii)'den $(y_1|y_2)|(y_1|y_2) \in F$ elde edilir. (f₂) ve (S2)'den $(x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2) = (x|(((y_1|y_2)|(y_1|y_2))|((y_1|y_2)|(y_1|y_2))))|(((y_1|y_2)|(y_1|y_2))|((y_1|y_2)|(y_1|y_2)))(x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2) \in F$ sonucuna ulaşılır. O halde F, H 'nin bir süzgecidir. $\square$

3.3 Fuzzy Süzgeçleri

Bu kısımda, Sheffer stroke Hilbert cebirlerinin fuzzy süzgeçleri ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.6. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve f ve g , H 'nin iki fuzzy altkümesi olsun. O zaman f ve g arasındaki $\subseteq$ kapsama bağıntısı her $x, y \in H$ için

$$f \subseteq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.7. H Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman her $x, y, y_1, y_2 \in H$ için

$$(FH1) \quad f(x) \leq f(1),$$

$$(FH2) \quad f(y) \leq f(x|(y|y)),$$

$$(FH3) \quad \min\{f(y_1), f(y_2)\} \leq f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))$$

aksiyomlarını sağlayan H 'nin bir f fuzzy altkümesine H 'nin bir fuzzy süzgeci denir.

Örnek 3.8. Örnek 3.2'de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman

$$f(x) = \begin{cases} 0.21, & x = 0, p \text{ ise} \\ 0.33, & x = q \text{ ise} \\ 0.56, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan H 'nin bir f fuzzy altkümesi H 'nin bir fuzzy süzgecidir.

Lemma 3.8. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve f , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman her $x, y \in H$ için

$$f(x) \leq f((x|(y|y))|(y|y))$$

dir.

İspat. f , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman (Shb_3) 'den her $x, y \in H$ için $f((x|(y|y))|(y|y)) = f((y|(x|x))|(x|x))$ bulunur. (FH3)'de eş zamanlı olarak y_1 yerine x , y_2 yerine x ve x yerine y konulursa $f(x) = \min\{f(x), f(x)\} \leq f((y|(x|x))|(x|x)) = f((x|(y|y))|(y|y))$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Lemma 3.9. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman H 'nin her f fuzzy süzgeci sıra-koruyan, yani, $x \leq y$ ise $f(x) \leq f(y)$ 'dir.

İspat. f , H 'nin fuzzy süzgeci ve $x \leq y$ olsun. O zaman Lemma 3.4'den $x|(y|y) = 1$ ve böylece Lemma 3.8 ve Lemma 3.3 (ii)'den $f(x) \leq f((x|(y|y))|(y|y)) = f(1|(y|y)) = f(y)$ elde edilir. $\square$

Lemma 3.9 un tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekle gösterilmektedir.

Örnek 3.9. Örnek 3.2'de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini ele alalım. O zaman

$$f(x) = \begin{cases} 0.79, & x = 1 \text{ ise} \\ 0.21, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlı H 'nin bir f fuzzy süzgeci için $f(p) \leq f(q)$ olmasına rağmen $p \not\leq q$ dir.

Bir Sheffer stroke Hilbert cebirinin sıra-koruyan bir fuzzy altkümesinin genelde bir fuzzy süzgeç olmadığı aşağıdaki örnek ile gösterilmektedir.

Örnek 3.10. Örnek 3.2'de sunulan H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. H 'nin bir f fuzzy altkümesi $f(0) = 0.13$, $f(p) = 0.14$, $f(q) = 0.15$ ve $f(1) = 0.72$ şeklinde tanımlansın. O zaman $0.14 = f(p) = \min\{f(p), f(q)\} > f((0|(p|q))|(p|q)) = f(0) = 0.13$ olduğundan f sıra-koruyandır fakat H 'nin bir fuzzy süzgeci değildir.

Lemma 3.10. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve f , H 'nin bir fuzzy altkümesi olsun. O zaman f , H 'nin bir fuzzy süzgecidir eğer ve yalnız eğer

(a) f sıra-koruyandır,

(b) her $x, y \in H$ için $\min\{f(x), f(y)\} \leq f((x|y)|(x|y))$ 'dir.

İspat. $(\Rightarrow)$ f , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman Lemma 3.9'dan f sıra-koruyandır. Ayrıca, (FH3)'de, eş zamanlı olarak, x yerine $1|1$, y_1 yerine x

ve y_2 yerine y yazılırsa, (S1), (S2) ve Lemma 3.3'den her $x, y \in H$ için $\min\{f(x), f(y)\} \leq f(((1|1)|(x|y))|(x|y)) = f((x|y)|(x|y))$ sonucuna ulaşılır.

($\Leftarrow$) f , H 'nin (a) ve (b) koşullarını sağlayan bir fuzzy altkümesi olsun.

(FH1): Her $x \in H$ için $x \leq 1$ olduğundan, (a) koşulunu kullanarak $f(x) \leq f(1)$ elde edilir.

(FH2): Her $x, y \in H$ için (Shb₁)'den $y \leq x|(y|y)$ olduğundan (a) koşulu gereği $f(y) \leq f(x|(y|y))$ olur.

(FH3): (b) koşulunda x yerine y_1 ve y yerine y_2 konulursa, her $x, y_1, y_2 \in H$ için (Shb₁), (S2) ve (a) şikkından $\min\{f(y_1), f(y_2)\} \leq f((y_1|y_2)|(y_1|y_2)) \leq f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))$ elde edilir. $\square$

H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir f fuzzy altkümesi için H 'nin bir

$$H_f = \{x \in H : f(x) = f(1)\}$$

altkümesi tanımlansın.

Önerme 3.3. A , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin boştan farklı bir altkümesi ve $t_1 > t_2$ olmak üzere $t_1, t_2 \in [0, 1]$ için H 'nin bir f_A fuzzy altkümesi

$$f_A(x) = \begin{cases} t_1, & x \in A \text{ ise} \\ t_2, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlansın. O zaman f_A 'nın H 'nin bir fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul A 'nın H 'nin bir süzgeci olmasıdır. Ayrıca, $H_{f_A} = A$ 'dır.

İspat. A , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin boştan farklı bir altkümesi ve $t_1 > t_2$ olmak üzere $t_1, t_2 \in [0, 1]$ için H 'nin bir f_A fuzzy altkümesi

$$f_A(x) = \begin{cases} t_1, & x \in A \text{ ise} \\ t_2, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

($\Rightarrow$) f_A 'nın H 'nin fuzzy süzgeci olduğunu varsayalım. (FH1)'den $f_A(1) = t_1$ olduğundan $1 \in A$ olur. $x \in H$ ve $y \in A$ olsun. O zaman $f_A(y) = t_1$ bulunur. (FH2)'den $t_1 = f_A(y) \leq f_A(x|(y|y))$, $f_A(x|(y|y)) = t_1$ ve buradan $x|(y|y) \in A$ elde edilir. $x \in H$ ve $y_1, y_2 \in A$ olsun.

$$t_1 = \min\{f(y_1), f(y_2)\} \leq f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)),$$

olduğundan $f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) = t_1$ ve buradan $(x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2) \in A$ sonucuna ulaşılır. O halde A , H 'nin bir süzgecidir.

($\Leftarrow$) A 'nın H 'nin bir süzgeci olduğunu kabul edelim. (f_1) 'den $1 \in A$ olduğuna göre her $x \in H$ için $f_A(x) \leq f_A(1) = t_1$ olur. x ve y , H 'nin herhangi iki elemanı olsun. Eğer $y \in A$ ise o zaman (f_2) 'den $x|(y|y) \in A$ ve buradan $f_A(x|(y|y)) = t_1 = f_A(y)$ elde edilir. Eğer $y \notin A$ ise o zaman $f_A(y) = t_2$ olup, buradan $f_A(y) \leq f_A(x|(y|y))$ elde edilir. x , y_1 ve y_2 , H 'nin herhangi üç elemanı olsun. Eğer $y_1, y_2 \in A$ ise o zaman (f_3) 'den $(x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2) \in A$ ve bu durumda $f_A((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) = t_1 = \min\{f_A(y_1), f_A(y_2)\}$ sonuçlandırılır. Eğer $y_1, y_2 \notin A$ ise o zaman $t_2 = \min\{f_A(y_1), f_A(y_2)\} \leq f_A((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))$ olur. Eğer $y_1 \in A$ ve $y_2 \notin A$ (ya da $y_1 \notin A$ ve $y_2 \in A$) ise o zaman $f_A(y_1) = t_1$ ve $f_A(y_2) = t_2$ (ya da $f_A(y_1) = t_2$ ve $f_A(y_2) = t_1$) elde edilir. Böylece, $t_2 = \min\{f_A(y_1), f_A(y_2)\} \leq f_A((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))$ olur. O halde f_A , H 'nin fuzzy süzgecidir.

A , H 'nin bir süzgeci olduğuna göre

$$\begin{aligned} H_{f_A} &= \{x \in H : f_A(x) = f_A(1)\} \\ &= \{x \in H : f_A(x) = t_1\} \\ &= \{x \in H : x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 3.11. *H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman H 'nin bir f fuzzy altkümesinin H 'nin bir fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $t \in [0, 1]$ için boştan farklı bir $f_t = \{x \in H : f(x) \geq t\}$ kümesinin H 'nin bir süzgeci olmasıdır.*

İspat. f 'nin H 'nin bir fuzzy süzgeci ve $f_t \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O zaman $t \leq f(x)$ olacak şekilde bir $x \in H$ elemanı vardır. (FH1)'den $t \leq f(x) \leq f(1)$ olduğuna göre $1 \in f_t$ elde edilir. $y \in f_t$ olsun. O zaman $t \leq f(y)$ bulunur. (FH2)'den $f(y) \leq f(x|(y|y))$ olduğundan $t \leq f(y) \leq f(x|(y|y))$ ve buradan $x|(y|y) \in f_t$ elde edilir. $y_1, y_2 \in f_t$ olsun. Bu durumda $t \leq f(y_1)$ ve $t \leq f(y_2)$ olur. (FH3)'den $t \leq \min\{f(y_1), f(y_2)\} \leq f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))$ olduğundan $(x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2) \in f_t$ bulunur. O halde f_t , H 'nin bir süzgecidir.

Diğer yönden, boştan farklı bir f_t kümesinin H 'nin bir süzgeci olduğunu kabul edelim. Bir $x \in H$ için $f(1) < f(x)$ olsun. Eğer $t = \frac{f(x) + f(1)}{2} \in (0, 1]$ ise o zaman $f(1) < t < f(x)$ ve dolayısıyla $1 \notin f_t$ olup (f_1) koşulu ile çelişir. Öyleyse, her $x \in H$ için $f(x) \leq f(1)$ olur. $x, y \in H$ için $f(x|(y|y)) < f(y)$ olsun. Eğer $t = \frac{f(x|(y|y)) + f(y)}{2} \in (0, 1]$ ise o zaman $f(x|(y|y)) < t < f(y)$ elde edilir. Bu durumda, $y \in f_t$ olmasına rağmen $x|(y|y) \notin f_t$ olur ve bu (f_2) ile çelişir. O halde her $x, y \in H$ için $f(y) \leq f(x|(y|y))$ bulunur. Ayrıca, $x, y_1, y_2 \in H$ için $f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) < \min\{f(y_1), f(y_2)\}$ olsun. $f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) = t_1$ ve $\min\{f(y_1), f(y_2)\} = t_2$ olmak üzere $t = \frac{t_1 + t_2}{2} \in (0, 1]$ ise o zaman $f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) < t < \min\{f(y_1), f(y_2)\}$ elde edilir. Böylece, $y_1, y_2 \in f_t$ iken $(x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2) \notin f_t$ olduğu için, bu (f_3) koşulu ile çelişir. O halde her $x, y_1, y_2 \in H$ için $\min\{f(y_1), f(y_2)\} \leq f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))$ elde edilir. O halde f , H 'nin bir fuzzy süzgecidir. $\square$

Lemma 3.12. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve $s, t \in [0, 1]$ için $s < t$ olmak üzere f_s ve f_t , H 'nin iki süzgeci olsun. O zaman f_s ve f_t eşittir eğer ve yalnız eğer $s \leq f(a_0) < t$ olacak şekilde bir $a_0 \in H$ elemanı mevcut değildir.

İspat. $s, t \in [0, 1]$ için $s < t$ olmak üzere f_s ve f_t , H 'nin iki süzgeci olsun. $f_s = f_t$ olduğunu varsayalım. O zaman $f_s = \{x \in H : s \leq f(x)\} = \{x \in H : t \leq f(x)\} = f_t$ olur. Eğer $s \leq f(a_0) < t$ olacak şekilde bir $a_0 \in H$ elemanı mevcut olsaydı o zaman $a_0 \notin f_t = f_s$ olurdu. Bu ise $a_0 \in f_s$ ile çelişir. O halde $s \leq f(a_0) < t$ olacak şekilde bir $a_0 \in H$ elemanı mevcut değildir.

Diğer yönden, $s \leq f(a_0) < t$ olacak şekilde bir $a_0 \in H$ elemanının mevcut olmadığını kabul edelim. $f_s \neq f_t$ ve $s, t \in [0, 1]$ için $s < t$ olacak şekilde f_s ve f_t , H 'nin iki süzgeci olsun. O zaman $s \leq f(a_0) < t$ olacak şekilde bir $a_0 \in H$ vardır. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $f_s = f_t$ dir. $\square$

Sonuç 3.4. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve f , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman her $s, t \in \text{Im}(f)$ için $f_s = f_t$ olması için gerek ve yeter koşul $s = t$ olmasıdır.

İspat. f 'nin H 'nin bir fuzzy süzgeci olduğunu varsayalım.

$(\Rightarrow)$ Herhangi $s, t \in \text{Im}(f)$ için $f_s = f_t$ olsun. O zaman $a_0, a_1 \in H$ için $f(a_0) = s$ ve $f(a_1) = t$ olur ve buradan $a_0 \in f_s = f_t$ ve $a_1 \in f_t = f_s$, elde edilir. Sırasıyla, $s = f(a_0) \geq t$ ve $t = f(a_1) \geq s$ olur ve bu durumda $s = t$ sonucuna ulaşılır.

($\Leftarrow$) Eğer $s = t$ ise o zaman $s, t \in \text{Im}(f)$ için $f_s = f_t$ olduğu açıktır. $\square$

Lemma 3.13. *H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri, f , H 'nin bir fuzzy süzgeci ve $a_0 \in H$ olsun. O zaman $f(a_0) = t$ olması için gerek ve yeter koşul $s, t \in [0, 1]$ olmak üzere her $s > t$ için $a_0 \in f_t$ ve $a_0 \notin f_s$ olmasıdır.*

İspat. f 'nin H 'nin bir fuzzy süzgeci ve $a_0 \in H$ olduğunu kabul edelim.

($\Rightarrow$) $f(a_0) = t$ ve $s, t \in [0, 1]$ için $s > t$ olsun. $f(a_0) = t < s$ olduğundan $a_0 \in f_t$ ve $a_0 \notin f_s$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $s, t \in [0, 1]$ olmak üzere her $s > t$ için $a_0 \in f_t$ ve $a_0 \notin f_s$ olsun. O zaman $t \leq f(a_0) < s$ elde edilir. $t \leq f(a_0) = s_0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $a_0 \in f_{s_0}$ bulunur. Bu ise hipotezle çelişir. O halde $f(a_0) = t$ 'dir. $\square$

3.4 Homomorfizmalar

Bu kısımda, Sheffer stroke Hilbert cebirleri üzerinde tanımlı homomorfizmalar, özellikleri ve (fuzzy) süzgeçler arasındaki bağlantılar araştırılacaktır.

Tanım 3.8. $\langle G, |_G \rangle$ ve $\langle H, |_H \rangle$ iki Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. Eğer her $x, y \in G$ için

$$h(x|_G y) = h(x)|_H h(y)$$

ise o zaman G 'den H 'ye tanımlanan bir $h : G \rightarrow H$ dönüşümüne bir homomorfizma denir. Ayrıca, $h(1_G) = 1_H$ olduğunu belirtelim.

Teorem 3.9. *H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olmak üzere h , H üzerinde tanımlı bir endomorfizma ve f H 'nin bir fuzzy altkümesi olsun. Eğer f , H 'nin bir fuzzy süzgeci ise o zaman her $x \in H$ için $f^h(x) = f(h(x))$ şeklinde tanımlanan H nin f^h fuzzy altkümesi H nin bir fuzzy süzgecidir.*

İspat. h 'nin H üzerinde tanımlı bir endomorfizma ve f 'nin H 'nin bir fuzzy süzgeci olduğunu varsayalım. f^h , H 'nin bir fuzzy altkümesi ise her $x \in H$ için $f^h(x) = f(h(x))$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$f^h(x) = f(h(x)) \leq f(1) = f(h(1)) = f^h(1)$$

olur. Ayrıca, her $x, y, y_1, y_2 \in H$ için

$$\begin{aligned}
 f^h(x|(y|y)) &= f(h(x|(y|y))) \\
 &= f(h(x)|(h(y)|h(y))) \\
 &\geq f(h(y)) \\
 &= f^h(y)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 f^h((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) &= f(h((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))) \\
 &= f((h(x)|(h(y_1)|h(y_2)))| \\
 &\quad (h(y_1)|h(y_2))) \\
 &\geq \min\{f(h(y_1)), f(h(y_2))\} \\
 &= \min\{f^h(y_1), f^h(y_2)\}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde f^h , H 'nin bir fuzzy süzgecidir. $\square$

Theorem 3.9'un tersi, h endomorfizması örten olduğu zaman gerçekleşir.

Theorem 3.10. H bir Sheffer stroke Hilbert cebir olmak üzere h , H üzerinde tanımlı örten bir endomorfizma ve f , H 'nin bir fuzzy altkümesi olsun. Eğer f^h , H 'nin bir fuzzy süzgeci ise o zaman f 'nin kendisi de H 'nin bir fuzzy süzgecidir.

İspat. h , H üzerinde tanımlı örten bir endomorfizma ve f , H 'nin bir fuzzy altkümesi olsun. f^h 'nin H 'nin bir fuzzy süzgeci olduğunu varsayalım. O zaman

$$f(x) = f(h(u)) = f^h(u) \leq f^h(1) = f(h(1)) = f(1)$$

elde edilir. Aynı zamanda, her $x, y, u, v, y_1, y_2, v_1, v_2 \in H$ için $x = h(u)$, $y = h(v)$, $y_1 = h(v_1)$ ve $y_2 = h(v_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 f(x|(y|y)) &= f(h(u)|(h(v)|h(v))) \\
 &= f(h(u|(v|v))) \\
 &\geq f^h(v) \\
 &= f(h(v)) \\
 &= f(y)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) &= f((h(u)|(h(v_1)|h(v_2))|(h(v_1)|h(v_2)))) \\
&= f(h((u|(v_1|v_2))|(v_1|v_2))) \\
&= f^h((u|(v_1|v_2))|(v_1|v_2)) \\
&\geq \min\{f^h(v_1), f^h(v_2)\} \\
&= \min\{f(h(v_1)), f(h(v_2))\} \\
&= \min\{f(y_1), f(y_2)\}
\end{aligned}$$

olur. O halde f , H 'nin bir fuzzy süzgecidir. $\square$

Teorem 3.11. H bir Sheffer stroke Hilbert cebir olmak üzere h , H üzerinde tanımlı bir otomorfizma ve f , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman $f^h = f$ olması için gerek ve yeter koşul her $t \in Im(f)$ için $h(f_t) = f_t$ olmasıdır.

İspat. h 'nin H üzerinde tanımlı bir otomorfizma ve f 'nin H 'nin bir fuzzy süzgeci olduğunu kabul edelim.

($\Rightarrow$) $f^h = f$, $t \in Im(f)$ ve $x \in f_t$ olsun. Böylece $h(x) \in h(f_t)$ olur. $f(h(x)) = f^h(x) = f(x) \geq t$ olduğundan $h(x) \in f_t$ ve bu durumda $h(f_t) \subseteq f_t$ elde edilir. $h(y) = x$ olacak şekilde $x \in f_t$ ve $y \in H$ olsun. O zaman $f(y) = f^h(y) = f(h(y)) = f(x) \geq t$ ve buradan $y \in f_t$ elde edilir. $x = h(y) \in h(f_t)$ olacağından $f_t \subseteq h(f_t)$ 'dir. O halde $h(f_t) = f_t$ sonucuna ulaşılır.

($\Leftarrow$) Her $t \in Im(f)$ için $h(f_t) = f_t$ ve $f(x) = t$ olsun. O zaman Lemma 3.13'den her $s > t$ için $x \in f_t$ ve $x \notin f_s$ olur. $h(x) \in h(f_t) = f_t$ olduğundan $f^h(x) = f(h(x)) \geq t$ elde edilir. $f^h(x) = s$ olduğunu varsayalım. $f^h(x) = f(h(x)) = s$ olduğundan $h(x) \in f_s = h(f_s)$ elde edilir. h bire-bir olduğundan $x \in f_s$ bulunur ve bu hipotezle çelişir. Bu durumda, her $x \in H$ için $f^h(x) = f(h(x)) = t = f(x)$ 'dir. Sonuç olarak, $f^h = f$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.9. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. H üzerinde bir $\sim_f$ ikili bağıntısı her $x, y \in H$ için

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x|(y|y)) = f(1) \text{ ve } f(y|(x|x)) = f(1) \quad (3.4)$$

ile tanımlansın.

Tanım 3.10. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. Eğer her $x, y, z \in H$ için $x\alpha y$ iken $x|z\alpha y|z$ oluyorsa o zaman α denklik bağıntısına H üzerinde bir kongrüans bağıntısı denir.

Örnek 3.11. Örnek 3.1’de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. H ’nin

$$f(a) = \begin{cases} 0.11, & a = 0, x, y, t \text{ ise} \\ 0.87, & a = z, u, v, 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fuzzy süzgeci için $\sim_f = \{(0, 0), (x, x), (y, y), (z, z), (t, t), (u, u), (v, v), (1, 1), (0, x), (x, 0), (0, y), (y, 0), (0, t), (t, 0), (x, y), (y, x), (x, t), (t, x), (y, t), (t, y), (z, u), (u, z), (z, v), (v, z), (z, 1), (1, z), (1, u), (u, 1), (1, v), (v, 1), (v, u), (u, v)\}$ denklik bağıntısı H üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

Lemma 3.14. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri olsun. O zaman H üzerindeki bir α denklik bağıntısının H üzerinde bir kongrüans bağıntısı olması için gerek ve yeter koşul her $x, y, z, t \in H$ için $x\alpha y$ ve $z\alpha t$ ise $x|z\alpha y|t$ olmasıdır.

İspat. H bir Sheffer stroke Hilbert cebir, olsun. H üzerindeki bir α denklik bağıntısının H üzerinde bir kongrüans bağıntısı ve $x\alpha y$ ile $z\alpha t$ olacak şekilde $x, y, z, t \in H$ olduğunu varsayalım. O zaman (S1) aksiyomundan $x|z\alpha y|z$ ve $y|z\alpha y|t$ elde edilir. O halde α denklik bağıntısının geçişkenlik özelliğinden $x|z\alpha y|t$ olur.

Diğer yönden, her $x, y, z, t \in H$ için $x\alpha y$ ve $z\alpha t$ ise $x|z\alpha y|t$ olduğunu kabul edelim. $x\alpha y$ olacak şekilde $x, y, z \in H$ olsun. $z\alpha z$ olduğundan $x|z\alpha y|z$ elde edilir. O halde α denklik bağıntısı H üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır. $\square$

Lemma 3.15. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci ve $\sim_f$, H üzerinde (3.4) ifadesindeki gibi tanımlanan bir ikili bağıntı olsun. O halde $\sim_f$ bağıntısı H üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

İspat. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci ve $\sim_f$, H üzerinde (3.4) ifadesindeki gibi tanımlı bir ikili bağıntı olsun. İlk olarak, $\sim_f$ bağıntısının H üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu gösterilsin.

