



**PERİYODİK SINIR KOŞULLARI ALTINDA BİR İNCE BÖLGE
PROBLEMİNİN ÇÖZÜM ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**

Muharrem ÖZLÜK

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAYIS 2017

Muharrem ÖZLÜK tarafından hazırlanan "PERİYODİK SINIR KOŞULLARI ALTINDA BİR İNCE BÖLGE PROBLEMİNİN ÇÖZÜM ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Meryem KAYA

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. A. Okay ÇELEBİ

Matematik Anabilim Dalı, Yeditepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. A. Feza GÜVENİLİR

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Fatma AYAZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ KANTAR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 26/05/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Muharrem ÖZLÜK

26/05/2017

PERİYODİK SINIR KOŞULLARI ALTINDA BİR İNCE BÖLGE PROBLEMİNİN ÇÖZÜM ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

(Doktora Tezi)

Muharrem ÖZLÜK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2017

ÖZET

Bu tezde, akışkanlar dinamiğinin temel denklemlerinden olan Navier-Stokes denklemleri ile ısı denkleminin oluşan Rayleigh-Bénard konveksiyonu, Boussinesq yaklaşımı altında ele alınmıştır. Düzgün bir fonksiyon tarafından sınırlanan bir ince bölge üzerinde denklem sisteminin zayıf ve güçlü çözümlerinin varlığı ve tekliği Galerkin yöntemi kullanılarak gösterilmiştir. Denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını incelemek üzere belirleyici değerlerinin sayısı üzerinde bir üst sınır elde edilmiş, yerel olmayan çekicilerin varlığı gösterilmiştir. Yerel olmayan çekici üzerinde yer alan güçlü çözümler için veri ekleme analizi yapılmıştır. Ayrıca, denklemin parametrelere olan sürekli bağılılığı belirli şartlar altında gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Navier - Stokes denklemleri, Rayleigh - Bénard konveksiyonu, Galerkin yöntemi, Zayıf çözümler, Güçlü çözümler, Yerel olmayan çekici, Belirleyici değerler, Veri ekleme.
Sayfa Adedi : 94
Danışman : Doç. Dr. Meryem KAYA

ANALYSIS OF THE PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF A THIN DOMAIN PROBLEM UNDER PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

(Ph. D. Thesis)

Muharrem ÖZLÜK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2017

ABSTRACT

In this thesis, the Rayleigh-Bénard convection equations, which is comprised of Navier-Stokes equations and a heat equation, is discussed under the Boussinesq approximation. The existence and uniqueness of the weak and strong solutions of the equation system on a thin domain prescribed by a uniform function is proved by using the Galerkin method. In order to examine the asymptotic behavior of the solutions of the equation system, upper bounds on the number of determining modes were obtained and the existence of the global attractor is shown. The data assimilation algorithm is examined for the strong solutions in the global attractor. In addition, the continuous dependence of the solutions on the parameters is shown under certain conditions.

Science Code : 20406

Key Words : Navier - Stokes equations, Rayleigh - Bénard convection, Galerkin method, Weak solutions, Strong solutions, Global attractors, Determining modes, Data assimilation.

Page Number : 94

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Meryem KAYA

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenciliğimin her aşamasında desteklerini esirgemeyen kıymetli danışmanım Doç. Dr. Meryem KAYA'ya, tezin hazırlanması sırasında bilgilerini, tecrübelerini ve değerli zamanlarını paylaşan çok değerli hocam Prof. Dr. A. Okay ÇELEBİ'ye ve ayrıca güven aşılayan yaklaşımlarıyla güç kazandığım değerli hocam Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ KANTAR'a çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Bazı Tanım, Teorem ve Eşitsizlikler	5
2.2. Fonksiyon Uzayları	11
2.3. g -Laplace ve Ortogonal İzdüşüm Operatörleri.....	17
2.3.1. Poincare eşitsizlikleri	23
2.4. g -Stokes Operatörü.....	26
2.5. Trilineer Form ve Bilineer Dönüşüm	27
2.6. Ω_g Bölgesi Üzerinde Bénard Problemi	32
2.6.1. Ω_3 Bölgesi.....	34
2.6.2. Ortalama dönüşümü	36
3. ZAYIF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI.....	43
3.1. Yaklaşık Çözümlerin Varlığı	43
3.2. Önkestirimler.....	45
3.3. Limite Geçiş	49
3.4. Zayıf Çözümlerin Varlığı	51
3.5. Başlangıç Koşulları	52
3.6. Zayıf Çözümlerin Tekliği	53
3.7. Güçlü Çözümlerin Varlığı	54
3.8. Güçlü Çözümlerin Tekliği.....	57
4. BELİRLEYİCİ DEĞERLER.....	59

	Sayfa
4.1. g-Bénard Probleminin Belirleyici Değerleri	59
5. YAPISAL KARARLILIK	69
6. VERİ EKLEME	73
6.1. Yerel Olmayan Çekicilerin Varlığı	74
6.2. Veri Ekleme	80
7. SONUÇ	85
KAYNAKLAR	87
ÖZGEÇMİŞ	93

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$C(M)$	M kümesi üzerindeki sürekli fonksiyonlar kümesi
$\ \cdot\ $	Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle_g$	İç çarpım
$L^p(X)$	p. kuvveti integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\bar{X}$	X kümesinin kapanışı
X'	X uzayının duali
$x_n \rightarrow x$	Güçlü yakınsaklık
$x_n \xrightarrow{w} x$	Zayıf yakınsaklık
$x_n \xrightarrow{w^*} x$	Zayıf yıldız yakınsaklık

1. GİRİŞ

Termal konveksiyon, doğal akışların meydana geldiği her yerde etkin rol oynadığından bilim dünyasının oldukça yoğun ilgi gösterdiği konulardan birisi olmuştur. Örneğin, birçok yıldızın ve tabii ki güneşin yapısı esas itibariyle merkezden yüzeye doğru olan ısı akışına göre şekillenir. Yer kabuğundaki konveksiyon tektonik plakaların hareketinde önemli rol oynarken dünyanın merkezindeki konveksiyon ise manyetik alanın oluşumunda etkilidir. Okyanuslardaki konveksiyon büyük su kütlelerinin karışımında kendini gösterirken atmosferdeki konveksiyon ise hem kısa hem de uzun vadeli hava tahminleri yapılırken dikkate alınır. Bunların dışında nükleer reaktörler ve güneş enerji sistemleri gibi insan yapımı endüstriyel uygulamaların birçoğunda termal konveksiyon bir başka ifadeyle ısı transferi karşımıza çıkmaktadır [1].

Termal konveksiyon temelde çeşitli kararsızlıkların ve türbulansın gözlemlendiği birkaç sistemden biridir. Rayleigh-Bénard konveksiyonu ise kapalı bir kapta bulunan bir akışkanın alttan ısıtılıp üstten soğutulması ile oluşturulan ideal sisteme karşılık gelmektedir. Alt kısımdaki sıvı sıcak olduğu için genişirken üst kısımdaki sıvı ise soğuk olduğu için büzülerek yoğunluk farkına sebep olur. Bu yoğunluk farkları daha hafif olan sıvıyı yüzeye, ağır olanı ise alt kısma doğru harekete geçiren bir kaldırma kuvveti (buoyancy effect) meydana getirir. Küçük sıcaklık farklarında sıvı hareketsiz kalırken belli bir sıcaklık farkına erişildiğinde sıvı harekete geçer. Bu durumda sıvının yüzeyinde bir takım desenler oluşabilir [2]. Yüksek sıcaklık farklarına ulaşıldığında ise sıvı kontrolsüz, hareketi tahmin edilemez bir biçimde harekete geçer ve türbulans gözlemlenir. Henry Bénard 1900'lü yılların başında yaptığı titiz deneylerle alttan ısıtılan bir sıvının konveksiyonel hareketini gözlemleyen ilk kişi olmuştur [3]. Rayleigh ise 1916 yılındaki çalışmasında bu türden bir kaldırma kuvvetinin teorik altyapısını kurmuş ve sıvının hareketindeki değişimlerde kritik öneme sahip olan Rayleigh sayısını literatüre kazandırmıştır [4].

Konveksiyona maruz kalan bir sıvının konum ve sıcaklığındaki değişimleri ifade eden denklem sistemi ise Boussinesq denklemleri olarak bilinir [5]. Bu denklem sistemi

Navier-Stokes denklemleri ile bir ısı denkleminden oluşur.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \mu \nabla^2 u \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\theta = \kappa \nabla^2 \theta \quad (1.3)$$

(1.1) denklemi süreklilik denklemi olup kütle korunumuna dair diferansiyel denklemdir. Bu denklem ρ yoğunluğunun sabit bir başka deyişle sıvının sıkıştırılamaz olması halinde $\nabla \cdot u = 0$ olarak yazılabilir. (1.2) denklemi momentum korunumundan elde edilirken (1.3) denklemi ise enerji korunumunun bir sonucudur.

Bir kısmi türevli denklemin çözümlerinin varlığını ve tekliğini gösterme yollarından birisi zayıf çözümlerden geçmektedir. Bu yöntemde kısmi türevli denklem kompakt desteğe sahip bir test fonksiyonu ile çarpılarak integrali alınır. Kısmi integrasyon ile türev bu test fonksiyonuna aktarılır. Elde edilen bu denklemin çözümleri *zayıf çözüm* olarak adlandırılır. Sonrasında bu zayıf çözümlerin düzgün olduğu gösterilmeye çalışılır. Leray [6, 7] 1930'lu yıllarda Navier-Stokes denklemlerinin üç boyutlu uzayda zayıf çözümlerini elde etmiş ancak bu çözümlerin tek olup olmadığı genel şartlar altında günümüze kadar gösterilememiştir. Leray'ın bu önemli çalışmalarından sonra Navier-Stokes denklemlerinin iki boyutlu uzayda düzgün çözümlerin varlığı ve tekliği her $t > 0$ zamanı için Ladyzhenskaya [8] tarafından gösterilmiştir. Üç boyutlu uzayda ise küçük başlangıç koşulları için düzgün çözümlerin varlığı ve tekliği elde edilmiştir. Bu küçük olma koşulu kaldırıldığında ise başlangıç koşuluna bağlı bir T zamanı için küçük bir $[0, T)$ aralığında düzgün çözümlere ulaşılmıştır [9–14].

Raugel ve Sell, 1990'lı yıllarda Navier-Stokes denklemlerinin bir ince bölge üzerindeki çözüm özelliklerini incelemiştir [15–17]. ε küçük bir pozitif parametre ve $Q_2, \mathbb{R}^2$ uzayının sınırlı bir bölgesi olmak üzere $\Omega_\varepsilon = Q_2 \times (0, \varepsilon)$ üç boyutlu ince bölgesi üzerinde denklemleri ele almışlardır. Prof. G. R. Sell'in doktora öğrencilerinden olan Roh [18] tezinde ve teziyle ilgili diğer çalışmalarında [19–21] Navier-Stokes denklemlerinin zayıf ve güçlü çözümlerinin özelliklerini $\Omega_g = Q_2 \times (0, g)$ bölgesinin sınırının düzgün bir g fonksiyonu ile belirlendiği durumda incelemiştir. Kaya ve Çelebi [22] ise benzer bir yaklaşımla g -Kelvin-Voight denklemlerinin zayıf çözümlerinin varlığını göstermişlerdir.

İnce bölge problemleri üzerine yapılan diğer çalışmalar için [23–31] makalelerine bakılabilir.

Bu tezde, yukarıda bahsi geçen çalışmalar ışığında Bénard probleminin çözüm özellikleri incelenecektir. Bénard problemi, $\mathbb{R}^3$ uzayının sınırlı bir bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U - \nu \Delta U + \nabla P = \xi \Theta + F_1(t)$$

$$\nabla \cdot U = 0$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (U \cdot \nabla)\Theta - \kappa \Delta \Theta = F_2(t)$$

olarak ele alınacaktır. Burada U vektörel hız fonksiyonu, Θ reel değerli sıcaklık fonksiyonu, P reel değerli basınç fonksiyonu, $\xi \in \mathbb{R}^3$ sabit bir vektör, $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ verilen harici kuvvetler, $\kappa > 0$ termal yayılım sabiti, $\nu > 0$ kinematik viskozite sabitidir. Canon ve DiBenedetto [32], Bénard probleminin $\Omega = \mathbb{R}^n$ için yerel olarak tek bir güçlü çözümün varlığını göstermişlerdir. Morimoto [33], $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bölgesi üzerinde zayıf çözümlerin varlığını incelerken Kaizu ve Saito [34] üç boyutlu ε kalınlığındaki ince bölge üzerindeki zayıf çözümlerinin, ince doğrultudaki ortalamalarının, $\varepsilon \rightarrow 0$ için iki boyutlu problemin zayıf çözümlerine yakınsadığını göstermişlerdir. Rayleigh-Bénard probleminin iki boyutlu uzayda zayıf çözümlerinin varlığı ve tekliği ile yerel olmayan çekicilerinin varlığı [35] çalışmasında ele alınmıştır. Üç boyutlu uzaydaki sınırlı bir bölge üzerinde çok değişkenli akışlardan oluşan bir aile yardımıyla zayıf topoloji altında Rayleigh-Bénard probleminin yerel olmayan çekicilerin varlığı ile kanal benzeri bir bölge üzerinde modifiye Bénard probleminin yerel olmayan ψ -çekicisinin varlığı sırasıyla [36, 37] makalelerinde gösterilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde gerekli temel fonksiyonel analiz tanım, lemma ve teoremleri ile bazı eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde bu denklem sisteminin Ω_g bölgesi üzerinde zayıf ve güçlü çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir. Dördüncü bölümde birbirine benzer iki sistemin asimptotik davranışları arasında ilişki belirlenmiştir. Tezin beşinci bölümünde ise denklem sisteminin yapısal kararlı olduğu durumlar belirlenirken son bölümde ise, yerel olmayan çekicinin varlığı gösterilerek, bunun üzerinde yer alan güçlü çözümler için veri ekleme analizi yapılmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Bazı Tanım, Teorem ve Eşitsizlikler

Bu kısımda tezin kendi içinde bütünlüğünü sağlayabilmek için gerekli olan bazı tanım, teorem ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

2.1.1. Tanım [38]

$G_\alpha, \alpha \in A$ bir küme sistemi olmak üzere bir X kümesi $\cup_{\alpha \in A} G_\alpha$ birleşiminin bir alt kümesi olması halinde $G_\alpha, \alpha \in A$ küme sistemine X kümesinin bir örtüsü denir.

2.1.2. Tanım [38]

X topolojik uzayının bir M alt kümesi için X 'in M 'yi örten her bir açık küme sisteminde yine M 'yi örtecek şekilde sonlu bir alt sistem varsa M 'ye kompakt küme denir.

2.1.3. Tanım [38]

Bir topolojik uzaya ait bir alt kümenin kapanışının kompakt olması durumunda bu kümeye bağlı kompakt küme denir.

2.1.4. Tanım [38]

Bir topolojik uzayın her bir noktasının kompakt bir komşuluğunun olması halinde bu uzaya yerel kompakt uzay denir.

2.1.5. Tanım [38]

X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere X 'in birim yuvarı S olsun. Bir $T \in L(X, Y)$ operatörü için S yuvarının T altındaki görüntüsü Y uzayında bağlı kompakt ise T 'ye kompakt operatör denir.

2.1.6. Tanım [38]

Bir X normlu lineer uzayında yer alan $\{x_n\}$ dizisinin, X' dual uzayında yer alan her bir f fonksiyoneli için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ limiti varsa $\{x_n\}$ dizisine zayıf yakınsak denir. $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in X$ elemanına zayıf yakınsak ise bu durum $w - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = x, \forall f \in X', x_n \rightharpoonup x$ veya $x_n \xrightarrow{w} x$ ile gösterilebilir.

2.1.7. Tanım [38]

Bir X normlu lineer uzayının X' dual uzayında yer alan $\{f_n\}$ dizisinin, her bir $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ limiti varsa $\{f_n\}$ dizisine zayıf* yakınsak denir. $\{f_n\}$ dizisi bir $f \in X'$ elemanına zayıf* yakınsak ise bu durum $w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$ veya $f_n \xrightarrow{w^*} f$ ile gösterilebilir.

2.1.8. Tanım [38]

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için Ω topolojik uzayında

$$\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye f fonksiyonunun desteği denir ve $\text{supp } f$ ile gösterilir.

2.1.9. Teorem (Young Eşitsizliği) [39]

$a, b > 0, 1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$ab < \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

ve $\varepsilon > 0$ için de

$$ab < \frac{\varepsilon}{p}a^p + \frac{1}{\varepsilon^{1/(p-1)}q}b^q$$

eşitsizlikleri sağlanır.

2.1.10. Teorem (Hölder Eşitsizliği) [39]

Ω bölgesi $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ uzayında açık bir küme olmak üzere bu bölge üzerinde ölçülebilir u ve v fonksiyonları ile $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\int_{\Omega} u(x)v(x)dx \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır.

Hölder eşitsizliğine $u, v \in L^2(\Omega)$ ve $p = q = 2$ için

$$\int_{\Omega} u(x)v(x)dx \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

2.1.11. Teorem (Gronwall eşitsizliği) [40]

Bir $x(t) \in \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\frac{d}{dt}x \leq g(t)x + h(t)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \text{ için}$$

$$x(t) \leq x(0)e^{G(t)} + \int_0^t e^{G(t)-G(s)} h(s) ds$$

eşitsizliği sağlanır.

2.1.12. Tanım [38]

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere f 'nin Fourier dönüşümü $\hat{f}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\hat{f}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \tau} dx$$

2.1.13. Teorem [38]

$S = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ kümesi bir X Hilbert uzayında tam ve ortonormal bir küme olsun. Bu durumda herhangi bir $f \in X$ için f 'nin (S 'ye göre) Fourier katsayıları

$$f_\alpha = \langle f, x_\alpha \rangle$$

olur. Ayrıca,

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |f_\alpha|^2$$

Parseval eşitliği sağlanır.

2.1.14. Teorem [38]

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}$ olmak üzere

$$\|\hat{f}\|^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|^2$$

Plancherel eşitliği sağlanır.

2.1.15. Teorem (Riesz Gösterilim Teoremi) [38]

X bir Hilbert uzayı, f ise X üzerinde sınırlı ve lineer bir operatör ise her $x \in X$ için

$$f(x) = (x, y_f) \text{ ve } \|f\| = \|y_f\|$$

olacak şekilde tek bir $y_f \in X$ elemanı vardır. Ayrıca, her bir $y \in X$ için de

$$f_y(x) = (x, y), \forall x \in X \text{ ve } \|f_y\| = \|y\|$$

olacak şekilde X üzerinde sınırlı ve lineer bir f_y operatörü vardır.

2.1.16. Tanım [41]

Bir H metrik uzayında her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in H$ için

$$u(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow H \text{ sürekli,}$$

$$u(t, \cdot) : H \rightarrow H \text{ sürekli,}$$

$$u(0, x) = x,$$

$$u(t + s, x) = u(t, u(s, x))$$

ile tanımlı bir $u : \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow H$ dönüşümüne bir dinamik sistem denir.

Dinamik sistemin diğer tanımları için [42] makalesine bakılabilir.

2.1.17. Tanım [41]

Bir H metrik uzayında her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in H$ için

$$S(\cdot)x : \mathbb{R}^+ \rightarrow H \text{ sürekli,}$$

$$S(0) = I,$$

$$S(t + s) = S(t)S(s)$$

ile tanımlı $S(t) : H \rightarrow H$ dönüşümlerinden oluşan bir $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ailesine bir C_0 -yarıgrubu denir.

Buna göre her $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ C_0 -yarıgrubu $S(t)x = u(t, x)$ ile bir dinamik sistem tanımlar.

2.1.18. Tanım [43]

$u_0 \in H$ için

$$\cup_{t \geq 0} S(t)u_0$$

kümesine u_0 'dan başlayan yörünge denir.

2.1.19. Tanım [43]

$u_0 \in H$ veya $\mathcal{A} \subset H$ için kapanışların H uzayında alındığı

$$\omega(u_0) = \overline{\cap_{s \geq 0} \cup_{t \geq s} S(t)u_0}$$

$$\omega(\mathcal{A}) = \overline{\cap_{s \geq 0} \cup_{t \geq s} S(t)\mathcal{A}}$$

kümelerine sırasıyla u_0 veya $\mathcal{A}$ 'nın ω -limit kümesi denir.

2.1.20. Tanım [43]

$X \subset H$ olmak üzere her $t \geq 0$ için

$$S(t)X = X$$

ise X kümesine $S(t)$ yarıgrupuna göre fonksiyonel invaryant küme denir.

2.1.21. Lemma [43]

$\mathcal{A} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} \subset H$ olmak üzere bir $t_0 > 0$ için

$$\cup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{A}$$

kümesi H uzayında bağlı kompakt ise $\omega(\mathcal{A})$ kümesi de boş olmayan, kompakt ve invaryant bir küme olur.

2.1.22. Tanım [43]

$\mathcal{A} \subset H$ olmak üzere

(i) $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$,

(ii) Her $u_0 \in U$ ve $t \rightarrow \infty$ için $S(t)u_0 \rightarrow \mathcal{A}$ olacak şekilde $\mathcal{A}$ kümesinin bir U açık komşuluğu varsa $\mathcal{A}$ kümesine bir çekici (attractor) denir.

2.1.23. Tanım [43]

$\mathcal{A} \subset H$ olmak üzere $\mathcal{A}$ kümesi H uzayındaki sınırlı kümeleri çekiyorsa $\mathcal{A}$ kümesine $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarı grubunun yerel olmayan çekicisi (global attractor) denir.

2.1.24. Tanım [43]

$\mathcal{B} \subset H$ ve $\mathcal{B}$ kümesini içeren bir açık küme U olsun. U 'daki herhangi bir sınırlı kümenin yörüngesi belli bir zaman sonunda $\mathcal{B}$ kümesinin içinde yer alıyorsa $\mathcal{B}$ 'ye U 'da bir yutan küme (absorbing set) denir.

2.2. Fonksiyon Uzayları

$L^2(\Omega)$ uzayı $\int_{\Omega} |u|^2 dx < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar uzayı olarak tanımlanır. $L^2(\Omega, g)$ uzayı ise $\int_{\Omega} |u|^2 g dx < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar uzayı olarak tanımlanır. $L^2(\Omega, g)$ uzayından (2.1) şartını sağlayan periyodik fonksiyonlar uzayı da $L^2_{per}(\Omega, g)$ ile gösterilir.

Ayrıca $H^1(\Omega, g) = \{u \in L^2(\Omega, g) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega, g), 1 \leq i \leq n\}$ olarak tanımlanır. Bu uzaylara ait iç çarpım ve normlar aşağıda verilmiştir.

$$L^2(\Omega) : (u, v) = \int_{\Omega} (u \cdot v) dx, \quad \|u\|^2 = (u, u),$$

$$L^2(\Omega, g) : (u, v)_g = \int_{\Omega} (u \cdot v) g dx, \quad \|u\|_g^2 = (u, u)_g,$$

$$H^1(\Omega, g) : \|u\|_{H^1(\Omega, g)}^2 = (u, u)_g + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_g$$

$0 < m_0 \leq g(x_1, x_2) \leq M_0$ olduğundan $m_0 \|u\|^2 \leq \|u\|_g^2 \leq M_0 \|u\|^2$ eşitsizlikleri sağlanır ve bu durumda $\|u\|$ normu ile $\|u\|_g$ normu denk olur.

$H^k(\Omega, g)$ uzayını tanımlayabilmek için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

$n \in \mathbb{N}$ uzayın boyutu olmak üzere $1 \leq i \leq n$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n$ ve $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ için

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} u \dots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

olarak gösterilsin. Bu durumda

$$H^k(\Omega, g) = \{u \in L^2(\Omega, g) : D^\alpha u \in L^2(\Omega, g), \forall |\alpha| \leq k\}$$

ve bu uzaydaki iç çarpım ise

$$(u, v)_{H^k(\Omega, g)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_g$$

olarak tanımlanır.

2.2.1. Tanım [38]

$0 \leq k \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesi üzerinde tanımlı, k . mertebeye kadar kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonların oluşturduğu uzay $C^k(\Omega)$ ile gösterilir. $C^k(\Omega)$ uzayında olup kompakt desteğe sahip fonksiyonlar uzayı ise $C_0^k(\Omega)$ ile gösterilir. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayında tanımlı lineer fonksiyonlara test fonksiyonları ya da genelleştirilmiş fonksiyonlar denir. $C^\infty(\Omega)$ uzayından (2.1) şartını sağlayan periyodik fonksiyonlar uzayı da $C_{per}^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

$-\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 \leq \alpha < \infty$ ve X bir Banach uzayı olmak üzere verilen bir α sayısı için $[a, b]$ aralığından X uzayına tanımlı L^α -integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L^\alpha(a, b; X)$ ile

gösterilir ve bu uzay

$$\|u\|_{L^\alpha(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^\alpha dt \right)^{1/\alpha}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X$$

normu ile tanımlı $L^\infty(a,b;X)$ uzayı da bir Banach uzayıdır.

$-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $[a,b]$ aralığından X uzayına tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı $C(a,b;X)$ ile gösterilir ve bu uzay

$$\|u\|_{C(a,b;X)} = \sup_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır [14].

2.2.2. Lemma [14]

X bir Banach uzayı ve $u, g \in L^1(a,b;X)$ için (1)-(3) koşulları birbirine denktir:

1. u hemen hemen her yerde g 'nin bir ilkel fonksiyonuna eşittir;

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds \quad \xi \in X, \text{ h.h.h. } t \in [a,b].$$

2. $\forall \phi \in D((a,b))$ için

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = - \int_a^b g(t)\phi(t)dt \quad , \phi' = \frac{d\phi}{dt}.$$

3. $\forall \eta \in X^*$ için (a,b) üzerinde distribution anlamında aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{d}{dt} \langle u, \eta \rangle = \langle g, \eta \rangle.$$

Ayrıca bu koşullardan herhangi birinin sağlanması durumunda u fonksiyonu hemen hemen her yerde $[a, b]$ aralığından X uzayına tanımlı sürekli bir fonksiyona denk olur.

