

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIM ELEMANLARINDAN BEZIER
EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİNİN MINKOWSKI UZAYINDA İNCELENMESİ

Serkan ÇELİK

AĞUSTOS 2017

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIM ELEMANLARINDAN BEZIER
EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİNİN MINKOWSKI UZAYINDA İNCELENMESİ

Hazırlayan
Serkan ÇELİK

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Jüri Üyeleri
Yrd. Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
Yrd. Doç. Dr. Özgür KALKAN
Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

AĞUSTOS 2017

Serkan ÇELİK tarafından hazırlanan “Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım Elemanlarından Bezier Eğrileri ve Yüzeylerinin Minkowski Uzayında İncelenmesi” adlı tez çalışması 04/08/2017 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

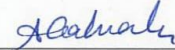
Yrd. Doç. Dr. Özgür KALKAN
(Başkan)

İmza

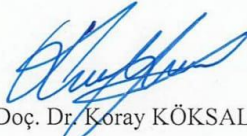

Yrd. Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
(Danışman)



Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK
(Üye)



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 14.08/2017 gün ve 30/17 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.


Doç. Dr. Koray KÖKSAL
Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIM ELEMANLARINDAN BEZIER EĞRİ VE YÜZEYLERİNİN MINKOWSKI UZAYINDA İNCELENMESİ

Serkan ÇELİK

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Ağustos 2017, 142 sayfa

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde çalışmamızın asıl amacı verilip daha sonra konunun tarihsel gelişimi ve kullanım alanları ifade edilmiştir. Önceki yapılan çalışmalar bölümünde kaynakça özetine yer verilmiştir. Materyal ve Yöntem bölümünde Öklid uzayı, Minkowski uzayı, Bezier eğri ve yüzeyi ile ilgi temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Bulgular bölümünde ise çalışmamızın orijinal kısmı verilmektedir. Bu bölümde Öklid uzayında Bezier eğrisinin başlangıç ve bitiş noktasındaki Serret-Frenet ve Bishop çatısı elde edilmiştir. Dejenere olmayan Minkowski Bezier eğrilerinin Serret-Frenet çatısı ve Bishop çatısı incelenip konuyla ilgili örnek uygulamalar verilmiştir. Daha sonra Minkowski uzayında dejenere olmayan Bezier yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri farklı bir yöntem ile hesaplanarak yüzeyin şekil operatörü bulunmuştur. Sonuç ve Öneriler bölümünde ise tezin değerlendirilmesi yapılmıştır ve ileriki çalışmalarla ilgi öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Minkowski uzayı, Bezier eğrisi, Frenet çatısı, Bishop çatısı.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF BEZIER CURVES AND SURFACES FROM COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN ELEMENTS IN MINKOWSKI SPACE

Serkan ÇELİK

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

August 2017, 142 pages

This work is composed of five chapters. The essential aim of the work is studied in the opening chapter, then it is followed by the historical developement and areas of usage. Bibliography summary is stated in the previous work's chapter. The main definition and theorem of Euclidean space, Minkowski and Bezier curves is mentioned in metarial management method chapter. In results we declare the original part of the work. In addition, we get the Serret-Frenet and Bishop frame in the beginning and the ending of Bezier curve in Euclidean space. Furthermore we study Serret-Frenet and Bishop frame of non-degenere Bezier curves in Minkowski space and give samples about the topic. Later we calculate the Gauss and mean curvature of non-degenere Bezier surfaces in a different way and find the shape operator of the surface in Minkowski space. In conclusion and recommendations chapter, we evaluate the work and give advices for the future studies.

Keywords: Minkowski space, Bezier curve, Frenet frame, Bishop frame.

TEŞEKKÜR

Tez çalışması süresince her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile desteklerini esirgemeyip değerli vaktini bana ayıran danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI'ya en derin saygı ve şükranlarımı sunar, yüksek lisans eğitimim boyunca maddi ve manevi destekleri ile her zaman yanımda olan biricik aileme ve can dostum Hamdin ÜZER'e teşekkürlerimi borç bilirim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM	3
3.1. Minkowski Düzleminde Vektörler	3
3.2. Minkowski Uzayında Vektörler	7
3.3. Öklid Uzayında Eğriler.....	9
3.4. Minkowski Uzayında Dejenere Olmayan Eğriler	10
3.5. Bezier Eğrileri.....	24
3.6. Bezier Yüzeyleri	29
4. BULGULAR	35
4.1. Bezier Eğrilerinin Frenet ve Bishop Çatıları	35
4.2. Minkowski Uzayında Dejenere Olmayan Bezier Eğrileri.....	46
4.2.1. Spacelike Bezier Eğrileri	46
4.2.1.1. Asli Normali Spacelike Olan Spacelike Bezier Eğrileri.....	47
4.2.1.2. Asli Normali Timelike Olan Spacelike Bezier Eğrileri.....	76
4.2.2. Timelike Bezier Eğrileri	103
4.3. Minkowski Uzayında Dejenere Olmayan Bezier Yüzeyleri	123
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	138
KAYNAKLAR	139
ÖZGEÇMİŞ	142

SİMGELER DİZİNİ

R	Reel sayılar kümesi
$g(a, b)$	Minkowski uzayında a ve b vektörlerinin iç çarpımı
$\ a\ _L$	Minkowski uzayında a vektörünün normu
$a \wedge_L b$	Minkowski uzayında a ve b vektörlerinin dış çarpımı
S_1^1	Lorentziyen birim çember
H_0^1	Hiperbolik birim çember
$b^n(t)$	n . dereceden bir Bezier eğrisi
$\frac{d^r b^n}{dt^r}(t)$	Bezier eğrisinin r . mertebeden türevi
$B_i^n(t)$	Bernstein polinomu
κ	Parametrik eğrilerde eğrilik
τ	Parametrik eğrilerde burulma
k_1	Bishop çatısının birinci eğriliği
k_2	Bishop çatısının ikinci eğriliği

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Minkowski düzleminde vektörler	4
3.2. Minkowski düzleminde çemberler	5
3.3. Minkowski düzleminde diklik kavramı	6
3.4. Minkowski çemberinde bir nokta	6
3.5. Minkowski düzleminde açı	7
3.6. Minkowski-3 uzayı	8
3.7. Dört kontrol noktalı Bezier eğrisi	26
3.8. Bezier yüzeyi ve kontrol çokyüzlüsü	30
4.1. Spacelike Bezier eğrisi	47
4.2. MATHEMATICA programındaki çıktısı	72
4.3. MATHEMATICA programındaki çıktısı	99
4.4. MATHEMATICA programındaki çıktısı	119
4.5. MATHEMATICA programındaki çıktısı	134

1. GİRİŞ

Minkowski geometrisi ilk defa Alman matematikçi ve fizikçi Hermann Minkowski (1864-1909) tarafından keşfedilmiştir. Minkowski, matematiksel fizikte ele alınan izafiyet teorisindeki problemleri geometrik metotlar kullanarak çözmeye çalışmıştır. Zürih Politeknik okulundan Rus asıllı hocası Einstein ve Minkowski, tanımlayamadığımız zaman kavramının aslında uzayın ayrılmaz bir parçası olduğunu gösterip zamana boyut niteliği kazandırmışlardır. Öklid uzayında alınan bir nesnenin en, boy, yükseklik ($x-y-z$ koordinatları) ile tanımlanan üç boyutuna ilave olarak Minkowski geometrisinde 4. boyut olarak zaman alınmıştır. Öklid geometrisindeki mesafe kavramıyla oldukça önemli benzerlikler taşıyan bir uzaklık kavramı vardır.

Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım (BDGT) eğrilerinden Bezier eğrileri ise Fransa'da Renault şirketinde çalışan P. Bezier ve Citroen şirketinde çalışan de Casteljau tarafından 1950 yıllarında geliştirilmiştir. Bezier eğrileri ve yüzeyleri geometrik katı modellemelerinde kullanım kolaylığı açısından oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Bishop çatısı 1975 yılında L. Bishop tarafından Serret-Frenet çatısına alternatif bir çatı olarak bulunmuştur. Bishop çatısının Serret-Frenet çatısına göre avantajı eğrinin ikinci türevlerine gerek duymadan bir çatı oluşturmayı sağlamasıdır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarımda (BGDT) sıklıkla kullanılan Bezier eğri ve yüzeylerinin Minkowski uzayında geometrik açıdan incelenmesi ele alınmıştır. Bu yüzden tezimizde öncelikle Minkowski uzayı ile ilgili çalışmalar araştırılmıştır. Lopez (2014) kaynağında Minkowski uzayının temel kavramları detaylı bir şekilde verilmiştir. Ayrıca (Uğurlu ve Çalışkan 2012) çalışmalarında Minkowski uzayındaki eğri ve yüzeylerinin darboux çatısı ve geodezik eğrilikleri gibi bazı farklı geometrik özellikleri incelenmiştir. Minkowski uzayı ile ilgili kaynak araştırmalarında özellikle çeşitli yapıdaki eğrilerin Minkowski uzayında incelendiği görülmüştür, bu çalışmalardan bazıları (Turgut 1995, İlarslan ve Nezovic 2004, İlarslan 2005, Önder ve Kocayigit 2007, Bükcü ve Karacan 2008, Bilici ve Çalışkan 2009, Uğurlu ve Çalışkan 2012) kaynaklarında bulunmaktadır. Tez çalışmamızda Bezier eğrileri ve yüzeyleri için ana kaynak olarak (Marsh 2005) kullanılmıştır. Bezier eğri ve yüzeylerinin Öklid uzayındaki geometrik özellikleri, şekil operatörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği (İncesu 2003, Yılmaz 2009) kaynaklarından incelenmiştir. Kaynakça araştırmaları sırasında Bezier eğri ve yüzey geometrilerinin Minkowski uzayında incelenmesi ile ilgili çok fazla kaynağın olmadığı görülmüştür. Minkowski uzayında Bezier eğrileri ilk defa (Georgiev 2008) çalışmasında ele alınmıştır. Minkowski uzayında Bezier yüzeylerinin incelenmesi ise (Ugail vd. 2011) kaynağında verilmiştir. Bu konularla ilgili çalışmaların çok az olduğu görülmüş ve bu tezde Bezier eğri ve yüzeylerinin diferensiyel geometrik özelliklerinin daha detaylı olarak incelenmesi üzerinde durulmuştur. Minkowski geometrisi özellikle fizikçiler tarafından izafiyet teorisini incelemek için kullanılmaktadır. Öklid uzayında incelediğimiz bütün yapıları Minkowski metriği ile incelediğimizde geometrik yapıların Minkowski uzayında farklı anlamları oluşmaktadır. Eğri ve yüzeylerin diferensiyel geometrik karakterizasyonlarının Minkowski uzayında incelenmesi oldukça yararlı çalışmaların ortaya çıkmasını sağlamaktadır. Bu nedenle bilgisayar grafiklerini modellemede kullanılan Bezier eğri ve yüzeylerinin Minkowski uzayında incelenmesi konusunu ele alan tezimizin ileride yapılacak çalışmalara önemli bir katkısı olabileceği düşünülmektedir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Minkowski geometrisinde temel teşkil eden ve daha sonraki bölümlerde sıklıkla kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve bunlarla ilgili özellikler verilecektir.

3.1. Minkowski Düzleminde Vektörler

Tanım 3.1.1. R^2 standart reel vektör uzayı üzerinde

$$\therefore R^2 \times R^2 \rightarrow R$$

$$(a, b) \rightarrow g(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 ; \quad a = (a_1, a_2), \quad b = (b_1, b_2)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, R^2 afin uzayına, Öklidyen 2-uzay denir. R^2 ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan 2012).

Tanım 3.1.2. R^2 vektör uzayı üzerinde,

$$\therefore R^2 \times R^2 \rightarrow R$$

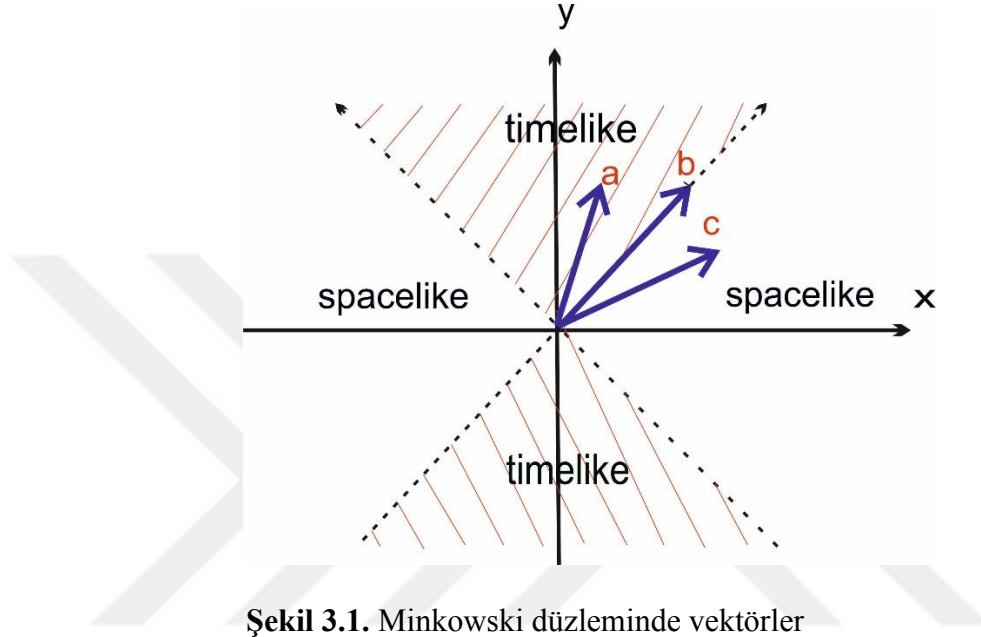
$$(a, b) \rightarrow g(a, b) = a_1 b_1 - a_2 b_2 ; \quad a = (a_1, a_2), \quad b = (b_1, b_2) \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlı Minkowski iç çarpım alınırsa, R^2 afin uzayı, Minkowski 2-uzayı veya Lorentziyen 2-uzay olarak isimlendirilir ve R_1^2 ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan 2012).

Tanım 3.1.3. R_1^2 uzayındaki herhangi bir vektör $a = (a_1, a_2)$ olmak üzere

- i. Metrik, pozitif tanımlı yani $g(a, a) > 0$ veya $a = 0$ ise a ya spacelike vektör,
- ii. Metrik, negatif tanımlı yani $g(a, a) < 0$ ise a ya timelike vektör,
- iii. Metrik, dejenere metrik yani $g(a, a) = 0$, $a \neq 0$ ise a ya lightlike (veya null) vektör

denir. Lightlike (null) vektörler dışındaki vektörlere kısaca “dejenere olmayan metrikle tanımlı vektörler” denilir (Lopez 2014). R_1^2 Minkowski düzleminde lightlike vektörler, 1. ve 2. açığortaylar üzerinde, timelike vektörler iki açığortay arasında ve spacelike vektörler de açığortayların dışında bulunur.



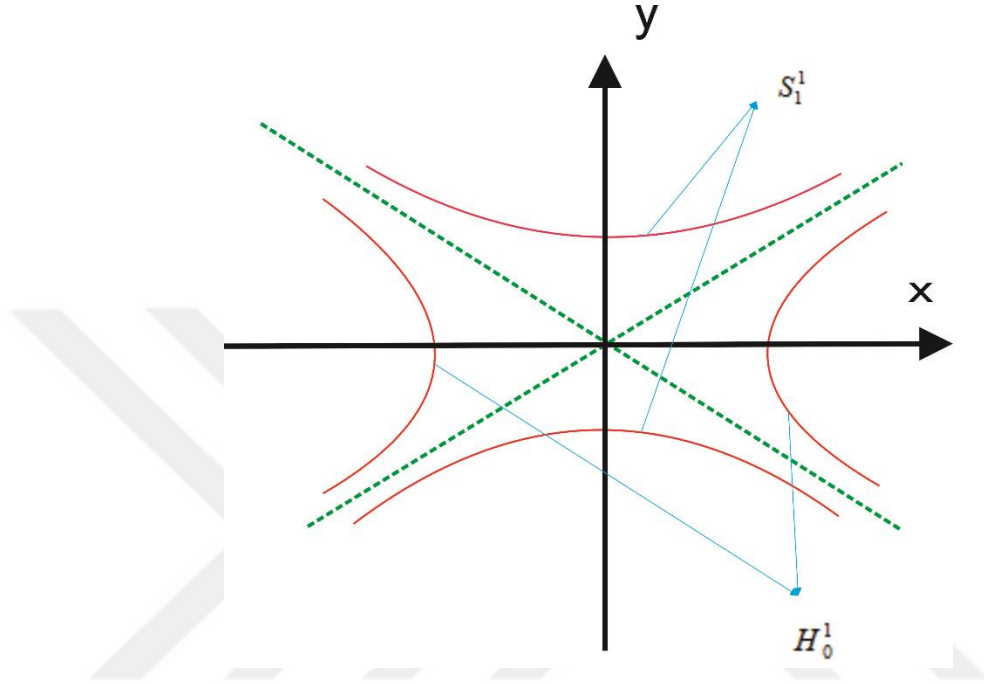
Şekil 3.1. Minkowski düzleminde vektörler

R^2 reel afin uzayında tanımlanabilen bütün kavramlar, R_1^2 Minkowski uzayında farklı anlam kazanırlar. (3.1) denklemindeki Minkowski iç çarpımı yardımıyla R_1^2 uzayında uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar da tanımlanabilir (Uğurlu ve Çalışkan 2012).

