T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEKİL İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Hasan KANDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Şubat-2021

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Hasan KANDEMİR tarafından yapılan “Tekil İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Prof.Dr. Metin YAMAN

Üye : Doç.Dr. Halis YILMAZ

Üye : Doç.Dr. Erhan PİŞKİN

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 26/02/2021

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimi boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yerinde ve zamanında mükemmel bir rehberlik anlayışıyla çalışmamın olgunlaşmasına yön veren değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Erhan PİŞKİN e; çalışmamı gözden geçirip yapılan yazım hatalarının düzeltilmesi için görüş ve önerilerini sunan tüm değerli yüksek lisans ve doktora öğrenimi gören arkadaşlarıma ve son olarak her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

TEKİL İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan KANDEMİR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2021

Bu tezin ilk bölümünde diferansiyel denklemler ile ilgili bilgilendirme yapılmış ve temel düzeyde gerçekleşen çözümlerin patlaması ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde çözümlerin patlaması ile ilgili önceki çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tez boyunca gerekli olabilecek temel tanımlar, lemmalar, teoremler, eşitsizlikler ve eşitlikler verilmiştir.

Dördüncü bölüm ise üç kısımdan oluşmaktadır: İlk kısımda lokal olmayan, tekil viskoelastik denkleminin çözümlerinin patlaması Georgiev ve Todorova metodu ile; ikinci kısımda lokal olmayan, tekil viskoelastik denklem sisteminin çözümlerinin patlaması Li-Tsai metodu ile; üçüncü kısım ise tezin esas orijinal kısmını oluşturan lineer olmayan damping terimli, lokal olmayan, tekil viskoelastik denklem sisteminin çözümlerinin patlaması Georgiev ve Todorova metodu ile çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İntegral denklem, Lokal olmayan, Damping terim, Patlama, Viskoelastik denklem

ABSTRACT

BLOW UP OF SOLUTIONS FOR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS

MASTER THESIS

Hasan KANDEMİR

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2021

In the first chapter of this thesis, briefly information are given about differential equation and information are given about the blow up of solutions at the basic level.

In the second chapter, previous studies on the blow up of solutions are given.

In the third chapter, basic definitions, lemmas, theorems, inequalities and equations that may be required throughout the thesis are given.

The fourth chapter consists of three parts. In the first part, the blow up of the solutions of the nonlocal singular viscoelastic equation is studied by the Georgiev and Todorova method. In the second part, the blow up of the solutions of the nonlocal singular viscoelastic equation system is studied by the Li-Tsai method. The third part is the original part of the thesis. In this part, the blow up of the solutions of the nonlocal singular viscoelastic equation system with nonlinear damping term is studied by the Georgiev and Todorova method.

Keyword: Integral equation, Nonlocal, Damping term, Blow up, Viscoelastic equation

KISALTMA VE SİMGELER

R^n	: n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	: R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	: p. mertebeden Lebesgue integrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$L^p_x(\Omega)$	: p. mertebeden Lebesgue integrallenebilir ağırlıklı Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$W^{m,p}_w(\Omega)$	: Ağırlıklı Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	: Hilbert Uzayı
∇	: Nabla Operatörü(Gradiyent)
Δ	: Laplace Operatörü
$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)$	: Bessel Operatörü

1. GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerde doğanın temel kanunlarının ve günlük hayatta karşılaştığımız birçok problemin adi veya kısmi diferansiyel denklemler ile modellenebilmesi çok önemlidir. Bu yüzden uygulamalı bilimlerde birçok problem (fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanıyla ilgili problemler olabilir) diferansiyel denklemlerle veya denklem sistemleri ile modellenebilmektedir.

Lineer olmayan diferansiyel denklemler, lineer diferansiyel denklemlere oranla gerçek dünya olaylarıyla daha bağlantılı olduğundan oluşturulan modellerin çoğu lineer olmayan diferansiyel denklemler olur.

Diferansiyel denklemlerin üç temel amacı vardır. Bunlar

i) Fiziksel olay veya gerçek dünya problemlerini matematiksel olarak modellemek,

ii) Bu problemin kesin ya da yaklaşık çözümünü bulmak,

iii) Bu çözümü yorumlamaktır.

Oluşturulan matematiksel modellemenin iyi konulup konulmadığını matematiksel açıdan incelemek oldukça önemlidir. Eğer bir problem, Hadamard şartları olarak ifade edilen

i) Varlık: çözüm var

ii) Teklik: çözümü tek

iii) Kararlılık: çözüm başlangıç verilerine sürekli bağlı

şartları sağlıyorsa problem iyi konulmuş demektir.

1.1. Patlama (Blow up)

Diferansiyel denklemin çözümünde zaman sonlu bir $T > 0$ zamanına yaklaştığında problemdeki değişken veya değişkenlerin sonsuza gitmesidir. Değişkenlerin sonsuz büyümesinden dolayı da çözümler global olarak yok olur. Bu olay çözümlerin patlaması (Blow up) veya global çözümlerin yokluğu olarak adlandırılır.

Blow up adi diferansiyel denklemlerde oldukça temel düzeyde gerçekleşir. Basit bir örnekle ifade edecek olursak reel değişkenli

$$u = u(t)$$

için

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $u(t) = \frac{1}{2-t}$ dir. Buradan

$$\lim_{t \to 2^-} \left(\frac{1}{2-t} \right) \to \infty$$

olduğundan çözümün patladığını söyleyebiliriz. Yani sonlu bir zamanda çözüm sonsuza gider. Buradan adi diferansiyel denklemler için çözümlerin patlaması genelleştirilebilir. İlk adım olarak $p > 1$ için $u'(t) = u^p(t)$ denklemini verebiliriz. Daha genel olarak

$$u'(t) = f(u)$$

denklemini verebiliriz. Burada f pozitif ve

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}s}{f(s)} < \infty$$

koşulu altında süreklidir. Bu şart pozitif başlangıç koşuluyla herhangi bir çözümün sonlu zamanda blow up olması için gerek ve yeter şarttır. Adi diferansiyel denklemlerdeki bu çalışmalar daha karmaşık problemler için araştırmacılara blow up teorisinin gelişmesine ve ilerlemesine ilham kaynağı olmuştur [Pişkin 2013 ve Polat 2005].

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Lineer olmayan hiperbolik denklemlerde başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin patlaması üzerine birçok çalışma yapılmış ve günümüzde de üzerinde aktif olarak çalışılmaktadır.

Bu tezin esas amacı

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s + |u_t|^{m-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - \frac{1}{x}(xv_x)_x + \int_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s + |v_t|^{m-1}v_t = f_2(u,v), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in (0,\alpha) \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), x \in (0,\alpha) \\ u(\alpha,t) = v(\alpha,t) = 0, \int_0^\alpha xu(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^\alpha xv(x,t)\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \tag{2.0.1}$$

şeklindeki lineer olmayan damping terimli, lokal omayan, tekil viskoelastik denklem sistemi ile verilen başlangıç değer probleminin negatif başlangıç enerjisi için çözümün sonlu bir zamanda patladığını göstermektir.

Bu çalışmamıza motivasyon sağlayan aşağıda verilen bazı araştırma sonuçlarıdır. Şimdi bu araştırma sonuçlarını inceleyelim:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s = |u|^{p-2}u, \\ u(a,t) = 0, \int_0^a xu(x,t)\mathrm{d}x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases} \tag{2.0.2}$$

2011 yılında Shuntang (2.0.2) probleminde negatif ve pozitif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını elde etti.

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s + au_t = |v|^{q+1}|u|^{p-1}u \\ v_{tt} - \frac{1}{x}(xv_x)_x + \int_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s + av_t = |u|^{p+1}|v|^{q-1}v \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in (0,\alpha) \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), x \in (0,\alpha) \\ u(\alpha,t) = v(\alpha,t) = 0, \int_0^\alpha xu(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^\alpha xv(x,t)\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \tag{2.0.3}$$

Aynı şekilde (2.0.3) problemini de 2018 yılında Zarai, Draifia ve Boulaaras negatif ve pozitif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını elde ettiler.

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s = f(x,t,u,u_x), \\ u_x(1,t) = 0, \int_0^1 xu(x,t)\mathrm{d}x = 0, t \in (0,T), \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in (0,1), \end{cases} \tag{2.0.4}$$

2010 yılında Mesloub (2.0.4) probleminin genelleştirilmiş bir çözümünün varlığını ve tekliğini gösterdiler.

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s = |u|^{p-2}u, \\ u(a,t) = 0, \int_0^a xu(x,t)\mathrm{d}x = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{2.0.5}$$

Daha sonra 2010 yılında Mesloub ve Messaoudi, negatif başlangıç enerjisi için (2.0.5) probleminin çözümünün uygun koşullar altında patladığını gösterdiler.

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s = f_1(u,v), \\ v_{tt} - \frac{1}{x}(xv_x)_x + \int_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s = f_2(u,v), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in (0,\alpha) \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), x \in (0,\alpha) \\ u(\alpha,t) = v(\alpha,t) = 0, \int_0^\alpha xu(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^\alpha xv(x,t)\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \tag{2.0.6}$$

2020 yılında Boulaaras ve Bouizem (2.0.6) başlangıç değer problemi için patlama sonuçlarını elde ettiler.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek tanımlara, lemmalara, teoremlere ve eşitsizliklere yer verilecektir (Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Evans 1998, Kesevan 1989, Pişkin 2017, Pişkin 2019, Wazwaz 2011).

3.1. Normlu Uzay ve İç Çarpım Uzayı

Tanım 3.1.1. X, G cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$||.|| : X \to R^{+} \cup \{0\}$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda $\forall x, y \in X$ ve $c \in G$ için

(n1) $||x|| \geq 0; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(n2) $||cx|| = |c| \cdot ||x||,$

(n3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (üçgen eşitsizliği)

özellikleri sağlarsa $||.||$ fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir norm denir ve $(X, ||.||)$ ikilisine de *normlu uzay* denir.

Tanım 3.1.2. (x_n), $(X, ||.||)$ normlu uzayında bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n \to \infty} ||x_n - x|| \to 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *yakınsaktır* denir.

Tanım 3.1.3. (x_n), $(X, ||.||)$ normlu uzayında bir dizi olmak üzere

$\forall \varepsilon > 0$ için $n, m \geq N_\varepsilon$ olduğunda $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.4. (x_n), $(X, ||.||)$ normlu uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olmak üzere (x_n) Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse $(X, ||.||)$ normlu uzayına *tam normlu uzay veya Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.5. X vektör uzayı üzerinde $||.||_1$ ve $||.||_2$ normları verilsin. $\forall x \in X$

için

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$$

olacak şekilde $c_1, c_2 > 0$ sabitleri varsa $||.||_1$ ve $||.||_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Tanım 3.1.6. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $u, v, w \in X, \quad a, b \in K$ olmak üzere

$$\langle ., . \rangle : X \times X \to K$$

fonksiyonu

i) $\langle u, u \rangle \geq 0$ ve $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$(burada $\overline{c}, c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir)

iii) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$

$K = R$ halinde $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$||.|| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $||.|| : X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım* denir.

Tanım 3.1.7. Bir $(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise $(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Tanım 3.1.8. R^n de bir nokta $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ olsun. Burada norm $|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ve iç çarpım ise

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

dır.

3.2. Lebesgue Uzayı

Tanım 3.2.1. Ω, R^n de ölçülebilir bir küme olsun. u ölçülebilir ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p. kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır, ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir.
Bu uzaydaki norm

$$||u||_{L^p(\Omega)} = ||u||_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.2. Ω, R^n uzayında bir bölge $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω bölgesinde her kompakt altkümesinde p. kuvveti integrallenebilir bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayıdır.

Tanım 3.2.3. Hemen hemen her $x \in R^n$ için $w(x) > 0$ olacak şekilde lokal integrallenebilir $w(x)$ fonksiyonuna *ağırlık fonksiyonu* denir.

Tanım 3.2.4. $\Omega \subset R^n$ de açık bir bölge $0 < p < \infty$ ve w ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_\Omega w(x)|u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$$

şartını sağlayan ölçülebilir $u(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa *ağırlıklı Lebesgue uzayı* denir ve $L^p_w(\Omega)$ ile gösterilir.
Bu uzaydaki norm

$$||u||_{L^p_w(\Omega)} = ||u||_{p,w} = \left[\int_\Omega w(x)|u(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.5. $vol(\Omega) = \int_\Omega 1\mathrm{d}x < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı) ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$||u||_p \leq c||u||_q$$

dır. Burada $c = (vol(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ dır. Yani

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

3.3. Sobolev Uzayı

Tanım 3.3.1. $u : \Omega \to R$, $u \in L_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. $\forall \phi \in C_0^\infty$ için

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x)\mathrm{d}x$$

koşulunu sağlayan $v \in L_{loc}(\Omega)$ var olsun. Bu durumda v ye Ω bölgesinde u nun α. mertebeden *zayıf türevi* denir. $v = D^\alpha u$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3.2. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Yani kendisi ve m. mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonlar uzayına *Sobolev uzayı* denir. Sobolev uzayında normlar: $1 \leq p < \infty$ için

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = ||u||_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

ve $p = \infty$ için

$$||u||_{W^{m,\infty}(\Omega)} = ||u||_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)}$$

olarak tanımlanır. Sobolev uzayı tanımlanan bu normlar ile Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ dır.

Burada

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.3.3. $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ dır. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.4. $H^m(\Omega)$,

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile Hilbert uzayıdır, burada $\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\mathrm{d}x$ şeklinde $L^2(\Omega)$ deki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x$$

dır ve norm

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.5. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı , w ağırlık fonksiyonu ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W_w^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_w^p(\Omega) : D^\alpha u \in L_w^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *ağırlıklı Sobolev uzayı* denir.

Ağırlıklı Sobolev uzayında norm: $1 \leq p < \infty$ için

$$||u||_{W_w^{m,p}(\Omega)} = ||u||_{m,p,w} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p_w(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.1 (Sobolev Gömülme Teoremi)**.** Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir.

ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

ya da $j = 0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Ayrıca $p = 1$ alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

ya da $j = 0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

gömülmesi elde edilir. Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp} & n > mp \\ +\infty & n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki gömülmelerde $W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olur.

Teorem 3.3.2. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ olur.

Teorem 3.3.3. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ olur.

3.4. Eşitsizlikler ve Eşitlikler

Lemma 3.4.1 (Young Eşitsizliği). $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dır.

Not 1. $\delta > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Young eşitsizliğinde $a = \delta X$ ve $b = \frac{Y}{\delta}$ alınırsa

$$XY \leq \frac{\delta^p X^p}{p} + \frac{\delta^{-q} Y^q}{q}$$

eşitsizliği elde edilir.

Not 2. $\theta > 0, \quad a, b \in R, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$|ab| \leq \theta a^p + \frac{b^q}{(\theta p)^{\frac{q}{p}} q}$$

dır.

Lemma 3.4.2 (Cauchy Eşitsizliği). $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

dır.

Lemma 3.4.3 (Hölder Eşitsizliği)**.** $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$||uv||_1 \leq ||u||_p ||v||_q$$

dır.

Lemma 3.4.4 (Poincare Eşitsizliği)**.** $u \in W_0^{1,2}(a,b)$ için

$$||u||_2 \leq c||u_x||_2$$

dır. Burada $c = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ dır.

Lemma 3.4.5 (Sobolev-Poincare Eşitsizliği)**.** $2 \leq q < \infty$ $(n = 1, 2)$ ve $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}(n \geq 3)$ olsun. Bu durumda $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$||u||_q \leq c||\nabla u||_2$$

dır. Burada $c = c(\Omega, q)$ dır.

Lemma 3.4.6 (Green Özdeşliği)**.** $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olmak üzere

$$\int_\Omega v\Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \int_\Omega \nabla v \nabla u \mathrm{d}x$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u$ dır.

Lemma 3.4.7 (Leibniz İntegral Formülü)**.**

$u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ fonksiyonları $\{(x,t) : a \leq x \leq b, \quad c \leq t \leq d\}$ bölgesinde sürekli ve $h(x)$, $g(x)$ fonksiyonları da (a,b) aralığında sürekli ise

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\mathrm{d}t\right) = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\mathrm{d}t + h'(x)u(x,h(x)) - g'(x)u(x,g(x))$$

dır.

3.5. İntegral Denklemler

Bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olduğu denklemlere *integral denklem* denir.

Bir fonksiyonun türevi bir nokta civarında olduğundan diferansiyel denklemler yerel (lokal) denklemlerdir. İntegral ise bir bölgede veya tüm uzayda olduğundan integral denklemler yerel olmayan (global) denklemlerdir. Ayrıca diferansiyel denklemlerin bir olayı tam olarak modelleyebilmesi için başlangıç ve/veya sınır şartlarına ihtiyaç vardır. İntegral denklemlerde ekstra şartlara ihtiyaç yoktur. Örneğin

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini gözönünde bulundurarak integral denklemi bulalım. Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \ \Rightarrow dy = f(x,y)dx$$

olur. Buradan integral alınırsa

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dt \Rightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)dt$$

bulunur. Örnektende görüldüğü üzere diferansiyel denklem ile birlikte $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu verilmişken, integral denklemde ekstra koşula ihtiyaç bulunmamaktadır.

3.5.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)\mathrm{d}t$$

denklemine 3. çeşit *Volterra integral denklemi* denir. Burada $\alpha(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinenen fonksiyonlar ve $u(x)$ ise aranan fonksiyondur. $K(x,t)$ ye çekirdek fonksiyon denir.

İntegralin üst sınırı sabit ise ($x = b$)

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\mathrm{d}t$$

denkleme *Fredholm integral denklemi* denir.