2.2.3. Lemma (Lions-Magenes Lemması) [14]

V ve H birer Hilbert uzayı ve bu uzayların dualleri sırasıyla V' ve H' olmak üzere $V \subset H \equiv H' \subset V'$ gömülmeleri birebir, sürekli ve her bir uzay bir sonrakinde yoğun olsun. Bu durumda $u \in L^2(0, T; V)$ ve $u' \in L^2(0, T; V')$ ise u fonksiyonu, $[0, T]$ aralığından H uzayına tanımlı ve sürekli bir fonksiyona denk olur. Ayrıca, $(0, T)$ aralığında

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 = 2\langle u', u \rangle$$

eşitliği sağlanır.

$X_0 \subset X \subset X_1$ Hilbert uzayları arasındaki gömülmeler sürekli ve X_0 'dan X 'e gömülme kompakt olmak üzere $\mathbb{R}$ 'den X_1 'e tanımlı bir u fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\hat{u}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t \tau} u(t) dt$$

ile gösterilsin. Bu durumda, u 'nun γ mertebeden t 'ye göre türevi $D_t^\gamma u(\tau)$ ifadesi $(2i\pi\tau)^\gamma \hat{u}$ 'nin ters Fourier dönüşümüne eşit olur :

$$D_t^\gamma \hat{u}(\tau) = (2i\pi\tau)^\gamma \hat{u}(\tau).$$

Bir $\gamma > 0$ sayısı için $H^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)$ uzayı

$$H^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \{u \in L^2(\mathbb{R}; X_0) : D_t^\gamma u \in L^2(\mathbb{R}; X_1)\}$$

olarak tanımlanır. Bu uzay

$$\|u\|_{H^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}; X_0)}^2 + \|\tau|^\gamma \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}; X_1)}^2$$

normuyla bir Hilbert uzayıdır. $K \subset \mathbb{R}$ olmak üzere H^γ uzayının alt uzayı H_K^γ

$$H_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \{u \in H^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) : \text{supp } u \subset K\}$$

olarak tanımlanır [14].

2.2.4. Teorem (Aubin Kompaktlık Teoremi) [14]

Yukarıda verilen tanımlamalar altında, herhangi bir γ sayısı ve herhangi bir sınırlı K kümesi için $H_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)$ uzayından $L^2(\mathbb{R}; X)$ uzayına gömülme kompakttır.

2.2.5. Tanım [44]

$x \in \mathbb{R}^n$ ve ϕ bir test fonksiyonu olmak üzere δ_x genelleştirilmiş fonksiyonu

$$\delta_x(\phi) = \phi(x)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $x = 0$ için elde edilen genelleştirilmiş fonksiyon Dirac- δ fonksiyonu olarak adlandırılır ve sadece δ ile gösterilir.

2.2.6. Tanım [38]

Ω bölgesi üzerinde tanımlı bir T test fonksiyonu için $\frac{\partial}{\partial x_1} T$ türevine T 'nin (x_1) 'e göre genelleştirilmiş türevi denir. Bu durumda

$$\frac{\partial}{\partial x_1} T(\psi) = -T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)$$

olur.

g-Bénard problemi incelenirken aşağıda verilen uzaylara gereksinim duyulacaktır:

$$\mathcal{V}_1 = \{u \in (C_{per}^\infty(\Omega))^2 : \Omega \text{ üzerinde } \nabla \cdot (gu) = 0\},$$

$$\mathcal{V}_2 = \{u \in \mathcal{V}_1 : \int_{\Omega} u \tilde{g} dx = 0\},$$

$$H_g = \mathcal{V}_1 \text{ uzayının } L^2(\Omega, g) \text{ uzayındaki kapanışı},$$

$$H_{g,\tilde{g}} = \mathcal{V}_2 \text{ uzayının } L^2(\Omega, g) \text{ uzayındaki kapanışı},$$

$$V_g = \mathcal{V}_1 \text{ uzayının } H^1(\Omega, g) \text{ uzayındaki kapanışı},$$

$$V_{g,\tilde{g}} = \mathcal{V}_2 \text{ uzayının } H^1(\Omega, g) \text{ uzayındaki kapanışı},$$

$$K_{g,\tilde{g}} = \{u \in (C_{per}^\infty(\Omega))^2 : \int_{\Omega} u \tilde{g} dx = 0\},$$

$$C_g = \left\{ \frac{c}{g} : c \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

$$V'_g = V_g \text{ uzayının duali},$$

$$\mathcal{V}_3 = \{\varphi \in C_{per}^\infty(\Omega) : \int_{\Omega} \varphi dx = 0\},$$

$$W_g = \mathcal{V}_3 \text{ uzayının } H^1(\Omega, g) \text{ uzayındaki kapanışı},$$

$$W'_g = W_g \text{ uzayının duali},$$

$$Q = \{\nabla \varphi : \varphi \in C_{per}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})\} \text{ uzayının } L^2(\Omega) \text{ uzayındaki kapanışı}.$$

H_g ve $H_{g,\tilde{g}}$ uzaylarında $L^2(\Omega, g)$ uzayındaki iç çarpım ve norm kullanılırken V_g , $V_{g,\tilde{g}}$ ve W_g uzaylarında $H^1(\Omega, g)$ uzayının iç çarpımı ve normu kullanılır. H_g ve V_g uzayları arasındaki ilişki incelendiğinde, V_g uzayının H_g uzayının bir alt uzayı olduğu ve V_g uzayından H_g uzayına tanımlanan i gömülme operatörünün birebir ve sürekli olduğu görülür. Ayrıca, i^* adjoint dönüşümü de H'_g uzayından V'_g uzayına lineer sürekli ve birebir olur. Nitekim, i dönüşümü birebir olduğundan $i^*(H'_g)$ uzayı V'_g uzayında yoğun ve $i(V_g) = V_g$ uzayı da H_g uzayında yoğun olur. Dolayısıyla, H'_g uzayı V'_g uzayının yoğun bir alt uzayı ile karakterize edilebilir. Riesz gösterilim teoreminden de H_g ve H'_g uzayları karakterize edilebildiğinden her biri bir diğesinde yoğun ve gömülme dönüşümlerinin sürekli olduğu

$$V_g \subset H_g = H'_g \subset V'_g$$

gömülmeleri elde edilir. Ayrıca V_g uzayından H_g uzayına olan gömülme kompakttır [18, 43].

$f \in H_g$ ve $u \in V_g$ fonksiyonlarının H_g uzayındaki iç çarpımı ile V'_g ve V_g uzayları arasındaki

dualite iç çarpımı birbirine eşittir:

$$\langle f, u \rangle_g = (f, u)_g, \quad \forall f \in H_g, \forall u \in V_g.$$

2.3. g-Laplace ve Ortogonal İzdüşüm Operatörleri

M_g Ortogonal izdüşüm operatörü

$L^2_{per}(\Omega, g)$ uzayındaki birim dönüşüm I olmak üzere

$$M_g u = \frac{1}{g} \int_{\Omega} u g dx,$$

$$R_g : L^2_{per}(\Omega, g) \rightarrow K_{g,g}, R_g u = (I - M_g)u$$

olarak tanımlansın. $L^2_{per}(\Omega, g)$ üzerinde

$$\begin{aligned} M_g(au + bv) &= \frac{1}{g} \int_{\Omega} (au + bv) g dx = a \frac{1}{g} \int_{\Omega} u g dx + b \frac{1}{g} \int_{\Omega} v g dx = a M_g u + b M_g v, \\ M_g^2 u &= \frac{1}{g} \int_{\Omega} (M_g u) g dx = \frac{1}{g} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{g} \int_{\Omega} u g dx \right) g dx = \frac{1}{g} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u g dx \right) dx \\ &= \frac{1}{g} \int_{\Omega} u g dx \int_{\Omega} dx = \frac{1}{g} \int_{\Omega} u g dx = M_g u \end{aligned}$$

olduğundan M_g bir lineer projeksiyon operatörü olur.

$$\begin{aligned} \langle M_g u, v \rangle_g &= \frac{1}{g} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{g} \int_{\Omega} u g dx \right) v g dx = \int_{\Omega} u g dx \int_{\Omega} v dx, \\ \langle u, M_1 v \rangle_g &= \int_{\Omega} u \left(\int_{\Omega} v dx \right) g dx = \int_{\Omega} v dx \int_{\Omega} u g dx \end{aligned}$$

olduğundan M_g 'nin adjoint operatörü M_1 ve M_1 'nin adjoint operatörü M_g olur. Ayrıca M_g ve M_1 operatörleri sınırlı olur. M_g operatörünün çekirdeği $\mathcal{N}(M_g)$, görüntü kümesi ise $\mathcal{R}(M_g)$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(M_g) &= \mathcal{R}(R_g) = K_{g,g}, \quad \mathcal{N}(M_1) = \mathcal{R}(R_1) = K_{g,1}, \\ \mathcal{N}(R_g) &= \mathcal{R}(M_g) = C_g, \quad \mathcal{N}(R_1) = \mathcal{R}(M_1) = \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

sağlanır. Bu durumda

$$H_g \cap \mathcal{N}(M_g) = H_{g,g}, H_g \cap \mathcal{N}(M_1) = H_{g,1}, H_g \cap \mathcal{R}(M_g) = C_g$$

olur. $u \in K_{g,1}$ ve $v \in C_g$ için

$$\langle u, v \rangle_g = \int_{\Omega} u \cdot v g dx = \int_{\Omega} u \cdot \frac{m}{g} g dx = m \int_{\Omega} u dx = 0$$

olduğundan $\mathcal{N}(M_1) \perp_g \mathcal{R}(M_g)$ olur. Benzer şekilde $u \in K_{g,g}$ ve $v \in \mathbb{R}^2$ için

$$\langle u, v \rangle_g = \int_{\Omega} u \cdot v g dx = \int_{\Omega} u \cdot m g dx = m \int_{\Omega} u g dx = 0$$

olduğundan $\mathcal{N}(M_g) \perp_g \mathcal{R}(M_1)$ olur [18].

g-Laplace operatörü

g - Laplace operatörü

$$-\Delta_g u = -\frac{1}{g}(\nabla \cdot g \nabla u)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$-\Delta_g u = -\Delta u - \frac{1}{g}(\nabla g \cdot \nabla)u$$

olur [18].

2.3.1. Teorem (Lax-Milgram Teoremi) [40]

Ayrılabilir bir X Hilbert uzayında tanımlı $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bilineer formu

1. $|a(p, q)| \leq c_1 \|p\|_X \|q\|_X$
2. $a(p, p) \geq c_2 \|p\|_X^2$

şartlarını sağlıyorsa X uzayında her bir sürekli b lineer fonksiyoneli için

$$b(q) = a(p, q), \forall q \in X$$

olacak şekilde b 'ye bağlı tek bir $p \in X$ vardır. Ayrıca $\|p\|_X \leq \sup_{\|q\|_X \leq 1} |b(q)|$ sağlanır.

$$X = \{p \in H_{per}^1(\Omega, g, \mathbb{R}) : \int_{\Omega} p dx = 0\}$$

ile tanımlanan X uzayı $\|p\|_X^2 = \|\nabla u\|_g^2 = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_g$ normuyla bir Hilbert uzayıdır. $p, q \in H_{per}^1(\Omega, g, \mathbb{R})$ ve $g \in C_{per}^\infty(\Omega)$ olmak üzere

$$a(p, q) = \langle -\Delta_g p, q \rangle_g$$

ile tanımlanan bilineer formu için

$$\begin{aligned} a(p, q) &= \langle -\Delta_g p, q \rangle_g = \left\langle -\frac{1}{g}(\nabla \cdot g \nabla) p, q \right\rangle_g \\ &= \int_{\Omega} -\frac{1}{g}(\nabla \cdot g \nabla) p \cdot q g dx = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot g \nabla) p \cdot q dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} q + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} q + g \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} q + g \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} q \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(g \frac{\partial p}{\partial x_1} q \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(g \frac{\partial p}{\partial x_2} q \right) - g \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_1} - g \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) g dx \\ &= \langle \nabla p, \nabla q \rangle_g \end{aligned}$$

olduğundan

$$|a(p, q)| = |\langle \nabla p, \nabla q \rangle_g| \leq \|\nabla p\|_g \|\nabla q\|_g \leq \|p\|_X \|q\|_X,$$

$$a(p, p) = \langle -\Delta_g p, p \rangle_g = \langle \nabla p, \nabla p \rangle_g = \|\nabla p\|_g^2 \geq \|p\|_X^2$$

eşitsizlikleri ve dolayısıyla da Lax-Milgram teoreminin şartları sağlanır.

Bir $v \in L_{per}^2(\Omega, g)$ için

$$b(q) = \left\langle -\frac{1}{g} \nabla \cdot (gv), q \right\rangle_g$$

ile tanımlanan $b(q)$ lineer fonksiyoneli

$$|b(q)| = \left| \left\langle -\frac{1}{g} \nabla \cdot (gv), q \right\rangle_g \right| \leq \|v\|_g \|\nabla q\|_g$$

eşitsizliğini sağladığından X uzayında süreklidir. Dolayısıyla her bir $v \in L_{per}^2(\Omega, g)$ için

$$b(q) = a(p, q) \Rightarrow \left\langle -\frac{1}{g} \nabla \cdot (gv), q \right\rangle_g = \langle -\Delta_g p, q \rangle_g, \forall q \in X$$

denklemini sağlayan tek bir $p \in X$ vardır. Bu durumda

$$\left\langle -\frac{1}{g} \nabla \cdot (gv), q \right\rangle_g = \left\langle -\frac{1}{g} (\nabla \cdot g \nabla) p, q \right\rangle_g$$

eşitliği düzenlendiğinde

$$\left\langle \frac{1}{g} \nabla \cdot g(v - \nabla p), q \right\rangle_g = 0$$

elde edilir. Burada $u = v - \nabla p$ için $\nabla \cdot (gu) = 0$ olduğundan $u \in H_g$ bulunur. $\nabla p \in Q$ olduğu ise aşıkardır [18].

2.3.2.Önerme [18]

H_g uzayı $Q^\perp$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

İspat

$\nabla \varphi \in Q$ ve $u \in (C_{per}^\infty(\Omega))^2$ olsun. Buna göre u ve φ fonksiyonları Ω bölgesinde periyodik olduğundan

$$\langle u, \nabla \varphi \rangle_g = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \varphi) g dx = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot (gu)) \varphi dx + \int_{\partial \Omega} (gu \cdot n) \varphi ds = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot (gu)) \varphi dx$$

yazılabilir. Dolayısıyla $u \in Q^\perp$ olması için $\nabla \cdot (gu) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$Q^\perp = \{u \in C_{per}^\infty(\Omega) : \nabla \cdot (gu) = 0\}$$

olur.

$C_{per}^\infty(\Omega)$ uzayında $u_n \rightarrow u$ ve $\int_{\Omega} u_n dx = 0$ olduğunda

$$\int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} (u - u_n) dx \leq c(\Omega) \|u - u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

olduğundan $\int_{\Omega} u dx = 0$ olur. Dolayısıyla H_g uzayı kapalıdır.

Sonuç olarak herhangi bir $v \in L_{per}^2(\Omega, g)$ elemanı $u \in H_g$ ve $\nabla p \in Q$ olmak üzere tek bir şekilde $v = u + \nabla p$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla $L_{per}^2(\Omega, g) = H_g \oplus Q$ olarak yazılabilir. Bu eşitlikten hareketle $H_g^\perp \subset Q$ olduğu söylenebilir.

Ayrıca $\nabla p \in Q$ ise herhangi bir $u \in H_g$ için

$$\begin{aligned} \langle \nabla p, u \rangle_g &= \int_{\Omega} \nabla p \cdot u g dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} u_1 g + \frac{\partial p}{\partial x_2} u_2 g \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (p u_1 g) + \frac{\partial}{\partial x_2} (p u_2 g) - p \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 g) - p \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 g) \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot (gu) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\nabla p \in H_g^\perp$ ve $Q \subset H_g^\perp$ olur. Dolayısıyla $H_g^\perp = Q$ olur.

$k = \frac{\int_\Omega v dx}{\int_\Omega \frac{1}{g} dx}$ olarak tanımlandığında $\frac{k}{g} \in C_g$ olur. $u \in H_g, \nabla p \in Q$ için $v = u + \nabla p$ ve $w = u - \frac{k}{g}$ olsun. Buna göre

$$\int_\Omega w dx = \int_\Omega (u - \frac{k}{g}) dx = \int_\Omega (v - \nabla p - \frac{k}{g}) dx = - \int_\Omega \nabla p dx = 0$$

olduğundan $w \in H_{g,1}$ olur. Sonuç olarak herhangi bir $v \in L_{per}^2(\Omega, g)$ elemanı $w \in H_g, \frac{k}{g} \in C_g$ ve $\nabla p \in Q$ olmak üzere tek bir şekilde $v = u + \nabla p = w + \frac{k}{g} + \nabla p$ olarak yazılabilir. Böylece $L_{per}^2(\Omega, g) = H_g \oplus Q = H_{g,1} \oplus C_g \oplus Q$ olur. Ayrıca

$$\langle w, \frac{k}{g} \rangle_g = \int_\Omega w \frac{k}{g} g dx = \int_\Omega w dx \cdot \frac{1}{\int_\Omega \frac{1}{g} dx} \int_\Omega v dx = 0$$

olduğu için $H_{g,1}^\perp \subset C_g$ ve $\nabla \cdot (gw) = 0$ olduğu için de

$$\langle w, \nabla p \rangle_g = \int_\Omega w \cdot \nabla p g dx = - \int_\Omega p \nabla \cdot (gw) dx = 0$$

olur. Bu durumda $C_g \subset H_{g,1}^\perp$ ve dolayısıyla da $H_{g,1}^\perp = C_g$ olur [18].

Helmholtz-Leray projeksiyonu

$v \in L_{per}^2(\Omega, g), u \in H_g, \nabla p \in Q, w \in H_{g,1}$ ve $\frac{k}{g} \in C_g$ olmak üzere $v = u + \nabla p = w + \frac{k}{g} + \nabla p$ için

$$P_g : L_{per}^2(\Omega, g) \rightarrow H_g, P_g v = u,$$

$$P_{g,1} : L_{per}^2(\Omega, g) \rightarrow H_{g,1}, P_{g,1} v = w$$

Helmholtz-Leray ortogonal projeksiyon operatörleri tanımlanabilir. Bu durumda $\nabla p \in Q$ için $P_g(\nabla p) = 0$ ve $P_{g,1}(\nabla p) = 0$ olur [18].

2.3.1. Poincare eşitsizlikleri

2.3.3. Teorem [18]

$g(x) \in C_{per}^\infty(\Omega)$, $0 < m \leq g(x, y) \leq M$, $\forall (x, y) \in \Omega$ ve $|\nabla \cdot (gc)| \geq \tilde{\alpha}(g)|c|$ olsun. Buna göre $V_g = \{u \in (H_{per}^1(\Omega))^2 : \Omega \text{ üzerinde } \nabla \cdot (gu) = 0\}$ uzayında $\forall u \in V_g$ için

$$k_1 \|u\|_g \leq \|\nabla u\|_g$$

olacak şekilde g 'ye bağlı pozitif bir k_1 sabiti vardır.

İspat

$M_1 u = \int_{\Omega} u dx$ ise

$$M_1^2 u = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u dx \right) dx = \int_{\Omega} u dx \int_{\Omega} dx = M_1 u \cdot \int_0^1 \int_0^1 dx dy = M_1 u$$

ve

$$\langle M_1 u, v \rangle = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u dx \right) v dx = \int_{\Omega} u dx \int_{\Omega} v dx = \int_{\Omega} u dx \cdot M_1 v = \int_{\Omega} u M_1 v dx = \langle u, M_1 v \rangle$$

olduğundan M_1 ortogonal projeksiyon operatörü olur. Buna göre $u - M_1 u \perp_1 M_1 u$ olduğundan

$$\|u\|^2 = \|u - M_1 u + M_1 u\|^2 = \|u - M_1 u\|^2 + \|M_1 u\|^2$$

yazılabilir.

$P_g : L^2(\Omega, g) \rightarrow H_g$ ortogonal projeksiyon olduğundan $u \in H_g$ için $P_g M_1 u \in H_g$ ve $u - P_g M_1 u \in H_g$ olur. Dolayısıyla $M_1 u - P_g M_1 u \perp_g u - P_g M_1 u$ ve

$$\|u - M_1 u\|_g^2 = \|u - P_g M_1 u + P_g M_1 u - M_1 u\|_g^2 = \|u - P_g M_1 u\|_g^2 + \|M_1 u - P_g M_1 u\|_g^2$$

yazılabilir.

$v \in L^2(\Omega, g)$ ve $\nabla \cdot gv \neq 0$ için

$$\frac{1}{g}(\nabla \cdot gv) = \frac{1}{g}(\nabla \cdot g \nabla)q_v, v = P_g v + \nabla q_v$$

olacak şekilde bir ∇q_v elemanı vardır. Dolayısıyla $M_1 u = P_g M_1 u + \nabla q_{M_1 u}$ ve

$$\|M_1 u - P_g M_1 u\|_g = \|\nabla q_{M_1 u}\|_g = |\nabla \cdot g M_1 u| \geq \alpha \|M_1 u\|_g$$

yazılabilir. Ayrıca

$$M\|u - M_1 u\|^2 \geq \|u - M_1 u\|_g^2 \geq \alpha^2 \|M_1 u\|_g^2 \geq m\alpha^2 \|M_1 u\|^2$$

sağlanır. Sonuç olarak $4\pi^2 \|u - M_1 u\|^2 \leq \|\nabla u\|^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|u\|_g^2 &\leq M\|u\|^2 \\ &\leq M(\|u - M_1 u\|^2 + \frac{M}{m\alpha^2} \|u - M_1 u\|^2) \\ &\leq \frac{Mm\alpha^2 + M^2}{4\pi^2 m^2 \alpha^2} \|\nabla u\|_g^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.4. Teorem [18]

$g(x) \in C_{per}^\infty(\Omega)$ ve $0 < m \leq g(x, y) \leq M, \forall (x, y) \in \Omega$ olsun. Buna göre

$$V_{g,1} = \{u \in (H_{per}^1(\Omega))^2 : \Omega \text{ üzerinde } \nabla \cdot (gu) = 0, \int_{\Omega} u dx = 0\}$$

uzayında $\forall u \in V_{g,1}$ için

$$k_2 \|u\|_g \leq \|\nabla u\|_g$$

olacak şekilde g 'ye bağılı pozitif bir k_2 sabiti vardır.

İspat

$u \in V_{g,1}$ için $M_1 u = \int_{\Omega} u dx = 0$ olduğundan $4\pi^2 \|u - M_1 u\|^2 = 4\pi^2 \|u\|^2 \leq \|\nabla u\|^2$ olur. Buna göre

$$\|\nabla u\|_g^2 \geq m \|\nabla u\|^2 \geq 4\pi^2 m \|u\|^2 \geq \frac{4\pi^2 m}{M} \|u\|_g^2$$

elde edilir.

2.3.5. Teorem [18]

$g(x) \in C_{per}^{\infty}(\Omega)$ ve $0 < m \leq g(x, y) \leq M, \forall (x, y) \in \Omega$ olsun. Buna göre

$$V_{g,g} = \{u \in (H_{per}^1(\Omega))^n : \Omega \text{ üzerinde } \nabla \cdot (gu) = 0, \int_{\Omega} u g dx = 0\}$$

uzayında $\forall u \in V_{g,g}$ için

$$k_3 \|u\|_g \leq \|\nabla u\|_g$$

olacak şekilde g 'ye bağılı bir k_3 sabiti vardır. $\|\nabla g\|_{\infty}$ 'nin küçük olması halinde k_3 pozitif olur.

İspat

$u \in V_{g,g}$ için

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_g &\geq \left\| \frac{1}{g} \nabla(gu) \right\|_g - \left\| gu \nabla \left(\frac{1}{g} \right) \right\|_g \\ &\geq \left(\frac{2\pi}{\sqrt{M}} - \frac{1}{m^{3/2}} \|\nabla g\|_{\infty} \right) \|gu\| \\ &\geq \left(\frac{2\pi m}{M} - \frac{\|\nabla g\|_{\infty}}{\sqrt{mM}} \right) \|u\|_g \end{aligned}$$

elde edilir.

Not

Tezin bundan sonraki kısımlarında $H_{g,g}$ uzayı yerine H_g ve $V_{g,g}$ uzayı yerine V_g notasyonları kullanılacaktır.

2.4. g-Stokes Operatörü

g-Stokes operatörü

$$A_g u = P_g \left(-\frac{1}{g} (\nabla \cdot g \nabla) u \right) = P_g (-\Delta_g u)$$

ve

$$((u, v))_g = \langle A_g u, v \rangle_g$$

olarak tanımlansın.

2.4.1. Önerme [14, 18]

Yukarıdaki gibi tanımlanan A_g dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. A_g pozitif, self-adjoint ve kompakt tersi olan bir dönüşüm olup tanım kümesi $D(A_g) = V_g \cap H^2(\Omega, g)$ olur.
2. $\lambda_g = \frac{4\pi^2 m}{M}$ ve A_g 'nin en küçük özdeğeri λ_1 olmak üzere $0 < \lambda_g \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ olacak şekilde A_g 'nin sayılabilir özdeğeri vardır.
3. A_g nin λ_i özdeğerlerine karşılık gelen $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ özfonksiyonlar dizisi H_g uzayının ortonormal bir bazını oluşturur.

A_g dönüşümü ile P_g ortogonal dönüşümü self-adjoint olduğundan $u \in D(A_g)$ için kısmi integrasyon ile

$$\langle A_g u, u \rangle_g = \langle P_g \left(-\frac{1}{g} (\nabla \cdot g \nabla) u \right), u \rangle_g = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u) g dx = \langle \nabla u, \nabla u \rangle_g$$

olur. Bunun sonucunda $u \in V_g$ için

$$\|A_g^{1/2}u\|_g^2 = \|\nabla u\|_g^2$$

yazılabilir. A_g dönüşümünün kesirli kuvvetlerinin tanımı ve özellikleri için [40, 45] kaynaklarına bakılabilir.