Tanım 3.1.4. Bir $a \in R_1^2$ vektörünün normu $\|a\| = \sqrt{|g(a,a)|}$ olarak tanımlanır ve

- a) $\|a\| > 0$,
 - b) $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a$ bir null vektördür,
 - c) a bir timelike vektör ise $\|a\|^2 = -g(a,a)$,
 - d) a bir spacelike vektör ise $\|a\|^2 = g(a,a)$
- özellikleri sağlanır (Uğurlu ve Çalışkan 2012).

Tanım 3.1.5. R_1^2 uzayında iki vektör a ve b olsun. $g(a,b) = 0$ ise a ve b vektörlerine “Minkowski anlamında diktirler” denir. Bu tanıma göre, 1. veya 2. açıortaya göre simetrik olan vektörler Minkowski anlamında diktirler (Uğurlu ve Çalışkan 2012).



Şekil 3.2. Minkowski düzleminde çemberler

R_1^2 düzleminde Minkowski birim çember

$$S_1^1 = \{a \in R_1^2 \mid g(a,a) = 1\}$$

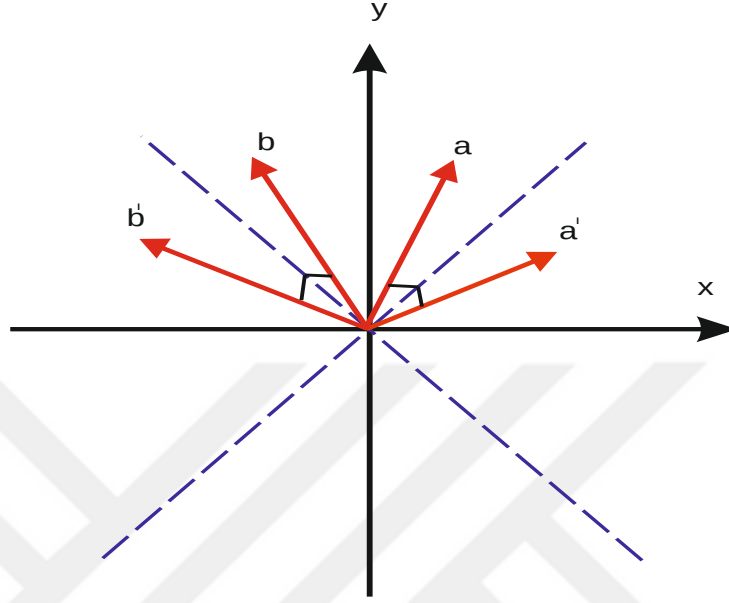
biçiminde tanımlanır. Bu çemberin teğetleri daima timelike vektörlerdir. Benzer olarak, hiperbolik birim çember de

$$H_0^1 = \{a \in R_1^2 \mid g(a,a) = -1\}$$

biçiminde tanımlı olup, bu eğrinin teğetleri de spacelike vektörlerdir (Uğurlu ve Çalışkan, 2012).

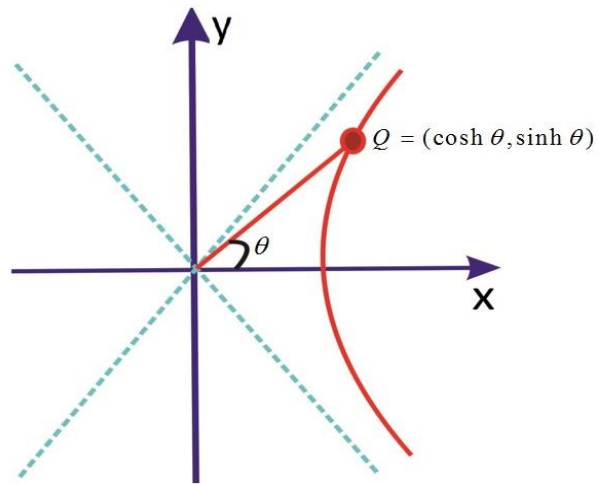
Teorem 3.1.6. R_1^2 uzayında iki spacelike (veya timelike) vektör dik olamaz (Uğurlu ve Çalışkan 2012).

Sonuç 3.1.7. R_1^2 uzayında iki vektörün dik olması için birinin timelike diğ erinin spacelike olması gerekir (Uğurlu ve Çalışkan 2012).



Şekil 3.3. Minkowski düzleminde diklik kavramı

Tanım 3.1.8. R_1^2 düzleminde " θ " hiperbolik radyan açı olmak üzere bir nokta $Q = (\cosh \theta, \sinh \theta)$ ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan 2012).

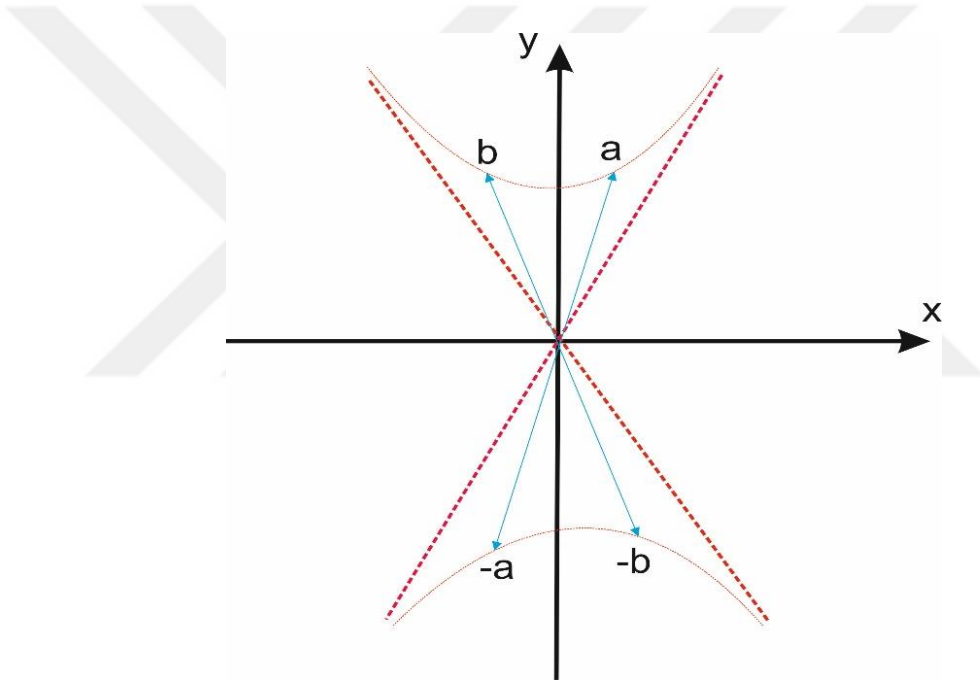


Şekil 3.4. Minkowski çemberinde bir nokta

Tanım 3.1.9. R_1^2 uzayında aynı konide bulunan iki timelike birim vektör a ve b olsun.

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağlayan $\theta \in R$ sayısına, a dan b ye (yönlendirilmiş) hiperbolik açı denir ve $\theta = (a,b)$ biçiminde gösterilir. a ve b vektörleri arasındaki hiperbolik açı a ve b nin koordinatlarını ifade ederken kullanılan bazın seçilişinden bağımsızdır (Uğurlu ve Çalışkan 2012).



