SİMİTLİ BİR ÇEŞİTLEMİN GENİŞLEMELERİ ÜZERİNDE HESAPLAMA KODLARI

EVALUATION CODES ON EXTENSIONS OF A TORIC VARIETY

YELİZ YAKUT

Doç. Dr. Mesut Şahin

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2017

Yeliz Yakut'un hazırladığı "**SİMİTLİ BİR ÇEŞİTLEMİN GENİŞLEMELERİ ÜZERİNE HESAPLAMA KODLARI**" adlı bu çalışma alanındaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ

Başkan ....

Doç. Dr. Mesut ŞAHİN

Danışman ....

Doç. Dr. Evrim AKALAN

Üye ....

Doç. Dr. Zülfükar SAYGI

Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Oğuz YAYLA

Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☒ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

20 / 09 / 2017

Yeliz YAKUT

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

20/09/2017

YELİZ YAKUT

ÖZET

SİMİTLİ BİR ÇEŞİTLEMİN GENİŞLEMELERİ ÜZERİNDE HESAPLAMA KODLARI

Yeliz YAKUT

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mesut ŞAHİN

Eylül 2017

Bu tezde projektif simitli çeşitlemlerin özel altkümeleri üzerinde tanımlanan hesaplama kodları çalışılmıştır. Bu kodların parametrelerini hesaplamak için kullanılan sıfırlayan ideallerin üreteçlerini bulmaya yarayan iki yöntem detaylıca anlatılmıştır. Tezde, bir projektif simit ile onun bir genişlemesinin sıfırlayan idealleri arasında güzel bir ilişkinin varlığını sorgulayan bir açık problem de çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: simitli çeşitlem, tek terimli eğri, genişleme, hesaplama kodu

ABSTRACT

EVALUATION CODES ON EXTENSIONS OF A TORIC VARIETY

Yeliz YAKUT

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mesut ŞAHİN

September 2017

In this thesis, evaluation codes defined on special subsets of projective toric varieties are studied. Two methods are presented in detail for finding generators of vanishing ideals which are used to compute parameters of these codes. An open question investigating a nice relationship between the vanishing ideals of a projective torus set and its extension is also studied.

Keywords: toric variety, monomial curve, extension, evaluation code

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında büyük katkı sağlayan, değerli bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, beni ders çalışmaya teşvik eden değerli hocam Doç. Dr. Mesut ŞAHİN'e;

tezimi okuyup değerli görüşlerini paylaşan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU ve jüri üyeleri Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ, Doç. Dr. Evrim AKALAN, Doç. Dr. Zülfükar SAYGI, Yrd. Doç. Dr. Oğuz YAYLA hocalarıma;

bana her zaman güvenen, attığım her adımda, verdiğim her kararda yanımda olup beni destekleyen aileme;

sevinçlerimi paylaşan ve zor günlerimde beni yalnız bırakmayan dostlarıma;

ve son olarak yürütücülüğünü danışman hocam Doç. Dr. Mesut ŞAHİN'in yaptığı ve Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 1001 Programı tarafından desteklenen 114F094 numaralı proje kapsamında burs veren TÜBİTAK'a içtenlikle teşekkür ederim.

İçindekiler

1 GİRİŞ

Hata düzeltme kodları gürültülü kanallar aracılığıyla bilgi taşırken güvenilirliği temin etmek için kullanılır. Uygulamalardaki önemleri nedeniyle bu kodlar; matematik, bilgisayar ve mühendislik bilimleri arasında bir buluşma noktası olagelmiştir. Tüm hata düzeltme kodları matematiksel araçlar kullanılarak elde edilse de, matematik ve kodlama teorisi arasındaki en derin ve büyüleyici bağlantılar Cebirsel Geometri Kodlarıyla ortaya çıkmaktadır denilebilir. Cebirsel Geometri Kodları, yaklaşık kırk yıl önce V.D. Goppa'nın çalışmalarıyla başlayan ve günümüzde hem olgun hem de hala heyecan verici bir araştırma konusu olma özelliğini koruyan bir alandır. Üstelik farklı matematiksel alanlarda değişik teorilerin gelişimini de tetikleyerek... Bu duruma belki de en iyi örnek sonlu cisimler üzerindeki eğriler hakkında yapılan araştırmalardır. Son zamanlarda ise yüksek boyutlu çeşitlemler (yüzeyler vb.) kullanılarak elde edilen kodlar incelenmeye başlanmış, fakat onlar hakkında bilgi edinmenin çetin bir hedef olduğu anlaşılmıştır.

Simitli çeşitlemler kullanılarak elde edilen kodlar, tam da bu noktada, simitli çeşitlemlerin özel kombinatorik yapıları sayesinde ümit verici olmuştur. Çünkü; hem bu kodlar hakkında bilgi edinme ve hesaplama yapma problemi basite indirgenebilmekte hem de bu şekilde çok iyi parametrelere sahip kodlar elde edilebilmektedir. Fakat henüz bu iyi parametreli kodları üreten matematiksel altyapı tam olarak aydınlatılamamıştır.

Bir simitli çeşitlemin bir A matrisi tarafından parametrize edilen X altkümesinin tanımladığı hesaplama kodları olan parametrik kodlar literatürde ilk kez Marquez, Simis ve Villarreal tarafından 2011'de yayımlanan [1] makalesinde ele alınmıştır. Aynı yıl Sarmiento, Pinto ve Villarreal [2] makalesinde $A = I_s$ birim matrisine karşılık gelen parametrik kodun üç temel parametresini hesaplamışlardır. Bir yıl sonra yine Sarmiento, Pinto ve Villarreal tarafından yürütülen [3] çalışmasında özel hiperçizgelerin kenarlarının karakteristik vektörlerinin parametrize ettiği simitlerin sıfırlayan ideallerini ve karşılık gelen parametrik kodların parametrelerini incelemişlerdir. Aynı yıl, [4] makalesinde, afin simitin ve projektif kapanışının simitli ideallerini bulan bir metot verilmiştir. Bu iki küme üzerinde tanımlanan parametrik kodların denk oldukları gösterilmiş ve parametreleri çalışılmıştır. 2013 yılında yayımlanan [5] makalesinde; $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ standart birim vektörleri olmak üzere $A = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n \quad \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_1]$ matrisine karşılık gelen parametrik kodlar çalışılmıştır. Aynı yıl yürütülen [6] makalesinde köşegen matrislere karşılık gelen parametrik kodlar ele alınmıştır. Yine aynı yıl yapılan [7] çalışmasında A ve $[0\ A]$ matrislerine karşılık gelen projektif simitlerin sıfırlayan idealleri arasındaki ilişki ve karşılık gelen kodlar incelenmiştir. 2014 yılında yayımlanan [8] makalesinde özel bir hesaplama kodu olan afin kartezyen kod tanıtılmış ve temel parametreleri hesaplanmıştır. Aynı yıl yürütülen [9] çalışmasında ise parametrik bir kodun uzunluğunu sadece Lineer Cebir kullanarak hesaplayan bir yöntem geliştirilmiştir. 2015 yılında yayımlanan [10] makalesinde herhangi bir parametrik kodun parametreleriyle projektif simite karşılık gelen kodun parametreleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Aynı yıl yürütülen [11] ve [12] makalelerinde ise sırasıyla basit çizgeler ve çizgelerle çift-devirler tarafından tanımlanan parametrik kodlar ele alınmıştır. Son olarak bu yıl yapılan [13] araştırmasında parametrik kodların minimum uzaklığını Değişmeli Cebir yöntemleriyle hesaplamak amacıyla homojen idealler için minimum uzaklık foksiyonu teorisi geliştirilmiştir.

X altkümesinin tanımladığı parametrik kodun iki temel parametresi [1] makalesinde açıklandığı şekilde $S/I(X)$ bölüm halkasının Hilbert fonksiyonu yardımıyla hesaplanabilir. Hilbert fonksiyonunun hesaplanması için ilk adımda $I(X)$ sıfırlayan idalinin üreteçlerinin bulunması gerekir ki [1] makalesindeki Teorem 2.1 bu hedefe ulaşmak için bir yöntem verir. Ayrıca, makalenin bir başka ana sonucu olan Teorem 2.5 de bazı şartlar altında $I(X)$'i A'nın simitli idealinden elde etmek için kullanılabilecek bir yöntem verir. Bu iki yöntem tezin 3. Bölüm'ünde ele alınmıştır. Tezin 2. Bölüm'ünde daha sonraki bölümlerde karşılaşılacak simitli ideal, afin ve projektif simit, simitli küme ve simitli çeşitlem gibi temel terimler örneklerle açıklanarak verilmiştir. 4. Bölümde ise tezin ana problemini motive eden ve literatürde bir çok önemli özelliğe sahip yeni örnekler üretmek için kullanılan genişleme kavramı ele alınmıştır, [14–16]. Bu makaleler; temelde, bir matrisin genişlemesinin simitli idealinin, o matrisin simitli idealine bir binom eklenerek elde edildiği gerçeğine dayanmaktadır. Buradan yola çıkarak **tezin amacı**; benzer ilişkinin, projektif simitin sıfırlayan ideali ile genişlemelerinin sıfırlayan idealleri arasında olup olmadığı açık probleminin araştırılması için gereken teorik altyapının ve örnek hesaplamalar yapmak için gereken Macaulay 2 bilgisayar programı komutlarının verilmesidir. Bu problemle ilgili olumlu bir sonuç çıkması halinde, bir parametrik kodun parametrelerinden onun her bir genişlemesinin parametreleri bu tip bir ilişki vasıtasıyla tek tek uğraşmadan hesaplanabilecektir. Tezin son bölümünde böyle bir ilişki bulmak için yapılan örnekler sergilenmiştir.

2 SİMİTLİ ÇESİTLEMLER

Bu tezde sadece afin ve projektif simitli çeşitlemler ele alınacaktır.

2.1 Afin Simitli Çeşitlemler

Tanım 2.1.1. K bir cisim olmak üzere K^s kümesine (s- boyutlu) **afin uzay** denir ve $\mathbb{A}^s(K)$ ile veya sadece $\mathbb{A}^s$ ile gösterilir. Afin uzayın elemanlarına **nokta** denir.

Bir afin uzay üzerinde standart toplama ve skalerle (K'nın bir elemanıyla) çarpma işlemleri tanımlanarak vektör uzayı yapısı kurulabilir ve bu durumda $(K^s, +, \cdot)$ cebirsel yapısı elde edilir.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}^3$ kümesi 3-boyutlu bir $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ afin uzayı verirken $\mathbb{C}^2$ karmaşık düzlemi 2-boyutlu bir $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ afin uzayı tanımlar. Benzer şekilde $K = \mathbb{F}_q$ sonlu cismi üzerinde $\mathbb{A}^4(\mathbb{F}_q)$, 4-boyutlu bir afin uzaydır.

Tanım 2.1.3. K bir cisim olsun ve $f_1, \ldots, f_k \in K[t_1, ..., t_s]$ polinomlar olsunlar. Bu durumda $f_1, ..., f_k$ polinomlarının ortak çözümü olan noktalar kümesine $f_1, ..., f_k$ tarafından tanımlanan **afin çeşitlem** denir ve $V(f_1, \ldots, f_k)$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{(a_1, ..., a_s) \in K^s : f_i(a_1, ..., a_s) = 0, \forall\, 1 \leq i \leq k\}, \text{ olur.}$$

Örnek 2.1.4. Lineer Cebir derslerinde sistemli bir şekilde çalışılan lineer denklem sistemleri afin çeşitlem örnekleri verir; çünkü sistemdeki her bir denklem birinci dereceden bir polinom olduğu için her lineer denklem sisteminin (ortak) çözüm kümesi bir afin çeşitlem örneğidir.

Örnek 2.1.5. $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$'deki $C = \{(v^2, v) : v \in \mathbb{R}\}$ parabolü bir afin çeşitlemdir, çünkü $C = V(t_1 - t_2^2)$ olduğu açıktır.

Örnek 2.1.6. $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$'teki $C = \{(v, v^2, v^3) : v \in \mathbb{R}\}$ altkümesi de bir afin çeşitlemdir, çünkü $C = V(t_2 - t_1^2, t_3 - t_1^3)$ olduğu kolayca görülür. Şöyle ki $t_2 - t_1^2, t_3 - t_1^3$ polinomları C'nin herhangi bir (v, v^2, v^3) noktasında sıfırlanır. Yani $C \subseteq V(t_2 - t_1^2, t_3 - t_1^3)$ olur. Tersine $P \in V(t_2 - t_1^2, t_3 - t_1^3)$ noktası için $t_2 = t_1^2$ ve $t_3 = t_1^3$ olduğundan $P = (t_1, t_1^2, t_1^3) \in C$ elde edilir. Bu ise $V(t_2 - t_1^2, t_3 - t_1^3) \subseteq C$ olması demektir.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{A}^1$ bir boyutlu afin uzayındaki afin çeşitlemler sonlu nokta kümeleridir, çünkü tek değişkenli bir polinomun en fazla derecesi kadar kökü olur.