Her $\theta \in W_g$ için

$$\tau \in W_g \rightarrow ((\theta, \tau))_g \in \mathbb{R}$$

fonksiyoneli W_g üzerinde lineer sürekli olduğundan W'_g uzayında

$$\forall \tau \in W_g, \quad \langle \tilde{A}_g \theta, \tau \rangle_g = ((\theta, \tau))_g$$

olacak şekilde bir $\tilde{A}_g \theta$ elemanı vardır.

2.5. Trilineer Form ve Bilineer Dönüşüm

u, v, w fonksiyonları $L_{per}^2(\Omega, g)$ uzayının uygun alt uzaylarından olmak üzere bilinear dönüşüm

$$B_g(u, v) = P_g((u \cdot \nabla)v)$$

ile tanımlanırken trilineer form da

$$b_g(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j g dx$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla $\langle B_g(u, v), w \rangle_g = b_g(u, v, w)$ yazılabilir.

Yeterince düzgün $u, v, w \in H_g$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
 b_g(u, v, w) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j g dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} g u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx \\
 &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial g u_i}{\partial x_i} v_j w_j dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} g u_i v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx \\
 &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} g u_i v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx \\
 &= -b_g(u, w, v)
 \end{aligned}$$

olur. Bunun sonucunda $b_g(u, v, v) = 0$ elde edilir.

Her $u, v \in D(A_g)$ için

$$|B_g(u, v)| \leq \|u\|_g^{1/2} \|A_g u\|_g^{1/2} \|\nabla v\|_g$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 |b_g(u, u, v)| &\leq c \|u\|_{L^4(\Omega, g)}^2 \|v\|_g \leq c \|u\|_g \|\nabla u\|_g \|v\|_g, \\
 \|B_g(u, u)\|_{V'_g} &\leq c \|u\|_g \|\nabla u\|_g
 \end{aligned}$$

sağlanır [14, 18].

u, θ, τ fonksiyonları $L^2(\Omega, g)$ uzayının uygun alt uzaylarında tanımlı olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_g(u, \theta) &= \tilde{P}_g((u \cdot \nabla) \theta), \\
 \tilde{b}_g(u, \theta, \tau) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_i(x) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} \tau(x) g dx
 \end{aligned}$$

ile tanımlandığında $u \in V_g$ ve $\theta \in W_g$ için

$$\tau \in W_g \rightarrow \tilde{b}_g(u, \theta, \tau) \in \mathbb{R}$$

fonksiyoneli sürekli olduğundan W'_g uzayında

$$\forall \tau \in W_g, \quad \langle \tilde{B}_g(u, \theta), \tau \rangle_g = \tilde{b}_g(u, \theta, \tau)$$

olacak şekilde bir $\tilde{B}_g(u, \theta)$ elemanı vardır.

$u \in V_g$ için $C_g u = P_g(\frac{1}{g}(\nabla g \cdot \nabla)u)$ olarak tanımlandığında

$$\langle C_g u, v \rangle_g = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{g} D_i g (D_i u_j) v_j g dx = b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, v\right)$$

olur. Bu durumda

$$|b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, v\right)| \leq \frac{\|\nabla g\|_{\infty}}{m} \|\nabla u\|_g \|v\|_g,$$

$$\|C_g u\|_{V'_g} \leq \frac{\|\nabla g\|_{\infty}}{m \lambda_1^{1/2}} \|\nabla u\|_g$$

sağlanır.

$\theta \in W_g$ için $\tilde{C}_g \theta = \tilde{P}_g(\frac{1}{g}(\nabla g \cdot \nabla)\theta)$ olarak tanımlandığında

$$\langle \tilde{C}_g \theta, \tau \rangle_g = \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta, \tau\right)$$

olacak şekilde bir $\tilde{C}_g \in W'_g$ tanımlanabilir.

$\theta \in W_g$ için $\tilde{D}_g \theta = \tilde{P}_g(\frac{\Delta g}{g}\theta)$ olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned} \langle \tilde{D}_g \theta, \tau \rangle_g &= \langle \tilde{P}_g\left[\frac{\Delta g}{g}\theta\right], \tau \rangle_g = \left\langle \frac{\Delta g}{g}\theta, \tilde{P}_g \tau \right\rangle_g = \left\langle \frac{\Delta g}{g}\theta, \tau \right\rangle_g = \int_{\Omega} \frac{\Delta g}{g} \theta \tau g dx \\ &= \int_{\Omega} \Delta g \theta \tau dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \theta \tau dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \theta \tau \right) - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \tau - \frac{\partial g}{\partial x_i} \theta \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right] dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \tau dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \theta dx = -\tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta, \tau\right) - \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tau, \theta\right) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\tilde{D}_g \in W'_g$ tanımlanabilir.

2.5.1. Lemma [8, 18]

$\forall u \in H^1(\Omega, g)$ için

$$\|u\|_{L^4(\Omega, g)} \leq c \|u\|_g^{1/2} \|\nabla u\|_g^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.5.2. Lemma [18]

$u(t) \in L^2(0, T; V_g)$ için $B_g(u, u)(t) \in L^1(0, T; V'_g)$ ve $C_g u(t) \in L^2(0, T; H_g)$ olur.

İspat

$u, v \in V_g$ için

$$|\langle B_g(u, u), v \rangle_g| = |b_g(u, u, v)| \leq c \|u\|_{L^4(\Omega, g)}^2 \|\nabla v\|_g \leq c \|u\|_{L^4(\Omega, g)}^2 \|v\|_{V_g}$$

yazılabilir. Dolayısıyla Lemma 2.5.2'den

$$\|B_g(u, u)\|_{V'_g} \leq c \|u\|_{L^4(\Omega, g)}^2 \leq c \|u\|_g \|\nabla u\|_g \leq c \|u\|_{V_g}^2$$

elde edilir ve $B_g(u, u) \in L^1(0, T; V'_g)$ bulunur.

$$|\langle C_g u, v \rangle_g| = \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{g} D_i g (D_i u_j) v_j g dx \right| \leq c \|\nabla g\|_{\infty} \|\nabla u\|_g \|v\|_g$$

olduğundan

$$\|C_g u\|_{V'_g} \leq c \|\nabla g\|_{\infty} \|\nabla u\|_g$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\int_0^T \|C_g u\|_{V'_g}^2 dt \leq c \|\nabla g\|_\infty^2 \int_0^T \|\nabla u\|_g^2 dt \leq c \|\nabla g\|_\infty^2 \int_0^T \|u\|_{V_g}^2 dt < \infty$$

olacağından $C_g u \in L^2(0, T; H_g)$ dolayısıyla da $C_g u \in L^2(0, T; V'_g)$ elde edilir.

g – Laplace operatörü

$$-\Delta_g u = -\frac{1}{g}(\nabla \cdot g \nabla u) = -\Delta u - \frac{1}{g}(\nabla g \cdot \nabla)u$$

olarak tanımlandığından $u, v \in V_g$ için

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{g}(\nabla \cdot g \nabla)u, v \right\rangle_g &= \langle -\Delta u, v \rangle_g - \left\langle \frac{1}{g}(\nabla g \cdot \nabla)u, v \right\rangle_g, \\ \langle A_g u, v \rangle_g + \langle C_g u, v \rangle_g &= \langle -\Delta u, v \rangle_g \end{aligned}$$

olur.

2.5.3. Teorem (Kompaktlık Teoremi I) [45]

$-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $L^2(a, b; V_g)$ uzayında tanımlı bir u_n dizisi bu uzayda sınırlı ve her bir teriminin zamana göre bir $1 < p < \infty$ sayısı için $L^p(a, b; V'_g)$ uzayında türevi var ve $D_t u_n$ dizisi de bu uzayda sınırlı olsun. Bu durumda u_n dizisinin yine u_n ile gösterilen bir alt dizisi ile $u \in L^2(a, b; V_g)$ ve $g \in L^p(a, b; V'_g)$ fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $L^2(a, b; V_g)$ uzayında u_n dizisi u 'ya zayıf yakınsaktır.
2. $L^p(a, b; V'_g)$ uzayında $D_t u_n$ dizisi g 'ye zayıf yakınsaktır.
3. $L^2(a, b; H_g)$ uzayında u_n dizisi u 'ya güçlü yakınsaktır.
4. $L^2(a, b; V'_g)$ uzayında u_n dizisi u 'ya güçlü yakınsaktır.
5. Hemen hemen her $t \in (a, b)$ için V'_g uzayında $u_n(t)$ dizisi $u(t)$ 'ye güçlü yakınsaktır.
6. Hemen hemen her $t \in (a, b)$ için H_g uzayında $u_n(t)$ dizisi $u(t)$ 'ye güçlü yakınsaktır.

2.5.4. Teorem (Kompaktlık Teoremi I) [45]

$L_{loc}^2(0, \infty; V_g)$ uzayında tanımlı bir u_n dizisi bu uzayda sınırlı ve her bir teriminin zamana göre bir $1 < p < \infty$ sayısı için $L_{loc}^p(0, \infty; V_g')$ uzayında türevi var ve $D_t u_n$ dizisi de bu uzayda sınırlı olsun. Bu durumda u_n dizisinin yine u_n ile gösterilen bir alt dizisi ile $u \in L_{loc}^2(0, \infty; V_g)$ ve $g \in L_{loc}^p(0, \infty; V_g')$ fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $L_{loc}^2(0, \infty; V_g)$ uzayında u_n dizisi u 'ya zayıf yakınsaktır.
2. $L_{loc}^p(0, \infty; V_g')$ uzayında $D_t u_n$ dizisi g 'ye zayıf yakınsaktır.
3. $L_{loc}^2(0, \infty; H_g)$ uzayında u_n dizisi u 'ya güçlü yakınsaktır.
4. $L_{loc}^2(0, \infty; V_g')$ uzayında u_n dizisi u 'ya güçlü yakınsaktır.
5. Hemen hemen her $t \in (0, \infty)$ için V_g' uzayında $u_n(t)$ dizisi $u(t)$ 'ye güçlü yakınsaktır.
6. Hemen hemen her $t \in (0, \infty)$ için H_g uzayında $u_n(t)$ dizisi $u(t)$ 'ye güçlü yakınsaktır.

2.6. Ω_g Bölgesi Üzerinde Bénard Problemi

Bénard probleminin Ω_g bölgesi üzerinde zayıf ve güçlü çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenirken başta Roh'un doktora tezi [18] olmak üzere [14, 33, 34, 40, 43, 46] çalışmaları esas alınmıştır.

$\Omega_g = \Omega_2 \times (0, g)$ sıvı ile dolu olan bölge, $\Omega_2 = (0, 1) \times (0, 1)$ ve $g = g(y_1, y_2)$ fonksiyonu Ω_2 bölgesinde tanımlı düzgün bir fonksiyon olup $\forall (y_1, y_2) \in \Omega_2$ için $0 < m_0 \leq g(y_1, y_2) \leq M_0$ şartlarını sağlasın. Bu durumda Ω_2 bölgesi üzerinde

$$\|\nabla g\|_\infty = \sup_{\Omega_2} |\nabla g| < \infty, \|\Delta g\|_\infty = \sup_{\Omega_2} |\Delta g| < \infty$$

eşitsizlikleri sağlanır. Üç boyutlu Ω_g bölgesi üzerinde Bénard problemi başlangıç ve sınır şartları ile birlikte aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U - \nu \Delta U + \nabla P &= \xi \Theta + F_1(t), & \Omega_g \times [0, T], \\ \nabla \cdot U &= 0, & \Omega_g \times [0, T], \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (U \cdot \nabla)\Theta - \kappa \Delta \Theta &= F_2(t), & \Omega_g \times [0, T]. \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere $U = U(y_1, y_2, y_3) = (U_1, U_2, U_3)$ vektörel fonksiyonu ile $\Theta = \Theta(y, t)$ ve $P = P(y, t)$ fonksiyonları $i = 1, 2$ için periyodik olsun:

$$U(y, t) = U(y + e_i, t), \Theta(y, t) = \Theta(y + e_i, t), P(y, t) = P(y + e_i, t) \quad (2.1)$$

n ile birim dış normal vektörü ve

$$\begin{aligned} \partial_{\text{alt}}\Omega_g &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \Omega_g : y_3 = 0\}, \\ \partial_{\text{üst}}\Omega_g &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \Omega_g : y_3 = g(y_1, y_2)\}, \end{aligned}$$

ile Ω_g bölgesinin alt ve üst yüzeyleri gösterilmek üzere problemin bu yüzeylerdeki sınır şartları ise

$$\partial_{\text{alt}}\Omega_g \cup \partial_{\text{üst}}\Omega_g \text{ üzerinde, } U \cdot n = 0, \quad \nabla \Theta \cdot n = 0, \quad (2.2)$$

olsun. Ayrıca

$$\Theta|_{y_3=g} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y_3}|_{y_3=g} = 0, \quad (2.3)$$

olsun. Başlangıç şartları ise Ω_g üzerinde,

$$U(y, 0) = U_0(y), \quad \Theta(y, 0) = \Theta_0(y), \quad P(y, 0) = P_0(y)$$

olarak verilsin. Ayrıca problemdeki fonksiyonların ortalamaları da

$$\int_{\Omega_g} U dy = 0, \quad \int_{\Omega_g} \Theta dy = 0, \quad \int_{\Omega_g} P dy = 0$$

eşitliklerini sağlasın.

2.6.1. Ω_3 Bölgesi

$y_1 = x_1, y_2 = x_2$ ve $\frac{y_3}{g(y_1, y_2)} = x_3$ dönüşümüyle Ω_g bölgesi $\Omega_3 = \Omega_2 \times (0, 1)$ bölgesine dönüşür.

Nitekim, $\forall (y_1, y_2) \in (0, 1) \times (0, 1)$ için $0 < m_0 \leq g(y_1, y_2) \leq M_0$ olduğundan

$$0 < y_3 < g(y_1, y_2) \Rightarrow 0 < x_3 g(y_1, y_2) < g(y_1, y_2) \Rightarrow 0 < x_3 < 1$$

olur. Bu dönüşümün Jacobian matrisi ise

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-x_3}{g(x_1, x_2)} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{-x_3}{g(x_1, x_2)} \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{1}{g(x_1, x_2)} \end{pmatrix}$$

olur.

U fonksiyonu $U = (U_1(y_1, y_2), U_2(y_1, y_2), U_3(y_1, y_2, y_3)) = u(x_1, x_2, x_3)$ olarak, Θ ve P fonksiyonları ise sırasıyla $\Theta(y_1, y_2, y_3) = \theta(x_1, x_2, x_3)$ ve $P(y_1, y_2, y_3) = p(x_1, x_2, x_3)$ olarak alındığında problemde yer alan terimler bu dönüşüm altında aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \nabla U &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{1}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \\ \nabla \cdot U &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ (U \cdot \nabla) U &= \begin{pmatrix} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{1}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} (u_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}) \end{pmatrix}^T, \\ \Delta U_1 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \\ \Delta U_2 &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta U_3 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_1} + 2 \frac{x_3}{g^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{x_3}{g} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \frac{\partial g}{\partial x_1} \\
&\quad - \frac{x_3}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2} + 2 \frac{x_3}{g^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^2 \\
&\quad - \frac{x_3}{g} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}, \\
\nabla \Theta &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{1}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right), \\
(U \cdot \nabla) \Theta &= u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + u_3 \frac{1}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(u_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} \right), \\
\Delta \Theta &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_1} + 2 \frac{x_3}{g^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{x_3}{g} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \frac{\partial g}{\partial x_1} \\
&\quad - \frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2} + 2 \frac{x_3}{g^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^2 \\
&\quad - \frac{x_3}{g} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}, \\
\nabla P &= \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right).
\end{aligned}$$

(2.2) sınır şartından $\partial_{\text{alt}} \Omega_g \cup \partial_{\text{ust}} \Omega_g$ bölgesi üzerinde $U \cdot n = 0$ için

$\partial_{\text{alt}} \Omega_g = \{(y_1, y_2, y_3) \in \Omega_g : y_3 = 0\}$ bölgesinin birim dış normal vektörü $n = (0, 0, -1)$ olacağından

$$\begin{aligned}
U \cdot n &= (U_1, U_2, U_3) \cdot (0, 0, -1) = -U_3(y_1, y_2, 0) = -u_3(x_1, x_2, 0) \\
&\Rightarrow u_3(x_1, x_2, 0) = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. $\partial_{\text{ust}} \Omega_g = \{(y_1, y_2, y_3) \in \Omega_g : y_3 = g(y_1, y_2)\}$ bölgesinin normal vektörü ise birim olacak şekilde seçilen bir α sayısı ile $n = \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{\partial g}{\partial y_1}, -\frac{\partial g}{\partial y_2}, 1 \right)$ olarak yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}
U \cdot n &= 0 \Rightarrow -\frac{\partial g}{\partial y_1} U_1 - \frac{\partial g}{\partial y_2} U_2 + U_3 = 0 \\
&\Rightarrow -\frac{\partial g}{\partial x_1} u_1(x_1, x_2, 1) - \frac{\partial g}{\partial x_2} u_2(x_1, x_2, 1) + u_3(x_1, x_2, 1) = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

bulunur. Benzer şekilde $\partial_{\text{alt}} \Omega_g \cup \partial_{\text{ust}} \Omega_g$ bölgesi üzerinde $\nabla \Theta \cdot n = 0$ olduğundan

$\partial_{\text{alt}} \Omega_g = \{(y_1, y_2, y_3) \in \Omega_g : y_3 = 0\}$ bölgesinde

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) = 0 \tag{2.6}$$

ve $\partial_{\text{ust}}\Omega_g = \{(y_1, y_2, y_3) \in \Omega_g : y_3 = g(y_1, y_2)\}$ bölgesinde

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1}(x_1, x_2, 1) + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}(x_1, x_2, 1) = \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_1, x_2, 1) \quad (2.7)$$

bulunur.

Ayrıca (2.3) sınır şartından

$$\theta(x_1, x_2, 1) = 0 \text{ ve } \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_1, x_2, 1) = 0 \quad (2.8)$$

olur.

2.6.2. Ortalama dönüşümü

Ortalama dönüşümü $\varphi \in L^2(\Omega, g)$ için

$$(M\varphi)(y_1, y_2) = \frac{1}{g} \int_0^g \varphi(y_1, y_2, y_3) dy_3$$

olarak tanımlanır. $u = (u_1, u_2, u_3) \in (L^2(\Omega, g))^3$ için de ortalama dönüşümü

$$\tilde{M}u = (Mu_1, Mu_2, 0)$$

olarak tanımlanır [18].

2.6.1. Önerme [18]

Ω_g bölgesinde $\nabla \cdot U = 0$ ve $\partial_{\text{alt}}\Omega_g \cup \partial_{\text{ust}}\Omega_g$ bölgesinde $U \cdot n = 0$ olsun. Bu durumda $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ ve $y_3 = x_3 g(x_1, x_2)$ olmak üzere Ω_2 bölgesinde $U = (U_1(y_1, y_2, y_3), U_2(y_1, y_2, y_3), U_3(y_1, y_2, y_3)) = u(x_1, x_2, x_3)$ için $\nabla \cdot (g\tilde{M}u) = 0$ olur.

İspat

Öncelikle $\nabla \cdot U$ terimine ortalama dönüşümü uygulanır:

$$\nabla \cdot U = 0 \Rightarrow M(\nabla \cdot U) = 0 \Rightarrow \frac{1}{g(y_1, y_2)} \int_0^{g(y_1, y_2)} (\nabla \cdot U) dy_3 = 0.$$

$i = 1, 2$ için $v_i = Mu_i = \int_0^1 u_i(x_1, x_2, x_3) dx_3$ olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} &g\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial g}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} v_2 - \frac{\partial g}{\partial x_1} u_1(x_1, x_2, 1) - \frac{\partial g}{\partial x_2} u_2(x_1, x_2, 1) \\ &+ u_3(x_1, x_2, 1) - u_3(x_1, x_2, 0) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4) ile (2.5) eşitliklerinin kullanılmasıyla Ω_2 bölgesinde

$$\begin{aligned} &g\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial g}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} v_2 = 0, \\ &\Rightarrow g\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \cdot (v_1, v_2) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) \cdot (v_1, v_2) = 0, \\ &\Rightarrow g \nabla \cdot \tilde{M}u + \nabla g \cdot \tilde{M}u = 0, \\ &\Rightarrow \nabla \cdot (g \tilde{M}u) = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca; $U = (U_1(y_1, y_2), U_2(y_1, y_2), U_3(y_1, y_2, y_3)) = u(x_1, x_2, x_3)$ özel durumu için

$$\begin{aligned} \nabla \cdot U = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{g} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -g\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \Rightarrow \int \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = - \int g\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_3, \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= -gx_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + c(x_1, x_2) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (2.4) eşitliği gereği $u_3(x_1, x_2, 0) = 0$ olduğu için de $c = 0$ ve

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = -gx_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$$

olur. Önerme 2.6.1'in sonucu olarak $\nabla \cdot (g\tilde{M}u) = 0$ eşitliğinden

$$-g\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial g}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}u_2$$

yazılabileceğinden

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = x_3\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}u_2\right) \quad (2.9)$$

olur. Bir başka deyişle u_3 fonksiyonunun varlığı u_1 ve u_2 fonksiyonlarının varlığına bağlıdır. Ayrıca, u_1 ve u_2 fonksiyonlarının sınırlı olması halinde u_3 fonksiyonu da sınırlı olur [18].

Şimdi, M ve $\tilde{M}$ operatörlerinin probleme uygulanması halinde problemde yer alan terimlerin değişimi incelensin.

$y_1 = x_1, y_2 = x_2$ ve $y_3 = x_3 \cdot g(y_1, y_2)$ için

$$(M\varphi)(y_1, y_2) = \frac{1}{g} \int_0^g \varphi(y_1, y_2, y_3) dy_3 \Rightarrow (M\varphi)(x_1, x_2) = \int_0^1 \varphi(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

olur. Buna göre $U = (U_1(y_1, y_2), U_2(y_1, y_2), U_3(y_1, y_2, y_3)) = u(x_1, x_2, x_3)$ için $Mu_1 = u_1$ ve $Mu_2 = u_2$ olduğundan $M\theta = \phi$ alındığında

$$\begin{aligned} \tilde{M}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, 0\right), \\ \tilde{M}((u \cdot \nabla)u) &= \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, 0\right), \\ \tilde{M}(\Delta u) &= (\Delta u_1, \Delta u_2, 0), \\ M(\xi \theta) &= \xi \phi, \\ M\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned}$$

bulunur. (2.9) eşitliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} M((u \cdot \nabla)\theta) &= M\left(u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + u_3 \frac{1}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(u_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\right), \\ &= M\left(u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right), \\ &= u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
 M(\Delta\theta) = & M\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_1} + 2\frac{x_3}{g^2} \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{x_3}{g} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3\partial x_1} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) \frac{\partial g}{\partial x_1}\right. \\
 & - \frac{x_3}{g} \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2} + 2\frac{x_3}{g^2} \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 \\
 & \left. - \frac{x_3}{g} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3\partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{x_3}{g} \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2}\right)
 \end{aligned}$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki terimler ele alındığında

$$\begin{aligned}
 1. \quad & M\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}\right) = \int_0^1 \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} dx_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\int_0^1 \theta dx_3\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} \\
 2. \quad & M\left(-\frac{x_3}{g} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) = \int_0^1 -\frac{x_3}{g} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_3 \\
 & = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_3 \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial x_1} \right] dx_3 \\
 & = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial\theta}{\partial x_1}(x_1, x_2, 1) + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\
 3. \quad & M\left(2\frac{x_3}{g^2} \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2\right) = \int_0^1 2\frac{x_3}{g^2} \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 dx_3 \\
 & = \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (x_3\theta) - \theta \right] dx_3 \\
 & = \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 \theta(x_1, x_2, 1) - \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 \phi \\
 4. \quad & M\left(-\frac{x_3}{g} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) = \int_0^1 -\frac{x_3}{g} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_3 \\
 & = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_3 \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial x_1} \right] dx_3 \\
 & = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial\theta}{\partial x_1}(x_1, x_2, 1) + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\
 5. \quad & M\left(\frac{x_3^2}{g^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2\right) = \int_0^1 \frac{x_3^2}{g^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 dx_3 \\
 & = \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_3^2 \frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right) - 2x_3 \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \right] dx_3 \\
 & = \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 \left[\frac{\partial\theta}{\partial x_3}(x_1, x_2, 1) - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (2x_3\theta) - 2\theta \right) dx_3 \right] \\
 & = \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 \left[\frac{\partial\theta}{\partial x_3}(x_1, x_2, 1) - 2\theta(x_1, x_2, 1) + 2\phi \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad M\left(-\frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right) &= \int_0^1 -\frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} dx_3 \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (x_3 \theta) - \theta \right] dx_3 \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \theta(x_1, x_2, 1) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \phi
\end{aligned}$$

$$7. \quad M\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}\right) = \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} dx_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\int_0^1 \theta dx_3 \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad M\left(-\frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) &= \int_0^1 -\frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_3 \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_2} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] dx_3 \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} (x_1, x_2, 1) + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad M\left(2 \frac{x_3}{g^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2\right) &= \int_0^1 2 \frac{x_3}{g^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 dx_3 \\
&= \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (x_3 \theta) - \theta \right] dx_3 \\
&= \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 \theta(x_1, x_2, 1) - \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad M\left(-\frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) &= \int_0^1 -\frac{x_3}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_3 \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_2} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] dx_3 \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} (x_1, x_2, 1) + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad M\left(\frac{x_3^2}{g^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2\right) &= \int_0^1 \frac{x_3^2}{g^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 dx_3 \\
&= \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_3^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) - 2x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right] dx_3 \\
&= \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x_3} (x_1, x_2, 1) - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (2x_3 \theta) - 2\theta \right) dx_3 \right] \\
&= \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x_3} (x_1, x_2, 1) - 2\theta(x_1, x_2, 1) + 2\phi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad M\left(-\frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right) &= \int_0^1 -\frac{x_3}{g} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} dx_3 \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (x_3 \theta) - \theta \right] dx_3 \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \theta(x_1, x_2, 1) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \quad M\left(\frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}\right) &= \int_0^1 \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} dx_3 \\
&= \frac{1}{g^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) dx_3 \\
&= \frac{1}{g^2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x_3} (x_1, x_2, 1) - \frac{\partial \theta}{\partial x_3} (x_1, x_2, 0) \right]
\end{aligned}$$

Böylece;

$$\begin{aligned}
M(\Delta \theta) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{2}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{2}{g} \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \phi + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \phi \\
&\quad - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \theta(x_1, x_2, 1) - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \theta(x_1, x_2, 1) - \frac{2}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} (x_1, x_2, 1) - \frac{2}{g} \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} (x_1, x_2, 1) \\
&\quad + \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} (x_1, x_2, 1) - 2\theta(x_1, x_2, 1) + 2\phi \right) + \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^2 \theta(x_1, x_2, 1) - \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^2 \phi \\
&\quad + \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} (x_1, x_2, 1) - 2\theta(x_1, x_2, 1) + 2\phi \right) + \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^2 \theta(x_1, x_2, 1) - \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^2 \phi \\
&\quad + \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} (x_1, x_2, 1) - \frac{\partial \theta}{\partial x_3} (x_1, x_2, 0) \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu terim (2.6)-(2.8) sınır şartlarından

$$M(\Delta \theta) = \Delta \phi + \frac{2}{g} (\nabla g \cdot \nabla) \phi + \frac{\Delta g}{g} \phi$$

olarak düzenlenebilir.