Şekil 3.5. Minkowski düzleminde açı

3.2. Minkowski Uzayında Vektörler

Tanım 3.2.1. R_1^3 uzayında $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ iki vektör olmak üzere,

$$g(a,b) = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$$

$$a \wedge_L b = (a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

çarpımlarına sırasıyla üç boyutlu Minkowski uzayında iç çarpım ve vektörel (dış) çarpımı denir. Minkowski-3 uzayının baz vektörleri $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$, $i=1,2,3$ için Minkowski vektörel çarpımının determinant ile gösterimi

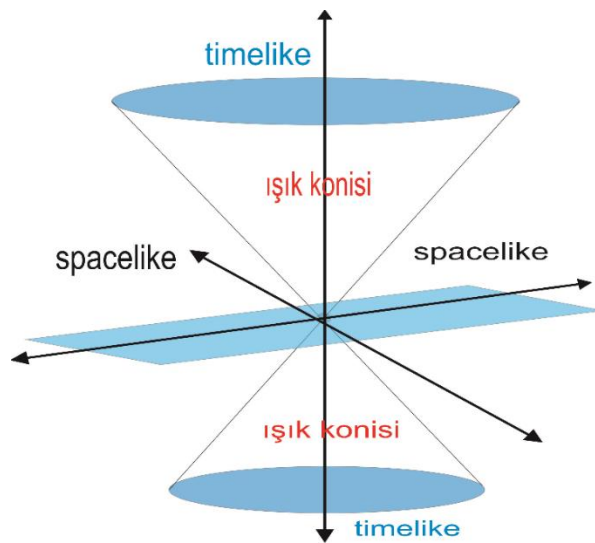
$$a \wedge_L b = - \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

olarak verilir, burada $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$ dir. Baz vektörleri $e_1 \wedge_L e_2 = e_3$, $e_2 \wedge_L e_3 = -e_1$,

$e_3 \wedge_L e_1 = -e_2$ koşullarını sağlamaktadır (Uğurlu ve Çalışkan 2012).

Teorem 3.2.2. R_1^3 uzayında üç vektör $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ ve $c = (c_1, c_2, c_3)$ olsun. Bu durumda,

- i) $g(a \wedge_L b, c) = -\det(a, b, c)$
- ii) $(a \wedge_L b) \wedge_L c = -g(a, c)b + g(b, c)a$
- iii) $g(a \wedge_L b, a) = 0$ ve $g(a \wedge_L b, b) = 0$
- iv) $g(a \wedge_L b, a \wedge_L b) = -g(a, a)g(b, b) + (g(a, b))^2$ dir (Turgut 1995).



Şekil 3.6. Minkowski-3 uzayı

3.3. Öklid Uzayında Eğriler

Teorem 3.3.1. Öklid uzayında bir $\alpha : I \rightarrow R^3$ eğrisi için $v = \|\alpha'\| = 1$ ise bu eğriye birim hızlı eğri denir. Birim hızlı α eğrisinin eğrilik ve burulması $\kappa = \|T'\|$, $\tau = \|B'\|$ olmak üzere T, N, B Serret-Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T &= \alpha' \\ N &= \frac{1}{\kappa} T' \\ B &= T \wedge N \end{aligned}$$

Serret-Frenet çatısının türev formülleri ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

denklemleri ile hesaplanır.

Teorem 3.3.2. Öklid uzayında bir $\alpha : I \rightarrow R^3$ eğrisi için $v = \|\alpha'\| \neq 1$ ise bu eğriye birim hızlı olmayan eğri denir. Birim hızlı olmayan bir α eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{g(\alpha' \times \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

olmak üzere T, N, B Serret-Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ N &= B \wedge T \\ B &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \end{aligned}$$

ve Serret-Frenet türev formülleri

$$T' = \kappa v N$$

$$N' = -\kappa v T + \tau v B$$

$$B' = -\tau v N$$

denklemleri ile hesaplanır (Kreysig 1968).

3.4. Minkowski Uzayında Dejenere Olmayan Eğriler

Tanım 3.4.1. $\alpha : I \rightarrow R_1^3$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Minkowski uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş α regüler eğrisi alalım. $T(s) = \alpha'(s)$ ye teğet vektörü denir. Minkowski uzayında üç çeşit eğri vardır. α eğrisi R_1^3 de bir eğri olsun.

1) $T = \alpha'$ teğet vektörü timelike ise α eğrisine “timelike eğri” denir ve T' spacelike vektördür.
2) $T = \alpha'$ teğet vektörü spacelike ise α eğrisine “spacelike eğri” denir. T' vektörünün konumuna göre spacelike eğrisi üç duruma ayrılır:

- a) T' spacelike vektör olanlar
- b) T' timelike vektör olanlar
- c) T' lightlike (null) vektör olanlar

3) $T = \alpha'$ teğet vektörü lightlike (null) ise α eğrisine “lightlike (null) eğri” denir. Bu durumda T' vektörü spacelike olmalıdır (Lopez 2014).

Tanım 3.4.2. Timelike ve spacelike eğrilerinin her ikisi de dejenere olmayan metrikle tanımlı olduğu için bu eğriler “Minkowski uzayında dejenere olmayan eğriler” olarak da adlandırılır.

Bu tezde, (Lopez 2014) kaynağında ispatsız olarak verilen Minkowski-3 uzayındaki dejenere olmayan eğrilerin Serret-Frenet çatılarının türev formülleri aşağıdaki teoremlerde ispatlanmıştır.

Teorem 3.4.3. Bir birim hızlı α timelike eğrisi için teğet vektörü $T = \alpha'$, asli normal vektörü

$N = \frac{T'}{\kappa}$, binormal vektörü $B = -T \wedge N$ dir. Bu eğrinin eğriliği ve burulması sırasıyla

$\kappa = \|T'\| = -g(N', T)$ ve $\tau = \|B'\| = g(N', B)$ olan Serret-Frenet çatısının türev formülü

$$T' = \kappa N$$

$$N' = \kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

ve matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

denklemleri ile elde edilir.

İspat: Birim hızlı α timelike eğrisinin $T = \alpha'$ teğet vektörü timelike vektörü olduğu için iç çarpımı negatif tanımlıdır yani $g(T, T) = g(\alpha'(s), \alpha'(s)) < 0$ koşulunu sağlar. α timelike eğrisinin eğriliği $\kappa = \|T'\| = \|\alpha''(s)\|$ dir. $\{T, N, B\}$ Frenet vektörleri bir ortonormal çatı oluşturduğu için Minkowski uzayında T timelike vektör olduğunda N ve B birim vektörleri spacelike vektörler olmalıdır. O halde timelike ve spacelike vektörlerinin iç çarpım özelliklerinden $g(T, T) = -1$, $g(N, N) = 1$, $g(B, B) = 1$ koşulları sağlanır. Ayrıca ortogonallikten dolayı $g(T, N) = g(N, B) = g(T, B) = 0$ dir. $g(T, T) = -1$ ise $T^2 = -1$ dir. Her iki tarafın türevi alındığında $T \cdot T' = 0$ yani $g(T, T') = 0$ olduğu görülür. $T \perp T'$ diklik şartından yararlanılarak $T = \alpha'$ timelike vektör ise T' spacelike vektör olmalıdır. N asal normali ortonormallikten T teğetine diktir. $g(T, N) = 0$ ve $g(T, T') = 0$ olduğundan $T \perp N$ ve $T \perp T'$ dir. Buradan T' vektörü N vektörüne paralel olur. Paralellikten dolayı $T' = \kappa N$ den her iki tarafın normu alınırsa $\kappa = \|T'\| = \sqrt{g(T', T')} = -g(N', T)$ elde edilir. Buradan N asal normali $N = \frac{T'}{\kappa} = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$

denklemleri ile hesaplanır. $B = -T \wedge N$ dir. $\{e_1, e_2, e_3\}$, Minkowski uzayında ortonormal çatı olduğu

için e_1 timelike vektör ise e_2 ve e_3 spacelike vektördür. O halde bu baz vektörlerinin Minkowski vektörel çarpımları $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = +e_1$, $e_3 \wedge e_1 = -e_2$ dir. Benzer şekilde $\{T, N, B\}$ Minkowski uzayında ortonormal çatı, T timelike vektör olduğundan, N ve B spacelike vektördür. O halde dış çarpımları $T \wedge N = -B$, $N \wedge B = +T$, $B \wedge T = -N$ dir. Frenet çatısı $T = \alpha'(s)$, $N = \frac{T'}{\kappa}$, $B = -T \wedge N$ elde edilir. Frenet çatı vektörlerinin türevlerini hesaplayalım.

