



**NEWTON-TİPİ SABİT NOKTA İTERASYON  
METOTLARININ YAKINSAMA ANALİZİ**

**Nazlı KARACA**

**Doktora Tezi**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı**

**Doç. Dr. İsa YILDIRIM**

**2017**

**Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**NEWTON-TİPİ SABİT NOKTA İTERASYON  
METOTLARININ YAKINSAMA ANALİZİ**

**Nazlı KARACA**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI  
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı**

**ERZURUM  
2017**

**Her hakkı saklıdır**



T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

NEWTON-TİPİ SABİT NOKTA İTERASYON METOTLARININ YAKINSAMA  
ANALİZİ

Doç. Dr. İsa YILDIRIM danışmanlığında, Nazlı KARACA tarafından hazırlanan bu çalışma, 18/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Prof. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Doç. Dr. Erhan SET

İmza :

Üye : Doç. Dr. İsa YILDIRIM

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 01/06/2017 tarih ve 22/17 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ  
Enstitü Müdürü

Bu çalışma BAP, projeleri kapsamında desteklenmiştir.  
Proje No: 2016/153

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

Doktora Tezi

### NEWTON-TİPİ SABİT NOKTA İTERASYON METOTLARININ YAKINSAMA ANALİZİ

Nazlı KARACA

Atatürk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsa YILDIRIM

Bu tezde öncelikle modifiye edilmiş SP iterasyon metodu olarak adlandırılan yeni bir iterasyon metodu teşkil edilmiş ve bu iterasyonun normlu uzaylarda daraltan dönüşümler için literatürdeki diğer iterasyon metotları ile karşılaştırması yapılmıştır. Daha sonra bu iterasyon metodu ile birlikte normal S-iterasyon metodunun Newton formları oluşturularak lineer olmayan denklemlerin çözümüne yakınsaması ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bu metotların başlangıç ve sınır değer problemlerine uygulaması verilmiş ve bu çalışmadaki iterasyonlar kullanılarak farklı kompleks polinom denklemleri için polinomgrafiler elde edilmiştir. Son olarak, keyfi bir aralıkta tanımlı sürekli dönüşümler için yakınsama teoremleri verilmiştir.

**2017, 102 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Sabit nokta, yakınsama oranı, Newton metodu, Newton-tipi iterasyon metotları, polinomgrafi

## **ABSTRACT**

Ph. D. Thesis

### **CONVERGENCE ANALYSIS OF NEWTON-TYPE FIXED POINT ITERATION METHODS**

Nazlı KARACA

Ataturk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Discipline of Analysis and Function Theory

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsa YILDIRIM

In this thesis, firstly a new iterative method called modified SP iterative method is introduced and it is compared that the convergence of this iteration with the other iterations in literature for contraction mappings in normed spaces. Then, this iteration and normal S-iteration is regenerated as form of Newton-like method and convergence theorems are demonstrated for nonlinear equations. Moreover, applications to initial value problems and boundary value problems of this methods are included and using iterative methods in this work, polynomiographies are obtained for different complex polynomial equations. Finally, it is proved that convergence theorems for continuous mappings on an arbitrary interval.

**2017, 102 pages**

**Anahtar Kelimeler:** Fixed point, rate of convergence, Newton's method, Newton-like methods, polynomiography

## TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın gerekleőmesinde bana destek olan, bilgi ve tecrübeleriyle katkıda bulunan değerli tez danıőmanım Sayın Do. Dr. İsa YILDIRIM'a sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca benden yardımlarını esirgemeyen baőta Matematik Bölüm Baőkanı Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR olmak üzere, değerli jüri üyelerine, Yrd. Doç. Dr. Süheyla ELMAS'a ve Matematik Bölümünün değerli öğretim üyelerine teőekkürü bir borç bilirim. Ayrıca Silesia Üniversitesi'nden Yrd. Doç. Dr. Krzysztof Gdawiec'e katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca maddi manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme ve anlayıőı ve desteği ile her zaman yanımda olan sevgili eőim Serkan KARACA'ya en içten duygularım ile teşekkür ederim.

**Nazlı KARACA**

**Mayıs, 2017**

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER.....</b>	<b>5</b>
2.1. Normlu Uzay ve Operatörler.....	5
2.2. Sabit Nokta Kavramı.....	9
2.3. Picard İterasyonu ve Bazı Sabit Nokta Teoremleri.....	11
2.4. Fréchet Türevi ve Bazı Önemli Tanımlar.....	18
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM.....</b>	<b>24</b>
3.1. Newton Metodu ve Bu Metotla İlgili Yakınsama Teoremleri.....	24
3.2. Diğer İterasyon Metotları.....	31
3.3. Yakınsama Oranı ve Teoremler.....	33
3.4. Banach Uzaylarında Lineer Olmayan Operatör Denklemler İçin Newton Metodu.....	39
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....</b>	<b>46</b>
4.1. Yakınsama Oranı.....	47
4.2. Newton-Tipi S-İterasyonu.....	50
4.3. Banach Uzayında Modifiye Edilmiş Newton-Tipi SP İterasyon Metodu.....	63
4.3.1. Uygulamalar.....	73
4.3.2. Nümerik Örnekler.....	78
4.4. Polinomgrafiler.....	84
4.5. Sürekli Dönüşümlerin Sabit Noktaları İçin Yakınsama Teoremleri.....	90
<b>5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....</b>	<b>97</b>
KAYNAKLAR.....	99
ÖZGEÇMİŞ.....	103

## SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$n$ -boyutlu reel uzay
$B_r(x)$	$x$ merkezli ve $r$ yarıçaplı açık yuvar
$B_r[x]$	$x$ merkezli ve $r$ yarıçaplı kapalı yuvar
$D(T)$	$T$ operatörünün tanım kümesi
$\mathfrak{R}(T)$	$T$ operatörünün görüntü kümesi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$B(X, Y)$	$X$ den $Y$ ye tanımlı sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$F(f)$	$f$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$c_0$	$0$ a yakınsayan dizilerin uzayı
$L_2[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı karesi integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$C^1[a, b]$	$[a, b]$ de tanımlı 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı
$C^2[a, b]$	$[a, b]$ de tanımlı 2. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı
$I$	Birim operatör

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. $g$ fonksiyonunun üç sabit noktası.....	24
Şekil 3.2. $f(x) = 0$ denkleminin çözümü $g$ fonksiyonunun sabit noktasıdır. ....	25
Şekil 4.1. S-iterasyonu, $z^3 - 1 = 0$ , $z^4 - 1 = 0$ , $z^5 + z^2 + 1 = 0$ ve $z^8 - 1 = 0$ denklemleri için polinomgrafi örnekleri .....	87
Şekil 4.2. $z^3 - 1 = 0$ denklemi, (4.3) ve (4.30) iterasyonları için polinomgrafi .....	88
Şekil 4.3. $z^4 - 1 = 0$ denklemi, (4.3) ve (4.30) iterasyonları için polinomgrafi örneği.....	88
Şekil 4.4. $z^5 + z^2 + 1 = 0$ denklemi, (4.3) ve (4.30) iterasyonları için polinomgrafi örneği.....	89
Şekil 4.5. $z^8 - 1 = 0$ denklemi, (4.3) ve (4.30) iterasyonları için polinomgrafi örneği.....	89

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<b>Çizelge 3.1.</b> $x_0 = 1$ için $g_1(x_n)$ , $g_2(x_n)$ ve $g_3(x_n)$ dizilerinin yakınsaması .....	27
<b>Çizelge 3.2.</b> $x_0 = 1.167$ için $g_1(x_n)$ , $x_0 = 10$ için $g_2(x_n)$ ve $g_3(x_n)$ dizilerinin yakınsaması.....	27
<b>Çizelge 4.1.</b> Farklı iterasyonların sabit noktaya yakınsamasının karşılaştırılması .....	50
<b>Çizelge 4.2.</b> $f_1, x_0 = 1.2, \alpha = 0.5$ .....	59
<b>Çizelge 4.3.</b> $f_1, x_0 = 1.2, \alpha = 1.0$ .....	60
<b>Çizelge 4.4.</b> $f_2, x_0 = 1, \alpha = 0.5$ .....	60
<b>Çizelge 4.5.</b> $f_2, x_0 = 1, \alpha = 1.0$ .....	60
<b>Çizelge 4.6.</b> Newton-tipi iterasyon metotlarının karşılaştırılması .....	81

## 1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, yeni uygulama alanlarıyla sürekli gelişen matematiğin en önemli alanlarından birisidir. Bu teori, boş olmayan bir  $X$  kümesi üzerinde tanımlı bir  $T$  dönüşümü için  $x = Tx$  operatör denkleminin bir çözümü olan  $x \in X$  noktalarının varlığını garanti eden şartlar üzerine kuruludur. Varyasyonel eşitsizlik problemleri, optimizasyon problemleri, denge problemleri, integral ve diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığının ispatı ile ilgili teoremler, bir sabit nokta problemi çözümü içerisinde yer alır. Dolayısıyla bu teorinin elementer hesaplardan cebire, topolojiden analize kadar matematiğin çeşitli alanlarında birçok uygulaması vardır ve bu alanlardaki ortaya çıkan problemleri çözmek için gerekli bir materyaldir.

1912 yılında L. E. J. Brouwer,  $x = Tx$  şeklindeki denklemlerin çözümü için bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Daha sonra bu teoremin bir kare, küre ve bunların  $n$ -boyutlu benzer parçaları için genelleştirmesini vermiştir. 1922 yılında S. Banach tarafından fonksiyonel analizdeki en önemli teoremlerden biri olan ve sabit nokta teorisinin temelini oluşturan “Daraltan (Büzülme) Dönüşüm Prensibi” veya “Banach Sabit Nokta Teoremi” verilmiştir. Bu teorem, “ $(X, d)$  bir tam metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  dönüşümü  $\forall x, y \in X, k \in (0,1)$  için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

şartını sağlıyorsa,  $T$  bir sabit noktaya sahiptir” şeklinde ifade edilir. Bu teoremden kullanılan dönüşümün daraltan olması şartı, teoremin uygulama alanlarını kısıtlamaktadır. Dolayısıyla birçok araştırmacı, ele alınan uzayın yapısını değiştirerek veya farklı dönüşüm sınıflarını kullanarak bu teoremin çok sayıda genelleştirmesini elde etmişlerdir.

Sabit nokta problemlerinin çözümüne yaklaşmakta farklı iterasyon metotları kullanılmaktadır. Literatürde en yaygın olarak kullanılan iterasyon metotları Picard, Mann, Ishikawa, Noor, Multi-step ve Kirk iterasyonlarıdır. Sabit nokta teorisi içinde ele

alınan problemlerden birisi, bir dönüşümün sabit noktasına yakınsayan ve diğer iterasyonlardan daha iyi yakınsama oranına sahip olan bir iterasyonun olup olmadığının araştırılmasıdır. Bu probleme birçok araştırmacı değişik iterasyon metotları oluşturarak cevap aramaya çalışmıştır. Kullanılan metotlardan bazıları S-iterasyonu, normal S-iterasyonu, SP-iterasyonu (Phuengrattana and Suantai 2011) ve CR-iterasyonudur (Chugh *et al.* 2012).

Sabit nokta iterasyon metotları, lineer veya lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümlerinde de yaygın olarak kullanılır. Dolayısıyla lineer olmayan operatör denklemlerin çözümünü bulma problemi ile sabit nokta teorisi arasında bir bağlantı vardır. Birçok durumda, operatör denkleminin çözümü, uygun bir operatörün sabit noktası olmaktadır.  $p(x) = 0$  polinom denklemi,  $T(x) - x = p(x)$  olmak üzere  $T(x) - x = 0$  şeklinde yazılabilir. Örneğin,  $x^2 - 5x + 6 = 0$  denklemi verilsin. Yani  $p(x) = x^2 - 5x + 6$  ve  $T(x) - x = p(x) = x^2 - 5x + 6$  yazılabilir. Burada  $T(x) = \frac{x^2+6}{5} = x$  olur. Böylece  $p(x) = 0$  denkleminin çözümü,  $T$  operatörünün sabit noktasını bulma problemine dönüşmüş olur.

Lineer olmayan operatör denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılan en önemli iterasyon metotlarından birisi de Newton metodudur. 1669 yılında, Newton  $x^3 - 2x - 5 = 0$  polinom denklemi için yeni bir algoritma oluşturmuştur. Fakat, bu algoritmanın uygulanmasındaki en büyük zorluk başlangıç değerinin seçimi olduğundan, daha farklı metotlar arayışına girilmiştir. 1690 da Raphson, Newton'un metodunu geliştirerek daha genel olan  $x^3 - bx - c = 0$  denklemine uygulamıştır. Daha sonra, Fourier (1818) Newton metodunun kuadratik yakınsamasını  $\mathbb{R}$  de ispatlamıştır. 1966 yılında Ostrowski ve 1987 yılında Demidovich ve Maron, Newton metodu ile ilgili yaptıkları çalışmalarda  $[a, b]$  aralığından  $\mathbb{R}$  ye tanımlı fonksiyonlar için yakınsama teoremlerini vermişlerdir. Kantorovich (1948) ise Newton metodunun kuadratik yakınsamasını Banach uzayları için vermiştir. Newton-Raphson metodu olarak da bilinen bu metodun bazı genelleştirmeleri sabit noktaların bulunmasında da kullanılmıştır (W. Werner 1984). Bu metod, lineer olmayan denklemler, lineer olmayan denklem sistemleri, diferansiyel denklemler gibi çeşitli denklemlerde uygulanabilir olduğu için I. K. Argyros (2003), L.

Kohaupt (2012), H. Ren ve I. K. Argyros (2010), V. A. Vijesh ve P. V. Subrahmanyam (2008) gibi araştırmacılar tarafından çalışılmıştır.

Berinde (1995), Sen, Mukherjee ve Patra (2006), Berinde ve Pacurar (2006) alışmalarında  $f$  dönüşümü üzerinde daha zayıf şartlar ve genelleştirilmiş Newton metotlarını kullanarak bazı yakınsama teoremleri elde etmişlerdir. Bu sonuçlar Sen ve arkadaşları tarafından benzer metotlar kullanılarak  $n$ -boyutlu uzaylara ve 2012 yılında Sahu *et al.* tarafından ise Newton tipi S-iterasyon metodu kullanılarak Banach uzaylarına genişletilmiştir.

Yukarıdaki alışmalar ışığında, aşağıdaki temel sorular bizi bu tez çalışmasına yönlendirmiştir:

- Sabit nokta iterasyon metotları ile denklem özümlelerinde kullanılan metotlar arasında nasıl bir bağlantı vardır?
- Bazı uygun şartlar altında Newton metodu, Picard iterasyonundan daha iyi bir yakınsama oranına sahipse diğer iterasyon metotları Newton formunda yazılıp bunlar için  $\mathbb{R}$  de veya sonsuz boyutlu Banach uzaylarında yakınsama teoremleri oluşturulabilir mi? Veya bu teoremlerin sabit nokta teoremleri yardımıyla ispatları yapılabilir mi?
- Newton-tipi sabit nokta iterasyon metotları ile literatürde kullanılmış olan diğer genelleştirilmiş Newton metotları arasındaki farklılıklar nelerdir? Bu metotlar ne tür uygulamalar içerir?

Bu tez genel olarak beş ana başlık altında toplanmıştır.

Bu tezin giriş kısmında, geçmişten günümüze kadar yapılmış olan çalışmalar tarihi bir seyir halinde sunulmuştur.

İkinci bölümde tezde kullandığımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde öncelikle çeşitli sabit nokta iterasyonları tanıtılarak bu iterasyonların sabit noktaya yakınsamaları karşılaştırılmıştır. Daha sonra farklı uzaylarda tanımlanmış olan Newton iterasyon metodu ile çeşitli Newton-tipi iterasyon metotlarının yakınsamaları ile ilgili teoremlere yer verilmiştir.

Bu tezin orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölümde ilk olarak yeni bir iterasyon metodu tanıtılarak normlu uzaylarda daraltanlık şartını sağlayan dönüşümler için literatürdeki diğer iterasyonlarla karşılaştırılması yapılmıştır. Daha sonra oluşturulan bu yeni iterasyon ve ikinci bölümde bahsedilen normal S-iterasyonu Newton metodu formunda yeniden yazılarak farklı uzaylardaki yakınsama teoremleri sabit nokta teoremleri yardımıyla ispatlanmış ve bu metotların daha önceden yapılan çalışmalarda kullanılan çeşitli Newton-tipi iterasyon metotlarıyla karşılaştırmaları yapılmıştır.

Ayrıca matematik ve sanat arasındaki köprü olarak tanımlanan ve iterasyonlar tarafından oluşturulan polinomgrafiler için, bu çalışmadaki iterasyonlar kullanılarak farklı kompleks polinom denklemleri için çeşitli polinomgrafiler elde edilmiştir.

Son olarak,  $\mathbb{R}$  de kapalı bir aralıkta tanımlı sürekli dönüşümler için bazı yakınsama teoremleri verilmiştir

Son bölümde ise Araştırma Bulgularında yapılan çalışmalarla ilgili bazı önerilere yer verilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. Normlu Uzay ve Operatörler

Bu bölümde, bu tez kapsamında bilinmesi gereken bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1.1:**  $X$ , bir  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü her  $x, y \in X$  ve her  $\alpha \in K$  için

- (i)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ ;
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ;
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa  $X$  üzerinde norm adını alır ve  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine de (veya kısaca  $X'$ e) normlu uzay adı verilir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.1.2:**  $X$  bir normlu uzay,  $x \in X$  ve  $r \in \mathbb{R}^+$  pozitif bir reel sayı olmak üzere,

$B_r(x) = \{y \in X: \|x - y\| < r\}$  kümesi,  $x$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı açık yuvar,

$B_r[x] = \{y \in X: \|x - y\| \leq r\}$  kümesi,  $x$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı kapalı yuvar

olarak tanımlanır.  $A \subset X$  olmak üzere her  $x \in A$  için  $B_r(x) \subset A$  olacak şekilde bir  $r > 0$  sayısı varsa  $A$ 'ya açık küme denir (Sahu 2012).

**Tanım 2.1.3:**  $X$  bir lineer uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Her  $x, y \in A$  için

$$B = \{z \in X: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise,  $A$  kümesine konvektir denir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.1.4:**  $\{x_n\}$ ,  $X$  normlu uzayında bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir  $x \in X$  varsa  $\{x_n\}$  dizisine yakınsak dizi denir ve bu  $x_n \rightarrow x$  şeklinde gösterilir (Kreyszig 1989).

**Tanım 2.1.5:**  $X$  bir normlu uzay ve  $\{x_n\}$  de bu uzayda bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $n, m > N$  olduğunda  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N$  pozitif tamsayısı varsa, yani  $n, m \rightarrow \infty$  iken  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$  oluyorsa,  $\{x_n\}$  dizisine Cauchy dizisi denir (Kreyszig 1989).

**Tanım 2.1.6:**  $X$  bir normlu uzay olsun. Eğer  $X$ ,  $d(x, y) = \|x - y\|$  norm metriğine göre tam ise  $X$  e Banach uzayı denir. Diğer bir deyişle,  $X$  normlu uzayındaki her Cauchy dizisi  $X$  in bir elemanına yakınsıyorsa,  $X$  e Banach uzayı denir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.1.7:**  $X$  ve  $Y$  iki normlu uzay ve  $D \subset X$  olsun.  $D$  nin her elemanına  $Y$  nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala  $D$  den  $Y$  ye bir operatör denir ve  $T: D \subset X \rightarrow Y$ ,  $T(x) = y$  ile gösterilir. Operatörün tanım kümesi için  $D(T)$  ve görüntü kümesi için de  $\mathfrak{R}(T)$  sembolleri kullanılır (Siddiqi 2004).

Operatörlerle işlem yaparken notasyonları basitleştirmek için  $T(x)$  yerine bazen  $Tx$  ifadesi de kullanılır.

**Tanım 2.1.8:**  $X$  ve  $Y$  iki normlu uzay ve  $T: X \rightarrow Y$  bir operatör olsun.  $x_0 \in X$  ve  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $\|x - x_0\|_X < \delta$  için  $\|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $T$  operatörü  $x_0$  noktasında süreklidir denir (Siddiqi 2004).

Burada  $\|x\|_X$  ile  $X$  uzayında tanımlanan norm ve  $\|T(x)\|_Y$  ile  $Y$  uzayında tanımlanan norm kastedilmektedir.

**Tanım 2.1.9:**  $X$  ve  $Y$  iki normlu uzay ve  $T: X \rightarrow Y$  bir lineer operatör olsun. Her  $x \in X$  için

$$\|T(x)\|_Y \leq K\|x\|_X \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir  $K > 0$  reel sayısı varsa,  $T$  ye sınırlı lineer operatör denir (Siddiqi 2004). Diğer bir deyişle, operatörün tanım kümesindeki sınırlı her kümenin görüntüsü sınırlı bir kümeye karşılık geliyorsa bu operatöre sınırlı operatör denir. Ayrıca (2.1) eşitsizliğini sağlayan  $K$  ların infimumuna  $T$  operatörünün normu denir ve bu norm

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, x \neq \theta \right\}$$

şeklinde tanımlanır. O halde  $T$  sınırlı lineer operatör ise  $\|T\| \leq K$  dır.

$X$  ve  $Y$  iki normlu uzay olmak üzere  $T: X \rightarrow Y$  bir lineer operatörü için süreklilik ve sınırlılık kavramları denktir. Ayrıca,  $T$  lineer operatörü ya  $X$  in her noktasında sürekli veya  $X$  in her noktasında süreksizdir. Diğer bir deyişle,  $T$  lineer operatörünün bir noktada sürekli olması her noktada sürekli olmasını gerektirir.

**Örnek 2.1.10:**  $[a, b]$  aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı  $C[a, b]$  ve bunun üzerinde supremum normu  $\|\cdot\|_\infty$  verilmiş olsun. Böylece  $T: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

şeklinde tanımlanan  $T$  lineer dönüşümü sınırlı ve dolayısıyla  $C[a, b]$  de süreklidir (Bayraktar 2006).

$X$  ve  $Y$  iki normlu uzay olmak üzere  $X$  den  $Y$  ye tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi  $B(X, Y)$  ile gösterilsin. Operatörlerin toplamı ve skalerle çarpma işlemlerine

göre  $B(X, Y)$  bir lineer uzaydır.  $B(X, Y)$ ,  $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$  normuna göre bir normlu uzaydır. Eğer  $Y$  bir Banach uzayı ise  $B(X, Y)$  aynı norma göre bir Banach uzayı olur.

**Teorem 2.1.11:**  $T_1, T_2 \in B(X, X)$  olmak üzere  $(T_1 T_2)(x) = T_1(T_2(x))$  olarak tanımlanırsa

(i)  $T_1 T_2 \in B(X, X)$  dir.

(ii)  $\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$  ve  $\|T_1^n\| \leq \|T_1\|^n$  dir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.1.12:**  $X$  ve  $Y$  aynı bir  $K$  cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun.  $T: X \rightarrow Y$  birebir ve üzerine bir operatör ise  $T^{-1}: Y \rightarrow X$ ,  $T(x) = y \Leftrightarrow x = T^{-1}(y)$  olarak tanımlanan  $T^{-1}$  operatörüne,  $T$  nin ters operatörü denir.  $T$  operatörü ve tersi için  $TT^{-1} = T^{-1}T = I$  koşulu sağlanır. Burada  $I$  birim operatördür.

**Örnek 2.1.13:** Her  $f \in C[0, 1]$  ve  $x \in [0, 1]$  için  $T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  operatörü

$$T(f)(x) = \int_0^x f(s) ds + f(x)$$

şeklinde tanımlansın. Bu operatörün tersi vardır ve

$$T^{-1}(y)(x) = y(x) - \int_0^x e^{s-x} y(s) ds$$

şeklindedir (Mustafa 2006).

**Teorem 2.1.14:**  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar ve  $T: D(T) \rightarrow Y$  bir lineer operatör olsun.  $T^{-1}: \mathfrak{R}(T) \rightarrow D(T)$  ters operatörün var ve sınırlı olması için gerek ve yeter şart her  $x \in D(T)$  için

$$\|T(x)\|_Y \geq K \|x\|_X$$

olacak şekilde bir  $K > 0$  sayısının bulunmasıdır (Kreyszig 1989).

**Teorem 2.1.15 (Ters Operatör Teoremi):**  $X$  ve  $Y$  Banach uzayları olmak üzere  $T: X \rightarrow Y$  operatörü lineer, birebir, örten ve sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda  $T^{-1}: Y \rightarrow X$  operatörü var ve sınırlı bir operatördür (Siddiqi 2004).

**Teorem 2.1.16:**  $X$  bir Banach uzayı,  $T \in B(X)$  ve  $\|T\| < 1$  ise  $I - T$  operatörünün tersi var ve sınırlı olup

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$$

eşitsizliği sağlanır (Kreyszig 1989).

**Lemma 2.1.17:**  $T$ ,  $X$  Banach uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

- a)  $X$  de bir  $Q$  sınırlı lineer operatörü varsa  $Q^{-1}$  ters dönüşümü var ve  $\|Q - T\| < \frac{1}{\|Q^{-1}\|}$  dir.
- b)  $T^{-1}$  vardır ve

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1 - \|1 - Q^{-1}T\|} \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1 - \|Q^{-1}\|\|Q - T\|}$$

dir (Argyros 2007).