Bu denklemlerde

i. $\alpha(x) = 0$ ise 1. çeşit

ii. $\alpha(x) = 1$ ise 2. çeşit integral denklemdir.

Ayrıca $f(x) = 0$ ise denklemlere *homojen denklem* denir.

Eğer denklemde hem sabit hem de değişken sınırlı integral varsa

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)\mathrm{d}t$$

Volterra-Fredholm intrgral denklemi denir.

Bilinmeyen fonksiyonun türevini de içeren integral denklemlere

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\mathrm{d}t$$

İntegro-diferansiyel denklem denir.

3.5.2. Tekil İntegral Denklemler

Eğer 1. çeşit lineer

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)\mathrm{d}t$$

Volterra integral denkleminde ve

2. çeşit lineer

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)\mathrm{d}t$$

Volterra integral denkleminde $g(x)$, $h(x)$ integrasyon sınırlarından biri veya her ikisi sınırsız ise bu integral denklemler tekil olarak adlandırılır. Bunun yanında eğer $K(x,t)$ çekirdeği verilen integrasyon aralığında bir veya daha fazla noktada sınırsız olursa bu integral denklemler tekil olarak adlandırılır.

Örneğin

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)\mathrm{d}t, \quad 0 < \alpha < 1$$

denklemi genelleştirilmiş Abel tekil integral denklemi olarak adlandırılırken, $\alpha = \frac{1}{2}$ için

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) \mathrm{d}t$$

denklemi Abel tekil integral denklemi olarak adlandırılır. Burada denklemdeki çekirdeğin $t = x$ üst sınırında sınırsız olduğunu ifade edebiliriz.

Benzer şekilde, Eğer 1. çeşit lineer olmayan

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) F(u(t)) \mathrm{d}t$$

Volterra integral denkleminde ve
2. çeşit lineer olmayan

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) F(u(t)) \mathrm{d}t$$

Volterra integral denkleminde $g(x)$, $h(x)$ integrasyon sınırlarından biri veya her ikisi sınırsız ise bu integral denklemler tekil olarak adlandırılır. Bunun yanında eğer $K(x,t)$ çekirdeği verilen integrasyon aralığında bir veya daha fazla noktada sınırsız olursa bu integral denklemler tekil olarak adlandırılır. Burada $F(u(t))$, $u(t)$ nin lineer olmayan bir fonksiyonudur
Örneğin

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} F(u(t)) \mathrm{d}t, \quad 0 < \alpha < 1$$

denklemi genelleştirilmiş lineer olmayan Abel tekil integral denklemi olarak adlandırılırken, $\alpha = \frac{1}{2}$ için

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} F(u(t)) \mathrm{d}t$$

denklemi lineer olmayan Abel tekil integral denklemi olarak adlandırılır. Burada denklemdeki çekirdeğin $t = x$ üst sınırında sınırsız olduğunu ifade edebiliriz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda lokal olmayan, tekil viskoelastik denkleminin çözümlerinin patlaması; ikinci kısımda lokal olmayan, tekil viskoelastik denklem sisteminin çözümlerinin patlaması; üçüncü kısımda ise tezin esas orjinal kısmını oluşturan lineer olmayan damping terimli, lokal olmayan, tekil viskoelastik denklem sisteminin çözümlerinin patlaması çalışılmıştır.

4.1. Lokal Olmayan, Tekil Viskoelastik Denkleminin Çözümlerinin Patlaması

Bu kısımda

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s = |u|^{p-2}u, Q \\ u(a,t) = 0, \int_0^a xu(x,t)\mathrm{d}x = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

probleminin çözümünün

$$E_0 = \frac{1}{2}\int_0^\alpha x(\psi(x))^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\alpha x(\varphi(x)_x)^2\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_0^\alpha x|\varphi(x)|^p\mathrm{d}x < 0 \tag{4.1.2}$$

negatif başlangıç enerjisi için sonlu zamanda patlamasını ele alacağız [Mesloub ve Messaoudi 2010]. Burada $Q = (0,a) \times (0,T)$, $a < \infty$, $T < \infty$ dır.
Önce lokal varlık ile ilgili teoremi verelim:

Teorem 4.1.1. Kabul edelim ki $2 < p < 3$ ve

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^{+\infty} g(s)\mathrm{d}s = I > 0 \tag{4.1.3}$$

olsun. Bu durumda yeterince küçük $T > 0$ için

$$u \in C\left((0,T); V_0\right) \cap C^1\left((0,T); H\right),$$

olmak üzere $\forall\varphi \in V_0$ ve $\forall\psi \in H$ için problem (4.1.1) tek bir lokal çözüme sahiptir.
Burada $V_0 = W_0^{1,2}$, $H = L^2$ dır.
Şimdi çözümlerin patlaması ile ilgili teoremi verelim:

Teorem 4.1.2. Kabul edelim ki $2 < p < 3$ ve g fonksiyonu (4.1.3) e ek olarak

$$g(s) \geq 0, \quad g'(s) \leq 0,$$
$$\int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s < \frac{(p/2)-1}{(p/2)-1+(1/2p)}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda (4.1.2) yi sağlayan $\forall\varphi \in V_0$ ve $\forall\psi \in H$ için problem (4.1.1) in çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. (4.1.1) probleminde her tarafı xu_t ile çarpıp $(0, \alpha)$ aralığında integre edersek

$$\begin{aligned} &\int_0^\alpha xu_{tt}u_t\mathrm{d}x - \int_0^\alpha (xu_x)_x u_t \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^\alpha \int_0^t g(t-s)(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s u_t \mathrm{d}x \\ &\quad = \int_0^\alpha x|u|^{p-1}u_t\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

olur. Şimdi (4.1.4) denklemindeki her bir terimi sırasıyla düzenlersek

$$\int_0^\alpha xu_{tt}u_t\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\right] \tag{4.1.5}$$

olur. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} -\int_0^\alpha (xu_x)_x u_t\mathrm{d}x &= -\left[xu_tu_x\Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha xu_xu_{tx}\mathrm{d}x\right] \\ &= -\left[-\int_0^\alpha xu_xu_{tx}\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_0^\alpha xu_xu_{tx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\alpha x\frac{d}{dt}\left[u_x\right]^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right] \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

olur.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\alpha \int_0^t g(t-s)(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s u_t \mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^\alpha u_t(x,t)\big(xu_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&= -\int_0^t \left(g(t-s) \int_0^\alpha xu_{tx}(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^\alpha xu_x(x,s)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^\alpha x\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^\alpha xu_x(x,t)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \left(g(t-s) \left(\frac{d}{dt}\int_0^\alpha x|(u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x \right) \right) \mathrm{d}s \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t \left(g(t-s) \left(\frac{d}{dt}\int_0^\alpha x|(u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x \right) \right) \mathrm{d}s \\
&= \Bigg[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\int_0^\alpha x|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&- \frac{1}{2}\;\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \Bigg] \\
&- \left[\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\int_0^\alpha x|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\;g(t)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(g\circ u_x\right)(t) - \int_0^t g(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \right] \\
&- \frac{1}{2}\left[\left(g'\circ u_x\right)(t) - g(t)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \right] \qquad (4.1.7)
\end{aligned}
$$

olur. Son olarak

$$\int_0^\alpha x|u|^{p-1}u_t\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x\right] \qquad (4.1.8)$$

olur. Bulduğumuz bu terimleri (4.1.4) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right] \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g \circ u_x)(t) - \int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[\left(g' \circ u_x\right)(t) - g(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x|u|^p \mathrm{d}x\right] \qquad (4.1.9)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right. \\
&\quad + \frac{1}{2}(g \circ u_x)(t) - \frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\
&\quad \left.- \frac{1}{p}\int_0^\alpha x|u|^p \mathrm{d}x\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(g' \circ u_x\right)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \qquad (4.1.10)
\end{aligned}$$

olur. Parantez içini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right. \\
&\quad \left.+ \frac{1}{2}(g \circ u_x)(t) - \frac{1}{p}\int_0^\alpha x|u|^p \mathrm{d}x\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(g' \circ u_x\right)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \qquad (4.1.11)
\end{aligned}$$

olur. Son olarak parantez içerisinde bulunan ifadeyi $E(t)$ olarak tanımlarsak, bu durumda

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2}(g \circ u_x)(t) - \frac{1}{p}\int_0^\alpha x|u|^p \mathrm{d}x. \qquad (4.1.12)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\left(g \circ u_x\right)(t) = \int_0^\alpha \int_0^t x g(t-s)|u_x(x,s) - u_x(x,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

dır.

Ayrıca $u(x,t)$, (4.1.1) probleminin bir çözümü olsun. (4.1.3) e ek olarak $g(s) \geq 0$ ve $g'(s) \leq 0$ koşulları altında

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\left[\left(g' \circ u_x\right)(t) - g(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right] \leq 0 \tag{4.1.13}$$

olur. Bu da bize $E(t)$ nin artmayan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Böylece

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0) < 0$$

olur. $H(t) = -E(t)$ olarak tanımlarsak, bu durumda

$$\forall t \geq 0, \quad 0 < H(0) \leq H(t) \tag{4.1.14}$$

olur. Bu durumda ε yeterince küçük bir sabit olmak üzere

$$L(t) = H^{2/p}(t) + \varepsilon \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \tag{4.1.15}$$

olarak tanımlarız öyle ki

$$L(0) = H^{2/p}(0) + \varepsilon \int_0^\alpha x\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x > 0$$

dır. Buradaki amacımız $L(t)$ nin

$$L'(t) \geq \lambda L^\tau(t), \quad \tau > 1 \tag{4.1.16}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağladığını göstermektir. Eğer böyle bir diferansiyel eşitsizliğe ulaşabilirsek çözümün sonlu bir zamanda patladığını söyleyebiliriz. Bu amaçla (4.1.15) ifadesinin türevini alırsak

$$L'(t) = \frac{2}{p}H^{-1+2/p}(t)H'(t) + \varepsilon\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^\alpha x u u_{tt}\mathrm{d}x \tag{4.1.17}$$

olur. (4.1.1) probleminde u_{tt} yalnız bırakılarak (4.1.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &= \frac{2}{p}H^{-1+2/p}(t)H'(t) + \varepsilon\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x \\ &\quad + \varepsilon\int_0^\alpha xu\left[\frac{1}{x}(xu_x)_x - \int_0^t g(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s + |u|^{p-2}u\right] \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

olur. (4.1.18) de son ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
L'(t) = {} & \frac{2}{p}H^{-1+2/p}(t)H'(t) + \varepsilon\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x - \varepsilon\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \\
& + \varepsilon\int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.1.19}
$$

olur. Buradan $\frac{2}{p}H^{-1+2/p}(t)H'(t) \geq 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geq {} & \varepsilon\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x - \varepsilon\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x \\
& + \varepsilon\int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
= {} & \varepsilon\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x - \varepsilon\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x \\
& + \varepsilon\int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)u_x(x,t)\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.1.20}
$$

yazılabilir. (4.1.20) eşitsizliğinde bulunan son ifade için kestirimde bulunalım. Bunun için $\theta > 0, \quad a, b \in R, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$
|ab| \leq \theta a^p + \frac{b^q}{(\theta p)^{\frac{q}{p}}q}
$$

şeklindeki Young eşitsizliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)u_x(x,t)\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
& \quad \leq \theta\int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
& \quad + \frac{1}{4\theta}\int_0^\alpha\int_0^t g(s)xu_x^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
& \quad = \theta(g\circ u_x)(t) + \frac{1}{4\theta}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)u_x(x,t)\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
& \qquad \geq -\theta(g\circ u_x)(t) - \frac{1}{4\theta}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.1.21}
$$

olur. Ayrıca

$$H(t) = -E(t)$$

olduğundan $E(t)$ yi açık şekilde yerine yazıp

$$\int_0^\alpha x|u|^p \mathrm{d}x$$

ifadesini yalnız bırakırsak

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha x|u|^p \mathrm{d}x &= pH(t) + \frac{p}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x \\ &+ \frac{p}{2}\left(1 - \int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \frac{p}{2}\left(g \circ u_x\right)(t) \qquad (4.1.22)\end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz (4.1.21) ve (4.1.22) ifadelerini (4.1.20) eşitsizliğinde yerine yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}L'(t) \geq \varepsilon \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x &- \varepsilon\left(1 - \int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\ &+ \varepsilon p H(t) + \varepsilon\frac{p}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\frac{p}{2}\left(1 - \int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\ &+ \varepsilon\frac{p}{2}\left(g \circ u_x\right)(t) - \varepsilon\theta(g \circ u_x)(t) - \frac{\varepsilon}{4\theta}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \qquad (4.1.23)\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliği yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq \varepsilon\left(1 + \frac{p}{2}\right)\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\left(\frac{p}{2} - \theta\right)\left(g \circ u_x\right)(t) + \varepsilon p H(t) \\ &+ \varepsilon\left[\left(\frac{p}{2} - 1\right) - \left(\left(\frac{p}{2} - 1\right) + \frac{1}{4\theta}\right)\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right]\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \qquad (4.1.24)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{p}{2} - \theta > 0 \Rightarrow \frac{p}{2} > \theta > 0,$$

$$\left(\frac{p}{2} - 1\right) - \left(\left(\frac{p}{2} - 1\right) + \frac{1}{4\theta}\right)\int_0^t g(s)\mathrm{d}s > 0.$$

Açıktır ki bu ifadelerden

$$\int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s < \frac{p/2 - 1}{p/2 - 1 + 1/2p}$$

şartı sağlanır. Yine bu ifadeleri gözönünde bulundurarak (4.1.24) eşitsizliğini düzenlersek

$$L'(t) \geq \varepsilon\left(1+\frac{p}{2}\right)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + \varepsilon\alpha_1\left(g\circ u_x\right)(t)$$
$$+\varepsilon pH(t)+\varepsilon\alpha_2\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \qquad (4.1.25)$$

olur. Burada

$$\alpha_1 = \frac{p}{2}-\theta$$

ve

$$\alpha_2 = (\frac{p}{2}-1)-\left((\frac{p}{2}-1)+\frac{1}{4\theta}\right)\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$$

dır. Şimdi (4.1.25) eşitsizliğinde bulunan $\varepsilon pH(t)$ ifadesini düzenleyelim. Bunun için

$$\begin{aligned} H(t) &= -E(t)\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\\ &\quad -\frac{1}{2}(g\circ u_x)(t)+\frac{1}{p}\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x, \qquad (4.1.26)\end{aligned}$$

ve $a_3 < min\{\alpha_1,\alpha_2,p\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varepsilon pH(t) &= \varepsilon\left(a_3+(p-a_3)\right)H(t)\\ &= \varepsilon a_3H(t)+\varepsilon(p-a_3)H(t)\\ &= -\varepsilon\frac{a_3}{2}\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x-\varepsilon\frac{a_3}{2}\left(1-\int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\\ &\quad -\varepsilon\frac{a_3}{2}(g\circ u_x)(t)+\varepsilon\frac{a_3}{p}\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x+\varepsilon(p-a_3)H(t) \qquad (4.1.27)\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.1.27) ifadesini (4.1.25) eşitsizliğinde yazıp düzenlersek

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq \varepsilon\left(1+\frac{p}{2}-\frac{a_3}{2}\right)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x+\varepsilon(p-a_3)H(t)\\ &\quad +\varepsilon\left(\alpha_1-\frac{a_3}{2}\right)\left(g\circ u_x\right)(t)+\varepsilon\frac{a_3}{p}\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x\\ &\quad +\varepsilon\left[\alpha_2-\frac{a_3}{2}\left(1-\int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\right)\right]\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \qquad (4.1.28)\end{aligned}$$

olur. Burada γ pozitif bir sabit olmak üzere

$$\gamma = \varepsilon \cdot min \Bigg\{ \left(1 + \frac{p}{2} - \frac{a_3}{2}\right), (p - a_3), \left(\alpha_1 - \frac{a_3}{2}\right), \left[\alpha_2 - \frac{a_3}{2}\left(1 - \int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\right)\right], \frac{a_3}{p} \Bigg\}, \tag{4.1.29}$$

şeklinde alıp (4.1.28) eşitsizliğini daha basit olarak ifade edersek

$$L'(t) \geq \gamma \left[\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x |u|^p \mathrm{d}x + (g \circ u_x)(t) + H(t) \right] \tag{4.1.30}$$

elde ederiz. Öte yandan (4.1.15) denkleminde her tarafın $\frac{p}{2}$. kuvvetini alalım, bu durumda

$$[L(t)]^{p/2} = \left[H^{2/p}(t) + \varepsilon \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \right]^{\frac{p}{2}} \tag{4.1.31}$$

olur. Bu denklemin sağ tarafı için $a, b \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{4.1.32}$$

eşitsizliğini uygulayalım. Bu durumda

$$[L(t)]^{p/2} \leq C \left[H(t) + \varepsilon \left| \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{p}{2}} \right] \quad (C = 2^{\frac{p}{2}-1} > 0), \tag{4.1.33}$$

olur. Şimdi de (4.1.33) de bulunan $\left| \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{p}{2}}$ ifadesi için kestirimde bulunalım. Bunun için öncelikle sırasıyla Hölder eşitsizliği ve gömülme teoremi uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \right| &\leq \left(\int_0^\alpha x u^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)^{\frac{p-2}{2p}} \left(\int_0^\alpha x |u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.1.34}$$

olur. (4.1.34) eşitsizliğinde sırasıyla her tarafın $\frac{p}{2}$. kuvvetini alıp Young eşitsizliği uygularsak, bu durumda