Binormal vektörünün türev vektörü olan B' vektörünü hesaplamak için $g(B, T) = 0$ ifadesinin her iki tarafının türevi alındığında

$$g(B', T) + g(B, T') = 0$$

$$g(B', T) = -g(B, \kappa N)$$

$$g(B', T) = -\kappa g(B, N)$$

$$g(B', T) = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece $B' \perp T$ ve $T \perp N, B$ ve $B' \perp B \Rightarrow B' // N$ olduğu görülür. $B' // N$ paralellikten dolayı $B' = -\tau N$ dir. Her iki tarafın normu alındığında $\tau = \|B'\| = g(N', B)$ burulma denklemi bulunur. N' türev vektörü $\{T, N, B\}$ çatısının bir elemanı olduğu için çatının baz vektörlerinin lineer birleşimi olarak $N' = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ biçiminde yazılabilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ katsayılarını bulabilmek için N' vektörünün sırasıyla T , N , B vektörleri ile iç çarpımını alalım:

$$g(N', T) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, T) = \lambda_1 g(T, T) + \lambda_2 g(N, T) + \lambda_3 g(B, T) = -\lambda_1 \quad (3.2)$$

$$g(N', N) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, N) = \lambda_1 g(T, N) + \lambda_2 g(N, N) + \lambda_3 g(B, N) = \lambda_2 \quad (3.3)$$

$$g(N', B) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, B) = \lambda_1 g(T, B) + \lambda_2 g(N, B) + \lambda_3 g(B, B) = \lambda_3. \quad (3.4)$$

Şimdi de sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerlerini hesaplamak için $g(N, T) = 0$ ifadesinin her iki tarafının türevi alındığında

$$g(N, T)' = 0$$

$$g(N', T) + g(N, T') = 0$$

$$\begin{aligned}
g(N', T) &= -g(N, \kappa N) \\
g(N', T) &= -\kappa
\end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.2) ve (3.5) den $\lambda_1 = \kappa$ elde edilir. $g(N', N) = 0$ iç çarpımı ve (3.3) denkleminde $\lambda_2 = 0$ olduğu bulunur. Benzer şekilde $g(N, B) = 0$ ifadesinin her iki tarafının türevi alındığında

$$\begin{aligned}
g(N, B)' &= 0 \\
g(N', B) + g(N, B') &= 0 \\
g(N', B) + g(N, -\tau N) &= 0 \\
g(N', B) - \tau g(N, N) &= 0 \\
g(N', B) - \tau &= 0 \\
g(N', B) &= \tau
\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.4) ve (3.6) den $\lambda_3 = \tau$ olur. Böylece $N' = \kappa T + 0 \cdot N + \tau B$ vektörü elde edilir.

Sonuç 3.4.4. Serret-Frenet çatısının türev formüllerinin

$$\begin{aligned}
T' &= 0 + \kappa N + 0, \\
N' &= \kappa T + 0 + \tau B, \\
B' &= 0 - \tau N + 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile elde edildiği görülmektedir. Ayrıca bu türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

matrisi ile de ifade edilebilir.

Şimdi de birim hızlı spacelike eğrisinin Serret-Frenet çatısını inceleyelim.

α birim hızlı spacelike eğri olsun. Tanım (3.4.1) den bilindiği üzere α spacelike eğri ise $T(s) = \alpha'$ spacelike vektör olup türev vektörü üç durumda olabilir:

1.Durum: α spacelike eğri ise T' spacelike vektör ya da asli normali spacelike vektör

2.Durum: α spacelike eğri ise T' timelike vektör ya da asli normali timelike vektör

3.Durum: α spacelike eğri ise T' lightlike (null) vektör ya da asli normali lightlike vektördür.

Spacelike eğrileri incelenirken bu üç durumun ayrı ayrı incelenmesi gerekmektedir. Aşağıda bu üç durum için spacelike eğrilerin eğrilikleri ve Serret-Frenet çatısı incelenmiştir.

1.Durum: Asli normali spacelike olan birim hızlı spacelike eğrisinin eğrilikleri ve Serret-Frenet çatısı ile ilgili sonuçlar aşağıda hesaplanmıştır.

Teorem 3.4.5. α asli normali spacelike olan birim hızlı spacelike eğrisi verilsin. α spacelike

eğrisinin asli normal vektörü $N = \frac{T'}{k_1}$, binormal vektörü $B = T \wedge N$ dir. Eğrilik ve burulması sırasıyla $\kappa = \|T'\| = -g(N', T)$, $\tau = \|B'\| = -g(N', B)$ olan asli normali spacelike olan birim hızlı spacelike eğrisinin Frenet çatısının türev formülü

$$T' = 0 + \kappa N + 0$$

$$N' = -\kappa T + 0 + \tau B$$

$$B' = 0 + \tau N + 0$$

ve matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

denklemleri ile elde edilir.

İspat: α , asli normali spacelike olan birim hızlı spacelike eğrisi olsun. Bu durumda $g(T, T) = g(\alpha'(s), \alpha'(s)) > 0$ koşulu sağlanır. $T(s) = \alpha'$ ve $T' = \alpha''$ ise eğrinin eğriliği $\kappa = \|T'\| = \|\alpha''(s)\|$ dir. $\{T, N, B\}$ Minkowski uzayında ortonormal bir çatı olduğu için T spacelike vektör ise N spacelike ve B timelike vektör olmalıdır. O halde iç çarpım koşulları

$$g(T, T) = 1, g(N, N) = 1, g(B, B) = -1$$

ve ortogonallikten dolayı $g(T, N) = g(N, B) = g(T, B) = 0$ olmalıdır. $g(T, T) = 1$ ise $T^2 = 1$ dir.

Her iki tarafın türevi alındığında

$$2T.T' = 0 \Rightarrow g(T, T') = 0 \Rightarrow T \perp T'$$

dikliği elde edilir. 1. duruma göre $T = \alpha'$ spacelike ve T' spacelike vektör olduğu için N asal normalinin T teğetine dik olduğu bilindiğinden

$$\left. \begin{array}{l} g(T, N) = 0 \\ g(T, T') = 0 \end{array} \right\} T \perp N \wedge T \perp T' \Rightarrow T' // N$$

paralelliği elde edilir. O halde paralellikten dolayı $T' // N$ ise $T' = \kappa N$ den her iki tarafın normu

alındığında $\kappa = \|T'\| = \sqrt{g(T', T')} = -g(N', T)$ elde edilir. Buradan N asal normali

$$N = \frac{T'}{\kappa} = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

eşitliği ile elde edilir. Binormali ise $B = T \wedge N$ vektörel çarpımından elde edilir. Minkowski uzayında $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bir çatı olduğunda e_1 spacelike vektör ise e_2 spacelike ve e_3

timelike vektör olmalıdır. O halde dış çarpımları $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge e_1 = -e_2$ eşitlikleri

ile hesaplanır. Benzer şekilde $\{T, N, B\}$ Minkowski uzayında ortonormal çatı T spacelike vektör

ise N spacelike ve B timelike vektör olur. O halde dış çarpımları $T \wedge N = B$, $N \wedge B = -T$,

$B \wedge T = -N$ dir. Serret-Frenet çatısı $T = \alpha'(s)$, $N = \frac{T'}{\kappa}$, $B = T \wedge N$ denklemleri ile elde edilir.

Şimdi de Serret-Frenet çatı vektörlerinin türevlerini hesaplayalım. $T' = \kappa N$ eşitliğinden

binormalin türevi olan B' için $g(B, T) = 0$ ifadesinin her iki tarafın türevi alındığında

$$g(B', T) + g(B, T') = 0$$

$$g(B', T) + g(B, \kappa N) = 0$$

$$g(B', T) + \kappa g(B, N) = 0$$

$$g(B', T) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $B' \perp T$ dik olduğu sonucu elde edilir. Ayrıca $T \perp N, B$ ve $B' \perp B$ diklik koşullarından $B' // N$ elde edilir. Paralellikten dolayı $B' = \tau N$ eşitliği yazılabilmektedir. Her iki tarafın normu alındığında

$$\tau = \|B'\| = -g(N', B)$$

olduğu görülür. N' türev vektörü T, N, B ortonormal çatısında bulunduğundan T, N, B nin liner birleşimi olarak yani

$$N' = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$$

formunda yazılabilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ katsayılarını bulabilmek için N' vektörü sırasıyla T, N, B vektörleri ile çarpalım.

$$g(N', T) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, T) = \lambda_1 g(T, T) + \lambda_2 g(N, T) + \lambda_3 g(B, T) = \lambda_1 \quad (3.7)$$

$$g(N', N) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, N) = \lambda_1 g(T, N) + \lambda_2 g(N, N) + \lambda_3 g(B, N) = \lambda_2 \quad (3.8)$$

$$g(N', B) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, B) = \lambda_1 g(T, B) + \lambda_2 g(N, B) + \lambda_3 g(B, B) = -\lambda_3 \quad (3.9)$$

Sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerlerini elde etmek için $g(N, T) = 0$ ifadesinin her iki tarafının türevi alındığında

$$g(N, T)' = 0$$

$$g(N', T) + g(N, T') = 0$$

$$g(N', T) + g(N, \kappa N) = 0$$

$$g(N', T) = -\kappa g(N, N)$$

$$g(N', T) = -\kappa \quad (3.10)$$

eşitliği elde edilir. (3.7) ve (3.10) denklemlerinden $\lambda_1 = -\kappa$ elde edilir. $g(N', N) = 0$ ve (3.8) denklemlerinden $\lambda_2 = 0$ katsayısı hesaplanır. Benzer şekilde $g(N, B) = 0$ ifadesinin her iki tarafının türevi alındığında

$$\begin{aligned}
g(N, B)' &= 0 \\
g(N', B) + g(N, B') &= 0 \\
g(N', B) + g(N, \tau N) &= 0 \\
g(N', B) + \tau g(N, N) &= 0 \\
g(N', B) &= -\tau
\end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. (3.9) ve (3.11) denklemlerinden $\lambda_3 = \tau$ olur. Böylece $N' = -\kappa T + 0.N + \tau B$ türev vektörü elde edilir .