- Yansıma özelliği: Uyarı 3.1’den $f(x|(x|x)) = f(1)$ olduğuna göre her $x \in H$ için $x \sim_f x$ elde edilir.

- Simetri özelliği: $x \sim_f y$ olacak şekilde x ve y , H ’nin iki elemanı olsun. O zaman $f(x|(y|y)) = f(1)$ ve $f(y|(x|x)) = f(1)$ ve buradan $f(y|(x|x)) = f(1)$ ve $f(x|(y|y)) = f(1)$ olduğuna göre $y \sim_f x$ elde edilir.

• Geçişme özelliği: $x \sim_f y$ ve $y \sim_f z$ olacak şekilde $x, y, z \in H$ olsun. O zaman $f(x|(y|y)) = f(1) = f(y|(x|x))$ ve $f(y|(z|z)) = f(1) = f(z|(y|y))$ olur. (Shb₇) ve Lemma 3.9 uyarınca $f(1) = f(x|(y|y)) \leq f((y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z))))$ olduğundan $f((y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z)))) = f(1)$ elde edilir. O halde $y|(z|z) \in f_{f(1)}$ ve $(y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z))) \in f_{f(1)}$ elde edilir. Lemma 3.11'den $f_{f(1)}$, H 'nin bir süzgeci olduğundan Teorem 3.8 ve Tanım 3.2 (ii) gereği $x|(z|z) \in f_{f(1)}$ elde edilir. Bu durumda, $f(x|(z|z)) \geq f(1)$ olduğundan $f(x|(z|z)) = f(1)$ dir. Ayrıca, Lemma 3.6 ve Lemma 3.9'dan $f(1) = f(y|(x|x)) \leq f((z|(y|y))|((z|(x|x))|(z|(x|x))))$ olduğundan $f((z|(y|y))|((z|(x|x))|(z|(x|x)))) = f(1)$ ve buradan $z|(y|y) \in f_{f(1)}$ ve $(z|(y|y))|((z|(x|x))|(z|(x|x))) \in f_{f(1)}$ elde edilir. $f_{f(1)}, H$ 'nin bir süzgeci olduğundan Teorem 3.8 ve Tanım 3.2 (ii)'den $z|(x|x) \in f_{f(1)}$ bulunur. Böylece $f(z|(x|x)) \geq f(1)$ olduğundan $f(z|(x|x)) = f(1)$ ve buradan $x \sim_f z$ elde edilir.

Şimdi $\sim_f$ denklik bağıntısının H üzerinde bir kongrüans bağıntısı olduğu gösterilsin. $x \sim_f y$ ve $z \sim_f t$ olacak şekilde $x, y, z, t \in H$ olsun. O zaman $f(x|(y|y)) = f(1) = f(y|(x|x))$ ve $f(z|(t|t)) = f(1) = f(t|(z|z))$ elde edilir.

(a) (S1), (S2), Lemma 3.6 ve Lemma 3.9 uyarınca

$$\begin{aligned}
 f(1) &= f(x|(y|y)) \\
 &= f((y|y)|((x|x)|(x|x))) \\
 &\leq f((z|((y|y)|(y|y)))|((z|((x|x)|(x|x))|(z|((x|x)|(x|x)))))) \\
 &= f((y|z)|((x|z)|(x|z)))
 \end{aligned}$$

olduğundan $f((y|z)|((x|z)|(x|z))) = f(1)$ ve benzer şekilde $f((x|z)|((y|z)|(y|z))) = f(1)$ elde edilir. O halde $x|z \sim_f y|z$ bulunur.

(b) a şikkında, eş zamanlı olarak, x yerine z , y yerine t ve z yerine y yazılırsa, (S1) aksiyomundan $y|z \sim_f y|t$ sonucuna ulaşılır.

Öyleyse, $\sim_f$ bağıntısının geçişme özelliğinden $x|z \sim_f y|t$ elde edilir. Sonuç olarak, Lemma 3.14'den dolayı $\sim_f$ denklik bağıntısı H üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır $\square$

Teorem 3.12. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci ve $\sim$, H üzerinde f yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olsun. O zaman $H/\sim = \{[x]_\sim : x \in H\}$ bir bölüm kümesi ve $H/\sim$ üzerinde her $x, y \in H$ için

$[x]_{\sim}|_{\sim}[y]_{\sim} = [x|y]_{\sim}$ ile tanımlı $|_{\sim}$ Sheffer işlemi olmak üzere $\langle H/\sim, |_{\sim} \rangle$ yapısı bir Sheffer stroke Hilbert cebiridir.

İspat. f 'nin H 'nin bir fuzzy süzgeci, $\sim$ bağıntısının H üzerinde f yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısı, $H/\sim = \{[x]_{\sim} : x \in H\}$ bir bölüm kümesi ve $|_{\sim}$ Sheffer stroke işleminin her $x, y \in H$ için $[x]_{\sim}|_{\sim}[y]_{\sim} = [x|y]_{\sim}$ olarak tanımlandığını kabul edelim. $[x]_{\sim}, [y]_{\sim}, [z]_{\sim} \in H/\sim$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} & ([x]_{\sim}|_{\sim}([y]_{\sim}|_{\sim}([z]_{\sim}|_{\sim}[z]_{\sim}))|_{\sim}([y]_{\sim}|_{\sim}([z]_{\sim}|_{\sim}[z]_{\sim})))|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}([y]_{\sim}|_{\sim}[y]_{\sim}))|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}([z]_{\sim}|_{\sim}[z]_{\sim}))|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}([z]_{\sim}|_{\sim}[z]_{\sim})))|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}([y]_{\sim}|_{\sim}[y]_{\sim}))|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}([z]_{\sim}|_{\sim}[z]_{\sim}))|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}([z]_{\sim}|_{\sim}[z]_{\sim}))) \\ &= [x|((y|(z|z))|(y|(z|z)))|((x|(y|y))|(x|(z|z)))|((x|(z|z))|(x|(z|z)))|_{\sim} \\ &= [x|(x|x)]_{\sim} \\ &= [x]_{\sim}|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}[x]_{\sim}) \end{aligned}$$

elde edilir. $[x]_{\sim}|_{\sim}([y]_{\sim}|_{\sim}[y]_{\sim}) = [y]_{\sim}|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}[x]_{\sim}) = [x]_{\sim}|_{\sim}([x]_{\sim}|_{\sim}[x]_{\sim})$ olsun.

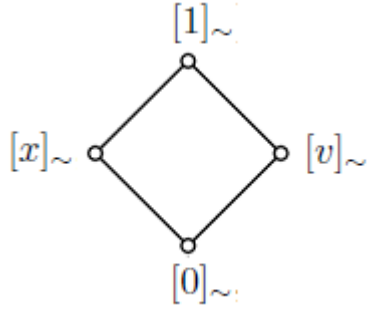
Uyarı 3.1'den $[x|(y|y)]_{\sim} = [y|(x|x)]_{\sim} = [x|(x|x)]_{\sim} = [1]_{\sim}$ olduğundan $x|(y|y) \sim 1$ ve $y|(x|x) \sim 1$ bulunur. Böylece, Lemma 3.3 (i) ve (ii)'den $f((x|(y|y))|(1|1)) = f(1) = f(x|(y|y)) = f(1|((x|(y|y))(x|(y|y))))$ ve $f((y|(x|x))|(1|1)) = f(1) = f(y|(x|x)) = f(1|((y|(x|x))(y|(x|x))))$ ve buradan $x \sim y$ elde edilir.

Böylece $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$ sonucuna ulaşılır. O halde $\langle H/\sim, |_{\sim} \rangle$ yapısı bir Sheffer stroke Hilbert cebiridir. $\square$

Örnek 3.12. Örnek 3.1'de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. H 'nin

$$f(a) = \begin{cases} 0.73, & a = u, 1 \text{ ise} \\ 0.27, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir f fuzzy süzgeci yardımıyla H üzerinde $\sim_f = \{(0, 0), (x, x), (y, y), (z, z), (t, t), (u, u), (v, v), (1, 1), (1, u), (0, y), (y, 0), (u, 1), (x, t), (t, x), (z, v), (v, z)\}$ kongrüans bağıntısı tanımlansın. O zaman $H/\sim = \{[0]_{\sim}, [x]_{\sim}, [v]_{\sim}, [1]_{\sim}\}$ bölüm kümesi olmak üzere $\langle H/\sim, |_{\sim} \rangle$ yapısı Şekil 3.2'deki Hasse diyagramına ve Çizelge 3.7'deki işlem tablosuna sahip bir Sheffer stroke Hilbert cebiridir.



Şekil 3.2: $H/\sim$ kümesinin Hasse diyagramı

$ \sim$	$[0]_\sim$	$[x]_\sim$	$[v]_\sim$	$[1]_\sim$
1	$[1]_\sim$	$[1]_\sim$	$[1]_\sim$	$[1]_\sim$
$[x]_\sim$	$[1]_\sim$	$[v]_\sim$	$[1]_\sim$	$[v]_\sim$
$[v]_\sim$	$[1]_\sim$	$[1]_\sim$	$[x]_\sim$	$[x]_\sim$
$[1]_\sim$	$[1]_\sim$	$[v]_\sim$	$[x]_\sim$	$[0]_\sim$

Çizelge 3.7: $H/\sim$ üzerindeki $|\sim$ Sheffer stroke işlem tablosu

3.5 Normal ve Maksimal Fuzzy Süzgeçler

Bu kısımda, Sheffer Stroke Hilbert cebirlerinin normal ve maksimal fuzzy süzgeçlerini tanıatacağız. Ayrıca, bu fuzzy süzgeçlerin özelliklerini inceleyerek aralarındaki bağlantıları ortaya koyacağız.

Tanım 3.11. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman $f(x) = 1$ olacak şekilde bir $x \in H$ elemanı varsa f 'ye H 'nin normal fuzzy süzgeci denir.

Örnek 3.13. Örnek 3.1'de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman $f(0) = f(y) = f(z) = f(v) = 0.01$ ve $f(x) = f(t) = f(u) = f(1) = 1$ şeklinde tanımlanan H 'nin bir f fuzzy süzgeci normaldir. Fakat Örnek 3.8'de $f(x) = 1$ olacak şekilde bir $x \in H$ elemanı mevcut olmadığından H 'nin f fuzzy süzgeci normal değildir.

Önerme 3.4. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman f 'nin normal olması için gerek ve yeter koşul $f(1) = 1$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir normal fuzzy süzgeci olsun. O zaman $f(x) = 1$ olacak şekilde bir $x \in H$ elemanı mevcuttur. Her $x \in H$ için $f(x) \leq f(1)$ olduğundan $1 = f(x) \leq f(1)$ ve buradan $f(1) = 1$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $f(1) = 1$ olacak şekilde f , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. $f(x) = 1$ olacak şekilde bir $x = 1 \in H$ elemanı mevcut olduğundan f , H 'nin bir normal fuzzy süzgecidir. $\square$

Önerme 3.5. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman her $x \in H$ için $f^+(x) = f(x) + 1 - f(1)$ ile tanımlanan H 'nin bir f^+ fuzzy altkümesi H 'nin bir normal fuzzy süzgecidir ve $f \subseteq f^+$ dir.

İspat. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun ve H 'nin bir f^+ fuzzy altkümesi her $x \in H$ için $f^+(x) = f(x) + 1 - f(1)$ ile tanımlansın. O zaman her $x, y, y_1, y_2 \in H$ için

$$(FH1): f^+(1) = f(1) + 1 - f(1) \geq f(x) + 1 - f(1) = f^+(x),$$

$$(FH2): f^+(x|(y|y)) = f(x|(y|y)) + 1 - f(1) \geq f(y) + 1 - f(1) = f^+(y) \text{ ve}$$

$$(FH3):$$

$$\begin{aligned} f^+((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) &= f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) + 1 - f(1) \\ &\geq \min\{f(y_1), f(y_2)\} + 1 - f(1) \\ &= \min\{f(y_1) + 1 - f(1), f(y_2) + 1 - f(1)\} \\ &= \min\{f^+(y_1), f^+(y_2)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda f^+ , H 'nin bir fuzzy süzgecidir. $f^+(1) = f(1) + 1 - f(1) = 1$ olduğundan Önerme 3.4 gereği f^+ normaldir. Ayrıca, her $x \in H$ için $f(x) \leq f(x) + 1 - f(1) = f^+(x)$ olduğundan $f \subseteq f^+$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.6. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy altkümesi ve f^+ , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman f , H 'nin bir fuzzy süzgecidir.

İspat. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy altkümesi ve f^+ , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman her $x, y, y_1, y_2 \in H$ için

(FH1): $1 = f(1) + 1 - f(1) = f^+(1) \geq f^+(x) = f(x) + 1 - f(1)$ olduğuna göre $f(1) \geq f(x)$ bulunur.

(FH2): $f(y) + 1 - f(1) = f^+(y) \leq f^+(x|(y|y)) = f(x|(y|y)) + 1 - f(1)$ olduğuna göre $f(y) \leq f(x|(y|y))$ sonuçlandırılır.

(FH3):

$$\begin{aligned}
\min\{f(y_1), f(y_2)\} + 1 - f(1) &= \min\{f(y_1) + 1 - f(1), f(y_2) + 1 - f(1)\} \\
&= \min\{f^+(y_1), f^+(y_2)\} \\
&\leq f^+((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) \\
&= f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) + 1 - f(1)
\end{aligned}$$

olduğuna göre $\min\{f(y_1), f(y_2)\} \leq f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.5. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy altkütmesi olsun ve f^+ , her $x \in H$ için $f^+(x) = f(x) + 1 - f(1)$ ile tanımlansın. Eğer $f^+(x) = 0$ ise o zaman $f(x) = 0$ dır.

İspat. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy altkütmesi olsun ve f^+ , her $x \in H$ için $f^+(x) = f(x) + 1 - f(1)$ ile tanımlansın. O zaman $0 = f^+(x) = f(x) + 1 - f(1)$ olduğunda göre $f(1) = f(x) + 1$ ve buradan $f(x) = 0$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.6. F , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir süzgeci olsun. O zaman F 'nin bir χ_F karakteristik fonksiyonu H 'nin bir normal fuzzy süzgecidir.

İspat. F , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir süzgeci olsun. O zaman Önerme 3.3'ten H 'nin bir fuzzy süzgeci

$$\chi_F(x) = \begin{cases} 1, & x \in F \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

dir. Ayrıca, Önerme 3.4'ten χ_F normaldir. $\square$

Önerme 3.7. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman f 'nin H 'nin normal fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul $f^+ = f$ olmasıdır.

İspat. f , H 'nin normal fuzzy süzgeci olsun. Önerme 3.4'ten her $x \in H$ için $f^+(x) = f(x) + 1 - f(1) = f(x) + 1 - 1 = f(x)$ olduğundan $f^+ = f$ olur.

Diğer yönden, $f^+ = f$ olacak şekilde f , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman Önerme 3.5'ten f^+ , H 'nin normal fuzzy süzgeci olduğundan f de H 'nin normal fuzzy süzgecidir. $\square$

Sonuç 3.7. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman $(f^+)^+ = f^+$ ve ayrıca f , H 'nin normal fuzzy süzgeci ise o zaman $(f^+)^+ = f$ 'dir.

Önerme 3.8. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve $f \subseteq g$ ve $f(1) = g(1)$ olacak şekilde f ve g , H 'nin iki fuzzy süzgeci olsun. O zaman $H_f \subseteq H_g$ 'dir.

İspat. $f \subseteq g$ ve $f(1) = g(1)$ olacak şekilde f ve g , H 'nin iki fuzzy süzgeci ve $x \in H_f$ olsun. O zaman her $x \in H$ için $g(1) = f(1) = f(x) \leq g(x)$ olduğundan $g(x) = g(1)$ ve böylece $x \in H_g$ elde edilir. O halde $H_f \subseteq H_g$ olur. $\square$

Sonuç 3.8. H bir Sheffer stroke Hilbert cebiri ve $f \subseteq g$ olacak şekilde f ve g , H 'nin iki normal fuzzy süzgeci olsun. O zaman $H_f \subseteq H_g$ 'dir.

Fakat Önerme 3.8 ve Sonuç 3.8'in tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 3.14. Örnek 3.2'de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. Sırasıyla,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, p \text{ ise} \\ 0.28, & x = q, 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$g(x) = \begin{cases} 1, & ix = 1, p \text{ ise} \\ 0.26, & x = q, 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan H 'nin f ve g (normal) fuzzy süzgeçleri için $H_f = \{p, 1\} = \{p, 1\} = H_g$ olur, fakat $f(0) > g(0)$ olduğundan $f \not\subseteq g$ sonuçlandırılır.

Önerme 3.9. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman $g^+ \subseteq f$ olacak şekilde H 'nin bir g fuzzy süzgecinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul f 'nin H 'nin normal fuzzy süzgeci olmasıdır.

İspat. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. $g^+ \subseteq f$ olacak şekilde H 'nin bir g fuzzy süzgecinin mevcut olduğunu kabul edelim. $1 = g^+(1) \leq f(1)$ olduğuna göre $f(1) = 1$ elde edilir. O halde Önerme 3.4'ten f , H 'nin normal fuzzy süzgecidir.

Diğer taraftan f , H 'nin normal fuzzy süzgeci olsun. Eğer $g = f$ seçilirse, o zaman Önerme 3.7'den $f^+ = f$ olduğundan $g^+ \subseteq f$ olacak şekilde H 'nin bir g fuzzy süzgeci vardır. $\square$

Lemma 3.16. f, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci ve $g : [0, f(1)] \rightarrow [0, 1]$ bir artan fonksiyon olsun. O zaman her $x \in H$ için $f_g(x) := g(f(x))$ biçiminde tanımlanan H 'nin bir $f_g : H \rightarrow [0, 1]$ fuzzy altkütmesi H 'nin bir fuzzy süzgecidir. Özellikle, $f_g(1) = 1$ ise o zaman f_g H nin normal fuzzy süzgecidir. Ayrıca her $t \in [0, f(1)]$ için $t \leq g(t)$ ise o zaman $f \subseteq f_g$ 'dir.

İspat. f, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci ve $g : [0, f(1)] \rightarrow [0, 1]$ bir artan fonksiyon olsun. O zaman her $x, y, y_1, y_2 \in H$ için

$$(FH1): f_g(x) = g(f(x)) \leq g(f(1)) = f_g(1),$$

$$(FH2): f_g(y) = g(f(y)) \leq g(f(x|(y|y))) = f_g(x|(y|y)) \text{ ve}$$

$$(FH3):$$

$$\begin{aligned} \min\{f_g(y_1), f_g(y_2)\} &= \min\{g(f(y_1)), g(f(y_2))\} \\ &\leq g(\min\{f(y_1), f(y_2)\}) \\ &= g(f((x|(y_1|y_2)|(y_1|y_2))) \\ &= f_g((x|(y_1|y_2)|(y_1|y_2))) \end{aligned}$$

olduğundan f_g , H 'nin bir fuzzy süzgecidir.

Eğer $f_g(1) = g(f(1)) = 1$ ise o zaman Önerme 3.4'ten f_g , H 'nin bir normal fuzzy süzgecidir.

Her $t \in [0, f(1)]$ için $t \leq g(t)$ olsun. Her $x \in H$ için $f(x) \leq g(f(x)) = f_g(x)$ olduğundan $f \subseteq f_g$ elde edilir. $\square$

Lemma 3.17. $\mathcal{N}_S(H)$, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bütün normal fuzzy süzgeçlerinin ailesi olsun. O zaman $(\mathcal{N}_S(H), \subseteq)$ bir kısmi sıralı kümedir.

İspat. $\mathcal{N}_S(H)$, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bütün normal fuzzy süzgeçlerinin ailesi olsun.

Yansıma özelliği: her $x \in H$ ve H 'nin her f normal fuzzy süzgeci için $f(x) \leq f(x)$ olduğundan $f \subseteq f$ elde edilir.

Ters simetri özelliği: H 'nin herhangi iki f ve g normal fuzzy süzgeçleri için $f \subseteq g$ ve $g \subseteq f$ olur. O halde her $x \in H$ için $f(x) \leq g(x)$ ve $g(x) \leq f(x)$ olduğundan $f(x) = g(x)$ ve buradan $f = g$ sonucuna ulaşılır.

Geçişme özelliği: H 'nin herhangi f, g ve h normal fuzzy süzgeçleri için $f \subseteq g$ ve $g \subseteq h$ olsun. Bu durumda, her $x \in H$ için $f(x) \leq g(x)$ ve $g(x) \leq h(x)$ olduğundan $f(x) \leq h(x)$ ve dolayısıyla $f \subseteq h$ elde edilir.

O halde $(\mathcal{N}_S(H), \subseteq)$ bir kısmi sıralı kümedir. $\square$

Aşağıdaki örnek, $(\mathcal{N}_S(H), \subseteq)$ kısmi sıralı kümesinin bir kafes yapısı oluşturmadığını göstermektedir.

Örnek 3.15. Örnek 3.1’de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. H ’nin f ve g normal fuzzy süzgeçleri, sırasıyla, her $x \in H$ için

$$f(a) = \begin{cases} 1, & a = u, 1 \text{ ise} \\ 0.2, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ve

$$g(b) = \begin{cases} 1, & b = y, v, t, 1 \text{ ise} \\ 0.3, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansınlar. $(f \vee g)((0|(y|u))|(y|u)) = (f \vee g)(0) = 0.3 < \min\{(f \vee g)(y), (f \vee g)(u)\} = \min\{1, 1\} = 1$ olduğundan

$$(f \vee g)(a) = \max\{f(a), g(a)\} = \begin{cases} 0.3, & a = 0, x, z \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan H ’nin $f \vee g$ fuzzy altkümesi H ’nin bir (normal) fuzzy süzgeci değildir.

Teorem 3.13. $f, (\mathcal{N}_S(H), \subseteq)$ kısmi sıralı yapısının sabit olmayan maksimal elemanı olsun. O zaman f sadece 0 ve 1 değerlerini alır.

İspat. $f, (\mathcal{N}_S(H), \subseteq)$ kısmi sıralı yapısının sabit olmayan maksimal elemanı olsun. O zaman $f \in \mathcal{N}_S(H)$ olduğundan Önerme 3.4’ten $f(1) = 1$ elde edilir. $f(x) \neq 1$ olacak şekilde bir $x \in H$ elemanı mevcut olsun. $f(x) = 0$ olduğunu varsayalım. Eğer böyle bir $x \in H$ elemanı mevcut değilse o zaman $0 < f(a_0) < 1$ olacak şekilde $a_0 \in H$ elemanı vardır. Her $x \in H$ için $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(a_0))$ biçiminde tanımlı H ’nin bir g fuzzy altkümesi mevcut olsun. O zaman g ’nin iyi-tanımlı olduğu açıktır. Her $x, y, y_1, y_2 \in H$ için

$$(FH1): g(1) = \frac{1}{2}(f(1) + f(a_0)) \geq \frac{1}{2}(f(x) + f(a_0)) = g(x),$$

$$(FH2): g(x|(y|y)) = \frac{1}{2}(f(x|(y|y)) + f(a_0)) \geq \frac{1}{2}(f(y) + f(a_0)) = g(y) \text{ ve}$$

$$(FH3):$$

$$\begin{aligned} g((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) &= \frac{1}{2}(f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) + f(a_0)) \\ &\geq \frac{1}{2}(\min\{f(y_1), f(y_2)\} + f(a_0)) \\ &= \frac{1}{2} \min\{f(y_1) + f(a_0), f(y_2) + f(a_0)\} \\ &= \min\{\frac{1}{2}(f(y_1) + f(a_0)), \frac{1}{2}(f(y_2) + f(a_0))\} \\ &= \min\{g(y_1), g(y_2)\} \end{aligned}$$

olduğundan g , H 'nin bir fuzzy süzgecidir. Ayrıca, Önerme 3.5'ten g^+ , H 'nin bir normal fuzzy süzgecidir. Her $x \in H$ için

$$\begin{aligned} g^+(x) &= g(x) + 1 - g(1) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(a_0)) + 1 - \frac{1}{2}(f(1) + f(a_0)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + 1) \\ &\geq f(x) \end{aligned}$$

olduğundan $f(a_0) < g^+(a_0)$ ve $g^+(a_0) < g^+(1) = 1$ elde edilir. Bu durumda, g^+ sabit değildir ve $f \subseteq g^+$ olur. Buradan f nin maksimal olmadığı sonucuna ulaşılır ki bu ise çelişkidir. O halde her $x \in H$ için $f(x) = 0$ 'dır. $\square$

Tanım 3.12. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin sabit olmayan bir fuzzy süzgeci olsun. Eğer H 'nin f^+ normal fuzzy süzgeci $(\mathcal{N}_S(H), \subseteq)$ yapısının bir maksimal elemanı ise o zaman f fuzzy süzgecine H 'nin maksimal fuzzy süzgeci denir.