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{p}{2}} &\leq \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)^{\frac{p-2}{4}} \left(\int_0^\alpha x |u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{4}} \\ &\leq C \left[\left(\int_0^\alpha x |u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{\mu}{2}} + \left(\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{\theta p}{4}} \right], \end{aligned} \tag{4.1.35}$$

olur. Burada $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\theta}=1$ olmak üzere $\theta=\frac{4}{p}$ alırsak $\mu=\frac{4}{4-p}$ olur. Bu durumda

$$\left|\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x\right|^{\frac{p}{2}} \le C\left[\left(\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{4-p}}+\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\right] \tag{4.1.36}$$

olur. (4.1.36) eşitsizliğinde köşeli parantez içindeki ilk ifade için

$$z^v \le z+1 \le \left(1+\frac{1}{\delta}\right)(z+\delta), \quad \forall z\ge 0, \quad 0<v\le 1, \quad \delta\ge 0,$$

sonucunu kullanarak bir kestirimde bulunalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{4-p}} &\le \left(1+\frac{1}{H(t)}\right)\left(\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x+H(t)\right)\\ &\le \left(1+\frac{1}{H(0)}\right)\left(\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x+H(t)\right)\end{aligned} \tag{4.1.37}$$

olur. (4.1.37) kestirimini (4.1.36) da yazarsak

$$\left|\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x\right|^{\frac{p}{2}} \le C\left[\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x+H(t)+\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\right] \tag{4.1.38}$$

kestirimine ulaşmış oluruz. Bulduğumuz (4.1.38) kestirimini (4.1.33) te yazıp ayrıca

$$(g\circ u_x)(t)\ge 0, \qquad ||u_x||_H^2=\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\ge 0,$$

ifadelerini de gözönünde bulundurursak

$$[L(t)]^{p/2}\le C\left[\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x+\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x+\int_0^\alpha x|u|^p\mathrm{d}x+(g\circ u_x)(t)+H(t)\right] \tag{4.1.39}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son olarak (4.1.30) ve (4.1.39) eşitsizliklerini birleştirirsek

$$L'(t)\ge \lambda[L(t)]^{p/2} \tag{4.1.40}$$

diferansiyel eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Burada λ; ε, $H(0)$ ve γ ya bağlı sabitlerdir. Bulduğumuz diferansiyel eşitsizliği $(0,t)$ üzerinde integre edersek

$$\int_0^t \frac{L'(t)}{L(t)^{p/2}}\mathrm{d}t \ge \int_0^t \lambda\mathrm{d}t$$

$$\frac{L(t)^{1-(p/2)} - L(0)^{1-(p/2)}}{1-(p/2)} \geq \lambda t$$

$$L(t)^{1-(p/2)} \geq L(0)^{1-(p/2)} + \lambda(1-(p/2))t$$

$$L(t)^{(p/2)-1} \geq \frac{1}{L(0)^{1-(p/2)} + \lambda(1-(p/2))t}.$$

Burada

$$t \leq T^* = \frac{1}{\lambda((p/2)-1)L^{1-(P/2)}(0)}$$

seçilirse

$$\lim_{t\to T^{*-}} L(t) \to \infty$$

olur. Bu da çözümün sonlu bir zamanda patladığını göstermektedir. Böylece teoremimizin ispatı tamamlanmış olur.

4.2. Lokal Olmayan, Tekil Viskoelastik Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması

Bu kısımda

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s + au_t = |v|^{q+1}|u|^{p-1}u, (x,t) \in Q, \\ v_{tt} - \frac{1}{x}(xv_x)_x + \int_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s + av_t = |u|^{p+1}|v|^{q-1}v, (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in (0,\alpha), \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), x \in (0,\alpha), \\ u(\alpha,t) = v(\alpha,t) = 0, \int_0^\alpha xu(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^\alpha xv(x,t)\mathrm{d}x = 0, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

yukarıdaki tekil lokal olmayan viskoelastik denklem sisteminin negatif ve pozitif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını ele alacağız [Zarai, Draifia ve Boulaaras 2018]. Burada $Q = (0,\alpha) \times (0,T), \alpha < \infty, T < \infty, p, q > 1$ ve $g_1(.), g_2(.) : R^+ \to R^+$ şekinde verilen fonksiyonlardır.

g_1 ve g_2 çekirdek fonksiyonları için varsayımlar aşağıdaki gibidir.

(G1): $g_1(.), g_2(.) : R^+ \to R^+$ fonksiyonları

Her $t \geq 0$ için

$$g_1(t) \geq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g_1(s)\mathrm{d}s = I_1 \geq 0,$$
$$g_2(t) \geq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g_2(s)\mathrm{d}s = I_2 \geq 0,$$

koşullarını sağlayan negatif olmayan artmayan ve diferansiyellenebilir iki fonksiyondur.

(G2): Her $t \geq 0$ için

$$g_1(t) \geq 0, \quad g_1'(t) \leq 0,$$
$$g_2(t) \geq 0, \quad g_2'(t) \leq 0.$$

Lemma 4.2.1. $\delta > 0$, $B(t) \in C^2(0,\infty)$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun ve $t \geq 0$ için

$$B''(t) - 4(\delta+1)B'(t) + 4(\delta+1)B(t) \geq 0 \tag{4.2.2}$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer

$$B'(0) > r_2 B(0) + k_0 \tag{4.2.3}$$

olursa o zaman

$$B'(t) > k_0 \tag{4.2.4}$$

olur.

Burada k_0 bir sabittir, $r_2 = 2(\delta+1) - 2\sqrt{(\delta+1)\delta}$ de

$$r^2 - 4(\delta+1)r + 4(\delta+1) = 0 \tag{4.2.5}$$

denkleminin en küçük köküdür (Li ve Tsai, 2003).

Lemma 4.2.2. $J(t), [t_0, \infty)$ üzerinde artmayan ve $t \geq t_0 \geq 0$ için

$$[J'(t)]^2 \geq a + b[J(t)]^{2+\frac{1}{\delta}} \tag{4.2.6}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{t \to T^{*-}} J(t) = 0 \tag{4.2.7}$$

sağlayacak şekilde sonlu bir T^* zamanı vardır. Burada $a > 0, b \in R$ dır. T^* ın üst sınırları için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

i) Eğer $b < 0$ ve $J(t_0) < min\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\}$ ise, bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} ln \frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)} \tag{4.2.8}$$

dır.

ii) Eğer $b = 0$ ise, bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{4.2.9}$$

iii) $b > 0$ ise

$$T^* \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{4.2.10}$$

ya da

$$T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}}(1 - [1 + cJ(t_0)]^{\frac{1}{2\delta}}), \qquad (4.2.11)$$

burada

$$c = (b/a)^{\frac{\delta}{2+\delta}}$$

dir (Li ve Tsai, 2003).

Teorem 4.2.1. Varsayalım ki $1 < p, q < 2$ ve

$$g_i(0) > 0 \quad ve \quad 1 - \int_0^\infty g_i(s)\mathrm{d}s = l_i > 0, (i = 1, 2) \qquad (4.2.12)$$

olsun. Bu durumda yeterince küçük pozitif $t_* > 0$ için

$$u, v \in C(0, t_*; V_0) \cap C^1(0, t_*; H),$$

olmak üzere herhangi bir $u_0 \in V_0$ ve $u_0 \in H$ için problem (4.2.1) in tek bir lokal çözümü vardır. Burada $V_0 = W_0^{1,2}$, $H = L^2$ dır.

Şimdi çözümün patlamasını elde etmek için

$$g_i(s) \geq 0, g_i^{'}(s) \leq 0 \quad ve \quad \int_0^\infty g_i(s)\mathrm{d}s < \frac{(p+q)(p+q+2)}{(p+q+1)^2} \qquad (4.2.13)$$

olsun.

Tanım 4.2.1. Eğer sonlu bir T^* zamanı bulunabilinirse (4.2.1) in herhangi bir (u, v) çözümü patlama olarak adlandırılır öyle ki

$$\lim_{t \to T^{*-}} \left(\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \right)^{-1} = 0 \qquad (4.2.14)$$

dır.

(G1) ve (G2) koşulları sağlansın, (u, v) de (4.2.1) probleminin bir çözümü olsun. Bu varsayımlar altında enerji fonksiyonelini bulalım. Bu amaçla (4.2.1) probleminde ilk denklemi $(p+1)xu_t$ ile, ikinci denklemi $(q+1)xv_t$ ile çarpalım ve $(0,\alpha)$ üzerinde integre edip taraf tarafa toplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&(p+1)\int_0^\alpha xu_{tt}u_t\mathrm{d}x-(p+1)\int_0^\alpha (xu_x)_x u_t\mathrm{d}x\\
&\quad+(p+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x\mathrm{d}s u_t\mathrm{d}x+(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\\
&\quad+(q+1)\int_0^\alpha xv_{tt}v_t\mathrm{d}x-(q+1)\int_0^\alpha (xv_x)_x v_t\mathrm{d}x\\
&\quad+(q+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x\mathrm{d}s v_t\mathrm{d}x+(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\\
&\quad=(p+1)\int_0^\alpha x|v|^{q+1}|u|^{p-1}u_t u\mathrm{d}x+(q+1)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q-1}v_t v\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

olur. (4.2.15) ifadesinin her bir terimini ayrı ayrı düzenleyecek olursak

$$(p+1)\int_0^\alpha xu_{tt}u_t\mathrm{d}x=\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\right]\tag{4.2.16}$$

olur. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}
-(p+1)\int_0^\alpha (xu_x)_x u_t\mathrm{d}x&=-(p+1)\left[xu_tu_x\Big|_0^\alpha-\int_0^\alpha xu_xu_{tx}\mathrm{d}x\right]\\
&=-(p+1)\left[-\int_0^\alpha xu_xu_{tx}\mathrm{d}x\right]\\
&=(p+1)\left[\int_0^\alpha xu_xu_{tx}\mathrm{d}x\right]\\
&=\left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^\alpha x\frac{d}{dt}\left[u_x\right]^2\mathrm{d}x\\
&=\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}\tag{4.2.17}$$

olur.

$$
\begin{aligned}
&(p+1)\int_0^{\alpha}\int_0^{t} g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s u_t \mathrm{d}x \\
&\quad = (p+1)\int_0^t \left(g_1(t-s)\int_0^{\alpha} u_t(x,t)\big(xu_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}x \right)\mathrm{d}s, \\
&\quad = -(p+1)\int_0^t \left(g_1(t-s)\int_0^{\alpha} xu_{tx}(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}s, \\
&\quad = (p+1)\int_0^t \left(g_1(t-s)\int_0^{\alpha} xu_x(x,s)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}s, \\
&\quad = (p+1)\int_0^t \left(g_1(t-s)\int_0^{\alpha} x\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}s \\
&\quad + (p+1)\int_0^t \left(g_1(t-s)\int_0^{\alpha} xu_x(x,t)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}s, \\
&\quad = \left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^t \left(g_1(t-s)\left(\frac{d}{dt}\int_0^{\alpha} x|(u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}s \\
&\quad - \left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^t \left(g_1(t-s)\left(\frac{d}{dt}\int_0^{\alpha} x|(u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}s, \\
&\quad = \left(\frac{p+1}{2}\right)\left[\frac{d}{dt}\int_0^t g_1(t-s)\int_0^{\alpha} x|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \right.\\
&\quad \left. - \frac{d}{dt}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\int_0^{\alpha} xu_x^2\mathrm{d}x\right] \\
&\quad - \left(\frac{p+1}{2}\right)\left[\int_0^t g_1'(t-s)\int_0^{\alpha} x|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \,-\, g_1(t)\int_0^{\alpha} xu_x^2\mathrm{d}x\right] \\
&\quad = \left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\left(g_1\circ u_x\right)(t) - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\int_0^{\alpha} xu_x^2\mathrm{d}x\right] \\
&\quad - \left(\frac{p+1}{2}\right)\left[\left(g_1'\circ u_x\right)(t) - g_1(t)\int_0^{\alpha} xu_x^2\mathrm{d}x\right]
\end{aligned} \tag{4.2.18}
$$

olur. Benzer şekilde

$$
(q+1)\int_0^{\alpha} xv_{tt}v_t\mathrm{d}x = \left(\frac{q+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^{\alpha} xv_t^2\mathrm{d}x\right], \tag{4.2.19}
$$

$$
-(q+1)\int_0^{\alpha} (xv_x)_x v_t\mathrm{d}x = \left(\frac{q+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^{\alpha} xv_x^2\mathrm{d}x\right], \tag{4.2.20}
$$

ve

$$\begin{aligned}(q+1)&\int_0^{\alpha}\int_0^{t} g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s v_t \mathrm{d}x\\ &=\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\left(g_2\circ v_x\right)(t)-\int_0^{t} g_2(s)\mathrm{d}s\int_0^{\alpha} xv_x^2\mathrm{d}x\right]\\ &-\left(\frac{p+1}{2}\right)\left[\left(g_2'\circ v_x\right)(t)-g_2(t)\int_0^{\alpha} xv_x^2\mathrm{d}x\right]\end{aligned}\tag{4.2.21}$$

terimlerini düzenleyebiliriz.

Burada (4.2.18) ve (4.2.21) denklemlerinden

$$\left(g_1\circ u_x\right)(t)=\int_0^{\alpha}\int_0^{t} xg_1(t-s)|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x,$$

$$\left(g_2\circ v_x\right)(t)=\int_0^{\alpha}\int_0^{t} xg_2(t-s)|v_x(x,s)-v_x(x,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x,$$

olduğunu ifade edebiliriz. Son olarak (4.2.15) denkleminin sağ tarafındaki terimleri düzenleyelim. Bu durumda

$$(p+1)\int_0^{\alpha} x|v|^{q+1}|u|^{p-1}u_t u\mathrm{d}x+(q+1)\int_0^{\alpha} x|u|^{p+1}|v|^{q-1}v_t v\mathrm{d}x$$

$$=\frac{d}{dt}\int_0^{\alpha} x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x$$

olur. Şimdi bulduğumuz bu terimleri (4.2.15) denkleminde sırasıyla yerine yazalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\right]+\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right]\\
&\quad+\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[(g_1\circ u_x)(t)-\int_0^t g_1(t-s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right]\\
&\quad-\left(\frac{p+1}{2}\right)\left[\left(g_1'\circ u_x\right)(t)-g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right]+(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\frac{q+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\right]+\left(\frac{q+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x\right]\\
&\quad+\left(\frac{q+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[(g_2\circ v_x)(t)-\int_0^t g_2(t-s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x\right]\\
&\quad-\left(\frac{p+1}{2}\right)\left[\left(g_2'\circ v_x\right)(t)-g_2(t)\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x\right]+(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{d}{dt}\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{4.2.22}
$$

olur. Bu (4.2.22) denklemini yeniden düzenlersek

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x+\left(\frac{q+1}{2}\right)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\right.\\
&\quad+\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\frac{q+1}{2}\right)\left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(g_1\circ u_x\right)(t)+\left(\frac{q+1}{2}\right)\left(g_2\circ v_x\right)(t)\\
&\quad\left.-\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x\right]\\
&\quad=\left(\frac{p+1}{2}\right)\left[\left(g_1'\circ u_x\right)(t)-g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right]-(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\frac{p+1}{2}\right)\left[\left(g_2'\circ v_x\right)(t)-g_2(t)\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x\right]-(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{4.2.23}
$$

elde edilir. Buradan denklemin sol tarafında bulunan parantez içindeki ifadeyi

$$\begin{aligned}
E(t) = {} & \left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{q+1}{2}\right)\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\
& + \left(\frac{p+1}{2}\right)\left(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\
& + \left(\frac{q+1}{2}\right)\left(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\
& + \left(\frac{p+1}{2}\right)(g_1 \circ u_x)(t) + \left(\frac{q+1}{2}\right)(g_2 \circ v_x)(t) \\
& - \int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

olarak tanımlarsak, bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[E(t)] = {} & \left(\frac{p+1}{2}\right)\left[(g_1' \circ u_x)(t) - g_1(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right] - (p+1)\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x \\
& + \left(\frac{p+1}{2}\right)\left[(g_2' \circ v_x)(t) - g_2(t)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x\right] - (q+1)\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

olur.

Lemma 4.2.3. (G1) ve (G2) koşulları sağlansın, (u, v) de (4.2.1) probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $E(t)$, $[0, t)$ üzerinde artmayan bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[E(t)] = {} & \left(\frac{p+1}{2}\right)(g_1' \circ u_x)(t) - \left(\frac{p+1}{2}\right)g_1(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x - (p+1)\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x \\
& + \left(\frac{q+1}{2}\right)(g_2' \circ v_x)(t) - \left(\frac{q+1}{2}\right)g_2(t)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x - (q+1)\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \le 0
\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

dır.