Sonuç 3.4.6. Asli normalı spacelike olan birim hızlı spacelike eğrisinin Serret-Frenet türev formülü

$$\begin{aligned}
T' &= 0 + \kappa N + 0 \\
N' &= -\kappa T + 0 + \tau B \\
B' &= 0 + \tau N + 0
\end{aligned}$$

denklemleri ile elde edilir. Bu denklemin matris formu

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilir.

2.Durum: Asli normalı timelike olan birim hızlı spacelike eğrisinin eğrilikleri ve Serret-Frenet çatısı ile ilgili sonuçlar aşağıda hesaplanmıştır.

Teorem 3.4.6. α asli normalı timelike olan birim hızlı spacelike eğrisi verilsin. α spacelike

eğrisinin asli normal vektörü $N = \frac{T'}{\kappa}$, binormal vektörü $B = T \wedge N$ dir. Eğrilik ve burulması

sırasıyla $\kappa = \|T'\| = g(N', T)$, $\tau = \|B'\| = g(N', B)$ olan asli normalı timelike olan birim hızlı spacelike eğrisinin Frenet çatısının türev formülü

$$\begin{aligned}
T' &= 0 + \kappa N + 0 \\
N' &= \kappa T + 0 + \tau B \\
B' &= 0 + \tau N + 0
\end{aligned}$$

ve matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

denklemleri ile elde edilir.

İspat: α asli normali timelike olan birim hızlı spacelike eğri ise $T = \alpha'(s)$ teğet vektörü spacelike vektördür ve $g(T, T) = g(\alpha'(s), \alpha'(s)) > 0$ olmalıdır. Eğrinin eğriliği $\kappa = \|T'\| = \|\alpha''(s)\|$ denklemi ile hesaplanır. $\{T, N, B\}$ çatısı Minkowski uzayında ortanormal bir çatı ve T spacelike vektör olduğu için N timelike ve B spacelike vektörlerdir. O halde $g(T, T) = 1$, $g(N, N) = -1$, $g(B, B) = 1$ ve ortogonallikten dolayı $g(T, N) = g(N, B) = g(T, B) = 0$ koşulları sağlanır. $g(T, T) = 1$ olduğundan $T^2 = 1$ dir. Her iki tarafın türevi alındığında

$$2TT' = 0 \Rightarrow g(T, T') = 0 \Rightarrow T \perp T'$$

olur. 2. durumda T' timelike vektör olmalıdır. Eğrinin N asal normali T teğetine dik olduğu için

$$\left. \begin{aligned} g(T, N) &= 0 \\ g(T, T') &= 0 \end{aligned} \right\} T \perp N \wedge T \perp T' \Rightarrow T' // N$$

paralelliği elde edilir. O halde paralellikten dolayı $T' // N$ ise $T' = \kappa N$ denkleminin her iki tarafının normu alındığında $\kappa = \|T'\| = \sqrt{-g(T', T')} = g(N', T)$ elde edilir. Bu denklemden N asal

normali $N = \frac{T'}{\kappa} = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ eşitliği ile elde edilir. Eğrinin binormali $B = -T \wedge N$ vektörel

çarpımından elde edilir. Minkowski uzayında $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortanormal çatısında e_1 spacelike vektör

ise e_2 timelike ve e_3 spacelike vektör olmalıdır. O halde dış çarpımları $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ ile verilir. Benzer şekilde $\{T, N, B\}$ Minkowski uzayında bir ortanormal çatı olduğu için T spacelike vektör ise N timelike ve B spacelike vektör olmalıdır. O halde dış çarpımları $T \wedge N = -B$, $N \wedge B = -T$, $B \wedge T = N$ dir. Serret-Frenet çatısı $T = \alpha'(s)$, $N = \frac{T'}{\kappa}$, $B = T \wedge N$ elde edilir. Şimdi de Serret-Frenet çatı vektörlerinin türevlerini hesaplayalım.

Binormal vektörünün türevi olan B' vektörü için $g(B, T) = 0$ ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$g(B', T) + g(B, T') = 0$$

$$g(B', T) + g(B, \kappa N) = 0$$

$$g(B', T) + \kappa g(B, N) = 0$$

$$g(B', T) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu iç çarpımdan $B' \perp T$ olduğu görülür. Ayrıca ortogonal çatı özelliğinden $T \perp N, B$ ve $B' \perp B$ ise $B' // N$ paralelliği elde edilir. $B' // N$ paralelliğinden $B' = \tau N$ denklemi yazılabilir. Her iki tarafın normu alındığında $\tau = \|B'\| = g(N', B)$ olduğu görülür. N' türev vektörü T, N, B çatısında olduğundan T, N, B nin liner birleşimi olarak

$$N' = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ katsayılarını bulabilmek için N' vektörünü sırasıyla T, N, B vektörleri ile çarpıldığında

$$g(N', T) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, T) = \lambda_1 g(T, T) + \lambda_2 g(N, T) + \lambda_3 g(B, T) = \lambda_1 \quad (3.12)$$

$$g(N', N) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, N) = \lambda_1 g(T, N) + \lambda_2 g(N, N) + \lambda_3 g(B, N) = -\lambda_2 \quad (3.13)$$

$$g(N', B) = g(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, B) = \lambda_1 g(T, B) + \lambda_2 g(N, B) + \lambda_3 g(B, B) = \lambda_3 \quad (3.14)$$

sonuçları elde edilir. Şimdi de sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerlerini elde edebilmek için $g(N, T) = 0$ ifadesinin her iki tarafının türevi alındığında

$$\begin{aligned}
g(N, T)' &= 0 \\
g(N', T) + g(N, T') &= 0 \\
g(N', T) + g(N, \kappa N) &= 0 \\
g(N', T) + \kappa g(N, N) &= 0 \\
g(N', T) &= \kappa
\end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitliği elde edilir. (3.12) ve (3.15) denklemlerinden $\lambda_1 = \kappa$ elde edilir. $g(N', N) = 0$ olduğunu biliyoruz. O halde (3.13) den $\lambda_2 = 0$ olduğu bulunur. Benzer şekilde $g(N, B) = 0$ ifadesinin her iki tarafının türevi alındığında

$$\begin{aligned}
g(N, B)' &= 0 \\
g(N', B) + g(N, B') &= 0 \\
g(N', B) + g(N, \tau N) &= 0 \\
g(N', B) + \tau g(N, N) &= 0 \\
g(N', B) &= \tau
\end{aligned} \tag{3.16}$$

denklemleri elde edilir. (3.14) ve (3.16) dan $\lambda_3 = \tau$ olur. Böylece $N' = \kappa T + 0.N + \tau B$ olur.

Sonuç 3.4.7 Asli normal timelike olan birim hızlı spacelike eğrisinin Serret-Frenet türev formülü

$$\begin{aligned}
T' &= 0 + \kappa N + 0 \\
N' &= \kappa T + 0 + \tau B \\
B' &= 0 + \tau N + 0
\end{aligned}$$

ile elde edilir. Bu denklemin matris formunu yazarsak

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu tezde dejenere olmayan metrikle tanımlı eğriler çalışıldığı için lightlike (null) durumu incelenmemiştir. Minkowski uzayındaki bütün eğri çeşitlerinin Serret-Frenet çatı formülleri aşağıda genel sonuç olarak verilmiştir.

Genel Sonuç 3.4.8. α eğrisi R_1^3 de birim hızlı bir eğri olsun.

α eğrisi bir timelike eğri ise $T = \alpha'(s)$ timelike ve T' spacelike vektör olmalıdır. Serret-Frenet çatısının türev formüllerinin matris formu

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

α eğrisi asli normali spacelike olan bir spacelike eğri ise $T = \alpha'(s)$ spacelike vektördür.