Örnek 3.16. Örnek 3.2'deki H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman her $x \in H$ için

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = p, 1 \text{ ise} \\ 0, & x = q, 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan H 'nin f fuzzy altkümesi H 'nin bir maksimal fuzzy süzgecidir.

Lemma 3.18. $f \in \mathcal{N}_S(H)$ ve A ve B , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin iki süzgeci olsunlar. O zaman $A \subseteq B$ olması için gerek ve yeter koşul $f_A \subseteq f_B$ olmasıdır.

İspat. $f \in \mathcal{N}_S(H)$ ve A ve B , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin iki süzgeci olsunlar.

$A \subseteq B$ olduğunu kabul edelim. Sırasıyla, her $x, y \in H$ için

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad f_B(y) = \begin{cases} 1, & y \in B \text{ ise} \\ 0, & y \notin B \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan H 'nin f_A ve f_B fuzzy altkümeleri Önerme 3.3'ten dolayı H 'nin fuzzy süzgeçleridirler. Ayrıca, $x \in A$ ise o zaman $x \in B$ olduğundan

$1 = f_A(x) \leq f_B(x) = 1$ bulunur. Eğer $x \notin A$ ise o zaman $0 = f_A(x) \leq f_B(x)$ olur. Bu durumda, her $x \in H$ için $f_A(x) \leq f_B(x)$ ve böylece $f_A \subseteq f_B$ elde edilir.

Diğer yönden, $f_A \subseteq f_B$ olsun. O zaman her $x \in H$ için $f_A(x) \leq f_B(x)$ 'dir. $x \in A$ iken $x \notin B$ olacak şekilde bir $x \in H$ elemanı mevcut olmadığından $A \subseteq B$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 3.14. *f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir maksimal fuzzy süzgeci olsun. O zaman*

- (1) *f , H 'nin normal fuzzy süzgecidir,*
- (2) *f sadece 0 ve 1 değerlerini alır,*
- (3) *$f_{H_f} = f$ ve*
- (4) *H_f , H 'nin bir maksimal süzgecidir.*

İspat. f , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir maksimal fuzzy süzgeci olsun.

(1) ve (2): Önerme 3.5'ten f^+ , $\mathcal{N}_S(H)$ kümesinin sabit olmayan bir maksimal elemanıdır. Teorem 3.13'ten f^+ sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Bu durumda, $f^+(x) = 1$ eğer ve yalnız eğer $f(x) = f(1)$, ve $f^+(x) = 0$ eğer ve yalnız eğer $f(x) = f(1) - 1$ olur. Sonuç 3.5'ten $f(x) = 0$ olduğundan $f(1) = 1$ elde edilir. O halde Önerme 3.4'ten f , H 'nin normal fuzzy süzgecidir.

(3): Her $x \in H$ için

$$f_{H_f}(x) = \begin{cases} 1, & x \in H_f \text{ ise} \\ 0, & x \notin H_f \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre $f_{H_f} \subseteq f$ elde edilir. $x \in H$ olsun. Eğer $f(x) = 0$ ise o zaman $f \subseteq f_{H_f}$ olur. Eğer $f(x) = 1 = f(1)$ ise o zaman $x \in H_f$ ve buradan $f_{H_f}(x) = 1$ bulunur. Böylece, $f \subseteq f_{H_f}$ elde edilir. O halde $f_{H_f} = f$ 'dir.

(4): f sabit olmadığından, Önerme 3.3'ten H_f , H 'nin bir öz süzgecidir. $H_f \subseteq F$ olacak şekilde F , H 'nin bir süzgeci olsun. O zaman Lemma 3.18 ve (3) şikkından $f = f_{H_f} \subseteq f_F$ bulunur. f ve f_F , H 'nin normal fuzzy süzgeçleri ve $f = f^+$, $\mathcal{N}_S(H)$ kümesinin bir maksimal elemanı olduğundan $f = f_F$ ve her $x \in H$ için $g(x) = 1$ ile tanımlı H 'nin $g : H \rightarrow [0, 1]$ fuzzy altkümesi olmak üzere $f_F = g$ dir. Eğer $f_F = g$ ise o zaman $F = H$ olur. Eğer $f = f_F$ ise o zaman Önerme 3.3'ten $H_f = H_{f_F} = F$ elde edilir. O halde H_f , H 'nin bir maksimal süzgecidir. $\square$

Fakat, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin herhangi bir normal fuzzy süzgeci maksimal olmayabilir.

Örnek 3.17. Örnek 3.2’de sunulan H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. H ’nin sabit olmayan bir f normal fuzzy süzgeci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \text{ ise} \\ 0.32, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \text{ ise} \\ 0.411, & x = p \text{ ise} \\ 0.41, & x = 0, q \text{ ise} \end{cases}$$

ve $f \subseteq g$ olacak şekilde H ’nin sabit olmayan bir g normal fuzzy süzgeci mevcut olduğundan f maksimal değildir.

Sonuç 3.9. $f, \mathcal{N}_S(H)$ kümesinin sabit olmayan bir maksimal elemanı olsun. O zaman f, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir maksimal fuzzy süzgecidir.

3.6 Fuzzy Süzgeçlerin Kartezyen Çarpımları

Bu kısımda, Sheffer Stroke Hilbert cebirlerinin en güçlü fuzzy bağıntılarını, fuzzy süzgeçlerinin kartezyen çarpımlarını ve özelliklerini araştıracağız.

Tanım 3.13. g, H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy altkümesi olsun. O zaman H üzerinde bir en güçlü fuzzy bağıntı, her $x, y \in H$ için

$$S_g(x, y) = \min\{g(x), g(y)\}$$

ile tanımlanan H üzerinde bir S_g fuzzy bağıntısıdır.

Örnek 3.18. Örnek 3.2’de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. H ’nin bir $g : H \rightarrow [0, 1]$ fuzzy altkümesi $g(0) = 0.001, g(p) = 0.002, g(q) = 0.003$ ve $g(1) = 0.004$ şeklinde tanımlansın. O zaman H üzerinde

$$S_g(x, y) = \begin{cases} 0.001, & x = 0 \text{ veya } y = 0 \text{ ise} \\ g(x), & x = y \text{ ise} \\ g(x), & x = 1 \text{ veya } y = 1 \text{ ise} \\ 0.002, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlanan bir $S_g : H \times H \rightarrow [0, 1]$ fuzzy bağıntısı H üzerinde bir en güçlü fuzzy bağıntıdır.

Lemma 3.19. *H bir Sheffer stroke Hilbert cebir ve H 'nin bir g fuzzy altkümesi için S_g , H üzerinde bir en güçlü fuzzy bağıntı olsun. O zaman her $t \in [0, 1]$ için $(S_g)_t = g_t \times g_t$ 'dir.*

İspat. Bir H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir g fuzzy altkümesi için S_g 'nin H üzerinde bir en güçlü fuzzy bağıntı olduğunu kabul edelim. $(x, y) \in (S_g)_t$ olsun. O zaman $\min\{g(x), g(y)\} = S_g(x, y) \geq t$ ve buradan $g(x) \geq t$ ve $g(y) \geq t$ elde edilir. Bu durumda, $x, y \in g_t$ olur. O halde $(x, y) \in g_t \times g_t$ olduğundan $(S_g)_t \subseteq g_t \times g_t$ elde edilir. Diğer taraftan, $(x, y) \in g_t \times g_t$ olsun. O zaman $x, y \in g_t$ ve buradan $g(x) \geq t$ ve $g(y) \geq t$ bulunur. $S_g(x, y) = \min\{g(x), g(y)\} \geq \min\{t, t\} = t$ olduğuna göre $(x, y) \in (S_g)_t$ elde edilir. O halde $g_t \times g_t \subseteq (S_g)_t$ olur. Böylece, her $t \in [0, 1]$ için $(S_g)_t = g_t \times g_t$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 3.15. *g , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy altkümesi ve S_g , H üzerinde bir en güçlü fuzzy bağıntı olsun. O zaman g 'nin H 'nin fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul S_g 'nin $H \times H$ Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olmasıdır.*

İspat. g 'nin H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy altkümesi ve S_g 'nin H üzerinde bir en güçlü fuzzy bağıntı olduğunu varsayalım. Teorem 3.3'ten $H \times H$, bir Sheffer stroke Hilbert cebiridir. g , H 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman her $x, y \in H$ için $S_g(x, y) = \min\{g(x), g(y)\} \leq \min\{g(1), g(1)\} = S_g(1, 1)$ elde edilir. Ayrıca, her $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \in H$ için

$$\begin{aligned} S_g((x_1, x_2)|_{H \times H}((y_1, y_2)|_{H \times H}(y_1, y_2))) &= S_g(x_1|(y_1|y_1), x_2|(y_2|y_2)) \\ &= \min\{g(x_1|(y_1|y_1)), g(x_2|(y_2|y_2))\} \\ &\geq \min\{g(y_1), g(y_2)\} \\ &= S_g(y_1, y_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &S_g(((x_1, x_2)|_{H \times H}((y_1, y_2)|_{H \times H}(y_3, y_4)))|_{H \times H}((y_1, y_2)|_{H \times H}(y_3, y_4))) \\ &= S_g((x_1|(y_1|y_3))|(y_1|y_3), (x_2|(y_2|y_4))|(y_2|y_4)) \\ &= \min\{g((x_1|(y_1|y_3))|(y_1|y_3)), g((x_2|(y_2|y_4))|(y_2|y_4))\} \\ &\geq \min\{\min\{g(y_1), g(y_3)\}, \min\{g(y_2), g(y_4)\}\} \\ &= \min\{\min\{g(y_1), g(y_2)\}, \min\{g(y_3), g(y_4)\}\} \\ &= \min\{S_g(y_1, y_2), S_g(y_3, y_4)\} \end{aligned}$$

olur. O halde S_g , $H \times H$ 'nin bir fuzzy süzgecidir.

Diğer taraftan S_g , $H \times H$ Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman her $x, y \in H$ için $\min\{g(x), g(y)\} = S_g(x, y) \leq S_g(1, 1) = \min\{g(1), g(1)\}$ ve buradan her $x, y \in H$ için $g(x) \leq g(1)$ elde edilir. Her $x, y, y_1, y_2 \in H$ için Lemma 3.3 (i)'den

$$\begin{aligned}
g(x|(y|y)) &= \min\{g(x|(y|y)), g(1)\} \\
&= \min\{g(x|(y|y)), g(x|(1|1))\} \\
&= S_g(x|(y|y), x|(1|1)) \\
&= S_g((x, x)|_{H \times H}((y, 1)|_{H \times H}(y, 1))) \\
&\geq S_g(y, 1) \\
&= \min\{g(y), g(1)\} \\
&= g(y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) &= \min\{g((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)), g(1)\} \\
&= \min\{g((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)), g((x|(1|1))|(1|1))\} \\
&= S_g((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2), (x|(1|1))|(1|1)) \\
&= S_g(((x, x)|_{H \times H}((y_1, 1)|_{H \times H}(y_2, 1)))|_{H \times H}((y_1, 1)|_{H \times H}(y_2, 1))) \\
&\geq \min\{S_g(y_1, 1), S_g(y_2, 1)\} \\
&= \min\{\min\{g(y_1), g(1)\}, \min\{g(y_2), g(1)\}\} \\
&= \min\{g(y_1), g(y_2)\}
\end{aligned}$$

sonuçlandırılır. O halde g , H 'nin bir fuzzy süzgecidir. $\square$

Sonuç 3.10. g , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman $H \times H$ 'nin level süzgeçleri her $t \in [0, 1]$ için $(S_g)_t = g_t \times g_t$ ile tanımlanır.

Önerme 3.10. f ve g , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin iki fuzzy süzgeci olsunlar. O zaman $f \times g$ kartezyen çarpımı, $H \times H$ Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgecidir. Eğer f ve g , H 'nin normal fuzzy süzgeçleri iseler o zaman $f \times g$ de $H \times H$ 'nin bir normal fuzzy süzgecidir.

Teorem 3.16. $f \times g$ kartezyen çarpımı $H \times H$ Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olacak şekilde f ve g , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin iki fuzzy altkümesi olsunlar. O zaman

1. her $x \in H$ için ya $f(x) \leq f(1)$ ya da $g(x) \leq g(1)$,
2. eğer her $x \in H$ için $f(x) \leq f(1)$ ise o zaman ya $f(x) \leq g(1)$ ya da $g(x) \leq g(1)$,
3. eğer her $x \in H$ için $g(x) \leq g(1)$ ise o zaman ya $f(x) \leq f(1)$ ya da $g(x) \leq f(1)$ ve
4. ya f ya da g , H 'nin fuzzy süzgecidir.

İspat. $f \times g$ kartezyen çarpımı $H \times H$ Sheffer stroke Hilbert cebirinin bir fuzzy süzgeci olacak şekilde f ve g , H Sheffer stroke Hilbert cebirinin iki fuzzy altkümesi olsunlar.

1. Bir $x, y \in H$ için $f(x) > f(1)$ ve $g(y) > g(1)$ olsun. O zaman $(f \times g)(x, y) = \min\{f(x), g(y)\} > \min\{f(1), g(1)\} = (f \times g)(1, 1)$ olur ve bu bir çelişkidir. O halde her $x \in H$ için ya $f(x) \leq f(1)$ ya da $g(x) \leq g(1)$ elde edilir.
2. Her $x \in H$ için $f(x) \leq f(1)$ olsun. $x, y \in H$ için $f(x) > g(1)$ ve $g(y) > g(1)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $g(1) < f(x) \leq f(1)$ olduğundan $(f \times g)(1, 1) = \min\{f(1), g(1)\} = g(1)$ elde edilir. Bu durumda $(f \times g)(x, y) = \min\{f(x), g(y)\} > g(1) = (f \times g)(1, 1)$ olur ve bu bir çelişkidir. O halde her $x \in H$ için ya $f(x) \leq g(1)$ ya da $g(x) \leq g(1)$ sonuçlandırılır.
3. Her $x \in H$ için $g(x) \leq g(1)$ olsun. $x, y \in H$ için $f(x) > f(1)$ ve $g(y) > f(1)$ olduğunu varsayalım. O zaman $f(1) < g(y) \leq g(1)$ olduğundan $(f \times g)(1, 1) = \min\{f(1), g(1)\} = f(1)$ ve buradan $(f \times g)(x, y) = \min\{f(x), g(y)\} > f(1) = (f \times g)(1, 1)$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde her $x \in H$ için ya $f(x) \leq f(1)$ ya da $g(x) \leq f(1)$ bulunur.
4. (1) koşulu gereği, her $x \in H$ için ya $f(x) \leq f(1)$ ya da $g(x) \leq g(1)$ olur. Her $x \in H$ için $g(x) \leq g(1)$ olduğunu kabul edelim. (3) koşulundan her $x \in H$ için ya $f(x) \leq f(1)$ ya da $g(x) \leq f(1)$ elde edilir.

Durum I. her $x \in H$ için $g(x) \leq f(1)$ olsun. Kabulden dolayı (FH1)

koşulunun sağlandığı açıktır. Her $x, y \in H$ için Lemma 3.3 (i)'den

$$\begin{aligned}
g(x|(y|y)) &= \min\{f(1), g(x|(y|y))\} \\
&= (f \times g)(1, x|(y|y)) \\
&= (f \times g)(x|(1|1), x|(y|y)) \\
&= (f \times g)((x, x)|_{H \times H}((1, y)|_{H \times H}(1, y))) \\
&\geq (f \times g)(1, y) \\
&= \min\{f(1), g(y)\} \\
&= g(y)
\end{aligned}$$

olduğuna göre (FH2) koşulu gerçekleşir. O halde g , H 'nin bir fuzzy süzgecidir. Ayrıca, her $x, y_1, y_2 \in H$ için Lemma 3.3 (i) gereği

$$\begin{aligned}
g((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) &= \min\{f(1), g((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2))\} \\
&= (f \times g)(1, (x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) \\
&= (f \times g)((x|(1|1))|(1|1), (x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) \\
&= (f \times g)((x, x)|_{H \times H}((1, y_1)|_{H \times H}(1, y_2)))|_{H \times H}((1, y_1)|_{H \times H}(1, y_2))) \\
&\geq \min\{(f \times g)(1, y_1), (f \times g)(1, y_2)\} \\
&= \min\{\min\{f(1), g(y_1)\}, \min\{f(1), g(y_2)\}\} \\
&= \min\{g(y_1), g(y_2)\}
\end{aligned}$$

olduğuna göre (FH3) koşulu sağlanır.

Durum II. her $x \in H$ için $f(x) \leq f(1)$ olsun. O zaman (FH1) koşulu sağlanır. Bir $y \in H$ için $g(y) > f(1)$ olduğunu kabul edelim. $g(1) \geq g(y) > f(1) \geq f(x)$ olduğundan her $x \in H$ için $g(1) > f(x)$ ve buradan $(f \times g)(x, 1) = \min\{f(x), g(1)\} = f(x)$ elde edilir. Her $x, y \in H$ için Lemma 3.3 (i)'den

$$\begin{aligned}
f(x|(y|y)) &= (f \times g)(x|(y|y), 1) \\
&= (f \times g)(x|(y|y), x|(1|1)) \\
&= (f \times g)((x, x)|_{H \times H}((y, 1)|_{H \times H}(y, 1))) \\
&\geq (f \times g)(y, 1) \\
&= \min\{f(y), g(1)\} \\
&= f(y)
\end{aligned}$$

olduğundan (FH2) koşulu gerçekleşir. Her $x, y_1, y_2 \in H$ için Lemma 3.3 (i)'den

$$\begin{aligned}
f((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2)) &= (f \times g)((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2), 1) \\
&= (f \times g)((x|(y_1|y_2))|(y_1|y_2), (x|(1|1))|(1|1)) \\
&= (f \times g)((x, x)|_{H \times H}((y_1, 1)|_{H \times H} \\
&\quad (y_2, 1)))|_{H \times H}((y_1, 1)|_{H \times H}(y_2, 1))) \\
&\geq \min\{(f \times g)(y_1, 1), (f \times g)(y_2, 1)\} \\
&= \min\{\min\{f(y_1), g(1)\}, \min\{f(y_2), g(1)\}\} \\
&= \min\{f(y_1), f(y_2)\}
\end{aligned}$$

olduğuna göre (FH3) koşulu sağlanır. O halde f , H 'nin bir fuzzy süzgecidir. □

H Sheffer stroke Hilbert cebirinin f ve g fuzzy altkümeleri için $f \times g$ kartezyen çarpımı $H \times H$ 'nin bir fuzzy süzgeci iken f ve g 'nin her ikisinin de H 'nin fuzzy süzgeci olmasına gerek yoktur.

Örnek 3.19. *Örnek 3.2'de verilen H Sheffer stroke Hilbert cebirini göz önünde bulunduralım. H 'nin f ve g fuzzy altkümeleri, sırasıyla, her $x \in H$ için $f(x) = 0.51$ ve*

$$g(x) = \begin{cases} 0.521, & x = 1 \text{ ise} \\ 0.6, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansınlar. O zaman her $x, y \in H$ için $(f \times g)(x, y) = \min\{f(x), g(y)\} = 0.51 = f(x)$ ile tanımlı $f \times g$ fuzzy altkümesi $H \times H$ 'nin bir fuzzy süzgecidir fakat her $x \in H - \{1\}$ için $g(1) = 0.521 < g(x)$ olduğundan g fuzzy altkümesi H 'nin bir fuzzy süzgeci değildir.

4 GÜÇLÜ SHEFFER STROKE BİRLEŞMELİ OLMAYAN MV-CEBİRLERİNİN SÜZGEÇLERİ

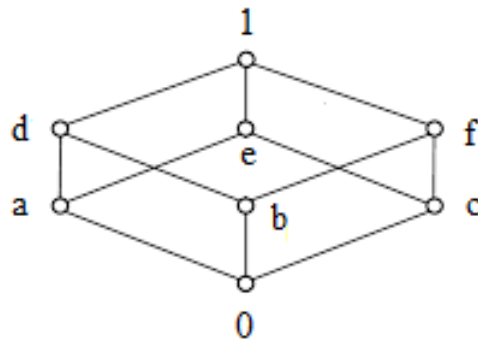
Bu bölümde, Chajda ve arkadaşları tarafından (Chajda et al., 2019) de tanımlanan güçlü Sheffer stroke birleşmeli olmayan MV-cebirlerinin (kısaca, güçlü Sheffer stroke NMV-cebirlerinin) özelliklerinden yararlanarak bu cebir yapılarının süzgeçleri, sıralama, denklik ve kongrüans bağıntıları, bölüm grupları, homomorfizmaları ve bu kavramlar arasındaki bağlantılar araştırılacaktır. Böylece, Sheffer stroke işleminin bilgisayar bilimlerine özellikle de yapay zekaya ve insan davranışlarını taklit eden aygıtlara rahatlıkla uygulanabilir olması için matematiksel altyapı sağlanmış olacaktır.

Önerme 4.1. $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun. O zaman A kümesi üzerinde $x, y \in A$ için

$$x \leq y \text{ eğer ve yalnız eğer } x|(y|1) \approx 1$$

ile tanımlı bir $\leq$ ikili bağıntısı A kümesi üzerinde bir kısmi sıralamadır. Bu nedenle, $(A, \leq)$ yapısı 0 en küçük ve 1 en büyük elemanına sahip bir kısmi sıralı kümedir.

Örnek 4.1. $A = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$, Şekil 4.1’de verilen Hasse diyagramına sahip bir küme ve A üzerindeki $|$ işlemi Çizelge 4.1’deki işlem tablosuna sahip bir ikili işlem olsun.



Şekil 4.1: A kümesinin Hasse diyagramı

O halde $(A, |, 1)$ yapısı bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir.

	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	1	f	1	1	f	f	1	f
b	1	1	e	1	e	1	e	e
c	1	1	1	d	1	d	d	d
d	1	f	e	1	c	f	e	c
e	1	f	1	d	f	b	d	b
f	1	1	e	d	e	d	a	a
1	1	f	e	d	c	b	a	0

Çizelge 4.1: A kümesi üzerindeki $|$ Sheffer stroke işlem tablosu

Lemma 4.1. *Bir $(A, |, 1)$ güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun. O zaman her $x, y, z \in A$ için aşağıdaki özellikler vardır:*

- (i) $x|(x|1) \approx 1$,
- (ii) $x \leq y \Leftrightarrow y|1 \leq x|1$,
- (iii) $y \leq x|(y|1)$,
- (iv) $y|1 \leq x|y$,
- (v) $x \leq (x|y)|y$,
- (vi) $x \leq (((x|y)|y)|z)|z$,
- (vii) $((x|y)|y)|y \approx x|y$,
- (viii) $x|1 \approx x|x$,
- (ix) $x|(x|x) \approx 1$,
- (x) $1|(x|x) \approx x$,
- (xi) $x \leq y \Rightarrow y|z \leq x|z$,
- (xii) $x|(y|1) \leq (y|(z|1))|((x|(z|1))|1)$,
- (xiii) $x|(y|1) \leq (z|(x|1))|((z|(y|1))|1)$,
- (xiv) $x \leq y$ ve $z \leq t$ ise o zaman $y|t \leq x|z$ 'dir.