Örnek 2.1.8. Reel afin düzlemde $t_2 = \sin t_1$ fonksiyonunun grafiği ise bir afin çeşitlem değildir. Olsaydı, iki değişkenli $f_1, \ldots, f_k$ polinomları için

$$f_1 = \cdots = f_k = 0$$

sisteminin ortak çözümü olurdu. f iki değişkenli polinomu için $f(t_1, 0)$ tek değişkenli polinomunun en fazla derecesi kadar kökü olduğu için $V(f) \cap V(t_2)$'nin sonlu elemanı vardır. Dolayısıyla, grafik $C = V(f_1, \ldots, f_k)$ şeklinde olsaydı, $C \cap V(t_2) = V(f_1) \cap \cdots \cap V(f_k) \cap V(t_2)$ kümesinin de sonlu elemanı olurdu. Diğer yandan, her $m \in \mathbb{Z}$ için $(t_1, t_2) = (2m\pi, 0) \in C$'dir, çünkü $(t_1, t_2) = (2m\pi, 0)$ noktaları $t_2 = \sin t_1$ denklemini sağlar. Yani, her $m \in \mathbb{Z}$ için $(2m\pi, 0) \in C \cap V(t_2)$'dir. Bu ise $C \cap V(t_2)$'nin sonlu olmasıyla çelişir.

Tanım 2.1.9. $X \subseteq \mathbb{A}^s$ altkümesi üzerinde sıfır değeri alan bütün polinomlar kümesi bir ideal oluşturur ki bu ideale X'in **sıfırlayan ideal**i denir ve $I(X)$ ile gösterilir. Yani,

$$I(X) = \{f \in K[t_1, \ldots, t_s] : \text{her } P \in X \text{ için } f(P) = 0\}.$$

Örnek 2.1.10. $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$'deki $C = \{(v^2, v) : v \in \mathbb{R}\}$ parabolünün sıfırlayan ideali $I(C) = \langle t_1 - t_2^2 \rangle$ şeklinde tek üreteçli bir idealdir, çünkü herhangi bir $f \in K[t_1, t_2]$ polinomuna bölme algoritması uygularsak

$$f(t_1, t_2) = q(t_1, t_2)(t_1 - t_2^2) + r(t_2)$$

olduğu görülür. Eğer $f \in I(C)$ ise her $v \in \mathbb{R}$ için $f(v^2, v) = 0$ olacağından yukarıdaki denklemden her $v \in \mathbb{R}$ için $r(v) = 0$ elde edilir. Tek değişkenli sıfırdan farklı bir polinomun en fazla derecesi kadar kökü olabileceğinden sonsuz köklü r polinomu sıfır olmak durumundadır. Yani, $f \in \langle t_1 - t_2^2 \rangle$ ve dolayısıyla $I(C) \subseteq \langle t_1 - t_2^2 \rangle$ olur. Tersi açık olduğu için, $I(C) = \langle t_1 - t_2^2 \rangle$ elde edilir.

Tanım 2.1.11. $A = (v_{ij})$ girdileri tamsayı olan bir $n \times s$ matris olsun. Bu matrisin

i-yinci sütününu $\mathbf{v}_i = (v_{1i}, \ldots, v_{ni})$ ile gösterelim.

$$\text{Yani,}\quad A = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{ns} \end{bmatrix} \quad \text{olsun. Bu durumda, her } i = 1, \ldots, s \text{ için,}$$

$$\phi : K[t_1, \ldots, t_s] \to K[x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}], \quad \phi(t_i) := \mathbf{x}^{\mathbf{v_i}} = x_1^{v_{1i}} \cdots x_n^{v_{ni}},$$

şeklinde tanımlanan halka homomorfizminin çekirdeği olan I_A asal idealine A'ya iliştirilen **simitli ideal** denir.

Bir $a = (a_i) \in \mathbb{N}^s$ vektörü için t^a kısaltması tez boyunca $t_1^{a_1} \cdots t_s^{a_s}$ monomunu gösterecektir. Simitli idealler için bir üreteç kümesi Sturmfels tarafından yazılan [17] kitabındaki Lemma 4.1'de aşağıdaki gibi verilmektedir:

Lemma 2.1.12. $I_A = \langle t^a - t^b \mid Aa = Ab \rangle$.

Uyarılar: Burada dikkat çeken bir konu yukarıdaki üreteç kümesinin K cisminden bağımsız olmasıdır. İkincisi ise bu kümenin A matrisinin Sıfır Uzayı tarafından tek türlü belirlenmesidir. Aslında $Aa = Ab \iff A(a-b) = 0$ olduğu için A'nın tanımladığı homojen lineer denklem sisteminin çözüm uzayındaki tamsayı koordinatlı her vektör pozitif bileşenleri a ile negatif bileşenleri b'nin farkı olarak yazılabilir. Örneğin, $(1, -2, 1) = (1, 0, 1) - (0, 2, 0)$. Bu yüzden, Sıfır Uzayları aynı olan matrisler aynı simitli ideali ve dolayısıyla aynı afin simitli çeşitlemi tanımlar. Simitli idealler ve uygulamaları hakkında daha detaylı bilgi [17] kitabında bulunabilir.

Tanım 2.1.13. Simitli bir I_A idealinin tanımladığı afin çeşitleme ise A'ya iliştirilen **afin simitli çeşitlem** denir ve V_A ile gösterilir. Yani,

$$V_A = \{P \in \mathbb{A}^s : \text{ her } f \in I_A \text{ için} \, f(P) = 0\}.$$

Yine aynı matris tarafından parametrize edilen iki ilginç küme bulunmaktadır. Bunlardan ilkine A'ya iliştirilen **simitli küme** denir ve P_A ile gösterilir:

$$P_A = \{(x_1^{v_{11}} \cdots x_n^{v_{n1}}, \ldots, x_1^{v_{1s}} \cdots x_n^{v_{ns}}) : \text{ her } i = 1, \ldots, n \text{ için} \, x_i \in K\}.$$

İkincisine ise A'ya iliştirilen **simit** denir ve T_A ile gösterilir:

$$T_A = \{(x_1^{v_{11}} \cdots x_n^{v_{n1}}, \ldots, x_1^{v_{1s}} \cdots x_n^{v_{ns}}) : \text{her } i = 1, \ldots, n \text{ için } x_i \in K^* = K \setminus \{0\}\}.$$

İddia 2.1.14. *A'ya iliştirilen bu üç küme arasında $T_A \subset P_A \subseteq V_A$ şeklinde bir ilişki vardır.*

Kanıt. $T_A \subset P_A$ olduğu açıktır. $P_A \subseteq V_A$ olduğunu görmek için t^a monomunu $P = (x_1^{v_{11}} \cdots x_n^{v_{n1}}, \ldots, x_1^{v_{1s}} \cdots x_n^{v_{ns}})$ noktasında hesaplayalım:

$$\begin{aligned} t^a(P) &= t_1^{a_1} \cdots t_s^{a_s}(P) = (x_1^{v_{11}} \cdots x_n^{v_{n1}})^{a_1} \cdots (x_1^{v_{1s}} \cdots x_n^{v_{ns}})^{a_s} \\ &= x_1^{v_{11}a_1 + \cdots + v_{1s}a_s} \cdots x_n^{v_{n1}a_1 + \cdots + v_{ns}a_s} =: \mathbf{x}^{Aa}. \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere x_i'nin kuvveti Aa matrisinin i-yinci satırıdır. Dolayısıyla, $Aa = Ab$ iken $t^a(P) = t^b(P)$ olacağından, her $P \in P_A$ noktası I_A'nın üreteçleri olan $t^a - t^b$ binomlarının bir ortak çözümüdür. □

Yukarıdaki İddia 2.1.14 bizi şu soruya götürür: Hangi şartlar altında son iki küme $P_A = V_A$ olur? Bu soru Katsabekis ve Thoma tarafından [18] ve [19] makalelerinde cevaplanmıştır. Bu eşitliğin sağlandığı özel bir durum [19, Teorem 4.6]'nın bir sonucu olarak şu şekilde elde edilmiştir:

Sonuç 2.1.15. *[19, Sonuç 4.7] A matrisinin son satırı sadece 1 sayılarından ibaretse ve her bir sütünundaki girdilerin toplamı aynı ise $P_A = V_A$ olur.*

Örnek 2.1.16.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin tanımladığı dönüşüm $\phi : K[t_1, t_2, t_3] \to K[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}]$, $\phi(t_1) := x_1^2 x_2^0 x_3^1$, $\phi(t_2) := x_1^1 x_2^1 x_3^1$, $\phi(t_3) := x_1^0 x_2^2 x_3^1$ olacağından simitli idealin $I_A = \langle t_1 t_3 - t_2^2 \rangle$ olduğu Macaulay 2 programında şu şekilde bulunabilir:

```
i1 : K=ZZ/11; R = K[t_1,t_2,t_3]; U = K[x_1,x_2,x_3];

i2 : M=matrix{{x_1^2*x_2^0*x_3^1,x_1^1*x_2^1*x_3^1,x_1^0*x_2^2*x_3^1}};
```

```
i3 : H = map(U,R,M);


i4 : I_A=ker H


             2
o4 = ideal(t  - t t   )
             2   1 3
```

Dolayısıyla, $V_A = V(t_2^2 - t_1t_3)$ simitli çeşitlemiyle

$$P_A = \{(x_1^2x_2^0x_3^1, x_1^1x_2^1x_3^1, x_1^0x_2^2x_3^1) : x_1, x_2, x_3 \in K\}$$

simitli kümesi eşit olur.

Tanım 2.1.17. $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ ve $A = [m_1 \cdots m_s]$ şeklinde bir satır matrisi olmak üzere $obeb(m_1, \ldots, m_s) = 1$ ise V_A afin simitli çeşitlemine **tek terimli eğri** denir ve $C(m_1, \ldots, m_s)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.1.18. *[20, Önerme 2.9] $A = [m_1 \cdots m_s]$ tek terimli bir eğrinin matrisi ise $P_A = V_A$ olur.*

Örnek 2.1.19. $A = [2 \quad 1]$ matrisi için $\phi : K[t_1, t_2] \to K[x_1, x_1^{-1}]$, $\phi(t_1) := x_1^2, \quad \phi(t_2) := x_1^1$, olacağından $I_A = \langle t_1 - t_2^2 \rangle$ olduğu aşağıdaki gibi Macaulay 2 programı kullanılarak görülebilir. Karşılık gelen afin simitli çeşitlem (tek terimli eğri) Örnek 2.1.5'deki paraboldür.

```
K=ZZ/11 veya K= QQ alınıp aşağıdaki komutlar uygulanır:


i1 : K=ZZ/11; R = K[t_1,t_2]; U = K[x_1];
i2 : H = map(U,R,matrix{{x_1^2,x_1}}); I_A=ker H
            2
o3 = ideal(t  - t )
            2    1
```

$B = [4 \quad 2]$ matrisi ile A'nın Sıfır Uzayları aynı olduğu için $I_A = I_B$'dir. Ancak, örneğin $K = \mathbb{F}_3$ cismi için $P_B = \{(0,0),(1,1)\} = V(t_1 - t_2, t_2^2 - t_2)$ ile $V_B = V_A = P_A = \{(0,0),(1,1),(1,2)\}$ farklıdır, [20, Örnek 2.12].

2.2 Projektif Simitli Çeşitlemler

Herhangi bir K cismi üzerinde $(s-1)$-boyutlu projektif uzayı tanımlayacağız.

Tanım 2.2.1. K^s afin uzayının sıfırdan farklı $(a_1, ..., a_1)$ ve $(b_1, ..., b_s)$ noktaları için $(a_1, ..., a_s) = \alpha(b_1, ..., b_s)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\alpha \in K$ varsa bu iki nokta denktir denir ve $(a_1, ..., a_s) \sim (b_1, ..., b_s)$ ile gösterilir. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir. Bir $(a_1, ..., a_s)$ noktasının denklik sınıfı $[a_1, ..., a_s]$ ile gösterilir.

Dikkat edilirse $(a_1, ..., a_s)$ ve $(b_1, ..., b_s)$ noktalarının denk olmaları geometrik olarak koordinatları $(a_1, ..., a_s)$ ve $(b_1, ..., b_s)$ olan vektörlerin aynı lineer uzayı germeleri anlamına gelir. Diğer bir ifadeyle bu iki noktanın orijinden geçen bir doğru üzerinde yattıkları anlamına gelmektedir.

Tanım 2.2.2. $\mathbb{P}^{s-1}(K) = (K^s \setminus \{0\})/\sim$ denklik sınıfları kümesine K cismi üzerinde $(s-1)$-boyutlu projektif uzay denir. Yani, projektif uzay

$$\mathbb{P}^{s-1}(K) = \{[a_1, ..., a_s] : (a_1, ..., a_s) \in K^s \setminus \{0\}\}$$

şeklinde denklik sınıflarının bir kümesi biçimindedir.

Tanım 2.2.3. $a = (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N}^s, c_a \in K$ ve $t^a := t_1^{a_1} \cdots t_s^{a_s}$ olmak üzere $f = \sum_a c_a t^a$ polinomunun sıfırdan farklı sonlu c_a katsayısına karşılık gelen a'lar için $\sum a_i = d \in \mathbb{N}$ ise f'ye derecesi d olan bir homojen polinom denir.

Örnek 2.2.4. $t^a - t^b = t_1^{a_1} \cdots t_s^{a_s} - t_1^{b_1} \cdots t_s^{b_s}$ binomunu ele alalım.

$$t^a - t^b \quad \text{homojendir} \iff \sum_{i=1}^{s} a_i = \sum_{i=1}^{s} b_i.$$

Örnek 2.2.5. $f(t_1, t_2, t_3) = t_1^3 - 3t_1t_2^2 + 5t_1t_2t_3 - t_1^2t_3$ derecesi 3 olan homojen bir polinomdur.