Lemma 4.2.4. (G1) ve (G2) koşulları sağlansın, (u, v) de (4.2.1) in bir çözümü olsun. Bu durumda

$$H(t) = (p+1)\int_0^\alpha xu^2(x,t)\mathrm{d}x + (q+1)\int_0^\alpha xv^2(x,t)\mathrm{d}x$$
$$+ (p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + (q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{4.2.27}$$

olmak üzere

$$H''(t) - (p+q+4)\left[(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + (q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\right]$$
$$\geq 2(p+q+2)\left\{-E(0) + (p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + (q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right\} \tag{4.2.28}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $H(t)$ nin iki defa türevini alarak başlayalım. Bu durumda

$$H'(t) = 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t\mathrm{d}x$$
$$+ (p+1)\int_0^\alpha xu^2\mathrm{d}x + (q+1)\int_0^\alpha xv^2\mathrm{d}x \tag{4.2.29}$$

ve

$$H''(t) = 2(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_{tt}\mathrm{d}x$$
$$+ 2(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^\alpha xvv_{tt}\mathrm{d}x$$
$$+ 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t\mathrm{d}x \tag{4.2.30}$$

olur. (4.2.1) probleminde bulunan u_{tt} ve v_{tt} ifadelerini yalnız bıraktıktan sonra (4.2.30) da yerlerine yazalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
H''(t) &= 2(p+1)\int_0^{\alpha} xu_t^2 \mathrm{d}x \\
&+ 2(p+1)\int_0^{\alpha} xu\left[\frac{1}{x}(xu_x)_x - \int_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s - u_t + |v|^{q+1}|u|^{p-1}u\right]\mathrm{d}x \\
&+ 2(q+1)\int_0^{\alpha} xv_t^2 \mathrm{d}x \\
&+ 2(q+1)\int_0^{\alpha} xv\left[\frac{1}{x}(xv_x)_x - \int_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s - v_t + |u|^{p+1}|v|^{q-1}v\right]\mathrm{d}x \\
&+ 2(p+1)\int_0^{\alpha} xuu_t \mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^{\alpha} xvv_t \mathrm{d}x \qquad (4.2.31)
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$
\begin{aligned}
2(p+1)\int_0^{\alpha} u(xu_x)_x \mathrm{d}x &= -2(p+1)\int_0^{\alpha} xu_x^2 \mathrm{d}x, \\
2(q+1)\int_0^{\alpha} v(xv_x)_x \mathrm{d}x &= -2(q+1)\int_0^{\alpha} xv_x^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2(p+1)\int_0^{\alpha}\int_0^t g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s u \mathrm{d}x \\
&\quad = 2(p+1)\int_0^{\alpha}\int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2(q+1)\int_0^{\alpha}\int_0^t g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s v \mathrm{d}x \\
&\quad = 2(q+1)\int_0^{\alpha}\int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)v_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

ifadelerini gözönünde bulundurarak (4.2.31) denklemini yeniden düzenlersek

$$
\begin{aligned}
H''(t) &= 2(p+1)\int_0^{\alpha} xu_t^2 \mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^{\alpha} xv_t^2 \mathrm{d}x \\
&- 2(p+1)\int_0^{\alpha} xu_x^2 \mathrm{d}x - 2(q+1)\int_0^{\alpha} xv_x^2 \mathrm{d}x \\
&+ 2(p+q+2)\int_0^{\alpha} x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&+ 2(p+1)\int_0^{\alpha}\int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&+ 2(q+1)\int_0^{\alpha}\int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)v_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \qquad (4.2.32)
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Diğer yandan (4.2.26) yı $(0,t)$ üzerinde integre edersek

$$\begin{aligned}E(t) = E(0) &+ \left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^t (g_1' \circ u_x)(s)\mathrm{d}s \\ &- \left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^t g_1(s)\int_0^\alpha x u_x^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &- (p+1)\int_0^t\int_0^\alpha x u_s^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \left(\frac{q+1}{2}\right)\int_0^t (g_2' \circ v_x)(s)\mathrm{d}s \\ &- \left(\frac{q+1}{2}\right)\int_0^t g_2(s)\int_0^\alpha x v_x^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - (q+1)\int_0^t\int_0^\alpha x v_s^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.2.33}$$

olur. (4.2.33) denkleminde $p+q+2=\theta$ olmak üzere her tarafı -2θ ile çarpalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}-2\theta E(t) = -2\theta E(0) &- \theta(p+1)\int_0^t (g_1' \circ u_x)(s)\mathrm{d}s \\ &+ \theta(p+1)\int_0^t g_1(s)\int_0^\alpha x u_x^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &+ 2\theta(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha x u_s^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \theta(q+1)\int_0^t (g_2' \circ v_x)(s)\mathrm{d}s \\ &+ \theta(q+1)\int_0^t g_2(s)\int_0^\alpha x v_x^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + 2\theta(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha x v_s^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

olur. (4.2.34) denkleminde $E(t)$ yi açık şekilde yazmakla beraber sağ tarafta açık olacak şekilde denklemin her iki tarafına $H''(t)$ ekleyelim. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
H''(t) &- \theta(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x - \theta(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x \\
&- \theta(p+1)\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \\
&- \theta(q+1)\left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x \\
&- \theta(p+1)\left(g_1\circ u_x\right)(t) \\
&- \theta(q+1)\left(g_2\circ v_x\right)(t) + 2\theta\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&= -2\theta E(0) - \theta(p+1)\int_0^t (g_1'\circ u_x)(s)\mathrm{d}s \\
&+ \theta(p+1)\int_0^t g_1(s)\int_0^\alpha xu_x^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&+ 2\theta(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu_s^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \theta(q+1)\int_0^t (g_2'\circ v_x)(s)\mathrm{d}s \\
&+ \theta(q+1)\int_0^t g_2(s)\int_0^\alpha xv_x^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + 2\theta(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv_s^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&+ 2(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x - 2(p+1)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \\
&- 2(q+1)\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x + 2(p+q+2)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&+ 2(p+1)\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&+ 2(q+1)\int_0^\alpha\int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)v_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \qquad (4.2.35)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.2.35) denklemini yeniden düzenlersek

$$
\begin{aligned}
&H''(t) - (\theta+2)\left[(p+1)\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + (q+1)\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x\right] \\
&= -2\theta E(0) + 2\theta\left[(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha x u_s^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s + (q+1)\int_0^t\int_0^\alpha x v_s^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\right] \\
&+ 2(p+q+2-\theta)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&+ \theta(p+1)\left[\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right) - \frac{2}{\theta}\right]\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\
&+ \theta(q+1)\left[\left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right) - \frac{2}{\theta}\right]\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\
&+ \theta(p+1)(g_1\circ u_x)(t) + \theta(q+1)(g_2\circ v_x)(t) \\
&+ 2(p+1)\int_0^\alpha\int_0^t x g_1(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&+ 2(q+1)\int_0^\alpha\int_0^t x g_2(t-s)v_x(x,t)v_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&+ \theta(p+1)\int_0^t g_1(s)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s + \theta(q+1)\int_0^t g_2(s)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&- \theta(p+1)\int_0^t (g_1'\circ u_x)(s)\mathrm{d}s - \theta(q+1)\int_0^t (g_2'\circ v_x)(s)\mathrm{d}s \qquad (4.2.36)
\end{aligned}
$$

olur. (4.2.36) denklemindeki son dört terim için (G1) ve (G2) yi gözönünde bulundurursak

$$\begin{aligned}
&H''(t)-(\theta+2)\left[(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x+(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\right]\\
&\quad\geq -2\theta E(0)+2\theta\left[(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right]\\
&\quad+2(p+q+2-\theta)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&\quad+\theta(p+1)\left[\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{2}{\theta}\right]\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\theta(q+1)\left[\left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{2}{\theta}\right]\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\theta(p+1)(g_1\circ u_x)(t)+\theta(q+1)(g_2\circ v_x)(t)\\
&\quad+2(p+1)\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&\quad+2(q+1)\int_0^\alpha\int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)v_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{4.2.37}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Elde ettiğimiz (4.2.37) eşitsizliğindeki son iki terim için bir kestirimde bulunalım. Bunun için Hölder eşitsizliğini ve

$$|ab|\leq\frac{\varepsilon}{2}|a|^2+\frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

şeklindeki Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&\quad=\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)[u_x(x,s)-u_x(x,t)]\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&\quad\geq\frac{-\varepsilon}{2}\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{-\varepsilon}{2}(g_1\circ u_x)(t)+\left(1-\frac{1}{2\varepsilon}\right)\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{-\varepsilon}{2}(g_1\circ u_x)(t)+\left(1-\frac{1}{2\varepsilon}\right)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s||u_x||_H^2.
\end{aligned}\tag{4.2.38}$$

Benzer şekilde

$$\int_0^\alpha \int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)v_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$\geq \frac{-\varepsilon}{2}(g_2 \circ v_x)(t) + \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon}\right)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s||v_x||_H^2 \qquad (4.2.39)$$

olur. $\varepsilon = \theta$, $k = t, s, x$ olmak üzere $\int_0^\alpha xu_k^2\mathrm{d}k = ||u_k||_H^2$, $\int_0^\alpha xv_k^2\mathrm{d}k = ||v_k||_H^2$ ifadelerini de gözönünde bulundurarak bulduğumuz kestirimleri (4.2.37) eşitsizliğinde yerine yazıp düzenlersek

$$H''(t) - (\theta+2)\left[(p+1)||u_t||_H^2 + (q+1)||v_t||_H^2\right]$$
$$\geq -2\theta E(0) + 2\theta\left[(p+1)\int_0^t ||u_s||_H^2\mathrm{d}s + (q+1)\int_0^t ||v_s||_H^2\mathrm{d}s\right]$$
$$+ 2(p+q+2-\theta)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\mathrm{d}x$$
$$+ \theta(p+1)\left\{1 - \frac{2}{\theta} + \left(\frac{2}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} - 1\right)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right\}\|u_x\|_H^2$$
$$+ \theta(q+1)\left\{1 - \frac{2}{\theta} + \left(\frac{2}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} - 1\right)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right\}\|v_x\|_H^2 \qquad (4.2.40)$$

elde ederiz. Son olarak (G1) ve (G2) varsayımları doğrultusunda

$$1 - \frac{2}{\theta} + \left(\frac{2}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} - 1\right)\int_0^t g_i(s)\mathrm{d}s > 0,$$

$\theta = p+q+2$ olmak üzere

$$\int_0^\infty g_i(s)\mathrm{d}s < \frac{(p+q)(p+q+2)}{(p+q+1)^2} \quad i = 1, 2$$

olarak alırsak

$$H''(t) - (p+q+4)\left[(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + (q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\right]$$
$$\geq 2(p+q+2)\left\{-E(0) + (p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + (q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right\} \qquad (4.2.41)$$

elde ederiz. Böylece lemmanın ispatı tamamlanır.

Lemma 4.2.5. (G1), (G2) koşulları ve aşağıdaki koşullardan biri sağlansın

(i) $E(0) < 0$,

(ii) $E(0) = 0$,

$$H'(0) > (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2. \tag{4.2.42}$$

(iii) $E(0) > 0$

$$H'(0) > r_2\left[H(0) + \frac{k_0}{p+q+4}\right] + (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2, \tag{4.2.43}$$

burada

$$r_2 = \frac{p+q+4-\sqrt{(p+q+4)^2 - 4(p+q+4)}}{2}, \tag{4.2.44}$$

ve

$$k_0 = (p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2\right\} + 2(p+q+2)E(0). \tag{4.2.45}$$

Bu durumda $t > t_0$ için

$$H'(t) \geq (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2,$$

ve

$$t^* = max\left\{0, \frac{H'(0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2}{2(p+q+2)E(0)}\right\}, \tag{4.2.46}$$

dır. Burada **(i)** durumunda $t_0 = t^*$, **(ii)** ve **(iii)** durumunda $t_0 = 0$ dır.

İspat. (i) Eğer $E(0) < 0$ olursa bu durumda (4.2.41) den

$$H''(t) \geq -2(p+q+2)E(0)$$

olduğunu ifade edebiliriz. Her tarafı $(0,t)$ üzerinde integre edersek

$$H'(t) \geq H'(0) - 2(p+q+2)E(0)t \tag{4.2.47}$$

olur. $E(0) < 0$ varsayımı ile (4.2.47) den

$$H'(t) \geq H'(0)$$

olur. (4.2.42) varsayımından

$$H'(0) \geq (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2,$$

dır. Böylece

$$H'(t) \geq (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2$$

sonucunu elde edebiliriz. Diğer yandan (4.2.47) ifadesinde t yi yalnız bırakırsak

$$t \geq \frac{H'(0) - H'(t)}{2(p+q+2)E(0)}$$

olur. Elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda buradan

$$t_0 = t^* = max\left\{0, \frac{H'(0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2}{2(p+q+2)E(0)}\right\} \tag{4.2.48}$$

olduğunu ifade edebiliriz.

(ii) Eğer $E(0) = 0$ olursa bu durumda $t \geq 0$ için $H''(t) \geq 0$ olur. Her tarafı $(0, t)$ üzerinde integre edersek

$$H'(t) \geq H'(0)$$

olur. Burada (4.2.42) in sağladığını varsayarsak bu durumda

$$H'(t) \geq (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2.$$

(iii) $E(0) > 0$ olsun. Öncelikle aşağıdaki ifadelerde bir düzenlemede bulunalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x\mathrm{d}s &= \int_0^t \int_0^\alpha x \frac{d}{\mathrm{d}t} u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\alpha x u^2(t)\mathrm{d}x - \int_0^\alpha x u^2(0)\mathrm{d}x = \|u\|_H^2 - \|u_0\|_H^2 \end{aligned} \tag{4.2.49}$$

olur. Buradan

$$\|u\|_H^2 = \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^t \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{4.2.50}$$

dır. (4.2.50) denklemine sırasıyla Hölder ve Young eşitsizliği uygularasak

$$
\begin{aligned}
\|u\|_H^2 &= \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^t \int_0^\alpha x^{\frac{1}{2}}u.x^{\frac{1}{2}}u_t \mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leq \|u_0\|_H^2 + 2\left[\int_0^t \left(\int_0^\alpha xu^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\right]\left[\int_0^t \left(\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\right] \\
&\leq \|u_0\|_H^2 + \left[\int_0^t \left(\int_0^\alpha xu^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\right] + \left[\int_0^t \left(\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\right] \\
&= \|u_0\|_H^2 + \int_0^t ||u(s)||_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t ||u_s(s)||_H^2\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{4.2.51}
$$

olur. Benzer şekilde

$$
\|v\|_H^2 \leq \|v_0\|_H^2 + \int_0^t ||v(s)||_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t ||v_s(s)||_H^2\mathrm{d}s \tag{4.2.52}
$$

yazabiliriz. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
H'(t) &= 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t\mathrm{d}x \\
&\quad + (p+1)\int_0^\alpha xu^2\mathrm{d}x + (q+1)\int_0^\alpha xv^2\mathrm{d}x \\
&= 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t\mathrm{d}x \\
&\quad + (p+1)||u||_H^2 + (q+1)||v||_H^2
\end{aligned} \tag{4.2.53}
$$

olduğunu biliyoruz. Bulduğumuz (4.2.51) ve (4.2.52) kestirimlerini (4.2.53) te yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
H'(t) &\leq 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x + 2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t\mathrm{d}x \\
&\quad + (p+1)\|u_0\|_H^2 + (p+1)\int_0^t ||u(s)||_H^2\mathrm{d}s + (p+1)\int_0^t ||u_s(s)||_H^2\mathrm{d}s \\
&\quad + (q+1)\|v_0\|_H^2 + (q+1)\int_0^t ||v(s)||_H^2\mathrm{d}s + (q+1)\int_0^t ||v_s(s)||_H^2\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{4.2.54}
$$

elde ederiz. Burada ilk iki terim için sırasıyla Hölder ve Young eşitsizliği kullanılırsa

$$
2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x \leq (p+1)\left[||u||_H^2 + ||u_t||_H^2\right],
$$

$$2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t\mathrm{d}x \leq (q+1)\left[||v||_H^2+||v_t||_H^2\right],$$

kestirimleri elde edilir. Bu kestirimleri yerine yazarsak

$$\begin{aligned}H'(t) &\leq (p+1)\left[||u||_H^2+||u_t||_H^2\right]+(q+1)\left[||v||_H^2+||v_t||_H^2\right]\\&+(p+1)\|u_0\|_H^2+(p+1)\int_0^t||u(s)||_H^2\mathrm{d}s+(p+1)\int_0^t||u_s(s)||_H^2\mathrm{d}s\\&+(q+1)\|v_0\|_H^2+(q+1)\int_0^t||v(s)||_H^2\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t||v_s(s)||_H^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.2.55}$$

elde ederiz. $H(t)$ nin tanımını gözönünde bulundurup (4.2.55) eşitsizliğini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}H'(t) \leq H(t)+(p+1)\left\{\|u_t\|_H^2+\int_0^t\|u_s\|_H^2\mathrm{d}s+\|u_0\|_H^2\right\}\\+(q+1)\left\{\|v_t\|_H^2+\int_0^t\|v_s\|_H^2\mathrm{d}s+\|v_0\|_H^2\right\}\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

elde ederiz. (4.2.56) eşitsizliğinde her tarafı $p+q+4$ ile çarpıp düzenlersek

$$\begin{aligned}&(p+q+4)\left\{H'(t)-H(t)\right\}\\&\quad\leq(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_H^2\right\}\\&\quad+(p+q+4)\left\{(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2\mathrm{d}s\right\}\\&\quad+(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}\end{aligned} \tag{4.2.57}$$

elde ederiz. (4.2.41) den

$$\begin{aligned}&(p+q+4)\left[(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x+(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\right]\\&\quad\leq H''(t)\\&\quad+2(p+q+2)\left\{E(0)-(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right\}\end{aligned} \tag{4.2.58}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu ifadeyi (4.2.57) de yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&(p+q+4)\left\{H'(t)-H(t)\right\} \\
&\quad \le H''(t) \\
&\quad + 2(p+q+2)\left\{E(0)-(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha x u_s^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha x v_s^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\right\} \\
&\quad + (p+q+4)\left\{(p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2 \mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2 \mathrm{d}s\right\} \\
&\quad + (p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}
\end{aligned} \tag{4.2.59}$$

olur. (4.2.59) ifadesini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
(p+q+4)\left\{H'(t)-H(t)\right\} &\le H''(t)+2(p+q+2)E(0) \\
&- (p+q)\left\{(p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2 \mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2 \mathrm{d}s\right\} \\
&+ (p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}
\end{aligned} \tag{4.2.60}$$

olur. Buradan

$$(p+q)\left\{(p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2 \mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2 \mathrm{d}s\right\} \ge 0$$

olduğundan

$$H''(t)-(p+q+4)H'(t)+(p+q+4)H(t)+k_0 \ge 0$$

olduğunu söyleyebiliriz. Burada

$$k_0=(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}+2(p+q+2)E(0)$$

dır. Şimdi

$$B(t)=H(t)+\frac{k_0}{p+q+4}$$

alalım. Bu durumda $B'=H'(t)$, $B''=H''(t)$ ve $B(t)$

$$B''(t)-(p+q+4)B'(t)+(p+q+4)B(t) \ge 0 \tag{4.2.61}$$

eşitsizliğini sağlar.