## 2.2. Sabit Nokta Kavramı

**Tanım 2.2.1:**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $f: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Eğer  $f(x) = x$  olacak şekilde bir  $x \in X$  noktası varsa bu  $x$  noktasına  $f$  nin sabit noktası denir.  $f$  nin bütün sabit noktalarının kümesi  $F(f)$  veya  $Fix(f)$  ile gösterilir (Agarwal *et al.* 2007).

**Örnek 2.2.2:** (1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 3x - 3$  dönüşümü için  $F(f) = \{-3, 1\}$  dir.

(2)  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(x) = x^2 + 2x$  dönüşümü için  $F(f) = \{0\}$  dir. Burada  $x = -1$  sabit nokta olabilirdi ancak  $-1 \notin X$  dir.

(3)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 4$  dönüşümünün sabit noktası yoktur.

**Tanım 2.2.3:** Bir  $f$  fonksiyonunun orbiti  $f^n(x)$  ile gösterilir ve bir  $x$  noktasından başlayıp fonksiyonun tekrarlanmasıyla elde edilen sayı dizisidir.  $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$  veya daha kısa olarak  $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$  dizisindeki noktaların kümesine  $x$  in orbiti denir ve  $n \in \mathbb{N}$  için  $f^n(x)$  ile gösterilir (Miller 2006).

**Tanım 2.2.4:**  $n$  tamsayı olmak üzere,  $f^n(x) = x$  oluyorsa  $x$  noktasına  $f$  nin bir periyodik noktası (veya  $f^n$  dönüşümünün sabit noktası) denir.  $f^n(x) = x$  olacak şekilde en küçük pozitif  $n$  sayısına  $x$  in başlangıç periyodu denir.  $n$  periyodunun periyodik noktalarının kümesi  $Per_n(f)$  ile gösterilir (Miller 2006).

$f: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

- (i) Keyfi bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $F(f) \subset F(f^n)$  dir.
- (ii) Keyfi bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $F(f^n) = \{x\}$  ise  $F(f) = \{x\}$  dir.

**Tanım 2.2.5:**  $x^*$ , türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonunun sabit noktası olsun. Bu fonksiyonun sabit noktaları,  $f'(x^*)$  in durumuna göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

- a)  $f'(x^*) = 0$  ise  $x^*$  bir süper çeken (superattracting) sabit noktadır,
- b)  $|f'(x^*)| < 1$  ise  $x^*$  bir çeken (attracting) sabit noktadır,
- c)  $|f'(x^*)| > 1$  ise  $x^*$  bir iten (repelling) sabit noktadır,
- d)  $|f'(x^*)| = 1$  ve  $n$  tam sayısı için  $[f'(x^*)]^n = 1$  ise  $x^*$  bir rasyonel nötr (rationally neutral) sabit noktadır,

e)  $|f'(x^*)| = 1$  ve fakat  $[f'(x^*)]^n \neq 1$  ise  $x^*$  bir irrasyonel nötr (irrationally neutral) sabit noktadır (Miller 2006).

**Örnek 2.2.6:**  $f(x) = x^2$  olsun.  $f$  in sabit noktaları 0 ve 1 dir.  $x^* = 0$  sabit noktası için  $|f'(0)| = 0 < 1$  olduğundan 0 noktası  $f(x) = x^2$  için bir çeken sabit noktadır.  $x^* = 1$  sabit noktası için  $|f'(1)| = 2 > 1$  olduğundan 1 noktası  $f(x) = x^2$  için bir iten sabit noktadır.

**Örnek 2.2.7:**  $f(x) = x + x^3$  olsun.  $x^* = 0$  tek sabit noktadır ve  $|f'(0)| = 1$  olduğundan bu nokta fonksiyonun nötr sabit noktasıdır.

Bir  $f$  fonksiyonunun çeken ve iten sabit noktasıyla ilgili aşağıdaki ifadeler verilebilir:

- (i)  $E \subset \mathbb{R}$  olmak üzere  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $x^*$  in bu fonksiyonunun bir çeken sabit noktası olması durumunda,  $x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$  ve  $n > 0$  için  $f^n(x) \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$  olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  sayısı vardır. Ayrıca  $n \rightarrow \infty$  için  $f^n(x) \rightarrow x^*$  dir.
- (ii)  $E \subset \mathbb{R}$  olmak üzere  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $x^*$  in bu fonksiyonunun bir iten sabit noktası olması durumunda,  $x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ ,  $x \neq x^*$  ve  $n > 0$  için  $f^n(x) \notin (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$  olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  sayısı vardır.

### 2.3. Picard İterasyonu ve Bazı Sabit Nokta Teoremleri

İterasyon metotları Materyal ve Yöntem kısmında daha detaylı olarak verilecektir. Fakat bu kısımda sabit nokta ile ilgili temel teoremlerde Picard iterasyonu kavramı geçtiği için bunun tanımını verilerek bu bölüme başlanılacaktır.

### Picard İterasyon Metodu:

$E$  bir normlu uzay,  $D, E$  nin boş olmayan konveks bir alt kümesi olmak üzere  $T: D \rightarrow D$  bir dönüşüm olsun.  $x_0 \in D$  olmak üzere

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan diziye Picard iterasyonu denir. Bu metot, sabit nokta iterasyon metodu veya ardışık yaklaşımlar dizisi olarak da bilinir (Picard 1890).

Literatürde Picard iterasyonunun Liouville (1837) tarafından ifade edildiği ve Cauchy tarafından kullanıldığı görülür. Fakat ilk kez Picard tarafından adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek için sistematik bir şekilde geliştirilmiştir (Picard 1890).

Eğer  $\{x_n\}$  dizisi  $x_0 \in X$  başlangıç değeri için  $x^* \in X$  noktasına yakınsarsa ve  $T$  dönüşümü  $X$  Banach uzayı üzerinde sürekli bir operatör ise

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = T(x^*)$$

dır. Yani  $x^*$ ,  $T$  operatörünün bir sabit noktasıdır. Bununla ilgili aşağıdaki temel teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.1:**  $X$  bir Banach uzayı,  $T: X \rightarrow X$  sürekli bir operatör ve  $x_0 \in X$  olmak üzere (2.2) de ki gibi oluşturulmuş  $\{x_n\}$  dizisi  $x^* \in X$  noktasına yakınsasın. Böylece  $x^*$ ,  $T$  operatörünün bir sabit noktasıdır (Argyros 2008).

Burada  $x^*$  noktasının tekliğini bilmemize ihtiyaç vardır. Dolayısıyla aşağıdaki tanımlı verebiliriz.

**Tanım 2.3.2:**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in X$  için

$$\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\| \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir  $0 \leq c < 1$  reel sayısı varsa  $T$  ye daraltan veya daraltan dönüşüm denir (Argyros 2008).

(2.3) Şartını sağlayan her  $T$  daraltan dönüşüm aynı zamanda düzgün süreklidir. Çünkü aynı zamanda (2.3) bir Lipschitz koşulu olup  $T$  dönüşümü  $c$  Lipschitz sabiti ile aynı zamanda Lipschitz süreklidir. Burada  $c$ , aynı zamanda  $T$  dönüşümünün daraltanlık sabiti olarak da bilinir.

**Tanım 2.3.3:**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Eğer  $x^* \in F(T) \neq \emptyset$  ve  $\forall x \in X$  için

$$\|T(x) - x^*\| \leq c\|x - x^*\|$$

olacak şekilde bir  $0 \leq c < 1$  reel sayısı varsa  $T$  ye quasi-daraltan dönüşüm denir (Agarwal *et al.* 2009).

$F(T) \neq \emptyset$  olması durumunda daraltan bir dönüşüm aynı zamanda quasi-daraltan dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir.

**Örnek 2.3.4:**  $X = c_0$  ve  $C = \{x \in c_0 : \|x\|_{c_0} \leq 1/2\}$  kümeleri verilsin. Her  $x = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots) \in C$  için  $T: C \rightarrow C$  dönüşümü

$$T(x) = \left( 2x_2^2, 0, \frac{1}{2}x_1, \frac{3}{2}x_3, 0, 0, \dots \right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümün sabit noktası  $x^* = 0$  dır. Her  $x \in C$  için

$$\begin{aligned} \|T(x) - 0\|_{c_0} &= \left\| \left( 2x_2^2, 0, \frac{1}{2}x_1, \frac{3}{2}x_3, 0, 0, \dots \right) \right\|_{c_0} \\ &\leq \frac{3}{4} \|x - 0\|_{c_0} \end{aligned}$$

olduğundan  $T$  bir quasi-daraltan dönüşüm olur. Ancak  $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots\right)$  ve  $y = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \dots\right)$  olarak seçilirse, bu durumda

$$\|T(x) - T(y)\|_{c_0} = \left\| \left( \frac{7}{72}, 0, \frac{1}{24}, \frac{1}{8}, 0, 0, \dots \right) \right\|_{c_0} = \frac{1}{8}$$

ve

$$\|x - y\|_{c_0} = \left\| \left( \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0, 0, \dots \right) \right\|_{c_0} = \frac{1}{12}$$

elde edilir. Buradan  $\|T(x) - T(y)\|_{c_0} \geq \|x - y\|_{c_0}$  olduğu açıktır. O halde  $T$  dönüşümü daraltan değildir.

**Teorem 2.3.5 (Bolzano Teoremi):**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu sürekli olsun. Eğer  $f(a)$  değeri ile  $f(b)$  değeri zıt işaretli ise  $f(c) = 0$  olacak şekilde en az bir  $c \in (a, b)$  vardır (Kadıoğlu ve Kamali 2013).

$\mathbb{R}$  de bilinen en basit sabit nokta teoremi aşağıda verilmiştir.

**Teorem 2.3.6:**  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  olmak üzere  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  sürekli fonksiyonu en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamisi and Kirk 2001)

**İspat:**  $f$  sürekli olduğundan  $g(x) = f(x) - x$  şeklinde tanımlanan  $g$  fonksiyonu da süreklidir. Ayrıca,  $a \leq f(a) \leq b$  ve  $a \leq f(b) \leq b$  olduğundan  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  ve  $g(b) = f(b) - b \leq 0$  olur.  $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$  sürekli olduğundan (Bolzano Teoreminden)  $g(c) = 0$  olacak şekilde en az bir  $c \in [a, b]$  elemanı vardır. Bu da  $f(c) = c$  olacak şekilde en az bir  $c \in [a, b]$  elemanının var olduğunu gösterir.

Picard iterasyonu ile ilgili ilk teorik sonuçlar Polonyalı matematikçi Stefan Banach tarafından elde edilmiş olup bu teorem “Banach Sabit Nokta Teoremi” veya “Banach Daralma İlkesi” olarak bilinir.

**Teorem 2.3.7:**  $X$  bir Banach uzayı ve  $T: X \rightarrow X$  daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda

- (i)  $T$  tek bir sabit noktaya sahiptir, yani  $F(T) = \{x^*\}$  dır;
- (ii)  $x_0 \in X$  için  $T$  nin  $x_0$  noktasında  $\{x_n\}$  orbiti (ardışık yaklaşımlar dizisi) vardır öyle ki  $T$  nin  $x^*$  sabit noktasına yakınsar ve aşağıdaki eşitsizlikler  $c < 1$  için geçerlidir (Banach 1922).

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{c^n}{1-c} \|x_1 - x_0\|, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{c}{1-c} \|x_n - x_{n-1}\|, n = 0, 1, 2, \dots$$

**İspat:** (i)  $x^*$  ve  $y^*$ ,  $T$  nin iki sabit noktası olsun.  $T$  daraltan bir dönüşüm olduğundan

$$\|x^* - y^*\| = \|T(x^*) - T(y^*)\| \leq c\|x^* - y^*\| < \|x^* - y^*\|$$

eşitsizliği doğru değildir. Bu da  $T$  nin tek bir sabit noktası olduğunu gösterir.

(ii) (2.2) dizisi kullanılırsa

$$\|x_2 - x_1\| \leq c\|x_1 - x_0\|$$

$$\|x_3 - x_2\| \leq c\|x_2 - x_1\| \leq c^2\|x_1 - x_0\|$$

⋮

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq c^n\|x_1 - x_0\|$$

elde edilir. Böyle devam edilirse

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (c^{m+1} + \dots + c + 1)c^n\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{c^n}{1-c}\|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

olur. Böylece  $\{x_n\}$  dizisi  $X$  Banach uzayında bir Cauchy dizisidir ve bir  $x^* \in X$  noktasına yakınsar. Teorem 2.3.1 den  $\{x_n\}$  dizisi  $T$  nin  $x^*$  sabit noktasına yakınsar. Yukarıdaki eşitsizlikte  $m \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$\|x^* - x_n\| = \|x_n - x^*\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_{n+m} - x_n\| \leq \frac{c^n}{1-c} \|x_1 - x_0\|$$

olur. Ayrıca

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq (c + c^2 + \dots + c^m) \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{c}{1-c} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dir. Burada  $m \rightarrow \infty$  için limit alınırsa, teoremin ikinci kısmındaki son eşitsizlik elde edilir.

Çoğu zaman Teorem 2.3.7 de ki daraltanlık şartı  $X$  uzayının tamamında sağlanmaz. Bu tür durumlarda Banach daralma ilkesinin lokal versiyonu verilir.

**Sonuç 2.3.8:**  $X$  Banach uzayının  $B_r[a]$  kapalı yuvarında tanımlı  $T: B_r[a] \rightarrow X$  dönüşümü verilmiş olsun.  $T$  dönüşümü  $B_r[a]$  üzerinde daralma katsayısı  $\alpha < 1$  olan bir daraltan dönüşüm ve

$$\|Ta - a\| \leq (1 - \alpha)r \quad (2.4)$$

ise  $T$  operatörünün tek bir  $x^* \in B_r[a]$  sabit noktası vardır. Her bir başlangıç  $x_0 \in B_r[a]$  elemanı için (2.2) ile tanımlanan  $\{x_n\}$  dizisi  $x^*$  sabit noktasına yakınsar (Berinde 2007).

Bu sonuç, Teorem 2.3.7 nin özel bir halidir. Sonuç 2.3.8 i ispat etmek için  $T(B_r[a]) \subset B_r[a]$  olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten  $x \in B_r[a]$ , yani  $\|x - a\| \leq r$  ise  $T$  dönüşümü daraltan dönüşüm olduğundan (2.4) eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} \|Tx - a\| &\leq \|Tx - Ta\| + \|Ta - a\| \\ &\leq \alpha \|x - a\| + (1 - \alpha)r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq ar + r - ar \\ &= r \end{aligned}$$

olur. Buradan  $T(B_r[a]) \subset B_r[a]$  olduğu açıktır. O halde Teorem 2.3.7 nin bütün koşulları sağlanır.

**Sonuç 2.3.9:** Picard iterasyonu, daraltanlık şartı ve  $x^* = T(x^*)$  denkleminde

$$\|x_n - x^*\| \leq \|T(x_{n-1}) - T(x^*)\| \leq c\|x_{n-1} - x^*\| \leq \dots \leq c^n \|x_0 - x^*\| \quad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) eşitsizliği yakınsama oranını tanımlar. Burada  $\|x_0 - x^*\|$  tahmini,

$$\|x_0 - x^*\| \leq \|x_0 - T(x_0)\| + \|T(x_0) - T(x^*)\| \leq \|x_0 - T(x_0)\| + c\|x_0 - x^*\|$$

eşitsizliğinden

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{1}{1-c} \|x_0 - T(x_0)\| \quad (2.6)$$

dır. (2.5) ve (2.6) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{c^n}{1-c} \|x_0 - T(x_0)\| \quad (2.7)$$

olur. (2.5) ve (2.7) tahminleri  $x = T(x)$  denklemini çözmek için gerekli olan adım sayısını kararlaştırmakta kullanılır. Örneğin  $\varepsilon > 0$  için  $\|x_n - x^*\| < \varepsilon$  kullanılırsa, bu eşitsizlik

$$n > \frac{1}{\ln c} \ln \frac{\varepsilon(1-c)}{\|x_0 - T(x_0)\|}$$

için sağlanır (Argyros 2008).

Picard iterasyon metodu yaygın olarak daraltan dönüşüm sınıflarının sabit noktasına yaklaşmak için kullanılmaktadır. Eğer dönüşümün daraltanlık şartı zayıflatılırsa bu iterasyonun dönüşümün sabit noktasına yakınsaması gerekmez. Örneğin,  $[0,1]$  aralığı üzerinde tanımlı olan  $T(x) = 1 - x$  genişlemeyen dönüşümün  $\frac{1}{2}$  sabit noktasına, başlangıç değeri sabit nokta alınmadan oluşturulacak olan hiçbir Picard iterasyonu yakınsamaz. Bu durumda diğer iterasyon metotlarına ihtiyaç duyulur. Dolayısıyla son elli yıldaki pek çok çalışma, dönüşümlerin farklı sınıflarının sabit noktalarına yaklaşmak üzerine geliştirilen iterasyon metotları üzerinedir. Diğer iterasyon metotları Materyal ve Yöntem kısmında daha detaylı olarak ele alınmıştır.

**Teorem 2.3.10 (Ortalama Değer Teoremi):**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $[a, b]$  kapalı aralığında sürekli ve  $(a, b)$  açık aralığında türevlenebilir ise

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir  $c \in (a, b)$  vardır (Kadıoğlu ve Kamali 2013).

**Örnek 2.3.11:**  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  fonksiyonu her  $x \in (a, b)$  noktasında türevlenebilir ve  $|f'(x)| \leq c < 1$  olsun. Ortalama değer teoreminden,  $x, y \in [a, b]$  için

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y|$$

olacak şekilde  $x$  ve  $y$  arasında bir  $z$  noktası vardır. Dolayısıyla  $f$  fonksiyonu  $c$  sabiti ile daraltan olup bir sabit noktaya sahiptir.

#### 2.4. Fréchet Türevi ve Bazı Önemli Tanımlar

Bu bölümde Fréchet Türevi tanımı ile birlikte bazı integral denklemlerinin tanımları verilecektir.

**Tanım 2.4.1 (Fréchet Türevi):**  $X$  ve  $Y$  Banach uzayları ve  $F: X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Lh\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir  $L$  sınırlı lineer operatörü varsa  $F$  ye  $x \in X$  noktasında Fréchet diferansiyellenebilirdir denir. Bu durumda  $L$  operatörüne  $F$  fonksiyonunun  $x \in X$  noktasındaki Fréchet türevi denir ve  $F'(x) = L$  şeklinde gösterilir. Eğer bu durum her  $x \in X$  için doğruysa  $F$  fonksiyonu Fréchet diferansiyellenebilirdir denir (Musayev ve Alp 2000 ).

Bununla birlikte,  $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  olmak üzere  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  şeklinde tanımlanan  $F$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasındaki Fréchet türevi

$$F'(x_0) = [J_F(x_0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

şeklindeki Jacobian matrisi olarak gösterilir.

**Örnek 2.4.2:** (i)  $F: C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$  operatörü

$$F(u)(x) = \sin u(x)$$

olarak verilmiş olsun.  $F$  operatörü  $u_0(x) = \cos x$  noktasında Fréchet türevlenebilirdir ve bu türev

$$F'(u_0(x)) = -\sin x \cos u_0(x)$$

dir.

(ii)  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  operatörü

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (2x_1 + x_2^2 + x_3, x_1^2 + x_2x_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

şeklinde verilmiş olsun.  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  operatörü  $\mathbb{R}^3$  üzerinde Fréchet türevlenebilirdir ve onun Jacobian matrisi

$$F'(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2x_2 & 1 \\ 2x_1 & x_3 & x_2 \end{bmatrix}$$

olur.

**Teorem 2.4.3:**  $X$  ve  $Y$  Banach uzayları ve  $F: X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olmak üzere eğer  $F$  fonksiyonu  $x \in X$  noktasında Fréchet diferansiyellenebilirse,  $F$  fonksiyonu  $x \in X$  noktasında süreklidir (Siddiqi 2004).

**Lemma 2.4.4:**  $F$ ,  $X$  Banach uzayının açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun. Bu durumda, her  $x, y \in D$  ve  $0 \leq t \leq 1$  için

$$F(x) - F(y) = \int_0^1 F'(y + t(x - y))(x - y) dt$$

dir (Şuhubi 2001).

**Tanım 2.4.5 (İntegral Denklemler):**  $\lambda$  sayısal bir parametre,  $f(t)$  ve  $k(t, s)$  bilinen fonksiyonlar,  $x(t)$  ise bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$x(t) - \lambda \int_a^b k(t, s)x(s) ds = f(t) \quad (2.8)$$

şeklindeki denkleme ikinci çeşit Fredholm lineer integral denklemi adı verilir.  $k(t, s)$  fonksiyonuna (2.8) denkleminin çekirdeği denir (Musayev ve Alp 2000).

**Tanım 2.4.6:**  $f(t) = 0$  ise (2.8) denklemi

$$x(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds = 0 \quad (2.9)$$

şeklinde olacaktır. Bu denkleme, (2.8) denklemine karşılık gelen homojen lineer integral denklem denir. Aksi takdirde (2.8) denklemine homojen olmayan lineer integral denklem adı verilir.  $x(t)$  bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b k(t,s)x(s)ds = f(t)$$

şeklindeki denkleme birinci çeşit Fredholm lineer integral denklemi adı verilir.

$$A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b], Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds \quad (2.10)$$

operatörü yardımıyla (2.8) ve (2.9) denklemleri sırasıyla  $T(x) \equiv x - \lambda A(x) = f$  veya  $T(x) \equiv x - \lambda A(x) = 0$  biçiminde yazılabilir, burada  $I$  birim operatör olmak üzere  $T = I - \lambda A$  dır.

(2.8) ve (2.9) denklemlerinin araştırılması (2.10) operatörünün özelliklerinin incelenmesine dönüşür (Musayev ve Alp 2000).

**Tanım 2.4.7:**  $\lambda$  sayısal bir parametre,  $g(t)$  ve  $m(t,s)$  bilinen fonksiyonlar,  $y(t)$  ise bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$y(t) - \lambda \int_a^t m(t,s)y(s)ds = g(t) \quad (2.11)$$

şeklindeki denkleme ikinci çeşit Volterra lineer integral denklemi adı verilir.  $g(t) = 0$  ise (2.11) denklemine, yani

$$y(t) - \lambda \int_a^t m(t,s)y(s)ds = 0$$

denklemine ikinci çeşit homojen Volterra lineer integral denklemi,

$$\int_a^t m(t,s)y(s)ds = g(t)$$

denklemine ise birinci çeşit Volterra lineer integral denklemi adı verilir (Musayev ve Alp 2000).

**Tanım 2.4.8:**  $\lambda$  sayısal bir parametre,  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $k(t,s)$  ve  $m(t,s)$  bilinen fonksiyonlar,  $x(t)$  ve  $y(t)$  ise bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere

$$x(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)x^n(s)ds = f(t)$$

$$y(t) - \lambda \int_a^t m(t,s)y^n(s)ds = g(t)$$

şeklindeki denklemlere, sırasıyla Fredholm lineer olmayan integral denklemi ve Volterra lineer olmayan integral denklemi adı verilir.

Daha genel olarak, lineer olmayan integral denklemler

$$x(t) - \lambda \int_a^b \varphi(t,s,x(s))ds = f(t)$$

$$y(t) - \lambda \int_a^t \varphi(t,s,y(s))ds = g(t)$$

şeklinde de yazılabilir.

**Teorem 2.4.9:**  $D = [a, b]^2 \times \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x, s, u): D \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ve onun  $f_u(x, s, u)$  kısmi türevi  $D$  üzerinde sürekli olsun. Bu durumda

$$F(u)(x) = u(x) - \int_a^b f(x, s, u(s)) ds$$

şeklinde tanımlanan  $F: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  operatörü,  $\forall u_0(x) \in C[a, b]$  noktasında Fréchet türevlenebilirdir ve

$$F'(u_0)h = h(x) - \int_a^b f_u(x, s, u_0(s))h(s) ds$$

dir (Musayev ve Alp 2000).

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Newton Metodu ve Bu Metotla İlgili Yakınsama Teoremleri

İterasyon metotları,

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

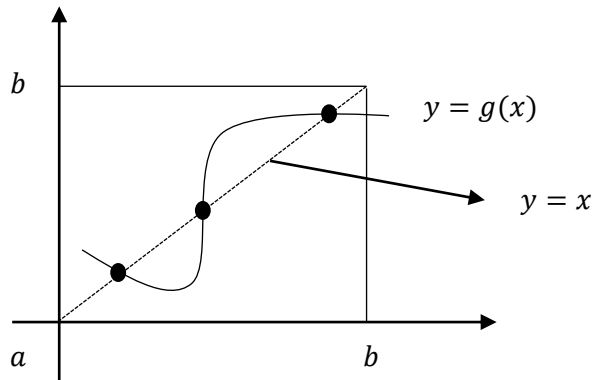
şeklindeki denklemlerin çözümlerine yaklaşmak veya bu çözümleri bulmak için çok kullanışlı yöntemler sunmaktadır. (3.1) şeklindeki denklemlerin köklerini bulma problemi, sabit nokta teorisiyle çok güçlü bir bağıntıya sahiptir. Gerçekten de,

$$x = g(x) \quad (3.2)$$

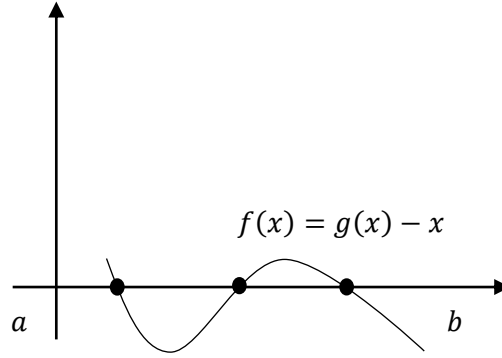
sabit nokta denklemi

$$f(x) = g(x) - x \quad (3.3)$$

olarak alınırsa  $f(x) = 0$  denkleminin çözümü,  $g$  fonksiyonunun sabit noktası olur (Şekil 3.1, Şekil 3.2).