Projektif uzayın noktaları denklik sınıfı olduğu için bir polinomun bir noktadaki değeri tek türlü belirli değildir. Örneğin, $f(t_1, t_2) = t_1^2 - t_2$ binomunun $[a_1, a_2] = \{\alpha(a_1, a_2) : \alpha \in K^*\} \in \mathbb{P}^1(K)$ noktasındaki değeri iyi tanımlı değildir, çünkü $f(\alpha a_1, \alpha a_2) = \alpha^2 a_1^2 - \alpha a_2$ olduğundan her α sayısı için farklı bir değer almaktadır. Homojen, yani bütün monomlarının derecesi aynı olan, polinomlarla çalışırsak, örneğin $f(t_1, t_2) = t_1^2 - t_1 t_2$, bu durumda $f(\alpha a_1, \alpha a_2) = \alpha^2(a_1^2 - a_1 a_2)$ elde edilir. Bu noktada, f homojen binomu hala iyi tanımlı değildir ancak $\alpha \neq 0$ olduğundan $f(a_1, a_2) = 0 \iff$ her α için $f(\alpha a_1, \alpha a_2) = 0$ olur. Yani, homojen bir polinom, denklik sınıfındaki bir noktada sıfır değeri alıyorsa aynı sınıfdaki bütün noktalarda sıfır değeri alır. Böylece aşağıdaki tanım yapılabilir:

Tanım 2.2.6. K bir cisim ve $f_1, ..., f_k \in K[t_1, ..., t_s]$ homojen polinomlar ise

$$\mathbb{V}(f_1, ..., f_k) = \{[a_1, ..., a_s] \in \mathbb{P}^{s-1}(K) : f_i(a_1, ..., a_s) = 0, \forall 1 \leq i \leq s\}$$

altkümesine $f_1, ..., f_k$ homojen polinomları tarafından belirlenen projektif çeşitlem denir.

Örnek 2.2.7. $\mathbb{A}^s$ afin uzayında orijinden geçen her hiperdüzlem P^{s-1} projektif uzayında bir projektif çeşitlem tanımlar, çünkü hiperdüzlemin orijinden geçmesi sabit teriminin sıfır olmasına denktir ve böylece sözkonusu lineer denklem homojen olur: $c_1, \ldots, c_s \in K$ olmak üzere

$$\mathbb{V}(c_1 t_1 + \cdots + c_s t_s) = \{[a_1, ..., a_s] \in \mathbb{P}^{s-1} : c_1 a_1 + \cdots + c_s a_s = 0\}.$$

Tanım 2.2.8. $I \subset K[t_1, ..., t_s]$ ideali homojen polinomlar tarafından üretiliyorsa I'ya homojen ideal denir.

Örnek 2.2.9. $I = \langle t_1 t_3 - t_2^2, t_1 t_4 - t_2 t_3, t_3^3 - t_1^2 t_4 + 5 t_2^3 \rangle \subset K[t_1, ..., t_4]$ homojen bir idealdir.

Tanım 2.2.10. $I \subset K[t_1, ..., t_s]$ homojen idealinin tanımladığı projektif çeşitlem

$$\mathbb{V}(I) = \{P \in \mathbb{P}^{s-1} : \text{her } f \in I \text{ için } f(P) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

İddia 2.2.11. *$I = \langle f_1, ..., f_k \rangle \subset K[t_1, ..., t_s]$ ise $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_k)$'dır.*

Kanıt. $P \in \mathbb{V}(I)$ ise P, I idealindeki her polinomun köküdür. Bu yüzden $f_1, ..., f_k \in I$ olduğundan $P \in \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_k)$ olur. Tersine, $P \in \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_k)$ ise $f_1(P) = \cdots = f_k(P) = 0$'dir. Her $f \in I$ polinomu için $f = g_1 f_1 + \cdots + g_k f_k$ olacak $g_1, \ldots, g_k$ polinomları bulunduğundan

$$f(P) = g_1(P)f_1(P) + \cdots + g_k(P)f_k(P) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $P \in \mathbb{V}(I)$ olması anlamına gelir ki ispat biter. $\square$

Polinom halkalarındaki her ideal sonlu üreteçli olduğu için bütün projektif çeşitlemler, sonlu sayıda homojen polinomun ortak çözümlerinin kümesi şeklinde olacaktır.

Tanım 2.2.12. $X \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$ olmak üzere, X üzerinde sıfır değeri alan bütün homojen polinomların ürettiği ideale X'in **sıfırlayan ideal**i denir ve $I(X)$ ile gösterilir. Yani,

$$I(X) = \langle f \in K[t_1, \ldots, t_s] : f \text{ homojen ve her } P \in X \text{ için } f(P) = 0 \rangle.$$

Şimdi projektif simitli çeşitlemleri ele alalım.

Tanım 2.2.13. $A = (v_{ij})$ girdileri tamsayı olan bir $n \times s$ matris olsun. Eğer $(1, \ldots, 1)$ vektörü A'nın satır uzayının bir elemanı ise A'ya **homojen** bir matris denir.

Örnek 2.2.14.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi homojendir, çünkü $(1, 1, 1) = \frac{1}{2}(2, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1, 2)$'dir.

İddia 2.2.15. *A homojen ise I_A simitli ideali de homojendir.*

Kanıt. I_A simitli idealinin homojen olduğunu göstermek için üreteçleri olan $t^a - t^b$ binomlarının homojen olduğunu göstermeliyiz. $t^a - t^b \in I_A$ olduğundan $Aa = Ab$ veya $A(a - b) = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu ise A matrisinin satırlarını oluşturan vektörlerle $a - b$ vektörünün iç çarpımlarının 0 olması demektir. A homojen iken $(1, \ldots, 1)$ vektörü A'nın satırlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan $(1, \ldots, 1)$ vektörüyle $a - b$

vektörünün iç çarpımı da 0 olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{i=1}^{s}(a_i - b_i) = 0 \quad \text{yani} \quad \sum_{i=1}^{s} a_i = \sum_{i=1}^{s} b_i$$

eşitliği elde edilir ki $t^a - t^b$ binomunun homojen olması demektir. $\square$

A homojen iken I_A simitli idealinin de homojen olması projektif uzayda bir çeşitlem tanımlaması anlamına gelir.

Tanım 2.2.16. A homojen iken $\mathbb{V}(I_A) \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$ projektif çeşitlemine A'ya iliştirilen **projektif simitli çeşitlem** denir ve $\mathbb{V}_A$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.17.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi homojen olduğu için hem $V_A \subseteq \mathbb{A}^3$ afin hem de $\mathbb{V}_A \subseteq \mathbb{P}^2$ projektif simitli çeşitlemini tanımlar. Macaulay 2 ile $I_A = \langle t_1t_3 - t_2^2 \rangle$ simitli ideali şu şekilde bulunabilir:

```
i1 : K=ZZ/11; R = K[t_1,t_2,t_3]; U = K[x_1,x_2];

i2 : M=matrix{{x_1^2*x_2^0,x_1^1*x_2^1,x_1^0*x_2^2}};

i3 : H = map(U,R,M);

i4 : I_A=ker H

               2
o4 = ideal(t  - t t   )
            2    1 3
```

Dolayısıyla bu iki çeşitlem aşağıdaki gibidir:

$$V_A = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{A}^3 : a_1a_3 - a_2^2 = 0\}, \quad \mathbb{V}_A = \{[a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}^2 : a_1a_3 - a_2^2 = 0\}.$$

A matrisi tıpkı afin uzayda olduğu gibi projektif uzayda da simit ile simitli küme tanımlar:

Tanım 2.2.18.

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{ns} \end{bmatrix}$$

olmak üzere A'ya iliştirilen **projektif simit** aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbb{T}_A := \{[x_1^{v_{11}} \cdots x_n^{v_{n1}}, \ldots, x_1^{v_{1s}} \cdots x_n^{v_{ns}}] : \text{ her } i = 1, \ldots, n \text{ için} \, x_i \in K^* = K \setminus \{0\}\}.$$

Benzer şekilde A'ya iliştirilen **projektif simitli küme** de aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbb{P}_A := \{[x_1^{v_{11}} \cdots x_n^{v_{n1}}, \ldots, x_1^{v_{1s}} \cdots x_n^{v_{ns}}] : \text{ her } i = 1, \ldots, n \text{ için} \, x_i \in K\}.$$

A matrisi homojen değilse A'ya $[1 \cdots 1]$ satırı eklenerek homojen bir A' matrisi elde edilebilir.

İddia 2.2.19.

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{ns} \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

homojen matrisi A'ya $[1 \cdots 1]$ satırı eklenerek elde edilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $\mathbb{T}_{A'} = \mathbb{T}_A$ *ve* $\mathbb{P}_{A'} = \mathbb{P}_A$,

2. *Eğer A homojense* $I_{A'} = I_A$ *ve* $\mathbb{V}_{A'} = \mathbb{V}_A$.

Kanıt. Projektif uzayda sıfır noktası olmadığından $z := x_{n+1} \in K^*$ dersek

$$[x_1^{v_{11}} \cdots x_n^{v_{n1}} z, \ldots, x_1^{v_{1s}} \cdots x_n^{v_{ns}} z] = [x_1^{v_{11}} \cdots x_n^{v_{n1}}, \ldots, x_1^{v_{1s}} \cdots x_n^{v_{ns}}]$$

noktaları aynıdır. Böylece ilk şıktaki $\mathbb{T}_{A'} = \mathbb{T}_A$ ve $\mathbb{P}_{A'} = \mathbb{P}_A$ eşitlikleri kolayca elde edilir.

Son şık için, A homojense $[1 \cdots 1]$ vektörü satır uzayının bir elemanı olacağından A' ile $\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ matrisi satır denk olur. Bu yüzden A' ile A'nın Sıfır Uzayları aynı olur ki bu karşılık gelen simitli ideallerin ve dolayısıyla projektif simitli çeşitlemlerin eşit olması anlamına gelir. $\square$

Sonuç 2.2.20. *A matrisinin her bir sütünundaki girdilerin toplamı aynı ise $\mathbb{P}_A = \mathbb{V}_A$ olur.*

Kanıt. A matrisinin her bir sütünundaki girdilerin toplamı aynı ise homojendir. Bu yüzden bir önceki İddia'dan dolayı $\mathbb{P}_{A'} = \mathbb{P}_A$ ve $\mathbb{V}_{A'} = \mathbb{V}_A$ olur. Sonuç 2.1.15'dan dolayı $P_{A'} = V_{A'} \subset \mathbb{A}^s$ olduğundan $\mathbb{P}_{A'} = \mathbb{V}_{A'} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ olur ki ispat biter. $\square$

Uyarı: A homojen değilse simitli idealler aynı olmayabilir. Aşağıdaki örnek bunu yansıtmaktadır.

Örnek 2.2.21.

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ise Macaulay 2 kullanarak karşılık gelen $I_A = \langle t_1 - 1, t_2t_4 - t_3^2, t_4 - t_2t_3, t_3 - t_2^2 \rangle$ ve $I_{A'} = \langle t_2t_4 - t_3^2, t_1t_4 - t_2t_3, t_1t_3 - t_2^2 \rangle$ simitli idealleri şu şekilde bulunur:

```
i1 : K=ZZ/13; R = K[t_1,t_2,t_3,t_4]; U = K[x_1];

i2 : M=matrix{{x_1^0,x_1^1,x_1^2,x_1^3}};

i3 : H = map(U,R,M); IA=ker H

                         2                         2
o4 = ideal (t  - 1, t  - t t , t t  - t , t  - t )
             1       3    2 4   2 3    4   2    3

i1 : U = K[x_1,x_2];
```

```
i2 : M=matrix{{x_1^0*x_2^1,x_1^1*x_2^1,x_1^2*x_2^1,x_1^3*x_2^1}};

i3 : H = map(U,R,M); IA'=ker H

              2                        2
o4 = ideal (t  - t t , t t  - t t , t  - t t )
              3    2 4   2 3    1 4   2    1 3
```

Tanım 2.2.22. $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ ve $obeb(m_1, \ldots, m_s) = 1$ olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & m_1 & \cdots & m_{s-1} & m_s \\ m_s & m_s - m_1 & \cdots & m_s - m_{s-1} & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin tanımladığı $\mathbb{V}_A$ projektif simitli çeşitlemine literatürde **projektif tek terimli eğri** denmekte ve $\bar{C}(m_1, \ldots, m_s)$ şeklinde gösterilmektedir. Benzer şekilde $\mathbb{T}_A$ projektif simiti $C^*(m_1, \ldots, m_s)$ şeklinde gösterilmektedir.