İspat. (i) (n1), (n3) ve (n5)'den $x|(x|1) \approx 1$ bulunur.

(ii) Önerme 4.1, (n1) ve (n3)'den $x \leq y \Leftrightarrow y|1 \leq x|1$ elde edilir.

(iii) (n1), (n3) ve (n5)'den $y|((x|(y|1))|1) \approx ((y|1)|1)|(((y|1)|x)|1) \approx 1$ olduğuna göre Önerme 4.1'den $y \leq x|(y|1)$ sonucuna ulaşılır.

(iv) (iii) şıkında y yerine $y|1$ yazılırsa (n3)'den $y|1 \leq x|((y|1)|1) \approx x|y$ elde edilir.

(v) (n3) ve (n6)'dan $x|(((x|y)|y)|1) \approx x|((((x|y)|y)|1)|1)|1 \approx 1$ olduğuna göre Önerme 4.1'den $x \leq (x|y)|y$ sonucuna ulaşılır.

(vi) (n6) ve Önerme 4.1'den $x \leq (((x|y)|y)|z)|z$ olur.

(vii) (v) şikkından $x|y \leq ((x|y)|y)|y$ olur. (n1), (n3)-(n5) ve (i) şikkından

$$\begin{aligned}
 (((x|y)|y)|y)|((x|y)|1) &\approx ((x|y)|1)|(((x|y)|y)|y) \\
 &\approx ((x|y)|1)|((((x|y)|1)|1)|y)|y) \\
 &\approx ((x|y)|1)|(((y|1)|((x|y)|1))|((x|y)|1)) \\
 &\approx ((x|y)|1)|(((x|y)|1)|((y|1)|((y|x)|1))) \\
 &\approx 1
 \end{aligned}$$

ve buradan $((x|y)|y)|y \leq x|y$ elde edilir. O halde $((x|y)|y)|y \approx x|y$ sonuçlandırılır.

(viii) (iii) şikkından $x|1 \leq x|x$ bulunur. (n1)-(n3), (S2) ve (i) şikkından

$$\begin{aligned}
 (x|x)|((x|1)|1) &\approx x|(((x|x)|1)|1) \\
 &\approx x|(((x|x)|(x|0))|1) \\
 &\approx x|(x|1) \\
 &\approx 1
 \end{aligned}$$

olduğuna göre $x|x \leq x|1$ ve bu durumda $x|1 \approx x|x$ bulunur.

(ix) Sırasıyla, (viii) ve (i) şıklarından $x|(x|x) \approx x|(x|1) \approx 1$ elde edilir.

(x) Sırasıyla (viii), (n1) ve (n3)'den $1|(x|x) \approx 1|(x|1) \approx x$ sonucuna ulaşılır.

(xi) $x \leq y$ olsun. O zaman Önerme 4.1'den $x|(y|1) \approx 1$ olur. (viii), (n1)-(n4) ve (S3) aksiyomundan

$$\begin{aligned}
 (y|z)|((x|z)|1) &\approx (y|z)|((z|x)|(z|x)) \\
 &\approx (((y|z)|z)|((y|z)|z))|x \\
 &\approx (((z|1)|(y|1))|(y|1))|(((z|1)|(y|1))|(y|1)))|x \\
 &\approx ((z|1)|(y|1))|((x|(y|1))|(x|(y|1))) \\
 &\approx ((z|1)|(y|1))|(1|1) \\
 &\approx 1
 \end{aligned}$$

olduğuna göre $y|z \leq x|z$ sonucuna ulaşılır.

(xii) (n1)-(n4), (S3), (viii) ve (ix) şıklarından

$$\begin{aligned}
 (x|(y|1))|(((y|(z|1))|((x|(z|1))|1))|1) &\approx (x|(y|1))|(((y|(z|1))|((x|(z|1))|(x|(z|1| \\
 &\hspace{15em} 1))))|((y|(z|1))|((x|(z|1))|(x|(z|1))))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx (x|(y|1))|((((y|(z|1))|(z|1))|((y|(z|1))|(z|1))) \\
&\quad |x)|((((y|(z|1))|(z|1))|((y|(z|1))|(z|1)))|x)) \\
&\approx (x|(y|1))|((((z|(y|1))|(y|1))|((z|(y|1))|(y|1))) \\
&\quad |x)|((((z|(y|1))|(y|1))|((z|(y|1))|(y|1)))|x)) \\
&\approx (x|(y|1))|(((z|(y|1))|((x|(y|1))|(x|(y|1| \\
&\quad 1))))|((z|(y|1))|((x|(y|1))|(x|(y|1)))))) \\
&\approx (((x|(y|1))|((x|(y|1))|(x|(y|1))))|((x| \\
&\quad (y|1))|((x|(y|1))|(x|(y|1)))))|z|(y|1)) \\
&\approx (1|1)|(z|(y|1)) \\
&\approx 1
\end{aligned}$$

olduğundan $x|(y|1) \leq (y|(z|1))|((x|(z|1))|1)$ elde edilir.

(xiii) (n1)-(n2), (n4), (S3), (viii) ve (ix) şıklarından

$$\begin{aligned}
&(x|(y|1))|(((z|(x|1))|((z|(y|1))|1))|1) \\
&\approx (x|(y|1))|(((z|(x|1))|((z|(y|1))|z|(y| \\
&\quad 1))))|((z|(x|1))|((z|(y|1))|(z|(y|1)))))) \\
&\approx (x|(y|1))|((((((x|1)|z)|z)|(((x|1)|z)|z))|(y| \\
&\quad 1))|((((((x|1)|z)|z)|(((x|1)|z)|z))|(y|1))) \\
&\approx (x|(y|1))|((((((z|1)|x)|x)|(((z|1)|x)|x))|(y| \\
&\quad 1))|((((((z|1)|x)|x)|(((z|1)|x)|x))|(y|1))) \\
&\approx (x|(y|1))|((((z|1)|x)|((x|(y|1))|(x|(y|1| \\
&\quad 1))))|(((z|1)|x)|((x|(y|1))|(x|(y|1)))))) \\
&\approx (((x|(y|1))|((x|(y|1))|(x|(y|1))))|((x| \\
&\quad (y|1))|((x|(y|1))|(x|(y|1)))))|((z|1)|x) \\
&\approx (1|1)|((z|1)|x) \\
&\approx 1
\end{aligned}$$

ve buradan $x|(y|1) \leq (z|(x|1))|((z|(y|1))|1)$ bulunur.

(xiv) $x \leq y$ ve $z \leq t$ olsun. O zaman (xi) ve (n1)'den $y|t \leq x|t$ ve $x|t \approx t|x \leq z|x \approx x|z$ elde edilir. Bu durumda $\leq$ bağıntısı geçişken olduğuna göre $y|t \leq x|z$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 4.1. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun. O zaman $A \times B$ kümesi A ve B 'nin kartezyen çarpımı, $1_{A \times B} \approx (1_A, 1_B)$

elemanı $A \times B$ 'nin sabiti ve $A \times B$ üzerinde her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ için $(x_1, y_1)|_{A \times B}(x_2, y_2) \approx (x_1|_A x_2, y_1|_B y_2)$ ile tanımlı $|_{A \times B}$ Sheffer stroke işlemi olmak üzere $(A \times B, |_{A \times B}, 1_{A \times B})$ yapısı bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir.

İspat. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun ve $|_{A \times B}$ ikili işlemi $A \times B$ üzerinde her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ için $(x_1, y_1)|_{A \times B}(x_2, y_2) \approx (x_1|_A x_2, y_1|_B y_2)$ ile tanımlansın. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in A \times B$ olduğunu kabul edelim. O zaman $1_{A \times B} \approx (1_A, 1_B)$ elemanının $A \times B$ 'nin sabiti ve $|_{A \times B}$ işleminin $A \times B$ üzerinde bir Sheffer stroke işlemi olduğu açıktır. O halde

(1) :

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)|_{A \times B}(x_2, y_2) &\approx (x_1|_A x_2, y_1|_B y_2) \\ &\approx (x_2|_A x_1, y_2|_B y_1) \\ &\approx (x_2, y_2)|_{A \times B}(x_1, y_1), \end{aligned}$$

(2) : $(x_1, y_1)|_{A \times B}(0_A, 0_B) = (x_1|_A 0_A, y_1|_B 0_B) \approx (1_A, 1_B) \approx 1_{A \times B}$,

(3) :

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1)|_{A \times B} 1_{A \times B})|_{A \times B} 1_{A \times B} &\approx ((x_1, y_1)|_{A \times B}(1_A, 1_B))|_{A \times B}(1_A, 1_B) \\ &\approx ((x_1|_A 1_A)|_A 1_A, (y_1|_B 1_B)|_B 1_B) \\ &\approx (x_1, y_1), \end{aligned}$$

(4) :

$$\begin{aligned} (((x_1, y_1)|_{A \times B} 1_{A \times B})|_{A \times B}(x_2, y_2))|_{A \times B}(x_2, y_2) &\approx (((x_1, y_1)|_{A \times B}(1_A, 1_B))|_{A \times B}(x_2, y_2))|_{A \times B}(x_2, y_2) \\ &\approx (((x_1|_A 1_A)|_A x_2)|_A x_2, ((y_1|_B 1_B)|_B y_2)|_B y_2) \\ &\approx (((x_2|_A 1_A)|_A x_1)|_A x_1, ((y_2|_B 1_B)|_B y_1)|_B y_1) \\ &\approx (((x_2, y_2)|_{A \times B}(1_A, 1_B))|_{A \times B}(x_1, y_1))|_{A \times B}(x_1, y_1) \\ &\approx (((x_2, y_2)|_{A \times B} 1_{A \times B})|_{A \times B}(x_1, y_1))|_{A \times B}(x_1, y_1), \end{aligned}$$

(5) : $((x_1, y_1)|_{A \times B} 1_{A \times B})|_{A \times B}(((x_1, y_1)|_{A \times B}(x_2, y_2))|_{A \times B} 1_{A \times B})$
 $\approx ((x_1, y_1)|_{A \times B}(1_A, 1_B))|_{A \times B}(((x_1, y_1)|_{A \times B}(x_2, y_2))|_{A \times B}(1_A, 1_B))$
 $\approx ((x_1|_A 1_A)|_A((x_1|_A x_2)|_A 1_A), (y_1|_B 1_B)|_B((y_1|_B y_2)|_B 1_B))$

$$\begin{aligned}
&\approx (1_A, 1_B) \\
&\approx 1_{A \times B} \text{ ve} \\
(6) : &(x_1, y_1)|_{A \times B}((((x_1, y_1)|_{A \times B}(x_2, y_2))|_{A \times B} \\
&(x_2, y_2)|_{A \times B}(x_3, y_3))|_{A \times B}(x_3, y_3))|_{A \times B} 1_{A \times B}) \\
&\approx (x_1, y_1)|_{A \times B}((((x_1, y_1)|_{A \times B}(x_2, y_2))|_{A \times B} \\
&(x_2, y_2)|_{A \times B}(x_3, y_3))|_{A \times B}(x_3, y_3))|_{A \times B}(1_A, 1_B)) \\
&\approx (x_1|_A((((x_1|_A x_2)|_A x_2)|_A x_3)|_A x_3)|_A 1_A), \\
&y_1|_B((((y_1|_B y_2)|_B y_2)|_B y_3)|_B y_3)|_B 1_B)) \\
&\approx (1_A, 1_B) \\
&\approx 1_{A \times B}.
\end{aligned}$$

olduğundan $(A \times B, |_{A \times B}, 1_{A \times B})$ yapısı bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir.

□

4.1 Güçlü Sheffer stroke NMV-cebirlerinin Süzgeçleri

Bir kısımda, güçlü Sheffer stroke NMV-cebirlerinin süzgeçlerini tanımlayarak özelliklerini sunacağız. Okunabilirliği kolaylaştırmak adına, aksi belirtilmedikçe, bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri kısaca A ile gösterilecektir.

Tanım 4.1. Her $x, y \in A$ için

$$\begin{aligned}
&(S_f - 1) \ 1 \in F \text{ ve} \\
&(S_f - 2) \ x|(y|1) \in F \text{ ve } x \in F \text{ ise o zaman } y \in F
\end{aligned}$$

koşullarını sağlayan A 'nın boştan farklı bir F altkümesine A güçlü Sheffer stroke NMV-cebirinin bir süzgeci denir.

Örnek 4.2. Örnek 4.1'de verilen A güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri göz önünde bulunduralım. O zaman A 'nın kendisi, $\{1\}$, $\{1, d\}$, $\{1, f\}$, $\{1, a, d, e\}$ ve $\{1, c, e, f\}$ altkümeleri A 'nın süzgeçleridir.

Lemma 4.2. A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun. O zaman A 'nın boştan farklı bir F altkümelerinin A 'nın süzgeci olması için gerek ve yeter koşul $1 \in F$ ve her $x, y \in A$ için $x \leq y$ ve $x \in F$ iken $y \in F$ olmasıdır.

İspat. Tanım 4.1 ve Önerme 4.1'den ispatlanır.

□

Teorem 4.2. A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun. O zaman A 'nın tüm süzgeçlerinin Π_A ailesi bir tam kafestir.

İspat. $\{F_i\}_{i \in I}$, A 'nın tüm süzgeçlerinin ailesi olsun. Her $i \in I$ için $1 \in F_i$ olduğundan $1 \in \bigcup_{i \in I} F_i$ ve $1 \in \bigcap_{i \in I} F_i$ elde edilir. Her $x, y \in A$ için $x|(y|1) \in \bigcap_{i \in I} F_i$ ve $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $i \in I$ için $x|(y|1) \in F_i$ ve $x \in F_i$ olur. Her F_i altkümesi A 'nın bir süzgeci olduğuna göre her $i \in I$ için $y \in F_i$ ve buradan $y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ elde edilir. O halde $\bigcap_{i \in I} F_i$, A 'nın bir süzgecidir. W , A 'nın $\bigcup_{i \in I} F_i$ birleşimini içeren tüm süzgeçlerinin ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap W$ 'nin A 'nın süzgeci olduğu sonucuna ulaşılır. Eğer $\bigwedge_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} F_i$ ve $\bigvee_{i \in I} F_i = \bigcap W$ ise o zaman $(\Pi_A, \bigwedge, \bigvee)$ yapısı bir tam kafestir. $\square$

Sonuç 4.1. *A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve V , A 'nın bir altkümesi olsun. O zaman V altkümesini kapsayan A 'nın bir $\langle V \rangle$ minimal süzgeci mevcuttur.*

İspat. $E = \{F : F, V \subseteq A \text{ yı kapsayan } A \text{ nın bir süzgecidir}\}$ olsun. O zaman $\langle V \rangle = \{x \in A : x \in \bigcap_{F \in E} F\}$ altkümesi $V \subseteq A$ 'yı kapsayan A 'nın bir minimal süzgecidir. $\square$

Tanım 4.2. *A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve B , A 'nın bir altkümesi olsun. Eğer A 'nın 1 elemanı B 'nin de elemanı ve $(B, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ise o zaman A 'nın B altkümesine A 'nın bir güçlü Sheffer stroke NMV-altcebiri denir. Ayrıca, A 'nın kendisi ve $\{1\}$ altkümesi A 'nın güçlü Sheffer stroke NMV-altcebirleridir.*

Lemma 4.3. *Bir A güçlü Sheffer stroke NMV-cebirinin her F süzgeci A 'nın bir güçlü Sheffer stroke NMV-altcebiridir.*

İspat. F , A 'nın bir süzgeci olsun. O zaman $(S_f - 1)$ koşulundan $1 \in F$ olur. F , A 'nın bir altkümesi ve A da bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olduğundan her $x, y, z \in F$ için F süzgeci (n1)-(n6) koşullarını sağlar. O halde $(F, |, 1)$ yapısı bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir. $\square$

Aşağıdaki örnek, Lemma 4.3'ün tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.3. *Örnek 4.1'de sunulan A güçlü Sheffer stroke NMV-cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman A 'nın $B = \{0, a, f, 1\}$ altkümesi A 'nın bir güçlü Sheffer stroke NMV-altcebir olması rağmen $a|(d|d) = 1 \in B$ ve $a \in B$ iken $d \notin B$ olduğundan B , A 'nın bir süzgeci değildir.*

Tanım 4.3. A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. O zaman A üzerinde bir $\propto_F$ ikili bağıntısı, her $x, y \in A$ için

$$x \propto_F y \text{ eğer ve yalnız eğer } x|(y|1) \in F \text{ ve } y|(x|1) \in F \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlansın.

Örnek 4.4. Örnek 4.1'de verilen A güçlü Sheffer stroke NMV-cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman A 'nın $F_1 = \{c, e, f, 1\}$ süzgeci için

$$\begin{aligned} \propto_{F_1} = \{ & (0, 0), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (1, 1), (c, e), (e, c), (c, f), \\ & (f, c), (c, 1), (1, c), (e, f), (f, e), (e, 1), (1, e), (f, 1), (1, f), (a, 0), (0, \\ & a), (a, b), (b, a), (a, d), (d, a), (b, d), (d, b), (b, 0), (0, b), (d, 0), (0, d) \} \end{aligned}$$

A üzerinde bir ikili bağıntıdır.

Tanım 4.4. A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun. Eğer her $x, y, k \in A$ için $x\xi y$ iken $x|k\xi y|k$ oluyorsa o zaman ξ denklik bağıntısına A üzerinde bir kongrüans bağıntısı denir.

Örnek 4.5. Örnek 4.1'de sunulan A güçlü Sheffer stroke NMV-cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman A üzerinde tanımlı $\xi = \{(0, 0), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (1, 1), (f, 1), (1, f), (0, a), (a, 0), (e, c), (c, e), (b, d), (d, b)\}$ denklik bağıntısı A üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

Lemma 4.4. A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun. O zaman A üzerindeki bir ξ denklik bağıntısının A üzerinde bir kongrüans bağıntısı olması için gerek ve yeter koşul her $x, y, k_1, k_2 \in A$ için $x\xi y$ ve $k_1\xi k_2$ iken $x|k_1\xi y|k_2$ olmasıdır.

Lemma 4.5. A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olmak üzere F , A 'nın bir süzgeci ve $\propto_F$, A üzerinde (4.1)'deki gibi tanımlanan bir ikili bağıntı olsun. O zaman $\propto_F$ bağıntısı A üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

İspat. F , A 'nın bir süzgeci ve $\propto_F$, A üzerinde (4.1)'deki gibi tanımlanan bir ikili bağıntı olsun. İlk olarak, $\propto_F$ bağıntısının A üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

- Yansıma özelliği: Lemma 4.1 (i)'den ispatlanır.

• Simetri özelliği: $x \propto_F y$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. O zaman $x|(y|1) \in F$ ve $y|(x|1) \in F$ olur. Buradan $y|(x|1) \in F$ ve $x|(y|1) \in F$ olduğuna göre $y \propto_F x$ elde edilir.

• Geçişme özelliği: $x \propto_F y$ ve $y \propto_F z$ olacak şekilde $x, y, z \in A$ olsun. O zaman $x|(y|1), y|(x|1) \in F$ ve $y|(z|1), z|(y|1) \in F$ elde edilir. Lemma 4.1 (xii)'den $x|(y|1) \leq (y|(z|1))|((x|(z|1))|1)$ olduğuna göre Lemma 4.2 gereği $(y|(z|1))|((x|(z|1))|1) \in F$ olur. Bu durumda, $(S_f - 2)$ 'den $x|(z|1) \in F$ elde edilir. Ayrıca, Lemma 4.1 (xiii)'den $y|(x|1) \leq (z|(y|1))|((z|(x|1))|1)$ ve Lemma 4.2'den $(z|(y|1))|((z|(x|1))|1) \in F$ bulunur. Böylece, $(S_f - 2)$ 'den $z|(x|1) \in F$ elde edilir. O halde $x|(z|1), z|(x|1) \in F$ ve buradan $x \propto_F z$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi $\propto_F$ denklik bağıntısının A üzerinde bir kongrüans bağıntısı olduğunu gösterelim. O zaman $x \propto_F m$ ve $y \propto_F n$ olacak şekilde $x, y, m, n \in A$ olsun. O zaman $x|(m|1), m|(x|1) \in F$ ve $y|(n|1), n|(y|1) \in F$ olur.

1. (n1) ve (n3)'den $(m|1)|((x|1)|1) \in F$ ve $(x|1)|((m|1)|1) \in F$ elde edilir.

O halde Lemma 4.1 (xiii), (n1) ve (n3)'den

$$\begin{aligned} (x|1)|((m|1)|1) &\leq (y|((x|1)|1))|((y|((m|1)|1))|1) \\ &\approx (x|y)|((m|y)|1) \end{aligned}$$

olduğuna göre Lemma 4.2 gereği $(x|y)|((m|y)|1) \in F$ bulunur. Eş zamanlı olarak, x yerine m ve m yerine x yazılırsa o zaman $(m|y)|((x|y)|1) \in F$ ve bu durumda $x|y \propto_F m|y$ elde edilir.

2. Eş zamanlı olarak, (1) şıkında x yerine y , y yerine m ve m yerine n yazılırsa (n1) koşulundan $m|y \propto_F m|n$ bulunur. Böylece $x|y \propto_F m|y$ elde edilir.

O halde $\propto_F$ bağıntısının geçişme özelliğinden $x|y \propto_F m|n$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Lemma 4.6. *A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve ξ , A üzerinde bir kongrüans bağıntısı olsun. O zaman A'nın $\mathbf{F}(\xi) = \{x \in A : x\xi 1\}$ altkümesi A'nın bir süzgecidir.*

İspat. ξ , A üzerinde bir kongrüans bağıntısı ve $\mathbf{F}(\xi) = \{x \in A : x\xi 1\}$, A'nın bir altkümesi olsun. ξ bağıntısının yansıma özelliğinden $1\xi 1$ ve buradan $1 \in \mathbf{F}(\xi)$ elde edilir. $x, x|(y|1) \in \mathbf{F}(\xi)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $x\xi 1$

ve $x|(y|1)\xi 1$ olduğuna göre $x\xi x|(y|1)$ bulunur. $y\xi y$ olduğundan ve Lemma 4.4, (n1), Lemma 4.1 (viii) ve (S2) aksiyomundan $x|y\xi(x|(y|1))|y \approx y|((y|1)|x) \approx ((y|y)|(y|y))|((y|1)|x) \approx ((y|1)|(y|1))|((y|1)|x) \approx y|1$ elde edilir. Ayrıca, (n3)'den $x|(y|1)\xi(y|1)|1 \approx y$ olur. ξ bağıntısının geçişme özelliğinden $y\xi 1$ ve bu durumda $y \in \mathbf{F}(\xi)$ elde edilir. O halde $\mathbf{F}(\xi)$ altkümesi A 'nın bir süzgecidir. $\square$

Lemma 4.7. *A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olmak üzere F , A 'nın bir süzgeci ve ξ , A üzerinde bir kongrüans bağıntısı olsun. O zaman*

$$(a) \ F = \mathbf{F}(\propto_F) \text{ ve}$$

$$(b) \ \xi = \propto_{\mathbf{F}(\xi)} \text{ 'dir.}$$

İspat. F , A 'nın bir süzgeci ve ξ , A üzerinde bir kongrüans bağıntısı olsun.