1.duruma göre T' spacelike vektördür. Asli normali spacelike olan spacelike eğrinin Serret-Frenet çatısının türev formüllerinin matris formu

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

α eğrisi asli normali timelike olan bir spacelike eğri ise $T = \alpha'(s)$ spacelike vektördür. 2.duruma göre T' timelike vektördür. Asli normali timelike olan spacelike eğrinin Serret-Frenet çatısının türev formüllerinin matris formu

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

α eğrisi asli normali null olan bir spacelike eğri ise $T = \alpha'(s)$ spacelike vektör 3. duruma göre T' null vektördür. Asli normali null olan bir spacelike eğrinin Serret-Frenet çatısının türev formüllerinin matris formu

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

α null eğri ise $T = \alpha'(s)$ null vektördür. T' spacelike vektördür. Null eğrinin Serret-Frenet çatısının türev formüllerinin matris formu

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

ile verilir (Lopez 2014). Serret-Frenet çatılarından farklı avantajlara sahip olan ve eğrilerin paralel ötelenmesi için yeni alternatif bir çatı olarak Bishop çatısını L.Bishop 1975’de bulmuştur. Bishop’ a göre eğrinin ikinci türevi olmasa bile iyi tanımlılık söz konusudur. Verilen bir α eğrisi için T birim teğet vektör alanı ise bu teğet vektöre dik normal düzlemde N_1 ve N_2 keyfi baz vektörleri seçilebilir. Eğrinin eğrilikleri k_1 ve k_2 ise Bishop çatısına göre eğrinin eğrilikleri ne olursa olsun eğri boyunca N_1 ve N_2 vektörleri değiştirebilir (Bishop 1975).

Teorem 3.4.9. $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ortonormal çatı olduğu için

$$g(T, T) = 1, \quad g(N_1, N_1) = 1, \quad g(N_2, N_2) = 1$$

$$g(T, N_1) = 0, \quad g(T, N_2) = 0, \quad g(N_1, N_2) = 0$$

koşullarını sağlar ve Bishop çatısının türev formülleri

$$T' = k_1 N_1 + k_2 N_2$$

$$N_1' = -k_1 T$$

$$N_2' = -k_2 T$$

ile verilir, $\xi = \arctan \left(\frac{k_2}{k_1} \Big|_{t=0} \right)$ olmak üzere Bishop çatısının eğrilikleri $k_1 = \kappa \cdot \cos \xi$ ve

$k_2 = \kappa \cdot \sin \xi$ dir. Ayrıca $\tau = \xi'$ olarak verilir. (Bishop 1975).

Teorem 3.4.10. Minkowski uzayında alınan timelike bir eğrinin $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ortonormal çatı olduğu için T timelike vektör, N_1 ve N_2 spacelike vektör olur. Timelike bir eğrinin Bishop çatısının Minkowski iç çarpım koşulları

$$g(T, T) = -1, g(N_1, N_1) = 1, g(N_2, N_2) = 1$$

$$g(T, N_1) = 0, g(T, N_2) = 0, g(N_1, N_2) = 0$$

denklemleri ile verilir. Bishop çatının türev formülleri

$$T' = k_1 N_1 + k_2 N_2$$

$$N_1' = -k_1 T$$

$$N_2' = -k_2 T$$

olarak elde edilir. Burada $k_1 = \kappa \cdot \cos \xi$ ve $k_2 = \kappa \cdot \sin \xi$ ve $\tan \xi = \frac{k_2}{k_1} \Big|_{t=0}$ ve $\xi = \arctan \left(\frac{k_2}{k_1} \Big|_{t=0} \right)$ dir.

(Karacan ve Bükcü 2008) .

Teorem 3.4.11. (Asli Normali Spacelike olan Spacelike Eğrilerin Bishop Çatısı)

Asli normal spacelike olan spacelike eğrinin $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ortonormal çatı olduğu için T spacelike vektör, N_1 spacelike, N_2 timelike vektördür. Asli normal spacelike olan spacelike eğrinin Bishop çatısının iç çarpımları

$$g(T, T) = 1, g(N_1, N_1) = 1, g(N_2, N_2) = -1$$

$$g(T, N_1) = 0, g(T, N_2) = 0, g(N_1, N_2) = 0$$

koşullarını sağlar. Asli normal spacelike olan spacelike eğrilerin Bishop çatısının türev formülleri

$$T' = k_1 N_1 - k_2 N_2$$

$$N_1' = -k_1 T$$

$$N_2' = -k_2 T$$

olarak elde edilir. Burada $k_1 = \kappa \cdot \cosh \xi$, $k_2 = \kappa \sinh \xi$ ve $\tanh \xi = \frac{k_2|_{t=0}}{k_1|_{t=0}}$ (Bükücü ve Karacan 2008b) .

Teorem 3.4.12. (Asli Normali Timelike olan Spacelike Eğrilerin Bishop Çatısı)

Asli normali timelike olan spacelike eğrinin $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ortonormal çatı olduğu için T spacelike vektör, N_1 timelike, N_2 spacelike vektördür. Asli normali timelike olan spacelike eğrinin Bishop çatısının iç çarpımları

$$g(T, T) = 1, g(N_1, N_1) = -1, g(N_2, N_2) = 1$$

$$g(T, N_1) = 0, g(T, N_2) = 0, g(N_1, N_2) = 0$$

koşullarını sağlar. Asli normali timelike olan spacelike eğrilerin Bishop çatısının türev formülleri

$$T' = k_1 N_1 - k_2 N_2$$

$$N_1' = k_1 T$$

$$N_2' = k_2 T$$

olarak elde edilir. Burada $k_1 = \kappa \cdot \cosh \xi$, $k_2 = \kappa \sinh \xi$ ve $\tanh \xi = \frac{k_2|_{t=0}}{k_1|_{t=0}}$ dır (Bukcu ve Karacan 2010) .

3.5. Bezier Eğrileri

Bezier eğrileri iki tipte incelenebilir. Birinci tip Bezier eğrilerinde R^2 düzleminde düşük dereceli Bezier eğrileri incelenir. $b_0, b_1 \in R^2$ iki kontrol noktasına sahip bir Bezier eğrisi lineer Bezier eğri olarak adlandırılır ve $b^n(t) = (1-t)b_0 + tb_1$ ile gösterilir. Eğri $[0,1]$ aralığında tanımlanır. Böylece eğrinin başlangıç noktası $b^n(0) = b_0$ ve bitiş noktası $b^n(1) = b_1$ dir. $b_0, b_1, b_2 \in R^2$ üç kontrol

noktasına sahip bir Bezier eğrisi ise birinci tip Bezier eğrileri ayrıca kuadratik Bezier eğrisi olarak adlandırılır ve $t \in [0,1]$ için $b^n(t) = (1-t)^2 b_0 + 2(1-t)t b_1 + t^2$ ile gösterilir. b_0, b_1, b_2 kontrol noktalarının belli sırada doğru parçaları ile birleştirilerek elde edilmesiyle oluşan çokgene “kontrol çokgeni” ya da “konveks tekne” denir. Eğer $b_0, b_1, b_2, b_3 \in R^2$ olacak biçimde dört kontrol noktası alınırsa Bezier eğrisi “kübik Bezier eğrisi” olarak adlandırılır ve $t \in [0,1]$ için $b^n(t) = (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t)t^2 b_2 + t^3 b_3$ ile gösterilir. Kontrol noktaları üç boyutlu olarak alındığında ikinci tip Bezier eğrileri oluşur. Bu Bezier eğrileri ayrıca uzay Bezier eğrisi olarak da adlandırılır (Marsh 2005).