İddia 2.2.23. *A matrisi, Tanım 2.2.22'deki gibi olsun.*

$$B' := \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & m_1 & \cdots & m_{s-1} & m_s \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ise, aşağıdakiler geçerlidir:

(1) $I_A = I_{B'} \neq I_B$

(2) $\mathbb{V}_A = \mathbb{V}_{B'} \neq \mathbb{V}_B$

(3) $\mathbb{T}_A = \mathbb{T}_{B'} = \mathbb{T}_B$

(4) $\mathbb{P}_A \neq \mathbb{P}_{B'} = \mathbb{P}_B$

Kanıt: B' ile Tanım 2.2.22'deki A matrisi satır denk olduğu için aynı Sıfır Uzayına ve dolayısıyla da aynı simitli ideale sahiptirler. Yani $I_A = I_{B'}$ ve dolayısıyla $\mathbb{V}_A = \mathbb{V}_{B'}$ olur. Ancak, Örnek 2.2.21'de gördüğümüz üzere I_B simitli ideali diğer simitli ideallerden ve dolayısıyla V_B diğer simitli çeşitlemlerden farklıdır. Bu ilk iki şıkkı kanıtlar. Üçüncü şıkkın ikinci eşitliği olan $\mathbb{T}_B = \mathbb{T}_{B'}$, İddia 2.2.19'den görülür. İlk eşitliğe denk olan $\mathbb{T}_A = \mathbb{T}_B$ olduğunu görmek için $P \in \mathbb{T}_A$ alırsak

$$\begin{aligned} P &= [x_1^0 x_2^{m_s}, x_1^{m_1} x_2^{m_s - m_1}, \ldots, x_1^{m_{s-1}} x_2^{m_s - m_{s-1}}, x_1^{m_s} x_2^0] \\ &= x_2^{m_s}[x_1^0 x_2^0, x_1^{m_1} x_2^{-m_1}, \ldots, x_1^{m_{s-1}} x_2^{-m_{s-1}}, x_1^{m_s} x_2^{-m_s}] \\ &= [x_1^0 x_2^0, x_1^{m_1} x_2^{-m_1}, \ldots, x_1^{m_{s-1}} x_2^{-m_{s-1}}, x_1^{m_s} x_2^{-m_s}] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $u = x_1 x_2^{-1}$ dersek $P = [u^0, u^{m_1}, \ldots, u^{m_s}] \in \mathbb{T}_B$ olur. Tersine, $P = [u^0, u^{m_1}, \ldots, u^{m_s}] \in \mathbb{T}_B$ iken herhangi bir $x_2 \in K^* \setminus \{1\}$ elemanını alıp $x_1 = ux_2$ dersek, yukarıdaki eşitliklerden dolayı $P \in \mathbb{T}_A$ olur. Son şıktaki $\mathbb{P}_B = \mathbb{P}_{B'}$, İddia 2.2.19'den görülür. $\mathbb{P}_A \neq \mathbb{P}_B$ olmasının sebebi $x_2 = 0$ için $[0, \ldots, 0, 1] \in \mathbb{P}_A \setminus \mathbb{P}_B$ olmasıdır. $\square$

3 HESAPLAMA KODLARI

Bu bölümde, [1] makalesinde geliştirilen iki önemli yöntemi ele alacağız. Detayları vermeden önce lineer kodlar hakkındaki bazı temel bilgileri gözden geçirelim. Her $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_q^m$ altuzayına bir **lineer kod** denmektedir. Bir lineer kodun uzunluk, boyut ve minimum uzaklık isimli üç temel parametresi vardır. Kodun elemanları olan $c = (c_1, \ldots, c_m)$ vektörlerine **kod kelimeleri**, m sayısına kodun **uzunluğu** denir. $\mathcal{C}$'nin altuzay olarak boyutuna kodun **boyutu** denir ve $\mathbf{b}(\mathcal{C}) = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{C})$ ile gösterilir. Bir c kelimesinin **ağırlığı**, sıfırdan farklı bileşen sayısıdır. İki c ve c' kelimesi arasındaki **uzaklık** $c - c' \in \mathcal{C}$'nin ağırlığı olarak tanımlanır. $\mathcal{C}$'nin farklı elemanları arasındaki uzaklıkların en küçüğüne $\mathcal{C}$'nin **minimum uzaklığı** denir ve $\delta(\mathcal{C})$ ile gösterilir. Bu parametreler arasında

$$\mathbf{b}(\mathcal{C}) + \delta(\mathcal{C}) \leq m + 1$$

şeklinde **Singleton Bound** denilen bir ilişki vardır. Kodlama Teorisinin temel amacı bu üç parametreyi hesaplayan yöntemler geliştirmek, mümkün olduğunca büyük parametrelere sahip kodlar üretebilmektir.

3.1 Parametrik Kodlar

$S = K[t_1, ..., t_s]$ olmak üzere S_d ile derecesi d olan homojen polinomlar altuzayını gösterelim. S halkası standart derecelendirmeye göre yani her $i = 1 \ldots, s$ için $der(t_i) = 1$ olmak üzere homojen bir halkadır:

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d.$$

$I(X) \subset S$ homojen ideali, $X \subset \mathbb{P}^{s-1}$'in sıfırlayan ideali, yani X'in bütün noktalarında sıfırlanan homojen polinomlar tarafından üretilen ideal olsun.

$X = \{P_1, \ldots, P_m\}$ ve $f_0(t_1, ..., t_s) = t_1^d$ olmak üzere aşağıda tanımlanan **hesaplama dönüşümü**

$$ev_d : S_d \to K^{|X|}, \quad f \mapsto \left(\frac{f(P_1)}{f_0(P_1)}, ..., \frac{f(P_m)}{f_0(P_m)} \right)$$

bir K-lineer dönüşüm tanımlar. Bu dönüşümün görüntüsü $K^{|X|}$ vektör uzayının bir lineer alt uzayı olduğu için bir lineer kod verir.

Tanım 3.1.1. Yukarıdaki ev_d dönüşümünün görüntüsü $C_X(d)$ ile gösterilir ve X projektif çeşitlemi üzerinde bir **hesaplama kodu** adını alır.

$C_X(d)$ kodunun iki temel parametresi aşağıda açıklandığı şekilde $S/I(X)$ bölüm halkasının Hilbert fonksiyonu yardımıyla hesaplanabilir. X'in Hilbert fonksiyonu

$$H_X(d) := boy_{\mathbb{F}_q}(S/I(X))_d = boy_{\mathbb{F}_q} S_d/I(X)_d = boy_{\mathbb{F}_q} S_d - boy_{\mathbb{F}_q} I(X)_d,$$

şeklinde tanımlanır. $C_X(d)$ kodu ev_d'nin görüntüsü ve $I(X)_d := S_d \cap I(X)$ bu dönüşümün çekirdeği olduğundan $C_X(d) \cong S_d/I(X)_d$'dir. Bu yüzden, kodun boyutu $\mathbf{b}(C_X(d)) = boy_{\mathbb{F}_q} C_X(d) = H_X(d)$ olur.

Öte yandan, Hilbert fonksiyonu $H_X(0) = 1$ değerinden başlayıp her $d \geq |X| - 1$ için alacağı en büyük değer olan $H_X(d) = |X|$'ye kadar artacağından kodun uzunluğu olan $|X|$ sayısı da Hilbert fonksiyon yardımıyla bulunabilir.

K cismi q elemanlı $\mathbb{F}_q$ sonlu cismi ve A matrisi, sütünları $\mathbf{v}_i = (v_{1i}, ..., v_{ni}) \in \mathbb{N}^n$ vektörleri olan $n \times s$ bir matris olsun. Bu bölüm boyunca $X = \mathbb{T}_A$ projektif simitinin tanımladığı hesaplama kodlarının iki parametresini bulan metotları ele alacağız. Bu özel durumda elde edilen kodlara d **dereceli parametrik kod** denmektedir.

3.2 Simitin Sıfırlayan İdeali

Parametrik kodların parametrelerini bulmak için öncelikle $I(X)$ simitli idealinin hesaplanması gerekmektedir ki vereceğimiz ilk sonuç bununla ilgilidir. Sonucu vermeden önce kafes ideal tanımını hatırlatalım:

Tanım 3.2.1. Verilen $a \in \mathbb{R}^s$ vektörünün dayanağı $supp(a) = \{i \mid a_i \neq 0\}$ olarak tanımlanabilir. Böylece her a vektörü, $a = a^+ - a^-$ şeklinde, dayanağı ayrık, bileşenleri negatif olmayan iki vektörün farkı şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.2.2. $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^s$ kafesinden kasıt bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{Z}^n$'ye izomorf bir grup olmak üzere,

$$I_{\mathcal{L}} := \langle t^{a^+} - t^{a^-} : a \in \mathcal{L} \rangle \subset S$$

şeklinde tanımlanan ideale bir **kafes ideal** denir.

Teorem 3.2.3. *[1, Teorem 2.1] $S = K[t_1, ..., t_s]$ ve $R = K[t_1, ..., t_s, y_1, ..., y_n, z]$, $K = \mathbb{F}_q$ sonlu cismi üzerinde polinom halkaları olsun. Eğer her i için $\mathbf{v}_i \in \mathbb{N}^n$ ise aşağıdakiler sağlanır.*

(a) $I(X) = (\{t_i - y^{\mathbf{v}_i} z\}_{i=1}^s \bigcup \{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^n) \bigcap S$ *ve* $I(X)$ *bir binom idealdir.*

(b) Her i için t_i değişkeni $S/I(X)$ halkasının sıfır-böleni değildir ve $I(X)$ bir radikal kafes idealdir.

(c) $S/I(X)$ bir boyutlu Cohen-Macaulay halkasıdır.

Aşağıda örnek, bir matrise karşılık gelen projektif simitin sıfırlayan idealinin ve ilgili parametrik kodun uzunluğuyla boyutunun nasıl bulunacağını göstermektedir.

Örnek 3.2.4.

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ise $X = \mathbb{T}_{A'} = \mathbb{T}_A$'nın sıfırlayan ideali ve $0 \leq d \leq |X| - 1$ arasındaki her d'ye karşılık gelen $C_X(d)$ kodunun uzunluğu $m = |X|$ ile boyutu Macaulay 2 kullanarak şu şekilde bulunabilir:

```
i1 : A={0,1,2,3};q=13;K=ZZ/q;

i4 : R = K[y_1,t_1..t_(#A),z];

i5 : I = ideal(apply(#A, i -> R_(i+1) - y_1^(A_i)*z))+
ideal(apply(#{A_0}, i -> y_(i+1)^(q-1)-1))

                                2           3         12
o5 = ideal (t  - z, - y z + t , - y z + t , - y z + t , y   - 1)
             1         1     2     1     3     1     4   1

i6 : IX = eliminate(I,{y_1,z})

             2                       2          4    4
o6 = ideal (t  - t t , t t  - t t , t  - t t , t  - t )
             3    2 4   2 3    1 4   2    1 3   1    4

i7 : S=K[t_1..t_(#A)]; IX=substitute(IX,S);

i9 : m=degree IX

o9 = 12

i10 : apply (m,d->hilbertFunction(d,IX))

o10 = {1, 4, 7, 10, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12}
```

Buradan aşikar olmayan sadece 3 kod olduğunu ve bunların $d = 1, 2, 3$ dereceli olduğu anlaşılır. Şöyle ki, $d = 0$ ise $S_0 = K$'nın hesaplama dönüşümü altındaki görüntüsü $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ vektörünün ürettiği 1 boyutlu altuzay olacağından kodun boyutu 1, minimum uzaklığı 12 olur. Öte yandan $d > 3$ dereceli kodların boyutları 12 olduğundan, minimum uzaklığı;

$$12 + \delta(C_X(d)) = \mathbf{b}(C_X(d)) + \delta(C_X(d)) \leq m + 1 = 13$$

Singleton Bound eşitsizliği kullanılarak $\delta(C_X(d)) = 1$ şeklinde bulunur.

3.3 Simitin Sıfırlayan İdeali ve Simitli İdeal

Bu kısımda, $X = \mathbb{T}_A$ projektif simitinin tanımladığı parametrik kodun sıfırlayan idealini, I_A simitli idealinden elde eden bir yöntemi ele alacağız. İspatları biraz sadeleştirsek bile temelde [1] makalesini takip edeceğiz.

Tanım 3.3.1. Bir $Q \subset S$ ideali ve bir $h \in S$ polinomu için Q'nun h'ye göre doygun ideali $(Q : h^\infty) := \{f \in S \mid fh^m \in Q$, olacak $m \geq 1$ vardır$\}$ şeklinde tanımlanır. Biz aşağıda sadece $h = t_1 \cdots t_s$ monomuna göre doygun ideal ile ilgileneceğiz.

Her i için $t_i^{q-1} - t_1^{q-1}$ binomu $(K^*)^s$ üzerinde sıfırlanır. Çünkü $(K^*, .)$, mertebesi $q-1$ olan bir gruptur. Bu yüzden, her i için $t_i^{q-1} - t_1^{q-1}$, $I(X)$'e ait olur. A homojense I_A homojen idealinin üreteçi olan $t^a - t^b$ binomları X üzerinde sıfırlandığından $I(X)$, $Q = I_A + (\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s)$ binom idealini içerir. Aşağıda hangi durumda $I(X)$'in, Q'nun $h = t_1 \cdots t_s$ monomuna göre doygun ideali olduğunu ifade eden bir sonuç vereceğiz.

Verilen bir $\lambda \subset \mathbb{Z}^n$ altkümesi için $\mathbb{Z}^n$'nin λ tarafından üretilen alt grubu $\mathbb{Z}\lambda$ şeklinde gösterilir.

Lemma 3.3.2. *[1, Lemma 2.3] Eğer $c = (c_i) \in \mathbb{Z}^s$ için $\Sigma_i c_i = 0$ ve e_i'ler $\mathbb{Z}^s$'in i. birim vektörleri ise $c \in \mathbb{Z}\{e_2 - e_1, \ldots, e_s - e_1\}$'dir.*

Kanıt. $\mathbb{Z}\{e_2 - e_1, \ldots, e_s - e_1\} + \mathbb{Z}e_1 = \mathbb{Z}^s$'tir. Öyleyse bazı $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ için $c = \lambda_1 e_1 + \Sigma_{i=2}^s \lambda_i(e_i - e_1)$'dir. $\Sigma_i c_i = 0$ ise $\lambda_1 = \Sigma_i c_i = 0$ elde ederiz. $\square$

Teorem 3.3.3. *[1, Teorem 2.5] Eğer A homojense,*

$$(I_A + (t_2^{q-1} - t_1^{q-1}, \ldots, t_s^{q-1} - t_1^{q-1}) : (t_1 \cdots t_s)^\infty) \subset I(X) \tag{3.1}$$

içermesi sağlanır. Yukarıdaki (3.1) kapsamasında eşitlik ancak ve ancak

$$L = \mathbb{Z}\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_1\}_{i=2}^s \quad \textit{için} \quad \phi : \mathbb{Z}^n/L \to \mathbb{Z}^n/L \;;\; \phi(\overline{b}) = (q-1)\overline{b}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bire-bir olduğu zaman sağlanır.