Dolayısıyla $\tilde{M}$ ve M operatörlerinin denklem sistemine uygulanmasıyla

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + M \nabla p = \xi \phi + M f_1(t), \quad \Omega_2 \times [0, T], \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot (g u) = 0, \quad \Omega_2 \times [0, T], \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \phi - \kappa \Delta \phi - \frac{2\kappa}{g} (\nabla g \cdot \nabla) \phi - \frac{\kappa \Delta g}{g} \phi = M f_2(t), \quad \Omega_2 \times [0, T], \quad (2.12)$$

g-Bénard problemi olarak adlandırılan denklem sistemine ulaşılır. (2.10) ve (2.12) denklemlerine sırasıyla P_g ve $\tilde{P}_g$ ortogonal izdüşüm operatörlerinin uygulanmasıyla

$$\frac{du}{dt} + B_g(u, u) + \nu A_g u + \nu C_g u = \xi \theta + f_1 \quad (2.13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \tilde{B}_g(u, \theta) + \kappa \tilde{A}_g \theta - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta = f_2 \quad (2.14)$$

denklem sistemine ulaşılır.



3. ZAYIF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Zayıf çözümlerin varlığını göstermek için kullanılan Faedo-Galerkin yönteminde

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad u(0) = u_0$$

biçimindeki bir kısmi türevli denkleme sonlu sayıda adi diferansiyel denklemden oluşan bir sistemle yaklaşılr. Bu adi diferansiyel denklem sistemi, A operatörünün özfonksiyonları kullanılarak oluşturulan kısmi türevli denklemin yaklaşık çözümlerinin sonlu sayıdaki terimi alınarak oluşturulur. Adi diferansiyel denklemlerdeki temel teoremler kullanılarak bu yaklaşımların çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili sonuçlara ulaşılır. Bu yaklaşık çözümler üzerinde elde edilecek düzgün sınırlar ve kompaktlık teoremlerinin de yardımıyla zayıf yakınsak bir alt dizinin varlığı aranır. Son olarak bu dizinin limitinin denklemin başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde bir zayıf çözüm olduğu gösterilir [40, 43].

3.1. Yaklaşık Çözümlerin Varlığı

Bu kısımda g-Bénard probleminin yaklaşık çözümleri tanımlanarak bu çözümlerin varlığı gösterilecektir.

3.1.1. Tanım

$u \in L^2(0, T; V_g)$ ve $\theta \in L^2(0, T; W_g)$ fonksiyonları her $v \in V_g$ ve $\tau \in W_g$ için

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u, v)_g + b_g(u, u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v)_g + \nu(C_g u, v)_g &= (\xi \theta, v)_g + (f_1, v)_g \\ \frac{d}{dt}(\theta, \tau)_g + \tilde{b}_g(u, \theta, \tau) + \kappa(\nabla \theta, \nabla \tau)_g + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tau, \theta\right) &= (f_2, \tau)_g \end{aligned}$$

denklemlerini sağlıyorsa $\{u, \theta\}$ ikilisine (2.10)-(2.12) denklem sisteminin zayıf çözümü denir.

3.1.2. Teorem

$f_1, f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega, g))$ ve g fonksiyonu Ω_2 bölgesinde tanımlı bir düzgün fonksiyon olmak üzere $u_0 \in H_g$ ve $\theta_0 \in L^2(\Omega, g)$ ise periyodik sınır koşulları altında (2.10)-(2.12) denklem sisteminin tek bir $\{u, \theta\}$ zayıf çözümü vardır.

Teoremin ispatı Galerkin yöntemindeki aşamalar takip edilerek yapılacaktır. V_g uzayının bazını oluşturan elemanlar $\{u_j\}$, W_g uzayının bazını oluşturan elemanlar $\{\theta_j\}$ ile gösterilsin. Her m için denklemin $\{u^{(m)}(t), \theta^{(m)}(t)\}$ yaklaşık çözümü $1 \leq k \leq m$ için

$$u^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^m f_j^{(m)}(t) u_j, \quad \theta^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^m g_j^{(m)}(t) \theta_j \quad (3.1)$$

yaklaşımları

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(u^{(m)}, u_k)_g + b_g(u^{(m)}, u^{(m)}, u_k) + \nu((u^{(m)}, u_k))_g + \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u^{(m)}, u_k\right) \\ &= (\xi \theta^{(m)}, u_k)_g + (f_1, u_k)_g, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta^{(m)}, \theta_k)_g + \tilde{b}_g(u^{(m)}, \theta^{(m)}, \theta_k) + \kappa((\theta^{(m)}, \theta_k))_g + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta_k, \theta^{(m)}\right) = (f_2, \theta_k)_g \quad (3.3)$$

$$u^{(m)}(0) = u_{m0} = \sum_{j=1}^m (a_0, u_j) u_j, \quad \theta^{(m)}(0) = \theta_{m0} = \sum_{j=1}^m (\tau_0, \theta_j) \theta_j$$

denklem sistemini sağlayacak şekilde tanımlansın. (3.1)'deki $u^{(m)}(t)$ ve $\theta^{(m)}(t)$ fonksiyonları (3.2) ve (3.3)'te yerine yazıldığında $f_j^{(m)}(t)$ ve $g_j^{(m)}(t)$ fonksiyonlarına göre;

$$f_j^{(m)}(0) = (a_0, u_j), \quad g_j^{(m)}(0) = (\tau_0, \theta_j)$$

başlangıç şartları ile birlikte bir lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu başlangıç değer probleminin bir $[0, t_m]$ aralığında tanımlı olacak şekilde maximal çözümü vardır. Bir sonraki kesimde gösterileceği üzere $t \in [0, T]$ için $\|u^{(m)}(t)\|_g$ ve $\|\theta^{(m)}(t)\|_g$ sınırlı olduğundan $t_m = T$ olmalıdır. Nitekim, $t_m < T$ olması halinde $t \rightarrow t_m$ için $\|u^{(m)}(t)\|_g \rightarrow \infty$ ve $\|\theta^{(m)}(t)\|_g \rightarrow \infty$ olması gerekir.

3.2. Önkestirimler

(3.2) ve (3.3) denklemleri sırasıyla $f_j^{(m)}(t)$ ve $g_j^{(m)}(t)$ fonksiyonlarıyla çarpıldıktan sonra k 'ya göre toplandığında $b_g(u^{(m)}, u^{(m)}, u^{(m)}) = 0$ ve $\tilde{b}_g(u^{(m)}, \theta^{(m)}, \theta^{(m)}) = 0$ olduğundan;

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(u^{(m)}, u^{(m)})_g + \nu((u^{(m)}, u^{(m)}))_g + \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u^{(m)}, u^{(m)}\right) \\ &= (\xi \theta^{(m)}, u^{(m)})_g + (f_1, u^{(m)})_g, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta^{(m)}, \theta^{(m)})_g + \kappa((\theta^{(m)}, \theta^{(m)}))_g + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta^{(m)}, \theta^{(m)}\right) = (f_2, \theta^{(m)})_g \quad (3.5)$$

elde edilir. Bu sisteme Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliklerinin uygulanmasıyla;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 + \nu \|\nabla u^{(m)}(t)\|_g^2 \leq \|\xi\|_\infty \|\theta^{(m)}(t)\|_g \|u^{(m)}(t)\|_g + \|f_1(t)\|_{V'_g} \|u^{(m)}(t)\|_g \\ & + \frac{\nu \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla u^{(m)}(t)\|_g \|u^{(m)}(t)\|_g, \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 + \kappa \|\nabla \theta^{(m)}(t)\|_g^2 \leq \|f_2(t)\|_{W'_g} \|\theta^{(m)}(t)\|_g + \frac{\kappa \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla \theta^{(m)}(t)\|_g \|\theta^{(m)}(t)\|_g, \\ & \frac{d}{dt} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 + \nu \|\nabla u^{(m)}(t)\|_g^2 \leq \frac{M_0 \|\xi\|_\infty^2}{\pi^2 m_0 \nu} \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 + \frac{4}{\nu} \|f_1\|_{V'_g}^2 + \frac{2\nu \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \|u^{(m)}(t)\|_g^2, \\ & \frac{d}{dt} \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 + \kappa \|\nabla \theta^{(m)}(t)\|_g^2 \leq \frac{2}{\kappa} \|f_2\|_{W'_g}^2 + \frac{2\kappa \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan, $|\nabla g|_\infty^2 < \frac{\pi^2 m_0^3}{M_0}$ olmak üzere

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{M_0 \|\nabla g\|_\infty^2}{2\pi^2 m_0^3}\right), \kappa' = \kappa \left(1 - \frac{M_0 \|\nabla g\|_\infty^2}{2\pi^2 m_0^3}\right), c_1 = \frac{M_0^2 \|\xi\|_\infty^2}{4\pi^4 m_0^2}$$

için

$$\frac{d}{dt} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 + \nu' \|\nabla u^{(m)}(t)\|_g^2 \leq \frac{c_1}{\nu} \|\nabla \theta^{(m)}(t)\|_g^2 + \frac{4}{\nu} \|f_1\|_{V'_g}^2, \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 + \kappa' \|\nabla \theta^{(m)}(t)\|_g^2 \leq \frac{2}{\kappa} \|f_2\|_{W'_g}^2 \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerin t 'ye göre integrallerinin alınmasıyla

$$\begin{aligned} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 + v' \int_0^t \|\nabla u^{(m)}(s)\|_g^2 ds &\leq \|u^{(m)}(0)\|_g^2 + \frac{c_1}{v} \int_0^t \|\nabla \theta^{(m)}(s)\|_g^2 ds \\ &+ \frac{4}{v} \int_0^t \|f_1(s)\|_{V_g'}^2 ds, \\ \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 + \kappa' \int_0^t \|\nabla \theta^{(m)}(s)\|_g^2 ds &\leq \|\theta^{(m)}(0)\|_g^2 + \frac{2}{\kappa} \int_0^t \|f_2(s)\|_{W_g'}^2 ds \end{aligned}$$

bulunur. Birinci eşitsizlikteki $\int_0^t \|\nabla \theta^{(m)}(s)\|_g^2 ds$ integrali ikinci eşitsizlik yardımıyla düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 + v' \int_0^t \|\nabla u^{(m)}(s)\|_g^2 ds &\leq \|u_{m0}\|_g^2 + \frac{c_1}{v\kappa'} \left(\|\theta_{m0}\|_g^2 + \frac{2}{\kappa} \int_0^t \|f_2(s)\|_{W_g'}^2 ds \right) \\ &+ \frac{4}{v} \int_0^t \|f_1(s)\|_{V_g'}^2 ds, \\ \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 + \kappa' \int_0^t \|\nabla \theta^{(m)}(s)\|_g^2 ds &\leq \|\theta_{m0}\|_g^2 + \frac{2}{\kappa} \int_0^t \|f_2(s)\|_{W_g'}^2 ds \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 \leq \|u_0\|_g^2 + \frac{c_1}{v\kappa'} \|\theta_0\|_g^2 + \frac{4}{v} \int_0^T \|f_1(s)\|_{V_g'}^2 ds + \frac{2c_1}{v\kappa\kappa'} \int_0^T \|f_2(s)\|_{W_g'}^2 ds, \quad (3.8)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 \leq \|\theta_0\|_g^2 + \frac{2}{\kappa} \int_0^T \|f_2(s)\|_{W_g'}^2 ds \quad (3.9)$$

yazılır. Verilenler gereği eşitsizliklerin sağ tarafı $t \in [0, T]$ ve m için düzgün sınırlı olduğundan $\{u^{(m)}\}_m$ dizisi $L^\infty(0, T; H_g)$ uzayında $\{\theta^{(m)}\}_m$ dizisi ise $L^\infty(0, T; L^2(\Omega, g))$ uzayında sınırlı kalır.

(3.6) ve (3.7) eşitsizliklerinin 0'dan T 'ye integrali alındığında ise

$$\|u^{(m)}(T)\|_g^2 + v' \int_0^T \|\nabla u^{(m)}(t)\|_g^2 dt \leq \frac{2c_1}{v\kappa\kappa'} \int_0^T \|f_2\|_{W_g'}^2 dt + \frac{4}{v} \int_0^T \|f_1\|_{V_g'}^2 dt, \quad (3.10)$$

$$\|\theta^{(m)}(T)\|_g^2 + \kappa' \int_0^T \|\nabla \theta^{(m)}(t)\|_g^2 dt \leq \frac{2}{\kappa} \int_0^T \|f_2\|_{W_g'}^2 dt \quad (3.11)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{u^{(m)}\}_m$ dizisi $L^2(0, T; V_g)$ uzayında $\{\theta^{(m)}\}_m$ dizisi ise $L^2(0, T; W_g)$ uzayında sınırlı kalır.

$\tilde{u}^{(m)} : \mathbb{R} \rightarrow V_g$ ve $\tilde{\theta}^{(m)} : \mathbb{R} \rightarrow W_g$ fonksiyonları

$$\tilde{u}^{(m)}(t) = \begin{cases} u^{(m)} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \tilde{\theta}^{(m)}(t) = \begin{cases} \theta^{(m)} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Buna göre $\tilde{u}^{(m)}$ ve $\tilde{\theta}^{(m)}$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri de $\hat{u}^{(m)}$ ve $\hat{\theta}^{(m)}$ ile gösterilsin. Bu bölümde bundan sonraki notasyonlarda " $\sim$ " ve " $\wedge$ " bu anlamda kullanılacaktır.

$t = 0$ 'daki Dirac distribution fonksiyonu δ_0 ve $t = T$ 'deki Dirac distribution fonksiyonu δ_T olsun. Buna göre *distribution* anlamında

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{u}^{(m)} &= \tilde{u}'^{(m)} + u^{(m)}(0) \delta_0 - u^{(m)}(T) \delta_T, \\ \frac{d}{dt} \tilde{\theta}^{(m)} &= \tilde{\theta}'^{(m)} + \theta^{(m)}(0) \delta_0 - \theta^{(m)}(T) \delta_T \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F_1 &= \xi \theta^{(m)} + f_1 - B_g(u^{(m)}, u^{(m)}) - v A_g u^{(m)} - v C_g u^{(m)}, \\ F_2 &= f_2 - \tilde{B}_g(u^{(m)}, \theta^{(m)}) - \kappa \tilde{A}_g \theta^{(m)} + \kappa \tilde{C}_g \theta^{(m)} + \kappa \tilde{D}_g \theta^{(m)} \end{aligned}$$

olmak üzere $k = 1, \dots, m$ için

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \tilde{u}^{(m)}, u_k \rangle_g &= \langle \tilde{F}_1, u_k \rangle_g + (u_{m0}, u_k)_g \delta_0 - (u^{(m)}(T), u_k)_g \delta_T, \\ \frac{d}{dt} \langle \tilde{\theta}^{(m)}, \theta_k \rangle_g &= \langle \tilde{F}_2, \theta_k \rangle_g + (\theta_{m0}, \theta_k)_g \delta_0 - (\theta^{(m)}(T), \theta_k)_g \delta_T \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu denklemlere Fourier dönüşümü uygulandığında

$$2i\pi\tau \langle \hat{u}^{(m)}, u_k \rangle_g = \langle \hat{F}_1, u_k \rangle_g + (u_{m0}, u_k)_g - (u^{(m)}(T), u_k)_g e^{-2i\pi T\tau}, \quad (3.12)$$

$$2i\pi\tau \langle \hat{\theta}^{(m)}, \theta_k \rangle_g = \langle \hat{F}_2, \theta_k \rangle_g + (\theta_{m0}, \theta_k)_g - (\theta^{(m)}(T), \theta_k)_g e^{-2i\pi T\tau} \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.12) ve (3.13) denklemleri sırasıyla $\hat{f}_j^{(m)}$ ve $\hat{g}_j^{(m)}$ ile çarpılıp $k = 1, \dots, m$ için

toplandığında

$$2i\pi\tau\|\hat{u}^{(m)}(\tau)\|_g^2 = \langle \hat{F}_1(\tau), \hat{u}^{(m)}(\tau) \rangle_g + (u_{m0}, \hat{u}^{(m)}(\tau))_g - (u^{(m)}(T), \hat{u}^{(m)}(\tau))_g e^{-2i\pi T\tau},$$

$$2i\pi\tau\|\hat{\theta}^{(m)}(\tau)\|_g^2 = \langle \hat{F}_2(\tau), \hat{\theta}^{(m)}(\tau) \rangle_g + (\theta_{m0}, \hat{\theta}^{(m)}(\tau))_g - (\theta^{(m)}(T), \hat{\theta}^{(m)}(\tau))_g e^{-2i\pi T\tau}$$

elde edilir.

$$\int_0^T \|F_1\|_{V'_g} dt \leq \int_0^T c(\|\xi\|_\infty \|\theta^{(m)}\|_g + \|f_1\|_{V'_g} + \|u^{(m)}\|_g \|\nabla u^{(m)}\|_g$$

$$+ \nu \|\nabla u^{(m)}\| + \|\nabla g\|_\infty \|\nabla u^{(m)}\|_g) dt,$$

$$\int_0^T \|F_2\|_{W'_g} dt \leq \int_0^T \tilde{c}(\|f_2\|_{W'_g} + \|u^{(m)}\|_g \|\nabla \theta^{(m)}\|_g + \|\nabla \theta^{(m)}\|_g$$

$$+ \|\nabla g\|_\infty \|\nabla \theta^{(m)}\|_g + \|\Delta g\|_\infty \|\nabla \theta^{(m)}\|_g) dt$$

eşitsizliklerinde sağ taraftaki terimler sınırlı kaldığından $\|F_1(t)\|_{V'_g}$ ile $\|F_2(t)\|_{W'_g}$ sırasıyla $L^1(0, T; V'_g)$ ve $L^1(0, T; W'_g)$ uzaylarında sınırlı kalır. Dolayısıyla her m için

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\hat{F}_1(\tau)\|_{V'_g} \leq c_1 \quad \text{ve} \quad \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\hat{F}_2(\tau)\|_{W'_g} \leq c_2$$

olur. (3.8) ve (3.9) eşitsizliklerinin bir sonucu olarak da $u^{(m)}(0), u^{(m)}(T), \theta^{(m)}(0)$ ve $\theta^{(m)}(T)$ sınırlıdır. Ayrıca,

$$|\tau| \|\tilde{u}^{(m)}(\tau)\|_g^2 \leq c_1 \|u^{(m)}\|_{V_g} + c_2 \|u^{(m)}\|_g \leq c_3 \|u^{(m)}\|_{V_g},$$

$$|\tau| \|\tilde{\theta}^{(m)}(\tau)\|_g^2 \leq \tilde{c}_1 \|\theta^{(m)}\|_{W_g} + \tilde{c}_2 \|\theta^{(m)}\|_g \leq \tilde{c}_3 \|\theta^{(m)}\|_{W_g}$$

olduğundan ve $\gamma < \frac{1}{4}$ sabit olmak üzere $\forall \tau \in \mathbb{R}$ için

$$|\tau|^{2\gamma} \leq c(\gamma) \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}}$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{u}^{(m)}(\tau)\|_g^2 d\tau \leq c(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{u}^{(m)}(\tau)\|_g^2 d\tau$$

$$\leq c_4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{u}^{(m)}(\tau)\|_{V_g}^2 d\tau + c_5 \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}^{(m)}(\tau)\|_{V_g}^2 d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{\theta}^{(m)}(\tau)\|_g^2 d\tau \leq \tilde{c}_4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{\theta}^{(m)}(\tau)\|_{W_g}^2 d\tau + \tilde{c}_5 \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\theta}^{(m)}(\tau)\|_{W_g}^2 d\tau$$

yazılabilir. Eşitsizliklerdeki ikinci integraller $u^{(m)} \in L^2(0, T; V_g)$ ve $\theta^{(m)} \in L^2(0, T; W_g)$ olduğundan Parseval eşitliği dolayısıyla sınırlıdır. İlk integraller ise

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{u}^{(m)}(\tau)\|_{V_g}^2 d\tau &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|u^{(m)}(\tau)\|_{V_g}^2 d\tau \right)^{1/2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{\theta}^{(m)}(\tau)\|_{W_g}^2 d\tau &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\theta^{(m)}(\tau)\|_{W_g}^2 d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Schwarz eşitsizliği ve Parseval eşitliği yardımıyla sınırlı kaldığından $u^{(m)} \in H^\gamma(\mathbb{R}; V_g, H_g)$ ve $\theta^{(m)} \in H^\gamma(\mathbb{R}; W_g, L^2(\Omega, g))$ olur. $V_g \subset H_g$ ve $W_g \subset L^2(\Omega, g)$ gömülmeleri kompakt olduğundan $L^2(0, T; H_g)$ uzayında güçlü yakınsak bir $u^{(m)}$ alt dizisi ile $L^2(0, T; L^2(\Omega, g))$ uzayında güçlü yakınsak bir $\theta^{(m)}$ alt dizisi vardır.

3.3. Limite Geçiş

$u^{(m)}$ ve $\theta^{(m)}$ dizilerinin yakınsak alt dizileri yine $u^{(m)}$ ve $\theta^{(m)}$ ile gösterilsin ve limitleri de u ve θ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} + B_g(u^{(m)}, u^{(m)}) + v A_g u^{(m)} + v C_g u^{(m)} &= \xi \theta^{(m)} + f_1, \\ \frac{\partial \theta^{(m)}}{\partial t} + \tilde{B}_g(u^{(m)}, \theta^{(m)}) + \kappa \tilde{A}_g \theta^{(m)} - \kappa \tilde{C}_g \theta^{(m)} - \kappa \tilde{D}_g \theta^{(m)} &= f_2 \end{aligned}$$

denklemleri sırasıyla $v \in V_g$ ve $\tau \in W_g$ ile çarpılıp t_0 'dan t 'ye integral alındığında

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left\langle \frac{\partial u^{(m)}}{\partial s}, v \right\rangle_g ds &= \int_{t_0}^t \left(\int_{\Omega} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial s} v g dx \right) ds = \int_{\Omega} \left(\int_{t_0}^t \frac{\partial u^{(m)}}{\partial s} ds \right) v g dx \\ &= \int_{\Omega} \left(u^{(m)}(t) - u^{(m)}(t_0) \right) v g dx = \langle u^{(m)}(t) - u^{(m)}(t_0), v \rangle_g \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \langle u^{(m)}(t) - u^{(m)}(t_0), v \rangle_g &+ \int_{t_0}^t b_g(u^{(m)}, u^{(m)}, v) ds + v \int_{t_0}^t \langle A_g^{1/2} u^{(m)}, A_g^{1/2} v \rangle_g ds \\ &+ v \int_{t_0}^t b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u^{(m)}, v\right) ds = \int_{t_0}^t \langle \xi \theta^{(m)}, v \rangle_g ds + \int_{t_0}^t \langle f_1, v \rangle_g ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle \theta^{(m)}(t) - \theta^{(m)}(t_0), \tau \rangle_g + \int_{t_0}^t \tilde{b}_g(u^{(m)}, \theta^{(m)}, \tau) ds + \kappa \int_{t_0}^t \langle \tilde{A}_g^{1/2} \theta^{(m)}, \tilde{A}_g^{1/2} \tau \rangle_g ds \\ & + \kappa \int_{t_0}^t \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tau, \theta^{(m)}\right) ds = \int_{t_0}^t \langle f_2, \tau \rangle_g \end{aligned}$$

elde edilir. $0 \leq t_0 \leq t < \infty$ olmak üzere

1.
$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \langle A_g^{1/2} u^{(m)}, A_g^{1/2} v \rangle_g ds - \int_{t_0}^t \langle A_g^{1/2} u, A_g^{1/2} v \rangle_g ds = \int_{t_0}^t \langle A_g^{1/2} u^{(m)} - u, A_g^{1/2} v \rangle_g ds \\ & \leq \int_{t_0}^t \|A_g^{1/2} u^{(m)} - A_g^{1/2} u\|_g \|A_g^{1/2} v\|_g ds \\ & \leq \left(\int_{t_0}^t \|A_g^{1/2} u^{(m)} - A_g^{1/2} u\|_g^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^t \|A_g^{1/2} v\|_g^2 ds \right)^{1/2} \\ & \leq \|A_g^{1/2} u^{(m)} - A_g^{1/2} u\|_{L^2(t_0, t; V_g)} \|A_g^{1/2} v\|_{L^2(t_0, t; V_g)} \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \langle \xi \theta^{(m)}, v \rangle_g ds - \int_{t_0}^t \langle \xi \theta, v \rangle_g ds = \int_{t_0}^t \langle \xi \theta^{(m)} - \xi \theta, v \rangle_g ds \\ & \leq c \|\xi\|_\infty \left(\int_{t_0}^t \|\theta^{(m)} - \theta\|_g^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^t \|v\|_g^2 ds \right)^{1/2} \\ & \leq c \|\xi\|_\infty \|\theta^{(m)} - \theta\|_{L^2(t_0, t; L^2(\Omega, g))} \|v\|_{L^2(t_0, t; L^2(\Omega, g))} \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u^{(m)}, v\right) ds - \int_{t_0}^t b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, v\right) ds = \int_{t_0}^t b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u^{(m)} - u, v\right) ds \\ & = \int_{t_0}^t \left(\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (u_j^{(m)} - u_j) \right) v_j g dx \right) ds \\ & \leq c \|g\|_{W^{2,\infty}} \|u^{(m)} - u\|_g \|v\|_{V_g} \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t |b_g(u_n, u_n, v) - b_g(u, u, v)| ds = \int_{t_0}^t |b_g(u_n - u, u_n, v) + b_g(u, u_n - u, v)| ds \\ & \leq c_1 \int_{t_0}^t \|u_n - u\|_g^{1/4} \|\nabla(u_n - u)\|_g^{3/4} \|u_n\|_g^{1/4} \|\nabla u_n\|_g^{3/4} \|\nabla v\|_g ds \\ & + c_2 \int_{t_0}^t \|u\|_g^{1/4} \|\nabla u\|_g^{3/4} \|u_n - u\|_g^{1/4} \|\nabla(u_n - u)\|_g^{3/4} \|\nabla v\|_g ds \\ & \leq c_1 \|\nabla v\|_g \left(\int_{t_0}^t \|u_n - u\|_g^2 ds \right)^{1/8} \left(\int_{t_0}^t \|\nabla(u_n - u)\|_g^2 ds \right)^{8/3} \\ & \left(\int_{t_0}^t \|u_n\|_g^2 ds \right)^{1/8} \left(\int_{t_0}^t \|\nabla u_n\|_g^2 ds \right)^{8/3} \\ & + c_2 \|\nabla v\|_g \left(\int_{t_0}^t \|u\|_g^2 ds \right)^{1/8} \left(\int_{t_0}^t \|\nabla u\|_g^2 ds \right)^{8/3} \\ & \left(\int_{t_0}^t \|u_n - u\|_g^2 ds \right)^{1/8} \left(\int_{t_0}^t \|\nabla(u_n - u)\|_g^2 ds \right)^{8/3} \end{aligned}$$

eşitsizliklerinden görüldüğü üzere ve

$$\int_0^t D_t u^{(m)}(s) ds = u^{(m)}(t) - u^{(m)}(0)$$

olduğundan $t_0 = 0$ için

$$\int_0^t \|D_t u^{(m)}(s)\|_g^2 ds \leq C$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti bulunabilir. Böylece, $D_t u^{(m)} \in L^2(0, T; V'_g)$ olur.