(a) (n2) ve Lemma 4.1 (x)'den

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\propto_F) &= \{x \in A : x \propto_F 1\} \\ &= \{x \in A : x|(1|1) \approx x|0 \approx 1 \in F \text{ ve } 1|(x|x) \approx x \in F\} \\ &= \{x \in A : x \in F\} \\ &= F \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $x \propto_{\mathbf{F}(\xi)} y$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x \propto_{\mathbf{F}(\xi)} y &\Leftrightarrow x|(y|1), y|(x|1) \in \mathbf{F}(\xi) \\ &\Leftrightarrow x|(y|1)\xi 1 \text{ ve } y|(x|1)\xi 1 \\ &\Leftrightarrow x|(y|1)\xi y|(x|1) \\ &\Leftrightarrow (x|(y|1))|(y|1)\xi(y|(x|1))|(y|1) \approx y \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $(y|(x|1))|(x|1)\xi x$ bulunur. ξ bağıntısının simetri özelliği, (n3) ve (n4)'den $x\xi(y|(x|1))|(x|1) \approx (x|(y|1))|(y|1)\xi y$ elde edilir. O halde $\xi = \propto_{\mathbf{F}(\xi)}$ sonucuna ulaşılır.

$\square$

Sonuç 4.2. *A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olmak üzere $\text{Fil}(A)$, A 'nın tüm süzgeçlerinin sınıfı ve $\text{Con}(A)$, A üzerindeki tüm kongrüans bağıntılarının*

sınıfı olsun. O zaman

$$f : Fil(A) \longrightarrow Con(A)$$

$$F \longmapsto f(F) = \alpha_F$$

ve

$$g : Con(A) \longrightarrow Fil(A)$$

$$\xi \longmapsto g(\xi) = \mathbf{F}(\xi)$$

dönüşümleri izomorfizmadırlar, yani,

$$Fil(A) \cong Con(A)$$

dır.

Teorem 4.3. *A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olmak üzere F , A 'nın bir süzgeci ve α , A üzerinde F süzgeci yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olsun. O zaman $A/F \equiv A/\alpha = \{[x]_\alpha : x \in A\}$ bir bölüm kümesi ve A/F üzerinde her $x, y \in A$ için $[x]_\alpha |_\alpha [y]_\alpha \approx [x|y]_\alpha$ ile tanımlı $|_\alpha$ Sheffer stroke işlemi olmak üzere $(A/F, |_\alpha, F)$ yapısı bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir ve $F \approx [1]_\alpha$ 'dir.*

İspat. F 'nin A 'nın bir süzgeci ve α bağıntısının A üzerinde F süzgeci yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olduğunu varsayalım. $A/F \equiv A/\alpha = \{[x]_\alpha : x \in A\}$ olsun ve $|_\alpha$ güçlü Sheffer stroke işlemi her $x, y \in A$ için $[x]_\alpha |_\alpha [y]_\alpha \approx [x|y]_\alpha$ şeklinde tanımlansın. O zaman (n1)-(n3) ve $(S_f - 1)$ 'den $x|(1|1) \approx x|0 \approx 1 \in F$ ve $1|(x|1) \approx (x|1)|1 \approx x \in F$ olduğuna göre her $x \in F$ için $x \in [1]_\alpha$ olur. $x \alpha 1$ olduğundan $F \subseteq [1]_\alpha$ elde edilir. Diğer yandan, her $x \in [1]_\alpha$ için $x \alpha 1$ bulunur. (n1)-(n3) ve $(S_f - 1)$ 'den $1 \approx x|0 \approx x|(1|1) \in F$ ve $x \approx (x|1)|1 \approx 1|(x|1) \in F$ olduğuna göre $[1]_\alpha \subseteq F$ ve bu durumda $F \approx [1]_\alpha$ elde edilir. Buradan $0_{A/F} \approx [0]_\alpha \approx [1|1]_\alpha \approx [1]_\alpha |_\alpha [1]_\alpha$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi $(A/F, |_\alpha, F)$ yapısının bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olduğunu gösterelim. $|_\alpha$ işleminin tanımından ve $(A, |, 1)$ yapısı bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olduğundan her $x, y \in A$ için

$$(1) : [x]_\alpha |_\alpha [y]_\alpha \approx [x|y]_\alpha \approx [y|x]_\alpha \approx [y]_\alpha |_\alpha [x]_\alpha,$$

$$(2) : [x]_\alpha |_\alpha 0_{A/F} \approx [x]_\alpha |_\alpha [0]_\alpha \approx [x|0]_\alpha \approx [1]_\alpha \approx F,$$

$$(3) : ([x]_{\alpha} |_{\alpha} F) |_{\alpha} F \approx ([x]_{\alpha} |_{\alpha} [1]_{\alpha}) |_{\alpha} [1]_{\alpha} \approx [(x|1)|1]_{\alpha} \approx [x]_{\alpha},$$

(4) :

$$\begin{aligned} & (([x]_{\alpha} |_{\alpha} F) |_{\alpha} [y]_{\alpha}) |_{\alpha} [y]_{\alpha} \approx ([x]_{\alpha} |_{\alpha} [1]_{\alpha}) |_{\alpha} [y]_{\alpha}) |_{\alpha} [y]_{\alpha} \\ & \approx [((x|1)|y)|y]_{\alpha} \approx [((y|1)|x)|x]_{\alpha} \\ & \approx ([y]_{\alpha} |_{\alpha} [1]_{\alpha}) |_{\alpha} [x]_{\alpha}) |_{\alpha} [x]_{\alpha} \\ & \approx ([y]_{\alpha} |_{\alpha} F) |_{\alpha} [x]_{\alpha}) |_{\alpha} [x]_{\alpha}, \end{aligned}$$

(5) :

$$\begin{aligned} & ([x]_{\alpha} |_{\alpha} F) |_{\alpha} (([x]_{\alpha} |_{\alpha} [y]_{\alpha}) |_{\alpha} F) \approx ([x]_{\alpha} |_{\alpha} [1]_{\alpha}) |_{\alpha} (([x]_{\alpha} |_{\alpha} [y]_{\alpha}) |_{\alpha} [1]_{\alpha}) \\ & \approx [(x|1)|((x|y)|1)]_{\alpha} \\ & \approx [1]_{\alpha} \\ & \approx F \end{aligned}$$

ve

(6) :

$$\begin{aligned} & [x]_{\alpha} |_{\alpha} (((([x]_{\alpha} |_{\alpha} [y]_{\alpha}) |_{\alpha} [y]_{\alpha}) |_{\alpha} [z]_{\alpha}) |_{\alpha} [z]_{\alpha}) |_{\alpha} F) \\ & \approx [x]_{\alpha} |_{\alpha} (((([x]_{\alpha} |_{\alpha} [y]_{\alpha}) |_{\alpha} [y]_{\alpha}) |_{\alpha} [z]_{\alpha}) |_{\alpha} [z]_{\alpha}) |_{\alpha} [1]_{\alpha}) \\ & \approx [x|(((x|y)|y)|z)|z)|1]_{\alpha} \\ & \approx [1]_{\alpha} \\ & \approx F \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Örnek 4.6. Örnek 4.1’de verilen A güçlü Sheffer stroke NMV-cebirini göz önünde bulunduralım.. A ’nın $F = \{1, f\}$ süzgeci için $\alpha_F = \{(0, 0), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (1, 1), (a, 0), (0, a), (1, f), (f, 1), (b, d), (d, b), (c, e), (e, c)\}$ bağıntısı A üzerinde F yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısıdır. O zaman $A/F = \{[0]_{\alpha_F}, [b]_{\alpha_F}, [c]_{\alpha_F}, [1]_{\alpha_F}\}$, bölüm kümesi, $F \approx [1]_{\alpha_F} = \{1, f\}$ ve A/F üzerinde $|_{\alpha_F}$ güçlü Sheffer stroke işlemi Çizelge 4.2’deki işlem tablosuna sahip olacak şekilde $(A/F, |_{\alpha_F}, F)$ yapısı bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir.

$ _{\alpha_F}$	$[0]_{\alpha_F}$	$[b]_{\alpha_F}$	$[c]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$
$[0]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$
$[b]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$	$[c]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$	$[c]_{\alpha_F}$
$[c]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$	$[b]_{\alpha_F}$	$[b]_{\alpha_F}$
$[1]_{\alpha_F}$	$[1]_{\alpha_F}$	$[c]_{\alpha_F}$	$[b]_{\alpha_F}$	$[0]_{\alpha_F}$

Çizelge 4.2: A/F üzerindeki $|_{\alpha_F}$ güçlü Sheffer stroke işlem tablosu

Sonuç 4.3. A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olmak üzere F , A 'nın bir süzgeci ve α , A üzerinde F süzgeci yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olsun. Eğer $(A/F, |_{\alpha}, F)$ yapısı birleşme özelliğine sahip ise o zaman bir MV-cebiridir.

Sonuç 4.4. A bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebir olmak üzere F , A 'nın bir süzgeci ve α , A üzerinde F süzgeci yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olsun. O zaman $(A/F, |_{\alpha}, F)$ yapısı sıfıra sahip bir gerektirmeli NMV-cebiridir.

4.2 Güçlü Sheffer stroke NMV-cebirlerinin Homomorfizmaları

Bu kısımda, güçlü Sheffer stroke NMV-cebirleri üzerinde tanımlanan homomorfizmalar ve özellikleri sunulacaktır.

Tanım 4.5. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$h(x|_A y) = h(x)|_B h(y)$$

ise o zaman $h : A \longrightarrow B$ dönüşümüne bir homomorfizma denir.

Lemma 4.8. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h : A \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun. O zaman $h(A)$ altkümesi B 'nin bir süzgecidir.

İspat. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h :$

$A \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun. O zaman Lemma 4.1 (ix)'den

$$\begin{aligned} 1_B &\approx h(1_A)|_B(h(1_A)|_B h(1_A)) \\ &\approx h(1_A|_A(1_A|_A 1_A)) \\ &\approx h(1_A) \in h(A) \end{aligned}$$

elde edilir. $h(x) \in h(A)$ ve $h(x)|_B(h(y)|_B 1_B) \in h(A)$ olsun. $h(x|_A(y|_A 1_A)) \approx h(x)|_B(h(y)|_B h(1_A)) \approx h(x)|_B(h(y)|_B 1_B) \in h(A)$ olduğuna göre $x \in A$ ve $x|_A(y|_A 1_A) \in A$ olur. A 'nın kendisi de A 'nın bir süzgeci olduğuna göre $y \in A$ ve buradan $h(y) \in h(A)$ elde edilir. O halde $h(A)$ altkümesi B 'nin bir süzgecidir. $\square$

Gözlem 4.1. *Güçlü Sheffer stroke NMV-cebirlerinin sınıfı bir varyete oluşturur.*

Teorem 4.4. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h : A \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun.

- (1) *Eğer F altkümesi A 'nın bir süzgeci ise o zaman $h(F)$ altkümesi de B 'nin bir süzgecidir.*
- (2) *Eğer G altkümesi B 'nin bir süzgeci ise o zaman $h^{-1}(G)$ altkümesi de A 'nın bir süzgecidir.*

İspat. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h : A \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun.

- (1) A 'nın bir F altkümesinin A 'nın süzgeci olduğunu kabul edelim. $1_A \in F$ olduğuna göre $1_B \approx h(1_A) \in h(F)$ elde edilir. $h(x) \in h(F)$ ve $h(x)|_B(h(y)|_B 1_B) \in h(F)$ olsun. O zaman $h(x|_A(y|_A 1_A)) \approx h(x)|_B(h(y)|_B h(1_A)) \approx h(x)|_B(h(y))|_B 1_B \in h(F)$ olduğundan $x \in F$ ve $x|_A(y|_A 1_A) \in F$ bulunur. Kabulden $y \in F$ ve bu durumda $h(y) \in h(F)$ elde edilir. O halde $h(F)$ altkümesi B 'nin bir süzgecidir.
- (2) B 'nin bir G altkümesinin B 'nin süzgeci olduğunu varsayalım. $h(1_A) \approx 1_B \in G$ olduğuna göre $1_A \approx h^{-1}h(1_A) \approx h^{-1}(1_B) \in h^{-1}(G)$ olur. $x \in h^{-1}(G)$ ve $x|_A(y|_A 1_A) \in h^{-1}(G)$ olsun. O zaman $h(x) \in hh^{-1}(G) \subseteq G$ ve $h(x)|_B(h(y)|_B 1_B) \approx h(x)|_B(h(y)|_B h(1_A)) \approx h(x|_A(y|_A 1_A)) \in hh^{-1}(G) \subseteq G$ bulunur. Varsayımdan, $h(y) \in G$ ve buradan $y \in h^{-1}(G)$ elde edilir. O halde $h^{-1}(G)$ altkümesi A 'nın bir süzgecidir.

□

Teorem 4.5. $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve F ve G , A 'nın iki süzgeci olsun. O zaman $A/(F \cap G) \cong A/F \times A/G$ 'dir.

İspat. F ve G , A 'nın iki süzgeci olsun. $F \cap G$, A 'nın süzgeci olduğuna göre Teorem 4.3'ten $A/(F \cap G)$ de bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir. Teorem 4.3'ten A/F ve A/G güçlü Sheffer stroke NMV-cebirleri olduklarından Teorem 4.1'den $A/F \times A/G$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir. O zaman

$$f : A/(F \cap G) \longrightarrow A/F \times A/G$$

$$[x]_{\alpha_{F \cap G}} \longmapsto ([x]_{\alpha_F}, [x]_{\alpha_G}).$$

ile tanımlı f dönüşümü bir homomorfizmadır.

$([x]_{\alpha_F}, [x]_{\alpha_G}) \approx ([y]_{\alpha_F}, [y]_{\alpha_G})$ olacak şekilde $([x]_{\alpha_F}, [x]_{\alpha_G}), ([y]_{\alpha_F}, [y]_{\alpha_G}) \in A/F \times A/G$ olsun. O zaman $[x]_{\alpha_F} \approx [y]_{\alpha_F}$ ve $[x]_{\alpha_G} \approx [y]_{\alpha_G}$ olur. $x \alpha_F y$ ve $x \alpha_G y$ olduğuna göre $x|(y|y), y|(x|x) \in F$ ve $x|(y|y), y|(x|x) \in G$ elde edilir. $x|(y|y), y|(x|x) \in F \cap G$ olduğuna göre $x \alpha_{F \cap G} y$ ve buradan $[x]_{\alpha_{F \cap G}} \approx [y]_{\alpha_{F \cap G}}$ olur. Bu durumda f birebirdir.

$f([x]_{\alpha_{F \cap G}}) \approx ([a]_{\alpha_F}, [a]_{\alpha_G})$ olacak şekilde $([a]_{\alpha_F}, [a]_{\alpha_G}) \in A/F \times A/G$ olsun. O zaman $([x]_{\alpha_F}, [x]_{\alpha_G}) \approx ([a]_{\alpha_F}, [a]_{\alpha_G})$ olduğundan $[x]_{\alpha_F} \approx [a]_{\alpha_F}$ ve $[x]_{\alpha_G} \approx [a]_{\alpha_G}$ elde edilir. $x \alpha_F a$ ve $x \alpha_G a$ olduğuna göre $x|(a|a), a|(x|x) \in F$ ve $x|(a|a), a|(x|x) \in G$ ve buradan $x|(a|a), a|(x|x) \in F \cap G$ olur. Bu durumda $x \alpha_{F \cap G} a$ sonucuna ulaşılır. Böylece $[x]_{\alpha_{F \cap G}} \approx [a]_{\alpha_{F \cap G}}$ bulunur. Buradan f örtendir.

O halde f dönüşümü bir izomorfizmadır, yani, $A/(F \cap G) \cong A/F \times A/G$ sonucuna ulaşılır. □

Teorem 4.6. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olmak üzere F ve G altkümeleri, sırasıyla, A ve B 'nin süzgeçleri olsun. O zaman $(A \times B)/(F \times G) \cong A/F \times B/G$ 'dir.

İspat. F ve G altkümeleri, sırasıyla, A ve B 'nin süzgeçleri olsun. Teorem 4.3'ten A/F ve B/G iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir. Bu durumda Teorem 4.1'den $A/F \times B/G$ ve $A \times B$ güçlü Sheffer stroke NMV-cebirleridir.

İlk olarak, $F \times G$ altkümesinin $A \times B$ 'nin bir süzgeci olduğunu gösterelim. F ve G , sırasıyla, A ve B 'nin süzgeçleri olduğuna göre $1_{A \times B} \approx (1_A, 1_B) \in$

$F \times G$ olur. $(x_1, y_1), (x_1, y_1)|_{A \times B}((x_2, y_2)|_{A \times B}(x_2, y_2)) \in F \times G$ olsun. O zaman $(x_1|_A(x_2|_A x_2), y_1|_B(y_2|_B y_2)) \in F \times G$ ve buradan $x_1, x_1|_A(x_2|_A x_2) \in F$ ve $y_1, y_1|_B(y_2|_B y_2) \in G$ elde edilir. O halde $x_2 \in F$ ve $y_2 \in G$ sonuçlandırılır. Bu durumda $(x_2, y_2) \in F \times G$ elde edilir. Teorem 4.3'ten $A \times B/F \times G$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir. Böylece

$$g : (A \times B)/(F \times G) \longrightarrow A/F \times B/G$$

$$[(x, y)]_{\alpha_{F \times G}} \longmapsto ([x]_{\alpha_F}, [y]_{\alpha_G}).$$

ile tanımlı g dönüşümü bir örten homomorfizmadır.

Şimdi, g 'nin birebir olduğunu gösterelim. $([x_1]_{\alpha_F}, [y_1]_{\alpha_G}) \approx ([x_2]_{\alpha_F}, [y_2]_{\alpha_G})$ olacak şekilde $([x_1]_{\alpha_F}, [y_1]_{\alpha_G}), ([x_2]_{\alpha_F}, [y_2]_{\alpha_G}) \in A/F \times B/G$ olsun. $[x_1]_{\alpha_F} \approx [x_2]_{\alpha_F}$ ve $[y_1]_{\alpha_G} \approx [y_2]_{\alpha_G}$ olduğuna göre $x_1 \alpha_F x_2$ ve $y_1 \alpha_G y_2$ bulunur. O halde $x_1|_A(x_2|_A x_2), x_2|_A(x_1|_A x_1) \in F$, $y_1|_B(y_2|_B y_2), y_2|_B(y_1|_B y_1) \in G$ ve buradan $(x_1, y_1)|_{A \times B}((x_2, y_2)|_{A \times B}(x_2, y_2)) \approx (x_1|_A(x_2|_A x_2), y_1|_B(y_2|_B y_2)) \in F \times G$, $(x_2, y_2)|_{A \times B}((x_1, y_1)|_{A \times B}(x_1, y_1)) \approx (x_2|_A(x_1|_A x_1), y_2|_B(y_1|_B y_1)) \in F \times G$ elde edilir. $(x_1, y_1) \alpha_{F \times G} (x_2, y_2)$ olduğuna göre $[(x_1, y_1)]_{\alpha_{F \times G}} \approx [(x_2, y_2)]_{\alpha_{F \times G}}$ olur.

O halde g bir izomorfizmadır, yani, $(A \times B)/(F \times G) \cong A/F \times B/G$ sonuçlandırılır. $\square$

Sonuç 4.5. $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olmak üzere F ve G , A 'nın iki süzgeci olsun. O zaman $A/(F \cap G) \cong (A \times A)/(F \times G)$ 'dir.

Teorem 4.7. $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. O zaman $F \subseteq G$ olacak şekilde A 'nın bir G altkümesinin A 'nın bir süzgeci olması için gerek ve yeter koşul $G/F = \{[x]_F \in A/F : x \in G\}$ kümesinin A/F 'nin bir süzgeci olmasıdır.

İspat. F 'nin A 'nın bir süzgeci olduğunu kabul edelim.

Gerek koşul: $F \subseteq G$ olacak şekilde G altkümesi A 'nın bir süzgeci ve $G/F = \{[x]_F \in A/F : x \in G\}$ olsun. Teorem 4.3'ten $(A/F, |_F, F)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir ve $F \approx [1]_F$ olur. G/F 'nin tanımı gereği $F \approx [1]_F \in G/F$ bulunur. $[x]_F \in G/F$ ve $[x]_F|_F([y]_F|_F F) \in G/F$ olsun. O zaman $[x|(y|1)]_F \approx [x]_F|_F([y]_F|_F [1]_F) \approx [x]_F|_F([y]_F|_F F) \in G/F$ ve bu durumda $x \in G$ ve $x|(y|1) \in G$ elde edilir. G , A 'nın bir süzgeci olduğuna göre $y \in G$ ve böylece $[y]_F \in G/F$ olur. O halde G/F , A/F 'nin bir süzgecidir.

Yeter koşul: G/F kümesinin tanımından ispatlanır. $\square$

Teorem 4.8. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h : A \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun. O zaman $\text{Ker}h = \{x \in A : h(x) \approx 1_B\}$, A 'nın bir süzgecidir.

İspat. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ yapılarının iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h : A \longrightarrow B$ dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu varsayalım. $h(1_A) \approx 1_B$ olduğuna göre $1_B \in \text{Ker}h$ elde edilir. $x \in \text{Ker}h$ ve $x|_A(y|_A y) \in \text{Ker}h$ olsun. O zaman $h(x) \approx 1_B$ ve $h(x|_A(y|_A y)) \approx 1_B$ olur.

$$\begin{aligned} h(y) &\approx 1_B|_B(h(y)|_B h(y)) \\ &\approx h(x)|_B(h(y)|_B h(y)) \\ &\approx h(x|_A(y|_A y)) \\ &\approx 1_B, \end{aligned}$$

olduğundan $y \in \text{Ker}h$ sonucuna ulaşılır. O halde $\text{Ker}h$, A 'nın bir süzgecidir. $\square$

Teorem 4.9. $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. O zaman her $x \in A$ için $x \mapsto [x]_F$ ile tanımlı bir $g : A \longrightarrow A/F$ doğal homomorfizması vardır.

İspat. $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. Teorem 4.3 gereği her $x \in A$ için $x \mapsto [x]_F$ ile tanımlı bir $g : A \longrightarrow A/F$ dönüşümü bir doğal homomorfizmadır. $\square$

Teorem 4.10. $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. O zaman her $x \in A$ için $f(x) \approx [x]_F$ ile tanımlanan bir $f : A \longrightarrow A/F$ kanonik örten homomorfizması vardır ve $\text{Ker}f = F$ 'dir.

İspat. F , A 'nın bir süzgeci olsun. Teorem 4.9 uyarınca her $x \in A$ için $f(x) \approx [x]_F$ ile tanımlanan bir $f : A \longrightarrow A/F$ dönüşümü bir homomorfizmadır ve

tanımı gereği örtendir. Ayrıca, (n2) ve Lemma 4.1 (x)'den

$$\begin{aligned}
Ker f &= \{x \in A : f(x) \approx [1]_F\} \\
&= \{x \in A : [x]_F \approx [1]_F\} \\
&= \{x \in A : x \propto_F 1\} \\
&= \{x \in A : x|(1|1) \approx x|0 \approx 1 \in F \text{ ve } 1|(x|x) \approx x \in F\} \\
&= \{x \in A : x \in F\} \\
&= F
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.11. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h : A \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun. O zaman bir $g : A \longrightarrow A/Kerh$ doğal homomorfizması için $h \approx f \circ g$ olacak şekilde tek bir $f : A/Kerh \longrightarrow B$ homomorfizması vardır. Ayrıca, g örten ve f birebirdir.