Lemma 4.2.1 i kullanalım. Bu amaçla (4.2.61) eşitsizliği ikinci mertebeden sabit katsayılı adi bir diferansiyel eşitsizliktir. r bir türev operatörü olmak üzere diferansiyel eşitsizliğin karekteristik denklemi

$$\left[r^2 - (p+q+4)r + (p+q+4)\right] B(t) = 0$$

dır. Bu denklemin köklerini diskriminant kullanarak bulalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (p+q+4)^2 - 4(p+q+4). \end{aligned} \tag{4.2.62}$$

Buradan

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(p+q+4)+\sqrt{(p+q+4)^2 - 4(p+q+4))}}{2} \end{aligned} \tag{4.2.63}$$

ve

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(p+q+4)-\sqrt{(p+q+4)^2 - 4(p+q+4))}}{2} \end{aligned} \tag{4.2.64}$$

Bu durumda (4.2.61) diferansiyel eşitsizliği

$$\left(\frac{d}{dt} - r_1\right)\left(\frac{d}{dt} - r_2\right) B(t) \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$B''(t) - B'(t)(r_1 + r_2) + B(t) r_1 r_2 \geq 0,$$

$$B''(t) - B'(t)r_1 - B'(t)r_2 + B(t)r_1r_2 \geq 0,$$

$$B''(t) - B'(t)r_2 \geq r_1(B'(t) - B(t)r_2),$$

$$\frac{B''(t) - B'(t)r_2}{(B'(t) - B(t)r_2)} \geq r_1$$

$$\frac{(B'(t) - B(t)r_2)'}{(B'(t) - B(t)r_2)} \geq r_1. \tag{4.2.65}$$

(4.2.65) ifadesini $(0, t)$ aralığında integre edersek

$$\int_0^t \frac{(B'(t) - B(t)r_2)'}{(B'(t) - B(t)r_2)} \mathrm{d}t \geq \int_0^t r_1 \mathrm{d}t,$$

$$ln|B'(t) - B(t)r_2| - ln|B'(0) - B(0)r_2| \geq r_1 t,$$

$$ln\left|\frac{B'(t) - B(t)r_2}{B'(0) - B(0)r_2}\right| \geq r_1 t,$$

$$\frac{B'(t) - B(t)r_2}{B'(0) - B(0)r_2} \geq e^{r_1 t},$$

$$B'(t) - B(t)r_2 \geq (B'(0) - B(0)r_2)e^{r_1 t},$$

$$B'(t) \geq B(t)r_2 + (B'(0) - B(0)r_2)e^{r_1 t},$$

$$B'(0) \geq B(0)r_2 + k_0 \quad (k_0 = B'(0) - B(0)r_2),$$

olur.

$$B(t) = H(t) + \frac{k_0}{p + q + 4},$$

varsayımından

$$H'(0) > r_2\left[H(0) + \frac{k_0}{p + q + 4}\right] + (p + 1)\|u_0\|_H^2 + (q + 1)\|v_0\|_H^2,$$

olur. Böylece $t \geq 0$ için

$$H'(t) \geq (p + 1)\|u_0\|_H^2 + (q + 1)\|v_0\|_H^2$$

dır.

Teorem 4.2.2. Varsayalım ki (4.2.13) ve aşağıdaki koşullardan biri sağlansın

(i) $E(0) < 0$,

(ii) $E(0) = 0$,

ve

$$H'(0) \geq (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2,$$

sağlar,

(iii)

$$0 < E(0) < \frac{\left(\frac{p+q}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2 \times J(t_0)^{\frac{1}{\gamma}}}{((p+q)^2 - 4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q}\right)},$$

ve

$$H'(0) > r_2 \left[H(0) + \frac{k_0}{p+q+4}\right] + (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2,$$

sağlar. Bu durumda (u, v) çözümü (4.2.14) tanımı doğrultusunda sonlu bir T^* zamanında patlar.

(i) durumunda:

$$T^* \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}. \tag{4.2.66}$$

Dahası, eğer $J(t_0) < min\left\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$ ise bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} ln \frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)}. \tag{4.2.67}$$

(ii) durumunda:

$$T^* \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)} \tag{4.2.68}$$

ya da

$$T^* \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}. \tag{4.2.69}$$

(iii) durumunda:

$$T^* \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{4.2.70}$$

ya da

$$T^* \leq t_0 + 3^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma c}{\sqrt{a}} \left\{1 - [1 + cJ(t_0)]^{\frac{1}{2\gamma}}\right\}, \tag{4.2.71}$$

burada $c = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{2+\gamma}}$, $\gamma = \frac{p+q}{4} - \frac{1}{2}$,

$$a = \left\{ \left(\frac{p+q}{4} - \frac{1}{2} \right)^2 \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2 \right]^2 \right.$$
$$\left. - \left((p+q)^2 - 4\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) E(0) J(t_0)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\} \times J(t_0)^{2+\frac{2}{\gamma}} > 0,$$
$$b = \left((p+q)^2 - 4\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) E(0),$$
$$J(t) = \left\{ H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 \right\}^{-\gamma}$$

dır. **(i)** durumunda, $t_0 = t^*$, t^* (4.2.46) ta veriliyor, **(ii)** ve **(iii)** durumunda $t_0 = 0$ dır.

İspat.

$$J(t) = \left\{ H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 \right\}^{-\gamma},$$

olsun. Burada T, T^* ın üst sınırıdır.

$J(t)$ nin iki defa türevini alalım. Bu durumda

$$J'(t) = -\gamma \left\{ H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 \right\}^{-\gamma-1}$$
$$\times \left[H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2 \right],$$

$$\begin{aligned} J''(t) = & -\gamma(-(\gamma+1)) \left\{ H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 \right\}^{-\gamma-2} \\ & \times \left[H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2 \right]^2 \\ & - \gamma H''(t) \left\{ H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 \right\}^{-\gamma-1}, \end{aligned} \tag{4.2.72}$$

elde ederiz. (4.2.72) ifadesini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned} J''(t) = & -\gamma \left\{ H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 \right\}^{-\gamma-2} \\ & \times \left\{ -(\gamma+1) \left[H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2 \right]^2 \right. \\ & \left. + H''(t) \left\{ H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 \right\} \right\} \end{aligned} \tag{4.2.73}$$

olur.

$$H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 = J(t)^{\frac{1}{-\gamma}},$$

ve

$$\begin{aligned} &H''(t)\left[H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right] \\ &\quad - (\gamma+1)\left\{H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^2 = Q(t), \end{aligned} \tag{4.2.74}$$

ifadelerini gözönünde bulundurursak (4.2.73) ifadesi

$$J''(t) = -\gamma J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}} Q(t), \tag{4.2.75}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.2.41) den

$$\begin{aligned} H''(t) &\geq -2(p+q+2)E(0) \\ &\quad + (p+q+4)\left[(p+1)\|u_t\|_H^2 + (q+1)\|v_t\|_H^2\right] \\ &\quad + 2(p+q+2)\left[(p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2 \mathrm{d}s + (q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2 \mathrm{d}s\right] \end{aligned} \tag{4.2.76}$$

olur. Buradan

$$p+q+4 > p+q+2,$$

$$2(p+q+2) > p+q+2,$$

olduğundan

$$\begin{aligned} H''(t) &\geq -2(p+q+2)E(0) \\ &\quad + (p+q+2) \times \left\{(p+1)\left(\|u_t\|_H^2 + \int_0^t \|u_s\|_H^2 \mathrm{d}s\right)\right. \\ &\quad \left. +(q+1)\left(\|v_t\|_2^2 + \int_0^t \|v_s\|_H^2 \mathrm{d}s\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.2.77}$$

yazabiliriz. Diğer yandan

$$H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 = J(t)^{\frac{1}{-\gamma}}. \tag{4.2.78}$$

$$\begin{aligned}
&H(t)+(T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2+(T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\\
&\quad\geq H(t)=(p+1)\int_0^\alpha xu^2(x,t)\mathrm{d}x+(q+1)\int_0^\alpha xv^2(x,t)\mathrm{d}x\\
&\quad+(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\\
&\quad=(p+1)\|u\|_H^2+(q+1)\|v\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u\|_H^2\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\|v\|_H^2\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{4.2.79}$$

ifadelerini yazabiliriz.

Son olarak (4.2.29) da bulunan

$$\begin{aligned}
H'(t)=2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x+2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t\mathrm{d}x\\
+(p+1)\int_0^\alpha xu^2\mathrm{d}x+(q+1)\int_0^\alpha xv^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}\tag{4.2.80}$$

şeklindeki ifadeyi düzenleyelim. Bunun için

$$\|u\|_H^2-\|u_0\|_H^2=2\int_0^t(u,u_s)_H\mathrm{d}s$$

ve

$$\|v\|_H^2-\|v_0\|_H^2=2\int_0^t(v,v_s)_H\mathrm{d}s$$

ifadelerini dikkate alarak (4.2.29) ifadesini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
&H'(t)-(p+1)\|u_0\|_H^2-(q+1)\|v_0\|_H^2\\
&\quad=2(p+1)(u,u_t)_H+2(q+1)(v,v_t)_H+(p+1)\|u\|_H^2\\
&\quad+(q+1)\|v\|_H^2-(p+1)\|u_0\|_H^2-(q+1)\|v_0\|_H^2,\\
&\quad=2(p+1)(u,u_t)_H+2(q+1)(v,v_t)_H\\
&\quad+(p+1)\|u\|_H^2-(p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v\|_H^2-(q+1)\|v_0\|_H^2,\\
&\quad=2(p+1)(u,u_t)_H+2(q+1)(v,v_t)_H\\
&\quad+2(p+1)\int_0^t(u,u_s)_H\mathrm{d}s+2(q+1)\int_0^t(v,v_s)_H\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{4.2.81}$$

olur. Böylece bulduğumuz (4.2.77) , (4.2.78),(4.2.79) ve (4.2.81) ifadelerini (4.2.74) da yerine yazarsak

$$Q(t) \geq -2(p+q+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}$$
$$+(p+q+2)\left\{(p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_2^2+(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2\mathrm{d}s\right\}$$
$$\times\left\{(p+1)\|u\|_H^2+(q+1)\|v\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u\|_H^2\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\|v\|_H^2\mathrm{d}s\right\}$$
$$-4(\gamma+1)\left\{(p+1)(u,u_t)_H+(q+1)(v,v_t)_H+(p+1)\int_0^t(u,u_s)_H\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t(v,v_s)_H\mathrm{d}s\right\}^2 \tag{4.2.82}$$

elde ederiz. Hesaplamanın kolaylık sağlaması adına

$$\mathbf{A}=(p+1)\|u\|_H^2+(q+1)\|v\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u\|_H^2\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\|v\|_H^2\mathrm{d}s,$$

$$\mathbf{B}=(p+1)(u,u_t)_H+(q+1)(v,v_t)_H+(p+1)\int_0^t(u,u_s)_H\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t(v,v_s)_H\mathrm{d}s,$$

$$\mathbf{C}=(p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2\mathrm{d}s+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2\mathrm{d}s$$

notasyonlarını kullanırsak bu durumda (4.2.82) ifadesi

$$Q(t) \geq -2(p+q+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}+(p+q+2)\left\{\mathbf{AC}-\mathbf{B}^2\right\} \tag{4.2.83}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$(p+q+2)=4(1+\gamma)\to\gamma=\frac{p+q-2}{4}$$

dır.

$Q(t)$ hakkında daha fazla kestirimde bulunmak için $\{\mathbf{AC}-\mathbf{B}^2\}$ ifadesi için bir kestirimde bulunalım. Bunun için $t > 0$ ve $\forall(\rho,\eta) \in R^2$ için

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\rho^2 + 2\mathbf{B}\rho\eta + \mathbf{C}\eta^2 \\
&\quad = (p+1)\rho^2\|u\|_H^2 + (q+1)\rho^2\|v\|_H^2 + (p+1)\int_0^t \rho^2\|u\|_H^2 \mathrm{d}s \\
&\quad + (q+1)\int_0^t \rho^2\|v\|_H^2 \mathrm{d}s + 2(p+1)\rho\eta(u,u_t)_H + 2(q+1)\rho\eta(v,v_t)_H \\
&\quad + 2(p+1)\rho\eta\int_0^t (u,u_s)_H \mathrm{d}s + 2(q+1)\rho\eta\int_0^t (v,v_s)_H \mathrm{d}s + (p+1)\eta^2\|u_t\|_H^2 \\
&\quad + (q+1)\eta^2\|v_t\|_H^2 + (p+1)\int_0^t \eta^2\|u_s\|_H^2 \mathrm{d}s + (q+1)\int_0^t \eta^2\|v_s\|_H^2 \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemde düzenleme yaparsak

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\rho^2 + 2\mathbf{B}\rho\eta + \mathbf{C}\eta^2 \\
&\quad = (p+1)\int_0^\alpha x(\rho^2u^2 + 2\rho u\eta u_t + \eta^2 u_t^2)\mathrm{d}x \\
&\quad + (q+1)\int_0^\alpha x(\rho^2v^2 + 2\rho v\eta v_t + \eta^2 v_t^2)\mathrm{d}x \\
&\quad + (p+1)\int_0^t\int_0^\alpha x(\rho^2u^2 + 2\rho u\eta u_s + \eta^2 u_s^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad + (q+1)\int_0^t\int_0^\alpha x(\rho^2v^2 + 2\rho v\eta v_s + \eta^2 v_s^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemi de düzenlersek

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\rho^2 + 2\mathbf{B}\rho\eta + \mathbf{C}\eta^2 \\
&\quad = (p+1)\int_0^\alpha x(\rho u + \eta u_t)^2\mathrm{d}x + (q+1)\int_0^\alpha x(\rho v + \eta v_t)^2\mathrm{d}x \\
&\quad + (p+1)\int_0^t\int_0^\alpha x(\rho u + \eta u_s)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad + (q+1)\int_0^t\int_0^\alpha x(\rho v + \eta v_s)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\mathbf{A}\rho^2 + 2\mathbf{B}\rho\eta + \mathbf{C}\eta^2 \geq 0,$$

olduğunu söyleyebiliz. Buradan

$$\mathbf{B^2} - \mathbf{AC} \leq 0$$

olur. Son bulduğumuz bu kestirimi kullanarak $t \geq t_0$ için

$$Q(t) \geq -2(p+q+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{4.2.84}$$

$$-Q(t) \leq 2(p+q+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{4.2.85}$$

kestirimini elde ederiz.

$$\gamma = \frac{p+q-2}{4},$$

ve

$$J(t) = \left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^{-\gamma},$$

olmak üzere (4.2.85) ifadesinde her tarafı

$$\gamma J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}} \geq 0$$

ile çarparsak

$$-\gamma J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}}Q(t) \leq 2(p+q+2)\left(\frac{p+q-2}{4}\right)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}}$$

olur. Buradan da $t \geq t_0$ için

$$J''(t) \leq \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right)E(0)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}}, \tag{4.2.86}$$

elde edilir. Şimdi de $t \geq t_0$ için $J'(t) < 0$ olmak üzere (4.2.86) ifadesinde her tarafı $J'(t)$ ile çarpıp (t_0, t) aralığında integre edelim. Bu durumda

$$J'(t)J''(t) \geq \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right)E(0)J'(t)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}},$$

$$\int_{t_0}^{t} J'(t)J''(t)\mathrm{d}t \geq \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right)E(0)\int_{t_0}^{t} J'(t)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(J'(t)\right)^2 \geq \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right)E(0)\frac{1}{2+\frac{1}{\gamma}}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(J(t)^{2+\frac{1}{\gamma}}\right),$$

$$\frac{(J'(t))^2 - (J'(t_0))^2}{2} \geq \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right)E(0)\frac{1}{2+\frac{1}{\gamma}}\left(J(t)^{2+\frac{1}{\gamma}} - J(t_0)^{2+\frac{1}{\gamma}}\right),$$

$$
\begin{aligned}
(J'(t))^2 \geq (J'(t_0))^2 &- \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right) E(0) \frac{1}{2+\frac{1}{\gamma}} J(t_0)^{2+\frac{1}{\gamma}} \\
&+ \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right) E(0) \frac{1}{2+\frac{1}{\gamma}} J(t)^{2+\frac{1}{\gamma}}. \qquad (4.2.87)
\end{aligned}
$$

Diğer yandan $J(t)$ nin tanımı gereği

$$
J'(t_0) = -\gamma J(t_0)^{1+\frac{1}{\gamma}} \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]
$$

$$
(J'(t_0))^2 = \gamma^2 J(t_0)^{2+\frac{2}{\gamma}} \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2
$$

olur. Bu ifadeyi (4.2.87) da yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
(J'(t))^2 \geq \gamma^2 J(t_0)^{2+\frac{2}{\gamma}} &\left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2 \\
&- \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right) E(0) \frac{1}{2+\frac{1}{\gamma}} J(t_0)^{2+\frac{1}{\gamma}} \\
&+ \left(\frac{(p+q)^2}{2} - 2\right) E(0) \frac{1}{2+\frac{1}{\gamma}} J(t)^{2+\frac{1}{\gamma}} \qquad (4.2.88)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca $\gamma = \frac{p+q-2}{4} = \left(\frac{p+q}{4} - \frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2+\frac{1}{\gamma}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q}\right)$ ifadelerini dikkate alarak (4.2.88) ifadesini yeniden düzenleyelim. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
J'(t)^2 \geq \Bigg\{ &\left(\frac{p+q}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2 \\
&- ((p+q)^2 - 4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q}\right) E(0) J(t_0)^{-\frac{1}{\gamma}} \Bigg\} \times J(t_0)^{2+\frac{2}{\gamma}} \\
&+ ((p+q)^2 - 4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q}\right) E(0) J(t)^{2+\frac{1}{\gamma}} \qquad (4.2.89)
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$
\begin{aligned}
a = \Bigg\{ &\left(\frac{p+q}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2 \\
&- ((p+q)^2 - 4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q}\right) E(0) J(t_0)^{-\frac{1}{\gamma}} \Bigg\} \times J(t_0)^{2+\frac{2}{\gamma}} > 0,
\end{aligned}
$$

$$
b = ((p+q)^2 - 4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q}\right) E(0),
$$

şeklinde alırsak

$$J'(t)^2 \geq a + bJ(t)^{2+\frac{1}{\gamma}}, \tag{4.2.90}$$

diferansiyel eşitsizliğini elde ederiz. Böylece lemma 4.2.2 de de ifade edildiği gibi sonlu bir T zamanı vardır. $E(0)$ ın alacağı değerlere bağlı olarak T^* ın üst sınırları kestirilebilir öyle ki

$$\lim_{t \to T^{*-}} J(t) = 0$$

dır.