Buna göre $L^2(0, T; V_g)$ uzayında zayıf yakınsak ve $L^\infty(0, T; H_g)$ uzayında ise zayıf yıldız yakınsak olacak şekilde bir alt dizi vardır ve bu alt dizi $u^{(m)}$ ile gösterilsin:

$$u^{(m)} \rightarrow u \in L^2(0, T; V_g) \cap L^\infty(0, T; H_g).$$

Aynı şekilde $L^2(0, T; W_g)$ uzayında zayıf yakınsak ve $L^\infty(0, T; L^2(\Omega, g))$ uzayında ise zayıf yıldız yakınsak olacak şekilde bir alt dizi vardır ve bu alt dizi $\theta^{(m)}$ ile gösterilsin:

$$\theta^{(m)} \rightarrow \theta \in L^2(0, T; W_g) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega, g)).$$

Bir sonraki kesimde bu limit fonksiyonlarının denklem sistemini sağladığı gösterilecektir.

3.4. Zayıf Çözümlerin Varlığı

$[0, T]$ aralığında türevlenebilir Ψ_1 ve Ψ_2 sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\Psi_1(T) = 0$ ve $\Psi_2(T) = 0$ olsun. (3.2) ve (3.3) denklemleri sırasıyla Ψ_1 ve Ψ_2 ile çarpılıp kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u^{(m)}, \Psi'_1 u_k)_g dt + \int_0^T b_g(u^{(m)}, u^{(m)}, \Psi_1 u_k) dt + \nu \int_0^T ((u^{(m)}, \Psi_1 u_k))_g dt \\ & + \nu \int_0^T b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u^{(m)}, \Psi_1 u_k\right) dt = (u_{m0}, u_k)_g \Psi_1(0) + \int_0^T (\xi \theta^{(m)}, \Psi_1 u_k)_g dt \\ & + \int_0^T (f_1, \Psi_1 u_k)_g dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (\theta^{(m)}, \Psi_2' \theta_k)_g dt + \int_0^T \tilde{b}_g(u^{(m)}, \theta^{(m)}, \Psi_2 \theta_k) dt + \kappa \int_0^T ((\theta^{(m)}, \Psi_2 \theta_k))_g dt \\
& + \kappa \int_0^T \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta_k, \Psi_2 \theta^{(m)}\right) dt = (\theta_{m0}, \theta_k)_g \Psi_2(0) + \int_0^T (f_2, \Psi_2 \theta_k)_g dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Yakınsak olarak seçilen $u^{(m)}$ ve $\theta^{(m)}$ dizileri üzerinden limite geçilirse $v = u_1, u_2, \dots$ ile $\tau = \theta_1, \theta_2, \dots$ veya bunların lineer birleşimleriyle, hatta süreklilikten herhangi bir $v \in V_g$ ile $\tau \in H_g$ için bu limit geçerli olacağından

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (u, \Psi_1' v)_g dt + \int_0^T b_g(u, u, \Psi_1 v) dt + v \int_0^T ((u, \Psi_1 v))_g dt \\
& + v \int_0^T b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, \Psi_1 v\right) dt = (u_0, v)_g \Psi_1(0) + \int_0^T (\xi \theta, \Psi_1 v)_g dt + \int_0^T (f_1, \Psi_1 v)_g dt, \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (\theta, \Psi_2' \tau)_g dt + \int_0^T \tilde{b}_g(u, \theta, \Psi_2 \tau) dt + \kappa \int_0^T ((\theta, \Psi_2 \tau))_g dt \\
& + \kappa \int_0^T \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tau, \Psi_2 \theta\right) dt = (\theta_0, \tau)_g \Psi_2(0) + \int_0^T (f_2, \Psi_2 \tau)_g dt \quad (3.15)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerde Ψ_1 ve Ψ_2 fonksiyonları yerine $\phi_1 \in$ ve ϕ_2 test fonksiyonları alındığında

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(u, v)_g + b_g(u, u, v) + v((u, v))_g + v b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, v\right) = (\xi \theta, v)_g + (f_1, v)_g, \\
& \frac{d}{dt}(\theta, \tau)_g + \tilde{b}_g(u, \theta, \tau) + \kappa((\theta, \tau))_g + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tau, \theta\right) = (f_2, \tau)_g
\end{aligned}$$

denklemleri $\{u, \theta\}$ fonksiyon ikilisi tarafından distribution anlamında sağlanmış olur.

3.5. Başlangıç Koşulları

Başlangıç koşullarını incelemek için

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(u, v)_g + b_g(u, u, v) + v((u, v))_g + v b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, v\right) = (\xi \theta, v)_g + (f_1, v)_g, \\
& \frac{d}{dt}(\theta, \tau)_g + \tilde{b}_g(u, \theta, \tau) + \kappa((\theta, \tau))_g + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tau, \theta\right) = (f_2, v)_g
\end{aligned}$$

denklemleri sırasıyla Ψ_1 ve Ψ_2 ile çarpılıp kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (u, \Psi_1' v)_g dt + \int_0^T b_g(u, u, \Psi_1 v) dt + \nu \int_0^T ((u, \Psi_1 v))_g dt \\
 & + \nu \int_0^T b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, \Psi_1 v\right) dt = (u(0), v)_g \Psi_1(0) + \int_0^T (\xi \theta, \Psi_1 v)_g dt + \int_0^T (f_1, \Psi_1 v)_g dt, \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (\theta, \Psi_2' \tau)_g dt + \int_0^T \tilde{b}_g(u, \theta, \Psi_2 \tau) dt + \kappa \int_0^T ((\theta, \Psi_2 \tau))_g dt \\
 & + \kappa \int_0^T \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tau, \Psi_2 \theta\right) dt = (\theta(0), \tau)_g \Psi_2(0) + \int_0^T (f_2, \Psi_2 \tau)_g dt \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.14-3.15) denklemleri ile (3.16-3.17) denklemleri karşılaştırıldığında

$$(u(0) - u_0)_g \Psi_1(0) = 0, (\theta(0) - \theta_0)_g \Psi_2(0) = 0$$

elde edilir. $\Psi_1(0) = 1$ ve $\Psi_2(0) = 1$ olarak seçilirse

$$u(0) = u_0 \text{ ve } \theta(0) = \theta_0$$

başlangıç koşulları sağlanmış olur.

3.6. Zayıf Çözümlerin Tekliği

$\{u_1, \theta_1\}$ ve $\{u_2, \theta_2\}$ fonksiyonları, denklem sisteminin $[0, T]$ aralığında iki zayıf çözümü olsun.

$$\begin{aligned}
 & \frac{du_1}{dt} + B_g(u_1, u_1) + \nu A_g u_1 + \nu C_g u_1 = \xi \theta_1 + f_1, \\
 & \frac{d\theta_1}{dt} + \tilde{B}_g(u_1, \theta_1) + \kappa \tilde{A}_g \theta_1 - \kappa \tilde{C}_g \theta_1 - \kappa \tilde{D}_g \theta_1 = f_2, \\
 & \frac{du_2}{dt} + B_g(u_2, u_2) + \nu A_g u_2 + \nu C_g u_2 = \xi \theta_2 + f_1, \\
 & \frac{d\theta_2}{dt} + \tilde{B}_g(u_2, \theta_2) + \kappa \tilde{A}_g \theta_2 - \kappa \tilde{C}_g \theta_2 - \kappa \tilde{D}_g \theta_2 = f_2.
 \end{aligned}$$

Buradan $u_1 - u_2 = u$, $\theta_1 - \theta_2 = \theta$ için

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + B_g(u_1, u_1) - B_g(u_2, u_2) + \nu A_g u + \nu C_g u &= \xi \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} + \tilde{B}_g(u_1, \theta_1) - \tilde{B}_g(u_2, \theta_2) + \kappa \tilde{A}_g \theta - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Birinci denklem u ikincisi ile θ ile çarpılıp integral alındığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_g^2 + b_g(u, u_2, u) + \nu \|\nabla u\|_g^2 + \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, u\right) &= (\xi \theta, u)_g, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + \frac{1}{2} (\tilde{b}_g(u, \theta_1, \theta) + \tilde{b}_g(u, \theta_2, \theta)) + \kappa \|\nabla \theta\|_g^2 + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta, \theta\right) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem sisteminde yer alan terimlere Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri uygulandıktan sonra $u(0) = 0$ ve $\theta(0) = 0$ olduğundan Gronwall eşitsizliği yardımıyla her $t \geq 0$ için $u(t) = 0$ ve $\theta(t) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $u_1(t) = u_2(t)$ ve $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ olur.

3.7. Güçlü Çözümlerin Varlığı

Zayıf çözümlerin varlığı bulunurken izlenen çözüm yönteminde olduğu gibi her m için denklemin $\{u^{(m)}(t), \theta^{(m)}(t)\}$ yaklaşık çözümü $1 \leq k \leq m$ için

$$u^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^m f_j^{(m)}(t) u_j, \quad \theta^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^m g_j^{(m)}(t) \theta_j,$$

biçiminde ve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u^{(m)}, u_k)_g + b_g(u^{(m)}, u^{(m)}, u_k) + \nu ((u^{(m)}, u_k))_g + \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u^{(m)}, u_k\right) \\ = (\xi \theta^{(m)}, u_k)_g + (f_1, u_k)_g, \\ \frac{d}{dt} (\theta^{(m)}, \theta_k)_g + \tilde{b}_g(u^{(m)}, \theta^{(m)}, \theta_k) + \kappa ((\theta^{(m)}, \theta_k))_g + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta_k, \theta^{(m)}\right) = (f_2, \theta_k)_g, \\ u^{(m)}(0) = u_{m0} = \sum_{j=1}^m (a_0, u_j) u_j, \quad \theta^{(m)}(0) = \theta_{m0} = \sum_{j=1}^m (\tau_0, \theta_j) \theta_j \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayacak şekilde tanımlansın. Denklem sisteminde u_k yerine $A_g u^{(m)}$ ve θ_k yerine de $\tilde{A}_g \theta^{(m)}$ yazıldığında

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (u^{(m)}, A_g u^{(m)})_g + b_g(u^{(m)}, u^{(m)}, A_g u^{(m)}) + v((u^{(m)}, A_g u^{(m)}))_g + v b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u^{(m)}, A_g u^{(m)}\right) \\ &= (\xi \theta^{(m)}, A_g u^{(m)})_g + (f_1, A_g u^{(m)})_g, \\ & \frac{d}{dt} (\theta^{(m)}, \tilde{A}_g \theta^{(m)})_g + \tilde{b}_g(u^{(m)}, \theta^{(m)}, \tilde{A}_g \theta^{(m)}) + \kappa((\theta^{(m)}, \tilde{A}_g \theta^{(m)}))_g + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tilde{A}_g \theta^{(m)}, \theta^{(m)}\right) \\ &= (f_2, \tilde{A}_g \theta^{(m)})_g \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sisteme Cauchy - Schwarz ve Young eşitsizliklerinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}\|_g^2 + v \|A_g u^{(m)}\|_g^2 \leq \frac{54c_3^4}{v^3} \|u^{(m)}\|_g^2 \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}\|_g^4 + \frac{2v \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \|\nabla u\|_g^2 \\ &+ \frac{2}{v} \|\xi\|_\infty^2 \|\theta\|_g^2 + \frac{2}{v} \|f_1\|_{V'_g}^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta^{(m)}\|_g^2 + \kappa \|\tilde{A}_g \theta^{(m)}\|_g^2 \leq \frac{54c_3^4}{\kappa^3} \|u^{(m)}\|_g^2 \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}\|_g^2 \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta^{(m)}\|_g^2 + \frac{2\kappa \|\Delta g\|_\infty^2}{m_0^2} \|\theta\|_g^2 \\ &+ \frac{2\kappa \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \|\nabla \theta\|_g^2 + \frac{2}{\kappa} \|f_2\|_{W'_g}^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

bulunur. İlk olarak, eşitsizliklerdeki $v \|A_g u^{(m)}\|_g^2$ ve $\kappa \|\tilde{A}_g \theta^{(m)}\|_g^2$ terimleri ihmal edilip t 'ye göre integral alındığında

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{54c_3^4}{v^3} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}(t)\|_g^2 + \frac{2v \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2}, \\ q_2(t) &= \frac{54c_3^4}{\kappa^3} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}(t)\|_g^2 + \frac{2\kappa M_0^2 \|\Delta g\|_\infty^2}{4\pi^2 m_0^4} + \frac{2\kappa \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \end{aligned}$$

için

$$\begin{aligned} \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}\|_g^2 &\leq e^{\int_0^t q_1(s) ds} \left[\|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}(0)\|_g^2 + \frac{2}{v} \int_0^t e^{-\int_0^\tau q_1(s) ds} (\|\xi\|_\infty^2 \|\theta^{(m)}(\tau)\|_g^2 + \|f_1(\tau)\|_{V'_g}^2) d\tau \right], \\ \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta^{(m)}\|_g^2 &\leq e^{\int_0^t q_2(s) ds} \left[\|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta^{(m)}(0)\|_g^2 + \int_0^t e^{-\int_0^\tau q_2(s) ds} \frac{2}{\kappa} \|f_2(\tau)\|_{W'_g}^2 d\tau \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (3.8)-(3.11) önkestirimleri yardımıyla

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 \leq K_1, \int_0^T \|\nabla u^{(m)}(t)\|_g^2 dt \leq K_2,$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\theta^{(m)}(t)\|_g^2 \leq K_3, \int_0^T \|\nabla \theta^{(m)}(t)\|_g^2 dt \leq K_4$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_0^t q_1(s) ds &\leq \frac{54c_3^4}{v^3} \sup_{t \in [0, T]} \|u^{(m)}(t)\|_g^2 \int_0^T \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}(s)\|_g^2 ds + \frac{2vT \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \\ &\leq \frac{54c_3^4}{v^3} K_1 K_2 + \frac{2vT \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \\ &\leq K_5 \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^t q_2(s) ds \leq \frac{54c_3^4}{\kappa^3} K_1 K_2 + \frac{2\kappa T M_0^2 \|\Delta g\|_\infty^2}{4\pi^2 m_0^4} + \frac{2\kappa T \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \leq K_6$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\sup_{t \in [0, T]} \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}(t)\|_g^2 \leq e^{K_5} \|u_0\|_{V_g}^2 + \frac{2T}{v} (K_3 \|\xi\|_\infty^2 + \|f_1\|_{L^2(0, T; V'_g)}) \leq K_7, \quad (3.20)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta^{(m)}(t)\|_g^2 \leq e^{K_6} \|\theta_0\|_{W_g}^2 + \frac{2T}{\kappa} \|f_2\|_{L^2(0, T; W'_g)} \leq K_8 \quad (3.21)$$

bulunur.

(3.18) ve (3.19) eşitsizliklerinin 0'dan T 'ye integralinin alınmasıyla

$$\begin{aligned} \|A_g^{\frac{1}{2}} u^{(m)}(T)\|_g^2 + v \int_0^T \|A_g u^{(m)}(t)\|_g^2 dt &\leq \|u_0\|_{V_g}^2 + \frac{54c_3^4}{v^3} K_1 K_2 K_7 + \frac{2v \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} K_1 \\ &+ \frac{2T}{v} \|\xi\|_\infty^2 K_3 + \frac{2}{v} \|f_1\|_{L^2(0, T; V'_g)}^2, \\ \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta^{(m)}(T)\|_g^2 + \kappa \int_0^T \|\tilde{A}_g \theta^{(m)}(t)\|_g^2 dt &\leq \|\theta_0\|_{W_g}^2 + \frac{54c_3^4}{\kappa^3} K_1 K_4 K_7 + \frac{2\kappa T \|\Delta g\|_\infty^2}{m_0^2} K_3 \\ &+ \frac{2\kappa \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} K_4 + \frac{2}{\kappa} \|f_2\|_{L^2(0, T; W'_g)}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\int_0^T \|A_g u^{(m)}(t)\|_g^2 dt \leq K_9, \quad (3.22)$$

$$\int_0^T \|\tilde{A}_g \theta^{(m)}(t)\|_g^2 dt \leq K_{10} \quad (3.23)$$

yazılabilir. Böylece Kompaktlık lemmasının şartları sağlanmış olur ve limite geçilebilir. Dolayısıyla,

$$u \in L_{loc}^2(0, T; V_g) \cap L_{loc}^2(0, \infty; D(A_g)), D_t u \in L_{loc}^2(0, \infty; H_g)$$

$$\theta \in L_{loc}^2(0, T; W_g) \cap L_{loc}^2(0, \infty; D(\tilde{A}_g)), D_t \theta \in L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega, g))$$

bulunur. Lions-Magenes lemmasından da $u \in C(0, \infty; V_g)$ ve $\theta \in C(0, \infty; W_g)$ olduğu görülür.

3.8. Güçlü Çözümlerin Tekliği

Güçlü çözümlerin tek olduğunu ve verilere göre sürekli bağımlı olduğunu gösterebilmek için $\{u_1, \theta_1\}$ ve $\{u_2, \theta_2\}$ fonksiyonları, denklem sisteminin sırasıyla $\{u_1(0), \theta_1(0), f_{11}, f_{12}\}$ ve $\{u_2(0), \theta_2(0), f_{21}, f_{22}\}$ verilerine göre $[0, T]$ aralığında iki güçlü çözümü olduğu kabul edilsin.

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} + B_g(u_1, u_1) + vA_g u_1 + vC_g u_1 &= \xi \theta_1 + f_{11}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} + \tilde{B}_g(u_1, \theta_1) + \kappa \tilde{A}_g \theta_1 - \kappa \tilde{C}_g \theta_1 - \kappa \tilde{D}_g \theta_1 &= f_{12}, \\ \frac{du_2}{dt} + B_g(u_2, u_2) + vA_g u_2 + vC_g u_2 &= \xi \theta_2 + f_{21}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} + \tilde{B}_g(u_2, \theta_2) + \kappa \tilde{A}_g \theta_2 - \kappa \tilde{C}_g \theta_2 - \kappa \tilde{D}_g \theta_2 &= f_{22} \end{aligned}$$

Buradan $u_1 - u_2 = u$, $\theta_1 - \theta_2 = \theta$, $f_{11} - f_{12} = f_1$ ve $f_{21} - f_{22} = f_2$ için

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + B_g(u_1, u_1) - B_g(u_2, u_2) + vA_g u + vC_g u &= \xi \theta + f_1, \\ \frac{d\theta}{dt} + \tilde{B}_g(u_1, \theta_1) - \tilde{B}_g(u_2, \theta_2) + \kappa \tilde{A}_g \theta - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta &= f_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Birinci denklem $A_g u$ ikincisi ile $\tilde{A}_g \theta$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|A_g^{\frac{1}{2}} u\|_g^2 + b_g(u, u_1, A_g u) + b_g(u_2, u, A_g u) + v \|A_g u\|_g^2 + v b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, A_g u\right) \\ &= (\xi \theta, A_g u)_g + (f_1, A_g u)_g, \\ & \frac{d}{dt} \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta\|_g^2 + \frac{1}{2} [\tilde{b}_g(u, \theta_1, \tilde{A}_g \theta) + \tilde{b}_g(u, \theta_2, \tilde{A}_g \theta) + \tilde{b}_g(u_1, \theta, \tilde{A}_g \theta) + \tilde{b}_g(u_2, \theta, \tilde{A}_g \theta)] \\ &+ \kappa \|\tilde{A}_g \theta\|_g^2 + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tilde{A}_g \theta, \theta\right) = (f_2, \tilde{A}_g \theta)_g \end{aligned}$$

bulunur. Cauchy - Schwarz ve Young eşitsizliklerinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} L_1(s) &= \frac{5c^2}{2v} \|A_g^{\frac{1}{2}} u_1\|_g \|A_g u_1\|_g + \frac{15^3 c^4}{128 v^3} \|A_g^{\frac{1}{2}} u_2\|_g + \frac{5v}{2m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 \\ &+ \frac{7c^2}{8\kappa} (\|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta_1\|_g \|\tilde{A}_g \theta_1\|_g + \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta_2\|_g \|\tilde{A}_g \theta_2\|_g), \\ L_2(s) &= \frac{5}{2v\lambda_1} \|\xi\|_\infty^2 + \frac{21^3 c^4}{2048 \kappa^3} (\|A_g^{\frac{1}{2}} u_1\|_g^4 + \|A_g^{\frac{1}{2}} u_2\|_g^4) + \frac{7\kappa}{3\lambda_1 m_0^2} \|\Delta g\|_\infty^2 + \frac{7\kappa}{2m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2, \\ L(s) &= \max_{s \in [0, T]} \{L_1(s), L_2(s)\} \end{aligned}$$

için eşitsizlikler toplandığında

$$\frac{d}{dt} \left(\|A_g^{\frac{1}{2}} u\|_g^2 + \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta\|_g^2 \right) \leq L(t) \left(\|A_g^{\frac{1}{2}} u\|_g^2 + \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta\|_g^2 \right) + \frac{5}{2v} \|f_1\|_\infty^2 + \frac{7}{2\kappa} \|f_2\|_\infty^2$$

elde edilir. Bu durumda Gronwall eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\|A_g^{\frac{1}{2}} u(t)\|_g^2 + \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta(t)\|_g^2 \leq e^{\int_0^t L(s) ds} \left(\|A_g^{\frac{1}{2}} u(0)\|_g^2 + \|\tilde{A}_g^{\frac{1}{2}} \theta(0)\|_g^2 \right) + \frac{5t}{2v} \|f_1\|_\infty^2 + \frac{7t}{2\kappa} \|f_2\|_\infty^2$$

bulunur. Dolayısıyla $f_1(t), f_2(t) \in L^2[0, \infty; L^2(\Omega))$ ve $u_1(0), u_2(0) \in V_g$ olması halinde güçlü çözümlerin başlangıç koşullarına sürekli bağlı olduğu ve bu koşulların aynı olması halinde de güçlü çözümlerin tek olduğu görülür.

4. BELİRLEYİCİ DEĞERLER

Fizikte bir sistemin bütün parçalarının herhangi bir zamanda konumlarının tamamen belirli olması için gerekli birbirinden bağımsız minimum koordinat sayısına serbestlik derecesi(degrees of freedom) denmektedir. Navier-Stokes denkleminin çözümlerinin uzun bir zaman sonundaki davranışlarının serbestlik derecesinin sonlu olduğunu bir başka ifadeyle Navier-Stokes denkleminin sonlu sayıda belirleyici değere(determining modes) sahip olduğu [47] makalesinde gösterilmiştir. Jones ve Titi, belirleyici Fourier değerlerinin üst sınırı üzerinde daha iyi sonuçlar elde etmiştir [48]. Boland ve Layton, doğal konveksiyon problemlerini konu alan sonlu elemanlar yöntemlerindeki yaklaşım hatalarını inceledikleri [49] çalışmasında Boussinesq denklemlerinin belirleyici değerleri için soyut bir formülasyon ortaya koymuşlardır.

4.1. g-Bénard Probleminin Belirleyici Değerleri

g-Bénard probleminin belirleyici değerleri üzerinde bir üst sınır elde edebilmek için Genelleştirilmiş Gronwall Lemmasından yararlanılmıştır. Bu kısımda elde edilen sonuçlara [48] çalışması esas alınarak ulaşılmıştır.