Şekil 3.1.  $g$  fonksiyonunun üç sabit noktası



**Şekil 3.2.**  $f(x) = 0$  denkleminin çözümü  $g$  fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Yani (3.2) denklemindeki  $g$  fonksiyonunun bir sabit noktasının varlığı aynı zamanda (3.1) denkleminin çözümünün varlığı demektir.

(3.1) şeklindeki denklemlerin çözümünü bulmak veya (3.2) şeklindeki dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılan çeşitli iterasyon metotları aşağıda verilmiştir.

### Newton Metodu:

Bu metot ilk kez reel değişkenli ve reel değerli  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının köklerini bulmak için Newton tarafından ileri sürülmüş ve Banach uzaylarında verilen operatör denklemler için L.V. Kantorovich ve G. P. Akilov (1982) tarafından geliştirilmiştir.

Genellikle  $f(x) = 0$  şeklindeki skaler denklemler için kullanılan Newton metodu veya Newton-Raphson metodu, lineer olmayan denklemlerin çözümünde en fazla kullanılan iterasyon yöntemlerinden biridir.  $f$  ve  $f$  nin birinci türevleri üzerine koyulan uygun şartlar altında iterasyon dizisi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Newton iterasyon metodu ile sabit nokta teorisi arasında yakın bir bağlantı vardır. (3.4) ile verilen iterasyon dizisi,

$$G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

şeklindeki Newton iterasyon fonksiyonunun ardışık yaklaşımlar dizisi olarak görülebilir. Yani burada  $x_{n+1} = G(x_n)$  dir. Ayrıca, uygun şartlar altında  $x^*$  in  $f(x) = 0$  denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart  $x^*$  in  $G$  iterasyon fonksiyonunun sabit noktası olmasıdır.

**Örnek 3.1.1:**  $x^5 - x - 1 = 0$  (3.5)

polinom denklemini göz önüne alalım. Bu denklemi çok farklı yollarla (3.2) şeklinde yazabiliriz. Bunlardan üçü

$$(i) x = x^5 - 1 \quad (ii) x = \sqrt[5]{x + 1} \quad (iii) x = \frac{4x^5 + 1}{5x^4 - 1}$$

şeklinde dir. (3.5) denkleminin  $[1, \infty)$  aralığında bir çözüme sahip olduğunu biliyoruz. O halde  $x \in [1, \infty)$  için,

$$g_1(x) = x^5 - 1, \quad g_2(x) = \sqrt[5]{x + 1}, \quad g_3(x) = \frac{4x^5 + 1}{5x^4 - 1}$$

olarak ifade edelim. Burada  $g_3$  iterasyon fonksiyonu Newton metodu ile (ya da Newton-Raphson metodu olarak da bilinen  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  şeklinde tanımlanması ile) elde edilmiş olur. Herhangi bir  $x_0 \in [1, \infty)$  başlangıç değeri için  $g_1$  dönüşümü yardımıyla oluşturulan  $x_{n+1} = g_1(x_n) = x_n^5 - 1$  Picard iterasyonu, yakınsak olmadığı halde  $g_2$  ve  $g_3$  dönüşümleri için oluşturulan iterasyonlar yakınsaktır. Burada,  $g_2$  bir daraltan (ya da  $\frac{1}{5}$  daraltan) dönüşümdür. Aşağıdaki tabloda  $g_1$ ,  $g_2$  ve  $g_3$  iterasyon fonksiyonları ile tanımlanan bu üç dizinin belli bir  $x_0 \in [1, \infty)$  başlangıç değeri için

(3.5) denkleminin  $[1, \infty)$  aralığındaki çözümüne yakınsamaları gösterilmiştir (Berinde 2007).

**Çizelge 3.1.**  $x_0 = 1$  için  $g_1(x_n)$ ,  $g_2(x_n)$  ve  $g_3(x_n)$  dizilerinin yakınsaması

$x_{n+1} = g_1(x_n)$	$x_{n+1} = g_2(x_n)$	$x_{n+1} = g_3(x_n)$
$x_0 = 1$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1$
$x_1 = 0$	$x_1 = 1.149$	$x_1 = 1.25$
$x_2 = -1$	$x_2 = 1.165$	$x_2 = 1.178$
$x_3 = -2$	$x_3 = 1.167$	$x_3 = 1.168$
$x_4 = -33$	$x_4 = 1.167$	$x_4 = 1.167$
$x_5 = -39135394$	$x_5 = 1.167$	$x_5 = 1.167$
⋮		

**Çizelge 3.2.**  $x_0 = 1.167$  için  $g_1(x_n)$ ,  $x_0 = 10$  için  $g_2(x_n)$  ve  $g_3(x_n)$  dizilerinin yakınsaması

$x_{n+1} = g_1(x_n)$	$x_{n+1} = g_2(x_n)$	$x_{n+1} = g_3(x_n)$
$x_0 = 1.167$	$x_0 = 10$	$x_0 = 10$
$x_1 = 1.164$	$x_1 = 1.615$	$x_1 = 8$
$x_2 = 1.141$	$x_2 = 1.212$	$x_2 = 6.401$
$x_3 = 0.936$	$x_3 = 1.172$	$x_3 = 5.121$
$x_4 = -0.282$	$x_4 = 1.168$	$x_4 = 4.098$
$x_5 = -1.002$	$x_5 = 1.167$	$x_5 = 3.282$
⋮		⋮
		$x_{12} = 1.168$
		$x_{13} = 1.167$

Yukarıdaki örnekte de görüleceği gibi pek çok kök bulma metodu sabit nokta iterasyonlarıdır. Araştırılan  $x^*$  kökü  $g(x)$  fonksiyonunun bir sabit noktası olduğundan bu iterasyonlar bu şekilde isimlendirilir.

**Sonuç 3.1.2:**

- (i) İterasyonu durdurmak için şu koşullar kullanılabilir:  $i$  adımda  $|f(x_i)| < \varepsilon$  veya  $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$  olunca iterasyon durdurulur. Burada  $\varepsilon$  yeterince küçük pozitif bir sayıdır. Bu değer sonucun hassasiyetini ve iterasyon sayısını etkiler. Mesela  $\varepsilon = 0,00001$  seçilebilir.  $|f(x_i)| < 0,00001$  olduğunda,  $f(x_i) \approx 0$  dır ve son hesaplanan  $x_i$  köktür anlamındadır.  $\varepsilon$  ne kadar küçük seçilirse sonuç o kadar gerçeğe yakın olur, fakat bu durumda iterasyon sayısı artar.
- (ii) Herhangi bir iterasyonun yakınsaması verilen fonksiyonun ne kadar karmaşık olduğuna ve  $x_0$  başlangıç değerinin aranan köke ne kadar yakın olduğuna bağlıdır. Bu parametrelere bağlı olarak iterasyon yakınsamayabilir.

Newton metodu için literatürde birçok yakınsama teoremi vardır. 1987 yılında Demidovich ve Maron ve 1966 yılında Ostrowski, yaptıkları çalışmalarda  $[a, b]$  aralığından  $\mathbb{R}$  ye tanımlı fonksiyonlar için yakınsama teoremlerini vermişlerdir.

**Teorem 3.1.3:**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu, her  $x \in [a, b]$  için

- (i)  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ;  
(ii)  $f \in C^2[a, b]$  ve  $f'(x)f''(x) \neq 0$ ;

şartlarını sağlasın. O zaman  $x_0 \in [a, b]$  ve (3.4) ile tanımlı  $\{x_n\}$  dizisi,  $[a, b]$  aralığında  $f(x) = 0$  in tek çözümü olan  $x^*$  a yaklaşır ve

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|, M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

dir (Demidovich and Maron 1987).

Somut uygulamalar için Teorem 3.1.3 çok sık kullanılır. Fakat daha zayıf şartlara dayalı daha genel sonuçlar da mevcuttur. 1995 yılında Berinde, çalışmalarında  $f$  dönüşümü üzerinde daha zayıf şartlar kullanarak benzer bir sonucu ifade etmiştir.

**Teorem 3.1.4:**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu, her  $x \in [a, b]$  için

- (i)  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ;
- (ii)  $f \in C^1[a, b]$  ve  $f'(x) \neq 0$ ;
- (iii)  $2m > M$ ;

şartlarını sağlasın. Burada

$$m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \quad (3.6)$$

dir. O zaman  $x_0 \in [a, b]$  ve (3.4) ile tanımlı  $\{x_n\}$  dizisi,  $[a, b]$  aralığında  $f(x) = 0$  ın tek çözümü olan  $x^*$  a yaklaşır ve

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M}{m} |x_n - x_{n+1}| \quad (3.7)$$

eşitsizliği elde edilir (Berinde 1995).

2006'da, Sen, Mukherjee ve Patra

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + M_1 f(x_n)}, n \geq 0 \quad (3.8)$$

formundaki genelleştirilmiş Newton metodunu kullanarak, Teorem 3.1.4'e benzer yakınsama teoremleri elde etmişlerdir. Burada (3.6) ile tanımlı  $M$  ile  $M_1 f(x) = \text{sgn} f'(x) M$  eşitliği vardır.

Bu sonuç Sen ve arkadaşları tarafından  $n$ -boyutlu uzaylara genişletildi. Her iki durumda da genişletilmiş Newton metodu kullanıldı.

Son yıllarda Berinde ve Pacurar (2006) bir çalışmalarında, sabit nokta konusu aracılığıyla Teorem 3.1.4 deki gibi aynı genel şartlar altında, (3.8) iterasyon metodu için bir yakınsama teoremi elde ettiler. Bu teorem yalnızca  $f$  ve  $f'$  türevini ihtiva etmektedir.

Öncelikle, teoremin ispatında kullanılmak üzere, aşağıdaki lemmayı vermişlerdir.

**Lemma 3.1.5:**  $(X, d)$  bir tam metrik uzay ve  $x^*$ ,  $f$  nin bir sabit noktası olsun.  $f: X \rightarrow X$  dönüşümü quasi daraltan olsun. O halde  $x^*$ ,  $f$  nin tek sabit noktasıdır ve her  $x_0 \in X$  için  $\{f^n(x_0)\}$  sabit nokta iterasyonu  $x^*$  a yakınsar (Berinde and Pacurar 2006).

**Teorem 3.1.6:**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu, her  $x \in [a, b]$  için

- (i)  $f(a)f(b) < 0$ ;
- (ii)  $f \in C^1[a, b]$  ve  $f'(x) \neq 0$ ;
- (iii)  $2m > M$ ;

şartlarını sağlasın. Burada

$$m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

dir. O zaman  $x_0 \in [a, b]$  ve (3.8) ile tanımlı  $\{x_n\}$  dizisi,  $[a, b]$  aralığında  $f(x) = 0$  ın tek çözümü olan  $x^*$  a yaklaşır ve

$$|x_n - x^*| \leq \frac{2M}{m + M} |x_n - x_{n+1}| \quad (3.9)$$

eşitsizliği elde edilir (Berinde and Pacurar 2006).

Ayrıca, (3.9) hata tahminininin (3.7) hata tahmininden daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Diğer sabit nokta iterasyonları aşağıdaki gibi verilmiştir.

### 3.2. Diğer İterasyon Metotları

#### Mann İterasyon Metodu:

$E$  bir normlu uzay,  $D \subseteq E$  boş olmayan konveks bir alt küme,  $T: D \rightarrow D$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in D$  keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\{\alpha_n\}$ ,  $(0, 1)$  aralığında  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$  şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

(3.10) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda özel olarak  $\alpha_n = 1$  seçilirse bu iterasyon Picard iterasyonuna indirgenir.

Mann iterasyonu, Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. 1974 yılında B. E. Rhoades, Mann iterasyonunun herhangi kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşümün sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

#### Ishikawa İterasyon Metodu:

Bu iterasyon S. Ishikawa (1974) tarafından kurulmuş ve ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır.

$E$  bir normlu uzay,  $D \subseteq E$  boş olmayan konveks bir alt küme,  $T: D \rightarrow D$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in D$  keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$ ,  $(0,1)$  aralığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartını sağlayan dizilerdir (Ishikawa 1974).

(3.11) eşitliği ile verilen iterasyonda  $\beta_n = 0$  alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir.

### **S-İterasyon Metodu:**

$E$  bir normlu uzay,  $D \subseteq E$  boş olmayan konveks bir alt küme,  $T: D \rightarrow D$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in D$  keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$ ,  $(0,1)$  aralığındaki diziler ve  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n (1 - \beta_n) = \infty$  dur (Agarwal *et al.* 2007).

### **Multistep Mann İterasyon Metodu:**

Yıldırım ve Özdemir (2009, 2011) tarafından genişlemeyen ve quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesinin sabit noktalarına yakınsamak için oluşturulmuştur.

$E$  bir normlu uzay,  $D \subseteq E$  boş olmayan konveks bir alt küme,  $T_1, T_2, \dots, T_r: D \rightarrow D$  dönüşümleri,  $x_0 \in D$  keyfi bir nokta ve  $r \geq 2$  olmak üzere multistep Mann iterasyonu,



2012; Akbulut and Ozdemir 2012; Khan 2013; Abbas and Nazir 2013; Kadioglu and Yildirim 2013; Karakaya *et al.* 2013; Yildirim *et al.* 2016). Bazen bir dönüşümün sabit noktalarına yaklaşmak için verilen iterasyon metotları arasında bir seçim yapmak gerekir. Örneğin, bir iterasyon metodunu diğerlerinden daha etkili yapan, yakınsama hızı ve basitlik gibi iki temel kriter vardır. Böyle durumlarda, bu iterasyon metotlarının sabit noktaya yakınsama hızlarının nasıl karşılaştırılacağı sorusu ortaya çıkar.

Uygulamalı matematikte ve pür matematikte kullanılan yakınsama hızı ve oranı üzerine birkaç farklı kavram vardır. Aşağıda bunların bazı tanımları verilecektir.

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $\{x_n\} \subset X$  dizisi  $x^*$  limitine sahip yakınsak bir dizi olsun. Analizde ve uygulamalı matematikte en çok kullanılan yakınsama oranı kavramlarından birisi

$$d(x_n, x^*) \leq C\alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

formuna bağlıdır. Burada  $C > 0$  ve  $\{\alpha_n\}$ , sifıra yakınsak pozitif reel sayıların bir dizisidir. Bu durumda (3.15) ifadesi  $\{x_n\}$  dizisinin  $x^*$  a yakınsamasının en az  $\{\alpha_n\}$  dizisinin sifıra yakınsaması kadar hızlı olduğunu gösterir. Bunun için de

$$d(x_n, x^*) = o(\alpha_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

notasyonu kullanılır (Pringsheim 1889; Hadamard 1894).

Nümerik metotların yakınsamasının çalışılmasında özellikle Newton tipi metotlarda çok kullanışlı olan yakınsama oranının diğer kavramı aşağıda verilmiştir.

**Tanım 3.3.1:**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $\{x_n\} \subset X$  dizisi  $x^*$  limitine sahip yakınsak bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_{n+1}, x^*)}{[d(x_n, x^*)]^r} = \lambda < +\infty \quad (3.16)$$

ise  $r$  ye  $\{x_n\}$  dizisinin yakınsama oranı denir.  $\lambda$  ise bu  $\{x_n\}$  dizisinin asimtotik hatası olarak adlandırılır. Burada

- (i) Eğer  $r = 1$  ise  $\{x_n\}$  dizisinin yakınsaması lineer;
- (ii) Eğer  $r = 2$  ise  $\{x_n\}$  dizisinin yakınsaması kuadratik (2. dereceden);
- (iii) Eğer  $0 < r < 1$  ise  $\{x_n\}$  dizisinin yakınsaması süper lineerdir (Ortega *et al.* 1970).

(3.16) da tanımlanan yakınsama oranı sadece  $\{x_n\}$  dizisini içerdiği için mutlakken, (3.15) de verilen yakınsama hızı kavramı iki diziyi içerdiği için görecelidir. Berinde bununla ilgili detayları ve örnekleri 1998 yılındaki çalışmasında vermiştir (Berinde 1998).

Lineer yakınsama ve kuadratik yakınsama ile ilgili aşağıdaki özellikler yazılabilir.

- (i)  $x^*$ ,  $T$  dönüşümünün sabit noktası olmak üzere  $x_{n+1} = T(x_n)$  iterasyonu verilsin. Eğer  $T'(x^*) \neq 0$  ise bu iterasyon bir lineer yakınsama oranına sahip olur ((3.16) denkleminde  $r = 1$  olur).
- (ii)  $x^*$ ,  $T$  dönüşümünün sabit noktası olmak üzere  $x_{n+1} = T(x_n)$  iterasyonu verilsin. Eğer  $T'(x^*) = 0$  ve  $T''(x^*) \neq 0$  ise verilen iterasyon bir kuadratik yakınsama oranına sahip olacaktır ((3.16) denkleminde  $r = 2$  olur).

Süper lineer yakınsama lineer yakınsamadan daha hızlıdır. Kuadratik yakınsama ise süper lineer yakınsamadan çok daha hızlıdır.

**Sonuç 3.3.2:** Newton metodu, sabit noktaya kuadratik olarak, sabit nokta iterasyonu ise lineer olarak yakınsar.

Yakınsama oranı ile ilgili diğer bir kavramda iki karşılaştırılabilir diziyi içeren aşağıdaki tanımdır.

**Tanım 3.3.3:**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$  dizileri sırasıyla  $x^*$  a ve  $y^*$  a yakınsayan pozitif sayıların iki dizisi ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, x^*)}{d(y_n, y^*)} = \beta \quad (3.17)$$

olsun.

- a) Eğer  $\beta = 0$  ise, bu durumda  $\{x_n\}$  nin  $x^*$  a yakınsaması  $\{y_n\}$  nin  $y^*$  a yakınsamasından daha hızlıdır.
- b) Eğer  $0 < \beta < \infty$  ise, bu durumda  $\{x_n\}$  ve  $\{y_n\}$  aynı yakınsama oranına sahiptir denir.
- c) Eğer  $\beta = \infty$  ise, bu durumda  $\{y_n\}$  nin  $y^*$  a yakınsaması  $\{x_n\}$  nin  $x^*$  a yakınsamasından daha hızlıdır (Berinde 1998).

(3.17) limitinde eğer  $\beta = 0$  olarak alınırsa eski bir notasyon olan “küçük  $o$ ” kullanılarak bu ifade

$$d(x_n, x^*) = o(d(y_n, y^*))$$

şeklinde gösterilir (Hardy 1949; Knopp 1956).

Yukarıdaki son iki yakınsama oranları üzerine verilen tanımlar arasındaki fark aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

**Örnek 3.3.4:**  $\mathbb{R}$  de  $\{x_n\}, \{y_n\}$  ve  $\{z_n\}$  dizileri

$$x_n = \frac{1}{n+3}, y_n = \frac{1}{5^n}, z_n = 2^{-2^n}$$

olarak verilsin. Burada  $n \rightarrow \infty$  için  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$  ve  $z_n \rightarrow 0$  dir. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{5}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$$

olduğundan  $\{x_n\}$  ve  $\{y_n\}$  dizilerinin yakınsama (lineer) oranı aynıdır. Fakat  $\{y_n\}$  dizisi 0' a  $\{x_n\}$  dizisinden daha hızlı yakınsar. Bununla birlikte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+1}}{(z_n)^2} = 1$$

olduğundan  $\{z_n\}$  dizisinin yakınsaması kuadrattır. Böylece bu dizi,  $\{x_n\}$  ve  $\{y_n\}$  dizilerinin her ikisinden de daha hızlıdır.

Geniş bir literatür çalışması yapılırsa yukarıda verilen Tanım 3.3.3' ün çok sayıda makalede ve kitaplarda kullanıldığı görülecektir. Fakat bu tanımı ilk olarak 1922 yılında Knopp, iki serinin hızlarının karşılaştırılmasını Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (Sonsuz Serilerin Teorisi ve Uygulamaları) isimli kitabında vermiştir (Knopp 1922). Daha sonra Dawson, bu kitabın İngilizce baskısını (Knopp 1956) kullanarak 1964 yılında yayınladığı bir makalede yakınsama oranının tanımını aşağıdaki gibi vermiştir:

“ $\{x_n\}$  dizisi  $X$  e,  $\{y_n\}$  dizisi de  $Y$  ye yakınsasın ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - X}{y_n - Y} = 0$$

olsun. Bu durumda  $\{x_n\}$  dizisi  $\{y_n\}$  dizisinden daha hızlıdır.”

Yakınsama oranı veya hızlarıyla ilgili verilen bu tanımlar temel alınarak, yukarıda da görüleceği gibi mevcut iterasyon metotlarından daha hızlı bir yakınsama oranına sahip olan iterasyon metotları oluşturulmaya çalışılmıştır. 2011 yılında, Sahu, daraltan dönüşüm sınıfı için S-iterasyon metodunun Picard ve Mann iterasyon metotlarından daha hızlı olduğunu göstermiştir.

**Teorem 3.3.5:**  $X$  bir Banach uzayı ve  $C$  de  $X$  in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun.  $T: C \rightarrow C$  dönüşümü  $k \in [0,1)$  sabiti ile daraltan dönüşüm ve  $x^*$  bu dönüşümün tek sabit noktası olmak üzere,  $u_0 = v_0 = w_0 \in C$  başlangıç değerleri için  $C$  de  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  ve  $\{w_n\}$  dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\text{S-İterasyonu: } \begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tu_n + \alpha_nTy_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_nTu_n \end{cases}, n = 0,1,2, \dots$$

$$\text{Picard İterasyonu: } v_{n+1} = Tv_n, n = 0,1,2, \dots$$

$$\text{Mann İterasyonu: } w_{n+1} = (1 - \alpha_n)w + \alpha_nTv_n, n = 0,1,2, \dots$$

Burada  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$ ,  $[0,1]$  aralığındaki reel dizilerdir. Bu durumda  $n \geq 0$  için

- a)  $\|u_{n+1} - x^*\| \leq k^n[1 - (1 - k)\alpha\beta]^n\|u_0 - x^*\|,$
- b)  $\|v_{n+1} - x^*\| \leq k^n\|v_0 - x^*\|,$
- c)  $\|w_{n+1} - x^*\| \leq [1 - (1 - k)\alpha]^n\|w_0 - x^*\|,$

dir. Ayrıca S-iterasyonu Picard ve Mann iterasyonlarından daha hızlı yakınsar (Sahu 2011).

Daha sonra, 2013'te, Khan daraltan dönüşümler için normal S-iterasyonu ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

**Teorem 3.3.6:**  $X$  bir normlu uzay,  $C \subset X$  boş olmayan kapalı konveks bir alt küme ve  $T: C \rightarrow C$  daraltan bir dönüşüm olsun. Picard, Mann, Ishakawa ve normal S-iterasyonlarının her biri  $T$  nin bir  $x^*$  sabit noktasına yakınsasın. Burada  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  dizileri,  $n \geq 0$  ve  $\lambda$  için  $0 < \lambda \leq \alpha_n, \beta_n < 1$  olarak tanımlanmıştır. Bu durumda normal S-iterasyonu  $T$  dönüşümünün sabit noktasına diğer üç iterasyondan daha hızlı yakınsar.

### 3.4. Banach Uzaylarında Lineer Olmayan Operatör Denklemler İçin Newton Metodu

$X$  bir Banach uzay,  $D \subset X$  boş olmayan açık konveks bir alt küme ve  $F$ ,  $D$  nin her noktasında Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun. Burada  $x \in X$  ve  $r > 0$  için,  $B_r[x]$  yuvarı  $\{y \in X: \|y - x\| \leq r\}$  kümesi ile,  $B_r(x)$  ise  $\{y \in X: \|y - x\| < r\}$  kümesi ile belirtilecektir.

Yukarıda da bahsedildiği gibi sabit nokta problemleri, diferansiyel ve integral denklemleri, optimizasyon problemleri, varyasyonel problemler ve daha pek çok problem

$$F(x) = 0 \quad (3.18)$$

şeklindeki lineer olmayan operatör denklemlerin çözümü ile özdeşleştirilebilir (Dennis and Schnabel 1983; Ezquerro and Hernandez 2002; Deuflhard 2004; Argyros 2007; Kohaupt 2012). Kuşkusuz ki, Newton metodu böyle problemlerin çözümü için en popüler metottur.  $x_0 \in X$  başlangıç noktası olmak üzere bu metot

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), n = 0,1,2, \dots \quad (3.19)$$

olarak tanımlanır. Burada  $F'(x)$ ,  $x \in D$  noktasında  $F$  nin Fréchet türevini gösterir.