Kanıt. $Q = I_A + (t_2^{q-1} - t_1^{q-1}, ..., t_s^{q-1} - t_1^{q-1})$ alalım. $Q \subset I(X)$ olduğunu yukarıdan biliyoruz. Teorem 3.2.3'den her bir t_i değiskeninin $S/I(X)$'in bir sıfır böleni olmadığını biliyoruz. Yani $(Q : (t_1 \cdots t_s)^\infty) \subset I(X)$'tir.

Teoremin ikinci kısmındaki eşitlikle ilgili iddiayı ispatlamak için (3.1)'in sol tarafının bir kafes ideal olduğunu kullanacağız. A'nın Sıfır Uzayı'nın $\mathbb{Z}^s$ kafesiyle kesişimi $ker_{\mathbb{Z}}(A) = \{x \in \mathbb{Z}^s \mid Ax = 0\}$ olmak üzere

$$\mathcal{L} = ker_{\mathbb{Z}}(A) + \mathbb{Z}\{(q-1)(e_i - e_1)\}_{i=2}^s \subset \mathbb{Z}^s$$

kafesinin tanımladığı ideal için [21, Sonuç 2.5] veya [22, Lemma 7.6]'den dolayı $I_{\mathcal{L}} = (Q : (t_1...t_s)^\infty))$'dir.

Bu durumda ispatlamamız gereken $I(X) = I_{\mathcal{L}} \iff \phi, \quad 1-1$'dir, olur.

$\Rightarrow$ Farzedelim ki (3.1)'deki eşitlik sağlansın yani $I(X) = I_{\mathcal{L}}$ olsun. Şimdi, $\overline{b} = (\overline{b_i}) \in \mathbb{Z}^n/L$, için $\phi(\overline{b}) = 0$ ise $(q-1)b \in L$'dir. L'nin tanımından,

$$(q-1)b = \sum_{i=1}^s a_i \mathbf{v}_i = Aa \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^s a_i = 0 \tag{3.2}$$

olacak $a = (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$ vardır. Bu vektörü, $a = a^+ - a^-$ şeklinde yazıp $f = t^{a^+} - t^{a^-}$ homojen binomunu düşünelim. Herhangi bir $P = (x^{\mathbf{v}_1}, \dots, x^{\mathbf{v}_s}) \in X$ alalım. Her $x_i \in K^*$ için $x_i^{q-1} \equiv 1 \bmod q$ olduğundan (3.2)'den dolayı $t^a(P) = x^{Aa} = 1$ olur. Yani f, X üzerinde sıfırlanır ve $f \in I(X) = I_{\mathcal{L}}$ olur. Dolayısıyla, $a \in \mathcal{L}$ olur. Öyleyse $k \in ker(A)$ ve $c \in \mathbb{Z}\{(q-1)(e_i - e_1)\}_2^s$ olmak üzere $a = k + c$ yazabiliriz. Şu halde $c = (q-1)c'$, olacak $c' \in \mathbb{Z}\{(e_i - e_1)\}_2^s$ vardır. Yine (3.2)'den, $(q-1)b = Aa = Ak + Ac = Ac = (q-1)Ac'$ elde edilir. Demek ki $b = Ac'$ olur. $\sum_{i=1}^s c'_i = 0$ olduğundan $b \in L$'dir. Böylece $\overline{b} = 0$ ve ϕ'nin bire-bir olduğu elde edilir.

$\Leftarrow$ Farzedelim ki ϕ bire-bir olsun. $I(X) = I_{\mathcal{L}}$ olduğunu görmek için $I_{\mathcal{L}} \supset I(X)$

olduğunu ispatlayacağız. Teorem 3.2.3 (a)'dan $I(X)$'in binomlar tarafından üretilen bir ideal olduğunu biliyoruz. Bu yüzden, $f = t^a - t^b \in I(X)$, binomları için $f \in I_{\mathcal{L}}$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bunun için ise sadece $c := a - b \in \mathcal{L}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi, $f = t^a - t^b \in I(X)$ olduğundan her $P = (x^{\mathbf{v}_1}, \ldots, x^{\mathbf{v}_s}) \in X$ noktasında sıfırlanır, yani $t^a(P) = t^b(P)$ veya $x^{A(a-b)} = t^{a-b}(P) = 1$ olur. $\delta := Ac$ dersek $x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} = x^{\delta} = x^{Ac} = 1$ olur. β elemanı $(K^*, .)$ devirli gurubunun bir üreteci iken her seferinde bir $j = 1, \ldots, n$ için $x_j = \beta$ alıp diğerlerini 1 alırsak $\beta^{\delta_j} = x_j^{\delta_j} = 1$ elde ederiz. β'nın mertebesi $q-1$ olduğu için her bir $j = 1, \ldots, n$ için δ_j, $q-1$'in bir katıdır. Sonuç olarak $\delta = (q-1)\gamma$ olacak $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ bulabiliriz. Öte yandan $\delta = Ac \in L$'dir, çünkü $t^a - t^b$ homojen olduğundan $\sum_{i=1}^{s} c_i = 0$'dır. $(q-1)\gamma = \delta \in L$ ve ϕ bire-bir olduğu için $\gamma \in L$ elde ederiz. Böylece $\gamma = d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_s\mathbf{v}_s$ ve $d_1 + \cdots + d_s = 0$ olacak $d_i \in \mathbb{Z}$ vardır. Şu halde $k := c - (q-1)d \in ker_{\mathbb{Z}}A$ olur, çünkü $Ak = Ac - (q-1)Ad = \delta - (q-1)\gamma = 0$'dır. Ayrıca, $\sum_{i=1}^{s} k_i = \sum_{i=1}^{s} c_i - (q-1)\sum_{i=1}^{s} d_i = 0$'dır. Lemma 3.3.2'den c ile k; $(q-1)d = c - k$ olduğundan $(q-1)d$ elemanı $\mathbb{Z}\{e_i - e_1\}_{i=2}^{s}$ grubuna aittir. Dolayısıyla, $(q-1)d = (-\sum_{i=2}^{s} z_i, z_2, \ldots, z_s)$ olacak $z_2, \ldots, z_s \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu eşitlikten, $q-1$'in $z_2, \ldots, z_s$ elemanlarını böldüğünü görürüz. Dolayısıyla, $d \in \mathbb{Z}\{e_i - e_1\}_{i=2}^{s}$ olur. Sonuç olarak, istenildiği gibi $c = k + (q-1)d \in \mathcal{L}$ elde edilir. □

Sonuç 3.3.4. $A = \begin{bmatrix} 0 & m_1 & \cdots & m_{s-1} & m_s \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tanımladığı projektif simitin sıfırlayan ideali*

$$I(\mathbb{T}_A) = (I_A + (t_2^{q-1} - t_1^{q-1}, ..., t_s^{q-1} - t_1^{q-1}) : (t_1 \cdots t_s)^{\infty})$$

şeklinde I_A simitli idealinden elde edilir.

Kanıt: Bu durumda $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_1 = (m_i, 0)$ olur ki $obeb(m_1, \ldots, m_s) = 1$ olduğundan $L = \mathbb{Z}\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_1\}_{i=2}^{s} = \mathbb{Z} \oplus 0$ elde edilir. Bu ise ϕ dönüşümünün $1-1$ olması demektir, çünkü $(q-1)$ katı L grubunda bulunan bir elemanın kendisi de L'de bulunacağından $ker(\phi) = \{\bar{0}\}$ olur. □

Örnek 3.3.5.

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ise $X = \mathbb{T}_{A'} = \mathbb{T}_A$'nın $I(X)$ sıfırlayan ideali bu yöntemle aşağıdaki komutlarla $I_{A'}$ simitli idealinden bulunabilir:

```
i1 : A={0,1,2,3};q=13;K=ZZ/q; S = K[t_1..t_(#A)]; U = K[x_1,x_2];

i6 : M=matrix{{x_1^(A_0)*x_2,x_1^(A_1)*x_2,x_1^(A_2)*x_2,x_1^(A_3)*x_2}};

i7 : H = map(U,S,M);

i8 : IA'=ker H

             2                       2
o8 = ideal (t  - t t , t t  - t t , t  - t t )
             3    2 4   2 3    1 4   2    1 3

i9 : IT=ideal(apply(#A-1, i -> S_(i+1)^(q-1)-S_(0)^(q-1)))

               12    12      12    12      12    12
o9 = ideal (- t   + t   , - t   + t   , - t   + t   )
               1     2       1     3       1     4

i10 : IX=saturate(IA'+IT,t_1*t_(2)*t_3*t_4)

              2                       2          4    4
o10 = ideal (t  - t t , t t  - t t , t  - t t , t  - t )
              3    2 4   2 3    1 4   2    1 3   1    4
```

Bu idealin Örnek 3.2.4'de bulunan ideale eşit çıkması sürpriz değildir.

4 SİMİTLİ ÇEŞİTLEMLERİN GENİŞLEMELERİ

Genişlemeler, afin tek terimli eğriler için ilk kez [14] makalesinde tanımlanmıştır. Projektif tek terimli eğriler için bir tanım ilk kez [15] çalışmasında verilmiştir. Son olarak bu tanım [16] makalesinde bütün simitli çeşitlemlere genellenmiştir. $A = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$ matrisi, sütünları $\mathbf{v}_i = (v_{1i}, ..., v_{ri}) \in \mathbb{N}^r$ vektörleri olan $r \times n$ bir matris olsun. Bu durumda V_A afin simitli çeşitlemi $\mathbb{A}^n$ afin uzayında yatar.

Negatif olmayan $s_1, ..., s_n$ tam sayıları için $\mathbf{v} = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n$ vektörünü ve bu vektörün en az bir bileşeniyle arasında asal bir pozitif l sayısını düşünelim. Bu şartlar altında elde edilen $E = [l\mathbf{v}_1 \ \cdots \ l\mathbf{v}_n \ \mathbf{v}]$ matrisine A'nın bir genişlemesi denir.

4.1 Afin Genişlemeler

Bu kısımda E, A'nın bir genişlemesiyken karşılık gelen simitli ideallerin ilişkisi incelenecektir.

Tanım 4.1.1. E, A'nın bir genişlemesiyken karşılık gelen $V_E \subset \mathbb{A}^{n+1}$ afin simitli çeşitlemine de V_A'nın bir **genişlemesi** denir. Benzer şekilde P_E ve T_E de P_A ve T_A kümelerinin genişlemeleri olarak adlandırılırlar.

Bir matrisin simitli idealiyle genişlemelerinin simitli ideallerinin ilişkisi şu şekildedir:

Önerme 4.1.2. *[16, Önerme 2.4]* $I_E = I_A + \langle t_{n+1}^l - t_1^{s_1} \cdots t_n^{s_n} \rangle$*'dir.*

Not: Her ne kadar [15] ve [16] makalelerinde geometrik sebeplerle K cismi cebirsel kapalı kabul edilse bile simitli idealler cisimden bağımsız olduğu için onlar hakkındaki hükümler genel olacaktır.

Örnek 4.1.3. $A = [0 \ 3 \ 4 \ 5]$ ve $E = [0 \ 6 \ 8 \ 10 \ 31]$ olsun.

```
i1 : K=ZZ/101; A={3,4,5}; S = K[t_1..t_(#A)]; U = K[x_1];

i5 : M=matrix{{x_1^(A_0),x_1^(A_1),x_1^(A_2)}};

i6 : H = map(U,S,M); IA=ker H
```

```
             2          2      2   3
o7 = ideal (t  - t t , t t  - t , t  - t t )
             2    1 3   1 2    3   1    2 3


i8 : E={6,8,10,31}; S = K[t_1..t_(#E)]; U = K[x_1];


i11 : M=matrix{{x_1^(E_0),x_1^(E_1),x_1^(E_2),x_1^(E_3)}};


i12 : H = map(U,S,M); IE=ker H


              2        2     2  3        7     2    6     2   2 5  2
o13 = ideal (t  -t t ,t t - t ,t - t t ,t - t t ,t t - t t , t t -t )
              2   1 3  1 2   3  1   2 3  3   2 4  2 3   1 4   1 3  4
```

I_E'nin elde edilen bu 6 üretecinin ikisi diğer 4 binom tarafından üretileceği için $I_E = I_A + (t_1^2 t_3^5 - t_4^2)$ olduğu görülür.

4.2 Projektif Genişlemeler

Projektif bir simitli çeşitlemin tanımı ilk kez tek terimli eğriler için [15] makalesinde yapıldıktan sonra [16] makalesinde yüksek boyutlara genellenmiştir.

Tanım 4.2.1. E, A'nın bir genişlemesi ve E' ile A' bu matrislere 1'lerden oluşan bir satır eklenerek elde edilen matrisler olsun. Karşılık gelen $\mathbb{V}_{E'} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ projektif simitli çeşitlemine de $\mathbb{V}_{A'} \subset \mathbb{P}^n$'nün bir **genişlemesi** denir. Benzer şekilde $\mathbb{P}_E = \mathbb{P}_{E'}$ ve $\mathbb{T}_E = \mathbb{T}_{E'}$ de $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}_{A'}$ ve $\mathbb{T}_A = \mathbb{T}_{A'}$ kümelerinin genişlemeleri olarak adlandırılırlar.