4.1.1. Lemma (Genelleştirilmiş Gronwall Lemması) [50]

Bir $T > 0$ sayısı için $[0, \infty)$ aralığında $\alpha = \alpha(t)$ ve $\beta = \beta(t)$ reel değerli lokal integrallenebilir fonksiyonları $\alpha^-(t) = \max\{-\alpha(t), 0\}$ ve $\beta^+(t) = \max\{\beta(t), 0\}$ olmak üzere

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha(\tau) d\tau > 0 \quad (4.1)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha^-(\tau) d\tau < \infty \quad (4.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \beta^+(\tau) d\tau = 0 \quad (4.3)$$

şartlarını sağlasın. Buna göre $[0, \infty)$ aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir $\xi = \xi(t)$ fonksiyonu aralığın hemen hemen her yerinde

$$\frac{d\xi}{dt} + \alpha\xi \leq \beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $t \rightarrow \infty$ için $\xi(t) \rightarrow 0$ olur.

Farklı olabilecek $f_1 = f_1(x, t)$, $\bar{f}_1 = \bar{f}_1(x, t)$ ile $f_2 = f_2(x, t)$, $\bar{f}_2 = \bar{f}_2(x, t)$ fonksiyonları ve $p_1 = p_1(x, t)$ ile $\bar{p}_1 = \bar{p}_1(x, t)$ basınç terimleri için periyodik sınır koşulları altında bölge üzerinde ortalamaları 0 olan (u, θ) ve $(\bar{u}, \bar{\theta})$ fonksiyon ikilileri sırasıyla (4.4-4.5) ve (4.6-4.7) denklemlerini sağlasın:

$$u_t + \nu A_g u + B_g(u, u) + \nu C_g u = \xi \theta + f_1, \quad (4.4)$$

$$\theta_t + \kappa \tilde{A}_g \theta + \tilde{B}_g(u, \theta) - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta = f_2, \quad (4.5)$$

$$\bar{u}_t + \nu A_g \bar{u} + B_g(\bar{u}, \bar{u}) + \nu C_g \bar{u} = \xi \bar{\theta} + \bar{f}_1, \quad (4.6)$$

$$\bar{\theta}_t + \kappa \tilde{A}_g \bar{\theta} + \tilde{B}_g(\bar{u}, \bar{\theta}) - \kappa \tilde{C}_g \bar{\theta} - \kappa \tilde{D}_g \bar{\theta} = \bar{f}_2. \quad (4.7)$$

g-Stokes operatörlerinin özvektörleri $\check{u}_j$ ve $\check{\theta}_j$ olmak üzere $\{u, \theta\}$ ve $\{\bar{u}, \bar{\theta}\}$ çözüm ikilileri ilk m değerine karşılık gelen Galerkin projeksiyonu ile açılabilir :

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \check{u}_j(t) u_j(x), \quad \theta = \sum_{j=1}^{\infty} \check{\theta}_j(t) \theta_j(x),$$

$$P_m u = \sum_{j=1}^m \check{u}_j(t) u_j(x), \quad \tilde{P}_m \theta = \sum_{j=1}^m \check{\theta}_j(t) \theta_j(x).$$

$\{f_1, \bar{f}_1\}$ ve $\{f_2, \bar{f}_2\}$ fonksiyon ikilileri benzer asimptotik davranışa sahip olsun: $t \rightarrow \infty$ için

$$\int_{\Omega} |f_1 - \bar{f}_1|_{V_g'}^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_{\Omega} |f_2 - \bar{f}_2|_{V_g'}^2 dx \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Bu durumda,

$$\int_{\Omega} |P_m u - P_m \bar{u}|_g^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_{\Omega} |\tilde{P}_m \theta - \tilde{P}_m \bar{\theta}|_g^2 dx \rightarrow 0 \quad (4.9)$$

koşulu altında

$$\int_{\Omega} |u - \bar{u}|_g^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_{\Omega} |\theta - \bar{\theta}|_g^2 dx \rightarrow 0$$

olması halinde $P_m u$ ve $\tilde{P}_m \theta$ ile gösterilen ilk m değerine belirleyici değerler denir.

$\omega = u - \bar{u}$, $\tilde{\omega} = \theta - \bar{\theta}$ için (4.4-4.5) sisteminden (4.6-4.7) denklem sistemi çıkarıldığında

$$\omega_t + \nu A_g \omega + B_g(u, u) - B_g(\bar{u}, \bar{u}) + \nu C_g \omega = \xi \tilde{\omega} + f_1 - \bar{f}_1, \quad (4.10)$$

$$\tilde{\omega}_t + \kappa \tilde{A}_g \tilde{\omega} + \tilde{B}_g(u, \theta) - \tilde{B}_g(\bar{u}, \bar{\theta}) - \kappa \tilde{C}_g \tilde{\omega} - \kappa \tilde{D}_g \tilde{\omega} = f_2 - \bar{f}_2 \quad (4.11)$$

elde edilir. Ayrıca

$$B_g(u, u) - B_g(\bar{u}, \bar{u}) = B_g(\omega, u) + B_g(\bar{u}, \omega),$$

$$\tilde{B}_g(u, \theta) - \tilde{B}_g(\bar{u}, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} [\tilde{B}_g(\omega, \theta) + \tilde{B}_g(\omega, \bar{\theta}) + \tilde{B}_g(u, \tilde{\omega}) + \tilde{B}_g(\bar{u}, \tilde{\omega})]$$

olduğundan (4.10-4.11) sistemi

$$\omega_t + \nu A_g \omega + B_g(\omega, u) + B_g(\bar{u}, \omega) + \nu C_g \omega = \xi \tilde{\omega} + f_1 - \bar{f}_1, \quad (4.12)$$

$$\tilde{\omega}_t + \kappa \tilde{A}_g \tilde{\omega} + \frac{1}{2} [\tilde{B}_g(\omega, \theta) + \tilde{B}_g(\omega, \bar{\theta}) + \tilde{B}_g(u, \tilde{\omega}) + \tilde{B}_g(\bar{u}, \tilde{\omega})] - \kappa \tilde{C}_g \tilde{\omega} - \kappa \tilde{D}_g \tilde{\omega} = f_2 - \bar{f}_2 \quad (4.13)$$

olarak yazılabilir.

$Q_m = I - P_m$ ve $\tilde{Q}_m = I - \tilde{P}_m$ için (4.12) ve (4.13) denklemleri sırasıyla $Q_m \omega$ ve $\tilde{Q}_m \tilde{\omega}$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} & (\omega_t, Q_m \omega)_g + \nu (A_g \omega, Q_m \omega)_g + b_g(\omega, u, Q_m \omega) + b_g(\bar{u}, \omega, Q_m \omega) + \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \omega, Q_m \omega\right) \\ & = (\xi \tilde{\omega}, Q_m \omega)_g + (f_1 - \bar{f}_1, Q_m \omega)_g, \\ & (\tilde{\omega}_t, \tilde{Q}_m \tilde{\omega})_g + \kappa (\tilde{A}_g \tilde{\omega}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega})_g \\ & + \frac{1}{2} [\tilde{b}_g(\omega, \theta, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}) + \tilde{b}_g(\omega, \bar{\theta}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}) + \tilde{b}_g(u, \tilde{\omega}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}) + \tilde{b}_g(\bar{u}, \tilde{\omega}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega})] \\ & + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}, \tilde{\omega}\right) = (f_2 - \bar{f}_2, \tilde{Q}_m \tilde{\omega})_g \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Q_m \omega\|_g^2 + \nu \|\nabla Q_m \omega\|_g^2 + b_g(\omega, u, Q_m \omega) + b_g(\bar{u}, \omega, Q_m \omega) + \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \omega, Q_m \omega\right) \\ & = (\xi \tilde{\omega}, Q_m \omega)_g + (f_1 - \bar{f}_1, Q_m \omega)_g, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \kappa \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 \\
& + \frac{1}{2} [\tilde{b}_g(\omega, \theta, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}) + \tilde{b}_g(\omega, \bar{\theta}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}) + \tilde{b}_g(u, \tilde{\omega}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}) + \tilde{b}_g(\bar{u}, \tilde{\omega}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega})] \\
& + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}, \tilde{\omega}\right) = (f_2 - \bar{f}_2, \tilde{Q}_m \tilde{\omega})_g
\end{aligned} \tag{4.15}$$

yazılabilir. Bu denklemlerdeki terimlerin sağladığı eşitsizlikler $c = 2^{1/2} \left(\frac{M_0}{m_0}\right)^{3/2}$ için aşağıda verilmiştir.

1. $b_g(\omega, u, Q_m \omega) = b_g(P_m \omega, u, Q_m \omega) + b_g(Q_m \omega, u, Q_m \omega)$

$$\begin{aligned}
& \leq c \|P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla u\|_g \|Q_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla Q_m \omega\|_g^{1/2} \\
& + c \|Q_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla Q_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla u\|_g \|Q_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla Q_m \omega\|_g^{1/2} \\
& \leq c \|P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla u\|_g \|Q_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla Q_m \omega\|_g^{1/2} \\
& + \frac{c^2 \varepsilon_1}{2\nu} \|Q_m \omega\|_g^2 \|\nabla u\|_g^2 + \frac{\nu}{2\varepsilon_1} \|\nabla Q_m \omega\|_g^2
\end{aligned}$$
2. $b_g(\bar{u}, \omega, Q_m \omega) = b_g(\bar{u}, P_m \omega, Q_m \omega) + b_g(\bar{u}, Q_m \omega, Q_m \omega)$

$$\leq c \|\bar{u}\|_g^{1/2} \|\nabla \bar{u}\|_g^{1/2} \|P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla Q_m \omega\|_g + 0$$
3. $\nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \omega, Q_m \omega\right) = \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, P_m \omega, Q_m \omega\right) + \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, Q_m \omega, Q_m \omega\right)$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{\nu \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla P_m \omega\|_g \|Q_m \omega\|_g + \frac{\nu \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla Q_m \omega\|_g \|Q_m \omega\|_g \\
& \leq \frac{\nu \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla P_m \omega\|_g \|Q_m \omega\|_g \\
& + \frac{\nu \varepsilon_2}{2m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 \|Q_m \omega\|_g^2 + \frac{\nu}{2\varepsilon_2} \|\nabla Q_m \omega\|_g^2
\end{aligned}$$
4. $(\xi \tilde{\omega}, Q_m \omega)_g = (\xi \tilde{P}_m \tilde{\omega}, Q_m \omega)_g + (\xi \tilde{Q}_m \tilde{\omega}, Q_m \omega)_g$

$$\begin{aligned}
& \leq \|\xi\|_\infty \|\tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g \|Q_m \omega\|_g + \left(\frac{M_0}{4\pi^2 m_0}\right)^{1/2} \|\xi\|_\infty \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g \|\nabla Q_m \omega\|_g \\
& \leq \|\xi\|_\infty \|\tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g \|Q_m \omega\|_g \\
& + \frac{M_0 \varepsilon_3}{8\pi^2 m_0} \|\xi\|_\infty^2 \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\nabla Q_m \omega\|_g^2
\end{aligned}$$
5. $(f_1 - \bar{f}_1, Q_m \omega)_g \leq \|f_1 - \bar{f}_1\|_{V'_g} \|\nabla Q_m \omega\|_g$

6. $\frac{1}{2}\tilde{b}_g(\omega, \theta, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}\tilde{b}_g(P_m\omega, \theta, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}) + \frac{1}{2}\tilde{b}_g(Q_m\omega, \theta, \tilde{Q}_m\tilde{\omega})$
- $$\begin{aligned} &\leq \frac{c}{2}\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\theta\|_g^{1/2}\|\nabla\theta\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g \\ &+ \frac{c}{2}\|Q_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla Q_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla\theta\|_g\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{2}\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\theta\|_g^{1/2}\|\nabla\theta\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g \\ &+ \frac{c^2\varepsilon_4}{8}\|Q_m\omega\|_g\|\nabla Q_m\omega\|_g + \frac{1}{2\varepsilon_4}\|\nabla\theta\|_g^2\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g \\ &\leq \frac{c}{2}\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\theta\|_g^{1/2}\|\nabla\theta\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g \\ &+ \frac{c^4\varepsilon_4^2\varepsilon_5}{128\nu}\|Q_m\omega\|_g^2 + \frac{\nu}{2\varepsilon_5}\|\nabla Q_m\omega\|_g^2 \\ &+ \frac{\varepsilon_6}{8\varepsilon_4^2\kappa}\|\nabla\theta\|_g^4\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{\kappa}{2\varepsilon_6}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^2 \end{aligned}$$
7. $\frac{1}{2}\tilde{b}_g(\omega, \bar{\theta}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}\tilde{b}_g(P_m\omega, \bar{\theta}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}) + \frac{1}{2}\tilde{b}_g(Q_m\omega, \bar{\theta}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega})$
- $$\begin{aligned} &\leq \frac{c}{2}\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla\bar{\theta}\|_g\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2} \\ &+ \frac{c}{2}\|Q_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla Q_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla\bar{\theta}\|_g\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{2}\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla\bar{\theta}\|_g\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2} \\ &+ \frac{c^2\varepsilon_7}{8}\|Q_m\omega\|_g\|\nabla Q_m\omega\|_g + \frac{1}{2\varepsilon_7}\|\nabla\bar{\theta}\|_g^2\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g \\ &\leq \frac{c}{2}\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla\bar{\theta}\|_g\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2} \\ &+ \frac{c^4\varepsilon_7^2\varepsilon_8}{128\nu}\|Q_m\omega\|_g^2 + \frac{\nu}{2\varepsilon_8}\|\nabla Q_m\omega\|_g^2 \\ &+ \frac{\varepsilon_9}{8\varepsilon_7^2\kappa}\|\nabla\bar{\theta}\|_g^4\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{\kappa}{2\varepsilon_9}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^2 \end{aligned}$$
8. $\frac{1}{2}\tilde{b}_g(u, \tilde{\omega}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}\tilde{b}_g(u, \tilde{P}_m\tilde{\omega}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}) + \frac{1}{2}\tilde{b}_g(u, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega})$
- $$\leq \frac{c}{2}\|u\|_g^{1/2}\|\nabla u\|_g^{1/2}\|\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g + 0$$
9. $\frac{1}{2}\tilde{b}_g(\bar{u}, \tilde{\omega}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}\tilde{b}_g(\bar{u}, \tilde{P}_m\tilde{\omega}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}) + \frac{1}{2}\tilde{b}_g(\bar{u}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega}, \tilde{Q}_m\tilde{\omega})$
- $$\leq \frac{c}{2}\|\bar{u}\|_g^{1/2}\|\nabla\bar{u}\|_g^{1/2}\|\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g + 0$$

$$\begin{aligned}
10. \quad \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}, \tilde{\omega}\right) &= \kappa b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}, \tilde{P}_m \tilde{\omega}\right) + \kappa b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}, \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\right) \\
&\leq \frac{\kappa \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g \|\tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g + \frac{\kappa \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g \\
&\leq \frac{\kappa \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g \|\tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g \\
&\quad + \frac{\kappa \varepsilon_{10}}{2m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{\kappa}{2\varepsilon_{10}} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 \\
11. \quad (f_2 - \bar{f}_2, \tilde{Q}_m \tilde{\omega})_g &\leq \|f_2 - \bar{f}_2\|_{W'_g} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikler yardımıyla (4.14) ve (4.15) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Q_m \omega\|_g^2 + \nu \|\nabla Q_m \omega\|_g^2 \leq c \|P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla u\|_g \|Q_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla Q_m \omega\|_g^{1/2} \\
&\quad + c^2 \frac{\varepsilon_1}{2\nu} \|Q_m \omega\|_g^2 \|\nabla u\|_g^2 + \frac{\nu}{2\varepsilon_1} \|\nabla Q_m \omega\|_g^2 + c \|\bar{u}\|_g^{1/2} \|\nabla \bar{u}\|_g^{1/2} \|P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla Q_m \omega\|_g \\
&\quad + \frac{\nu \|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\nabla P_m \omega\|_g \|Q_m \omega\|_g + \frac{\nu \varepsilon_2}{2m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 \|Q_m \omega\|_g^2 + \frac{\nu}{2\varepsilon_2} \|\nabla Q_m \omega\|_g^2 \\
&\quad + \|\xi\|_\infty \|\tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g \|Q_m \omega\|_g + \frac{M_0 \varepsilon_3}{8\pi^2 m_0} \|\xi\|_\infty^2 \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\nabla Q_m \omega\|_g^2 + \|f_1 - \bar{f}_1\|_{V'_g} \|\nabla Q_m \omega\|_g, \\
&\hspace{25em} (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \kappa \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 \leq \frac{c}{2} \|P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla \theta\|_g \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^{1/2} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^{1/2} \\
&\quad + \frac{c^4 \varepsilon_4^2 \varepsilon_5}{128\nu} \|Q_m \omega\|_g^2 + \frac{\nu}{2\varepsilon_5} \|\nabla Q_m \omega\|_g^2 + \frac{\varepsilon_6}{8\varepsilon_4^2 \kappa} \|\nabla \theta\|_g^4 \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{\kappa}{2\varepsilon_6} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 \\
&\quad + \frac{c}{2} \|P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla P_m \omega\|_g^{1/2} \|\nabla \bar{\theta}\|_g \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^{1/2} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^{1/2} + \frac{c^4 \varepsilon_7^2 \varepsilon_8}{128\nu} \|Q_m \omega\|_g^2 + \frac{\nu}{2\varepsilon_8} \|\nabla Q_m \omega\|_g^2 \\
&\quad + \frac{\varepsilon_9}{8\varepsilon_7^2 \kappa} \|\nabla \bar{\theta}\|_g^4 \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{\kappa}{2\varepsilon_9} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{c}{2} \|u\|_g^{1/2} \|\nabla u\|_g^{1/2} \|\tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g^{1/2} \|\nabla \tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g^{1/2} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g \\
&\quad + \frac{c}{2} \|\bar{u}\|_g^{1/2} \|\nabla \bar{u}\|_g^{1/2} \|\tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g^{1/2} \|\nabla \tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g^{1/2} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g + \frac{\kappa}{m_0} \|\nabla g\|_\infty \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g \|\tilde{P}_m \tilde{\omega}\|_g \\
&\quad + \frac{\kappa \varepsilon_{10}}{2m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \frac{\kappa}{2\varepsilon_{10}} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 + \|f_2 - \bar{f}_2\|_{W'_g} \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g \\
&\hspace{25em} (4.17)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca

$$\lambda_{m+1} \|Q_m \omega\|_g^2 \leq \|\nabla Q_m \omega\|_g^2, \quad \lambda_{m+1} \|\tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2 \leq \|\nabla \tilde{Q}_m \tilde{\omega}\|_g^2$$

olduğundan (4.16) ve (4.17) toplandığında $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_5 = \varepsilon_8 = 5$, $\varepsilon_6 = \varepsilon_9 = \varepsilon_{10} = 3$,

$\varepsilon_4 = \varepsilon_7 = 4$, $\varepsilon_3 = \frac{5}{v}$ değerleri ve

$$\begin{aligned}
\beta(t) = & 2c\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla u\|_g\|Q_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla Q_m\omega\|_g^{1/2} \\
& + c\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla\theta\|_g\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2} \\
& + c\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla\bar{\theta}\|_g\|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2} \\
& + 2c\|\bar{u}\|_g^{1/2}\|\nabla\bar{u}\|_g^{1/2}\|P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla P_m\omega\|_g^{1/2}\|\nabla Q_m\omega\|_g \\
& + c\|u\|_g^{1/2}\|\nabla u\|_g^{1/2}\|\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g \\
& + c\|\bar{u}\|_g^{1/2}\|\nabla\bar{u}\|_g^{1/2}\|\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g^{1/2}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g \\
& + \frac{2v}{m_0}\|\nabla g\|_\infty\|\nabla P_m\omega\|_g\|Q_m\omega\|_g + \frac{2\kappa}{m_0}\|\nabla g\|_\infty\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g\|\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g \\
& + 2\|\xi\|_\infty\|\tilde{P}_m\tilde{\omega}\|_g\|Q_m\omega\|_g + 2\|f_1 - \bar{f}_1\|_{V'_g}\|\nabla Q_m\omega\|_g + 2\|f_2 - \bar{f}_2\|_{W'_g}\|\nabla\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|_g
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\alpha_1(t) = v\lambda_{m+1} - \left[\frac{5c^2}{v}\|\nabla u\|_g^2 + \frac{5v}{m_0^2}\|\nabla g\|_\infty^2 + \frac{5c^4}{2v} \right] \tag{4.19}$$

$$\alpha_2(t) = \kappa\lambda_{m+1} - \left[\frac{3}{64\kappa}(\|\nabla\theta\|_g^4 + \|\nabla\bar{\theta}\|_g^4) + \frac{5M_0}{4\pi^2vm_0}\|\xi\|_\infty^2 + \frac{3\kappa}{m_0^2}\|\nabla g\|_\infty^2 \right] \tag{4.20}$$

$$\alpha(t) = \min\{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\} \tag{4.21}$$

$$\zeta(t) = \|Q_m\omega\|^2 + \|\tilde{Q}_m\tilde{\omega}\|^2 \tag{4.22}$$

fonksiyonları için

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) + \alpha(t)\zeta(t) \leq \beta(t)$$

yazılabilir.

$u, \bar{u}, \theta$ ve $\bar{\theta}$ fonksiyonları ilgili H_g, V_g ve W_g uzaylarındaki normlara göre t 'nin 0'dan büyük sınırlı aralıklarında düzgün sınırlı olduğundan ve (4.8) ile (4.9) koşullarından

$$t \rightarrow \infty \text{ için } \beta(t) \rightarrow 0$$

olur. Böylece Gronwall lemmasının (4.3) koşulu sağlanmış olur.

(3.6) ve (3.7) eşitsizlikleri dikkate alındığında yeterince büyük bir T değeri için

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|\nabla u(\tau)\|_g^2 d\tau &\leq \frac{2M_0^2 \|\xi\|_\infty^2}{v'^2 \kappa'^2 \pi^4 m_0^2} \|f_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^2 + \frac{8}{v'^2} \|f_1\|_{L^\infty(t,t+T;H_g)}^2, \\ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|\nabla \theta(\tau)\|_g^2 d\tau &\leq \frac{4}{\kappa'^2} \|f_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.19) ve (4.20)'den

$$\begin{aligned} &\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha_1^-(\tau) d\tau \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\frac{5c^2}{v} \|\nabla u\|_g^2 + \frac{5v}{m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 + \frac{5c^4}{2v} - v\lambda_{m+1} \right] d\tau \\ &= \frac{5c^2}{v} \left[\frac{2M_0^2 \|\xi\|_\infty^2}{v'^2 \kappa'^2 \pi^4 m_0^2} \|f_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^2 + \frac{8}{v'^2} \|f_1\|_{L^\infty(t,t+T;H_g)}^2 \right] \\ &\quad + \frac{5v}{m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 + \frac{5c^4}{2v} - v\lambda_{m+1} \\ &< \infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha_2^-(\tau) d\tau \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\frac{3}{64\kappa} (\|\nabla \theta\|_g^4 + \|\nabla \bar{\theta}\|_g^4) + \frac{5M_0}{4\pi^2 v m_0} \|\xi\|_\infty^2 + \frac{3\kappa}{m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 - \kappa\lambda_{m+1} \right] d\tau \\ &= \frac{3}{4\kappa\kappa'^4} \left[\|f_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^4 + \|\bar{f}_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^4 \right] \\ &\quad + \frac{5M_0}{4\pi^2 v m_0} \|\xi\|_\infty^2 + \frac{3\kappa}{m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 - \kappa\lambda_{m+1} \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\alpha(t)$ için Gronwal lemmasının (4.2) koşulu sağlanmış olur. Son olarak

$$\begin{aligned} &\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha_1(\tau) d\tau \\ &\geq v\lambda_{m+1} - \frac{5c^2}{v} \left[\frac{2M_0^2 \|\xi\|_\infty^2}{v'^2 \kappa'^2 \pi^4 m_0^2} \|f_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^2 + \frac{8}{v'^2} \|f_1\|_{L^\infty(t,t+T;H_g)}^2 \right] \\ &\quad - \frac{5v}{m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 - \frac{5c^4}{2v} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha_2(\tau) d\tau \\ & \geq \kappa \lambda_{m+1} - \frac{3}{4\kappa\kappa'^4} \left[\|f_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^4 + \|\bar{f}_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^4 \right] \\ & \quad - \frac{5M_0}{4\pi^2\nu m_0} \|\xi\|_\infty^2 - \frac{3\kappa}{m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yardımıyla yeterince büyük bir m sayısı için

$$\lambda_{m+1} \geq \frac{5c^2}{\nu^2} \left[\frac{2M_0^2 \|\xi\|_\infty^2}{\nu'^2 \kappa'^2 \pi^4 m_0^2} \|f_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^2 + \frac{8}{\nu'^2} \|f_1\|_{L^\infty(t,t+T;H_g)}^2 \right] - \frac{5}{m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2 - \frac{5c^4}{2\nu^2}$$

ve

$$\lambda_{m+1} \geq \frac{3}{4\kappa^2 \kappa'^4} \left[\|f_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^4 + \|\bar{f}_2\|_{L^\infty(t,t+T;L^2(\Omega,g))}^4 \right] - \frac{5M_0 \|\xi\|_\infty^2}{4\pi^2 \nu \kappa m_0} - \frac{3}{m_0^2} \|\nabla g\|_\infty^2$$

eşitsizliklerinin sağlanması halinde Gronwall lemmasının (2.1) koşulu da elde edilmiş olur. Dolayısıyla aynı asimptotik özelliklere sahip f_1 ve $\bar{f}_1$ ile f_2 ve $\bar{f}_2$ fonksiyonları için g —Bénard probleminin (u, θ) ile $(\bar{u}, \bar{\theta})$ farklı çözüm fonksiyonlarının birkaç değerinin aynı asimptotik özelliği göstermesi halinde geriye kalan sonsuz sayıdaki değer de aynı asimptotik özelliği gösterir.