Sonsuz boyutlu uzaylarda çalışılırken  $[F'(x_n)]^{-1}$  ters operatörlerin bulunması, yeteri kadar karmaşık bir problem olduğundan (3.19) da verilen  $\{x_n\}$  dizisi yerine terimleri

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1}F(x_n), n = 0,1,2, \dots \quad (3.20)$$

biçiminde tanımlanan  $\{x_n\}$  dizisinin göz önüne alınması daha uygundur. (3.20) dizisini oluşturmak için  $[F'(x_0)]^{-1}$  ters operatörü her adımda değil, sadece  $x$  elemanın tek bir  $x = x_0$  noktasındaki değerinde bulunur. (3.20) dizisi (3.19) dizisiyle mukayesede daha yavaş hızla yaklaşmasına rağmen hesaplama açısına göre (3.20) iterasyonunun

kullanılması daha faydalı olur. Literatürde (3.19) yöntemine esas Newton metodu, (3.20) yöntemine ise basitleştirilmiş Newton metodu (Newton ardışık yaklaşımlar işlemi) adı verilir.

Banach uzaylarında tanımlı Fréchet türevlenebilir operatörler için bilinen en basit yakınsama teoremi aşağıda verilmiştir.

**Teorem 3.4.1:**  $X$  ve  $Y$  Banach uzaylar olmak üzere  $F: X \rightarrow Y$  operatörü aşağıdaki koşulları sağlasın:

- (i)  $r > 0$  ve  $x_0 \in X$  olmak üzere  $F$  operatörü  $B_r(x_0) \subset X$  yuvarında Fréchet türevlenebilirdir;
- (ii)  $F'(x)$  türevi  $B_r(x_0)$  yuvarında  $l > 0$  katsayısı ile Lipschitz koşulunu sağlar;
- (iii)  $F'(x): B_r(x_0) \rightarrow B(X, Y)$  operatörünün sürekli tersi var ve  $\forall x \in B_r(x_0)$  için  $\|F'_x^{-1}\| \leq m$  olacak şekilde bir  $m > 0$  sayısı vardır;
- (iv)  $\|F(x_0)\| \leq \eta$  dür.

Bu durumda eğer,  $q = \frac{1}{2}m^2l\eta < 1$  ve

$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1} < r$$

ise  $F(x) = 0$  denkleminin, (3.19) Newton iterasyonunun yaklaştığı bir  $x^* \in B_r[x_0]$  çözümü vardır ve terimleri (3.19) biçiminde tanımlanan  $\{x_n\}$  dizisinin  $x^*$  a yaklaşma hızı

$$\|x_n - x^*\| \leq m\eta \frac{q^{2^n-1}}{1 - q^{2^n}}$$

eşitsizliği yardımıyla verilir (Musayev ve Alp 2000).

Şimdi, Newton iterasyon metodu ve çeşitli Newton-tipi iterasyon metotları için yapılmış olan yarı-lokal ve lokal yakınsama teoremlerini vereceğiz. Burada yarı-lokal yakınsama ile  $x_0$  başlangıç noktası etrafındaki yakınsama, lokal yakınsama ile de  $F(x) = 0$  denkleminin çözümü olan  $x^*$  noktası etrafındaki yakınsama kastedilmektedir.

Argyros (2008),  $F(x) = 0$  operatör denkleminin çözümünü bulmak için aşağıdaki yarı-lokal yakınsama teoremini ispatlamıştır.

**Teorem 3.4.2:**  $F$ , bir  $X$  Banach uzayının açık konveks  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör ve  $x_0 \in D$  için  $F'_{x_0}^{-1} \in B(Y, X)$  olsun. Ayrıca  $F'_{x_0}^{-1}$  ve  $F$  operatörleri aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i)  $\|F'_{x_0}^{-1}\| \leq \mu$ ;
- (ii)  $\|F'_{x_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$ ;
- (iii)  $\|F'_x - F'_y\| \leq K_0\|x - y\|$ .

Burada  $\mu, \eta, K_0 > 0$ ,  $r = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\eta}}{\eta}$  olmak üzere  $h = \eta\mu K_0 < \frac{1}{2}$  ve  $B_r[x_0] \subseteq D$  olduğunu varsayalım. O halde

- a)  $F(x) = 0$  denklemi, tek bir  $x^* \in B_r[x_0]$  çözümüne sahiptir.
- b) (3.20) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve  $x^*$  a yakınsar.
- c)  $\gamma = \mu r K_0$  olmak üzere, hata tahmini

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \gamma^{n+1} \|x_0 - x^*\| \quad (3.21)$$

dır (Argyros 2008).

$F$ ,  $X$  Banach uzayının açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $x^* \in D$ ,  $F(x) = 0$  in bir çözümü ve  $F'_{x^*}^{-1} \in$

$B(Y, X)$  olsun.  $x_0 \in D$  için  $F'_{x^*}^{-1}$  ve  $F$  aşağıdaki şartları sağlasın:  $\forall x \in D$  ve  $K_0, K_1, K_2 > 0$  olmak üzere

$$\|F'_x - F'_{x_0}\| \leq K_0 \|x - x_0\|, \quad (3.22)$$

$$\|F'_{x^*}^{-1}(F'_x - F'_{x_0})\| \leq K_1 \|x - x_0\|, \quad (3.23)$$

$$\|F'_{x^*}^{-1}(F'_x - F'_{x^*})\| \leq K_2 \|x - x^*\|, \quad (3.24)$$

dır.

**Lemma 3.4.3:**  $F, X$  Banach uzayının açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $F'_{x^*}^{-1} \in B(Y, X)$  olmak üzere  $x^* \in D$ ,  $F(x) = 0$  denkleminin bir çözümü olsun ve  $F$  operatörü (3.24) şartını sağlasın. Ayrıca  $r = \frac{1}{K_2}$  için  $B_r(x^*) \subseteq D$  olduğunu varsayalım. O halde  $x \in B_r(x^*)$  için,  $F'_x$  in tersi vardır ve hata tahmini

$$\|(F'_{x^*}^{-1}F'_x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - K_2\|x - x^*\|}$$

dır (Ren and Argyros 2009).

2009 yılında, Ren ve Argyros,  $F(x) = 0$  denkleminin çözümünü bulmak için aşağıdaki lokal yakınsama teoremini vermişlerdir.

**Teorem 3.4.4:**  $F, X$  Banach uzayının açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $x^* \in D$ ,  $F(x) = 0$  in bir çözümü ve  $F'_{x^*}^{-1} \in B(Y, X)$  olsun. Ayrıca  $x_0 \in D$  için  $F'_{x^*}^{-1}$  ve  $F$  operatörleri (3.23) ve (3.24) şartlarını sağlasın ve  $r_1 = \frac{2}{K_2}$  için  $B_{r_1}(x^*) \subseteq D$  olsun. Bu durumda  $r = \frac{2}{2K_2 + 3K_1}$  olmak üzere herhangi  $x_0 \in B_r(x^*)$  başlangıç noktası için

a) (3.20) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r(x_0)$  dadır ve  $B_{r_1}(x^*)$  da  $x^*$  tek çözümüne yakınsar.

b)  $\delta_0 = \frac{\|x_0 - x^*\|}{r}$  olmak üzere, tahmini hata

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq (\delta_0)^{n+1} \|x_0 - x^*\| \quad (3.25)$$

dır (Ren and Argyros 2009).

Yakın zamanda, Sahu *et al.* (2012) normal S-iterasyon metodundan hareketle,  $F(x) = 0$  operatör denkleminin çözümünü bulmak için Newton-tipi S-iterasyon metodunu tanımlamıştır. Ayrıca bu iterasyon metodunun yakınsama oranının (3.20) Newton iterasyonunun yakınsama oranından hızlı olduğunu göstermiştir.

$F$ , bir  $X$  Banach uzayının açık konveks  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör ve  $\alpha \in (0,1)$  olsun.  $x_0 \in D$  başlangıç noktası için Newton-tipi S-iterasyon metodu;

$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n - F'_{x_0}^{-1} F(z_n) \\ z_n = (1 - \alpha)x_n + \alpha y_n \\ y_n = x_n - F'_{x_0}^{-1} F(x_n) \end{cases} \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlıdır.

Sahu, (3.26) iterasyonu için yarı-lokal yakınsama teoremini vermeden önce  $F(x) = 0$  denkleminin çözümünün tekliğini aşağıdaki teoremle göstermiştir.

**Teorem 3.4.5:** :  $F$ , bir  $X$  Banach uzayının açık konveks  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör ve  $x_0 \in D$  için  $F'_{x_0}^{-1} \in B(Y, X)$  olsun.  $F$  operatörü (3.22) şartını ve aşağıdaki şartları sağlasın:

(i)  $\|F'_{x_0}^{-1}\| \leq \mu$ ;

$$(ii) \quad \|F'_{x_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta.$$

Burada  $\mu, \eta > 0$ ,  $r = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$  olmak üzere  $h = \eta\mu K_0 < \frac{1}{2}$  ve  $B_r[x_0] \subseteq D$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $\alpha \in (0,1)$  sabiti için,

- a)  $Ax = x - F'_{x_0}^{-1}F(x)$  ile tanımlı  $A: B_r[x_0] \rightarrow X$  operatörü  $B_r[x_0]$  üzerinde  $\mu r K_0$ -Lipschitz sabiti ile daraltan dönüşümdür ve  $F(x) = 0$  denklemi  $B_r[x_0]$  da tek bir çözüme sahiptir.
- b)  $\alpha$  sabiti ve  $A$  operatörü ile oluşturulan  $A_\alpha: B_r[x_0] \rightarrow X$ ,  $A_\alpha x = A[(1-\alpha)x + \alpha Ax]$  operatörü  $B_r[x_0]$  üzerinde  $\mu r K_0(1-\alpha + \alpha\mu r K_0)$ -Lipschitz sabiti ile daraltan dönüşümdür (Sahu *et al.* 2012).

**Teorem 3.4.6:**  $F$ , bir  $X$  Banach uzayının açık konveks  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun ve  $x_0 \in D$  için  $F'_{x_0}^{-1} \in B(Y, X)$  olsun.  $F'_{x_0}^{-1}$  ve  $F$  operatörleri (3.22) şartı ile birlikte aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(i) \quad \|F'_{x_0}^{-1}\| \leq \mu;$$

$$(ii) \quad \|F'_{x_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta.$$

Burada  $\mu, \eta > 0$ ,  $r = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$  olmak üzere  $\alpha \in (0,1)$ ,  $h = \eta\mu K_0 < \frac{1}{2}$  ve  $B_r[x_0] \subseteq D$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

- a)  $F(x) = 0$  denklemi tek bir  $x^* \in B_r[x_0]$  çözümüne sahiptir.
- b) (3.26) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve  $x^*$  a yakınsar.
- c)  $\rho = \gamma(1-\alpha + \alpha\gamma)$  ve  $\gamma = \mu r K_0$  olmak üzere, hata tahmini

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \rho^{n+1} \|x_0 - x^*\| \quad (3.27)$$

dır (Sahu *et al.* 2012).

**Sonuç 3.4.7:** (3.21) ve (3.27) eşitsizliklerinden

$$\rho = \gamma(1 - \alpha + \alpha\gamma) < \gamma$$

olduğu görülür. O halde, (3.27) hata tahmini (3.17) hata tahmininden daha iyidir (Sahu *et al.* 2012).

Şimdi (3.26) iterasyonu için lokal yakınsama teoremini verelim.

**Teorem 3.4.8:**  $F$ , bir  $X$  Banach uzayının açık konveks  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $\alpha \in (0,1)$  ve  $F'_{x^*}^{-1} \in B(Y, X)$  olacak şekilde  $x^* \in D$ ,  $F(x) = 0$  in bir çözümü olsun.  $x_0 \in D$  için  $F'_{x^*}^{-1}$  ve  $F$  operatörleri (3.23) ve (3.24) şartlarını sağlasın. Ayrıca  $r_1 = \frac{2}{K_2}$  için  $B_{r_1}(x^*) \subseteq D$  olsun. Bu durumda,

- a)  $r = \frac{2}{2K_2+3K_1}$  olmak üzere  $x_0 \in B_r(x^*)$  başlangıç noktası için (3.26) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r(x^*)$  dadır ve  $B_{r_1}(x^*)$  da  $x^*$  tek çözümüne yakınsar.
- b)  $\rho' = \delta_0(1 - \alpha + \alpha\delta_0)$  ve  $\delta_0 = \frac{\|x_0 - x^*\|}{r}$  olmak üzere, tahmini hata

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq (\rho')^{n+1} \|x_0 - x^*\| \quad (3.28)$$

dır (Sahu *et al.* 2012).

**Sonuç 3.4.9:** (3.25) ve (3.28) eşitsizliklerinden

$$\rho' = \delta_0(1 - \alpha + \alpha\delta_0) < \delta_0$$

olduğu görülür. O halde, (3.28) hata tahmini (3.25) hata tahmininden daha iyidir (Sahu *et al.* 2012).

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmalarımızda elde ettiğimiz bazı sonuçlara yer verilecektir.

Öncelikle, normlu uzaylarda daraltan dönüşümlerin sınıfı için yeni bir iterasyon metodu teşkil edilerek, bu iterasyonun sabit noktaya yaklaşma hızı diğer iterasyonlarla karşılaştırılmıştır.

Daha sonra normal S-iterasyonu ve daraltan dönüşümler için oluşturulan (4.1) iterasyonu,  $[a, b]$  aralığından  $\mathbb{R}$  ye tanımlı dönüşümler için, Newton metodu formunda yeniden yazılarak, bu iterasyon metotlarının yakınsaması gösterilmiştir.

Son olarak, Banach uzayında tanımlı operatörler için Newton metodu formunda yazılan (4.1) iterasyonunun, yarı-lokal ve lokal yakınsama teoremleri verilmiştir.

$D, E$  normlu uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi  $T: D \rightarrow D$  bir dönüşüm olsun.  $x_0 \in D$  için

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)z_n + \alpha_n Tz_n, \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

şeklinde  $\{x_n\}$  iterasyon dizisini tanımlayalım. Burada  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$ ,  $(0,1)$  aralığındaki dizilerdir (Karaca and Yildirim 2015). Bu iterasyonu, çalışmalarında Imdad ve Dashputre (2016) Picard normal S-iterasyonu ve Çeliker (2014) modifiye edilmiş SP iterasyon metodu olarak adlandırmışlardır. Bu iterasyon şeması SP iterasyonunun (Phuengrattana and Suantai 2011) özel bir durumu olarak görülebileceği için, ihtiyaç duyulduğu takdirde modifiye edilmiş SP iterasyonu olarak adlandırılacaktır.

**Sonuç 4.1:** Eğer (4.1) iterasyonunda  $\beta_n = 0$  alınırsa bu iterasyon, (3.14) normal S-iterasyonuna,  $\alpha_n = \beta_n = 0$  alınırsa (2.2) Picard iterasyonuna indirgenir.

#### 4.1. Yakınsama Oranı

Bu kısımda (4.1) iterasyon metodunun (3.12) S-iterasyonu ve (3.14) normal S-iterasyonundan hızlı olduğunu göstereceğiz.

**Teorem 4.1.1:**  $D, E$  normlu uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve  $T: D \rightarrow D$ ,  $L$  sabiti ile daraltan bir dönüşüm olsun. (3.12), (3.14) ve (4.1) iterasyonlarının herbiri  $T$  nin bir  $x^*$  sabit noktasına yakınsasın. Burada  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  dizileri,  $n \geq 0$  ve  $\lambda$  için  $0 \leq \lambda \leq \alpha_n, \beta_n < 1$  olarak tanımlanmıştır. Bu durumda (4.1) ile verilen iterasyon metodu, S-iterasyonu ve normal S-iterasyonundan daha hızlı yakınsar.

**İspat:**  $x_0 = u_0 = w_0 \in D$  için  $\{x_n\}$ ,  $\{u_n\}$  ve  $\{w_n\}$  dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\text{S-iterasyonu: } \begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tu_n + \alpha_nTv_n, \\ v_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_nTu_n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Normal S-iterasyonu: } w_{n+1} = T((1 - \alpha_n)w_n + \alpha_nTw_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(4.1) \text{ iterasyonu: } \begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)z_n + \alpha_nTz_n, \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bu durumda, S-iterasyonundan,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - x^*\| &= \|(1 - \alpha_n)Tu_n + \alpha_nTv_n - x^*\| \\ &= \|(1 - \alpha_n)(Tu_n - x^*) + \alpha_n(Tv_n - x^*)\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|Tu_n - x^*\| + \alpha_n\|Tv_n - x^*\| \\ &\leq L[(1 - \alpha_n)\|u_n - x^*\| + \alpha_n\|v_n - x^*\|] \\ &= L[(1 - \alpha_n)\|u_n - x^*\| + \alpha_n\|(1 - \beta_n)u_n + \beta_nTu_n - x^*\|] \\ &= L[(1 - \alpha_n)\|u_n - x^*\| + \alpha_n\|(1 - \beta_n)(u_n - x^*) + \beta_n(Tu_n - x^*)\|] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq L[(1 - \alpha_n)\|u_n - x^*\| + \alpha_n(1 - \beta_n)\|u_n - x^*\| + \alpha_n\beta_n\|Tu_n - x^*\|] \\
&\leq L[(1 - \alpha_n) + \alpha_n(1 - \beta_n) + L\alpha_n\beta_n]\|u_n - x^*\| \\
&= L[1 - (1 - L)\alpha_n\beta_n]\|u_n - x^*\| \\
&\leq L[1 - (1 - L)\lambda^2]\|u_n - x^*\| \\
&\vdots \\
&\leq [L(1 - (1 - L)\lambda^2)]^n\|u_0 - x^*\|
\end{aligned}$$

elde edilir.  $[L(1 - (1 - L)\lambda^2)]^n\|u_0 - x^*\| = k_n$  olarak alınsın.

Şimdi, normal S-iterasyonundan

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - x^*\| &= \|T((1 - \alpha_n)w_n + \alpha_nTw_n) - x^*\| \\
&\leq L\|(1 - \alpha_n)(w_n - x^*) + \alpha_n(Tw_n - x^*)\| \\
&\leq L[(1 - \alpha_n)\|w_n - x^*\| + \alpha_nL\|w_n - x^*\|] \\
&= L[1 - (1 - L)\alpha_n]\|w_n - x^*\| \\
&\leq L[1 - (1 - L)\lambda]\|w_n - x^*\| \\
&\vdots \\
&\leq [L(1 - (1 - L)\lambda)]^n\|w_0 - x^*\|
\end{aligned}$$

dır.  $[L(1 - (1 - L)\lambda)]^n\|w_0 - x^*\| = l_n$  olsun. Son olarak (4.1) iterasyonundan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| &= \|Ty_n - x^*\| \\
&\leq L\|y_n - x^*\| \\
&= L\|(1 - \alpha_n)z_n + \alpha_nTz_n - x^*\| \\
&= L\|(1 - \alpha_n)(z_n - x^*) + \alpha_n(Tz_n - x^*)\| \\
&\leq L[(1 - \alpha_n)\|z_n - x^*\| + \alpha_n\|Tz_n - x^*\|] \\
&\leq L[(1 - \alpha_n)\|z_n - x^*\| + \alpha_nL\|z_n - x^*\|] \\
&= L[1 - (1 - L)\alpha_n]\|z_n - x^*\| \\
&= L[1 - (1 - L)\alpha_n]\|(1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n - x^*\| \\
&= L[1 - (1 - L)\alpha_n]\|(1 - \beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n(Tx_n - x^*)\| \\
&\leq L[1 - (1 - L)\alpha_n][\|(1 - \beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n\|Tx_n - x^*\|]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq L[1 - (1 - L)\alpha_n][(1 - \beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n L\|x_n - x^*\|] \\
&= L[1 - (1 - L)\alpha_n][1 - (1 - L)\beta_n]\|x_n - x^*\| \\
&\leq L[1 - (1 - L)\lambda]^2\|x_n - x^*\| \\
&\vdots \\
&\leq [L(1 - (1 - L)\lambda)^2]^n\|x_0 - x^*\|
\end{aligned}$$

bulunur.  $[L(1 - (1 - L)\lambda)^2]^n\|x_0 - x^*\| = m_n$  denilirse, bu durumda  $n \rightarrow \infty$  için

$$\frac{m_n}{k_n} = \frac{[L(1 - (1 - L)\lambda)^2]^n\|x_0 - x^*\|}{[L(1 - (1 - L)\lambda^2)]^n\|u_0 - x^*\|} = \left[ \frac{L(1 - (1 - L)\lambda)^2}{L(1 - (1 - L)\lambda^2)} \right]^n \frac{\|x_0 - x^*\|}{\|u_0 - x^*\|} \rightarrow 0$$

dır. Böylece  $\{x_n\}$ ,  $x^*$  a  $\{u_n\}$  den daha hızlı yakınsar. Benzer şekilde  $n \rightarrow \infty$  için

$$\frac{m_n}{l_n} = \frac{[L(1 - (1 - L)\lambda)^2]^n\|x_0 - x^*\|}{[L(1 - (1 - L)\lambda)]^n\|w_0 - x^*\|} = \left[ \frac{L(1 - (1 - L)\lambda)^2}{L(1 - (1 - L)\lambda)} \right]^n \frac{\|x_0 - x^*\|}{\|w_0 - x^*\|} \rightarrow 0$$

dır. Dolayısıyla  $\{x_n\}$ ,  $x^*$  a  $\{w_n\}$  den daha hızlı yakınsar.

Aşağıdaki örnek, (4.1) iterasyonu ile diğer iterasyonların sabit noktaya yakınsamalarının karşılaştırmasını göstermektedir.

**Örnek 4.1.2:**  $E = \mathbb{R}$  ve  $D = [0,2]$  olsun. Her  $x \in D$  için  $T(x) = \frac{x^3+18}{13}$  ile verilen  $T: D \rightarrow D$  daraltan dönüşümünü göz önüne alalım. Başlangıç noktasını  $x_0 = 0$  ve  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$  dizilerini  $\alpha_n = \frac{1}{n^{0.5+1}}$  ve  $\{\beta_n\} = \frac{1}{n^{2+1}}$  olarak seçelim. Aşağıdaki çizelgede, (4.1) iterasyonu ile S-iterasyonlarının  $x^* = 2$  sabit noktasına yakınsamalarının karşılaştırılması verilmiştir. Bu çizelgeye göre (4.1) iterasyonunun sabit noktaya diğer iki iterasyondan daha hızlı yakınsadığı görülmektedir.

**Çizelge 4.1.** Farklı iterasyonların sabit noktaya yakınsamasının karşılaştırılması

n	(3.12) İterasyonu	(3.14) İterasyonu	(4.1) İterasyonu
1	1.3974	1.4101	1.4740
5	1.8082	1.8432	1.8577
10	1.9105	1.9327	1.9377
15	1.9499	1.9645	1.9669
20	1.9697	1.9797	1.9810
25	1.9810	1.9879	1.9886
30	1.9877	1.9926	1.9930
35	1.9920	1.9954	1.9957
40	1.9947	1.9971	1.9973
45	1.9965	1.9982	1.9983
50	1.9977	1.9988	1.9989
⋮	⋮	⋮	⋮
75	1.9997	1.9999	1.9999
85	1.9999	1.9999	2.0000

#### 4.2. Newton-Tipi S-İterasyonu

Sabit noktaları bulmak için yukarıda kullanılan iterasyon metotları, acaba  $f(x) = 0$  şeklindeki denklemlerin çözümlerini bulmak için de kullanılabilir mi? Bu sorunun çözümü için öncelikle denklemlerin çözümlerinde en çok kullanılan Newton metodunu kullanarak verilen iterasyonlar bu metot yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilip daha sonra yakınsama teoremleri verilecektir. Bu bölümde öncelikle normal S-iterasyonu ve modifiye edilmiş SP iterasyon metodu, Newton metodu yardımıyla tekrar yazılarak yakınsama teoremi verilecektir.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü ve  $x_0 \in [a, b]$  başlangıç noktası için Newton-tipi S-iterasyon metodu:

$$\begin{cases} x_{n+1} = N(y_n) \\ y_n = (1 - \alpha)x_n + \alpha N(x_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\alpha \in (0, 1)$  ve

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

dir. Benzer şekilde,  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  için modifiye edilmiş Newton-tipi SP iterasyon metodu yukarıda verilen aynı şartlar altında

$$\begin{cases} x_{n+1} = N(y_n) \\ y_n = (1 - \alpha)z_n + \alpha N(z_n) \\ z_n = (1 - \beta)x_n + \beta N(x_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 4.2.1:**  $f$  fonksiyonu  $x^*$  merkezli  $r$  yarıçaplı  $B_r[x^*]$  kümesinden  $\mathbb{R}$  ye tanımlı sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve  $x^* \in B_r[x^*]$  için  $f(x^*) = 0$  ve  $f'(x^*) \neq 0$  olsun. Ayrıca  $m \in (0, 1)$  sabiti ve  $M > 0$  sayısı için aşağıdaki şartlar sağlansın:

$$\frac{1}{|f'(x)|} \leq M, \quad |f'(y) - f'(x)| \leq \frac{m}{M} \quad (4.4)$$

Bu durumda herhangi bir  $x_0 \in B_r[x^*]$  için (4.2) ile tanımlı Newton-tipi S-iterasyonu  $B_r[x^*]$  da  $f(x) = 0$  in tek çözümü olan  $x^*$  a yakınsar.