$\mathbf{v} = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n$ ifadesine $\mathbf{v}$'nin çarpanlara ayrılışı da denmektedir ve tek türlü değildir. Bu yüzden $\delta(\mathbf{v})$, $\mathbf{v}$'nin farklı çarpanlara ayrılışında ortaya çıkan $s_1 + \cdots + s_n$ toplamlarının en küçüğü olarak tanımlanır.

Önerme 4.2.2. *[16, Önerme 2.7] Eğer $l \geq \delta(\mathbf{v})$ ise*

$$I_{E'} = I_{A'} + \langle t_{n+2}^l - t_1^{l-\delta(\mathbf{v})} t_2^{s_1} \cdots t_{n+1}^{s_n} \rangle \quad \textit{olur.}$$

Örnek 4.2.3. $A = [0\ \ 3\ \ 4\ \ 5]$ iken $m = 31$'in farklı çarpanlara ayrılışları:

$$1 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 0 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5$$

şeklindedir ve $\delta(31) = 7$ olur. Homojen simitli $I_{A'}$ idealinin üreteçleri şu şekilde bulunur:

```
i1 : K=ZZ/101;  A={0,3,4,5}; S = K[t_1..t_(#A)]; U = K[x_1,x_2];

i5 : M=matrix{{x_1^(A_0)*x_2,x_1^(A_1)*x_2,x_1^(A_2)*x_2,x_1^(A_3)*x_2}};

i6 : H = map(U,S,M); IA=ker H
             2          2        2   3
o7 = ideal (t  - t t , t t  - t t , t  - t t t )
             3    2 4   2 3    1 4   2    1 3 4
```

Şimdi $l = 2 < 7 = \delta(31)$'ye karşılık gelen $E = [0\ \ 6\ \ 8\ \ 10\ \ 31]$ genişleme matrisini düşünelim. Bu genişlemenin homojen simitli $I_{E'}$ ideali

```
            7    4   2     6    4   2   2 5    5 2
J = ideal (t  - t t t , t t  - t t t , t t  - t t  )
            4    1 3 5   3 4    1 2 5   2 4    1 5
```

olmak üzere $I_{E'} = I_{A'} + J$ şeklinde elde edilir.

Öte yandan $l = 8 > 7 = \delta(31)$'ye karşılık gelen $E = [0\ \ 24\ \ 32\ \ 40\ \ 31]$ matrisinin homojen simitli $I_{E'}$ ideali

```
               2 5    8   2 7      8   2   6      8
J = ideal ( t t t  - t , t t  - t t , t t t  - t t  )
             1 2 4    5   1 4    3 5   1 3 4    2 5
```

olmak üzere $I_{E'} = I_{A'} + J = I_{A'} + (t_1 t_2^2 t_4^5 - t_5^8)$ şeklinde elde edilir.

5 ÖRNEKLER

Bu son bölümde $A = [0\, m_1 \cdots m_n]$ matrisi ve $E = [0\, lm_1 \cdots lm_n\, m]$ matrisine karşılık gelen $\mathbb{T}_A = C^*(m_1, \ldots, m_n) \subset \mathbb{P}^n$ ve $\mathbb{T}_E = C^*(lm_1, \ldots, lm_n, m) \subset \mathbb{P}^{n+1}$ projektif simitlerinin sıfırlayan idealleri arasındaki ilişkiyi bulmak için çalıştığımız bazı örnekleri sergileyeceğiz. Burada E matrisinde geçen l ve m üzerindeki şartlar şunlar olacaktır: $s_1, \ldots, s_n$'ler negatif olmayan tam sayılar ve $m = s_1 m_1 + \cdots + s_n m_n > 0$'dir. l ise m ile arasında asal herhangi bir pozitif tamsayıdır.

5.1 Sanı

Macaulay 2 programında yapılan bir çok örnekten sıfırlayan idealler arasındaki farkın 2 binom olduğu durumlarda $lm_n \mid q-1$ olduğunu görürüz. Bu bizi aşağıdaki tahmine götürür:

İddia 5.1.1. *$B_1 = t_{n+1}^{l} - t_1^{l-s_1-\cdots-s_n} t_2^{s_2} \cdots t_n^{s_n}$ ve $B_2 = t_{n+1}^{\frac{q-1}{lm_n}} - t_1^{\frac{q-1}{lm_n}}$ iki binom olmak üzere, $lm_n \mid q-1$ ve $l > \delta(m)$ ise;*

$$I(C^*(lm_1, ..., lm_n, m)) = I(C^*(m_1, ..., m_n)) + (B_1, B_2)$$

şeklindedir.

Bu İddia'nın doğruluğunu araştırmak için bir çok örnek yapmamıza rağmen hepsini sergilemek mümkün olmadığı için sadece örnekleri hesaplamak için kullandığımız Macaulay 2 komutlarını ve onları kullanarak yaptığımız birer örnek hesaplamayı paylaşacağız.

Örnek 5.1.2. İlk olarak $C^*(5,7)$ simitinin genişlemelerinin İddia 5.1.1'i sağladığını görelim. Bunu kontrol etmek için Macaulay 2 programında kullanacağımız bir döngü yazarız. Aşağıda vereceğimiz komutları kopyalayıp Macaulay 2 programında yapıştırarak kullanabiliriz:

```
time for q in {101,103,107,109,113,233,241,251,337,911}
     do (
    K=ZZ/q; a=3; b=5;
    A={0,a,b};
    S = K[y_1,t_1..t_(#A),z];
    I = ideal(apply(#A, i -> S_(i+1) - y_1^(A_i)*z))
    +ideal(apply(#{A_0}, i -> y_(i+1)^(q-1)-1));
    ITA=eliminate(I,{y_1,z});
        for u from 0 to 10
        do (
           for v from 0 to 10
              do (
             m=a*u+b*v;
             for l from 1 to 10
             do (
if (q-1)%(b*l)==0 and gcd(l,m)==1 and l>(u+v) and (u+v)>0 then
            for i from 1 to 1
            do (
            AExt={0,a*l,b*l,m};
                 R = K[y_1,t_1..t_(#AExt),z];
                 J = ideal(apply(#AExt, i -> R_(i+1) - y_1^(AExt_i)*z))
                    +ideal(apply(#{AExt_0}, i -> y_(i+1)^(q-1)-1));
          IAExt=eliminate(J,{y_1,z});
     B1=(R_1)^((q-1)//(l*b))-(R_3)^((q-1)//(l*b));
       B2=(R_1)^(l-u-v)*(R_2)^u*(R_3)^v-(R_4)^l;
          IAExtconj=substitute(ITA,R)+ideal(B1,substitute (B2,R));
     print (q,[a*l,b*l,m],(l,u,v),IAExtconj==IAExt)
    );
   );
  );
 );
);
```

Bu döngü sonucunda çıktı olarak

$$(q, [a * l, b * l, m], (l, u, v), IAExtconj == IAExt)$$

bilgilerinin bulunduğu satırlar elde edilir. Örneğin;

$$(113, [20, 28, 7], (4, 0, 1), true)$$

satırı, en sonda **true** çıktığı için İddia'nın $q = 113$ ve $C^*(20, 28, 7)$ genişlemesi için sağlandığı anlamına gelir.

```
(113, [20, 28, 7], (4, 0, 1), true)
(113, [40, 56, 7], (8, 0, 1), true)
(113, [20, 28, 21], (4, 0, 3), true)
(113, [40, 56, 21], (8, 0, 3), true)
(113, [40, 56, 35], (8, 0, 5), true)
(113, [40, 56, 49], (8, 0, 7), true)
(113, [10, 14, 5], (2, 1, 0), true)
(113, [20, 28, 5], (4, 1, 0), true)
(113, [40, 56, 5], (8, 1, 0), true)
(113, [20, 28, 19], (4, 1, 2), true)
(113, [40, 56, 19], (8, 1, 2), true)
(113, [40, 56, 33], (8, 1, 4), true)
(113, [40, 56, 47], (8, 1, 6), true)
(113, [20, 28, 17], (4, 2, 1), true)
(113, [40, 56, 17], (8, 2, 1), true)
(113, [40, 56, 31], (8, 2, 3), true)
(113, [40, 56, 45], (8, 2, 5), true)
(113, [20, 28, 15], (4, 3, 0), true)
(113, [40, 56, 15], (8, 3, 0), true)
(113, [40, 56, 29], (8, 3, 2), true)
(113, [40, 56, 43], (8, 3, 4), true)
(113, [40, 56, 27], (8, 4, 1), true)
(113, [40, 56, 41], (8, 4, 3), true)
```

```
(113, [40, 56, 25], (8, 5, 0), true)
(113, [40, 56, 39], (8, 5, 2), true)
(113, [40, 56, 37], (8, 6, 1), true)
(113, [40, 56, 35], (8, 7, 0), true)
(337, [10, 14, 7], (2, 0, 1), true)
(337, [15, 21, 7], (3, 0, 1), true)
(337, [20, 28, 7], (4, 0, 1), true)
(337, [30, 42, 7], (6, 0, 1), true)
(337, [40, 56, 7], (8, 0, 1), true)
(337, [15, 21, 14], (3, 0, 2), true)
(337, [20, 28, 21], (4, 0, 3), true)
(337, [40, 56, 21], (8, 0, 3), true)
(337, [30, 42, 35], (6, 0, 5), true)
(337, [40, 56, 35], (8, 0, 5), true)
(337, [40, 56, 49], (8, 0, 7), true)
(337, [10, 14, 5], (2, 1, 0), true)
(337, [15, 21, 5], (3, 1, 0), true)
(337, [20, 28, 5], (4, 1, 0), true)
(337, [30, 42, 5], (6, 1, 0), true)
(337, [40, 56, 5], (8, 1, 0), true)
(337, [20, 28, 19], (4, 1, 2), true)
(337, [30, 42, 19], (6, 1, 2), true)
(337, [40, 56, 19], (8, 1, 2), true)
(337, [40, 56, 33], (8, 1, 4), true)
(337, [40, 56, 47], (8, 1, 6), true)
(337, [15, 21, 10], (3, 2, 0), true)
(337, [20, 28, 17], (4, 2, 1), true)
(337, [30, 42, 17], (6, 2, 1), true)
(337, [40, 56, 17], (8, 2, 1), true)
(337, [30, 42, 31], (6, 2, 3), true)
(337, [40, 56, 31], (8, 2, 3), true)
(337, [40, 56, 45], (8, 2, 5), true)
```

```
(337, [20, 28, 15], (4, 3, 0), true)
(337, [40, 56, 15], (8, 3, 0), true)
(337, [30, 42, 29], (6, 3, 2), true)
(337, [40, 56, 29], (8, 3, 2), true)
(337, [40, 56, 43], (8, 3, 4), true)
(337, [40, 56, 27], (8, 4, 1), true)
(337, [40, 56, 41], (8, 4, 3), true)
(337, [30, 42, 25], (6, 5, 0), true)
(337, [40, 56, 25], (8, 5, 0), true)
(337, [40, 56, 39], (8, 5, 2), true)
(337, [40, 56, 37], (8, 6, 1), true)
(337, [40, 56, 35], (8, 7, 0), true)
(911, [10, 14, 7], (2, 0, 1), true)
(911, [25, 35, 7], (5, 0, 1), true)
(911, [50, 70, 7], (10, 0, 1), true)
(911, [25, 35, 14], (5, 0, 2), true)
(911, [25, 35, 21], (5, 0, 3), true)
(911, [50, 70, 21], (10, 0, 3), true)
(911, [25, 35, 28], (5, 0, 4), true)
(911, [50, 70, 49], (10, 0, 7), true)
(911, [50, 70, 63], (10, 0, 9), true)
(911, [10, 14, 5], (2, 1, 0), true)
(911, [25, 35, 12], (5, 1, 1), true)
(911, [25, 35, 19], (5, 1, 2), true)
(911, [50, 70, 19], (10, 1, 2), true)
(911, [25, 35, 26], (5, 1, 3), true)
(911, [50, 70, 33], (10, 1, 4), true)
(911, [50, 70, 47], (10, 1, 6), true)
(911, [50, 70, 61], (10, 1, 8), true)
(911, [25, 35, 17], (5, 2, 1), true)
(911, [50, 70, 17], (10, 2, 1), true)
(911, [25, 35, 24], (5, 2, 2), true)
```

```
(911, [50, 70, 31], (10, 2, 3), true)
(911, [50, 70, 59], (10, 2, 7), true)
(911, [25, 35, 22], (5, 3, 1), true)
(911, [50, 70, 29], (10, 3, 2), true)
(911, [50, 70, 43], (10, 3, 4), true)
(911, [50, 70, 57], (10, 3, 6), true)
(911, [50, 70, 27], (10, 4, 1), true)
(911, [50, 70, 41], (10, 4, 3), true)
(911, [50, 70, 39], (10, 5, 2), true)
(911, [50, 70, 53], (10, 5, 4), true)
(911, [50, 70, 37], (10, 6, 1), true)
(911, [50, 70, 51], (10, 6, 3), true)
(911, [50, 70, 49], (10, 7, 2), true)
(911, [50, 70, 47], (10, 8, 1), true)
-- used 0.831359 seconds
```