5. YAPISAL KARARLILIK

Çözümlerin katsayılarla sürekli bağımlılığı, bir denklemin katsayılarındaki küçük değişimlerin çözümler üzerindeki etkisinin incelendiği yapısal kararlılığın bir konusudur. Ames ve Straughan'a göre parametrelerdeki değişimlerin çözümlere olan etkisi, başlangıç koşullarındaki değişimlerin çözümlerde yarattığı etki kadar önemlidir [51]. Bu bölümde g-Bénard probleminde yer alan v parametresindeki değişimin çözüme olan etkisi [52] çalışması esas alınarak incelenmiştir.

Farklı v_1 ve v_2 akışkanlık değerleri için $\{u_1, \theta_1\}$ ve $\{u_2, \theta_2\}$ aşağıdaki başlangıç sınır değer problemlerinin çözümü olsun.

$$\frac{du_1}{dt} + v_1 A_g u_1 + B_g(u_1, u_1) + v_1 C_g u_1 = \xi \theta_1 + f_1 \quad (5.1)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} + \kappa \tilde{A}_g \theta_1 + \tilde{B}_g(u_1, \theta_1) - \kappa \tilde{C}_g \theta_1 - \kappa \tilde{D}_g \theta_1 = f_2 \quad (5.2)$$

$$u_1(0) = 0, \theta_1(0) = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{du_2}{dt} + v_2 A_g u_2 + B_g(u_2, u_2) + v_2 C_g u_2 = \xi \theta_2 + f_1 \quad (5.4)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} + \kappa \tilde{A}_g \theta_2 + \tilde{B}_g(u_2, \theta_2) - \kappa \tilde{C}_g \theta_2 - \kappa \tilde{D}_g \theta_2 = f_2 \quad (5.5)$$

$$u_2(0) = 0, \theta_2(0) = 0 \quad (5.6)$$

$u = u_1 - u_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ ve $v = v_1 - v_2$ olmak üzere denklem sistemleri uygun şekilde çıkarıldığında

$$\frac{du}{dt} + v_1 A_g u_1 - v_2 A_g u_2 + B_g(u_1, u_1) - B_g(u_2, u_2) + v_1 C_g u_1 - v_2 C_g u_2 = \xi \theta \quad (5.7)$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \kappa \tilde{A}_g \theta + \tilde{B}_g(u_1, \theta_1) - \tilde{B}_g(u_2, \theta_2) - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta = 0 \quad (5.8)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + v A_g u_1 + v_2 A_g u + B_g(u, u_1) + B_g(u_2, u) + v C_g u_1 + v_2 C_g u &= \xi \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} + \kappa \tilde{A}_g \theta + \frac{1}{2} [\tilde{B}_g(u, \theta_1) + \tilde{B}_g(u, \theta_2) + \tilde{B}_g(u_1, \theta) + \tilde{B}_g(u_2, \theta)] - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. İlk denklemin u ikinci denklem ise θ ile iç çarpımı alınıp

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_g^2 + \nu(A_g u_1, u)_g + \nu_2 \|\nabla u\|_g^2 + b_g(u, u_1, u) + \nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u_1, u\right) \\ + \nu_2 b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, u\right) = \xi(\theta, u)_g, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + \kappa \|\nabla \theta\|_g^2 + \frac{1}{2} [\tilde{b}_g(u, \theta_1, \theta) + \tilde{b}_g(u, \theta_2, \theta)] + \kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta, \theta\right) = 0 \end{aligned}$$

düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_g^2 &= -2\nu(A_g u_1, u)_g - 2\nu_2 \|\nabla u\|_g^2 - 2b_g(u, u_1, u) - 2\nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u_1, u\right) \\ &\quad - 2\nu_2 b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, u\right) + 2\xi(\theta, u)_g \\ \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 &= -2\kappa \|\nabla \theta\|_g^2 - \tilde{b}_g(u, \theta_1, \theta) - \tilde{b}_g(u, \theta_2, \theta) - 2\kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta, \theta\right) \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Denklemlerin sağ tarafında yer alan terimlere Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliklerinin uygulaması halinde aşağıda maddeler halinde verilen eşitsizlikler bulunur.

1. $-2\nu(A_g u_1, u)_g = 2\nu(A_g^{\frac{1}{2}} u_1, A_g^{\frac{1}{2}} u)_g \leq 2\nu \|\nabla u_1\|_g \|\nabla u\|_g \leq \varepsilon_1 \|\nabla u\|_g^2 + \frac{\nu^2}{\varepsilon_1} \|\nabla u_1\|_g^2$
2. $-2\nu_2 \|\nabla u\|_g^2 \leq -\nu_2 \|\nabla u\|_g^2 - \nu_2 \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} \|u\|_g^2$
3. $-2b_g(u, u_1, u) \leq \varepsilon_2 \|\nabla u\|_g^2 + \frac{c^2}{\varepsilon_2} \|\nabla u_1\|_g^2 \|u\|_g^2$
4. $-2\nu b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u_1, u\right) \leq \varepsilon_3 \|u\|_g^2 + \frac{\nu^2 \|\nabla g\|_\infty^2}{\varepsilon_3 m_0^2} \|\nabla u_1\|_g^2$
5. $-2\nu_2 b_g\left(\frac{\nabla g}{g}, u, u\right) \leq \varepsilon_4 \nu_2^2 \|\nabla u\|_g^2 + \frac{\|\nabla g\|_\infty^2}{\varepsilon_4 m_0^2} \|u\|_g^2$
6. $2\xi(\theta, u)_g \leq \varepsilon_5 \|u\|_g^2 + \frac{\|\xi\|_\infty^2}{\varepsilon_5} \|\theta\|_g^2$
7. $-2\kappa \|\nabla \theta\|_g^2 \leq -\kappa \|\nabla \theta\|_g^2 - \kappa \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} \|\theta\|_g^2$
8. $-\tilde{b}_g(u, \theta_1, \theta) \leq \frac{\varepsilon_6}{2} \|\nabla \theta\|_g^2 + \frac{c^2}{2\varepsilon_6} \|\nabla \theta_1\|_g^2 \|\nabla u\|_g^2$

$$\begin{aligned}
9. \quad & -\tilde{b}_g(u, \theta_2, \theta) \leq \frac{\varepsilon_7}{2} \|\nabla \theta\|_g^2 + \frac{c^2}{2\varepsilon_7} \|\nabla \theta_2\|_g^2 \|\nabla u\|_g^2 \\
10. \quad & -2\kappa \tilde{b}_g\left(\frac{\nabla g}{g}, \theta, \theta\right) \leq \varepsilon_8 \|\nabla \theta\|_g^2 + \frac{\kappa^2 \|\nabla g\|_\infty^2}{2\varepsilon_8 m_0^2} \|\theta\|_g^2
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikler yerinde kullanılıp elde edilen eşitsizlikler toplandığında

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\|u\|_g^2 + \|\theta\|_g^2) &\leq \|\nabla u\|_g^2 \left(\varepsilon_1 - v_2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 v_2^2 + \frac{c^2}{2\varepsilon_6} \|\nabla \theta_1\|_g^2 + \frac{c^2}{2\varepsilon_7} \|\nabla \theta_2\|_g^2 \right) \\
&+ \|\nabla \theta\|_g^2 \left(-\kappa + \frac{\varepsilon_6}{2} + \frac{\varepsilon_7}{2} + \varepsilon_8 \right) + \|u\|_g^2 \left(-v_2 \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} + \frac{c^2}{\varepsilon_2} \|\nabla u_1\|_g^2 + \varepsilon_3 + \frac{\|\nabla g\|_\infty^2}{\varepsilon_4 m_0^2} + \varepsilon_5 \right) \\
&+ \|\theta\|_g^2 \left(\frac{\|\xi\|_\infty^2}{\varepsilon_5} - \kappa \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} + \frac{\kappa^2 \|\nabla g\|_\infty^2}{2\varepsilon_8 m_0^2} \right) + \frac{v^2}{\varepsilon_1} \|\nabla u_1\|_g^2 + \frac{v^2 \|\nabla g\|_\infty^2}{\varepsilon_3 m_0^2} \|\nabla u_1\|_g^2
\end{aligned}$$

bulunur. θ_1 ve θ_2 fonksiyonları ilgili denklemlerin zayıf çözümleri olduğundan

$$\sup \|\nabla \theta_1\|_g^2 \leq d_1, \sup \|\nabla \theta_2\|_g^2 \leq d_2, \max\{d_1, d_2\} = d$$

olacak şekilde d_1, d_2 ve d sabitleri vardır. Bu durumda, $v_2 > \frac{3c^2 d}{\kappa}$ olmak kaydıyla ve

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\kappa v_2 - 3c^2 d}{4\kappa}, \varepsilon_3 = \varepsilon_5 = \frac{1}{2}, \varepsilon_4 = \frac{1}{2v_2}, \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = \frac{2\kappa}{3}, \varepsilon_8 = \frac{\kappa}{3}$$

değerleri için

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\|u\|_g^2 + \|\theta\|_g^2) &+ \|u\|_g^2 \left(v_2 \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} - \frac{4\kappa c^2}{\kappa v_2 - 3c^2 d} \|\nabla u_1\|_g^2 - \frac{2v_2 \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} - 1 \right) \\
&+ \|\theta\|_g^2 \left(\kappa \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} - 2\|\xi\|_\infty^2 - \frac{3\kappa \|\nabla g\|_\infty^2}{2m_0^2} \right) \leq \frac{4v^2 \kappa}{\kappa v_2 - 3c^2 d} \|\nabla u_1\|_g^2 + \frac{2v^2 \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \|\nabla u_1\|_g^2
\end{aligned}$$

yazılabilir. Elde edilen bu son ifadede yer alan $\|u\|_g^2$ ve $\|\theta\|_g^2$ terimlerinin katsayılarının pozitif olması koşulunu sağlayan v_2 ve κ değerleri için

$$\begin{aligned}
v_2 \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} - \frac{4\kappa c^2}{\kappa v_2 - 3c^2 d} \|\nabla u_1\|_g^2 - \frac{2v_2 \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} - 1 &\geq a_1, \\
\kappa \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} - 2\|\xi\|_\infty^2 - \frac{3\kappa \|\nabla g\|_\infty^2}{2m_0^2} &\geq a_2,
\end{aligned}$$

$$\frac{4\kappa}{\kappa v_2 - 3c^2 d} \|\nabla u_1\|_g^2 \leq b_1,$$

$$\frac{2\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \|\nabla u_1\|_g^2 \leq b_2$$

ve $\min\{a_1, a_2\} = a$, $\max\{b_1, b_2\} = b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{d}{dt} (\|u\|_g^2 + \|\theta\|_g^2) + a(\|u\|_g^2 + \|\theta\|_g^2) \leq b v^2$$

yazılabilir. Son olarak, Gronwall eşitsizliğinden

$$\|u\|_g^2 + \|\theta\|_g^2 \leq \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) v^2$$

$$\|u_1 - u_2\|_g^2 + \|\theta_1 - \theta_2\|_g^2 \leq \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) (v_1 - v_2)^2$$

bulunur.

6. VERİ EKLEME

Lineer olmayan sistemlerin sayısal simülasyonlarının, doğru yapılabilmesi için başlangıç verilerinde yüksek hassasiyetin olması gerekir. Ancak fiziki bölgenin tamamı üzerinde tanımlanması gereken başlangıç verileri birçok uygulamada yalnızca ayırık noktalarda ve çoğu zaman da yetersiz çözünürlükte olmaktadır. Bu tür durumlarda, veri ekleme(data assimilation) yani başlangıç verilerinin tamamlanması ya da geliştirilmesine yönelik adımların atılması uygun olur. Veri ekleme yöntemi, *dissipatif* sistemlerin uzun zaman sonraki durumlarının *modes-nodes* gibi sonlu sayıda belirleyici parametre yardımıyla belirlenebilmesinden yola çıkılarak oluşturulmuştur.

Bu kısımda, öncelikle g-Bénard denklem sisteminin bir yutan kümesinin olduğu gösterilerek sistemin *dissipatif* yapıda olduğu ortaya konulmuştur. Ardından yerel olmayan çekicilerin varlığı gösterilmiştir. Son olarak, başlangıç verilerinin yetersiz kaldığı durumlarda sıvının hareketini ve sıcaklığını belirleyebilmek için sadece hız bileşeni üzerindeki gözlemler yardımıyla oluşturulan interpolasyon operatörü yardımıyla başlangıç koşulu üzerinde iyileştirmeler yapılması halinde problemin çözümünün, yerel olmayan çekici üzerinde yer alan çözümlere yakınsak olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlara [43, 53–55] çalışmaları esas alınarak ulaşılmıştır.

Yöntemin ana fikrini ortaya koyabilmek için $u(0) = u_0$ başlangıç verisinin bulunmadığı

$$\frac{du}{dt} = F(u)$$

genel denklemi ele alınsın. h değeri konum değişkenine ait adım uzunluğu olmak üzere $I_h(u(t))$ gözlemlere dayalı olarak oluşturulan interpolasyon operatörü olsun.

Şimdi, v_0 başlangıç verisi keyfi olmak üzere $\mu > 0$ parametresine bağlı olarak

$$\frac{dv}{dt} = F(v) - \mu(I_h(v) - I_h(u)), v(0) = v_0$$

problemi ele alınsın. μ yeterince büyük ve μ parametresine bağlı olarak h değeri de yeterince küçük olarak seçildiğinde $v(t)$ 'nin iki boyutlu Navier-Stokes denkleminin referans

çözümü $u(t)$ 'ye $t \rightarrow \infty$ için üstel oranda yakınsadığı gösterilmiştir [54]. [55]'de ise iki boyutlu Bénard problemine ait başlangıç verileri sadece hıza bağlı gözlemler kullanılarak geliştirilmiş ve $v(t)$ 'nin $t \rightarrow \infty$ için $u(t)$ 'ye üstel oranda yakınsadığı gösterilmiştir.

x_1 ve x_2 doğrultularında u, θ ve p fonksiyonları periyodik olmak üzere $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = \xi \theta \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot (gu) = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\theta - \kappa \Delta \theta - \frac{2\kappa}{g}(\nabla g \cdot \nabla)\theta - \frac{\Delta g}{g}\theta = 0 \quad (6.3)$$

g-Bénard problemi $u(0, x) = u_0(x), \theta(0, x) = \theta_0(x)$ başlangıç koşulları ile birlikte verilmiş olsun.

I_h interpolasyon operatörü ise $c > 0$ pozitif bir sabit olmak üzere her $u \in H^1$ için

$$\|u - I_h(u)\|_{L^2(\Omega, g)} \leq ch\|u\|_{H^1(\Omega, g)}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, P_g Helmholtz-Leray ortogonal projeksiyonu olmak üzere her $u \in V_g$ için

$$\|P_g(u - I_h(u))\|_{H_g} \leq ch\|u\|_{V_g} \quad (6.4)$$

sağlanır [55].

6.1. Yerel Olmayan Çekicilerin Varlığı

Bir dinamik sistemde bir çok başlangıç noktasının zamanla kapalı bir alt küme içerisinde yer alacak şekilde hareket etmesi halinde bu küme çekim kümesi olarak adlandırılır. Bu çekim kümeleri, daha küçük parçalara ayrılamamak gibi bir takım başka şartları sağlıyorsa çekici olarak adlandırılır. En basit çekiciler sabit noktalar ve periyodik yörüngelerdir.

6.1.1. Teorem

$T > 0$ sabit ancak keyfi olsun. $u_0, \theta_0 \in H_g$ olmak üzere

$$\frac{du}{dt} + B_g(u, u) + \nu A_g u + \nu C_g u = \mathcal{P}(\xi \theta), \quad (6.5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \tilde{B}_g(u, \theta) + \kappa \tilde{A}_g \theta - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta = 0, \quad (6.6)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \theta(0, x) = \theta_0(x), \quad (6.7)$$

denklem sisteminin $u \in C([0, T]; H_g) \cap L^2([0, T]; V_g)$ ve $\theta \in C([0, T]; H_g) \cap L^2([0, T]; W_g)$ olacak şekilde tek bir (u, θ) zayıf çözümü vardır.

6.1.2. Teorem

$T > 0$ sabit ancak keyfi olsun. $u_0 \in V_g$ ve $\theta \in W_g$ olmak üzere (6.5)-(6.7) denklem sisteminin $u \in C([0, T]; V_g) \cap L^2([0, T]; D(A_g))$ ve $\theta \in C([0, T]; W_g) \cap L^2([0, T]; D(\tilde{A}_g))$ olacak şekilde tek bir (u, θ) güçlü çözümü vardır.

6.1.3. Teorem [43]

$\mathcal{B}$ kümesi H Hilbert uzayının sınırlı bir alt kümesi olsun. U ise H uzayında $\mathcal{B}$ kümesini kapsayan açık bir alt küme olsun. $S(t)$ operatörleri de aşağıdaki şartları sağlasın.

1. $S(t)$ operatörlerine göre fonksiyonel invaryant bir küme vardır.
2. $S(t)$ operatörlerine göre U 'da yutan küme olacak şekilde bir $\mathcal{B} \subset U$ vardır.
3. Bütün sınırlı $\tilde{\mathcal{B}}$ kümeleri için

$$\cup_{t \geq t_0} S(t) \tilde{\mathcal{B}}$$

birleşim kümesi, H kümesinde bağıl kompakt olacak şekilde $\tilde{\mathcal{B}}$ kümesine bağlı olabilen bir t_0 zamanı vardır.

Bu şartlar altında $\tilde{\mathcal{B}}$ kümesinin ω -limit kümesi, U kümesindeki bütün sınırlı kümeleri çeken

kompakt bir çekici olur. Ayrıca bu küme, U kümesindeki maksimal sınırlı çekicidir.

Bu teoremin bir uygulaması [56] ve [57] çalışmalarında yer almaktadır ve bu çalışmalarda izlenen yol g-Bénard probleminin yerel olmayan çekicisinin varlığı gösterilirken takip edilmeye çalışılmıştır.

6.1.4. Teorem

(6.5)-(6.7) denklem sisteminin H_g uzayında bütün sınırlı invaryant kümelerle göre maksimal ve kompakt olan sonlu boyutlu bir $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisi vardır.

İspat

(6.5) ve (6.6) denklemleri sırasıyla u ve θ ile çarpılıp integralleri alındığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_g^2 + \nu \|\nabla u\|_g^2 + \nu \left(\left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \right) u, u \right)_g &= (\mathcal{P}(\xi \theta), u)_g, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + \kappa \|\nabla \theta\|_g^2 + \kappa \left(\left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \right) \theta, \theta \right)_g &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. $\nu' = \nu(1 - \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{m_0\sqrt{\lambda_g}})$ ve $\kappa' = \kappa(2 - \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{m_0\sqrt{\lambda_g}})$ olmak üzere Cauchy-Schwarz, Young ve Poincaré eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\frac{d}{dt} \|u\|_g^2 + \nu' \|\nabla u\|_g^2 \leq \frac{\|\xi\|_\infty^2}{4\nu\lambda_g} \|\theta\|_g^2, \quad (6.8)$$

$$\frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + \kappa' \|\nabla \theta\|_g^2 \leq 0 \quad (6.9)$$

eşitsizliklerine ulaşılır. $0 < t \leq T$ olmak üzere, (6.8) ve (6.9) eşitsizliklerinin t 'ye göre integralleri alındığında

$$\|u(t)\|_g^2 + \nu' \int_0^t \|u(s)\|_{V_g}^2 ds \leq \|u(0)\|_g^2 + \frac{\|\xi\|_\infty^2}{4\nu\lambda_g} \int_0^t \|\theta(s)\|_g^2 ds,$$

$$\|\theta(t)\|_g^2 + \kappa' \int_0^t \|\theta(s)\|_{W_g}^2 ds \leq \|\theta(0)\|_g^2$$

bulunur. Dolayısıyla, $K_1 = \|u_0\|_g^2 + \frac{\|\xi\|_\infty^2}{4v\kappa'\lambda_g} \|\theta_0\|_g^2$ ve $K_2 = \|\theta_0\|_g^2$ için

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_g^2 \leq K_1 \quad (6.10)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\theta(t)\|_g^2 \leq K_2 \quad (6.11)$$

yazılabilir. Böylece, H_g uzayının sınırlı bir $\mathcal{B}$ kümesinde yer alan u_0 ve θ_0 fonksiyonları için $t \geq t_0$ olduğunda herhangi bir $\varepsilon > 0$ değeri için

$$\|u(t)\|_g \leq \sqrt{K_1} + \varepsilon,$$

$$\|\theta(t)\|_g \leq \sqrt{K_2} + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $t_0 = t_0(u_0, \theta_0, \varepsilon)$ zamanı vardır. Bu durumda

$$\mathcal{P}_0 = \{u, \theta \in H_g : \|u(t)\|_g \leq \sqrt{K_1} + \varepsilon, \|\theta(t)\|_g \leq \sqrt{K_2} + \varepsilon\}$$

kümesi, g-Bénard probleminin çözümleri ile oluşturulan $S(t)$ yarıgrubu için H_g uzayında bir yutan küme olur.

(6.8) ve (6.9) eşitsizliklerinin t ile $t + 1$ arasında integrali alındığında $t \geq t_0$ için

$$\int_t^{t+1} \|u(t)\|_{V_g}^2 dt \leq K_3,$$

$$\int_t^{t+1} \|\theta(t)\|_{W_g}^2 dt \leq K_4$$

olur. Burada, $K_3 = \frac{1}{v'} K_1 + \frac{\|\xi\|_\infty^2}{4v\kappa'\lambda_g^2} K_2$ ve $K_4 = \frac{1}{\kappa'} K_2$ 'dir.

(6.8) ve (6.9) eşitsizliklerinin sırasıyla $A_g u$ ve $\tilde{A}_g \theta$ ile çarpılıp integralleri alındığında $P_1(t) = \frac{c}{v^3} \|u(t)\|_g^2 \|\theta(t)\|_g^2 + \frac{3v\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2}$, ve $P_2(t) = \frac{c}{\kappa^3} \|u(t)\|_g^2 \|\theta(t)\|_g^2 + \frac{3\kappa\|\Delta g\|_\infty^2}{m_0^2 \lambda_g} + \frac{3\kappa\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2}$ için

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{V_g}^2 - P_1(t) \|u\|_{V_g}^2 \leq \frac{3\|\xi\|_\infty^2}{v} \|\theta\|_g^2$$

$$\frac{d}{dt} \|\theta\|_{W_g}^2 - P_2(t) \|\theta\|_{W_g}^2 \leq 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\int_t^{t+1} P_1(s)ds \leq K_5, \quad \int_t^{t+1} P_2(s)ds \leq K_6$$

olduğundan düzgün Gronwall Lemması uygulandığında $t \geq t_0 + 1$ için

$$\|u(t)\|_{V_g}^2 \leq K_7, \quad (6.12)$$

$$\|\theta(t)\|_{W_g}^2 \leq K_8 \quad (6.13)$$

bulunur. Burada, where $K_5 = \frac{c}{v^3}K_1K_3 + \frac{3vT\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2}$, $K_6 = \frac{c}{\kappa^3}K_1K_3 + \frac{3\kappa\|\Delta g\|_\infty^2}{m_0^2\lambda_g} + \frac{3\kappa\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2}$, $K_7 = e^{K_5}\|u_0\|_{V_g}^2 + \frac{3\|\xi\|_\infty^2}{v}K_2$ ve $K_8 = e^{K_6}\|\theta_0\|_{W_g}^2$ 'dir.

Dolayısıyla, H_g uzayında sınırlı herhangi bir $\mathcal{B}$ kümesi için $S(t)\mathcal{B}$ kümesi, $\mathcal{B}$ kümesine bağlı bir $t_1 = t_0(\mathcal{B}, \varepsilon) + 1$ zamanı için, $t \geq t_1$ olduğunda $V_g \times W_g$ uzayında (6.12) ve (6.13) yardımıyla tanımlanan bir $\mathcal{B}_1$ sınırlı kümesi içinde yer alır. Sonuç olarak, $\mathcal{B}_1$ kümesi $V_g \times W_g$ uzayında bir yutan küme ve $S(t)$ yarıgrubu da düzgün kompakt olur. Bu durumda Teorem 6.1.3'ten dolayı bütün sınırlı invariant kümeler ile $S(t)$ 'nin sınırlı çekiciler arasında maksimal olan bir $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekici vardır.

6.1.5. Lemma [58]

$T > 0$ sabit olmak üzere $Y(t)$ mutlak sürekli lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\alpha^- = \max\{-\alpha, 0\}$ ve $c > 0$ sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} + \alpha(t)Y &\leq 0, \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} \alpha(s)ds &\geq c, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} \alpha^-(s)ds &< \infty, \end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlanması halinde $t \rightarrow \infty$ için üstel oranda $Y(t) \rightarrow 0$ olur.

6.1.6.Önerme

(6.5)-(6.7) denklem sisteminin $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisinde yer alan iki çözüm eğrisi $(u_1(t, x), \theta_1(t, x))$ ve $(u_2(t, x), \theta_2(t, x))$ olsun. $\mathcal{A}$ 'da $u_1(t, x) = u_2(t, x) = u(t, x), \forall t \in \mathbb{R}$ olması halinde $\theta_1(t, x) = \theta_2(t, x), \forall t \in \mathbb{R}$ olur.