İspat. $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h : A \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun. Teorem 4.8 gereği $Kerh$, A 'nın bir süzgecidir ve bu durumda Teorem 4.3'ten $A/Kerh$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir. Bir $f : A/Kerh \longrightarrow B$ dönüşümü, her $x, y \in A$ için $[x]_{Kerh} \longmapsto h(x)$ olacak şekilde tanımlansın.

$[x]_{Kerh} \approx [y]_{Kerh}$ olacak şekilde $[x]_{Kerh}, [y]_{Kerh} \in A/Kerh$ olsun. O zaman $x \propto_{Kerh} y$ olduğuna göre $x|_A(y|_A y), y|_A(x|_A x) \in Kerh$ ve buradan $h(x)|_B(h(y)|_B h(y)) \approx h(x|_A(y|_A y)) \approx 1_B$ ve $h(y)|_B(h(x)|_B h(x)) \approx h(y|_A(x|_A x)) \approx 1_B$ elde edilir. Önerme 4.1'den $h(x) \leq h(y)$ ve $h(y) \leq h(x)$ olduğuna göre $f([x]_{Kerh}) \approx h(x) \approx h(y) \approx f([y]_{Kerh})$ olur. O halde f dönüşümü iyi-tanımlıdır.

$[x]_{Kerh}, [y]_{Kerh} \in A/Kerh$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
f([x]_{Kerh}|_{Kerh}[y]_{Kerh}) &\approx f([x|_A y]_{Kerh}) \\
&\approx h(x|_A y) \\
&\approx h(x)|_B h(y) \\
&\approx f([x]_{Kerh})|_B f([y]_{Kerh}).
\end{aligned}$$

ve $f(Kerh) \approx f([1_A]_{Kerh}) \approx h(1_A) \approx 1_B$ olduğundan f dönüşümü bir homomorfizmadır.

Her $x \in A$ için $g(x) \approx [x]_{Kerh}$ ile tanımlı bir $g : A \longrightarrow A/Kerh$ dönüşümü bir doğal homomorfizma olmak üzere $(f \circ g)(x) \approx f(g(x)) \approx f([x]_{Kerh}) \approx h(x)$ olduğundan $h \approx f \circ g$ bulunur. Bu durumda Teorem 4.10'dan g dönüşümü örtendir.

Şimdi f dönüşümünün tek olduğunu gösterelim. $h \approx \lambda \circ g$ olacak şekilde $\lambda : A/Kerf \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun. O zaman $[x]_{Kerh} \in A/Kerh$ için $\lambda([x]_{Kerh}) \approx \lambda(g(x)) \approx \lambda \circ g(x) \approx h(x) \approx f \circ g(x) \approx f(g(x)) \approx f([x]_{Kerh})$ ve böylece $\lambda \approx f$ elde edilir.

$f([x]_{Kerh}) \approx f([y]_{Kerh})$ olacak şekilde $[x]_{Kerh}, [y]_{Kerh} \in A/Kerh$ olsun. O zaman $h(x) \approx h(y)$ bulunur. Lemma 4.1 (ix)'den

$$\begin{aligned} h(x|_A(y|_A y)) &\approx h(x)|_B(h(y)|_B h(y)) \\ &\approx h(x)|_B(h(x)|_B h(x)) \\ &\approx 1_B \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $h(y|_A(x|_A x)) \approx 1_B$ elde edilir. Böylece $x|_A(y|_A y), y|_A(x|_A x) \in Kerh$ bulunur. Bu durumda $x \propto_{Kerh} y$ ve buradan $[x]_{Kerh} \approx [y]_{Kerh}$ sonucuna ulaşılır. O halde f dönüşümü birebirdir. $\square$

Sonuç 4.6. (Birinci İzomorfizma Teoremi) $(A, |_A, 1_A)$ ve $(B, |_B, 1_B)$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $h : A \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizma olsun. O zaman $A/Kerh \cong h(A)$ 'dir. Ayrıca, h örten ise o zaman $A/Kerh \cong B$ 'dir.

Teorem 4.12. (İkinci İzomorfizma Teoremi) $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olmak üzere B , A 'nın bir güçlü Sheffer stroke NMV-altcebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. O zaman her $x \in B$ için $BF = \bigcup [x]_F$ ve $BF/F = \{[x]_F \in A/F : x \in BF\}$ olmak üzere $BF/F \cong B/B \cap F$ 'dir.

İspat. B , A 'nın bir güçlü Sheffer stroke NMV-altcebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. O zaman $1 \in B$ ve buradan $1 \in F = [1]_F \subseteq \bigcup [x]_F = BF$ elde edilir. Her $x, y, z \in BF \subseteq A$ için BF altkümesi (n1-n6) koşullarını gerçeklediğinden $(BF, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir. Teorem 4.3'ten A/F bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri olduğuna göre BF/F kümesi A/F 'nin bir güçlü Sheffer stroke NMV-altcebiridir. BF/F bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $B \subseteq BF$ olduğundan her $x \in B$ için $x \mapsto [x]_F$ ile tanımlanan bir

$h : B \longrightarrow BF/F$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Böylece (n2) ve Lemma 4.1 (x)'den

$$\begin{aligned}
Kerh &= \{x \in B : h(x) \approx [1]_F\} \\
&= \{x \in B : [x]_F \approx [1]_F\} \\
&= \{x \in B : x \propto_F 1\} \\
&= \{x \in B : x|(1|1) \approx x|0 \approx 1 \in F \text{ ve } 1|(x|x) \approx x \in F\} \\
&= \{x \in B : x \in F\} \\
&= B \cap F
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Herhangi bir $[a]_F \in BF/F$ için $a \in BF = \bigcup [x]_F$ olur. Bu durumda $a \in [x]_F$ olacak şekilde bir $x \in B$ mevcut olduğundan $[a]_F \approx [x]_F$ elde edilir. O halde $h(x) \approx [x]_F \approx [a]_F$ ve buradan h örtendir. Sonuç 4.6 gereği $B/B \cap F = B/Kerh \cong h(B) = BF/F$ sonuçlandırılır. $\square$

Teorem 4.13. (Üçüncü İzomorfizma Teoremi) $(A, |, 1)$ bir güçlü Sheffer stroke NMV-cebiri ve $F \subseteq G$ olmak üzere F ve G , A 'nın iki süzgeci olsun. O zaman $(A/F)/(G/F) \cong A/G$ 'dir.

İspat. $F \subseteq G$ olmak üzere F ve G , A 'nın iki süzgeci olsun. Teorem 4.7'den $G/F = \{[x]_F \in A/F : x \in G\}$, A/F güçlü Sheffer stroke NMV-cebirinin bir süzgecidir. Teorem 4.3'ten $(A/F)/(G/F) = \{[[x]_F]_{G/F} : [x]_F \in A/F\}$ ve $A/G = \{[x]_G : x \in A\}$ iki güçlü Sheffer stroke NMV-cebiridir. Bir $\mu : (A/F)/(G/F) \longrightarrow A/G$ dönüşümü, her $x \in A$ için $[[x]_F]_{G/F} \longmapsto [x]_G$ şeklinde tanımlansın. Her $[[x]_F]_{G/F}, [[y]_F]_{G/F} \in (A/F)/(G/F)$ için

$$\begin{aligned}
\mu([x]_F|_{G/F}|_{G/F}[y]_F|_{G/F}) &\approx \mu([x]_F|_F[y]_F|_{G/F}) \\
&\approx \mu([x|y]_F|_{G/F}) \\
&\approx [x|y]_G \\
&\approx [x]_G|_G[y]_G \\
&\approx \mu([x]_F|_{G/F})|_G\mu([y]_F|_{G/F})
\end{aligned}$$

ve $G \approx [1]_G \approx \mu([1]_F|_{G/F})$ olduğuna göre μ dönüşümü bir homomorfizmadır.

$[[x]_F]_{G/F} \in Ker\mu$ olsun. O zaman $[0]_G \approx \mu([x]_F|_{G/F}) \approx [x]_G$ dir. $x \propto_G 0$ olduğundan $x|(0|1), 0|(x|1) \in G$ ve buradan $[x]_F|_F([0]_F|_F[1]_F) \approx [x|(0|1)]_F$,

$[0]_F |_F ([x]_F |_F [1]_F) \approx [0|(x|1)]_F \in G/F$ elde edilir. $[x]_F \propto_{G/F} [0]_F$ olduğuna göre $[[x]_F]_{G/F} \approx [[0]_F]_{G/F}$ bulunur. Böylece $\text{Ker} \mu = \{[[0]_F]_{G/F}\}$ olur ve buradan μ bir monomorfizmadır. Ayrıca, μ tanımı gereği örtendir.

O halde μ bir izomorfizma, yani, $(A/F)/(G/F) \cong A/G$ dir. $\square$



5 SHEFFER STROKE BL-CEBİRLERİ

Bu bölümde, Sheffer stroke BL-cebirleri tanımlanarak çeşitli (fuzzy) süzgeçleri tanımlanacaktır. Aynı zamanda, bu fuzzy süzgeçler yardımıyla belirlenen bir altkümenin bir süzgeç olduğu ve bu ifadenin tersinin de doğru olduğu gösterilecektir. Böylece bir Sheffer stroke BL-cebirinin boştan farklı bir altkümesinin karakteristik fonksiyonunun da bir fuzzy süzgeç olduğu sonucuna ulaşılabacaktır.

Tanım 5.1. Her $c_1, c_2 \in C$ için

(sBL – 1) $(C, \vee, \wedge, 0, 1)$ yapısı bir sınırlı kafestir,

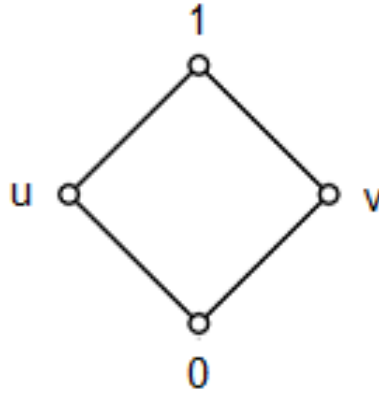
(sBL – 2) $(C, |)$ yapısı Sheffer stroke işlemine sahip bir grupoiddir,

(sBL – 3) $c_1 \wedge c_2 = (c_1|(c_1|(c_2|c_2)))(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))$,

(sBL – 4) $(c_1|(c_2|c_2)) \vee (c_2|(c_1|c_1)) = 1$

koşullarını sağlayan $(2, 2, 2, 0, 0)$ tipindeki bir $(C, \vee, \wedge, |, 0, 1)$ cebirine bir Sheffer stroke BL-cebiri denir. Burada $1 = 0|0$ elemanı C ’nin en büyük ve $0 = 1|1$ elemanı C ’nin en küçük elemanıdır.

Örnek 5.1. $C = \{0, u, v, 1\}$, Şekil 5.1’de bulunan Hasse diagramına sahip bir küme ve C üzerindeki $|$, $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri Çizelge 5.1’deki işlem tablolarına sahip ikili işlemler olsunlar.



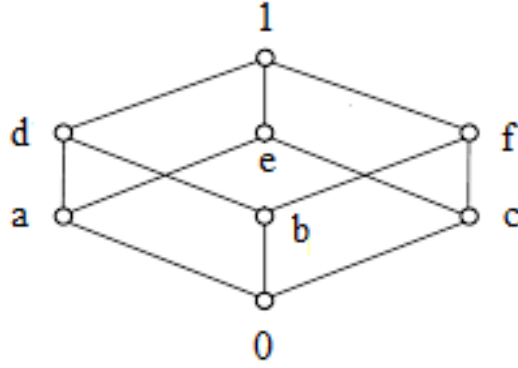
Şekil 5.1: C kümesinin Hasse diyagramı

O halde $(C, \vee, \wedge, |, 0, 1)$ bir Sheffer stroke BL-cebiridir.

$ $	0	u	v	1	$\vee$	0	u	v	1	$\wedge$	0	u	v	1
0	1	1	1	1	0	0	u	v	1	0	0	0	0	0
u	1	v	1	v	u	u	u	1	1	u	0	u	0	u
v	1	1	u	u	v	v	1	v	1	v	0	0	v	v
1	1	v	u	0	1	1	1	1	1	1	0	u	v	1

Çizelge 5.1: C üzerindeki $|$ Sheffer stroke, $\vee$ ve $\wedge$ işlem tabloları

Örnek 5.2. $D = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$, Şekil 5.2’de bulunan Hasse diagramına sahip bir küme ve D üzerindeki $|$ işlemi Çizelge 5.2’deki, $\vee$ işlemi Çizelge 5.3’deki ve $\wedge$ işlemi Çizelge 5.4’deki işlem tablolarına sahip ikili işlemler olsunlar.



Şekil 5.2: D kümesinin Hasse diyagramı

O halde $(D, \vee, \wedge, |, 0, 1)$ bir Sheffer stroke BL-cebiridir.

$ $	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	1	f	1	1	f	f	1	f
b	1	1	e	1	e	1	e	e
c	1	1	1	d	1	d	d	d
d	1	f	e	1	c	f	e	c
e	1	f	1	d	f	b	d	b
f	1	1	e	d	e	d	a	a
1	1	f	e	d	c	b	a	1

Çizelge 5.2: D üzerindeki $|$ Sheffer stroke işlem tablosu

$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	a	b	c	d	e	f	1
a	a	a	d	e	d	e	1	1
b	b	d	b	f	d	1	f	1
c	c	e	f	c	1	e	f	1
d	d	d	d	1	d	1	1	1
e	e	e	1	e	1	e	1	1
f	f	1	f	f	1	1	f	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Çizelge 5.3: D üzerindeki $\vee$ işlem tablosu

$\wedge$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	a	a	0	a
b	0	0	b	0	b	0	b	b
c	0	0	0	c	0	c	c	c
d	0	a	b	0	d	a	b	d
e	0	a	0	c	a	e	c	e
f	0	0	b	c	b	c	f	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

Çizelge 5.4: D üzerindeki $\wedge$ işlem tablosu

Aksi belirtilmedikçe, bir Sheffer stroke BL-cebiri kısaca C ile gösterilecektir.

Önerme 5.1. C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için aşağıdaki özellikler vardır:

1. $c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) = c_2|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3)))$,
2. $c_1|(c_1|c_1) = 1$,
3. $1|(c_1|c_1) = c_1$,
4. $c_1|(1|1) = 1$,
5. $(c_1|1)|(c_1|1) = c_1$,
6. $(c_1|c_2)|(c_1|c_2) \leq c_3 \Leftrightarrow c_1 \leq c_2|(c_3|c_3)$
7. $c_1 \leq c_2$ eğer ve yalnız eğer $c_1|(c_2|c_2) = 1$,
8. $c_1 \leq c_2|(c_1|c_1)$,
9. $c_1 \leq (c_1|c_2)|c_2$,

10. (a) $(c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))) \leq c_1$,
 (b) $(c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))) \leq c_2$,

11. Eğer $c_1 \leq c_2$ ise o zaman

- (i) $c_3|(c_1|c_1) \leq c_3|(c_2|c_2)$,
 (ii) $(c_1|c_3)|(c_1|c_3) \leq (c_2|c_3)|(c_2|c_3)$,
 (iii) $c_2|(c_3|c_3) \leq c_1|(c_3|c_3)$,

12. $c_1|(c_2|c_2) \leq (c_3|(c_1|c_1))|((c_3|(c_2|c_2))|(c_3|(c_2|c_2)))$,

13. $c_1|(c_2|c_2) \leq (c_2|(c_3|c_3))|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3)))$,

14. $((c_1 \vee c_2)|c_3)|((c_1 \vee c_2)|c_3) = ((c_1|c_3)|(c_1|c_3)) \vee ((c_2|c_3)|(c_2|c_3))$,

15. $c_1 \vee c_2 = ((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \wedge ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))$ 'dir.

İspat. 1. (S1) ve (S3) aksiyomlarından elde edilir.

2. $(sBL - 1)$ ve $(sBL - 4)$ 'den $c_1|(c_1|c_1) = (c_1|(c_1|c_1)) \vee (c_1|(c_1|c_1)) = 1$ bulunur.

3. (2) koşulu, (S1) ve (S2) gereği $1|(c_1|c_1) = (c_1|(c_1|c_1))|(c_1|c_1) = c_1$ olur.

4. (3) koşulu, (S1) ve (S2) aksiyomlarından $c_1|(1|1) = (1|(c_1|c_1))|(1|1) = 1$ sonucuna ulaşılır.

5. (S1), (S2) ve (3) koşulundan $(c_1|1)|(c_1|1) = (1|((c_1|c_1)|(c_1|c_1))|(1|((c_1|c_1)|(c_1|c_1)))) = (c_1|c_1)|(c_1|c_1) = c_1$ elde edilir.

6. $(\Rightarrow)$ $(c_1|c_2)|(c_1|c_2) \leq c_3$ olsun. O zaman $(sBL - 1)$, $(sBL - 3)$, (S1) ve (S3)'den

$$\begin{aligned}
 (c_1|c_2)|(c_1|c_2) &= ((c_1|c_2)|(c_1|c_2)) \wedge c_3 \\
 &= (((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_3|c_3)))| \\
 &\quad (((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_3|c_3))) \\
 &= (c_2|((c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))))| \\
 &\quad (c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))))| \\
 &\quad (c_2|((c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))))| \\
 &\quad (c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))) \quad (*_1)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(sBL - 3)$, $(S1)$, $(S3)$, $(*_1)$, (2) ve (5) koşullarından

$$\begin{aligned}
c_1 \wedge (c_2|(c_3|c_3)) &= (c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))| \\
&\quad (c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))) \\
&= (c_1|(((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_3|c_3)))| \\
&\quad (c_1|(((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_3|c_3))) \\
&= (c_1|(((c_2|((c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_1| \\
&\quad (c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_2|((c_1|(c_1|((c_2| \\
&\quad |(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2| \\
&\quad (c_3|c_3)))))|(c_3|c_3))|(c_1|(((c_2|((c_1|(c_1|((c_2| \\
&\quad (c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3| \\
&\quad c_3)))))|(c_2|((c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))| \\
&\quad (c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_3|c_3))) \\
&= (c_1|(((c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_1|(c_1|((c_2| \\
&\quad |(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))) \\
&\quad |(c_1|(((c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_1|(c_1|((c_2| \\
&\quad |(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))) \\
&= (c_1|((c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|((c_1|((c_2|(c_3|c_3))| \\
&\quad (c_2|(c_3|c_3)))))|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_1| \\
&\quad ((c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))|((c_1|((c_2|(c_3|c_3)) \\
&\quad |(c_2|(c_3|c_3)))))|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))) \\
&= (c_1|1)|(c_1|1) \\
&= c_1
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $(sBL - 1)$ 'den $c_1 \leq c_2|(c_3|c_3)$ sonuçlandırılır.

$(\Leftarrow)$ $c_1 \leq c_2|(c_3|c_3)$ olsun. O zaman $(sBL - 1)$ ve $(sBL - 3)$ 'den

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_1 \wedge (c_2|(c_3|c_3)) \\
&= (c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))) \\
&\quad |(c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))) \quad (*_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $(sBL - 3)$, $(S1)$, $(S3)$ ve $(*_2)$ 'den

$$\begin{aligned}
((c_1|c_2)|(c_1|c_2)) \wedge c_3 &= (((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_3|c_3)))| \\
&\quad (((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_3|c_3))) \\
&= (c_2|((c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))))| \\
&\quad (c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))))| \\
&\quad (c_2|((c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))))))| \\
&\quad (c_1|(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))))) \\
&= (c_1|c_2)|(c_1|c_2)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $(sBL - 1)$ 'den $(c_1|c_2)|(c_1|c_2) \leq c_3$ sonucuna ulaşılır.

7. $c_1 \leq c_2$ olduğunu varsayalım. O zaman (5) koşulundan ve $(S1)$ aksiyomundan $c_1 = (1|c_1)|(1|c_1) \leq c_2$ elde edilir. Böylece (6) koşulundan $1 \leq c_1|(c_2|c_2)$ olur. Her $c_1, c_2 \in C$ için $c_1|(c_2|c_2) \leq 1$ ve buradan $c_1|(c_2|c_2) = 1$ bulunur.

Diğer yönden, $c_1|(c_2|c_2) = 1$ olsun. Her $c_1 \in C$ için $c_1 \leq 1$ olduğuna göre $c_1 \leq 1 = c_1|(c_2|c_2)$ olur. Bu durumda (6) koşulundan ve $(S2)$ aksiyomundan $c_1 = (c_1|c_1)|(c_1|c_1) \leq c_2$ elde edilir.

8. Her $c_2 \in C$ için $c_2 \leq 1$ olduğuna göre (2), (6) ve $(S1)$ 'den

$$\begin{aligned}
c_2 \leq 1 &\Leftrightarrow c_2 \leq c_1|(c_1|c_1) \\
&\Leftrightarrow (c_1|c_2)|(c_1|c_2) \leq c_1 \\
&\Leftrightarrow c_1 \leq c_2|(c_1|c_1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

9. Her $c_1, c_2 \in C$ için, sırasıyla, (6) koşulu, $(S2)$ ve $(S1)$ kullanılarak $(c_1|c_2)|(c_1|c_2) \leq (c_1|c_2)|(c_1|c_2) \Leftrightarrow c_1 \leq (c_1|c_2)|c_2$ elde edilir.

10. (a) Her $c_1 \in C$ için $c_1 \leq c_1$ olduğuna göre, sırasıyla $(S2)$, $(S1)$ ve (6) koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
c_1 \leq c_1 &\Leftrightarrow c_1 \leq (c_1|(c_2|c_2))|(c_1|c_1) \\
&\Leftrightarrow (c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))) \leq c_1
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

- (b) Her $c_1, c_2 \in C$ için $c_1|(c_2|c_2) \leq c_1|(c_2|c_2)$ olduğuna göre (6) koşulu ve (S1) aksiyomundan $c_1|(c_2|c_2) \leq c_1|(c_2|c_2) \Leftrightarrow (c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))) \leq c_2$ olur.

11. $c_1 \leq c_2$ olduğunu kabul edelim.

- (i) (10(b)) koşulundan $(c_3|(c_3|(c_1|c_1))|(c_3|(c_3|(c_1|c_1)))) \leq c_1 \leq c_2$ olur.

O zaman (S1) ve (6) koşulundan $c_3|(c_1|c_1) \leq c_3|(c_2|c_2)$ elde edilir.

- (ii) (9) koşulundan $c_1 \leq c_2 \leq (c_2|c_3)|c_3$ olduğuna göre (S1), (S2) ve (6) koşulundan $(c_1|c_3)|(c_1|c_3) \leq (c_2|c_3)|(c_2|c_3)$ bulunur.

- (iii) (ii) şikkından ve (10(b)) koşulundan $c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) \leq c_2|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) \leq c_3$ elde edilir. O zaman (S1) ve (6) koşulundan $c_2|(c_3|c_3) \leq c_1|(c_3|c_3)$ sonucuna ulaşılır.

12. (10(b)) koşulu gereği $(c_3|(c_3|(c_1|c_1))|(c_3|(c_3|(c_1|c_1)))) \leq c_1$ ve (11(i)) koşulundan $c_1|(c_2|c_2) \leq ((c_3|(c_3|(c_1|c_1))|(c_3|(c_3|(c_1|c_1))))|(y|y))$ olur. Bu durumda (S1) ve (S3) aksiyomlarından $c_1|(c_2|c_2) \leq (c_3|(c_1|c_1))|((c_3|(c_2|c_2))|(c_3|(c_2|c_2)))$ elde edilir.

13. (10(b)) koşulundan $(c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))) \leq c_2$ ve (11(i)) koşulu gereği $c_2|(c_3|c_3) \leq ((c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2))))|(c_3|c_3))$ bulunur. Böylece, (S1) ve (S3) aksiyomlarından $c_2|(c_3|c_3) \leq (c_1|(c_2|c_2))|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3)))$ elde edilir. Bu durumda, (6) koşulu ve (S1) aksiyomundan $c_1|(c_2|c_2) \leq (c_2|(c_3|c_3))|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3)))$ sonucuna ulaşılır.