**İspat:**  $V, U_\alpha: B_r[x^*] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$V(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$U_\alpha(x) = x - \alpha \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ile tanımlı  $V$  ve  $U_\alpha$  dönüşümleri verilsin.  $x^*$ ,  $f(x) = 0$  in bir çözümü olduğundan  $V$  ve  $U_\alpha$  nın da bir sabit noktasıdır. Yani,  $V(x^*) = U_\alpha(x^*) = x^*$  dir. Böylece Lemma 2.4.4 ve (4.4) ten

$$\begin{aligned}
|V(x) - x^*| &= \left| x - \frac{f(x)}{f'(x)} - x^* \right| \\
&= \left| \frac{f'(x)(x - x^*) - f(x)}{f'(x)} \right| \\
&\leq M |f'(x)(x - x^*) - (f(x) - f(x^*))| \\
&= M \left| f'(x)(x - x^*) - \int_0^1 f'(x^* + t(x - x^*)) (x - x^*) dt \right| \\
&= M \left| \int_0^1 [f'(x) - f'(x^* + t(x - x^*))] (x - x^*) dt \right| \\
&\leq M \int_0^1 |f'(x) - f'(x^* + t(x - x^*))| |x - x^*| dt \\
&\leq M \int_0^1 \frac{m}{M} |x - x^*| dt \\
&= m|x - x^*|
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir.  $m < 1$  olduğundan  $V$  operatörü  $m$ -sabiti ile quasi-daraltandır. Ayrıca (4.5) ten

$$\begin{aligned}
|V(x) - x^*| &\leq m|x - x^*| \\
&< |x - x^*| \\
&\leq r
\end{aligned}$$

bulunur. O halde  $V: B_r[x^*] \rightarrow B_r[x^*]$  olur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|U_\alpha(x) - x^*| &= \left| x - \alpha \frac{f(x)}{f'(x)} - x^* \right| \\
&= \left| \alpha(x - x^*) - \alpha \frac{f(x)}{f'(x)} + (1 - \alpha)(x - x^*) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{\alpha(x - x^*)f'(x) - \alpha(f(x) - f(x^*))}{f'(x)} + (1 - \alpha)(x - x^*) \right| \\
&\leq M\alpha \left| (x - x^*)f'(x) - \int_0^1 f'(x^* + t(x - x^*))dt \right| + (1 - \alpha)|x - x^*| \\
&= M\alpha \left| \int_0^1 [f'(x) - f'(x^* + t(x - x^*))](x - x^*)dt \right| + (1 - \alpha)|x - x^*| \\
&\leq M\alpha \int_0^1 |f'(x) - f'(x^* + t(x - x^*))||x - x^*|dt + (1 - \alpha)|x - x^*| \\
&\leq M\alpha \frac{m}{M}|x - x^*| + (1 - \alpha)|x - x^*| \\
&= (\alpha m + 1 - \alpha)|x - x^*| \tag{4.6}
\end{aligned}$$

olur.  $m < 1$  olduğundan  $\alpha m + 1 - \alpha < 1$  bulunur. Dolayısıyla  $U_\alpha$  operatörü  $(\alpha m + 1 - \alpha)$ - sabiti ile quasi-daraltandır. Ayrıca (4.6) dan

$$\begin{aligned}
|U_\alpha(x) - x^*| &\leq (\alpha m + 1 - \alpha)|x - x^*| \\
&< |x - x^*| \\
&\leq r
\end{aligned}$$

bulunur. O halde  $U_\alpha: B_r[x^*] \rightarrow B_r[x^*]$  elde edilir.

Bu durumda  $T: B_r[x^*] \rightarrow B_r[x^*]$ ,  $T(x) = VU_\alpha(x)$  operatörü  $m(\alpha m + 1 - \alpha)$  ile quasi-daraltandır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
|T(x) - x^*| &= |VU_\alpha(x) - x^*| \\
&\leq m(\alpha m + 1 - \alpha)|x - x^*|
\end{aligned}$$

dır. Böylece Lemma 3.1.5 ten  $x_{n+1} = T(x_n)$  dizisi  $x^*$  tek çözümüne yakınsar.

**Teorem 4.2.2:**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu her  $x \in [a, b]$  için

- (i)  $f(a)f(b) < 0$ ;
- (ii)  $f \in C^1[a, b]$  ve  $f'(x) \neq 0$ ;

(iii)  $\sqrt{2}m \leq M < 2m$ ;

şartlarını sağlasın. Burada

$$m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|, M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

dir. Bu durumda

a)  $x_0 \in [a, b]$  için (4.2) ile tanımlı Newton-tipi S-iterasyonu,  $[a, b]$  aralığında  $f(x) = 0$  in tek çözümü olan  $x^*$  a yakınsar.

b)  $n \geq 0$  için hata tahmini

$$|x_n - x^*| \leq \frac{mM}{(M^2 - \alpha m^2)} |x_n - x_{n+1}| \quad (4.7)$$

eşitsizliği ile verilir.

**İspat:** a) (i) ve (ii) şartlarından  $f(x) = 0$  denklemini  $(a, b)$  aralığında tek bir  $x^*$  çözümüne sahiptir.

$V, U_\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$V(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$U_\alpha(x) = x - \alpha \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ile tanımlı  $V$  ve  $U_\alpha$  dönüşümlerinin, sırasıyla

$$V(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$U_\alpha(x_n) = x_n - \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklinde tanımlı dizilerin iterasyon fonksiyonları olduğunu kabul edelim.  $x^*$  ın  $f(x) = 0$  ın bir çözümü olması için gerek ve yeter şart  $x^*$  ın  $V$  ve  $U_\alpha$  nın bir sabit noktası olmasıdır. Yani,  $V(x^*) = U_\alpha(x^*) = x^*$  dır. Böylece

$$V(x) - x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - x^* = x - x^* - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

olur. Ayrıca  $f(x) = f(x) - 0 = f(x) - f(x^*)$  olduğu açıktır. Dolayısıyla (ii) den ve ortalama değer teoreminden

$$f(x) = f'(\bar{y})(x - x^*)$$

olur. Burada,  $0 < \lambda < 1$  ve  $\bar{y} = x^* + \lambda(x - x^*)$  dır. Buradan, her  $x \in [a, b]$  için

$$V(x) - x^* = (x - x^*) \left( 1 - \frac{f'(\bar{y})}{f'(x)} \right) \quad (4.8)$$

elde edilir. (ii) şartından  $f'$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde işareti korur. Böylece  $f'(\bar{y})/f'(x) > 0$  olur. Buradan herhangi  $x \in [a, b]$  ve  $x^*$  ile  $x$  arasındaki  $\bar{y}$  için,

$$1 - \frac{f'(\bar{y})}{f'(x)} < 1 \quad (4.9)$$

olur. Ayrıca (iii) den

$$\frac{f'(\bar{y})}{f'(x)} = \left| \frac{f'(\bar{y})}{f'(x)} \right| = \frac{|f'(\bar{y})|}{|f'(x)|} \leq \frac{M}{m} < 2$$

dir ve buradan her  $x \in [a, b]$  ve  $x^*$  ile  $x$  arasındaki  $\bar{y}$  için,

$$1 - \frac{f'(\bar{y})}{f'(x)} > -1 \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.9), (4.10) ve  $f'$  nin sürekliliğinden

$$k = \max_{x, \bar{y} \in [a, b]} \left| 1 - \frac{f'(\bar{y})}{f'(x)} \right| < 1$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikten ve (4.8) den

$$|V(x) - x^*| \leq k|x - x^*|$$

elde edilir.

Benzer şekilde her  $x \in [a, b]$  için

$$|U_\alpha(x) - x^*| \leq l|x - x^*|$$

olduğu görülür. Burada

$$l = \max_{x, \bar{y} \in [a, b]} \left| 1 - \alpha \frac{f'(\bar{y})}{f'(x)} \right| < 1$$

dir.

Burada Lemma 3.1.5 i uygulayabilmek için öncelikle bu dizilerin  $[a, b]$  aralığında iyi tanımlı olduğu gösterilmelidir. Örneğin  $p$ . adımda,  $x_p = V^p(x_0) \notin [a, b]$  olabilir.  $\{x_n\}$  dizisini tekrar  $[a, b]$  içine götürmek için, tüm reel eksen üzerinde genişletilmiş bir  $\bar{f}$  fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f'(a)(x - a) + f(a), & x < a \text{ ise} \\ f(x), & x \in [a, b] \text{ ise} \\ f'(b)(x - b) + f(b), & x > b \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer  $x_p$ ,  $[a, b]$  aralığının içinde kalmıyorsa, bu durumda ya  $x_p < a$  dır ya da  $x_p > b$  dir. Her iki durumda da,  $[a, b]$  nin dışında kalan  $\{x_n\}$  iterasyonu bir sonraki adımda  $[a, b]$  aralığının içine düşecektir.  $a < x^* < b$  için  $\{x_n\}$ ,  $x^*$  a yakınsadığından, belli bir  $N > 0$  dan itibaren mutlaka

$$x_{n+1} = V(x_n) \in [a, b]$$

olur. Bu ise  $V: [a, b] \rightarrow [a, b]$  olması demektir.

Benzer şekilde  $U_\alpha: [a, b] \rightarrow [a, b]$  olduğu görülür. O halde  $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ ,  $T(x) = VU_\alpha(x)$  dönüşümü (4.2) iterasyonunun Newton-tipi iterasyon fonksiyonu olarak yazılır.  $T(x^*) = VU_\alpha(x^*) = V(x^*) = x^*$  olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} |T(x) - x^*| &= |VU_\alpha(x) - x^*| \\ &\leq k|U_\alpha(x) - x^*| \\ &\leq (kl)|x - x^*| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned} |T^n(x) - x^*| &= |(VU_\alpha)^n(x) - x^*| \\ &\leq (kl)|(VU_\alpha)^{n-1}(x) - x^*| \\ &\vdots \\ &\leq (kl)^n|x - x^*| \end{aligned}$$

bulunur.  $0 < kl < 1$  olduğundan, eşitsizliğin her iki tarafında  $n \rightarrow \infty$  için limit alınır, her  $x_0 \in [a, b]$  için  $T^n(x_0) \rightarrow x^*$  olur.

Böylece Lemma 3.1.5 in bütün şartları sağlanmış olur. Buradan,  $x^*$  in  $T$  nin tek sabit noktası olduğu sonucunu elde ederiz.

b) (4.2) den

$$x_n - x_{n+1} = \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \quad (4.11)$$

dir. (4.11) de ortalama değer teoremi kullanılırsa,  $0 < \mu < 1$  için  $c_n = x^* + \mu(x_n - x^*)$  ve  $\bar{c}_n = x^* + \mu(y_n - x^*)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n+1} &= \alpha \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)} (x_n - x^*) + \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(y_n)} (x_n - x^*) \left(1 - \alpha \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)}\right) \\
&= \left[ \alpha \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)} + \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(y_n)} \left(1 - \alpha \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)}\right) \right] (x_n - x^*) \quad (4.12)
\end{aligned}$$

dır. (4.12) den

$$\begin{aligned}
\frac{x_n - x^*}{x_n - x_{n+1}} &= \frac{1}{\left[ \alpha \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)} + \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(y_n)} \left(1 - \alpha \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)}\right) \right]} \\
&\leq \frac{1}{\left( \alpha \frac{m}{M} - \frac{M}{m} \right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left| \frac{x_n - x^*}{x_n - x_{n+1}} \right| \leq \frac{mM}{(M^2 - \alpha m^2)}$$

olur. Sonuç olarak,  $n \geq 0$  için hata tahmini

$$|x_n - x^*| \leq \frac{mM}{(M^2 - \alpha m^2)} |x_n - x_{n+1}|$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 4.2.3:** Berinde ve Pacurar'ın 2006 yılında yaptıkları çalışmada elde ettikleri hata tahmini Materyal ve Yöntem kısmında (3.9) eşitsizliği ile verilmişti. Ancak teoremin ispatındaki

$$x_n - x_{n+1} = -2 \frac{f'(c_n)}{f'(x_n) + M_1 f(x_n)}$$

adımından sonra hesaplamalar yeniden yapılırsa hata teriminin

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M}{m} |x_n - x_{n+1}|$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (4.7) hata tahmini (3.7) hata tahmininden ve (3.9) hata tahmininden daha iyidir.

Newton-tipi S-iterasyonunun daha iyi olduğunu göstermek için aşağıdaki örnekleri verdik. Newton-tipi S-iterasyonu ile (3.4) Newton iterasyon metodunu ve (3.8) Newton-tipi iterasyon metodunu karşılaştırdık.

**Örnek 4.2.4:** (3.4), (3.8) ve (4.2) iterasyonlarını karşılaştırmak için aşağıdaki fonksiyonları düşünelim.

(i)  $f_1: \left[\frac{9}{10}, \frac{6}{5}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^3 - 1$

(ii)  $f_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \arctan x$

Verilen fonksiyonlar yardımıyla  $f_1(x) = 0$  ve  $f_2(x) = 0$  şeklindeki lineer olmayan denklemlerin çözümleri için yukarıda bahsettiğimiz üç iterasyonun karşılaştırması farklı başlangıç değerleri ve  $\alpha$  parametrelerine göre aşağıdaki çizelgelerden görülmektedir.

**Çizelge 4.2.**  $f_1, x_0 = 1.2, \alpha = 0.5$

$n$	(3.4) iterasyonu	(3.8) iterasyonu	(4.2) iterasyonu
1	1.031481481481481	1.031481481481481	1.025703603467683
2	1.000951060058530	1.005536144775204	1.000486236297209
3	1.000000903369599	1.000993822096082	1.000000177257022
4	1.0000000000000816	1.000179068011932	1.0000000000000024
5	1.0000000000000000	1.000032286214456	1.0000000000000000

Çizelge 4.3.  $f_1, x_0 = 1.2, \alpha = 1.0$ 

$n$	(3.4) iterasyonu	(3.8) iterasyonu	(4.2) iterasyonu
1	1.031481481481481	1.031481481481481	1.008923866607488
2	1.000951060058530	1.005536144775204	1.000001379921697
3	1.000000903369599	1.000993822096082	1.000000000000000
4	1.0000000000000816	1.000179068011932	1.000000000000000
5	1.000000000000000	1.000032286214456	1.000000000000000

Çizelge 4.4.  $f_2, x_0 = 1, \alpha = 0.5$ 

$n$	(3.4) iterasyonu	(3.8) iterasyonu	(4.2) iterasyonu
1	0.738200612200851	0.607300918301276	0.607805063038586
2	0.481414019366476	0.267743757940761	0.255409851684756
3	0.252831297040562	0.061386831843207	0.045568155214680
4	0.088357772945637	0.003622880946457	0.001167667461501
5	0.013463797786353	0.000013093679810	0.000000684170713
6	0.000353833278588	0.000000000171443	0.000000000000234
7	0.000000250233662	0.000000000000000	0.000000000000000

Çizelge 4.5.  $f_2, x_0 = 1, \alpha = 1.0$ 

$n$	(3.4) iterasyonu	(3.8) iterasyonu	(4.2) iterasyonu
1	0.738200612200851	0.607300918301276	0.481414019366476
2	0.481414019366476	0.267743757940761	0.088357772945637
3	0.252831297040562	0.061386831843207	0.000353833278588
4	0.088357772945637	0.003622880946457	0.000000000000125
5	0.013463797786353	0.000013093679810	0.000000000000000
6	0.000353833278588	0.000000000171443	0.000000000000000
7	0.000000250233662	0.000000000000000	0.000000000000000

**Teorem 4.2.5:** Teorem 4.2.2 de verilen şartların sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

- a)  $x_0 \in [a, b]$  için (4.3) ile tanımlı modifiye edilmiş Newton-tipi SP iterasyonu,  $[a, b]$  aralığında  $f(x) = 0$  ın tek çözümü olan  $x^*$  a yakınsar.  
 b)  $n \geq 0$  için hata tahmini

$$|x_n - x^*| \leq \frac{mM}{(1 + \alpha)M^2 - \beta m^2} |x_n - x_{n+1}| \quad (4.13)$$

eşitsizliği ile verilir.

**İspat:** a) (4.3) iterasyon metodunun  $x^*$  tek çözümüne yakınsamasının gösterilmesi,  $V, U_\alpha, K_\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$V(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$U_\alpha(x) = x - \alpha \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$K_\beta(x) = x - \beta \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ile tanımlı  $V, U_\alpha$  ve  $K_\beta$  dönüşümleri kullanılarak Teorem 4.2.2 dekine benzer şekilde yapılır.

b) (4.3) den

$$x_n - x_{n+1} = \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

dir. Ortalama değer teoremi kullanılırsa,  $0 < \mu < 1$  için  $c_n = x^* + \mu(x_n - x^*)$ ,  $\bar{c}_n = x^* + \mu(y_n - x^*)$  ve  $\overline{\bar{c}}_n = x^* + \mu(y_n - x^*)$  olmak üzere

$$x_n - x_{n+1} = \beta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} + \alpha \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \frac{f'(c_n)(x_n - x^*)}{f'(x_n)} + \frac{f'(\bar{c}_n)(y_n - x^*)}{f'(y_n)} + \alpha \frac{f'(\bar{c}_n)(z_n - x^*)}{f'(z_n)} \\
&= (x_n - x^*) \left[ \beta \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)} \right. \\
&\quad \left. + \left( 1 - \beta \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)} \right) \left[ \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(y_n)} \left( 1 - \alpha \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(z_n)} \right) + \alpha \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(z_n)} \right] \right]
\end{aligned}$$

dır. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned}
\frac{x_n - x^*}{x_n - x_{n+1}} &= \frac{1}{\left[ \beta \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)} + \left( 1 - \beta \frac{f'(c_n)}{f'(x_n)} \right) \left[ \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(y_n)} \left( 1 - \alpha \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(z_n)} \right) + \alpha \frac{f'(\bar{c}_n)}{f'(z_n)} \right] \right]} \\
&\leq \frac{1}{\left[ \beta \frac{m}{M} - \left( \frac{M}{m} + \alpha \frac{M}{m} \right) \right]}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left| \frac{x_n - x^*}{x_n - x_{n+1}} \right| \leq \frac{mM}{(1 + \alpha)M^2 - \beta m^2}$$

olur. Sonuç olarak  $n \geq 0$  için hata tahmini

$$|x_n - x^*| \leq \frac{mM}{(1 + \alpha)M^2 - \beta m^2} |x_n - x_{n+1}|$$

olarak bulunur.

**Sonuç 4.2.6:**  $\beta < \alpha$  olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
\beta < \alpha &\Rightarrow -\alpha < -\beta \\
&\Rightarrow -\alpha m^2 < -\beta m^2 \\
&\Rightarrow M^2 - \alpha m^2 < M^2 - \beta m^2 \\
&\Rightarrow M^2 - \alpha m^2 < (1 + \alpha)M^2 - \beta m^2
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{mM}{(1 + \alpha)M^2 - \beta m^2} < \frac{mM}{M^2 - \alpha m^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\beta < \alpha$  için (4.13) hata tahmini (4.7) hata tahmininden daha iyidir.

### 4.3. Banach Uzayında Modifiye Edilmiş Newton-Tipi SP İterasyon Metodu

$F$ ,  $X$  Banach uzayının açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $x_0 \in X$  başlangıç noktası ve  $\alpha, \beta \in (0,1)$  olmak üzere (4.1) ile verilen iterasyonunun Newton metodu formu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = N(y_n) \\ y_n = (1 - \alpha)z_n + \alpha N(z_n), \quad n = 0,1,2, \dots \\ z_n = (1 - \beta)x_n + \beta N(x_n) \end{cases} \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$N(x) = x - F'_{x_0}^{-1}F(x)$$

dir. (4.14) iterasyon metodu açık olarak

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - F'_{x_0}^{-1}F(y_n) \\ y_n = z_n - \alpha F'_{x_0}^{-1}F(z_n), \quad n = 0,1,2, \dots \\ z_n = x_n - \beta F'_{x_0}^{-1}F(x_n) \end{cases}$$

şeklinde de yazılabilir.

Ayrıca, teoremlerin ispatında kullanılmak üzere  $V, U_\alpha, U_\beta: B_r[x_0] \rightarrow X$  operatörlerini, her  $x \in B_r[x_0]$  için

$$\begin{cases} V(x) = x - F'_{x_0}^{-1}F(x) \\ U_\alpha(x) = x - \alpha F'_{x_0}^{-1}F(x) \\ U_\beta(x) = x - \beta F'_{x_0}^{-1}F(x) \end{cases} \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlayalım.

(4.14) iterasyonu için yarı-lokal yakınsama teoremini vermeden önce  $F(x) = 0$  denkleminin çözümünün tekliğini gösteren teoremi verelim.

**Teorem 4.3.1:**  $F, X$  Banach uzayının açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $x_0 \in D$  için  $F'_{x_0}^{-1} \in B(Y, X)$  olsun.  $F$  operatörü (3.22) şartını ve aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i)  $\|F'_{x_0}^{-1}\| \leq \mu$ ;
- (ii)  $\|F'_{x_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$ ;

Burada  $\mu, \eta, K_0 > 0$  dir.  $r = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} \eta$  olmak üzere  $\alpha, \beta \in (0,1)$ ,  $h = \eta\mu K_0 < \frac{1}{2}$  ve  $B_r[x_0] \subseteq D$  olduğunu varsayalım. O halde

- a) (4.15) ile tanımlı  $V, U_\alpha$  ve  $U_\beta$  operatörleri,  $\mu r K_0$ -Lipschitz sabiti ile  $B_r[x_0]$  üzerinde daraltan dönüşümlerdir ve  $F(x) = 0$  operatör denklemi  $B_r[x_0]$  da tek bir çözüme sahiptir.
- b) (4.15) ile oluşturulan  $T: B_r[x_0] \rightarrow X$ ,  $T(x) = VU_\alpha U_\beta(x)$  operatörü  $(\mu r K_0)^3$ -Lipschitz sabiti ile  $B_r[x_0]$  üzerinde bir daraltan dönüşümdür.

**İspat:** a)  $\gamma = \mu r K_0$  dersek  $\gamma = 1 - \sqrt{1 - 2h} < 1$  olur.  $x, y \in B_r[x_0]$  için

$$\|U_\beta(x) - U_\beta(y)\| = \|x - y - \beta F'_{x_0}^{-1}(F(x) - F(y))\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left\| x - y - \beta F'_{x_0}^{-1} \int_0^1 F'_{y+t(x-y)}(x-y) dt \right\| \right\| \\
&= \left\| \left\| F'_{x_0}^{-1} \left[ \beta \int_0^1 F'_{y+t(x-y)}(x-y) dt - \int_0^1 F'_{x_0}(x-y) dt \right] \right\| \right\| \\
&= \|F'_{x_0}^{-1}\| \left\| \left\| \beta \int_0^1 F'_{y+t(x-y)}(x-y) dt - \int_0^1 F'_{x_0}(x-y) dt \right\| \right\| \\
&\leq \|F'_{x_0}^{-1}\| \int_0^1 \|F'_{y+t(x-y)}(x-y) - F'_{x_0}(x-y)\| dt \\
&\leq \mu \int_0^1 \|F'_{y+t(x-y)} - F'_{x_0}\| \|x-y\| dt \\
&\leq \mu \int_0^1 K_0 \|y+t(x-y) - x_0\| \|x-y\| dt \\
&\leq \mu r K_0 \|x-y\| \\
&\leq \gamma \|x-y\|
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda,  $U_\beta$  operatörü  $\gamma$  sabiti ile daraltan dönüşümdür.

Şimdi  $U_\beta(B_r[x_0]) \subseteq B_r[x_0]$  olduğunu gösterelim.  $x \in B_r[x_0]$  için

$$\begin{aligned}
\|U_\beta(x) - x_0\| &\leq \|U_\beta(x) - U_\beta(x_0)\| + \|U_\beta(x_0) - x_0\| \\
&= \|x - x_0 - \beta F'_{x_0}^{-1}(F(x) - F(x_0))\| + \|x_0 - \beta F'_{x_0}^{-1}F(x_0) - x_0\| \\
&\leq \|F'_{x_0}^{-1}\| \int_0^1 \|F'_{x_0+t(x-x_0)} - F'_{x_0}\| \|x - x_0\| dt + \eta \\
&\leq \mu \int_0^1 K_0 \|t(x - x_0)\| \|x - x_0\| dt + \eta \\
&\leq \mu K_0 \|x - x_0\|^2 \int_0^1 t dt + \eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\mu r^2 K_0}{2} + \eta \\
&= \frac{\beta K_0}{2} \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \right]^2 + \eta \\
&= r
\end{aligned}$$

olur. Böylece  $U_\beta: B_r[x_0] \rightarrow B_r[x_0]$  elde edilir. Banach daralma ilkesinden  $U_\beta, B_r[x_0]$  da tek bir sabit noktaya sahiptir.

Benzer şekilde

$$\|U_\alpha(x) - U_\alpha(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \text{ ve } \|V(x) - V(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca  $x \in B_r[x_0]$  için

$$\|U_\alpha(x) - x_0\| \leq r \text{ ve } \|V(x) - x_0\| \leq r$$

olduğundan  $U_\alpha(B_r[x_0]) \subseteq B_r[x_0]$  ve  $V(B_r[x_0]) \subseteq B_r[x_0]$  olur.

b)  $x, y \in B_r[x_0]$  için

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\| &= \|VU_\alpha U_\beta(x) - VU_\alpha U_\beta(y)\| \\
&\leq \gamma \|U_\alpha U_\beta(x) - U_\alpha U_\beta(y)\| \\
&\leq \gamma^2 \|U_\beta(x) - U_\beta(y)\| \\
&\leq \gamma^3 \|x - y\|
\end{aligned}$$

dir. O halde  $T$  operatörü  $B_r[x_0]$  üzerinde  $\gamma^3 = (\mu r K_0)^3$  ile bir daraltan dönüşümdür.