İspat

$\forall t \in \mathbb{R}$ için $(u(t, x), \theta_1(t, x)) \in \mathcal{A}$ ve $(u(t, x), \theta_2(t, x)) \in \mathcal{A}$ olsun. $\theta = \theta_1 - \theta_2$ olarak tanımlandığında

$$\frac{d\theta}{dt} + \tilde{B}_g(u, \theta) + \kappa \tilde{A}_g \theta - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta = 0$$

olur. Bu denklem θ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + \kappa \|\theta\|_{W_g}^2 + \kappa \left(\left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \right) \theta, \theta \right)_g &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + \kappa \|\theta\|_{W_g}^2 &\leq \kappa \frac{\|\nabla g\|_\infty}{m_0} \|\theta\|_{W_g} \|\theta\|_g, \\ \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + 2\kappa \|\theta\|_{W_g}^2 &\leq 2\kappa \left(\frac{1}{2} \|\theta\|_{W_g}^2 + \frac{\|\nabla g\|_\infty^2}{2m_0^2} \|\theta\|_g^2 \right), \\ \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + \kappa \frac{4\pi^2 m_0}{M_0} \|\theta\|_g^2 &\leq \frac{\kappa \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \|\theta\|_g^2, \\ \frac{d}{dt} \|\theta\|_g^2 + \kappa \left(\frac{4\pi^2 m_0}{M_0} - \frac{\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \right) \|\theta\|_g^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Güçlü çözümlerinin varlığı $\|\nabla g\|_\infty^2 \leq \frac{\pi^2 m_0^3}{M_0}$ koşulu altında elde edilmişti. Dolayısıyla Gronwall eşitsizliği kullanıldığında $\forall s, -\infty < s \leq t < \infty$ için

$$\|\theta(t)\|_g^2 \leq e^{-\kappa \left(\frac{4\pi^2 m_0}{M_0} - \frac{\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \right) (t-s)} \|\theta(s)\|_g^2$$

elde edilir. Sonuç olarak $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $s \rightarrow -\infty$ için

$$\|\theta(t)\|_g^2 = 0 \text{ bulunur.}$$

6.2. Veri Ekleme

İki boyutlu g-Bénard probleminin $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisinde yer alan (u, θ) güçlü çözümü için fonksiyonel formda

$$\frac{dv}{dt} + B_g(v, v) + vA_g v + vC_g v = P_g(\xi \eta) - \mu P_g(I_h(v) - I_h(u)) \quad (6.14)$$

$$\frac{d\eta}{dt} + \tilde{B}_g(v, \eta) + \kappa \tilde{A}_g \eta - \kappa \tilde{C}_g \eta - \kappa \tilde{D}_g \eta = 0 \quad (6.15)$$

$$v(0, x) = v_0(x), \eta(0, x) = \eta_0(x) \quad (6.16)$$

yazılabilir.

6.2.1. Teorem

I_h interpolasyon operatörü (6.4) şartını sağlasın. $(u(t, x), \theta(t, x))$ (6.5)-(6.7) denklem sisteminin yerel olmayan çekicisinde yer alan bir güçlü çözümü olsun. $\mu > 0$ keyfi ve $\mu c h^2 \leq v$ olacak şekilde seçilen bir $h \ll 1$ için $(u(t, x), \theta(t, x))$, (6.14)-(6.16) denklem sisteminin

$$v \in C([0, T]; V_g) \cap L^2([0, T]; D(A_g)), \frac{dv}{dt} \in L^2([0, T]; H_g), \quad (6.17)$$

$$\eta \in C([0, T]; W_g) \cap L^2([0, T]; D(\tilde{A}_g)), \frac{d\eta}{dt} \in L^2([0, T]; H_g), \quad (6.18)$$

olacak şekilde tek bir güçlü çözümü vardır. Ayrıca (v, η) güçlü çözümü $V_g \times W_g$ normuna göre başlangıç koşullarına sürekli bağlıdır.

μ sayısının, Teorem 6.1.4'ün ispatında yer verilen K_i sabitleriyle

$$\mu > \frac{12c^2}{v} K_2 + \frac{12v \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} + \frac{4 \|\xi\|_\infty^2}{\kappa \lambda_g} + \frac{12c^4}{v \kappa^2} K_4 K_5 \quad (6.19)$$

eşitsizliğini ve $h > 0$ sayısının da $\mu c^2 h^2 \leq v$ eşitsizliğini sağlaması halinde $t \rightarrow \infty$ için yaklaşık çözümler referans çözüme üstel oranda yakınsak olur:

$$\|u(t) - v(t)\|_g^2 + \|\theta(t) - \eta(t)\|_g^2 \rightarrow 0$$

İspat

(v, η) çözümünün varlığı Galerkin yöntemi ve Aubin kompaktlık teoremi ile gösterilebilir. Çözümlerin tekliği ve iyi tanımlılığı ise Lions-Magenes lemması ile birlikte Gronwall lemmasının bir sonucudur.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + B_g(u, u) + vA_g u + vC_g u &= P_g(\xi \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} + \tilde{B}_g(u, \theta) + \kappa \tilde{A}_g \theta - \kappa \tilde{C}_g \theta - \kappa \tilde{D}_g \theta &= 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \theta(0, x) = \theta_0(x), \\ \frac{dv}{dt} + B_g(v, v) + vA_g v + vC_g v &= P_g(\xi \eta) - \mu P_g(I_h(v) - I_h(u)), \\ \frac{d\eta}{dt} + \tilde{B}_g(v, \eta) + \kappa \tilde{A}_g \eta - \kappa \tilde{C}_g \eta - \kappa \tilde{D}_g \eta &= 0, \\ v(0, x) &= v_0(x), \eta(0, x) = \eta_0(x), \end{aligned}$$

$w = u - v$ ve $\zeta = \theta - \eta$ olsun. Bu durumda $w(0, x) = u_0(x) - v_0(x)$, $\zeta(0, x) = \theta_0(x) - \eta_0(x)$ için

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} + B_g(v, w) + B_g(w, u) + vA_g w + vC_g w &= P_g(\xi \zeta) - \mu P_g(I_h(w)), \\ \frac{d\zeta}{dt} + \tilde{B}_g(v, \zeta) + \tilde{B}_g(\zeta, \theta) + \kappa \tilde{A}_g \zeta - \kappa \tilde{C}_g \zeta - \kappa \tilde{D}_g \zeta &= 0, \end{aligned}$$

denklemleri sağlanır. Denklemlerin sırasıyla w ve ζ ile iç çarpımlarının alınmasıyla;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_g^2 + (B_g(w, u), w)_g + v \|w\|_{V_g}^2 + v \left(\left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \right) w, w \right)_g \\ = (P_g(\xi \zeta), w)_g - \mu (P_g(I_h(w)), w)_g, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta\|_g^2 + (\tilde{B}_g(\zeta, \theta), \zeta)_g + \kappa \|\zeta\|_{\tilde{W}_g}^2 + \kappa \left(\left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \right) \zeta, \zeta \right)_g = 0, \end{aligned}$$

elde edilir.

1. $|2(B_g(w, u), w)_g| \leq \frac{v}{6} \|w\|_{V_g}^2 + \frac{6c^2}{v} \|w\|_g^2 \|u\|_{V_g}^2$
2. $|2v \left(\left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \right) w, w \right)_g| \leq \frac{v}{6} \|w\|_{V_g}^2 + \frac{6v \|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} \|w\|_g^2$

3. $|2(P_g(\xi\zeta), w)_g| \leq \frac{\kappa}{2} \|\zeta\|_{\tilde{W}_g}^2 + \frac{2\|\xi\|_\infty^2}{\kappa\lambda_g} \|w\|_g^2$
4. $-2\mu(P_g(I_h(w)), w)_g = -2\mu(I_h(w) - w, w)_g - 2\mu(w, w)_g$
 $\leq 2\mu\|I_h(w) - w\|_g\|w\|_g - 2\mu\|w\|_g^2$
 $\leq 2\mu ch\|w\|_{V_g}\|w\|_g - 2\mu\|w\|_g^2$
 $\leq \mu c^2 h^2 \|w\|_{V_g}^2 - \mu\|w\|_g^2$
 $\leq \nu\|w\|_{V_g}^2 - \mu\|w\|_g^2$
5. $|2(\tilde{B}_g(\zeta, \theta), \zeta)_g| \leq 2c\|w\|_g^{1/2}\|w\|_{V_g}^{1/2}\|\theta\|_g^{1/2}\|\theta\|_{V_1}^{1/2}\|\zeta\|_{W_g}$
 $\leq \frac{\kappa}{2} \|\zeta\|_{\tilde{W}_g}^2 + \frac{\nu}{6} \|w\|_{V_g}^2 + \frac{6c^4}{\nu\kappa^2} \|\theta\|_g^2 \|\theta\|_{\tilde{W}_g}^2 \|w\|_g^2$
6. $|2\kappa((\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla)\zeta, \zeta)_g| \leq \frac{2\kappa\|\nabla g\|_\infty}{m_0\sqrt{\lambda_g}} \|\zeta\|_{\tilde{W}_g}^2$

Yukarıda Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri kullanılarak elde edilen 1 – 6 eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|w\|_g^2 + \|\zeta\|_g^2) + \frac{\nu}{2} \|w\|_{V_g}^2 + \kappa \left(1 - \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{m_0\sqrt{\lambda_g}}\right) \|\zeta\|_{\tilde{W}_g}^2 \leq \\ & \left(\frac{6c^2}{\nu} \|u\|_{V_g}^2 + \frac{6\nu\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} + \frac{2\|\xi\|_\infty^2}{\kappa\lambda_g} - \mu + \frac{6c^4}{\nu\kappa^2} \|\theta\|_g^2 \|\theta\|_{\tilde{W}_g}^2 \right) \|w\|_g^2, \end{aligned}$$

yazılabilir. Teorem 6.1.1 ve Teorem 6.1.2'nin şartları gereği $1 - \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{m_0\sqrt{\lambda_g}} > 0$ olmaktadır.

Ayrıca (6.19) dolayısıyla

$$\alpha(t) = \mu - \frac{6c^2}{\nu} \|u\|_{V_g}^2 - \frac{6\nu\|\nabla g\|_\infty^2}{m_0^2} - \frac{2\|\xi\|_\infty^2}{\kappa\lambda_g} - \frac{6c^4}{\nu\kappa^2} \|\theta\|_g^2 \|\theta\|_{\tilde{W}_g}^2$$

için

$$\frac{d}{dt} (\|w\|_g^2 + \|\zeta\|_g^2) + \min \left\{ \frac{\nu\lambda_g}{2}, \kappa\lambda_g \left(1 - \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{m_0\sqrt{\lambda_g}}\right), \alpha(t) \right\} (\|w\|_g^2 + \|\zeta\|_g^2) \leq 0$$

yazılabilir.

$$\int_t^{t+1} \alpha(s) ds \geq \frac{\mu}{2} > 0 \text{ ve } \int_t^{t+1} \alpha(s) ds \leq \frac{3\mu}{2} < \infty,$$

olduğundan Gronwall lemması gereği $t \rightarrow \infty$ için üstel oranda

$$\|w(t)\|_g^2 + \|\zeta(t)\|_g^2 \rightarrow 0$$

elde edilir.

μ ve h parametrelerinin uygun seçilmesi ve gözleme dayalı olarak sadece hız bileşeni üzerinden elde edilen sonlu boyutlu verilerin hatasız olması halinde yaklaşık çözümler yerel olmayan çekici üzerinde yer alan tek bir güçlü çözüme üstel oranda yakınsak olmaktadır.





7. SONUÇ

Rayleigh-Bénard denklemleri, sıcaklığın etkisi altında bulunan sıkıştırılamaz nitelikteki akışkanların hareketini modellemektedir. Atmosfer olayları, okyanus hareketleri ve yıldızların yapısında meydana gelen olaylar bu tür denklemler yardımıyla incelenmektedir. Rayleigh-Bénard denklem sisteminin iki boyutlu uzayda çözümlerinin varlığı ve tekliği gösterilmiştir ancak üç boyutlu uzayda genel şartlar altında çözümlerin tekliği elde edilememiştir. Bu açıdan üç boyutlu uzayda çözümlerin sahip olduğu özelliklerin incelenmesi önem arz etmektedir.

Bu tezde, Rayleigh-Bénard denklemlerinin üç boyutlu bir ince bölge üzerindeki zayıf ve güçlü çözümlerinin varlığı, bu denklem sisteminden türetilen iki boyutlu g-Bénard denklemleri üzerinden elde edilmiştir. İki boyutlu g-Bénard probleminin çözüm özelliklerinin incelenmesinde önemli yeri bulunan belirleyici değerler üzerinde bir üst sınır bulunmuştur. Dahası, akışkanların hareketinin uzun süreler sonunda gösterdiği davranışları incelemede çok önemli yeri bulunan yerel olmayan çekicinin varlığı birtakım şartlar altında elde edilmiştir. Denklemin akışkanlık parametresine göre değişimlerinin çözümlere sürekli bağlı olduğu gösterilerek birbirine benzer akışkanların aynı şartlar altında benzer davranışlar sergilediği ortaya konulmuştur. Ayrıca, iki boyutlu g-Bénard probleminde başlangıç koşulunun bulunmaması ya da eksik olması halinde sadece hız bileşeni üzerindeki gözlemler yardımıyla oluşturulan interpolasyon operatörü yardımıyla başlangıç koşulu üzerinde iyileştirmeler yapılması halinde problemin çözümünün yerel olmayan çekici üzerinde yer alan çözümlere yakınsak olduğu gösterilerek veri ekleme analizi yapılmıştır.



KAYNAKLAR

1. Pankaj, K. M. (2011). *Instabilities and Turbulence in Rayleigh-Bénard Convection: Numerical and Phenomenological Studies*. Unpublished PhD Thesis, Indian Institute of Technology, Kanpur.
2. Perkins, A. C. (2011). *Mechanisms of Instability in Rayleigh-Bénard Convection*. Unpublished PhD Thesis, Georgia Institute of Technology, Georgia.
3. Bénard, H. (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent. *Annales de Chimie et de Physique*, 23, 62-144.
4. Rayleigh, L. (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 32(192), 529-546.
5. Boussinesq, J. (1903). *Théorie analytique de la chaleur: mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*. 2, Paris: Gauthier-Villars.
6. Leray, J. (1933). Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 12, 1-82.
7. Leray, J. (1934). Essai sur les mouvements plans d'un fluide visqueux que limitent des parois. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 13, 331-418.
8. Ladyzhenskaya, O. A. (1969). *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, (Revised second edition). Mathematics and Its Applications. 2, New York: Gordon and Breach.
9. Hopf, E. (1950). Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet. *Mathematische Nachrichten*, 4, 213-231.
10. Lions, J. L. and Prodi, G. (1959). Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 248, 3519-3521.
11. Serrin, J. (1963). The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations. In R. E. Langer (Ed.), *Nonlinear Problems*. Madison: University of Wisconsin Press, 69-98.
12. Scheffer, V. (1976). Turbulence and Hausdorff Dimension. In R. Temam (Ed.), *Turbulence and Navier Stokes Equations: Proceedings of the Conference Held at the University of Paris-Sud Orsay June 10-13, 1975*. Heidelberg: Springer, 174-183.
13. Caffarelli, L., Kohn, R., and Nirenberg, L. (1982). Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 35, 771-831.

14. Temam, R. (2001). *Navier-Stokes equations: Theory and Numerical Analysis*, 343. American Mathematical Society, Providence: Rhode Island.
15. Raugel, G. and Sell, G. R. (1993a). Navier-Stokes equations on thin 3D domains I: Global attractors and global regularity of solutions. *Journal of the American Mathematical Society*, 6(3), 503-568.
16. Raugel, G. and Sell, G. R. (1993b). Navier-Stokes equations in thin 3D domains III: Existence of a global attractor . *Turbulence in Fluid Flows A Dynamical Systems Approach - The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 55, 137-163.
17. Raugel, G. and Sell, G. R. (1994). Navier-Stokes equations on thin 3D domains II: Global regularity of spatially periodic solutions. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications College de France Seminar, Pitman Research Notes Math, Series 299*. XI, London: Longman, 205-247.
18. Roh, J. (2001). *g-Navier-Stokes equations*. Unpublished PhD Thesis, University of Minnesota, Minnesota.
19. Roh, J. (2005). Dynamics of the g-Navier-Stokes equations. *Journal of Differential Equations*, 211(2), 452-484.
20. Roh, J. (2006). Derivation of the g-Navier-Stokes equations. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 19(3), 213-218.
21. Roh, J. (2009). Convergence of the g-Navier-Stokes Equations. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 13(1), 189-210.
22. Kaya, M. and Çelebi, A. O. (2009). Existence of weak solutions of the g-Kelvin–Voight equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3), 497-504.
23. Hoang, L. T. (2010). Incompressible Fluids in Thin Domains with Navier friction Boundary Conditions (I). *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 12(3), 435-472.
24. Hoang, L. T. (2013). Incompressible Fluids in Thin Domains with Navier Friction Boundary Conditions (II). *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 15(2), 361-395.
25. Hu, C. B. (2007). Navier-Stokes equations in 3D thin domains with Navier friction boundary condition. *Journal of Differential Equations*, 236(1), 133-163.
26. Hu, C. B. (2011). Global strong solutions of Navier-Stokes equations with interface boundary in three-dimensional thin domains. *Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications*, 74(12), 3964-3997.
27. Iftimie, D. (1999). The 3D Navier-Stokes equations seen as a perturbation of the 2D Navier-Stokes equations. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 127(4), 473-518.
28. Iftimie, D., Raugel, G., and Sell, G. R. (2007). Navier-Stokes equations in thin 3D domains with Navier boundary conditions. *Indiana University Mathematics Journal*, 56(3), 1083-1156.

29. Iftimie, D. and Raugel, G. (2001). Some results on the Navier–Stokes equations in thin 3D domains. *Journal of Differential Equations*, 169(2), 281-331.
30. Moise, I., Temam, R., and Ziane, M. (1997). Asymptotic analysis of the Navier–Stokes equations in thin domains. *Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center*, 10(2), 249-282.
31. Montgomery, S. (1999). Global regularity of the Navier-Stokes equations on thin three-dimensional domains with periodic boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 11, 1-19.
32. Cannon, J. R. and DiBenedetto, E. (1980). The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p . *Approximation Methods for Navier-Stokes Problems - Lecture Notes in Mathematics*, 771, 129-144.
33. Morimoto, H. (1992). Non-stationary Boussinesq Equations. *Journal of the Faculty of Science, The University of Tokyo, Section IA, Mathematics*, 39, 61-75.
34. Kaizu, S. and Saito, J. (2007). Boussinesq Equations in Three Dimensional Thin Domains and the Corresponding Two Dimensional Limit. *Tokyo Journal of Mathematics*, 30(1), 57-72.
35. Foias, C., Manley, O., and Temam, R. (1987). Attractors for the Bénard Problem - Existence and Physical Bounds on Their Fractal Dimension. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 11(8), 939-967.
36. Kapustyan, O. V., Melnik, V. S., and Valero, J. (2007). A weak attractor and properties of solutions for the three-dimensional Bénard problem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, 18, 449-481.
37. Kapustyan, O. V., Pankov, A. V., and Valero, J. (2012). On global attractors of multivalued semiflows generated by the 3D Bénard system. *Set-Valued and Variational Analysis*, 20, 445-465.
38. Yosida, K. (1980). *Functional Analysis*, (Sixth edition). Heidelberg: Springer-Verlag.
39. Zeidler, E. (1992). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/A: Linear Monotone Operators*. Beijing: Springer-Verlag.
40. Robinson, J. C. (2001). *Infinite-Dimensional Dynamical Systems An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*. 28, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press.
41. Walker, J. A. (1980). *Dynamical Systems and Evolution Equations: Theory and Applications*. Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering. 20, New York: Plenum Press.
42. Giunti, M. and Mazzola, C. (2012). *Dynamical Systems on Monoid: Toward a general theory of determinisitic systems and motion*. Methods, Models, Simulations and Approaches Towards a General Theory of Change. 173-185, Singapore: World Scientific.

43. Temam, R. (1997). *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. 68, New York: Springer Science and Business Media.
44. Kesavan, S. (2003). *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Delhi: New Age International (P) Limited, Publishers.
45. Sell, G. R. and You, Y. (2002). *Dynamics of evolutionary equations*. 143, New York: Springer Science and Business Media.
46. Temam, R. and Ziane, M. (1996). Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions. *Advances in Differential Equations*, 1(4), 499-546.
47. Foias, C. and Prodi, G. (1967). Sur le comportement global des solutions non stationnaires des equations de Navier-Stokes en dimension two. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 39, 1-34.
48. Jones, D. A. and Titi, E. S. (1993). Upper-Bounds on the Number of Determining Modes, Nodes, and Volume Elements for the Navier-Stokes Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3), 875-887.
49. Boland, J. and Layton, W. (1990). Error analysis for finite element methods for steady natural convection problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 11(5-6), 449-483.
50. Jones, D. A. and Titi, E. S. (1992). Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by finite volume elements. *Physica D*, 60, 165-174.
51. Ames, K. A. and Straughan, B. (1997). *Non-Standard and Improperly Posed Problems*. Mathematics in Science and Engineering Series. 194, San Diego: Academic Press.
52. Payne, L. E. and Straughan, B. (1999). Convergence and Continuous Dependence for the Brinkman - Forchheimer Equations. *Studies in Applied Mathematics*, 102, 419-439.
53. Hayden, K., Olson, E., and Titi, E. S. (2011). Discrete data assimilation in the Lorenz and 2D Navier-Stokes equations. *Physica D*, 240(18), 1416-1425.
54. Azouani, A., Olson, E., and Titi, E. S. (2014). Continuous Data Assimilation Using General Interpolant Observables. *Journal of Nonlinear Science*, 24(2), 277-304.
55. Farhat, A., Jolly, M. S., and Titi, E. S. (2015). Continuous Data Assimilation for the 2D Bénard Convection through Velocity Measurements Alone. *Physica D*, 303, 59-66.
56. Melbourne, I. (1998). Derivation of the Time-Dependent Ginzburg-Landau Equation on the Line. *Journal of Nonlinear Science*, 8(1), 1-15.
57. Internet: Matthew A. B. (2003). Global attractors for infinite-dimensional systems with applications to the complex Ginzburg-Landau equation. <http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fmath.arizona.edu%2F%7Ef%2Flaschka%2FTopmatter%2F527files%2Ftermpapers%2Fmatt.pdf&date=2017-06-15>. Son Erişim Tarihi : 2017-06-15.

58. Jones, D. A. and Titi, E. S. (1992). Determining finite volume elements for the 2D Navier-Stokes equations. *Physica D*, 60, 165-174.
59. Özlük, M. and Kaya, M. (in press). On the weak solutions and determining modes of g-Bénard problem. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*.





ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : ÖZLÜK, Muharrem
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 09.12.1978, Kayseri
 Medeni hali : Evli
 Telefon : (0505)-668 0689
 e-mail : muharrem.ozluk@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/F.B.E./Matematik	2017
Yüksek Lisans	İnönü Üniversitesi/F.B.E./Matematik	2005
Lisans	ODTÜ/Eğt. Fak./Mat. Öğret.	2001

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-2017	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2005-2011	Özel Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni
2001-2005	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

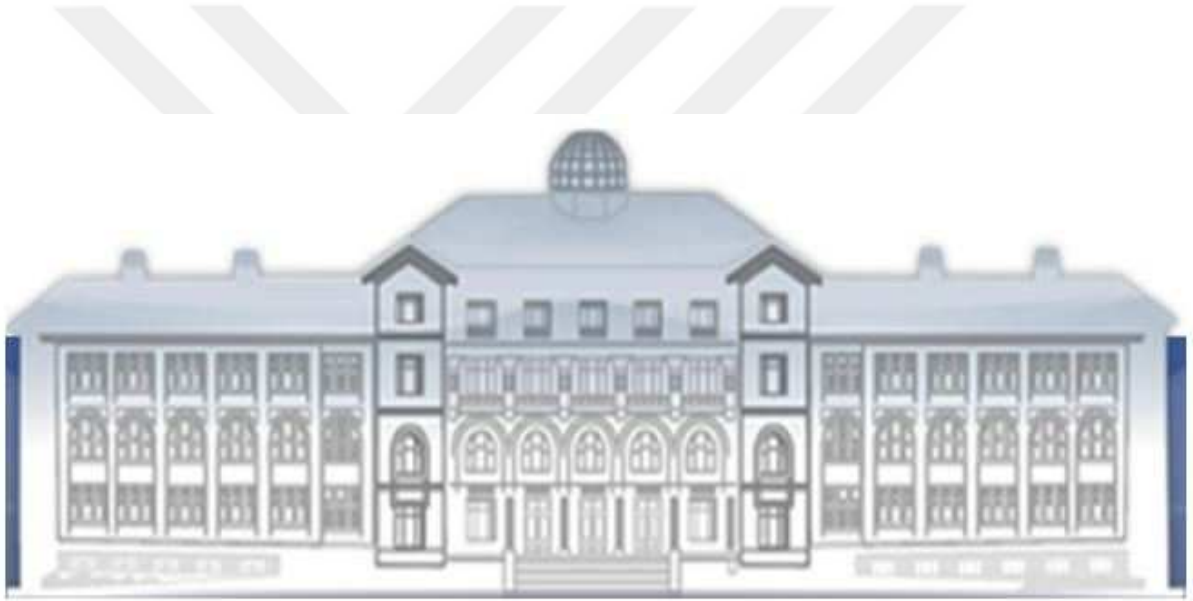
İngilizce

Yayınlar

- Özlük, M. and Kaya, M. (in press). On the weak solutions and determining modes of g -Bénard problem. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*.
- Özlük, M., Kaya, M. (in press). On the strong solutions and the structural stability of the g -Bénard problem. *Numerical Functional Analysis and Optimization*.

Sunumlar

1. Özlük, M., Kaya, M. (2017). Periyodik Sınır Koşulları Altında g-Bénard Probleminin Yerel Olmayan Çekicilerinin Varlığı, *12. Ankara Matematik Günleri*, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
2. Özlük, M., Kaya, M. (2016). Determining modes of the g-Benard problem, *Workshop on Nonlinear PDEs in Applied Mathematics*, İYTE, İzmir.
3. Özlük, M., Kaya, M. (2016). Structural stability for g-Benard problem, *International Conference on Applied Mathematics and Analysis in Memory of Prof. Gusein Sh. Guseinov*, Atılım Üniversitesi, Ankara.
4. Özlük, M., Kaya, M. (2015). Brinkman-Forchheimer Denklemlerinin Yapısal Kararlılığı Üzerine, *Dinamik Sistem Seminerleri*, ODTÜ, Ankara.
5. Özlük, M., Kaya, M. (2014). On the existence of solutions of a thin domain problem, *13th International Workshop on Dynamical Systems and Applications*, TOBB Economy and Technology University, Ankara.
6. Özlük, M., Kaya, M. (2014). Zamana Bağlı Boussinesq Denklemlerinin Zayıf Çözümlerinin Varlığı Üzerine, *Dinamik Sistem Seminerleri*, ODTÜ, Ankara.



GAZİ GELECEKTİR...