14. $c_1, c_2 \leq c_1 \vee c_2$ olduğuna göre (11(ii)) koşulu gereği $(c_1|c_3)|(c_1|c_3), (c_2|c_3)|(c_2|c_3) \leq ((c_1 \vee c_2)|c_3)|((c_1 \vee c_2)|c_3)$ olur. O zaman

$$((c_1|c_3)|(c_1|c_3)) \vee ((c_2|c_3)|(c_2|c_3)) \leq ((c_1 \vee c_2)|c_3)|((c_1 \vee c_2)|c_3)$$

elde edilir. Ayrıca, $(c_1|c_3)|(c_1|c_3), (c_2|c_3)|(c_2|c_3) \leq ((c_1|c_3)|(c_1|c_3)) \vee ((c_2|c_3)|(c_2|c_3))$ olduğundan (6) koşulu gereği $c_1, c_2 \leq c_3|(((c_1|c_3)|(c_1|c_3)) \vee ((c_2|c_3)|(c_2|c_3)))|(((c_1|c_3)|(c_1|c_3)) \vee ((c_2|c_3)|(c_2|c_3)))$ bulunur. O halde $c_1 \vee c_2 \leq c_3|(((c_1|c_3)|(c_1|c_3)) \vee ((c_2|c_3)|(c_2|c_3)))|(((c_1|c_3)|(c_1|c_3)) \vee ((c_2|c_3)|(c_2|c_3)))$ olur. O halde (6) koşulundan $((c_1 \vee c_2)|c_3)|((c_1 \vee c_2)|c_3) \leq ((c_1|c_3)|(c_1|c_3)) \vee ((c_2|c_3)|(c_2|c_3))$ sonuçlandırılır.

15. (8) ve (9) koşulları kullanılarak $c_1, c_2 \leq (c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)$ ve $c_1, c_2 \leq (c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)$ elde edilir. Bu durumda $c_1, c_2 \leq ((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \wedge ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))$

$((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))$ ve buradan $c_1 \vee c_2 \leq ((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \wedge ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))$ bulunur. Ayrıca, (S1) aksiyomu, (5), (8), (11(ii)), (14) koşulları ve $(sBL - 3) - (sBL - 4)$ 'den

$$\begin{aligned}
& ((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \wedge ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)) \\
&= (((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \wedge ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)))| \\
& \quad ((c_1|(c_2|c_2)) \vee (c_2|(c_1|c_1)))|(((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \\
& \quad \wedge ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)))|((c_1|(c_2|c_2)) \vee (c_2|(c_1|c_1)))) \\
&= (((c_1|(c_2|c_2))|(((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \wedge ((c_2|(c_1|c_1))| \\
& \quad (c_1|c_1))))|((c_1|(c_2|c_2))|(((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \wedge ((c_2| \\
& \quad (c_1|c_1))|(c_1|c_1))))|(((c_2|(c_1|c_1))|(((c_1|(c_2|c_2))| \\
& \quad (c_2|c_2)) \wedge ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))))|((c_2|(c_1|c_1))| \\
& \quad (((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \wedge ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)))))) \\
&\leq (((c_1|(c_2|c_2))|((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)))|((c_1|(c_2|c_2))| \\
& \quad ((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)))) \vee (((c_2|(c_1|c_1))|((c_2|(c_1| \\
& \quad c_1))|(c_1|c_1)))|((c_2|(c_1|c_1))|((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)))) \\
&= ((c_1|(c_2|c_2)) \wedge c_2) \vee ((c_2|(c_1|c_1)) \wedge c_1) \\
&= c_2 \vee c_1 \\
&= c_1 \vee c_2
\end{aligned}$$

elde edilir.

□

Lemma 5.1. *C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman her $c_1, c_2 \in C$ için $(c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) = (c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)$ 'dir.*

İspat. Önerme 5.1 (13), (S1) ve (S2) aksiyomlarından

$$\begin{aligned}
(c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) &\leq (c_2|(c_1|c_1))|(((c_1|(c_2|c_2))|(c_1|c_1))|((c_1|(c_2|c_2))|(c_1|c_1))) \\
&= (c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $(c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1) \leq (c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)$ olur. O zaman her $c_1, c_2 \in C$ için $(c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) = (c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)$ elde edilir. □

Sonuç 5.1. *C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman her $c_1, c_2 \in C$ için*

$$c_1 \vee c_2 = (c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)$$

dir.

Lemma 5.2. *C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman her $c_1, c_2 \in C$ için $((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) = c_1|(c_2|c_2)$ 'dir.*

İspat. Önerme 5.1 (9)'dan $c_1|(c_2|c_2) \leq ((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)$ bulunur. Sırasıyla, Önerme 5.1 (12) ve (1)-(3)'den

$$\begin{aligned} ((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) &\leq (c_1|(((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_1|(c_2|c_2)) \\ &\quad |(c_2|c_2))))|((c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_2|c_2))) \\ &= ((c_1|(c_2|c_2))|((c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_2| \\ &\quad c_2))))|((c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_2|c_2))) \\ &= (c_1|(c_2|c_2)). \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $c_1, c_2 \in C$ için $((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) = c_1|(c_2|c_2)$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Lemma 5.3. *C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için $c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))) = (c_1|(c_2|c_2))|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3)))$ 'dir.*

İspat. Önerme 5.1 (8)'den $c_2 \leq c_1|(c_2|c_2)$ olduğundan, sırasıyla, Önerme 5.1 (11(iii)) ve (1)'den $(c_1|(c_2|c_2))|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3))) \leq c_2|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3))) = c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))$ olur. O zaman, sırasıyla, Önerme 5.1 (1), (12), (S3) ve (S2) aksiyomlarından

$$\begin{aligned} c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) &= c_2|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3))) \\ &\leq (c_1|(c_2|c_2))|((c_1|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3| \\ &\quad c_3))))|((c_1|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3)))))) \\ &= (c_1|(c_2|c_2))|(((c_1|c_1)|(c_1|c_1))|(c_3 \\ &\quad |c_3))|(((c_1|c_1)|(c_1|c_1))|(c_3|c_3))) \\ &= (c_1|(c_2|c_2))|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3))) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) = (c_1|(c_2|c_2))|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3)))$$

elde edilir. $\square$

5.1 Sheffer stroke BL-cebirlerinin Süzgeçleri

Bu kısımda, Sheffer stroke BL-cebirlerinin farklı süzgeçleri tanımlanarak aralarındaki benzer ve farklı yönler ortaya konmaya çalışılacaktır.

Tanım 5.2. C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman

$(SF - 1)$ $c_1, c_2 \in P$ ise o zaman $(c_1|c_2)|(c_1|c_2) \in P$ ve

$(SF - 2)$ $c_1 \in P$ ve $c_1 \leq c_2$ ise o zaman $c_2 \in P$

koşullarını sağlayan C 'nin boştan farklı bir P altkümesine C 'nin bir süzgeci denir.

Örnek 5.3. Örnek 5.2'de verilen C Sheffer stroke BL-cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman C 'nin kendisi, $\{1\}$, $\{a, d, e, 1\}$ ve $\{c, e, f, 1\}$ altkümeleri C 'nin süzgeçleridir.

Önerme 5.2. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve P , C 'nin boştan farklı bir altkümesi olsun. O zaman P 'nin C 'nin bir süzgeci olması için gerek ve yeter koşul

$(SF - 3)$ $1 \in P$ ve

$(SF - 4)$ $c_1 \in P$ ve $c_1|(c_2|c_2) \in P$ ise o zaman $c_2 \in P$

olmasıdır.

Lemma 5.4. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve P , C 'nin bir süzgeci olsun. O zaman her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için $c_3|(((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))|((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))) \in P$ ve $c_3 \in P$ ise o zaman $(c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) \in P$ 'dir.

İspat. P , C 'nin bir süzgeci olsun. O zaman Lemma 5.1'den $c_3|(((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))) = c_3|(((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))|((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))) \in P$ ve $c_3 \in P$ olduğundan $(SF - 4)$ gereği $(c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) \in P$ elde edilir. $\square$

Lemma 5.5. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve P , C 'nin bir süzgeci olsun. O zaman her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için

(a) $c_3|(((c_2|(c_1|c_1))|(c_2|(c_1|c_1))) \in P$ ve $c_3 \in P$ ise o zaman $((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_1|c_1) \in P$,

(b) $c_1|(((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) \in P$ ve $c_1|(c_2|c_2) \in P$ ise o zaman $c_1|(c_3|c_3) \in P$,

- (c) $c_1|(((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|c_2))|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|c_2))) \in P$ ve $c_1 \in P$ ise o zaman $c_2 \in P$ 'dir.

İspat. P nin C 'nin bir süzgeci olduğunu varsayalım.

- (a) $c_3|((c_2|(c_1|c_1))|(c_2|(c_1|c_1))) \in P$ ve $c_3 \in P$ olsun. O zaman Lemma 5.1, Lemma 5.2 ve $(SF - 4)$ 'den

$$\begin{aligned} ((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_1|c_1) &= ((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))|(c_1|c_1) \\ &= c_2|(c_1|c_1) \in P \end{aligned}$$

elde edilir.

- (b) $c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) \in P$ ve $c_1|(c_2|c_2) \in P$ olsun. O zaman Lemma 5.3'den $(c_1|(c_2|c_2))|((c_1|(c_3|c_3))|(c_1|(c_3|c_3))) = c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) \in P$ olur. O halde $(SF - 4)$ 'den $c_1|(c_3|c_3) \in P$ elde edilir.

- (c) $c_1|(((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|c_2))|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|c_2))) \in P$ ve $c_1 \in P$ olsun. Bu durumda $(S1)$ ve $(S2)$ aksiyomlarından

$$\begin{aligned} c_1|(((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|c_2))|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|c_2))) \\ = c_1|(((c_2|c_2)|(c_2|(c_3|c_3)))|((c_2|c_2)|(c_2|(c_3|c_3)))) \\ = c_1|(c_2|c_2) \in P \end{aligned}$$

olur. O zaman $(SF - 4)$ 'den $c_2 \in P$ sonucuna ulaşılır.

□

Lemma 5.6. C bir Sheffer stroke BL-cebir ve P , C nin bir süzgeci olsun. O zaman her $c \in C$ için $c \vee (c|c) \in P$ dir.

İspat. C bir Sheffer stroke BL-cebiri olmak üzere P , C 'nin bir süzgeci ve $c \in C$ olsun. O zaman Sonuç 5.1, $(S1) - (S2)$, Önerme 5.1 (2) ve $(SF - 3)$ 'den

$$\begin{aligned} c \vee (c|c) &= (c|((c|c)|(c|c)))|((c|c)|(c|c)) \\ &= (c|(c|c)) \\ &= 1 \in P \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

□

Tanım 5.3. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve P , C 'nin bir süzgeci olsun. Eğer her $c \in C$ için $c \in P$ ya da $c|c \in P$ ise o zaman P 'ye C 'nin bir ultra süzgeci denir.

Örnek 5.4. Örnek 5.2'de sunulan C Sheffer stroke BL-cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman C 'nin $\{a, d, e, 1\}$ süzgeci ultra olmasına rağmen $\{1\}$ süzgeci ultra değildir.

Lemma 5.7. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve P , C 'nin bir süzgeci olsun. O zaman P 'nin C 'nin ultra süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $c_1, c_2 \in C$ için $c_1 \notin P$ ve $c_2 \notin P$ iken $c_1|(c_2|c_2) \in P$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ P 'nin C 'nin bir ultra süzgeci olduğunu kabul edelim. $c_1 \notin P$ ve $c_2 \notin P$ olsun. O zaman $c_1|c_1 \in P$ ve $c_2|c_2 \in P$ olur. Önerme 5.1 (8) ve (S1) – (S2) aksiyomlarından $c_1|c_1 \leq (c_2|c_2)|((c_1|c_1)|(c_1|c_1)) = c_1|(c_2|c_2)$ olduğuna göre $c_1|(c_2|c_2) \in P$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Her $c_1, c_2 \in C$ için $c_1 \notin P$ ve $c_2 \notin P$ iken $c_1|(c_2|c_2) \in P$ olacak şekilde P , C 'nin bir süzgeci olsun. Bir $c \in C$ için $c|c \notin P$ ve $c \notin P$ olduğunu varsayalım. O zaman (S2) aksiyomundan $(c|c)|(c|c) = c \in P$ olur ve bu bir çelişkidir. Bu durumda her $c \in C$ için $c|c \in P$ veya $c \in P$ dir. O halde P , C 'nin bir ultra süzgecidir. $\square$

Lemma 5.8. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve P , C 'nin bir süzgeci olsun. O zaman P 'nin C 'nin bir ultra süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $c_1, c_2 \in C$ için $c_1 \vee c_2 \in P$ ise $c_1 \in P$ ya da $c_2 \in P$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ P 'nin C 'nin bir ultra süzgeci ve $c_1 \vee c_2 \in P$ olduğunu kabul edelim. $c_1 \notin P$ ve $c_2 \notin P$ olsun. O zaman Lemma 5.7'den $c_1|(c_2|c_2) \in P$ elde edilir. Sonuç 5.1'den $(c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2) = c_1 \vee c_2 \in P$ olduğuna göre (SF – 4) gereği $c_2 \in P$ olup bu bir çelişkidir. O halde $c_1 \in P$ ya da $c_2 \in P$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ Her $c_1, c_2 \in C$ için $c_1 \vee c_2 \in P$ ise $c_1 \in P$ ya da $c_2 \in P$ olacak şekilde P 'nin C 'nin bir süzgeci olduğunu varsayalım. Lemma 5.6'dan her $c \in C$ için $c \vee (c|c) \in P$ olduğundan $c \in P$ ya da $c|c \in P$ elde edilir. O halde P , C 'nin bir ultra süzgecidir. $\square$

5.2 Sheffer stroke BL-cebirlerinin Fuzzy Süzgeçleri

Bu kısımda, Sheffer stroke BL-cebirlerinin çeşitli fuzzy süzgeçleri tanıtılarak özellikleri incelenecektir.

Tanım 5.4. C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman her $c, c_1, c_2 \in C$ için

1. $f(c) \leq f(1)$ ve
2. $f(c_1) \wedge f(c_1|(c_2|c_2)) \leq f(c_2)$

koşullarını sağlayan C 'nin bir f fuzzy altkümesine C 'nin bir fuzzy süzgeci denir.

Örnek 5.5. Örnek 5.1'de sunulan C Sheffer stroke BL-cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman $f(0) = f(u) = f(v) = 0,5$ ve $f(1) = 1$ ile tanımlı C 'nin f fuzzy altkümesi C 'nin bir fuzzy süzgecidir.

Önerme 5.3. C bir Sheffer stroke BL-cebir, ve f , C 'nin bir fuzzy altkümesi olsun. O zaman f 'nin C 'nin fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için $c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) = 1$ ise $f(c_1) \wedge f(c_2) \leq f(c_3)$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ f 'nin C 'nin fuzzy süzgeci ve $c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) = 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\begin{aligned} f(c_1) &= f(c_1) \wedge f(1) \\ &= f(c_1) \wedge f(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))) \\ &\leq f(c_2|(c_3|c_3)) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} f(c_1) \wedge f(c_2) &\leq f(c_2|(c_3|c_3)) \wedge f(c_2) \\ &= f(c_2) \wedge f(c_2|(c_3|c_3)) \\ &\leq f(c_3) \end{aligned}$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3))) = 1$ ise $f(c_1) \wedge f(c_2) \leq f(c_3)$ olacak şekilde f , C 'nin bir fuzzy altkümesi olsun. Hipotezde c_2 yerine c_1 ve c_3

yerine 1 yazılırsa Önerme 5.1 (4)'den $c_1|((c_1|(1|1))|(c_1|(1|1))) = 1$ ise $f(c_1) = f(c_1) \wedge f(c_1) \leq f(1)$ elde edilir. Ayrıca hipotezde, eş zamanlı olarak, c_2 yerine $c_1|(c_2|c_2)$ ve c_3 yerine c_2 yazılırsa, (S1), (S3) ve Önerme 5.1 (2)'den $c_1|(((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))) = 1$ ise $f(c_1) \wedge f(c_1|(c_2|c_2)) \leq f(c_2)$ elde edilir. O halde f , C 'nin bir fuzzy süzgecidir. $\square$

Sonuç 5.2. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve f , C nin bir fuzzy altkütmesi olsun. O zaman f 'nin C 'nin bir fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için $(c_1|c_2)|(c_1|c_2) \leq c_3$ ise $f(c_1) \wedge f(c_2) \leq f(c_3)$ olmasıdır.

Önerme 5.4. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve f , C 'nin bir fuzzy altkütmesi olsun. O zaman f 'nin C 'nin bir fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul

1. f nin sıra-koruyan ve
2. Her $c_1, c_2 \in C$ için $f(c_1) \wedge f(c_2) \leq f((c_1|c_2)|(c_1|c_2))$

olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ f 'nin C 'nin bir fuzzy süzgeci ve $c_1 \leq c_2$ olduğunu kabul edelim. O zaman Önerme 5.1 (7)'den $c_1|(c_2|c_2) = 1$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} f(c_1) &= f(c_1) \wedge f(1) \\ &= f(c_1) \wedge f(c_1|(c_2|c_2)) \\ &\leq f(c_2) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca, (S1) – (S3) ve Önerme 5.1 (2)'den

$$\begin{aligned} &c_1|((c_2|(((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_1|c_2)|c_2)))| \\ &(c_2|(((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_1|c_2)|c_2))) \\ &= c_1|((c_2|(c_1|c_2))|(c_2|(c_1|c_2))) \\ &= ((c_1|c_2)|(c_1|c_2))|(c_1|c_2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğuna göre Önerme 5.3 gereği $f(c_1) \wedge f(c_2) \leq f((c_1|c_2)|(c_1|c_2))$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ f 'nin C 'nin (1) ve (2) koşullarını sağlayan bir fuzzy altkütmesi olduğunu varsayalım.. (1) koşulundan ve her $c \in C$ için $c \leq 1$ olduğundan $f(c) \leq f(1)$ olur. Ayrıca, Önerme 5.1 (9)'dan $c_1 \leq (c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)$ olduğuna göre Önerme 5.1 (6) kullanılarak $(c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))) \leq c_2$ elde edilir. O zaman (1) ve (2) koşullarından $f(c_1) \wedge f(c_1|(c_2|c_2)) \leq$

$f((c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2))))) \leq f(c_2)$ sonucuna ulaşılır. O halde f , C 'nin bir fuzzy süzgecidir. $\square$

Sonuç 5.3. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve f , C 'nin bir sıra-koruyan fuzzy altkütmesi olsun. O zaman f 'nin C 'nin bir fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $c_1, c_2 \in C$ için $f((c_1|c_2)|(c_1|c_2)) = f(c_1) \wedge f(c_2)$ olmasıdır.

İspat. f 'nin C 'nin bir fuzzy süzgeci olduğunu varsayalım. Önerme 5.4 (2)'den dolayı, her $c_1, c_2 \in C$ için $f((c_1|c_2)|(c_1|c_2)) \leq f(c_1) \wedge f(c_2)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $c \in C$ için $c \leq 1$ olduğuna göre (S1), Önerme 5.1 (2) ve (6) kullanılarak her $c_1, c_2 \in C$ için $(c_1|c_2)|(c_1|c_2) \leq c_1, c_2$ bulunur. Ayrıca f sıra-koruyan olduğuna göre $f((c_1|c_2)|(c_1|c_2)) \leq f(c_1), f(c_2)$ ve buradan $f((c_1|c_2)|(c_1|c_2)) \leq f(c_1) \wedge f(c_2)$ elde edilir. Yeter koşul Önerme 5.4'ten elde edilir. $\square$

Sonuç 5.4. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve f , C 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman her $c_1, c_2 \in C$ için $f(c_1 \wedge c_2) = f(c_1) \wedge f(c_2)$ 'dir.

İspat. f , C 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. $c_1 \wedge c_2 \leq c_1, c_1 \wedge c_2 \leq c_2$ ve f sıra-koruyan olduğuna göre $f(c_1 \wedge c_2) \leq f(c_1)$ ve $f(c_1 \wedge c_2) \leq f(c_2)$ ve buradan $f(c_1 \wedge c_2) \leq f(c_1) \wedge f(c_2)$ elde edilir. Önerme 5.1 (8)'den $c_2 \leq c_1|(c_2|c_2)$ olduğuna göre Önerme 5.1 (11(ii)), (S1) ve (sBL - 3)'den $(c_1|c_2)|(c_1|c_2) \leq (c_1|(c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))) = c_1 \wedge c_2$ olur. Böylece Sonuç 5.2'den $f(c_1) \wedge f(c_2) \leq f(c_1 \wedge c_2)$ bulunur. O halde $f(c_1 \wedge c_2) = f(c_1) \wedge f(c_2)$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 5.1. C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve f , C 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için

$$(a) \quad f(c_1|(c_2|c_2)) = f(1) \text{ ise o zaman } f(c_1) \leq f(c_2),$$

$$(b) \quad f(c_3|(((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))|((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)))) \wedge f(c_3) \leq f((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)),$$

$$(c) \quad f(c_3|((c_2|(c_1|c_1))|(c_2|(c_1|c_1)))) \wedge f(c_3) \leq f(((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_1|c_1)) \text{ ve}$$

$$(d) \quad f(c_1|((c_2|(c_3|c_3))|(c_2|(c_3|c_3)))) \wedge f(c_1|(c_2|c_2)) \leq f(c_1|(c_3|c_3)) \text{ 'dir.}$$

İspat. f , C 'nin bir fuzzy süzgeci olsun.

(a) Sırasıyla Tanım 5.4 (1), Sonuç 5.3, ($sBL - 3$) ve Sonuç 5.4'den

$$\begin{aligned}
 f(c_1) &= f(c_1) \wedge f(1) \\
 &= f(c_1) \wedge f(c_1|(c_2|c_2)) \\
 &= f(((c_1|(c_1|(c_2|c_2))))|(c_1|(c_1|(c_2|c_2)))) \\
 &= f(c_1 \wedge c_2) \\
 &= f(c_1) \wedge f(c_2)
 \end{aligned}$$

olduğuna göre $f(c_1) \leq f(c_2)$ elde edilir.

(b) Tanım 5.4 (2) ve Lemma 5.1'den ispatlanır.

(c) Sırasıyla Tanım 5.4 (2), Lemma 5.2 ve Lemma 5.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
 f(c_3|((c_2|(c_1|c_1))|(c_2|(c_1|c_1)))) \wedge f(c_3) &\leq f(c_2|(c_1|c_1)) \\
 &= f(((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)) \\
 &= f(((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2))|(c_1|c_1))
 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(d) Lemma 5.3 ve Tanım 5.4 (2)'den elde edilir.

□

Tanım 5.5. C bir Sheffer stroke BL -cebiri olsun. O zaman her $c \in C$ için

$$f(c) = f(1) \text{ ya da } f(c|c) = f(1)$$

koşulunu sağlayan C 'nin bir f fuzzy süzgecine C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci denir.

Örnek 5.6. Örnek 5.2'de verilen C Sheffer stroke BL -cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman C 'nin $f(a) = f(d) = f(e) = f(1) = 1$ ve $f(b) = f(c) = f(f) = f(0) = 0$ ile tanımlı bir f fuzzy süzgeci C 'nin bir fuzzy ultra süzgecidir.

Teorem 5.2. C bir Sheffer stroke BL -cebiri olsun. O zaman C 'nin bir f fuzzy altkümesinin C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $c_1, c_2 \in C$ için $f(c_1) \neq f(1)$ ve $f(c_2) \neq f(1)$ ise $f(c_1|(c_2|c_2)) = f(1)$ ve $f(c_2|(c_1|c_1)) = f(1)$ olmasıdır.