**Teorem 4.3.2:**  $F, X$  Banach uzayının açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $x_0 \in D$  için  $F'_{x_0} \in B(Y, X)$  olsun.  $F$  operatörü (3.22) şartını ve aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(i) \quad \|F'_{x_0}^{-1}\| \leq \mu;$$

$$(ii) \quad \|F'_{x_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta;$$

Burada  $\mu, \eta, K_0 > 0$  dir.  $\alpha, \beta \in (0,1)$ ,  $h = \eta\mu K_0 < \frac{1}{2}$  ve  $r = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$  olmak üzere  $B_r[x_0] \subseteq D$  olduğunu varsayalım. O halde

a)  $F(x) = 0$  denklemini tek bir  $x^* \in B_r[x_0]$  çözümüne sahiptir.

b) (4.14) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve  $x^*$  a yakınsar.

c)  $\lambda = \gamma^3$  ve  $\gamma = \mu r K_0$  olmak üzere, hata tahmini

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \lambda^{n+1} \|x_0 - x^*\| \quad (4.16)$$

dir.

**İspat:** a) Teorem 4.3.1 den açıktır.

b) (4.14) ten

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|T(x_n) - T(x^*)\| \\ &= \|VU_\alpha U_\beta(x_n) - VU_\alpha U_\beta(x^*)\| \\ &\leq \gamma \|U_\alpha U_\beta(x_n) - U_\alpha U_\beta(x^*)\| \\ &\leq \gamma^2 \|U_\beta(x_n) - U_\beta(x^*)\| \\ &\leq \gamma^3 \|x_n - x^*\| \\ &\vdots \\ &\leq (\gamma^3)^{n+1} \|x_0 - x^*\| \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. Böylece  $n \rightarrow \infty$  için  $x_n \rightarrow x^*$  olur.

c) (4.17) den açıktır.

**Sonuç 4.3.3:** (3.27) ve (4.16) dan

$$\lambda = \gamma^3 < \gamma(1 - \alpha + \alpha\gamma)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (4.16) hata tahmini (3.27) hata tahmininden daha iyidir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} \gamma < 1 &\Rightarrow \gamma - \alpha < 1 - \alpha \\ &\Rightarrow \gamma(\gamma - \alpha) < 1 - \alpha \\ &\Rightarrow \gamma^2 < 1 - \alpha + \alpha\gamma \end{aligned}$$

ve buradan  $\gamma^3 < \gamma(1 - \alpha + \alpha\gamma)$  elde edilir.

(4.14) iterasyonu için lokal yakınsama teoremini vermeden önce aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 4.3.4:**  $X$  Banach uzayı olmak üzere,  $F, X$  in açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $F'_{x^*}^{-1} \in B(Y, X)$  olmak üzere  $x^* \in D$ ,  $F(x) = 0$  denkleminin bir çözümü olsun.  $x_0 \in D$  ve  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  için  $F'_{x^*}^{-1}$  ve  $F$  operatörleri (3.23) ve (3.24) şartlarını sağlasın. Ayrıca  $r_1 = \frac{1}{K_2}$  için  $B_{r_1}(x^*) \subseteq D$  ve  $r = \frac{2}{2K_2 + 3K_1}$  olmak üzere  $x_0 \in B_r(x^*)$  olsun.  $V, U_\alpha$  ve  $U_\beta$  operatörleri (4.15) ile tanımlansın. Bu durumda

a)  $x \in B_r(x^*)$  için

$$\begin{aligned} \|V(x) - x^*\| &\leq \delta_x \|x - x^*\|, \\ \|U_\alpha(x) - x^*\| &\leq (\alpha\delta_x + 1 - \alpha) \|x - x^*\|, \\ \|U_\beta(x) - x^*\| &\leq (\beta\delta_x + 1 - \beta) \|x - x^*\| \end{aligned} \tag{4.18}$$

dır. Burada  $\delta_x = \frac{K_1}{2(1-rK_2)} (\|x - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\|)$  dir.

b)  $V$ ,  $U_\alpha$  ve  $U_\beta$  operatörleri  $B_r(x^*)$  üzerinde sırasıyla  $\delta$ ,  $1 - (1 - \delta)\alpha$  ve  $1 - (1 - \delta)\beta$  sabitleri ile quasi-daraltandır. Burada  $\delta = \sup_{x \in B_r(x^*)} \{\delta_x\}$  dir.

**İspat:** a)  $x \neq x_0$  olmak üzere  $x \in B_r(x^*)$  için

$$\begin{aligned} \|V(x) - x^*\| &= \|x - F'_{x_0}^{-1}F(x) - x^*\| \\ &= \left\| F'_{x_0}^{-1} \left( F(x) - F(x^*) - F'_{x_0}(x - x^*) \right) \right\| \\ &= \left\| \left( F'_{x^*}^{-1} F'_{x_0} \right)^{-1} \int_0^1 F'_{x^*}^{-1} \left( F'_{tx+(1-t)x^*}(x - x^*) - F'_{x_0}(x - x^*) \right) dt \right\| \end{aligned}$$

dir. (3.23) ve Lemma 2.4.4 ten

$$\begin{aligned} \|V(x) - x^*\| &\leq \frac{K_1}{2(1 - rK_2)} (\|x - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\|) \|x - x^*\| \\ &= \delta_x \|x - x^*\| \end{aligned}$$

elde ederiz.  $U_\alpha$  operatörü için

$$\begin{aligned} \|U_\alpha(x) - x^*\| &= \|x - \alpha F'_{x_0}^{-1}F(x) - x^*\| \\ &= \|\alpha(x - x^*) - \alpha F'_{x_0}^{-1}(F(x) - F(x^*)) + (1 - \alpha)(x - x^*)\| \\ &\leq \alpha \|F'_{x_0}^{-1}(F(x) - F(x^*)) - (x - x^*)\| + (1 - \alpha) \|x - x^*\| \\ &= \alpha \left\| \left( F'_{x^*}^{-1} F'_{x_0} \right)^{-1} \int_0^1 F'_{x^*}^{-1} \left( F'_{tx+(1-t)x^*}(x - x^*) - F'_{x_0}(x - x^*) \right) dt \right\| \\ &\quad + (1 - \alpha) \|x - x^*\| \\ &\leq \alpha \left\| \left( F'_{x^*}^{-1} F'_{x_0} \right)^{-1} \right\| \int_0^1 \|F'_{x^*}^{-1}(F'_{tx+(1-t)x^*} - F'_{x_0})\| \|x - x^*\| dt \\ &\quad + (1 - \alpha) \|x - x^*\| \end{aligned}$$

dir. (3.23) ve Lemma 3.4.3 ten

$$\begin{aligned}
\|U_\alpha(x) - x^*\| &\leq \frac{\alpha K_1}{1 - K_2 \|x_0 - x^*\|} \int_0^1 \|t(x - x^*) + (x^* - x_0)\| \|x - x^*\| dt \\
&\quad + (1 - \alpha) \|x - x^*\| \\
&\leq \frac{\alpha K_1}{1 - K_2 \|x_0 - x^*\|} \int_0^1 (t \|x - x^*\| + \|x_0 - x^*\|) \|x - x^*\| dt \\
&\quad + (1 - \alpha) \|x - x^*\| \\
&\leq \frac{\alpha K_1}{2(1 - rK_2)} (\|x - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\|) \|x - x^*\| (1 - \alpha) \|x - x^*\| \\
&= (\alpha \delta_x + 1 - \alpha) \|x - x^*\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,  $\alpha$  yerine  $\beta$  alınırsa

$$\|U_\beta(x) - x^*\| \leq (\beta \delta_x + 1 - \beta) \|x - x^*\|$$

olduğu görülür.

b)  $V$ ,  $U_\alpha$  ve  $U_\beta$  operatörleri, sırasıyla  $\delta$ ,  $1 - (1 - \delta)\alpha$  ve  $1 - (1 - \delta)\beta$  sabitleri ile quasi-daraltandır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in B_r(x^*)} \{\delta_x\} &= \frac{K_1}{2(1 - rK_2)} \left( \sup_{x \in B_r(x^*)} \|x - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\| \right) \\
&\leq \frac{K_1}{2(1 - rK_2)} (r + 2\|x_0 - x^*\|) \\
&< \frac{rK_1}{2(1 - rK_2)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir.  $\delta < 1$  olduğundan  $1 - (1 - \delta)\alpha < 1$  ve  $1 - (1 - \delta)\beta < 1$  olur. O halde ispat tamamlanmış olur.

Şimdi lokal yakınsama teoremini verebiliriz.

**Teorem 4.3.5:**  $X$  bir Banach uzayı olmak üzere,  $F$ ,  $X$  in açık konveks bir  $D$  alt kümesinden  $Y$  Banach uzayına tanımlı Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $F'_{x^*}^{-1} \in B(Y, X)$  olmak üzere  $x^* \in D$ ,  $F(x) = 0$  denkleminin bir çözümü ve  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  olsun.  $r_1 = \frac{1}{K_2}$  için  $B_{r_1}(x^*) \subseteq D$  olduğunu varsayalım.  $r = \frac{2}{2K_2 + 3K_1}$  olmak üzere,  $x_0 \in B_r(x^*)$  için  $F'_{x^*}^{-1}$  ve  $F$  operatörleri (3.23) ve (3.24) şartlarını sağlasın. Bu durumda

a) (4.14) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r(x^*)$  dadır ve  $x^* \in B_{r_1}(x^*)$  tek çözümüne yakınsar.

b)  $\lambda' = (\alpha\delta_0 + 1 - \alpha)(\beta\delta_0 + 1 - \beta)\delta_0$  ve  $\delta_0 = \frac{3K_1}{2(1-rK_2)} \|x_0 - x^*\|$  olmak üzere, tahmini hata

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq (\lambda')^{n+1} \|x_0 - x^*\| \quad (4.19)$$

dır.

**İspat:** a) Öncelikle,  $x^*$  in  $F(x) = 0$  in tek çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için  $y^*$  in  $B_{r_1}(x^*)$  da  $F(x) = 0$  in başka bir çözümü olduğunu varsayalım. O halde

$$0 = F(x^*) - F(y^*) = \int_0^1 F'_{y^*+t(x^*-y^*)}(x^* - y^*) dt$$

dir. Her  $h \in X$  için

$$L(h) = \int_0^1 F'_{y^*+t(x^*-y^*)} h dt$$

olacak şekilde bir  $L$  operatörü tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned} \|I - F'_{x^*}^{-1}L\| &= \left\| \int_0^1 F'_{x^*}^{-1}(F'_{x^*} - F'_{y^*+t(x^*-y^*)}) dt \right\| \\ &\leq \frac{K_2}{2} \|x^* - y^*\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< \frac{r_1 K_2}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1.17 den,  $L$  tersinirdir ve  $x^* = y^*$  dır. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla  $x^*$ ,  $F(x) = 0$  denkleminin tek çözümüdür. (4.15) ile tanımlı  $U_\alpha$  ve  $U_\beta$  operatörleri  $B_r[x^*]$  üzerinde olduğundan ve (4.14) ten

$$z_0 = U_\beta(x_0), y_0 = U_\alpha U_\beta(x_0) \in B_r(x^*)$$

dır. Teorem 4.3.4 ten  $V: B_r[x^*] \rightarrow B_r[x^*]$  olur. Böylece (4.14) iterasyonu,

$$x_{n+1} = VU_\alpha U_\beta(x_n)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|VU_\alpha U_\beta(x_n) - x^*\| \\ &\leq \delta_{y_n} \|U_\alpha U_\beta(x_n) - x^*\| \\ &\leq \delta_{y_n} (\alpha \delta_{z_n} + 1 - \alpha) \|U_\beta(x_n) - x^*\| \\ &\leq \delta_{y_n} (\alpha \delta_{z_n} + 1 - \alpha) (\beta \delta_{x_n} + 1 - \beta) \|x_n - x^*\| \end{aligned}$$

olduğundan ve  $\delta_x$  in tanımından

$$\begin{aligned} \delta_{y_n} &= \frac{K_1}{2(1 - rK_2)} \|U_\alpha U_\beta(x_n) - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\| \\ &\leq \frac{K_1}{2(1 - rK_2)} [(\alpha \delta_{z_n} + 1 - \alpha) \|U_\beta(x_n) - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\|] \\ &\leq \frac{K_1}{2(1 - rK_2)} [\|U_\beta(x_n) - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\|] \\ &\leq \frac{K_1}{2(1 - rK_2)} [(\beta \delta_{x_n} + 1 - \beta) \|x_n - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\|] \\ &\leq \frac{K_1}{2(1 - rK_2)} [\|x_0 - x^*\| + 2\|x_0 - x^*\|] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{3K_1}{2(1-rK_2)} \|x_0 - x^*\| \\ &= \delta_0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq [(\alpha\delta_0 + 1 - \alpha)(\beta\delta_0 + 1 - \beta)\delta_0]^{n+1} \|x_0 - x^*\| \quad (4.20)$$

elde edilir. Bu durumda  $n \rightarrow \infty$  için  $x_n \rightarrow x^*$  olur.

b) (4.20) den hata tahmini elde edilir.

**Sonuç 4.3.6:** (3.28) ve (4.19) dan

$$\begin{aligned} \lambda' &= (\alpha\delta_0 + 1 - \alpha)(\beta\delta_0 + 1 - \beta)\delta_0 \\ &< \delta_0(\alpha\delta_0 + 1 - \alpha) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (4.19) hata tahmini (3.28) hata tahmininden daha iyidir.

### 4.3.1. Uygulamalar

Bu başlık altında (4.14) metodunun integral denklemlerine uygulanması çalışılmıştır.

#### Başlangıç Değer Problemi

Bir başlangıç değer problemi

$$\frac{dx(s)}{ds} = f(s, x(s)), x(0) = 0, 0 \leq s \leq 1 \quad (4.21)$$

olarak verilsin.  $f_2'(s, x(s)) = \frac{\partial}{\partial x} f(s, x(s))$ ,  $f$  nin ikinci bileşene göre kısmi türevi olsun.  $\forall (s, x(s)) \in D \subseteq [0,1] \times \mathbb{R}$  için  $f_2'(s, x(s))$  türevinin var ve her  $x \in C^1[0,1]$  ve  $K_0 > 0$  için

$$|f_2'(s, x(s)) - f_2'(s, x_0(s))| \leq K_0|x - x_0| \quad (4.22)$$

olduğunu varsayalım. Burada  $C^1[0,1]$ ,  $[0,1]$  aralığında tanımlı reel değerli sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı ve  $x_0 \in C^1[0,1]$  dir.

$$F(x)(s) = \frac{dx(s)}{ds} - f(s, x(s)) \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlı  $F: C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$  operatörünü düşünelim. O halde, (4.21) problemini çözmek  $F(x) = 0$  problemini çözmeye denktir. (4.23) ile tanımlı  $F$  operatörü Fréchet türevlenebilirdir ve bu türev

$$F'_x h(s) = \frac{dh(s)}{ds} - f_2'(s, x(s))h(s)$$

ile verilir. Burada  $\forall h \in C^1[0,1]$  dir (Sahu *et al.* 2012).

**Teorem 4.3.7:**  $F: C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$ , (4.23) ile tanımlı bir operatör olsun.  $x_0 \in C^1[0,1]$  için  $f_2'(s, x(s))$ , (4.22) koşulunu sağlasın.  $\theta_1 = \sup_{s \in [0,1]} |f_2'(s, x_0(s))|$  olmak üzere  $h = \frac{K_0 \|F(x_0)\|}{(1-\theta_1)^2} < \frac{1}{2}$  olsun. O halde,

- $r = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} \eta$  için (4.21) başlangıç değer problemi  $B_r[x_0]$  da bir tek  $x^*$  çözümüne sahiptir.
- (4.14) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve  $x^*$  a yakınsar.

**İspat:** Teoremi ispatlamak için  $F'_{x_0}$  in bir üst sınırını bulmak yeterlidir.

$$F'_{x_0} h(s) = \frac{dh(s)}{ds} - f_2'(s, x_0(s))h(s) = u(s)$$

olsun.  $F'_{x_0}$  in varlığından,  $h(s) = F'_{x_0}^{-1}u(s)$  yazabiliriz ve birinci mertebeden lineer başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} \frac{dh(s)}{ds} = u(s) + f_2'(s, x_0(s))h(s) \\ h(0) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

şeklinde olur. (4.24) problemi,

$$h(s) = \int_0^s [u(\tau) + f_2'(\tau, x_0(\tau))h(\tau)] d\tau$$

olarak verilen ikinci çeşit Volterra integral denkleminde denktir.

$$Lh(s) = \int_0^s f_2'(\tau, x_0(\tau))h(\tau) d\tau$$

ile tanımlanan bir  $L$  operatörünü düşünelim.  $L$  operatörünün lineer olduğu açıktır.

$$(I - L)(h)(s) = \int_0^s u(\tau) d\tau$$

eşitliğini yazabiliriz.  $C[0,1]$  deki maksimum normu kullanılırsa,  $L$  operatörü sınırlı olur ve  $\theta_1 = \sup_{s \in [0,1]} |f_2'(s, x_0(s))|$  olmak üzere  $\|L\| \leq \theta_1$  eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak,  $\theta_1 < 1$  ise o halde  $(I - L)^{-1}$  tersi vardır ve  $\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \theta_1}$  olur.

Dolayısıyla,  $\|F'_{x_0}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \theta_1}$  elde edilir. Gerçekten,

$$\|F'_{x_0}{}^{-1}u\| = \max_{s \in [0,1]} |F'_{x_0}{}^{-1}u(s)| = \max_{s \in [0,1]} \left| (I - L)^{-1} \int_0^s u(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{1 - \theta_1} \|u\|$$

dir. Şimdi, (4.22) den, her  $x \in C^1[0,1]$  için

$$\|F'_x - F'_{x_0}\| \leq K_0 \|x - x_0\|$$

bulunur. Buradan,  $\eta = \frac{\|F(x_0)\|}{1 - \theta_1}$ ,  $\mu = \frac{1}{1 - \theta_1}$  ve  $h = \eta\mu K_0 < \frac{1}{2}$  elde edilir. Böylece, Teorem 4.3.2 nin tüm şartları sağlanır. O halde, Teorem 4.3.7 ispatlanmış olur.

### Sınır Değer Problemi

İkinci dereceden sınır değer problemi

$$\frac{d^2 x(s)}{ds^2} = g(s, x(s)), x(0) = 0, x(1) = 0 \quad (4.25)$$

şeklinde verilsin.  $\forall (s, x(s)) \in D \subseteq [0,1] \times \mathbb{R}$  için  $g_2'(s, x(s))$  türevinin var ve her  $x \in C^2[0,1]$  ve  $K_0 > 0$  için

$$|g_2'(s, x(s)) - g_2'(s, x_0(s))| \leq K_0 |x - x_0| \quad (4.26)$$

olduğunu varsayalım. Burada  $C^2[0,1]$ ,  $[0,1]$  aralığında tanımlı reel değerli ikinci dereceden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı ve  $x_0 \in C^2[0,1]$  dir.

$$F(x)(s) = \frac{d^2 x(s)}{ds^2} - g(s, x(s)) \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlı  $F: C^2[0,1] \rightarrow C[0,1]$  operatörünü düşünelim. O halde, (4.25) problemini çözmek  $F(x) = 0$  problemini çözmeye denktir. (4.27) ile tanımlı  $F$  operatörü Fréchet türevlenebilirdir ve bu türev

$$F'_x h(s) = \frac{d^2 h(s)}{ds^2} - g_2'(s, x(s))h(s)$$

ile verilir. Burada  $\forall h \in C^2[0,1]$  dir (Sahu *et al.* 2012).

**Teorem 4.3.8:**  $F: C^2[0,1] \rightarrow C[0,1]$ , (4.27) ile tanımlı bir operatör olsun.  $x_0 \in C^2[0,1]$  için  $g_2'(s, x(s))$ , (4.26) koşulunu sağlasın.  $\theta_2 = \sup_{s \in [0,1]} |g_2'(s, x_0(s))|$  olmak üzere  $h = \frac{K_0 \|F(x_0)\|}{(8-\theta_2)^2} < \frac{1}{2}$  olsun. O halde,

- a)  $r = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} \eta$  için (4.25) sınır değer problemi  $B_r[x_0]$  da bir tek  $x^*$  çözümüne sahiptir.
- b) (4.14) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve  $x^*$  a yakınsar.

**İspat:** Öncelikle  $F'_{x_0}^{-1}$  için bir üst sınır bulalım.

$$F'_{x_0} h(s) = \frac{d^2 h(s)}{ds^2} - g_2'(s, x_0(s))h(s) = u(s)$$

olsun.  $F'_{x_0}^{-1}$  in varlığından,  $h(s) = F'_{x_0}^{-1}u(s)$  yazabiliriz ve lineer sınır değer problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2 h(s)}{ds^2} = u(s) + g_2'(s, x_0(s))h(s) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

şeklinde olur. (4.28) problemi,

$$G(s, \tau) = \begin{cases} \tau(1-s), s \geq \tau \\ s(1-\tau), s \leq \tau \end{cases}$$

olmak üzere

$$h(s) = - \int_0^1 G(s, \tau) [u(\tau) + g_2'(\tau, x_0(\tau))h(\tau)] d\tau$$

olarak verilen ikinci çeşit Fredholm integral denklemine denktir.

$$Lh(s) = - \int_0^1 G(s, \tau) g_2'(\tau, x_0(\tau)) h(\tau) d\tau$$

ile tanımlanan  $L$  operatörünü düşünelim. Sonuç olarak,

$$(I - L)(h)(s) = - \int_0^1 G(s, \tau) u(\tau) d\tau$$

eşitliğini yazabiliriz.  $C[0,1]$  deki maksimum normu kullanılırsa,  $L$  operatörü sınırlı olur ve  $\theta_2 = \sup_{s \in [0,1]} |g_2'(s, x_0(s))|$  olmak üzere  $\|L\| \leq \frac{\theta_2}{8}$  eşitsizliği sağlanır.  $\theta_2 < 1$  ise o halde  $(I - L)^{-1}$  tersi vardır ve  $\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{8}{8 - \theta_2}$  olur. Dolayısıyla,  $\|F'_{x_0}{}^{-1}\| \leq \frac{1}{8 - \theta_2}$  ve  $\|F'_{x_0}{}^{-1} F(x_0)\| \leq \frac{\|F(x_0)\|}{8 - \theta_2}$  elde edilir. Son olarak (4.26) dan, her  $x \in C^1[0,1]$  için

$$\|F'_x - F'_{x_0}\| \leq K_0 \|x - x_0\|$$

bulunur. Buradan,  $\eta = \frac{\|F(x_0)\|}{8 - \theta_2}$ ,  $\mu = \frac{1}{8 - \theta_2}$  ve  $h = \eta \mu K_0 < \frac{1}{2}$  elde edilir. Böylece, Teorem 4.3.2 nin tüm şartları sağlanır. O halde, Teorem 4.3.8 ispatlanmış olur.

### 4.3.2. Nümerik Örnekler

Nümerik örneklere geçmeden önce, yukarıda Banach uzayında ispatlanan teoremler doğrultusunda sonlu boyutlu uzaylardaki aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 4.3.9:**  $N \geq 0$  için,  $f_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, N$  ve her  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in D$  olmak üzere

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x))$$

şeklinde tanımlı  $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  dönüşümü  $\mathbb{R}^N$  nin açık konveks bir  $D$  alt kümesinin her noktasında Fréchet türevlenebilir bir operatör olsun.  $x_0 \in D$  için,  $F$  nin  $x_0$  noktasında

$$[J_F(x_0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N(x_0)}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

ile tanımlı  $[J_F(x_0)]$  Jakobien matrisinin tersinin olduğunu varsayalım.  $[J_F(x_0)]^{-1}$  ters matrisi ve  $F$  operatörü aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i)  $\|[J_F(x_0)]^{-1}\| \leq \mu;$
- (ii)  $\|[J_F(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \leq \eta;$
- (iii)  $\|[J_F(x)] - [J_F(x_0)]\| \leq K_0\|x - x_0\|.$

Burada  $\mu, \eta, K_0 > 0$  dir.  $\alpha, \beta \in (0, 1), h = \eta\mu K_0 < \frac{1}{2}$  ve  $r = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta$  olmak üzere  $B_r[x_0] \subseteq D$  olduğunu varsayalım. Bu durumda

- a)  $F(x) = 0$  denkleminin bir tek  $x^* \in B_r[x_0]$  çözümü vardır.
- b) Her  $n \geq 0$  için

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - [J_F(x_0)]^{-1}F(y_n) \\ y_n = z_n - \alpha[J_F(x_0)]^{-1}F(z_n) \\ z_n = x_n - \beta[J_F(x_0)]^{-1}F(x_n) \end{cases} \quad (4.29)$$

ile tanımlı  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve  $x^*$  a yakınsar.

Aşağıdaki örnek, (4.29) iterasyonunun (3.20) Newton metodundan ve (3.26) Newton-tipi S-iterasyon metodundan daha hızlı olduğunu göstermektedir.