Örnek 5.1.3. i1 : for q in {101,103,107,109,113,233,241,251,337,911}

```
 do (
    K=ZZ/q; a=3; b=4; c=5; A={0,a,b,c}; S = K[y_1,t_1..t_(#A),z];
   I = ideal(apply(#A, i -> S_(i+1) - y_1^(A_i)*z))
      +ideal(apply(#{A_0}, i -> y_(i+1)^(q-1)-1));
 ITA=eliminate(I,{y_1,z});
 for u from 0 to 10
 do (
   for v from 0 to 10
   do
     (
  for w from 0 to 10
      do (
    m=a*u+b*v+c*w;
    for l from 1 to 10
    do (
if (q-1)%(c*l)==0 and gcd(l,m)==1 and l>(u+v+w) and (u+v+w)>0 then
for i from 1 to 1 do (
     AExt={0,a*l,b*l,c*l,m}; R = K[y_1,t_1..t_(#AExt),z];
          J = ideal(apply(#AExt, i -> R_(i+1) - y_1^(AExt_i)*z))
          +ideal(apply(#{AExt_0}, i -> y_(i+1)^(q-1)-1));
          IAExt=eliminate(J,{y_1,z});
     B1=(R_1)^((q-1)//(l*c))-(R_4)^((q-1)//(l*c));
       B2=(R_1)^(l-u-v-w)*(R_2)^u*(R_3)^v*(R_4)^w-(R_5)^l;
          IAExtconj=substitute(ITA,R)+ideal(B1,substitute (B2,R));
     print (q,[a*l,b*l,c*l,m],(l,u,v,w),IAExtconj==IAExt)
         );
       );
      );
    );
  );
);
```

döngüsünü çalıştırınca $C^*(3,4,5)$ eğrisinin aşağıdaki genişlemeler için İddia 5.1.1'in sağlandığını görürüz.

```
(101, [12, 16, 20, 5], (4, 0, 0, 1), true)
(101, [12, 16, 20, 15], (4, 0, 0, 3), true)
(101, [15, 20, 25, 4], (5, 0, 1, 0), true)
(101, [12, 16, 20, 9], (4, 0, 1, 1), true)
(101, [15, 20, 25, 9], (5, 0, 1, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 9], (10, 0, 1, 1), true)
(101, [15, 20, 25, 14], (5, 0, 1, 2), true)
(101, [15, 20, 25, 19], (5, 0, 1, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 19], (10, 0, 1, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 0, 1, 5), true)
(101, [30, 40, 50, 39], (10, 0, 1, 7), true)
(101, [15, 20, 25, 8], (5, 0, 2, 0), true)
(101, [12, 16, 20, 13], (4, 0, 2, 1), true)
(101, [15, 20, 25, 13], (5, 0, 2, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 13], (10, 0, 2, 1), true)
(101, [15, 20, 25, 18], (5, 0, 2, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 23], (10, 0, 2, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 0, 2, 5), true)
(101, [30, 40, 50, 43], (10, 0, 2, 7), true)
(101, [15, 20, 25, 12], (5, 0, 3, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 17], (5, 0, 3, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 17], (10, 0, 3, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 0, 3, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 37], (10, 0, 3, 5), true)
(101, [15, 20, 25, 16], (5, 0, 4, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 21], (10, 0, 4, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 0, 4, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 41], (10, 0, 4, 5), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 0, 6, 1), true)
```

```
(101, [30, 40, 50, 39], (10, 0, 6, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 0, 7, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 37], (10, 0, 8, 1), true)
(101, [6, 8, 10, 3], (2, 1, 0, 0), true)
(101, [12, 16, 20, 3], (4, 1, 0, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 3], (5, 1, 0, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 3], (10, 1, 0, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 8], (5, 1, 0, 1), true)
(101, [12, 16, 20, 13], (4, 1, 0, 2), true)
(101, [15, 20, 25, 13], (5, 1, 0, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 13], (10, 1, 0, 2), true)
(101, [15, 20, 25, 18], (5, 1, 0, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 23], (10, 1, 0, 4), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 1, 0, 6), true)
(101, [30, 40, 50, 43], (10, 1, 0, 8), true)
(101, [12, 16, 20, 7], (4, 1, 1, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 7], (5, 1, 1, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 7], (10, 1, 1, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 12], (5, 1, 1, 1), true)
(101, [15, 20, 25, 17], (5, 1, 1, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 17], (10, 1, 1, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 1, 1, 4), true)
(101, [30, 40, 50, 37], (10, 1, 1, 6), true)
(101, [12, 16, 20, 11], (4, 1, 2, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 11], (5, 1, 2, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 11], (10, 1, 2, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 16], (5, 1, 2, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 21], (10, 1, 2, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 1, 2, 4), true)
(101, [30, 40, 50, 41], (10, 1, 2, 6), true)
(101, [30, 40, 50, 19], (10, 1, 4, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 1, 4, 2), true)
```

```
(101, [30, 40, 50, 39], (10, 1, 4, 4), true)
(101, [30, 40, 50, 23], (10, 1, 5, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 1, 5, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 1, 6, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 37], (10, 1, 6, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 1, 7, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 6], (5, 2, 0, 0), true)
(101, [12, 16, 20, 11], (4, 2, 0, 1), true)
(101, [15, 20, 25, 11], (5, 2, 0, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 11], (10, 2, 0, 1), true)
(101, [15, 20, 25, 16], (5, 2, 0, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 21], (10, 2, 0, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 2, 0, 5), true)
(101, [30, 40, 50, 41], (10, 2, 0, 7), true)
(101, [15, 20, 25, 14], (5, 2, 2, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 19], (10, 2, 2, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 2, 2, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 39], (10, 2, 2, 5), true)
(101, [30, 40, 50, 23], (10, 2, 3, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 2, 3, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 2, 4, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 37], (10, 2, 4, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 2, 5, 1), true)
(101, [12, 16, 20, 9], (4, 3, 0, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 9], (5, 3, 0, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 9], (10, 3, 0, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 14], (5, 3, 0, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 19], (10, 3, 0, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 3, 0, 4), true)
(101, [30, 40, 50, 39], (10, 3, 0, 6), true)
(101, [15, 20, 25, 13], (5, 3, 1, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 13], (10, 3, 1, 0), true)
```

```
(101, [30, 40, 50, 23], (10, 3, 1, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 3, 1, 4), true)
(101, [30, 40, 50, 17], (10, 3, 2, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 3, 2, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 37], (10, 3, 2, 4), true)
(101, [30, 40, 50, 21], (10, 3, 3, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 3, 3, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 3, 5, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 3, 6, 0), true)
(101, [15, 20, 25, 12], (5, 4, 0, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 17], (10, 4, 0, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 4, 0, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 37], (10, 4, 0, 5), true)
(101, [30, 40, 50, 21], (10, 4, 1, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 4, 1, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 4, 3, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 4, 4, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 19], (10, 5, 1, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 5, 1, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 23], (10, 5, 2, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 5, 2, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 5, 3, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 5, 4, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 23], (10, 6, 0, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 33], (10, 6, 0, 3), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 6, 1, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 6, 2, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 21], (10, 7, 0, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 31], (10, 7, 0, 2), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 7, 2, 0), true)
(101, [30, 40, 50, 29], (10, 8, 0, 1), true)
(101, [30, 40, 50, 27], (10, 9, 0, 0), true)
```

```
(241, [6, 8, 10, 5], (2, 0, 0, 1), true)
(241, [9, 12, 15, 5], (3, 0, 0, 1), true)
(241, [12, 16, 20, 5], (4, 0, 0, 1), true)
(241, [18, 24, 30, 5], (6, 0, 0, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 5], (8, 0, 0, 1), true)
(241, [9, 12, 15, 10], (3, 0, 0, 2), true)
(241, [12, 16, 20, 15], (4, 0, 0, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 15], (8, 0, 0, 3), true)
(241, [18, 24, 30, 25], (6, 0, 0, 5), true)
(241, [24, 32, 40, 25], (8, 0, 0, 5), true)
(241, [24, 32, 40, 35], (8, 0, 0, 7), true)
(241, [9, 12, 15, 4], (3, 0, 1, 0), true)
(241, [12, 16, 20, 9], (4, 0, 1, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 9], (8, 0, 1, 1), true)
(241, [18, 24, 30, 19], (6, 0, 1, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 19], (8, 0, 1, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 29], (8, 0, 1, 5), true)
(241, [9, 12, 15, 8], (3, 0, 2, 0), true)
(241, [12, 16, 20, 13], (4, 0, 2, 1), true)
(241, [18, 24, 30, 13], (6, 0, 2, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 13], (8, 0, 2, 1), true)
(241, [18, 24, 30, 23], (6, 0, 2, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 23], (8, 0, 2, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 33], (8, 0, 2, 5), true)
(241, [18, 24, 30, 17], (6, 0, 3, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 17], (8, 0, 3, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 27], (8, 0, 3, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 21], (8, 0, 4, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 31], (8, 0, 4, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 25], (8, 0, 5, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 29], (8, 0, 6, 1), true)
(241, [6, 8, 10, 3], (2, 1, 0, 0), true)
```

```
(241, [12, 16, 20, 3], (4, 1, 0, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 3], (8, 1, 0, 0), true)
(241, [9, 12, 15, 8], (3, 1, 0, 1), true)
(241, [12, 16, 20, 13], (4, 1, 0, 2), true)
(241, [18, 24, 30, 13], (6, 1, 0, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 13], (8, 1, 0, 2), true)
(241, [18, 24, 30, 23], (6, 1, 0, 4), true)
(241, [24, 32, 40, 23], (8, 1, 0, 4), true)
(241, [24, 32, 40, 33], (8, 1, 0, 6), true)
(241, [9, 12, 15, 7], (3, 1, 1, 0), true)
(241, [12, 16, 20, 7], (4, 1, 1, 0), true)
(241, [18, 24, 30, 7], (6, 1, 1, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 7], (8, 1, 1, 0), true)
(241, [18, 24, 30, 17], (6, 1, 1, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 17], (8, 1, 1, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 27], (8, 1, 1, 4), true)
(241, [12, 16, 20, 11], (4, 1, 2, 0), true)
(241, [18, 24, 30, 11], (6, 1, 2, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 11], (8, 1, 2, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 21], (8, 1, 2, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 31], (8, 1, 2, 4), true)
(241, [24, 32, 40, 15], (8, 1, 3, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 25], (8, 1, 3, 2), true)
(241, [18, 24, 30, 19], (6, 1, 4, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 19], (8, 1, 4, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 29], (8, 1, 4, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 23], (8, 1, 5, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 27], (8, 1, 6, 0), true)
(241, [12, 16, 20, 11], (4, 2, 0, 1), true)
(241, [18, 24, 30, 11], (6, 2, 0, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 11], (8, 2, 0, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 21], (8, 2, 0, 3), true)
```

```
(241, [24, 32, 40, 31], (8, 2, 0, 5), true)
(241, [24, 32, 40, 15], (8, 2, 1, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 25], (8, 2, 1, 3), true)
(241, [18, 24, 30, 19], (6, 2, 2, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 19], (8, 2, 2, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 29], (8, 2, 2, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 23], (8, 2, 3, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 27], (8, 2, 4, 1), true)
(241, [12, 16, 20, 9], (4, 3, 0, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 9], (8, 3, 0, 0), true)
(241, [18, 24, 30, 19], (6, 3, 0, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 19], (8, 3, 0, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 29], (8, 3, 0, 4), true)
(241, [18, 24, 30, 13], (6, 3, 1, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 13], (8, 3, 1, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 23], (8, 3, 1, 2), true)
(241, [18, 24, 30, 17], (6, 3, 2, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 17], (8, 3, 2, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 27], (8, 3, 2, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 21], (8, 3, 3, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 25], (8, 3, 4, 0), true)
(241, [18, 24, 30, 17], (6, 4, 0, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 17], (8, 4, 0, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 27], (8, 4, 0, 3), true)
(241, [24, 32, 40, 21], (8, 4, 1, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 25], (8, 4, 2, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 15], (8, 5, 0, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 25], (8, 5, 0, 2), true)
(241, [24, 32, 40, 19], (8, 5, 1, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 23], (8, 5, 2, 0), true)
(241, [24, 32, 40, 23], (8, 6, 0, 1), true)
(241, [24, 32, 40, 21], (8, 7, 0, 0), true)
```

```
(251, [6, 8, 10, 5], (2, 0, 0, 1), true)
(251, [15, 20, 25, 4], (5, 0, 1, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 9], (5, 0, 1, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 9], (10, 0, 1, 1), true)
(251, [15, 20, 25, 14], (5, 0, 1, 2), true)
(251, [15, 20, 25, 19], (5, 0, 1, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 19], (10, 0, 1, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 0, 1, 5), true)
(251, [30, 40, 50, 39], (10, 0, 1, 7), true)
(251, [15, 20, 25, 8], (5, 0, 2, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 13], (5, 0, 2, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 13], (10, 0, 2, 1), true)
(251, [15, 20, 25, 18], (5, 0, 2, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 23], (10, 0, 2, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 0, 2, 5), true)
(251, [30, 40, 50, 43], (10, 0, 2, 7), true)
(251, [15, 20, 25, 12], (5, 0, 3, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 17], (5, 0, 3, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 17], (10, 0, 3, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 0, 3, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 37], (10, 0, 3, 5), true)
(251, [15, 20, 25, 16], (5, 0, 4, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 21], (10, 0, 4, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 0, 4, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 41], (10, 0, 4, 5), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 0, 6, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 39], (10, 0, 6, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 0, 7, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 37], (10, 0, 8, 1), true)
(251, [6, 8, 10, 3], (2, 1, 0, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 3], (5, 1, 0, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 3], (10, 1, 0, 0), true)
```

```
(251, [15, 20, 25, 8], (5, 1, 0, 1), true)
(251, [15, 20, 25, 13], (5, 1, 0, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 13], (10, 1, 0, 2), true)
(251, [15, 20, 25, 18], (5, 1, 0, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 23], (10, 1, 0, 4), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 1, 0, 6), true)
(251, [30, 40, 50, 43], (10, 1, 0, 8), true)
(251, [15, 20, 25, 7], (5, 1, 1, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 7], (10, 1, 1, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 12], (5, 1, 1, 1), true)
(251, [15, 20, 25, 17], (5, 1, 1, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 17], (10, 1, 1, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 1, 1, 4), true)
(251, [30, 40, 50, 37], (10, 1, 1, 6), true)
(251, [15, 20, 25, 11], (5, 1, 2, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 11], (10, 1, 2, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 16], (5, 1, 2, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 21], (10, 1, 2, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 1, 2, 4), true)
(251, [30, 40, 50, 41], (10, 1, 2, 6), true)
(251, [30, 40, 50, 19], (10, 1, 4, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 1, 4, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 39], (10, 1, 4, 4), true)
(251, [30, 40, 50, 23], (10, 1, 5, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 1, 5, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 1, 6, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 37], (10, 1, 6, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 1, 7, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 6], (5, 2, 0, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 11], (5, 2, 0, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 11], (10, 2, 0, 1), true)
(251, [15, 20, 25, 16], (5, 2, 0, 2), true)
```

```
(251, [30, 40, 50, 21], (10, 2, 0, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 2, 0, 5), true)
(251, [30, 40, 50, 41], (10, 2, 0, 7), true)
(251, [15, 20, 25, 14], (5, 2, 2, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 19], (10, 2, 2, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 2, 2, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 39], (10, 2, 2, 5), true)
(251, [30, 40, 50, 23], (10, 2, 3, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 2, 3, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 2, 4, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 37], (10, 2, 4, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 2, 5, 1), true)
(251, [15, 20, 25, 9], (5, 3, 0, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 9], (10, 3, 0, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 14], (5, 3, 0, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 19], (10, 3, 0, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 3, 0, 4), true)
(251, [30, 40, 50, 39], (10, 3, 0, 6), true)
(251, [15, 20, 25, 13], (5, 3, 1, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 13], (10, 3, 1, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 23], (10, 3, 1, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 3, 1, 4), true)
(251, [30, 40, 50, 17], (10, 3, 2, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 3, 2, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 37], (10, 3, 2, 4), true)
(251, [30, 40, 50, 21], (10, 3, 3, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 3, 3, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 3, 5, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 3, 6, 0), true)
(251, [15, 20, 25, 12], (5, 4, 0, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 17], (10, 4, 0, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 4, 0, 3), true)
```

```
(251, [30, 40, 50, 37], (10, 4, 0, 5), true)
(251, [30, 40, 50, 21], (10, 4, 1, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 4, 1, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 4, 3, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 4, 4, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 19], (10, 5, 1, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 5, 1, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 23], (10, 5, 2, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 5, 2, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 5, 3, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 5, 4, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 23], (10, 6, 0, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 33], (10, 6, 0, 3), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 6, 1, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 6, 2, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 21], (10, 7, 0, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 31], (10, 7, 0, 2), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 7, 2, 0), true)
(251, [30, 40, 50, 29], (10, 8, 0, 1), true)
(251, [30, 40, 50, 27], (10, 9, 0, 0), true)
(911, [6, 8, 10, 5], (2, 0, 0, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 5], (7, 0, 0, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 10], (7, 0, 0, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 15], (7, 0, 0, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 20], (7, 0, 0, 4), true)
(911, [21, 28, 35, 25], (7, 0, 0, 5), true)
(911, [21, 28, 35, 30], (7, 0, 0, 6), true)
(911, [21, 28, 35, 4], (7, 0, 1, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 9], (7, 0, 1, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 19], (7, 0, 1, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 24], (7, 0, 1, 4), true)
(911, [21, 28, 35, 29], (7, 0, 1, 5), true)
```

```
(911, [21, 28, 35, 8], (7, 0, 2, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 13], (7, 0, 2, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 18], (7, 0, 2, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 23], (7, 0, 2, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 12], (7, 0, 3, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 17], (7, 0, 3, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 22], (7, 0, 3, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 27], (7, 0, 3, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 16], (7, 0, 4, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 26], (7, 0, 4, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 20], (7, 0, 5, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 25], (7, 0, 5, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 24], (7, 0, 6, 0), true)
(911, [6, 8, 10, 3], (2, 1, 0, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 3], (7, 1, 0, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 8], (7, 1, 0, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 13], (7, 1, 0, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 18], (7, 1, 0, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 23], (7, 1, 0, 4), true)
(911, [21, 28, 35, 12], (7, 1, 1, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 17], (7, 1, 1, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 22], (7, 1, 1, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 27], (7, 1, 1, 4), true)
(911, [21, 28, 35, 11], (7, 1, 2, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 16], (7, 1, 2, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 26], (7, 1, 2, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 15], (7, 1, 3, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 20], (7, 1, 3, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 25], (7, 1, 3, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 19], (7, 1, 4, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 24], (7, 1, 4, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 23], (7, 1, 5, 0), true)
```

```
(911, [21, 28, 35, 6], (7, 2, 0, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 11], (7, 2, 0, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 16], (7, 2, 0, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 26], (7, 2, 0, 4), true)
(911, [21, 28, 35, 10], (7, 2, 1, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 15], (7, 2, 1, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 20], (7, 2, 1, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 25], (7, 2, 1, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 19], (7, 2, 2, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 24], (7, 2, 2, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 18], (7, 2, 3, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 23], (7, 2, 3, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 22], (7, 2, 4, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 9], (7, 3, 0, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 19], (7, 3, 0, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 24], (7, 3, 0, 3), true)
(911, [21, 28, 35, 13], (7, 3, 1, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 18], (7, 3, 1, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 23], (7, 3, 1, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 17], (7, 3, 2, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 22], (7, 3, 2, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 12], (7, 4, 0, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 17], (7, 4, 0, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 22], (7, 4, 0, 2), true)
(911, [21, 28, 35, 16], (7, 4, 1, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 20], (7, 4, 2, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 15], (7, 5, 0, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 20], (7, 5, 0, 1), true)
(911, [21, 28, 35, 19], (7, 5, 1, 0), true)
(911, [21, 28, 35, 18], (7, 6, 0, 0), true)
     -- used 3.60365 seconds
```