İspat. Her $c_1, c_2 \in C$ için $f(c_1) \neq f(1)$ ve $f(c_2) \neq f(1)$ ise $f(c_1|(c_2|c_2)) = f(1)$ ve $f(c_2|(c_1|c_1)) = f(1)$ olacak şekilde f 'nin C 'nin bir fuzzy altkümesi olduğunu kabul edelim. Eğer herhangi bir $c \in C$ için $f(c) \neq f(1)$ ve $f(1|1) \neq f(1)$ ise o zaman Önerme 5.1 (4)-(5) ve (S1) – (S2) aksiyomlarından $f(c|c) = f(c|1) = f(c|((1|1)|(1|1))) = f(1)$ ve $f(1) = f((c|c)|(1|1)) = f((1|1)|(c|c)) = f(1)$ olur. Benzer şekilde, $f(c|c) \neq f(1)$ ve $f(1|1) \neq f(1)$ ise o zaman $f(c) = f(1)$ elde edilir. O halde f , C 'nin bir fuzzy ultra süzgecidir.

Diğer yönden, f 'nin C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci olduğunu varsayalım. $f(c_1) \neq f(1)$ ve $f(c_2) \neq f(1)$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in C$ olsun. O zaman $f(c_1|c_1) = f(1)$ ve $f(c_2|c_2) = f(1)$ olur. Bu durumda (S1), (S3), Önerme 5.1 (2) ve (4)'den $(c_1|c_1)|((c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_2|c_2))) = (c_2|c_2)|((c_1|(c_1|c_1))|(c_1|(c_1|c_1))) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1) \wedge f(1) \\ &= f(c_1|c_1) \wedge f((c_1|c_1)|((c_1|(c_2|c_2))|(c_1|(c_2|c_2)))) \\ &\leq f(c_1|(c_2|c_2)) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $f(c_1|(c_2|c_2)) = f(1)$ ve benzer şekilde $f(c_2|(c_1|c_1)) = f(1)$ sonuçlandırılır. $\square$

Teorem 5.3. C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman C 'nin bir f fuzzy altkümesinin C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $c_1, c_2 \in C$ için $f(c_1 \vee c_2) \leq f(c_1) \vee f(c_2)$ olmasıdır.

İspat. f 'nin C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci olduğunu varsayalım. Eğer $f(c_1) = f(1)$ ve $f(c_2) = f(1)$ ise o zaman ispat biter. $f(c_1) \neq f(1)$ ya da $f(c_2) \neq f(1)$ olsun. O zaman Teorem 5.2'den $f(c_1|(c_2|c_2)) = f(1)$ ve $f(c_2|(c_1|c_1)) = f(1)$ bulunur. Sonuç 5.1'den

$$\begin{aligned} f(c_1 \vee c_2) &= f(1) \wedge f(c_1 \vee c_2) \\ &= f(c_1|(c_2|c_2)) \wedge f((c_1|(c_2|c_2))|(c_2|c_2)) \\ &\leq f(c_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f(c_1 \vee c_2) &= f(c_2 \vee c_1) \\
&= f(1) \wedge f(c_2 \vee c_1) \\
&= f(c_2|(c_1|c_1)) \wedge f((c_2|(c_1|c_1))|(c_1|c_1)) \\
&\leq f(c_1)
\end{aligned}$$

olduğundan $f(c_1 \vee c_2) \leq f(c_1), f(c_2)$ elde edilir. O halde $f(c_1 \vee c_2) \leq f(c_1) \vee f(c_2)$ sonucuna ulaşılır.

Diğer yönden, her $c_1, c_2 \in C$ için $f(c_1 \vee c_2) \leq f(c_1) \vee f(c_2)$ olacak şekilde f 'nin C 'nin bir fuzzy altkütmesi olduğunu kabul edelim. Sırasıyla, Önerme 5.1 (2), (S2) ve Sonuç 5.1'den

$$\begin{aligned}
f(1) &= f(c|(c|c)) \\
&= f(((c|((c|c)|(c|c))))|((c|c)|(c|c))) \\
&= f(c \vee (c|c)) \\
&\leq f(c) \vee f(c|c),
\end{aligned}$$

ve buradan $f(c) \vee f(c|c) = f(1)$ olur. Bu durumda $f(c) = f(1)$ ya da $f(c|c) = f(1)$ elde edilir. O halde f , C 'nin bir fuzzy ultra süzgecidir. $\square$

Önerme 5.5. C bir Sheffer stroke BL-cebiri olsun. O zaman f 'nin C 'nin bir fuzzy süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $p \in (0, 1]$ için $f_p = \{c_1 \in C : p \leq f(c_1)\} \neq \emptyset$ kümesinin C 'nin bir süzgeci olmasıdır.

İspat. $f_p = \{c_1 \in C : p \leq f(c_1)\} \neq \emptyset$ olsun. f 'nin C 'nin bir fuzzy süzgeci olduğunu kabul edelim. O zaman $p \leq f(c)$ olacak şekilde bir $c \in C$ mevcuttur. $p \leq f(c) \leq f(1)$ olduğuna göre $1 \in f_p$ olur. $c_1, c_1|(c_2|c_2) \in f_p$ olsun. O zaman $p \leq f(c_1)$ ve $p \leq f(c_1|(c_2|c_2))$ elde edilir. $p \leq f(c_1) \wedge f(c_1|(c_2|c_2)) \leq f(c_2)$ olduğundan $c_2 \in f_p$ bulunur. O halde $f_p \neq \emptyset$, C 'nin bir süzgecidir.

Diğer yönden, C 'nin bir f fuzzy altkütmesi için $f_p \neq \emptyset$ 'nin C 'nin bir süzgeci olduğunu varsayalım. $f(c) > f(1)$ olacak şekilde bir $c \in C$ mevcut olsun. Eğer $p = \frac{f(c)+f(1)}{2} \in (0, 1]$ ise o zaman $f(1) < p < f(c)$ olur. Bu durumda $1 \notin f_p$ olur ve bu (SF-3) ile çelişir. Buradan her $c \in C$ için $f(c) \leq f(1)$ elde edilir. $f(c_2) < f(c_1) \wedge f(c_1|(c_2|c_2))$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in C$ olsun. $f(c_1) = \gamma$, $f(c_2) = \theta$ ve $f(c_1|(c_2|c_2)) = \lambda$ olmak üzere $\theta < \min(\gamma, \lambda)$ olur. Eğer $p = \lambda_1 =$

$\frac{1}{2}(\theta + \min(\gamma, \lambda)) \in (0, 1]$ ise o zaman $c_1 \in f_p$ ve $c_1|(c_2|c_2) \in f_p$ iken $c_2 \notin f_p$ olur ve bu $(SF-4)$ ile çelişir. Böylece her $c_1, c_2 \in C$ için $f(c_1) \wedge f(c_1|(c_2|c_2)) \leq f(c_2)$ elde edilir. O halde f , C 'nin bir fuzzy süzgecidir. $\square$

Teorem 5.4. *C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve f , C 'nin fuzzy süzgeci olsun. O zaman f 'nin C 'nin fuzzy ultra süzgeci olması için gerek ve yeter koşul her $p \in (0, 1]$ için $f_p \neq \emptyset$ kümesinin C 'nin bir ultra süzgeci olmasıdır.*

İspat. f 'nin C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci ve $f_p \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Önerme 5.5'ten her $p \in (0, 1]$ için $f_p \neq \emptyset$ kümesinin C 'nin bir süzgeci olduğu bilindiğinden f_p 'nin C 'nin bir ultra süzgeci olduğunu göstermek yeterlidir. $c_1 \vee c_2 \in f_p$ olsun. O zaman $p \leq f(c_1 \vee c_2)$ olur. Teorem 5.3'ten $p \leq f(c_1 \vee c_2) \leq f(c_1) \vee f(c_2)$ olduğuna göre $p \leq f(c_1)$ ya da $p \leq f(c_2)$ ve buradan $c_1 \in f_p$ ya da $c_2 \in f_p$ elde edilir. O halde f_p , C 'nin bir ultra süzgecidir.

Diğer yönden, f_p 'nin C 'nin bir ultra süzgeci olduğunu varsayalım. Önerme 5.5'ten f 'nin C 'nin bir fuzzy süzgeci olduğu bilindiğinden f 'nin C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır. $p = f(c_1 \vee c_2)$ olsun. O zaman $c_1 \vee c_2 \in f_p$ olduğuna göre Lemma 5.8'den $c_1 \in f_p$ ya da $c_2 \in f_p$ olur. Bu durumda $f(c_1 \vee c_2) = p \leq f(c_1)$ ya da $f(c_1 \vee c_2) \leq f(c_2)$ ve buradan $f(c_1 \vee c_2) \leq f(c_1) \vee f(c_2)$ elde edilir. O halde Teorem 5.3'ten f , C 'nin bir fuzzy ultra süzgecidir. $\square$

Sonuç 5.5. *C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve f , C 'nin bir fuzzy süzgeci olsun. O zaman f 'nin C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci olması için gerek ve yeter koşul $f_{f(1)}$ kümesinin C 'nin bir ultra süzgeci olmasıdır.*

Sonuç 5.6. *C bir Sheffer stroke BL-cebiri ve P , C 'nin boştan farklı bir altkümesi olsun. O zaman P 'nin C 'nin bir ultra süzgeci olması için gerek ve yeter koşul P 'nin karakteristik fonksiyonu χ_P 'nin C 'nin bir fuzzy ultra süzgeci olmasıdır.*

6 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, Sheffer stroke işlemi kullanılarak yeni cebirsel yapılar inşa edilmiş ve bu yapıların aksiyom sistemlerinin bağımsızlığı gösterilmiştir. Cayley tabloları ve Hasse diyagramları yardımıyla farklı örnekler oluşturularak bu yeni cebirsel yapıların farklı özellikleri incelenmiştir. Bu yapıların yarı-kafes ya da kafes oluşturup oluşturmadıklarını araştırmak için üzerlerinde kısmi sıralama bağıntıları tanımlanmıştır. Böylelikle Sheffer stroke işlemine sahip yapılar ile diğer cebirsel yapılar arasındaki bağlantılar ortaya konmaya çalışılmıştır.

Ayrıca, inşa edilen yeni Sheffer stroke cebir yapılarının altcebirleri, ideal-leri ya da süzgeçleri tanımlanmıştır ve bu yapıların süzgeç(ya da ideal)lerinin ailesinin bir kafes yapısı oluşturdukları gösterilmiştir. Her süzgecin bir altcebir olduğu kanıtlanmıştır ve bazı cebir yapılarının farklı süzgeçleri tanımlanarak özellikleri araştırılmıştır.

Bununla birlikte, Sheffer stroke işlemine sahip cebir yapılarının fuzzy süzgeçleri ve homomorfizmalarının tanımları verilmiştir. Süzgeçler yardımıyla fuzzy süzgeçler ve fuzzy süzgeçler yardımıyla da süzgeçler inşa edilerek bu kavramlar arasındaki geçişler net bir şekilde ortaya konmuştur. Homomorfizmalar ve fuzzy süzgeçler kullanılarak yeni fuzzy süzgeçler oluşturulmuş ve homomorfizmaların bahsi geçen kavramları ve cebir yapısının tüm özelliklerini koruduğu kanıtlanmıştır. Sheffer stroke cebir yapılarının süzgeçleri (veya fuzzy süzgeçleri) yardımıyla kongrüans bağıntıları tanımlanarak bu cebirsel yapıların bölüm grupları inşa edilmiş ve inşa edilen grupların bu cebirsel yapıların özelliklerine sahip oldukları gösterilmiştir.

Sonuç olarak, yapılan bu çalışmalar daha az sayıda, daha kolay denetlenebilir, daha anlaşılır ve daha basit aksiyom sistemlerine sahip yeni cebirsel yapılar inşa edilmesine olanak sağlayarak bu yapıların teorik altyapı olarak yaygın biçimde kullanıldığı karmaşık bilgisayar sistemleri, yapay zeka ve insan düşünce ve davranışlarını taklit eden cihazların gelişmesine büyük ölçüde katkıda bulunacağı öngörülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abbott, J.**, 1967, Implicational algebras, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie*, 11(1), 3–23.
- Birkhoff, G.**, 1940, *Lattice theory*, volume 25, American Mathematical Soc.
- Boole, G.**, 1854, *An investigation of the laws of thought: on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, Dover Publications.
- Borumand Saeid, A.** and **Motamed, S.**, 2009a, Normal filters in BL-algebras, *World Applied Sciences Journall*, 7, 70–76.
- Borumand Saeid, A.** and **Motamed, S.**, 2009b, Some results in BL-algebras, *Mathematical Logic Quarterly*, 55(6), 649–658.
- Botur, M.** and **Halaš, R.**, 2009, Commutative basic algebras and non-associative fuzzy logics, *Archive for Mathematical Logic*, 48(3), 243–255.
- Büning, H.K.** and **Lettmann, T.**, 1999, *Propositional logic: deduction and algorithms*, volume 48, Cambridge University Press.
- Busneag, D.**, 1985, A note on deductive systems of a Hilbert algebra, *Kobe Journal Mathematics*, 2, 29–35.
- Busneag, D.**, 1988, Hilbert algebras of fractions and maximal Hilbert algebras of quotients, *Kobe Journal Mathematics*, 5, 161–172.
- Chajda, I.**, 2005, Sheffer operation in ortholattices, *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 44(1), 19–23.
- Chajda, I.**, **Halaš, R.**, and **Länger, H.**, 2019, Operations and structures derived from non-associative MV-algebras, *Soft computing*, 23(12), 3935–3944.
- Chajda, I.** and **Kühr, J.**, 2007a, A non-associative generalization of MV-algebras, *Mathematica Slovaca*, 57(4), 301–312.
- Chajda, I.** and **Kühr, J.**, 2007b, A non-associative generalization of MV-algebras, *Mathematica Slovaca*, 57(4), 301–312.

- Chajda, I.** and **Länger, H.**, 2017, Properties of non-associative MV-algebras, *Math Slov*, 67, 1095–1104.
- Chang, C.C.**, 1958, Algebraic analysis of many valued logics, *Transactions of the American Mathematical society*, 88(2), 467–490.
- Chang, C.C.**, 1959, A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms, *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(1), 74–80.
- Cignoli, R.L., d'Ottaviano, I.M., and Mundici, D.**, 2013, *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, volume 7, Springer Science & Business Media.
- Cornish, W.H.**, 1980, On positive implicative BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes*, 8, 455–468.
- Di Nola, A., Georgescu, G., and Iorgulescu, A.**, 2002, Pseudo-BL algebras: part I, *Multiple Valued Logic*, 8(5/6), 673–716.
- Diego, A.**, 1966, Sur les algèbres de Hilbert, Ed. Hermann, *Collection de Logique Mathématique*, 21(Série A), 1–54.
- Georgescu, G. and Iorgulescu, A.**, 2000, Pseudo-BL algebras: a noncommutative extension of BL algebras, in *Abstracts of The Fifth International Conference FSTA 2000, Slovakia, February*.
- Grätzer, G.**, 2002, *General lattice theory*, Springer Science & Business Media.
- Hájek, P.**, 2013, *Metamathematics of fuzzy logic*, volume 4, Springer Science & Business Media.
- Haveshki, M., Borumand Saeid, A., and Eslami, E.**, 2006, Some types of filters in BL algebras, *Soft computing*, 10(8), 657–664.
- Haveshki, M. and Eslami, E.**, 2008, n-fold filters in BL-algebras, *Mathematical Logic Quarterly*, 54(2), 176–186.
- Henkin, L.**, 1950, An algebraic characterization of quantifiers, *Fundamenta Mathematicae*, 37(1), 63–74.

- Idziak, P.M.**, 1984, Lattice operations in BCK-algebras, *Mathematica Japonica*, 29(1), 839–846.
- Iorgulescu, A.**, 2008, *Algebras of logic as BCK algebras*.
- Iseki, K.** and **Tanaka, S.**, 1978, An introduction to the theory of BCK-algebras, *Mathematica Japonica*, 23(1), 1–26.
- Jun, Y.B.**, 1996a, Commutative Hilbert algebras, *Soochow Journal of Mathematics*, 22(4), 477–484.
- Jun, Y.B.**, 1996b, Deductive systems of Hilbert algebra, *Mathematica japonicae*, 43, 51–54.
- Kondo, M.** and **Dudek, W.A.**, 2008, Filter theory of BL algebras, *Soft Computing*, 12(5), 419–423.
- Lianzhen, L.** and **Kaitai, L.**, 2005, Fuzzy Boolean and positive implicative filters of BL-algebras, *Fuzzy sets and Systems*, 152(2), 333–348.
- Liu, L.** and **Li, K.**, 2005, Fuzzy filters of BL-algebras, *Information Sciences*, 173(1-3), 141–154.
- Ma, X.**, **Zhan, J.**, and **Xu, Y.**, 2007, Generalized fuzzy filters of BL-algebras, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 22(4), 490–496.
- McCune, W.**, **Veroff, R.**, **Fitelson, B.**, **Harris, K.**, **Feist, A.**, and **Wos, L.**, 2002, Short single axioms for Boolean algebra, *Journal of Automated Reasoning*, 29(1), 1–16.
- Motamed, S.** and **Borumand Saeid, A.**, 2011, n-Fold obstinate filters in BL-algebras, *Neural Computing and Applications*, 20(4), 461–472.
- Motamed, S.**, **Torkzadeh, L.**, **Borumand Saeid, A.**, and **Mohtashamnia, N.**, 2011, Radical of filters in BL-algebras, *Mathematical Logic Quarterly*, 57(2), 166–179.
- Oner, T.**, **Katican, T.**, and **Ülker, A.**, 2019, Interval sheffer stroke basic algebras, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 9(1), 134–141.

- Oner, T.** and **Katican, T.**, 2020, Interval Sheffer Stroke Basic Algebras and Yang-Baxter Equation, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 1(ahead-of-print).
- Oner, T., Katican, T., and Borumand Saeid, A.**, 2021a, On Sheffer Stroke UP-algebras, *Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications*, (ahead-of-print).
- Oner, T., Katican, T., and Borumand Saeid, A.**, 2021b, Relation between Sheffer Stroke and Hilbert Algebras, *Categories and General Algebraic Structures with Applications*, 14(1), 245–268.
- Oner, T., Katican, T., and Borumand Saeid, A.**, 2023, (Fuzzy) filters of Sheffer stroke BL-algebras, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 47(1), 39–55.
- Oner, T., Katican, T., Borumand Saeid, A., and Terziler, M.**, 2021c, Filters of strong Sheffer stroke non-associative MV-algebras, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 29(1).
- Oner, T., Katican, T., and Saeid, A.B.**, 2021d, Fuzzy filters of Sheffer stroke Hilbert algebras, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 40(1), 759–772.
- Rasiowa, H.**, 1974, *An algebraic approach to non-classical logics, volume 78 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland and PWN.
- Sheffer, H.M.**, 1913, A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants, *Transactions of the American mathematical society*, 14(4), 481–488.
- Turunen, E.**, 1999a, BL-algebras of basic fuzzy logic, *Mathware & soft computing. 1999 Vol. 6 Núm. 1*.
- Turunen, E.**, 1999b, *Mathematics behind fuzzy logic*, Physica-Verlag Heidelberg.

- Turunen, E.**, 2001, Boolean deductive systems of BL-algebras, *Archive for Mathematical Logic*, 40(6), 467–473.
- Turunen, E.** and **Sessa, S.**, 2001, Local BL-algebras, *Multiple Valued Logic*, 6(1-2), 229–249.
- Van Dalen, D.**, 2004, *Logic and structure*, Springer.
- Wei, W.** and **Borumand Saeid, A.**, 2015, Solutions to open problems on fuzzy filters of BL-algebras, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8(1), 106–113.
- Yin, Y.** and **Zhan, J.**, 2010, New types of fuzzy filters of BL-algebras, *Computers & Mathematics with Applications*, 60(7), 2115–2125.
- Zadeh, L.A.**, 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zhan, J.** and **Xu, Y.**, 2008, Some types of generalized fuzzy filters of BL-algebras, *Computers & Mathematics with Applications*, 56(6), 1604–1616.

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad: Tuğçe KATICAN

Öğrenim Durumu

- 2016- : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Matematik Doktora Programı
- 2015-2016 : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Matematik Temelleri ve Matematik Lojik Yüksek Lisans Programı
- 2009-2014 : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2005-2009 : İzmir Buca Anadolu Lisesi
- 1997-2005 : İzmir Mehmet Emin Yurdakul İlköğretim Okulu

Kitap Çevirileri

- Algoritmalar Giriş, Palme Yayınevi, 2016. (Çeviri Grubu Üyesi-Eş Katkılı Çevirmen)

Yayınlar

- Oner Tahsin, Katican Tugce, Borumand Saeid Arsham, “(Fuzzy) Filters of Sheffer stroke BL-algebras” *Kragujevac Journal of Mathematics*, 47(1): 39–55, 2023.
- Oner Tahsin, Katican Tugce, Borumand Saeid Arsham, Terziler Mehmet, “Filters of strong Sheffer Stroke non-associative MV-algebras” *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 2021. (SCI-Expanded)
- Oner Tahsin, Katican Tugce, Borumand Saeid Arsham, “Fuzzy Filters of Sheffer stroke Hilbert algebras” *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 40(1): 759–772, 2021. (DOI: 10.3233/JIFS-200760) (SCI-Expanded)

- Oner Tahsin, Katican Tugce, Borumand Saeid Arsham, “On Sheffer stroke UP-algebras”, *Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications*, 2021.
- Oner Tahsin, Katican Tugce, Borumand Saeid Arsham, “Relation between Sheffer Stroke Operation and Hilbert Algebras” *Categories and General Algebraic Structures with Applications*, 14(1): 245–268, 2021.
(DOI: 10.29252/cgasa.14.1.245)
- Oner Tahsin, Katican Tugce, Borumand Saeid Arsham, “Yang-Baxter Equation in Median Algebras” *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 2020.
(<https://doi.org/10.1007/s12215-020-00486-6>)
- Oner Tahsin, Katican Tugce, Gürsoy Kırcalı Necla, “Weak implication algebra and solutions to the Set-Theoretical Yang-Baxter equations” *Journal of International Mathematical Virtual Institute*, 10(1): 139–156, 2020.
(DOI: 10.7251/JIMVI2001139O)
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Katican Tugce, “Yang-Baxter equation in KU-algebras” *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 10(2): 339–347, 2020.
(DOI: 10.7251/BIMVI2002339O)
- Oner Tahsin, Katican Tugce, “Interval Sheffer Stroke Basic Algebras and Yang-Baxter Equation” *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 2020.
(DOI: 10.2478/amns.2020.2.00065)
- Oner Tahsin, Katican Tugce, Ulker Alper, “Interval Sheffer Stroke Basic Algebras” *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 9(1): 134–141, 2019.
- Oner Tahsin, Katican Tugce, “On Solutions to the Set-Theoretical Yang-Baxter Equations via BL-Algebras” *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 9(2): 207–217, 2019.
(DOI: 10.7251/BIMVI1902207O)

- Oner Tahsin, Katıcan Tugce, “On the Solutions of the Set-Theoretical Yang-Baxter Equations in Wajsberg-Algebras” *Axioms*, 7(1): 1–13, 2018.
(DOI: 10.3390/axioms7010006)



Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında Basılan Bildiriler

- Oner Tahsin, Katican Tugce, “Interval Sheffer Stroke Basic Algebras”, *4th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM)*, Kuşadası, Turkey, May 11–15, 2017.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Katican Tugce, “Fuzzy Implicative Ideals of Sheffer stroke BG-algebras”, *3rd International Conference on Mathematical and Related Sciences: Current Trends and Developments (ICMRS)*, Online meeting, November 20-22, 2020.