**Örnek 4.3.10:**  $X = \mathbb{R}$  ve  $D = (1,4)$  olmak üzere, her  $x \in D$  için

$$F(x) = x^2 - 4$$

ile tanımlı  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  operatörü verilsin.  $F$ , Fréchet türevlenebilirdir ve  $x \in D$  noktasındaki Fréchet türevi,  $F'_x = 2x$  ile verilir.  $x_0 = 3$  için  $F'_{x_0}{}^{-1} = \frac{1}{6}$  olur.  $\mu = 0.166666666667$ ,  $\eta = 0.833333333333$  ve  $K_0 = 2$  alınırsa,  $h = \eta\mu K_0 < \frac{1}{2}$  ve

$$\begin{aligned}\|F'_{x_0}{}^{-1}\| &\leq \mu \\ \|F'_{x_0}{}^{-1}F(x_0)\| &\leq \eta \\ \|F'_x - F'_{x_0}\| &\leq K_0\|x - x_0\|\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.9 un şartları sağlandığından (4.29) ile tanımlanan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve  $x^*$  tek çözümüne yakınsar.

Yukarıdaki örnek için, (3.20), (3.26) ve (4.29) iterasyonlarının karşılaştırması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 4.6. Newton-tipi iterasyon metotlarının karşılaştırılması

n	(3.20) İterasyonu	(3.26) İterasyonu	(4.29) İterasyonu
1	3.0000000000000000	3.0000000000000000	3.0000000000000000
2	2.1666666666666667	2.137731481481481	2.098513533003972
3	2.050925925925926	2.028722838184148	2.013991346662300
4	2.016543066986740	2.006299263040182	2.002060351400436
5	2.005468743484692	2.001395799303914	2.000304966616767
6	2.001817929969014	2.000309979239996	2.000045174307603
7	2.000605425844776	2.000068874489454	2.000006692359848
8	2.000201747524850	2.000015304958953	2.000000991457861
9	2.000067242391272	2.000003401078132	2.000000146882583
10	2.000022413376834	2.000000755793962	2.000000021760382
11	2.000007471041885	2.000000167954156	2.000000003223760
12	2.000002490337992	2.000000037323143	2.000000000477594
13	2.000000830111631	2.000000008294032	2.000000000070755
14	2.000000276703762	2.000000001843118	2.000000000010482
15	2.000000092234575	2.000000000409582	2.000000000001553
16	2.000000030744857	2.000000000091018	2.000000000000230
17	2.000000010248285	2.000000000020226	2.000000000000034
18	2.000000003416095	2.000000000004495	2.000000000000005
19	2.000000001138699	2.000000000000999	2.000000000000001
20	2.000000000379566	2.000000000000222	2.000000000000000

**Örnek 4.3.11:**  $X = Y = \mathbb{R}^2$  ve  $D = \{x = (x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0.9, y > 0.9\}$  olmak üzere, her  $x = (x, y) \in D$  için  $F(x) = (\ln x, \ln y)$  ile tanımlı  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  operatörü verilsin.  $F$ ,  $D$  nin her noktasında Fréchet türevlenebilirdir ve herhangi  $x = (x, y) \in D$  noktasındaki  $[J_F(x)]$  Jakobien matrisi,

$$[J_F(x)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$$

dir. Herhangi  $x, x_0 \in D$  için,

$$\|F'_x - F'_{x_0}\| \leq 1.23457\|x - x_0\|$$

olur.  $x_0 = (0.99, 0.99)$  olarak alınırsa, bu durumda

$$[J_F(x_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece  $\mu = 1.40007$ ,  $\eta = 0.01407$  ve  $K_0 = 1.23457$  için  $h = \eta\mu K_0 = 0.02432 < \frac{1}{2}$  ve

$$\begin{aligned} \| [J_F(x_0)]^{-1} \| &\leq \mu \\ \| [J_F(x_0)]^{-1} F(x_0) \| &\leq \eta \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $r = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta = 0.01425$  için  $B_r[x_0]$ ,  $D$  nin içerisine düşer. O halde, Sonuç 4.3.9 un şartları sağlandığından, (4.29) ile tanımlanan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve  $x^*$  tek çözümüne yakınsar.

**Örnek 4.3.12:**  $X = D = C\left[0, \frac{1}{4}\right]$ ,  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$  aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olsun.  $s \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$  ve  $x \in C\left[0, \frac{1}{4}\right]$  için

$$F(x)(s) = \cos 2\pi s - \frac{\pi}{2} \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t x^2(t) dt$$

olacak şekilde  $F(x) = 0$  Fredholm integral denklemini düşünelim. Her  $h \in X$  için,  $F$  nin Fréchet türevi

$$F'_x h(s) = h(s) + \pi \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t x(t) h(t) dt$$

olarak bulunur. Şimdi şartların sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \|F(x_0)\| &= \left\| \cos 2\pi s - \frac{\pi}{2} \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t x_0^2(t) dt \right\| \\ &\leq 1 + \left| \frac{\pi}{2} \max_{s \in [0, \frac{1}{4}]} \left| \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t dt \right| \right| \|x_0\|^2 \\ &\leq 1 + \left\| \frac{\|x_0\|^2}{8} \right\| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|I - F'_{x_0}\| &= \left\| \pi \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t x_0(t) dt \right\| \\ &\leq |\pi| \max_{s \in [0, \frac{1}{4}]} \left| \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t dt \right| \|x_0\| \\ &\leq \frac{\|x_0\|}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|F'_x - F'_{x_0}\| &= \left\| \pi \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t x(t) dt - \pi \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t x_0(t) dt \right\| \\ &\leq |\pi| \left\| \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t (x(t) - x_0(t)) dt \right\| \\ &\leq \pi \max_{s \in [0, \frac{1}{4}]} \left| \int_0^{1/4} s \sin 2\pi t dt \right| \|x - x_0\| \\ &\leq \frac{\|x - x_0\|}{4} \end{aligned}$$

bulunur.  $\frac{\|x_0\|}{4} < 1$  ise bu durumda

$$\|F'_{x_0}^{-1}\| \leq \frac{4}{4 - \|x_0\|}$$

dır. Buradan

$$\|F'_{x_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \frac{8 + \|x_0\|^2}{8 - 2\|x_0\|}$$

olduğu görülür.

$x_0(s) = \frac{1}{2}$  başlangıç noktası için

$$\|F'_{x_0}^{-1}\| \leq \mu = 1.142857$$

$$\|F'_{x_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta = 1.178571$$

$$K_0 = 0.25$$

olur. Buradan,  $h = \eta\mu K_0 = 0.336734 < \frac{1}{2}$  dir. Böylece, Teorem 4.3.2 nin tüm şartları sağlanmış olur. O halde, (4.14) ile oluşturulan  $\{x_n\}$  dizisi  $B_r[x_0]$  dadır ve integral denklemin bir tek  $x^* \in B_r[x_0]$  çözümüne yakınsar.

#### 4.4. Polinomgrafiler

Polinomlar, matematiğin pek çok alanındaki en önemli objelerden birisidir. Polinomların köklerinin bulunması problemi uzun bir tarihe sahiptir. Yüzyıllardır, matematikçiler denklemlerin çözümlerinin bulunmasında çeşitli metotlar geliştirdiler. 1699 yılında Newton, polinomların yaklaşık köklerini hesaplamak için yeni bir metod tanımladı. Yaklaşık yetmiş yıl sonra Lagrange, beş veya daha yüksek dereceli polinomların ikinci, üçüncü veya dördüncü dereceden polinomlar için kullanılan metotlar tarafından çözülemeyeceğini gösterdi. 1799 yılında Gauss, Cebirin Temel Teoremini ispatladı. Bu teoreme göre,  $n$ . dereceden kompleks katsayılı

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0$$

kompleks polinomu  $n$  tane köke sahiptir.

**Tanım 4.4.1 (Çekim Bölgesi):**  $r, f(x)$  in bir kökü olsun.  $r$  ye yakınsayan Newton metodunun bütün başlangıç noktalarının kümesine,  $r$  nin çekim bölgesi denir ve

$$B(r) = \{x_0: x_{n+1} = N^n(x_0) \text{ dizisi } r \text{ ye yakınsak}\}$$

şeklinde gösterilir (Straffin 1991).

**Örnek 4.4.2:**  $f(x) = x^3 - x$  fonksiyonu için çekim bölgelerini bulmaya çalışalım.  $f(x)$  in kökleri  $-1, 0$  ve  $1$  dir.  $f(x)$  in Newton iterasyon fonksiyonu

$$N(x) = x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1}$$

olur. Üstteki ifade de  $x$  yerine  $-1, 0$  ve  $1$  kökleri yazılırsa bunların  $N(x)$  in çeken sabit noktaları olduğu görülür. Eğer  $x_0$  başlangıç noktası  $x_0 \geq 1/\sqrt{3}$  olarak alınırsa  $(x_n)$  dizisi  $1$  e yakınsar. Dolayısıyla  $1$  in çekim bölgesi  $(1/\sqrt{3}, +\infty)$  olup  $(1/\sqrt{3}, +\infty) \subset B(1)$  dir. Fonksiyonun simetrikliğinden dolayı  $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \subset B(-1)$  dir.  $0$  ın çekim bölgesi ise  $(-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$  dir.

Arthur Cayley tarafından ilk defa kompleks Newton metodu için çekim bölgesi tanımlandı ve 1879 yılında Cayley aşağıdaki teoremi yayınladı.

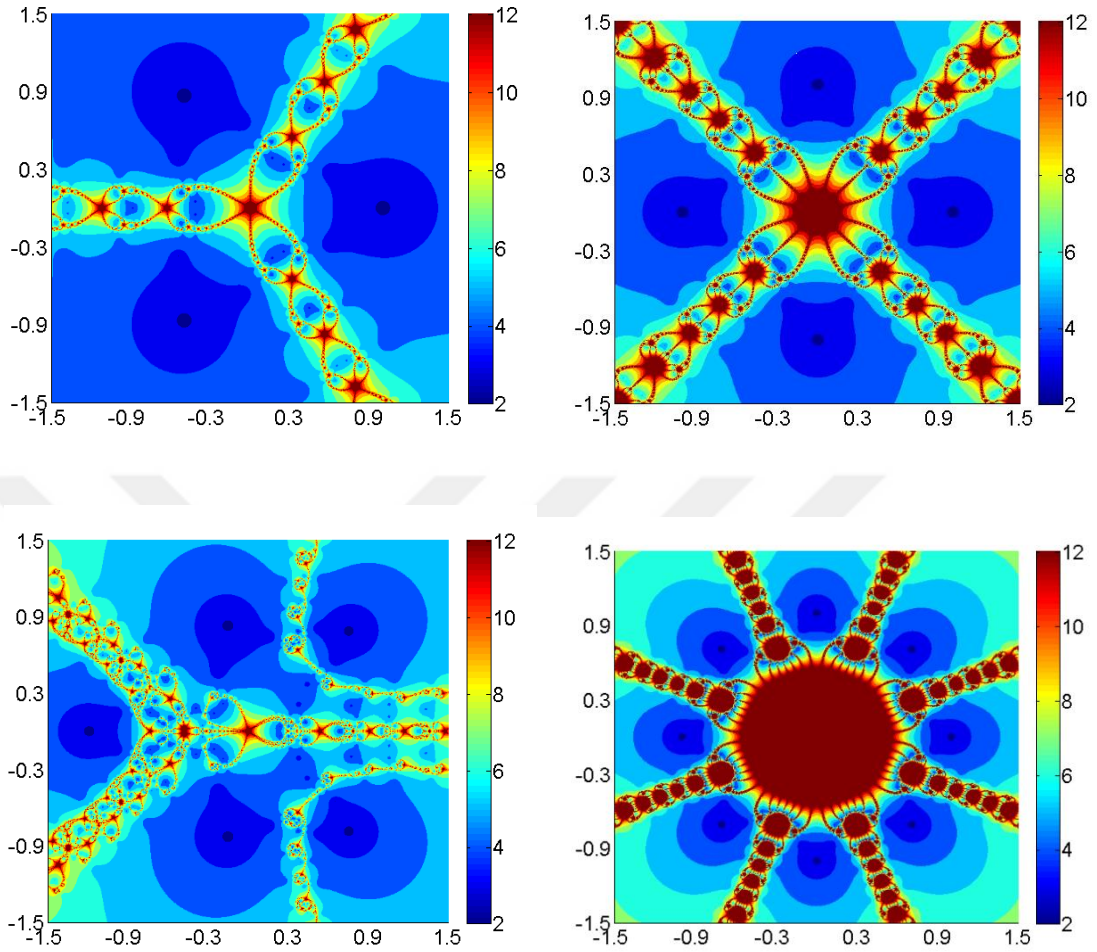
**Teorem 4.4.3:** Kompleks kuadratik polinom  $f(z) = az^2 + bz + c$  nin kökleri  $\alpha$  ve  $\beta$  olsun.  $\alpha$  ve  $\beta$  noktalarını birleştiren doğru parçasının dik açıortayı  $L$  olsun. Bu durumda  $f(z)$  ye Newton metodu uygulandığı zaman  $L$ , kompleks düzlemi  $B(\alpha)$  ve  $B(\beta)$  olmak üzere ikiye böler (Cayley 1879).

Cayley daha sonra Newton metodunu  $z^3 - 1 = 0$  şeklindeki üçüncü dereceden kompleks polinomlara uygulamış fakat bunların çekim bölgesi için bir bölünme bulamamıştır. 1919 yılında Julia, Cayley'in bu probleminin çözümünü bulmuştur. Polinomun derecesi olan  $n$  sayısı, kompleks düzlemdeki çekim bölgelerinin sayısını gösterir. Kompleks düzlemdeki köklerin yerleri manuel olarak değiştirilerek, çekim bölgelerinin yeri kontrol edilebilir.

Yakın zamanda ise Kalantari (2005) polinomgrafi olarak adlandırılan, kompleks polinomların köklerini bulmak için yeni bir metod keşfetmiş ve güzel görünümlü grafiklerin üretiminde polinomgrafinin kullanılması üzerine 2005 te ABD de bir patent elde etmiştir. Polinomgrafi, iterasyon fonksiyonlarının yakınsama özellikleri kullanılarak oluşturulan görüntüler ile kompleks polinomların köklerine yaklaşımdaki görselleştirme bilimi ve sanatı olarak adlandırılır. Polinomgrafiler, iterasyonlar tarafından üretilir ve matematiğin resmi olarak adlandırılır. Sonsuz çoklukta kompleks polinom kullanılarak sonsuz çeşitlilikte görseller oluşturulabilir. Aynı zamanda polinomgrafiler, matematik ve sanat arasındaki yeni bir arakesit olarak ta görülebilir.

Polinomgrafinin tanımlanması, teorik altyapısı ve sanatsal uygulamaları Kalantari tarafından verilmiştir (Kalantari 2005, 2009).

Kotarski *et al.* (2012) Kalantari'nin polinomgrafisinin genelleştirmesini elde etmek için Picard iterasyonu yerine Mann ve Ishikawa iterasyonlarını kullanmışlar ve  $z^3 - 1 = 0$  kübik denklemi için bazı polinomgrafiler oluşturmuşlardır. Kang *et al.* (2015) ise farklı polinomgrafiler oluşturmak için S-iterasyonunu kullanmıştır. Aşağıdaki polinomgrafi örnekleri, S- iterasyonunun Newton formu kullanılarak sırasıyla  $z^3 - 1 = 0$ ,  $z^4 - 1 = 0$ ,  $z^5 + z^2 + 1 = 0$  ve  $z^8 - 1 = 0$  kompleks polinom denklemleri için verilmiştir.



**Şekil 4.1.** S-iterasyonu,  $z^3 - 1 = 0$ ,  $z^4 - 1 = 0$ ,  $z^5 + z^2 + 1 = 0$  ve  $z^8 - 1 = 0$  denklemleri için polinomgrafi örnekleri

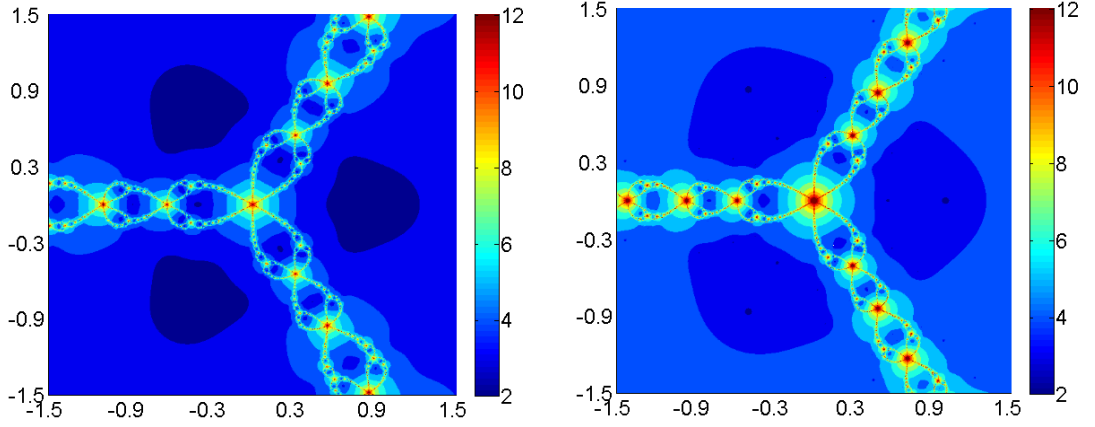
(3.13) ile verilen multistep Mann iterasyonunun  $r = 3$  için Newton metodu formu

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha)v_n + \alpha N(v_n) \\ v_n = (1 - \beta)w_n + \beta N(w_n), n = 0, 1, 2, \dots \\ w_n = (1 - \gamma)z_n + \gamma N(z_n) \end{cases} \quad (4.30)$$

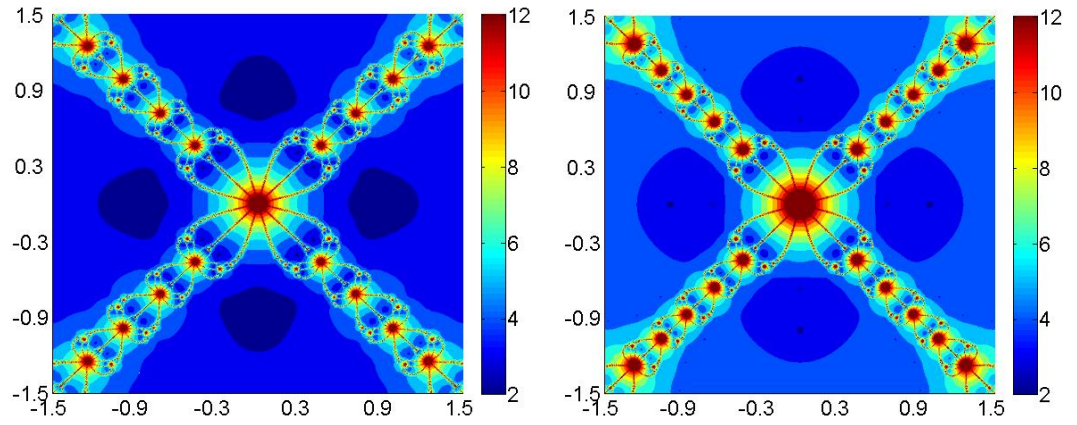
olarak verilir.

Aşağıdaki örnekte, (4.3) ve (4.30) iterasyonları kullanılarak farklı polinom denklemleri için polinomgrafiler oluşturulacaktır.

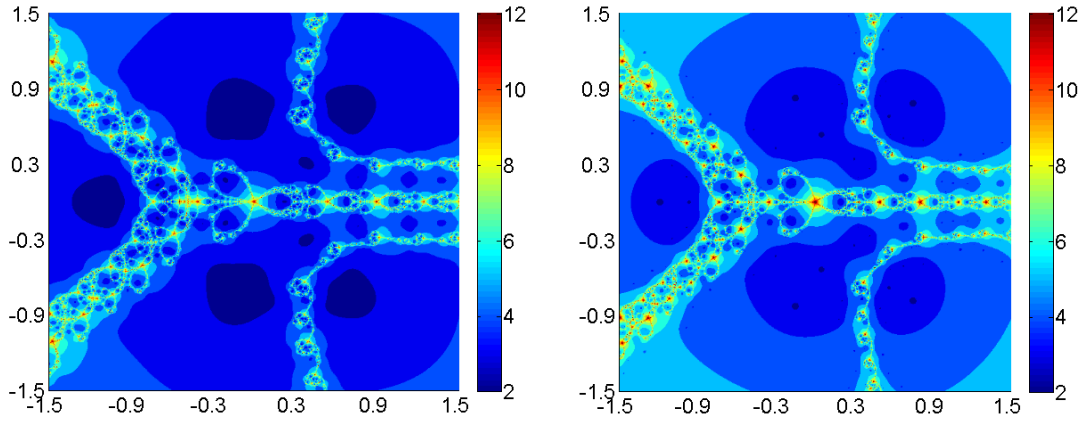
**Örnek 4.4.4:**  $z^3 - 1 = 0$ ,  $z^4 - 1 = 0$ ,  $z^5 + z^2 + 1 = 0$  ve  $z^8 - 1 = 0$  kompleks polinomları verilsin. Aşağıdaki şekiller (4.3) ve (4.30) iterasyonları kullanılarak, verilen polinomlar için elde edilen polinomgrafileri göstermektedir.



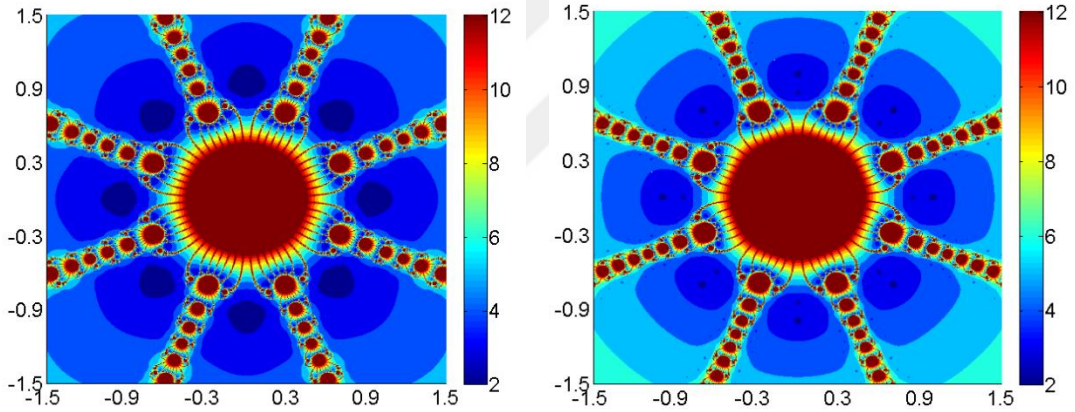
**Şekil 4.2.**  $z^3 - 1 = 0$  denklemi, (4.3) ve (4.30) iterasyonları için polinomgrafi örneği



**Şekil 4.3.**  $z^4 - 1 = 0$  denklemi, (4.3) ve (4.30) iterasyonları için polinomgrafi örneği



**Şekil 4.4.**  $z^5 + z^2 + 1 = 0$  denklemi, (4.3) ve (4.30) iterasyonları için polinomgrafı örneği



**Şekil 4.5.**  $z^8 - 1 = 0$  denklemi, (4.3) ve (4.30) iterasyonları için polinomgrafı örneği

$z^3 - 1 = 0$  polinomunun üç kökü olduğundan dolayı Şekil 4.2’de üç tane çekim bölgesi,  $z^4 - 1 = 0$  polinomunun dört kökü olduğundan dolayı Şekil 4.3’de dört tane çekim bölgesi,  $z^5 + z^2 + 1 = 0$  polinomunun beş kökü olduğundan dolayı Şekil 4.4’de beş tane çekim bölgesi ve  $z^8 - 1 = 0$  polinomunun sekiz kökü olduğundan dolayı Şekil 4.5’de sekiz tane çekim bölgesi görülmektedir. Bu denklemler, iki farklı iterasyon metodu kullanılarak  $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$  karesinde çözüldü. Görsellerin farklı renkte olması, keyfi bir  $\varepsilon = 0.001$  sayısı için bir köke yaklaşımda ihtiyaç duyulan iterasyonların sayısına bağlıdır. Bu örnekte iterasyonların sayısı  $k = 12$  ile sınırlandırıldı. İterasyonlarda kullanılan parametreler ise  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.6$  ve  $\gamma = 0.5$

olarak alındı.  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  ve  $k$  parametreleri değiştirilerek sonsuz çoklukta polinom grafi elde edilebilir.

#### 4.5. Sürekli Dönüşümlerin Sabit Noktaları İçin Yakınsama Teoremleri

Bu kısımda 2006 yılında, Thianwan ve Suantai tarafından oluşturulan (4.31) iterasyonu ele alınarak,  $\mathbb{R}$  de kapalı bir aralıkta tanımlı sürekli dönüşümler için bazı yakınsama teoremleri verilmiştir.

**Teorem 4.5.1:**  $E$  kapalı bir aralık ve  $f: E \rightarrow E$  sürekli bir dönüşüm olsun.  $x_0 \in E$  keyfi bir nokta olmak üzere,  $\{x_n\}$  dizisi

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)x_n + \alpha_n f(y_n) + \beta_n f(z_n) \\ y_n = (1 - b_n - c_n)x_n + b_n f(z_n) + c_n f(x_n) \\ z_n = (1 - a_n)x_n + a_n f(x_n) \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$ , aşağıdaki şartları sağlayan  $[0,1]$  aralığındaki dizilerdir.

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  ve  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$ ,

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  ve  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ .

Bu durumda,  $\{x_n\}$  dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsamasıdır.