6 SONUÇ ve ÖNERİ

Bu tezde, sonlu cisimler üzerinde tanımlı afin ve projective simit, simitli küme ve simitli çeşitlem adlı geometrik nesneler ve temel özellikleri verilmiştir. Bunlar üzerinde tanımlanan hesaplama kodları ve temel parametreleri tanıtılmıştır. Sıfırlayan idealin ve Hilbert fonksiyonunun, parametrik kodlar denilen bu kodların uzunluğunun ve boyutunun cebirsel yöntemlerle hesaplanması için anahtar niteliğinde olduğu ifade edilmiştir. Bu gerçekten hareketle bir parametrik kodun sözü edilen iki parametresini hesaplamak için gereken sıfırlayan ideali bulmak için ilk kez 2011 yılında [1] makalesinde geliştirilen iki yöntem detaylıca anlatılmıştır. Bir simitli çeşitlemin genişlemeleri tanıtılmış ve karşılık gelen simitli idealler arasındaki, [16] çalışmasında bulunan, güzel ilişki ifade edilmiştir. Sonsuz cisimler üzerinde tanımlı simitli çeşitlemlerin sıfırlayan idealleri simitli idealleriyle çakıştığından ve simitli idealler cisimden bağımsız olduğundan, son olarak bu güzel ilişkinin sonlu cisimler üzerindeki sıfırlayan ideallere taşınıp taşınmadığı açık problemi Macaulay 2 programı kullanılarak çalışılmıştır. Yaptığımız örneklerden edindiğimiz tecrübeye göre ortaya attığımız İddia 5.1.1 çeşitli döngüler kullanılarak doğrulanmıştır, fakat bu işlemin bir sonu olmadığından yalnızca bir kısmı tezde sergilenmiştir.

Yürütülecek araştırmalarda, bu tezde anlatılan yöntemlerden ve örnek yaparken kullanılan Macaulay 2 komutlarından yararlanılarak İddia 5.1.1'nin doğru olduğu ispatlanabilir.

Kaynaklar

[1] Rentería Márquez, C., Simis, A. & Villarreal, R. H. Algebraic methods for parameterized codes and invariants of vanishing ideals over finite fields. *Finite Fields Appl.* **17**, 81–104 (**2011**). URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.ffa.2010.09.007`.

[2] Sarmiento, E., Vaz Pinto, M. & Villarreal, R. H. The minimum distance of parameterized codes on projective tori. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **22**, 249–264 (**2011**). URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00200-011-0148-2`.

[3] Sarmiento, E., Pinto, M. V. & Villarreal, R. H. On the vanishing ideal of an algebraic toric set and its parametrized linear codes. *J. Algebra Appl.* **11**, 1250072, 16 (**2012**). URL `http://dx.doi.org/10.1142/S0219498812500727`.

[4] López, H. H., Sarmiento, E., Vaz Pinto, M. & Villarreal, R. H. Parameterized affine codes. *Studia Sci. Math. Hungar.* **49**, 406–418 (**2012**). URL `http://dx.doi.org/10.1556/SScMath.49.2012.3.1216`.

[5] Sarabia, M. G., Nava Lara, J., Rentería Márquez, C. & Sarmiento Rosales, E. Parameterized codes over cycles. *An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.* **21**, 241–255 (**2013**).

[6] López, H. H., Villarreal, R. H. & Zárate, L. Complete intersection vanishing ideals on degenerate tori over finite fields. *Arab. J. Math. (Springer)* **2**, 189–197 (**2013**). URL `http://dx.doi.org/10.1007/s40065-012-0063-9`.

[7] Vaz Pinto, M. & Villarreal, R. H. The degree and regularity of vanishing ideals of algebraic toric sets over finite fields. *Comm. Algebra* **41**, 3376–3396 (**2013**). URL `http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2012.686643`.

[8] López, H. H., Rentería Márquez, C. & Villarreal, R. H. Affine Cartesian codes. *Des. Codes Cryptogr.* **71**, 5–19 (**2014**). URL `http://dx.doi.org/10.1007/s10623-012-9714-2`.

[9] López, H. H. & Villarreal, R. H. Computing the degree of a lattice ideal of dimension one. *J. Symbolic Comput.* **65**, 15–28 (**2014**). URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2014.01.002`.

[10] González Sarabia, M., Renterí a Márquez, C. & Sarmiento Rosales, E. Projective parameterized linear codes. *An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.* **23**, 223–240 (**2015**).

[11] Sarabia, M. G. & Sarmiento Rosales, E. Parameterized codes associated to the edges of some subgraphs of a simple graph. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **26**, 493–505 (**2015**). URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00200-015-0262-7`.

[12] Neves, J., Vaz Pinto, M. & Villarreal, R. H. Vanishing ideals over graphs and even cycles. *Comm. Algebra* **43**, 1050–1075 (**2015**). URL `http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2012.714025`.

[13] Martí nez Bernal, J., Pitones, Y. & Villarreal, R. H. Minimum distance functions of graded ideals and Reed-Muller-type codes. *J. Pure Appl. Algebra* **221**, 251–275 (**2017**). URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.06.006`.

[14] Arslan, F. & Mete, P. Hilbert functions of Gorenstein monomial curves. *Proc. Amer. Math. Soc.* **135**, 1993–2002 (**2007**). URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-07-08793-X`.

[15] Şahin, M. Producing set-theoretic complete intersection monomial curves in $\mathbb{P}^n$. *Proc. Amer. Math. Soc.* **137**, 1223–1233 (**2009**). URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-08-09653-6`.

[16] Şahin, M. Extensions of toric varieties. *Electron. J. Combin.* **18**, Paper 93, 10 (**2011**).

[17] Sturmfels, B. *Gröbner bases and convex polytopes*, vol. 8 of *University Lecture Series* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1996).

[18] Katsabekis, A. & Thoma, A. Toric sets and orbits on toric varieties. *J. Pure Appl. Algebra* **181**, 75–83 (2003). URL `http://dx.doi.org/10.1016/S0022-4049(02)00305-5`.

[19] Katsabekis, A. & Thoma, A. Parametrizations of toric varieties over any field. *J. Algebra* **308**, 751–763 (**2007**). URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.08.016`.

[20] Reyes, E., Villarreal, R. H. & Zárate, L. A note on affine toric varieties. *Linear Algebra Appl.* **318**, 173–179 (2000). URL `http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00166-X`.

[21] Eisenbud, D. & Sturmfels, B. Binomial ideals. *Duke Math. J.* **84**, 1–45 (**1996**). URL `http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-96-08401-X`.

[22] Miller, E. & Sturmfels, B. *Combinatorial commutative algebra*, vol. 227 of *Graduate Texts in Mathematics* (Springer-Verlag, New York, **2005**).

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Yeliz YAKUT

Doğum Yeri : KONAK / İZMİR

Medeni Hali : Bekar

E-posta : yeliz.yakut@outlook.com

Eğitim

Lise : 2006-2010 KONAK NEVVAR SALİH İŞGÖREN ANADOLU LİSESİ

Lisans : 2010-2014 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, iyi

İş Deneyimi

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 22/09/2017

Tez Başlığı / **Simitli Bir Çeşitlemin Genişlemeleri Üzerinde Hesaplama Kodları**
Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 42 sayfalık kısmına ilişkin, 22/09/2017 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 4 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza
22.09.2017

Adı Soyadı: Yeliz Yakut
Öğrenci No: N14129784
Anabilim Dalı: Matematik
Programı:
Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Mesut ŞAHİN
(Unvan, Ad Soyad, İmza)