4.3. Lineer Olmayan Damping Terimli, Lokal olmayan, Tekil Viskoelastik Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması

Bu kısımda lineer olmayan tekil viskoelastik denklem sistemi için

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s + |u_t|^{m-1}u_t = f_1(u,v), Q \\ v_{tt} - \frac{1}{x}(xv_x)_x + \int_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s + |v_t|^{m-1}v_t = f_2(u,v), Q \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in (0,\alpha) \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), x \in (0,\alpha) \\ u(\alpha,t) = v(\alpha,t) = 0, \int_0^\alpha xu(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^\alpha xv(x,t)\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır.
Burada $f_1(u,v), f_2(u,v) : R^2 \to R$,

$$f_1(u,v) = a|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + b|u|^r u|v|^{r+2},$$

$$f_2(u,v) = a|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + b|v|^r v|u|^{r+2},$$

$a, b \in R$, $r \geq -1$ ile veriliyor (Burada kolaylık olması için $a = b = 1$ alacağız).
$Q = (0,\alpha)\times(0,T)$, $\alpha < \infty, T < \infty$, $g_i : R^+ \to R^+$, $(i = 1,2)$ çekirdek fonksiyonlardır.
g_1 ve g_2 çekirdek fonksiyonları için varsayımlar aşağıdaki gibidir.

(G1): $g_i : R^+ \to R^+$, $(i = 1,2)$ fonksiyonları
her $t \geq 0$ için

$$g_1(t) \geq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g_1(s)\mathrm{d}s = I_1 \geq 0,$$

$$g_2(t) \geq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g_2(s)\mathrm{d}s = I_2 \geq 0.$$

(G2): Her $t \geq 0$ için

$$g_1(t) \geq 0, \quad g_1'(t) \leq 0,$$

$$g_2(t) \geq 0, \quad g_2'(t) \leq 0.$$

(G3): $r \geq -1$.

Teorem 4.3.1. (G1), (G2) ve (G3) koşulları sağlansın. Bu durumda yeterince küçük $T > 0$ için

$$u, v \in C\left((0,T); V_0\right) \cap C^1\left((0,T); H\right),$$

olmak üzere bütün $(u_0, v_0) \in V_0^2$ ve $(u_1, v_1) \in H^2$ için (4.3.1) probleminin tek bir lokal çözümü vardır. Burada $V_0 = W_0^{1,2}$, $H = L^2$ dır.

(G1), (G2), (G3) koşulları sağlansın, (u, v) de (4.3.1) probleminin bir çözümü olsun. Bu varsayımlar altında enerji fonksiyonelini bulalım. Bu amaçla (4.3.1) probleminde ilk denklemi xu_t ile, ikinci denklemi xv_t ile çarpalım ve $(0, \alpha)$ üzerinde integre edip taraf tarafa toplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha x u_{tt} u_t \mathrm{d}x - \int_0^\alpha (xu_x)_x u_t \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^\alpha \int_0^t g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s u_t \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x|u_t|^{m+1}\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^\alpha x v_{tt} v_t \mathrm{d}x - \int_0^\alpha (xv_x)_x v_t \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^\alpha \int_0^t g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s v_t \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x|v_t|^{m+1}\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^\alpha x u_t f_1(u,v)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_t f_2(u,v)\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

olur. (4.3.2) ifadesinin her bir terimini sırasıyla düzenlersek

$$\int_0^\alpha x u_{tt} u_t \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x\right] \tag{4.3.3}$$

olur. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{\alpha}(xu_x)_x u_t \mathrm{d}x &= -\left[xu_tu_x\Big|_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} xu_xu_{tx}\mathrm{d}x\right] \\
&= -\left[-\int_0^{\alpha} xu_xu_{tx}\mathrm{d}x\right] \\
&= \int_0^{\alpha} xu_xu_{tx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} x\frac{d}{dt}\left[u_x\right]^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^{\alpha} xu_x^2\mathrm{d}x\right] \qquad (4.3.4)
\end{aligned}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\alpha \int_0^t g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s u_t \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^t \left(g_1(t-s) \int_0^\alpha u_t(x,t)\big(xu_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&\quad = -\int_0^t \left(g_1(t-s) \int_0^\alpha xu_{tx}(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t \left(g_1(t-s) \int_0^\alpha xu_x(x,s)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t \left(g_1(t-s) \int_0^\alpha x\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \left(g_1(t-s) \int_0^\alpha xu_x(x,t)\frac{d}{dt}\Big(u_x(x,s)-u_x(x,t)\Big)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^t \left(g_1(t-s) \left(\frac{d}{dt}\int_0^\alpha x|(u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x \right)\right) \mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \left(g_1(t-s) \left(\frac{d}{dt}\int_0^\alpha x|(u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x \right)\right) \mathrm{d}s \\
&\quad = \Bigg[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_1(t-s)\int_0^\alpha x|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\Bigg] \\
&\quad - \left[\frac{1}{2}\int_0^t g_1'(t-s)\int_0^\alpha x|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\,g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g_1\circ u_x)(t) - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[(g_1'\circ u_x)(t) - g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\right]
\end{aligned} \tag{4.3.5}
$$

olur. Benzer şekilde

$$
\int_0^\alpha xv_{tt}v_t\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\right], \tag{4.3.6}
$$

$$
-\int_0^\alpha (xv_x)_x v_t\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x\right], \tag{4.3.7}
$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha \int_0^t g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s v_t \mathrm{d}x, \\
&\quad = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g_2 \circ v_x)(t) - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha xv_x^2 \mathrm{d}x\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[(g_2' \circ v_x)(t) - g_2(t)\int_0^\alpha xv_x^2 \mathrm{d}x\right]
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

terimlerini de düzenleyebiliriz.

(4.3.5) ve (4.3.8) denklemlerinden

$$(g_1 \circ u_x)(t) = \int_0^\alpha \int_0^t xg_1(t-s)|u_x(x,s)-u_x(x,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x,$$

$$(g_2 \circ v_x)(t) = \int_0^\alpha \int_0^t xg_2(t-s)|v_x(x,s)-v_x(x,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x,$$

olduğunu ifade edebiliriz.

Son olarak (4.3.2) denkleminin sağ tarafındaki terimi düzenleyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha xu_t f_1(u,v)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha xv_t f_2(u,v)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\alpha x\left[u_t f_1(u,v) + v_t f_2(u,v)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\alpha x\left[u_t|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + u_t|u|^r u|v|^{r+2}\right. \\
&\left. + v_t|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + v_t|v|^r v|u|^{r+2}\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\alpha x\left[u_t|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + v_t|u+v|^{2(r+1)}(u+v)\right. \\
&\left. + u_t|u|^r u|v|^{r+2} + v_t|v|^r v|u|^{r+2}\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\alpha x\left[\frac{1}{2(r+2)}\frac{d}{dt}\left(|u+v|^{2(r+2)}\right) + \frac{1}{2(r+2)}\frac{d}{dt}\left(2|uv|^{r+2}\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2(r+2)}\frac{d}{dt}\int_0^\alpha x\left[|u+v|^{2(r+2)} + 2|uv|^{r+2}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^\alpha xF(u,v)\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

olur. Burada

$$F(u,v) = \frac{1}{2(r+2)}\left[|u+v|^{2(r+2)} + 2|uv|^{r+2}\right] \tag{4.3.10}$$

dır.

Şimdi bulduğumuz bu terimleri (4.3.2) denkleminde sırasıyla yerine yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g_1 \circ u_x)(t) - \int_0^t g_1(t-s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\left(g_1' \circ u_x\right)(t) - g_1(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x\right] + \int_0^\alpha x|u_t|^{m+1}\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g_2 \circ v_x)(t) - \int_0^t g_2(t-s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\left(g_2' \circ v_x\right)(t) - g_2(t)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x\right] + \int_0^\alpha x|v_t|^{m+1}\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{d}{dt}\int_0^\alpha x F(u,v)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

olur. (4.3.11) denklemini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x\right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\left(g_1 \circ u_x\right)(t) + \frac{1}{2}\left(g_2 \circ v_x\right)(t) - \int_0^\alpha x F(u,v)\mathrm{d}x\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(g_1' \circ u_x\right)(t) - \frac{1}{2}g_1(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^\alpha x|u_t|^{m+1}\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(g_2' \circ v_x\right)(t) - \frac{1}{2}g_2(t)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^\alpha x|v_t|^{m+1}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

elde ederiz. (4.3.12) denkleminde parantez içinde bulunan ifadeyi

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(g_1 \circ u_x\right)(t) + \frac{1}{2}\left(g_2 \circ v_x\right)(t) - \int_0^\alpha x F(u,v)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

olarak tanımlarsak, bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[E(t)\right] &= \frac{1}{2}\left(g_1'\circ u_x\right)(t) - \frac{1}{2}g_1(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^\alpha x|u_t|^{m+1}\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\left(g_2'\circ v_x\right)(t) - \frac{1}{2}g_2(t)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^\alpha x|v_t|^{m+1}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

olur. Böylece aşağıdaki lemma ispatlanmış olur:

Lemma 4.3.1. (G1), (G2), (G3) koşulları sağlansın, (u, v) de (4.3.1) probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $E(t)$, $[0, t)$ üzerinde artmayan bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[E(t)\right] &= \frac{1}{2}\left(g_1'\circ u_x\right)(t) - \frac{1}{2}g_1(t)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^\alpha x|u_t|^{m+1}\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\left(g_2'\circ v_x\right)(t) - \frac{1}{2}g_2(t)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^\alpha x|v_t|^{m+1}\mathrm{d}x \le 0 \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

dır.

Lemma 4.3.2. c_0 ve c_1 pozitif sabitler olmak üzere

$$\frac{c_0}{2(r+2)}\Big(|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)}\Big) \le F(u,v) \le \frac{c_1}{2(r+2)}\Big(|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)}\Big) \tag{4.3.16}$$

eşitsizliği mevcuttur (Messaoudi ve Houari 2010).

Lemma 4.3.3. $2 \le s \le p$ ise

$$||u||_{L_x^p}^s \le C\Big(||u_x||_H^2 + ||u||_{L_x^p}^p\Big) \tag{4.3.17}$$

dır (Messaoudi 2001).

İspat. Eğer

$$||u||_{L_x^p} \le 1$$

ise

$$||u||^s_{L^p_x} \leq ||u||^2_{L^p_x}$$

olur. Sobolev gömme teoreminden

$$||u||^s_{L^p_x} \leq ||u||^2_{L^p_x} \leq C||u_x||^2_H$$

olarak elde edilir. Eğer

$$||u||_{L^p_x} \geq 1$$

ise bu durumda

$$||u||^s_{L^p_x} \leq ||u||^p_{L^p_x}$$

olur. Eşitsizlikler birlikte ele alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. (G1), (G2), (G3) koşulları sağlansın. $E(0) < 0$ ve

$$\int_0^\infty g_i(s)\mathrm{d}s < \frac{r+1}{r+1+\frac{1}{4(r+2)}}, \quad (i = 1, 2.) \tag{4.3.18}$$

olsun. Bu durumda (4.3.1) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. $E^{'}(t) \leq 0$ olduğundan her $t \geq 0$ için

$$E(t) \leq E(0) < 0,$$

olmak üzere $H(t) = -E(t)$ olarak tanımlarsak $H^{'}(t) = -E^{'}(t) \geq 0$ olacağından her $t \geq 0$ için

$$0 < H(0) \leq H(t) = -E(t), \tag{4.3.19}$$

olur. (4.3.19) ifadesinde $E(t)$ ifadesini açık şekilde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 0 < H(0) \leq H(t) = &-\frac{1}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\ &-\frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\ &-\frac{1}{2}\left(g_1 \circ u_x\right)(t) - \frac{1}{2}\left(g_2 \circ v_x\right)(t) + \int_0^\alpha x F(u,v)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

elde edilir. (4.3.16) ve (4.3.20) ifadelerinden

$$\begin{aligned} 0 < H(0) \leq H(t) &\leq \int_0^\alpha xF(u,v)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{c_1}{2(r+2)}\left[\int_0^\alpha x|u|^{2(r+2)}\mathrm{d}x + \int_0^\alpha x|v|^{2(r+2)}\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{c_1}{2(r+2)}\left[||u||^{2(r+2)}_{L_x^{2(r+2)}} + ||v||^{2(r+2)}_{L_x^{2(r+2)}}\right] \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

olur. Böylece

$$H(t) \leq \frac{c_1}{2(r+2)}\left[||u||^{2(r+2)}_{L_x^{2(r+2)}} + ||v||^{2(r+2)}_{L_x^{2(r+2)}}\right] \tag{4.3.22}$$

olduğunu görebiliriz.

Şimdi ε yeterince küçük bir sabit olmak üzere

$$L(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon\left(\int_0^\alpha xuu_t\mathrm{d}x + \int_0^\alpha xvv_t\mathrm{d}x\right) \tag{4.3.23}$$

ve

$$0 < \sigma \leq min\left\{\frac{2(r+2)-m-1}{2m(r+2)}, \frac{r+1}{2(r+2)}\right\} \tag{4.3.24}$$

olarak tanımlayalım. Buradaki amacımız $L(t)$ nin

$$L'(t) \geq \lambda L^\tau(t), \quad \tau > 1 \tag{4.3.25}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağladığını göstermektir. Eğer böyle bir diferansiyel eşitsizliğe ulaşabilirsek çözümün sonlu bir zamanda patladığını söyleyebiliriz.

Bu amaçla (4.3.23) ifadesinin türevini alarak adım adım $L'(t)$ yi inşa edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} L'(t) = &(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) \\ &+ \varepsilon\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x \\ &+ \varepsilon\int_0^\alpha xuu_{tt}\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^\alpha xvv_{tt}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

olur. (4.3.1) probleminde bulunan u_{tt} ve v_{tt} yi yalnız bıraktıktan sonra (4.3.26) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
L'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) \\
&+ \varepsilon \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon \int_0^\alpha xu \left[\frac{1}{x}(xu_x)_x - \int_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x \mathrm{d}s - |u_t|^{m-1}u_t + f_1(u,v) \right] \mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon \int_0^\alpha xv \left[\frac{1}{x}(xv_x)_x - \int_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}(xv_x(x,s))_x \mathrm{d}s - |v_t|^{m-1}v_t + f_2(u,v) \right] \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

olur. (4.3.27) denkleminde son iki ifadede gerekli işlemleri yaparsak

$$\begin{aligned}
L'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) \\
&+ \varepsilon \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\
&+ \Bigg[-\varepsilon \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^\alpha \int_0^t x g_1(t-s) u_x(x,t) u_x(x,s) \mathrm{d}s \mathrm{d}x \\
&- \varepsilon \int_0^\alpha x u u_t |u_t|^{m-1} \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^\alpha x u f_1(u,v) \mathrm{d}x \Bigg] \\
&+ \Bigg[-\varepsilon \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^\alpha \int_0^t x g_2(t-s) v_x(x,t) v_x(x,s) \mathrm{d}s \mathrm{d}x \\
&- \varepsilon \int_0^\alpha x v v_t |v_t|^{m-1} \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^\alpha x v f_2(u,v) \mathrm{d}x \Bigg]
\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

elde edilir. (4.3.28) denklemini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
L'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) \\
&+ \varepsilon \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x - \varepsilon \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x - \varepsilon \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon \int_0^\alpha \int_0^t x g_1(t-s) u_x(x,t) u_x(x,s) \mathrm{d}s \mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon \int_0^\alpha \int_0^t x g_2(t-s) v_x(x,t) v_x(x,s) \mathrm{d}s \mathrm{d}x \\
&- \varepsilon \int_0^\alpha x u u_t |u_t|^{m-1} \mathrm{d}x - \varepsilon \int_0^\alpha x v v_t |v_t|^{m-1} \mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon \int_0^\alpha x u f_1(u,v) \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^\alpha x v f_2(u,v) \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

olur. Şimdi (4.3.29) denkleminde sırasıyla bazı düzenlemeler yapalım. İlk olarak $H'(t)$ için bakalım.