**İspat:**  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsadığı açıktır. Şimdi,  $\{x_n\}$  dizisi sınırlı olsun.  $\{x_n\}$  in yakınsak olduğunu göstereceğiz. Tersine  $\{x_n\}$  dizisinin ıraksak olduğunu kabul edelim.  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  ve  $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  ve  $a < b$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{R}$  vardır. Öncelikle  $a < m < b$  ise  $f(m) = m$  olduğunu gösterelim.  $f(m) \neq m$  olduğunu kabul edelim.  $f(m) - m > 0$  olsun.  $f(x)$  sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$|x - m| \leq \delta \text{ için } f(x) - x > 0 \quad (4.32)$$

olacak şekilde  $\delta \in (0, b - a)$  vardır. Hipotezden  $\{x_n\}$  dizisi sınırlı olduğundan kapalı ve sınırlı bir aralıkta bulunur.  $f$  nin sürekliliğinden,  $\{f(x_n)\}$  dizisi de kapalı ve sınırlı bir aralıkta olur. Böylece  $\{f(x_n)\}$  dizisi sınırlıdır.  $z_n = (1 - a_n)x_n + a_n f(x_n)$  olduğu gözönüne alınırsa  $\{z_n\}$  ve dolayısıyla  $\{f(z_n)\}$  dizisi sınırlı olur. Benzer şekilde,  $y_n = (1 - b_n - c_n)x_n + b_n f(z_n) + c_n f(x_n)$  olduğundan  $\{y_n\}$  ve  $\{f(y_n)\}$  sınırlı olur. (4.31) den

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \alpha_n(f(y_n) - x_n) + \beta_n(f(z_n) - x_n) \\ y_n - x_n &= b_n(f(z_n) - x_n) + c_n(f(x_n) - x_n) \\ z_n - x_n &= a_n(f(x_n) - x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. (i) ve (ii) şartlarından  $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$ ,  $|y_n - x_n| \rightarrow 0$  ve  $|z_n - x_n| \rightarrow 0$  olur. Böylece her  $n > N$  için

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{\delta}{3}, |y_n - x_n| < \frac{\delta}{3}, |z_n - x_n| < \frac{\delta}{3} \quad (4.33)$$

olacak şekilde  $N$  sayısı vardır.  $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n > m$  olduğundan  $x_{n_{k_1}} > m$  olacak şekilde  $k_1 > N$  vardır.  $k = n_{k_1}$  dersek  $x_k > m$  olur.  $x_k$  için iki durum vardır.

1. Durum:  $x_k \geq m + \frac{\delta}{3}$  olması durumunda (4.33) ten,  $x_{k+1} - x_k > -\frac{\delta}{3}$  dir. Buradan,  $x_{k+1} > x_k - \frac{\delta}{3} \geq m$  dolayısıyla  $x_{k+1} > m$  elde edilir.

2. Durum:  $m < x_k < m + \frac{\delta}{3}$  olması durumunda (4.33) ten,  $m - \frac{\delta}{3} < y_k < m + \frac{2\delta}{3}$  ve  $m - \frac{\delta}{3} < z_k < m + \frac{2\delta}{3}$  dir. Böylece,  $|x_k - m| < \frac{\delta}{3} < \delta$ ,  $|y_k - m| < \frac{2\delta}{3} < \delta$  ve  $|z_k - m| < \frac{2\delta}{3} < \delta$  olur. (4.32) den,

$$f(x_k) - x_k > 0, f(y_k) - y_k > 0, f(z_k) - z_k > 0$$

elde edilir. (4.31) iterasyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= (1 - \alpha_k - \beta_k)x_k + \alpha_k f(y_k) + \beta_k f(z_k) \\
&= x_k + \alpha_k(f(y_k) - x_k) + \beta_k(f(z_k) - x_k) \\
&= x_k + \alpha_k(f(y_k) - y_k) + \alpha_k(y_k - x_k) + \beta_k(f(z_k) - z_k) + \beta_k(z_k - x_k) \\
&= x_k + \alpha_k[b_k(f(z_k) - x_k) + c_k(f(x_k) - x_k)] + \beta_k a_k(f(x_k) - x_k) \\
&\quad + \alpha_k(f(y_k) - y_k) + \beta_k(f(z_k) - z_k) \\
&= x_k + a_k^2 b_k(f(x_k) - x_k) + a_k b_k(f(z_k) - z_k) + \alpha_k c_k(f(x_k) - x_k) \\
&\quad + \beta_k a_k(f(x_k) - x_k) + \alpha_k(f(y_k) - y_k) + \beta_k(f(z_k) - z_k)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla her iki durum için de  $x_{k+1} > m$  olur. Benzer şekilde devam edilirse,  $x_{k+2} > m$ ,  $x_{k+3} > m$ ,  $x_{k+4} > m, \dots$  olacağından her  $n > k = n_{k_1}$  için  $x_n > m$  bulunur. Buradan,  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq m$  olur. Bu ise  $a < m$  olması ile çelişir. O halde  $f(m) = m$  dir.

$\{x_n\}$  dizisi için iki durum söz konusudur.

I. Durum:  $a < x_m < b$  olacak şekilde  $x_m$  vardır. Bu durumda  $f(x_m) = x_m$  dir ve

$$\begin{aligned}
z_m &= (1 - a_m)x_m + a_m f(x_m) = x_m \\
y_m &= (1 - b_m - c_m)x_m + b_m f(z_m) + c_m f(x_m) \\
&= (1 - b_m - c_m)x_m + b_m f(x_m) + c_m f(x_m) = x_m \\
x_{m+1} &= (1 - \alpha_m - \beta_m)x_m + \alpha_m f(y_m) + \beta_m f(z_m) \\
&= (1 - \alpha_m - \beta_m)x_m + \alpha_m f(x_m) + \beta_m f(x_m) = x_m
\end{aligned}$$

olur. Tümevarımla  $x_m = x_{m+1} = x_{m+2} = x_{m+3} = \dots$  elde edilir ve dolayısıyla  $x_n \rightarrow x_m$  dir. Bu ise  $x_m = a$  ve  $x_n \rightarrow a$  olduğu anlamına gelir ki bu bir çelişkidir.

II. Durum: Her  $n$  için  $x_n \leq a$  veya  $x_n \geq b$  dir.  $b - a > 0$  ve  $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$  olduğundan her  $n > N_0$  için  $|x_{n+1} - x_n| < \frac{b-a}{3}$  olacak şekilde  $N_0$  sayısı vardır. Bu ise her  $n > N_0$  için  $x_n \leq a$  veya  $x_n \geq b$  olması demektir.  $n > N_0$  için  $x_n \leq a$  ise  $b =$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a$  ve  $n > N_0$  için  $x_n \geq b$  ise  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b$  olur ki her iki durum  $a < b$  olması ile çelişir.

O halde, kabulümüz yanlış olup  $\{x_n\}$  dizisi yakınsaktır.

Son olarak  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsadığını gösterelim.  $x_n \rightarrow p$  olsun ve  $f(p) \neq p$  olduğunu kabul edelim.  $f$  nin sürekliliğinden  $\{f(x_n)\}$  sınırlıdır.  $z_n = (1 - a_n)x_n + a_n f(x_n)$  ve  $a_n \rightarrow 0$  olduğundan  $z_n \rightarrow p$  dir. Benzer şekilde,  $y_n = (1 - b_n - c_n)x_n + b_n f(z_n) + c_n f(x_n)$  ve  $b_n \rightarrow 0, c_n \rightarrow 0$  olduğundan  $y_n \rightarrow p$  dir.  $r_k = f(y_k) - x_k$  ve  $s_k = f(z_k) - x_k$  olsun.  $f$  sürekli olduğundan  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(y_k) - x_k) = f(p) - p \neq 0$  ve  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(z_k) - x_k) = f(p) - p \neq 0$  dir.  $w = f(p) - p$  olarak alınırsa  $w \neq 0$  olur. (4.31) den,  $x_{n+1} = x_n + \alpha_n(f(y_n) - x_n) + \beta_n(f(z_n) - x_n)$  elde edilir ve buradan

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k r_k + \beta_k s_k) \quad (4.34)$$

bulunur.  $r_k \rightarrow w \neq 0$  ve  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$  için  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r_k$  ıraksak,  $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k s_k$  ise yakınsak olduğundan  $\{x_n\}$  dizisi ıraksak olur. Ancak, bu  $x_n \rightarrow p$  kabulümüzle çelişir. O halde,  $f(p) = p$  dir, yani  $\{x_n\}$  dizisi  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsar.

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 4.5.1 den elde edilmiştir.

**Sonuç 4.5.2:**  $E$  kapalı bir aralık ve  $f: E \rightarrow E$  sürekli bir dönüşüm olsun.  $x_0 \in E$  için Noor iterasyonu (Noor 2000).

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n f(y_n) \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n f(z_n) \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n f(x_n) \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$  ve  $\{\gamma_n\}$  aşağıdaki şartları sağlayan  $[0,1]$  aralığındaki dizilerdir.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$ .

Bu durumda,  $\{x_n\}$  dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsamasıdır.

**İspat:** Teorem 4.5.1 de  $n \geq 0$  için  $c_n = \beta_n = 0$  alınırsa, istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.5.3:**  $E$  kapalı bir aralık ve  $f: E \rightarrow E$  sürekli bir dönüşüm olsun.  $x_0 \in E$  için  $\{x_n\}$  Ishikawa iterasyonu (3.11) ile tanımlansın. Burada  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  aşağıdaki şartları sağlayan  $[0,1]$  aralığındaki dizilerdir.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ .

Bu durumda,  $\{x_n\}$  dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsamasıdır.

**İspat:** Teorem 4.5.1 de  $n \geq 0$  için  $a_n = c_n = \beta_n = 0$  alınırsa, istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.5.4:**  $E$  kapalı bir aralık ve  $f: E \rightarrow E$  sürekli bir dönüşüm olsun.  $x_0 \in E$  için  $\{x_n\}$  Mann iterasyonu (3.10) ile tanımlansın. Burada  $\{\alpha_n\}$  aşağıdaki şartları sağlayan  $[0,1]$  aralığındaki bir dizidir.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ .

Bu durumda,  $\{x_n\}$  dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsamasıdır.

**İspat:** Teorem 4.5.1 de  $n \geq 0$  için  $a_n = b_n = c_n = \beta_n = 0$  alınırsa, istenilen sonuç elde edilir.

Suantai, 2005 yılında aşağıdaki modifiye edilmiş iterasyon metodunu tanımlamıştır.

$$\begin{cases} z_n = (1 - a_n)x_n + a_n f^n(x_n) \\ y_n = (1 - b_n - c_n)x_n + b_n f^n(z_n) + c_n f^n(x_n) \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)x_n + \alpha_n f^n(y_n) + \beta_n f^n(z_n) \end{cases} \quad (4.36)$$

Burada  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$ ,  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  ve  $\{c_n\}$ ,  $[0,1]$  aralığındaki diziler ve  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  olarak tanımlıdır.

Şimdi kapalı bir aralıkta tanımlı sürekli dönüşümler için (4.36) iterasyonunun yakınsama teoremini verelim.

**Teorem 4.5.5:**  $E$  kapalı bir aralık ve  $f: E \rightarrow E$  birebir ve sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer Teorem 4.5.1 in şartlarını sağlayan  $\{x_n\}$  dizisi sınırlı ise bu durumda  $\{x_n\}$ ,  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsar.

**İspat:** Tersine  $\{x_n\}$  in yakınsak olmadığını kabul edelim.  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  ve  $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  olsun. Bu durumda  $a < b$  dir. Şimdi  $m \in (a, b)$  ise  $f(m) = m$  olduğunu gösterelim.

Herhangi bir  $m \in (a, b)$  için  $f(m) \neq m$  diyelim.  $f$  birebir dönüşüm olduğundan  $f(m) \neq m$  için  $f^n(m) \neq m$  olur.  $f^n(m) - m > 0$  olduğunu kabul edelim.  $f$  sürekli olduğundan  $f^n$  de süreklidir. Böylece  $|x - m| \leq \delta$  için  $f^n(x) - x > 0$  olacak şekilde  $\delta \in (0, b - a)$  sayısı vardır.

Teorem 4.5.1 in ispatındakine benzer şekilde,  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsadığı gösterilebilir.

Bu tezde, nümerik örneklerdeki iterasyonların karşılaştırılması için bulunan değerler ve oluşturulan polinomgrafiler MATLAB programı kullanılarak elde edilmiştir.



## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmadaki araştırma bulgularının birinci bölümünde, yeni bir iterasyon şeması tanıtilarak, bu iterasyon metodunun normlu uzayda daraltanlık şartını sağlayan dönüşüm sınıfları için literatürde daha hızlı yakınsama oranına sahip olan iterasyonlarla karşılaştırılması yapıldı. Elde edilen sonuçlar kullanılan iterasyon metodunun literatürdeki metotlardan daha hızlı olduğunu gösterir.

İkinci bölümde, bu iterasyon metotlarının Newton formları oluşturuldu ve bunların lineer olmayan denklemlerin çözümüne yakınsamasına dair Teorem 4.2.1, Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.5 verilerek ispatları yapıldı. Bu teoremler Berinde ve Pacurar'ın (2006) çalışmalarında elde ettikleri bulguların genelleştirmesidir. Daha önceden yapılan çalışmalarda kullanılan farklı metotlar ile bu yeni metot arasındaki karşılaştırmalar teorik olarak verildi ve ayrıca elde edilen sonuçlar farklı örnekler üzerinde de gösterildi.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde kullanılan iterasyonun Banach uzaylarındaki versiyonu göz önüne alınarak lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümlerine yakınsaması ile ilgili bazı teoremler verildi. Teorem 4.3.2 ve Teorem 4.3.5 ile verilen bulgular Sahu *et al.* (2012) deki çalışmaların genelleştirmesidir. Bununla birlikte bu metotların başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümü için uygulamaları verildi.

Dördüncü bölümde, bu çalışmadaki iterasyonlar kullanılarak farklı kompleks polinom denklemleri için farklı polinomgrafiler elde edildi.

Beşinci bölümde ise literatürdeki çeşitli iterasyonlar kullanılarak  $\mathbb{R}$  de kapalı bir aralıkta tanımlı sürekli dönüşümler için yakınsama teoremleri verildi.

Bu çalışmalarımızdan ilham alınarak normlu uzaylarda iterasyonlarla ilgili yapılan karşılaştırmalar, normlu uzaylarda veya konveks metrik uzaylarda genelleştirilmiş daraltan dönüşüm sınıflarına taşınabilir. İkinci ve üçüncü bölümde oluşturulmuş olan

Newton tipi iterasyon metotlarının yerine daha iyi yakınsama oranına sahip olan farklı metotlar oluşturulabilir. Veya mevcut iterasyonların farklı tipleriyle Newton tipleri arasında karşılaştırmalar incelenebilir. Ayrıca Newton tipi iterasyon metotlarının,  $f$  ve  $g$ ,  $C^2$  sınıfından olmak üzere,

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

şeklindeki iki veya daha fazla lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümlerinde kullanılması çalışılabilir. Son olarak, kompleks polinom denklemleri için kompleks parametreler kullanılarak aynı veya oluşturulabilecek farklı iterasyonlar tarafından üretilen polinomgrafiler oluşturulabilir.

**KAYNAKLAR**

- Abbas, M. and Nazir, T., 2014. A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Mat. Vesn.*, 66 (2), 223-234.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 8 (1), 61-79.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications: Topological Fixed Point Theory and Its Applications*. Springer, 368 p, New York.
- Akbulut, S. and Ozdemir, M., 2012. Picard iteration converges faster than Noor iteration for a class of quasi-contractive operators. *Chiang Mai J. Sci.* 39(4), 688-692.
- Argyros, I.K., 2003. An improved convergence analysis applications for Newton-like methods in Banach space. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 24, 653–672.
- Argyros, I. K., 2007. *Computational Theory of Iterative Methods: Studies in Computational Mathematics*. Elsevier, 504 p, New York.
- Argyros, I. K., 2008. *Convergence and Applications of Newton-type Iterations*. Springer, New York.
- Banach, S., 1922. Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations integrales. *Fund. Math.*, 3 (1), 133-181.
- Bayraktar, M., 2006. *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi, 320 s, Ankara.
- Berinde V., 1995. Conditions for the convergence of the Newton method. *An. Șt. Univ. Ovidius Constanta*, 3 (1), 22-28.
- Berinde, V., 1998. Despre ordinul de convergenta al sirurilor de numere reale. *Gazeta Matematica*, 103 (4), 146-153.
- Berinde V. and Pacurar M., 2006. A fixed point proof of the convergence of a Newton-type method. *Fixed Point Theory*, 7 (2), 235-244.
- Berinde, V., 2007. *Iterative Approximation of Fixed Points: Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 322 p, New York.
- Berinde, V., Khan, A. R. and Pacurar, M., 2015. Analytic and empirical study of the rate of convergence of some iterative methods. *J. Numer. Anal. Approx. Theory*, 44 (1), 25-37.
- Brouwer, L. E. J., 1912. Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 71, 97–115.
- Cayley, A., 1879. The Newton-Fourier Imaginary Problem. *Amer. J. Math.*, 2 (1), 1-97.
- Chugh, R., Kumar, V. and Kumar, S., 2012. Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces. *American Journal of Computational Mathematics*, 2 (4), 345-357.
- Dawson, D. F., 1964. Some rate invariant sequence transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15, 710-714
- Demidovich, B. P. and Maron, A. I. 1987. *Computational Mathematics*. MIR Publishers, 688 p, Moscow.

- Dennis, J. E. and Schnabel, R. B., 1983. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 378 p, USA.
- Deuffhard, P., 2004. *Newton Methods For Nonlinear Problems: Affine Invariance and Adaptive Algorithms: Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, 424 p, Berlin.
- Ezquerro, J. A., Hernandez, M. A. and Salanova, M. A., 2002. A Newton-like method for solving some boundary value problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 23, 791-805.
- Fourier, J., 1818. Note relative aux vibrations des surfaces élastiques et au mouvement des ondes. *Bull. Sci. Soc. Philomathique Paris*, 129-136.
- Hadamard, J., 1894. Sur les caracteres de convergence des series a termes positifs et sur les fonctions indefiniment croissantes. *Acta Math.*, 18, 319-336.
- Hardy, G. H., 1949. *Divergent Series*. Oxford University Press, 396 p, Oxford.
- Imdad, M. and Dashputre, S., 2016, Fixed point approximation of Picard normal S-iteration process for generalized nonexpansive mappings in hyperbolic spaces. *Math. Sci.*, 10 (3), 131-138.
- Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 147-150.
- Kadioğlu, E. ve Kamali, M., 2011. Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, 494 s, Erzurum.
- Kadioglu, N. and Yildirim, I., 2013. On the convergence of an iteration method for continuous mappings on an arbitrary interval. *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:124.
- Kalantari, B., 2005. Polynomiography: from the fundamental theorem of Algebra to art. *Leonardo*, 38(3), 233-238.
- Kalantari, B., 2009. *Polynomial Root-Finding and Polynomiography*. World Scientific Publishing, 467 p, Singapore.
- Kang, S. M., Alsulami, H. H., Rafiq, A. and Shahid, A. A., 2015. S-iteration scheme and polynomiography. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8(5), 617-627.
- Kantorovich, L. V., 1948. On Newton's method for functional equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, 59 (7), 1237-1240.
- Kantorovich L. V. and Akilov G. P., 1982. *Functional Analysis*. Pergamon Press, 589 p, Oxford.
- Karaca, N., Abbas, M. and Yildirim, I., 2017. Convergence of a Newton-Like S-Iteration Process in  $\mathbb{R}$ . *Creative Math. Inf.*, (In Press).
- Karaca, N. and Yildirim, I., 2015. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by a faster iteration process. *J. Adv. Math. Stud.*, 8 (2), 257-264.
- Karakaya, V., Dogan, K., Gursoy, F. and Erturk, M., 2013. Fixed point of a new three-step iteration algorithm under contractive-like operators over normed spaces. *Abstract and Applied Analysis*, 2013:1-9.
- Khamsi, M. A. and Kirk, W. A., 2001. *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*. John Wiley and Sons, 302 p, USA.
- Khan, S. H., 2013. A Picard-Mann hybrid iterative process. *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:69.
- Knopp, K., 1922. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. J. Springer, 496 p, Berlin.

- Knopp, K., 1956. Infinite sequences and series. Dover Publications, 186 p, New York.
- Kohaupt, L., 2012. A Newton-like method for the numerical solution of nonlinear Fredholm-type operator equations. *Appl. Math. Comput.* 218, 10129-10148.
- Kotarski, W., Gdawiec, K. and Lisowska, A., 2012. Polynomiography via Ishikawa and Mann iterations, International Symposium: Advances in Visual Computing, Greece.
- Kreyszig, E., 1989. Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library, 704 p, USA.
- Liouville, J., 1837. Sur le developement des fonctions ou parties de fonctions en series. *J. Math. Pures Appl.*, 2 (1), 16-35.
- Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 506-510.
- Miller, S. N., 2006. The Dynamics of Newton's Method on Cubic Polynomials. MS Thesis, The Graduate College of Marshall University, Huntington, USA.
- Musayev, B. ve Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları, 470 s, Kütahya.
- Mustafa, N., 2006. Çözümlü Problemlerle Fonksiyonel Analiz. Seçkin Yayıncılık, 479 s, Kars.
- Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities. *J. Math. Anal. Appl.* 251, 217-229.
- Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., 1970. Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables. Academic Press, 572 p, New York.
- Ostrowski, A. M., 1966. Solutions of Equations and Systems of Equations. Academic Press, 352 p, New York.
- Öztürk Çeliker, F., 2014. Convergence analysis for a modified SP iterative method. *Sci. World J.*, 2014, 1-5.
- Phuengrattana, W. and Suantai, S., 2011. On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (9), 3006-3014.
- Picard, E., 1890. Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *J. Math. Pures Appl.*, 6, 145-210.
- Pringsheim, A., 1889. Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern. *Math. Ann.*, 35, 297-394.
- Ren, H. and Argyros, I.K., 2009. On convergence of the modified Newton's method under Hölder continuous Fréchet derivative. *Appl. Math. Comput.* 213, 440-448.
- Ren, H. and Argyros, I.K., 2010. A new semilocal convergence theorem for a fast iterative method with nondifferentiable operators. *J. Appl. Math. Comp.* 34, 39-46.
- Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using infinite matrices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 196, 161-176.
- Rhoades, B. E. and Soltuz S. M., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration. *Nonlinear Anal.*, 58, 219-228.
- Sahu, D. R., 2011. Applications of the S iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems, *Fixed Point Theory*, 12 (1), 187-204.
- Sahu, D. R., Singh, K. K. and Singh, V. K., 2012. Some Newton-like methods with sharper error estimates for solving operator equations in Banach spaces. *Fixed Point Theory Appl.* 78, 1-20.

- Sen, R.N., Mukherjee, S. and Patra, R., 2006. On the convergence of a Newton-like method in  $\mathbb{R}$  and the use of Berinde's exit criterion. *Intern. J. Math. Math. Sc.*, 2006 (15).
- Siddiqi, A. H., 2004. *Applied Functional Analysis*. Marcel Dekker Inc., 575 p, New York.
- Straffin, Philip D., Jr., 1991. *Newtons Method and Fractal Patterns*. COMAP, 18 p, Lexington.
- Suantai, S., 2005. Weak and strong convergence criteria of Noor Iterations for asymptotically nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 311, 506–517.
- Şuhubi, E. S., 2001. *Fonksiyonel Analiz*. İTÜ Vakfı Yayınları, 638 s ,İstanbul.
- Thianwan, S. and Suantai, S., 2006. Convergence criteria of a new three-step iteration with errors for nonexpansive nonself-mappings. *Comput. Math. Appl.* 52, 1107-1118.
- Vijesh, V.A. and Subrahmanyam, P.V., 2008. A Newton-like method and its application. *J. Math. Anal. Appl.* 339, 1231–1242.
- Werner, W., 1984. Newton-like methods for the computation of fixed points. *Comp. Math. Appl.* 10, 77–86.
- Yildirim, I., Abbas, M. and Karaca, N., 2016. On the convergence and data dependence results for multistep Picard-Mann iteration process in the class of contractive-like operators. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9(6), 3773-3786.
- Yildirim, I. and Ozdemir M., 2009. A new iterative process for common fixed points of finite families of non-self asymptotically non-expansive mappings. *Nonlinear Anal.*, 71, 991-999.
- Yildirim, I. and Ozdemir, M., 2011. Approximating common fixed points of asymptotically quasi-nonexpansive mappings by a new iterative process. *Arab. J. Sci. Eng.* 36, 393-403.

## ÖZGEÇMİŞ

1986 yılı Erzincan doğumlu olan Nazlı KARACA, aslen Malatyalı olup ilk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2004 yılında Malatya Turgut Özal Anadolu Lisesi'nden mezun olduktan sonra aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2009-2011 yıllarında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Aynı anda Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başlayan KARACA, halen bu görevine devam etmektedir.

### Yayımları:

1. Kadioglu, N. and Yildirim, I., 2013. On the convergence of an iteration method for continuous mappings on an arbitrary interval. *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:124.
2. Karaca, N. and Yildirim, I., 2015. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by a faster iteration process. *J. Adv. Math. Stud.*, 8 (2), 257-264.
3. Yildirim, I., Abbas, M. and Karaca, N., 2016. On the convergence and data dependence results for multistep Picard-Mann iteration process in the class of contractive-like operators. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9(6), 3773-3786.
4. Karaca, N., Abbas, M. and Yildirim, I., 2017. Convergence of a Newton-Like S-Iteration Process in  $\mathbb{R}$ . *Creative Math. Inf.*, (In Press).