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -\int_0^\alpha x|u_t|^{m+1}\mathrm{d}x - \int_0^\alpha x|v_t|^{m+1}\mathrm{d}x \\ &= -\left[||u_t||^{m+1}_{L_x^{m+1}} + ||v_t||^{m+1}_{L_x^{m+1}}\right] \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda $H(t) = -E(t)$ ve $H'(t) = -E'(t)$ den

$$H'(t) \geq ||u_t||^{m+1}_{L_x^{m+1}} + ||v_t||^{m+1}_{L_x^{m+1}} \tag{4.3.30}$$

yazılabilir. İkinci olarak

$$\begin{aligned} &\int_0^\alpha \int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)u_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\quad = \int_0^\alpha \int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)\left[u_x(x,s) - u_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.3.31}$$

ve

$$\begin{aligned} &\int_0^\alpha \int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)v_x(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\quad = \int_0^\alpha \int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)\left[v_x(x,s) - v_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

düzenlemesini yapabiliriz. Üçüncü olarak da

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\alpha xuf_1(u,v)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha xvf_2(u,v)\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^\alpha x\left[uf_1(u,v) + vf_2(u,v)\right]\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^\alpha x\Big[u|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + u|u|^r u|v|^{r+2} \\
&\quad + v|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + v|v|^r v|u|^{r+2}\Big]\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^\alpha x\Big[u|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + v|u+v|^{2(r+1)}(u+v) \\
&\quad + u|u|^r u|v|^{r+2} + v|v|^r v|u|^{r+2}\Big]\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^\alpha x\Big[|u+v|^{2(r+2)} + 2|uv|^{r+2}\Big]\mathrm{d}x \\
&\quad = 2(r+2)\int_0^\alpha xF(u,v)\mathrm{d}x \qquad (4.3.33)
\end{aligned}
$$

düzenlemesini yapabiliriz. (4.3.30)-(4.3.33) ifadelerini (4.3.29) de yazarsak

$$
\begin{aligned}
L'(t) &\geq (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)\left[||u_t||^{m+1}_{L_x^{m+1}} + ||v_t||^{m+1}_{L_x^{m+1}}\right] \\
&+ \varepsilon\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x \\
&- \varepsilon\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x - \varepsilon\left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon\int_0^\alpha\int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)\left[v_x(x,s)-v_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&- \varepsilon\int_0^\alpha xuu_t|u_t|^{m-1}\mathrm{d}x - \varepsilon\int_0^\alpha xvv_t|v_t|^{m-1}\mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon 2(r+2)\int_0^\alpha xF(u,v)\mathrm{d}x, \qquad (4.3.34)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi de (4.3.34) de bulunan

$$
\int_0^\alpha\int_0^t xg_1(t-s)u_x(x,t)\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x
$$

ve

$$
\int_0^\alpha\int_0^t xg_2(t-s)v_x(x,t)\left[v_x(x,s)-v_x(x,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}x
$$

ifadeleri için kestirimde bulunalım. Bunun için $\quad \theta > 0, \quad a, b \in R, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$|ab| \leq \theta a^p + \frac{b^q}{(\theta p)^{\frac{q}{p}} q}$$

şeklindeki Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha \int_0^t x g_1(t-s) u_x(x,t) \left[u_x(x,s) - u_x(x,t)\right] \mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&\quad \leq \theta \int_0^\alpha \int_0^t x g_1(t-s) |u_x(x,s) - u_x(x,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{4\theta} \int_0^\alpha \int_0^t g_1(s) x u_x^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&\quad = \theta (g_1 \circ u_x)(t) + \frac{1}{4\theta} \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha \int_0^t x g_1(t-s) u_x(x,t) \left[u_x(x,s) - u_x(x,t)\right] \mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&\quad \geq -\theta (g_1 \circ u_x)(t) - \frac{1}{4\theta} \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha \int_0^t x g_2(t-s) v_x(x,t) \left[v_x(x,s) - v_x(x,t)\right] \mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&\quad \geq -\theta (g_2 \circ v_x)(t) - \frac{1}{4\theta} \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

yazılabilir.

Ayrıca

$$H(t) = -E(t),$$

olduğundan $E(t)$ yi açık şekilde yerine yazıp

$$\int_0^\alpha x F(u,v) \mathrm{d}x$$

ifadesini yalnız bırakırsak

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha xF(u,v)\mathrm{d}x &= H(t) + \frac{1}{2}\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\left(g_1\circ u_x\right)(t) + \frac{1}{2}\left(g_2\circ v_x\right)(t) \qquad (4.3.37)\end{aligned}$$

ifadesine de ulaşmış oluruz. Bulmuş olduğumuz (4.3.35)-(4.3.37) ifadelerini (4.3.34) denkleminde yerine yazıp düzenlersek

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)\left[||u_t||^{m+1}_{L_x^{m+1}} + ||v_t||^{m+1}_{L_x^{m+1}}\right] \\ &+ \varepsilon(r+3)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x + \varepsilon(r+3)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x \\ &+ \varepsilon\left[(r+1)-\left((r+1)+\frac{1}{4\theta}\right)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right]\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x \\ &+ \varepsilon\left[(r+1)-\left((r+1)+\frac{1}{4\theta}\right)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right]\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x \\ &+ \varepsilon(r-\theta+2)(g_1\circ u_x)(t) + \varepsilon(r-\theta+2)(g_2\circ v_x)(t) \\ &+ \varepsilon 2(r+2)H(t) \\ &- \varepsilon\int_0^\alpha xuu_t|u_t|^{m-1}\mathrm{d}x - \varepsilon\int_0^\alpha xvv_t|v_t|^{m-1}\mathrm{d}x, \qquad (4.3.38)\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$\alpha_3 = r-\theta+2 > 0 \Longrightarrow r+2 > \theta > 0,$$

$$\alpha_4 = r-\theta+2 > 0 \Longrightarrow r+2 > \theta > 0,$$

$$\alpha_1 = \left[(r+1)-\left((r+1)+\frac{1}{4\theta}\right)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right] > 0,$$

$$\alpha_2 = \left[(r+1)-\left((r+1)+\frac{1}{4\theta}\right)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right] > 0,$$

dır.

Bu ifadeleri gözönünde bulundurarak (4.3.38) eşitsizliğini düzenlersek

$$\begin{aligned}L'(t) \geq (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)\left[||u_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1} + ||v_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1}\right] \\ + \varepsilon(r+3)\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon(r+3)\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\ + \varepsilon\alpha_1 \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\alpha_2 \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\ + \varepsilon\alpha_3 (g_1 \circ u_x)(t) + \varepsilon\alpha_4 (g_2 \circ v_x)(t) \\ + \varepsilon 2(r+2)H(t) \\ - \varepsilon \int_0^\alpha x u u_t |u_t|^{m-1} \mathrm{d}x - \varepsilon \int_0^\alpha x v v_t |v_t|^{m-1} \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{4.3.39}$$

elde edilir. Şimdi sırasıyla (4.3.39) de bulunan

$$\varepsilon 2(r+2)H(t)$$

ifadesi için bir düzenlemede ve

$$-\varepsilon \int_0^\alpha x u u_t |u_t|^{m-1} \mathrm{d}x - \varepsilon \int_0^\alpha x v v_t |v_t|^{m-1} \mathrm{d}x$$

ifadesi için de bir kestirimde bulunalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}H(t) = -E(t) = -\frac{1}{2}\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\ -\frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\ -\frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\ -\frac{1}{2}\left(g_1 \circ u_x\right)(t) - \frac{1}{2}\left(g_2 \circ v_x\right)(t) + \int_0^\alpha x F(u,v)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

ve $a_5 < min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 2(r+2)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varepsilon 2(r+2)H(t) &= \varepsilon\Big(a_5 + (2(r+2) - a_5)\Big)H(t) \\
&= \varepsilon a_5 H(t) + \varepsilon\Big(2(r+2) - a_5\Big)H(t) \\
&= -\frac{\varepsilon}{2}a_5 \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}a_5 \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\
&- \frac{\varepsilon}{2}a_5 \left(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right) \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\
&- \frac{\varepsilon}{2}a_5 \left(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right) \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\
&- \frac{\varepsilon}{2}a_5 \left(g_1 \circ u_x\right)(t) - \frac{\varepsilon}{2}a_5 \left(g_2 \circ v_x\right)(t) \\
&+ \varepsilon a_5 \int_0^\alpha x F(u,v)\mathrm{d}x \\
&+ \varepsilon\Big((2(r+2) - a_5)\Big)H(t),
\end{aligned} \tag{4.3.41}$$

olur. Kestirim için de

$a, b \geq 0,\ \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1,\ \forall\delta > 0$ için $ab \leq \frac{\delta^r}{r}a^r + \frac{\delta^{-q}b^q}{q}$ şekindeki Young eşitsizliğini kullanalım. Bunun için

$$r = m+1 \quad ve \quad q = \frac{m+1}{m}$$

alıp uygulayalım. Bu durumda

$$\varepsilon \int_0^\alpha x u u_t |u_t|^{m-1} \mathrm{d}x \leq \varepsilon \frac{\delta_1^{m+1}}{m+1} ||u||_{L_x^{m+1}}^{m+1} + \varepsilon \frac{m}{m+1} \delta_1^{-(\frac{m+1}{m})} ||u_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1} \tag{4.3.42}$$

olur. Buradan

$$-\varepsilon \int_0^\alpha x u u_t |u_t|^{m-1} \mathrm{d}x \geq -\varepsilon \frac{\delta_1^{m+1}}{m+1} ||u||_{L_x^{m+1}}^{m+1} - \varepsilon \frac{m}{m+1} \delta_1^{-(\frac{m+1}{m})} ||u_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1} \tag{4.3.43}$$

olur. Benzer şekilde

$$-\varepsilon \int_0^\alpha x v v_t |v_t|^{m-1} \mathrm{d}x \geq -\varepsilon \frac{\delta_2^{m+1}}{m+1} ||v||_{L_x^{m+1}}^{m+1} - \varepsilon \frac{m}{m+1} \delta_2^{-(\frac{m+1}{m})} ||v_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1} \tag{4.3.44}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz (4.3.41), (4.3.43), (4.3.44) ifadelerini (4.3.39) eşitsizliğinde yazıp yeniden düzenlersek

$$
\begin{aligned}
L^{'}(t) \geq & \left[(1-\sigma)H^{-\sigma}(t) - \frac{m}{m+1}\varepsilon\delta_1^{-(\frac{m+1}{m})}\right] ||u_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1} \\
& + \left[(1-\sigma)H^{-\sigma}(t) - \frac{m}{m+1}\varepsilon\delta_2^{-(\frac{m+1}{m})}\right] ||v_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1} \\
& + \varepsilon\Big((r+3) - \frac{a_5}{2}\Big)\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\Big((r+3) - \frac{a_5}{2}\Big)\int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\
& + \varepsilon\left(\alpha_1 - \frac{a_5}{2}\Big(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\right)\int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\
& + \varepsilon\left(\alpha_2 - \frac{a_5}{2}\Big(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\right)\int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\
& + \varepsilon\left(\alpha_3 - \frac{a_5}{2}\right)(g_1 \circ u_x)(t) + \varepsilon\left(\alpha_4 - \frac{a_5}{2}\right)(g_2 \circ v_x)(t) \\
& + \varepsilon a_5 \int_0^\alpha x F(u,v)\mathrm{d}x + \varepsilon\Big((2(r+2) - a_5)\Big)H(t) \\
& - \varepsilon\frac{\delta_1^{m+1}}{m+1}||u||_{L_x^{m+1}}^{m+1} - \varepsilon\frac{\delta_2^{m+1}}{m+1}||v||_{L_x^{m+1}}^{m+1}
\end{aligned} \tag{4.3.45}
$$

elde edilir. (4.3.45) kestirimindeki integrasyon x değişkenine göre olduğundan δ_1 ve δ_2 yi birer zaman fonksiyonu olarak alabiliriz. Bu durumda

$$\delta_1^{-(\frac{m+1}{m})} = k_1 H^{-\sigma}(t) \Rightarrow \delta_1^{m+1} = k_1^{-m} H^{\sigma m}(t), \tag{4.3.46}$$

$$\delta_2^{-(\frac{m+1}{m})} = k_2 H^{-\sigma}(t) \Rightarrow \delta_2^{m+1} = k_2^{-m} H^{\sigma m}(t), \tag{4.3.47}$$

olarak seçebiliriz. Burada belirtmek gerekir ki $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ yeterince büyük sabitlerdir.

Bu ifadeleri gözönünde bulundurarak (4.3.45) eşitsizliğini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
L^{'}(t) \geq & \left((1-\sigma) - \frac{m}{m+1}\varepsilon k_1\right) H^{-\sigma}(t)||u_t||^{m+1}_{L^{m+1}_x} \\
& + \left((1-\sigma) - \frac{m}{m+1}\varepsilon k_2\right) H^{-\sigma}(t)||v_t||^{m+1}_{L^{m+1}_x} \\
& + \varepsilon\Big((r+3) - \frac{a_5}{2}\Big) \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\Big((r+3) - \frac{a_5}{2}\Big) \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x \\
& + \varepsilon \left(\alpha_1 - \frac{a_5}{2}\Big(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\right) \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\
& + \varepsilon \left(\alpha_2 - \frac{a_5}{2}\Big(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\right) \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\
& + \varepsilon \left(\alpha_3 - \frac{a_5}{2}\right) (g_1 \circ u_x)(t) + \varepsilon \left(\alpha_4 - \frac{a_5}{2}\right) (g_2 \circ v_x)(t) \\
& + \varepsilon a_5 \int_0^\alpha x F(u,v) \mathrm{d}x + \varepsilon\Big((2(r+2) - a_5)\Big) H(t) \\
& - \frac{\varepsilon k_1^{-m}}{m+1} H^{\sigma m}(t)||u||^{m+1}_{L^{m+1}_x} - \frac{\varepsilon k_2^{-m}}{m+1} H^{\sigma m}(t)||v||^{m+1}_{L^{m+1}_x} \qquad (4.3.48)
\end{aligned}$$

olur. (4.3.48) de bulunan son iki terim için kestirimde bulunalım. Bunun için ilk olarak teoremin ispatının hemen başında elde ettiğimiz (4.3.22) üzerinden hareket edelim. Bu durumda

$$\frac{c_1}{2(r+2)} = c_2$$

olmak üzere

$$H(t) \leq \frac{c_1}{2(r+2)} \left[||u||^{2(r+2)}_{L^{2(r+2)}_x} + ||v||^{2(r+2)}_{L^{2(r+2)}_x}\right] \qquad (4.3.49)$$

$$(H(t))^{\sigma m} \leq \left(\frac{c_1}{2(r+2)}\right)^{\sigma m} \left[||u||^{2(r+2)}_{L^{2(r+2)}_x} + ||v||^{2(r+2)}_{L^{2(r+2)}_x}\right]^{\sigma m} \qquad (4.3.50)$$

$$\frac{\varepsilon k_1^{-m}}{m+1} (H(t))^{\sigma m} ||u||^{m+1}_{L^{m+1}_x} \leq \frac{\varepsilon k_1^{-m} c_2^{\sigma m}}{m+1} \left[||u||^{2(r+2)}_{L^{2(r+2)}_x} + ||v||^{2(r+2)}_{L^{2(r+2)}_x}\right]^{\sigma m} ||u||^{m+1}_{L^{m+1}_x} \qquad (4.3.51)$$

olur. Diğer yandan $2(r+2) > m+1$ olduğundan $L^{2(r+2)}_x \hookrightarrow L^{m+1}_x$ gömülmesinden

$$\begin{aligned}
||u||^{m+1}_{L^{m+1}_x} &\leq C||u||^{m+1}_{L^{2(r+2)}_x} \\
&\leq C \left[||u||_{L^{2(r+2)}_x} + ||v||_{L^{2(r+2)}_x}\right]^{m+1} \qquad (4.3.52)
\end{aligned}$$

olur. Bu fadeyi (4.3.51) te yazarsak

$$\frac{\varepsilon k_1^{-m}}{m+1}\left(H(t)\right)^{\sigma m}||u||_{L_x^{m+1}}^{m+1}$$
$$\leq \frac{\varepsilon k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C}{m+1}\left[||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}\right]^{\sigma m}\left[||u||_{L_x^{2(r+2)}}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}\right]^{m+1} \tag{4.3.53}$$

olur. Burada $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$a^p + b^p \leq (a+b)^p$$

şekindeki eşitsizliği kullanırsak

$$\left[||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}\right] \leq \left[||u||_{L_x^{2(r+2)}}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}\right]^{2(r+2)} \tag{4.3.54}$$

olur. Bu ifadeyi de (4.3.53) da yazıp ve düzenlersek

$$\frac{\varepsilon k_1^{-m}}{m+1}\left(H(t)\right)^{\sigma m}||u||_{L_x^{m+1}}^{m+1}$$
$$\leq \frac{\varepsilon k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C}{m+1}\left[||u||_{L_x^{2(r+2)}}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}\right]^{2(r+2)\sigma m+m+1} \tag{4.3.55}$$

olur. Benzer şekilde

$$\frac{\varepsilon k_2^{-m}}{m+1}\left(H(t)\right)^{\sigma m}||v||_{L_x^{m+1}}^{m+1}$$
$$\leq \frac{\varepsilon k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C}{m+1}\left[||u||_{L_x^{2(r+2)}}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}\right]^{2(r+2)\sigma m+m+1} \tag{4.3.56}$$

elde edilir. (4.3.55) ve (4.3.56) da $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$(a+b)^p \leq c(a^p + b^p), \quad (c = 2^{p-1})$$

şekindeki eşitsizliği kullanırsak $c \cdot C = C'$ olmak üzere

$$\frac{\varepsilon k_1^{-m}}{m+1}\left(H(t)\right)^{\sigma m}||u||_{L_x^{m+1}}^{m+1}$$
$$\leq \frac{\varepsilon k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\left[||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)\sigma m+m+1}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)\sigma m+m+1}\right] \tag{4.3.57}$$

ve

$$\frac{\varepsilon k_2^{-m}}{m+1}(H(t))^{\sigma m}||v||_{L_x^{m+1}}^{m+1}$$
$$\leq \frac{\varepsilon k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\left[||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)\sigma m+m+1}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)\sigma m+m+1}\right] \quad (4.3.58)$$

olur. (4.3.24) den

$$2(r+2)\sigma m+m+1\leq 2(r+2)\left(\frac{2(r+2)-m-1}{2m(r+2)}\right)m+m+1=2(r+2), \quad (4.3.59)$$

$$r\geq -1$$
$$2(r+2)\geq 2$$
$$2(r+2)\sigma m+m+1\geq 2 \quad (4.3.60)$$

olur. Buradan

$$2\leq \underbrace{2(r+2)\sigma m+m+1}_{s}\leq \underbrace{2(r+2)}_{p}$$

olur. Böylece (4.3.17) yi kullanarak

$$||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)\sigma m+m+1}\leq ||u_x||_H^2+||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}$$

ve

$$||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)\sigma m+m+1}\leq ||v_x||_H^2+||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}$$

ifadelerine ulaşabiliriz. Bu ifadeleri (4.3.57) ve (4.3.58) de yerine yazalım. Bu durumda

$$\frac{\varepsilon k_1^{-m}}{m+1}(H(t))^{\sigma m}||u||_{L_x^{m+1}}^{m+1}$$
$$\leq \frac{\varepsilon k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\left[||u_x||_H^2+||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}+||v_x||_H^2+||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}\right], \quad (4.3.61)$$

$$\frac{\varepsilon k_2^{-m}}{m+1}(H(t))^{\sigma m}||v||_{L_x^{m+1}}^{m+1}$$
$$\leq \frac{\varepsilon k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\left[||u_x||_H^2+||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}+||v_x||_H^2+||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}\right], \quad (4.3.62)$$

olur. (4.3.61) ve (4.3.62) ifadelerini -1 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak ve düzenlersek

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\varepsilon k_1^{-m}}{m+1}H^{\sigma m}(t)||u||_{L_x^{m+1}}^{m+1}-\frac{\varepsilon k_2^{-m}}{m+1}H^{\sigma m}(t)||v||_{L_x^{m+1}}^{m+1}\\
&\quad\geq\left[-\frac{\varepsilon k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}-\frac{\varepsilon k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\right]\left(||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}+||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}\right)\\
&\quad+\left[-\frac{\varepsilon k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}-\frac{\varepsilon k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\right]\left(||u_x||_H^2+||v_x||_H^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.3.63}
$$

kestirimine ulaşmış oluruz. Son olarak

$$
||u_x||_H^2=\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x,\quad ||v_x||_H^2=\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x,
$$

$$
||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}=\int_0^\alpha x|u|^{2(r+2)}\mathrm{d}x,\quad ||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}=\int_0^\alpha x|v|^{2(r+2)}\mathrm{d}x,
$$

$$
c'\cdot\left(\int_0^\alpha x|u|^{2(r+2)}\mathrm{d}x+\int_0^\alpha x|v|^{2(r+2)}\mathrm{d}x\right)\leq\int_0^\alpha xF(u,v)\mathrm{d}x,\quad\left(\frac{c_0}{2(r+2)}=c'\right)
$$

ifadelerini ve (4.3.63) ifadesini gözönünde bulundurup (4.3.48) ifadesini yeniden düzenlersek

$$
\begin{aligned}
L'(t)&\geq\left((1-\sigma)-\frac{m}{m+1}\varepsilon k_1\right)H^{-\sigma}(t)||u_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1}\\
&+\left((1-\sigma)-\frac{m}{m+1}\varepsilon k_2\right)H^{-\sigma}(t)||v_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1}\\
&+\varepsilon\Big((r+3)-\frac{a_5}{2}\Big)\int_0^\alpha xu_t^2\mathrm{d}x+\varepsilon\Big((r+3)-\frac{a_5}{2}\Big)\int_0^\alpha xv_t^2\mathrm{d}x\\
&+\varepsilon\left[\left(\alpha_1-\frac{a_5}{2}\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\right)-\frac{k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}-\frac{k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\right]\int_0^\alpha xu_x^2\mathrm{d}x\\
&+\varepsilon\left[\left(\alpha_2-\frac{a_5}{2}\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\right)-\frac{k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}-\frac{k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\right]\int_0^\alpha xv_x^2\mathrm{d}x\\
&+\varepsilon\left[c'a_5-\frac{k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}-\frac{k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\right]\int_0^\alpha x|u|^{2(r+2)}\mathrm{d}x\\
&+\varepsilon\left[c'a_5-\frac{k_1^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}-\frac{k_2^{-m}c_2^{\sigma m}C'}{m+1}\right]\int_0^\alpha x|v|^{2(r+2)}\mathrm{d}x\\
&+\varepsilon\left[\alpha_3-\frac{a_5}{2}\right](g_1\circ u_x)(t)+\varepsilon\left[\alpha_4-\frac{a_5}{2}\right](g_2\circ u_x)(t)\\
&+\varepsilon\left[2(r+2)-a_5\right]H(t),
\end{aligned}
\tag{4.3.64}
$$

olur. Şimdi burada

$$\begin{aligned}\gamma = \varepsilon \cdot \ min\Bigg\{ & (r+3) - \frac{a_5}{2}, \\ & \left[\left(\alpha_1 - \frac{a_5}{2}\left(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\right) - \frac{k_1^{-m} c_2^{\sigma m} C'}{m+1} - \frac{k_2^{-m} c_2^{\sigma m} C'}{m+1}\right], \\ & \left[\left(\alpha_2 - \frac{a_5}{2}\left(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\right) - \frac{k_1^{-m} c_2^{\sigma m} C'}{m+1} - \frac{k_2^{-m} c_2^{\sigma m} C'}{m+1}\right], \\ & \left[c' a_5 - \frac{k_1^{-m} c_2^{\sigma m} C'}{m+1} - \frac{k_2^{-m} c_2^{\sigma m} C'}{m+1}\right], \left[\alpha_3 - \frac{a_5}{2}\right], \left[\alpha_4 - \frac{a_5}{2}\right], \\ & [2(r+2) - a_5]\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.3.65}$$

olmak üzere pozitif γ sabiti için $k_1 > 0$ ve $k_2 > 0$' ı yeterince büyük alalım. Bu durumu daha basit olarak ifade edersek

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left((1-\sigma) - \frac{m}{m+1}\varepsilon k_1\right) H^{-\sigma}(t)||u_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1} \\ & + \left((1-\sigma) - \frac{m}{m+1}\varepsilon k_2\right) H^{-\sigma}(t)||v_t||_{L_x^{m+1}}^{m+1} \\ & + \varepsilon\gamma\Bigg[\int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\ & + \int_0^\alpha x|u|^{2(r+2)}\mathrm{d}x + \int_0^\alpha x|v|^{2(r+2)}\mathrm{d}x + (g_1 \circ u_x)(t) \\ & + (g_2 \circ v_x)(t) + H(t)\Bigg] \end{aligned} \tag{4.3.66}$$

olur. Daha önce belirlemiş olduğumuz $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ ve $\gamma > 0$ sabitleri için, $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük seçeriz ki

$$\left((1-\sigma) - \frac{m}{m+1}\varepsilon k_1\right) \geq 0$$
$$\left((1-\sigma) - \frac{m}{m+1}\varepsilon k_2\right) \geq 0$$

eşitsizlikleri sağlar. Ayrıca başlangıç verilerinin

$$L(0) = H^{1-\sigma}(0) + \varepsilon\left(\int_0^\alpha x u_0 u_1 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_0 v_1 \mathrm{d}x\right) > 0$$

kestirimini karşıladığını varsayıyoruz. Bu durumda (4.3.66) dan

$$\begin{aligned} L'(t) \geq \varepsilon\gamma \Bigg[& \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x \\ & + \int_0^\alpha x|u|^{2(r+2)} \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x|v|^{2(r+2)} \mathrm{d}x + (g_1 \circ u_x)(t) \\ & + (g_2 \circ v_x)(t) + H(t) \Bigg] \end{aligned} \tag{4.3.67}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Öte yandan (4.3.23) denkleminde her tarafın $\frac{1}{1-\sigma}$ $\cdot$ kuvvetini alırsak

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \left(\int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v v_t \mathrm{d}x \right) \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{4.3.68}$$

olur. Bu denklemin sağ tarafı için $a, b \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{4.3.69}$$

eşitsizliği iki defa uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} [L(t)]^{\frac{1}{1-\sigma}} & \leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left[H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} \left| \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v v_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \\ & \leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left[H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left(\left| \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \left| \int_0^\alpha x v v_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \right] \\ & \leq C \left[H(t) + \left| \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \left| \int_0^\alpha x v v_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \end{aligned} \tag{4.3.70}$$

olur. Burada $C > 0$ dır. Şimdi de (4.3.70) de bulunan $\left|\int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}$ ve $\left|\int_0^\alpha x v v_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}$ ifadeleri için kestirimde bulunalım. Bunun için sırasıyla Hölder eşitsizliği, Gömülme teoremi ve Young eşitsizliği uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\alpha x u u_t \mathrm{d}x \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} & \leq ||u||_H^{\frac{1}{1-\sigma}} ||u_t||_H^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ & \leq C ||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{1}{1-\sigma}} ||u_t||_H^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ & \leq C \left(||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{\theta}{1-\sigma}} + ||u_t||_H^{\frac{\mu}{1-\sigma}} \right) \end{aligned} \tag{4.3.71}$$

olur. Benzer şekilde

$$\left|\int_0^\alpha xvv_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C\left(||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{\theta}{1-\sigma}} + ||v_t||_H^{\frac{\mu}{1-\sigma}}\right) \tag{4.3.72}$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\mu}=1$ dir. Elde ettiğimiz bu ifadeleri taraf rarafa toplarsak

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\alpha xuu_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &+ \left|\int_0^\alpha xvv_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq C\left(||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{\theta}{1-\sigma}} + ||u_t||_H^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + ||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{\theta}{1-\sigma}} + ||v_t||_H^{\frac{\mu}{1-\sigma}}\right)\end{aligned} \tag{4.3.73}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}\mu &= 2(1-\sigma), \\ \theta &= \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma},\end{aligned}$$

seçilirse

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\alpha xuu_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &+ \left|\int_0^\alpha xvv_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq C\left(||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{2}{1-2\sigma}} + ||u_t||_H^2 + ||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{2}{1-2\sigma}} + ||v_t||_H^2\right)\end{aligned} \tag{4.3.74}$$

olur. (4.3.74) de bulunan $||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{2}{1-2\sigma}}$ ve $||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{2}{1-2\sigma}}$ ifadedesi için kestirimde bulunalım. Bu durumda (4.3.17) eşitsizliğini kullanırsak

$$||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{2}{1-2\sigma}} \leq C\left(||u_x||_H^2 + ||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}\right)$$

ve

$$||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{\frac{2}{1-2\sigma}} \leq C\left(||v_x||_H^2 + ||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}\right)$$

elde ederiz. Bu ifadeleri (4.3.74) de yerine yazıp düzenlersek

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\alpha xuu_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &+ \left|\int_0^\alpha xvv_t \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq C\left(||u_t||_H^2 + ||v_t||_H^2 + ||u_x||_H^2 + ||v_x||_H^2 + ||u||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)} + ||v||_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)}\right)\end{aligned} \tag{4.3.75}$$

olur. Böylece

$$\|u_t\|_H^2 = \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x, \quad \|v_t\|_H^2 = \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x,$$
$$\|u_x\|_H^2 = \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x, \quad \|v_x\|_H^2 = \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x,$$
$$\|u\|_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)} = \int_0^\alpha x|u|^{2(r+2)} \mathrm{d}x, \quad \|v\|_{L_x^{2(r+2)}}^{2(r+2)} = \int_0^\alpha x|v|^{2(r+2)} \mathrm{d}x,$$
$$(g_1 \circ u_x)(t) \geq 0, \quad (g_2 \circ v_x)(t) \geq 0,$$

ifadeleri ve (4.3.75) gözönünde bulundurularak (4.3.70) de yazılırsa

$$\begin{aligned}[L(t)]^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \Bigg[& H(t) + \int_0^\alpha x u_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x u_x^2 \mathrm{d}x \\ & + \int_0^\alpha x v_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x|u|^{2(r+2)} \mathrm{d}x + \int_0^\alpha x|v|^{2(r+2)} \mathrm{d}x \\ & + (g_1 \circ u_x)(t) + (g_2 \circ v_x)(t) \Bigg]\end{aligned} \tag{4.3.76}$$

elde edilir. Son olarak (4.3.67) ve (4.3.76) ifadelerinin birleşiminden

$\forall t \geq 0$ için

$$L'(t) \geq \lambda L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t),$$

adi diferansiyel eşitsizliğini elde ederiz. Açıktır ki burada $\lambda > 0$ sabiti yalnızca C, ε ve γ ya bağlı olabilir.

Bu diferansiyel eşitsizliği $(0, t)$ üzerinde integre edip gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\int_0^t \frac{L'(t)}{L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)} \mathrm{d}t \geq \int_0^t \lambda \mathrm{d}t$$

$$\frac{L^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) - L^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0)}{\frac{-\sigma}{1-\sigma}} \geq \lambda t$$

$$L^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq L^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\sigma \lambda t}{1-\sigma}$$

$$L^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) - \lambda(\frac{\sigma}{1-\sigma})t}$$

kestirimine ulaşırız. Burada

$$t \leq T^* = \frac{1-\sigma}{\lambda \sigma L^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

seçilirse

$$\lim_{t \to T^{*-}} L(t) \to \infty$$

olur. Bu da çözümün sonlu bir zamanda patladığını göstermektedir. Böylece teoremimizin ispatı tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada (4.3.1) probleminin negatif başlangıç enerjisi için çözümlerin patlaması Georgiev-Todorova metodu kullanılarak elde edilmiştir. (4.3.1) probleminin negatif ve pozitif başlangıç enerjisi için çözümlerin patlaması farklı metotlar kullanılarak da çalışılabilir. Ayrıca enerji azalması, üstel büyümesi gibi matematiksel davranışları araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier J. J. F., Sobolev Spaces. ***Academic Press***. New York. (2003).

Boulaaras S., Bouizem Y. Blow up of solution for a nonlinear visco-elastic system with general source term. ***Quaestiones Mathematicae***, DOI:10.2989/16073606.2020.1851308

Brezis H., Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations. ***Springer.*** (2011).

Evans L. C., Partial differential equations, ***Graduate Studies in Mathematics, vol.*** 19. (1998).

Georgiev, V., Todorova, G. 1994. Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. ***J. Diff. Eq.,*** 107: 295-308.

Kesavan S., Topics in functional analysis and applications, ***John Wiley Sons***, India. (1989).

Li, M. R., Tsai, L. Y., Existence and nonexistence of global solutions of some systems of semilinear wave equations. Nonlinear Anal Theory, Methods and Applications. (2003);54:1397-1415.

Mesloub S, Messaoudi S.A. Global Existence, Decay, and Blow up of Solutions of a Singular Nonlocal Viscoelastic Problem. ***Acta Appl. Math***. (2010) 110: 705-724.

Mesloub S, Mesloub F. Solvability of a Mixed Nonlocal Problem for a Nonlinear Singular Viscoelastic Equation. ***Acta Appl. Math***. (2010) 110: 109-129.

Messaoudi, S. A., Houari B. S. Global nonexistence of positive initial energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms. ***J. Math. Anal. Appl***., (2010), 365: 277-287.

Messaoudi, S. A. Global nonexistence in a nonlinearly damped wave equation. ***Appl. Anal***. (2001), 80: 269-277.

Messaoudi S.A. Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation. ***Mathematische Nachrichten***. (2003);260:58-66.

Pişkin, E., (2013), Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Pişkin E., Sobolev Uzayları, ***Seçkin Yayıncılık***, (2017).

Pişkin E., Diferansiyel Denklemler, ***Seçkin Yayıncılık***, (2019).

Polat, N., (2005), Doğrusal olmayan parabolik ve hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Shuntang W. Blow up of Solutions for a Singular Nonlocal Viscoelastic Equation. ***J Part. Diff. Equ***. (2011); 24(2): 140-149.

Zarai A., Draifia A., Boulaaras S. Blow up of solutions for a system of nonlocal singular viscoelastic equations. ***Appl Anal***. (2018), 97 : 2231-2245.

Wazwaz A.M., Linear and Nonlinear Integral Equations, ***Springer***. (2011).

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Hasan KANDEMİR
ÖĞRENCİ NO	18804202
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2020-2021
YARIYIL	☒ Güz ☐ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Tekil İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	94
BENZERLİK ORANI	%24
RAPORLAMA TARİHİ	09/03/ 2021

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 94 sayfalık kısmına ilişkin, 09/03/2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %24 ‘tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve bu Uygulama Esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Hasan KANDEMİR

10/03/2021 Doç.Dr.Erhan PİŞKİN Tez Danışmanı	…./…./2021 Prof.Dr. H. Özlem GÜNEY Anabilim Dalı Başkanı

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.