Bezier eğrileri Bernstein polinomu ve kontrol noktalarından oluşmaktadır. Bernstein polinomu

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

denklemleri ile tanımlanır ve burada

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{diğer.} \end{cases}$$

koşulu sağlanmaktadır. Bernstein polinomlarının özel durumları ise $B_0^0(t) \equiv 1$ ve $B_j^n(t) \equiv 1$, $j \in \{0, \dots, n\}$ olarak verilmektedir. Ayrıca Bernstein polinomlarının katsayılarının toplamı

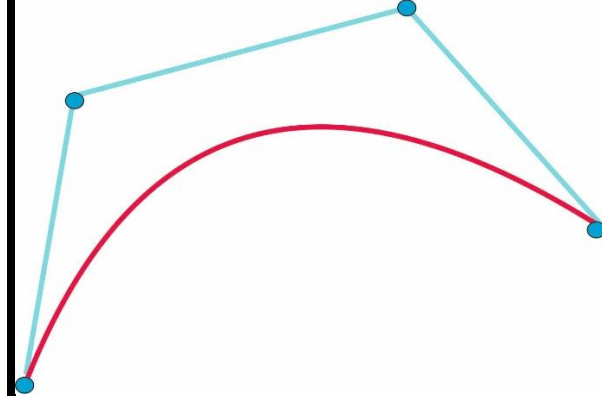
$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1$ dir. Bernstein polinomu alternatif olarak $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$ denklemi ile

de yazılabilir. B_i^n Bernstein polinomunun türevi $\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]$ denklemi ile

verilebilir. $b_i^r(t)$ ler kontrol noktaları olmak üzere Bezier eğrisi

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^r(t) B_i^{n-r}(t) \quad (3.17)$$

denklemleri ile gösterilmektedir.



Şekil 3.7. Dört kontrol noktalı Bezier eğrisi

$b^n(t)$ Bezier eğrisinin r . mertebeden türevi

$$\frac{d^r b^n}{dt^r}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \sum_{i=0}^{n-r} \Delta b_i^r B_i^{n-r}(t) \quad (3.18)$$

formülünden elde edilir ve burada $\Delta^r b_i$ fark eşitliği

$$\Delta^r b_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} b_{i+j}$$

şeklindedir. Ayrıca $\Delta^r b_j = \Delta^{r-1} b_{j+1} - \Delta^{r-1} b_j$ olduğu görülmektedir. Bezier eğrisinin $t=0$ ve $t=1$ başlangıç ve bitiş noktasındaki türevleri

$$\frac{d^r b^n(t)}{dt^r} \Big|_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0, \quad \frac{d^r b^n(t)}{dt^r} \Big|_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_{n-r}$$

ile hesaplanır.

Yukarıdaki formüllerden başlangıç ve bitiş noktasındaki birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerini bulalım. $t = 0$ başlangıç noktasındaki türev formülleri

$$\frac{db^n(t)}{dt} \Big|_{t=0} = n \cdot \Delta b_0$$

$$\frac{d^2 b^n(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} = n(n-1)[\Delta b_1 - \Delta b_0]$$

$$\frac{d^3 b^n(t)}{dt^3} \Big|_{t=0} = n(n-1)(n-2)[\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0]$$

ve $t=1$ noktasındaki türev formülleri

$$\frac{db^n(t)}{dt} \Big|_{t=1} = n.\Delta b_{n-1}$$

$$\frac{d^2 b^n(t)}{dt^2} \Big|_{t=1} = n(n-1)[\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]$$

$$\frac{d^3 b^n(t)}{dt^3} \Big|_{t=1} = n(n-1)(n-2)[\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}]$$

biçiminde hesaplanmaktadır (Farin 1996).

Tanım 3.5.1. n – boyutlu Öklid uzayında $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ noktalar kümesi verilsin. Bu X noktalarının oluşturduğu

$$CH\{X\} = \left\{ \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

kümesine konveks çokgeni (teknesi) denir. $b^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ parametrik denklemiyle verilen bir

Bezier eğrisi $b^n(t)$ olmak üzere her $t \in [0,1]$ için $b^n(t) \in CH\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ dir (Farin 1996).

Bezier eğrilerinin özellikleri aşağıda verilmiştir:

1) Son Nokta İnterpolasyon Özelliği: Kontrol noktaları $b_0, \dots, b_n$ olan n . dereceden $b^n(t)$ bir Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki ve $t=1$ bitiş noktasındaki değeri $b^n(0) = b_0$, $b^n(1) = b_n$ dir.

2) Son nokta Teğet Özelliği: Kontrol noktaları $b_0, \dots, b_n$ olan n . dereceden $b^n(t)$ bir Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki ve $t=1$ bitiş noktasındaki teğeti sırasıyla

$$\frac{db^n(t)}{dt} \Big|_{t=0} = n.(b_1 - b_0) \text{ ve } \frac{db^n(t)}{dt} \Big|_{t=1} = n.(b_n - b_{n-1}) \text{ dır.}$$

3) Konveks Çokgen Özelliği: $\forall t \in [0,1]$ için $b^n(t) \in CH\{b_0, \dots, b_n\}$ dir. Böylece Bezier eğrisinin her noktası tanımlandığı kontrol noktalarının konveks çokgeni içinde yatar. Kontrol noktalarının konveks çokgeni genellikle Bezier eğrisinin konveks çokgeni gibi ifade edilir.

4) Afın Dönüşüm Altında İnvaryant: T bir afın dönüşüm olsun. O halde

$$T\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n T(b_i) \cdot B_i^n(t)$$

eşitliği sağlanır (Marsh 2005).

Tanım 3.5.2. (Bezier Eğrileri için De Casteljau Algoritması)

Bir $b^n(t)$ Bezier eğrisinin herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ noktasındaki $b^n(t_0)$ değerini hesaplamak için geliştirilmiş bir algoritmadır.

Kontrol noktaları $b_0, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t = t_0$ noktasındaki değeri $b^n(t_0) = b_0^n$ dir. Burada $j = 1, \dots, n$ ve $i = 0, 1, \dots, n-j$ için

$$b_i^0 = b_i$$

$$b_i^j = (1-t_0)b_i^{j-1} + t_0 b_{i+1}^{j-1}$$

dir. De Casteljau algoritmasının şematik gösterimi:

$$\begin{array}{ccccccc} b_0^0 & b_1^0 & \dots & b_{n-1}^0 & b_n^0 & & \\ b_0^1 & b_1^1 & \dots & b_{n-1}^1 & & & \\ \vdots & & & & & & \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & & & & & \\ b_0^n & & & & & & \end{array}$$

Tanım 3.5.3. (Bezier Eğrileri için Bölme Algoritması)

$[0,1]$ kapalı aralığında tanımlanan $b^n(t)$ Bezier eğrisini $\alpha \in [0,1]$ noktasından ikiye ayırmak için geliştirilmiş bir algoritmadır. Bölme algoritmasına göre $[0,\alpha]$ aralığında tanımlı kısmı b_{sol}^n , $[\alpha,1]$ aralığında tanımlı kısmı $b_{sağ}^n$ olarak ifade edilmektedir.

Teorem 3.5.4. Kontrol noktaları $b_0, \dots, b_n$ olan n . dereceden bir $b^n(t)$ Bezier eğrisini ikiye bölmek suretiyle elde edilen b_{sol}^n ve $b_{sağ}^n$ Bezier eğrilerinin kontrol noktaları; b_{sol}^n için $b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^{n-1}, b_0^n$ ve $b_{sağ}^n$ için ise $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$ noktalarıdır. Burada b_i^j kontrol noktaları de Casteljau algoritmasından elde edilmektedir (İncesu 2003, Marsh 2005, Farin 1996). Bezier yüzeyleri için de Casteljau ve bölme algoritmaları tanımlanmaktadır.

Teorem 3.5.5. $b^n(t)$ bir Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasında eğriliği ve burulması

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{b}{a^3}, \quad \tau = \frac{n-2}{n} \frac{c}{b^2}$$

dir. Burada $a = \|b_1 - b_0\|$, $b = \|(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)\|$ ve $c = g((b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1), (b_3 - b_2))$ dir (Marsh 2005).

3.6. Bezier Yüzeyleri

$B_i^n(u)$ ve $B_j^m(v)$ sırasıyla u ve v parametrelerine bağlı, dereceleri n ve m olan Bernstein temel fonksiyonları olsun. $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ olmak üzere b_{ij} kontrol noktalarına sahip bir Bezier yüzeyi $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ için

$$b(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \quad (3.19)$$

denklemleri ile tanımlanır. Bezier yüzeyinin parametre eğrileri Bezier eğrileridir. Özellikle $b(u,0)$, $b(u,1)$, $b(0,v)$, $b(1,v)$ parametre eğrileri Bezier yüzeyinin dört kenarı şeklinde olan bir Bezier eğrisidir (Marsh 2005).



Şekil 3.8. Bezier yüzeyi ve kontrol çokyüzlüsü

Bezier yüzeyinin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- 1) **Son Nokta İnterpolasyonu:** $b(0,0) = b_{00}$, $b(1,0) = b_{n0}$, $b(0,1) = b_{0m}$, $b(1,1) = b_{nm}$ dir.
- 2) **Konveks Çokyüzlü:** $\forall (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ için $b(u,v) \in CH \{b_0, \dots, b_{n,m}\}$ dir.
- 3) **Afin Dönüşüm Altında İnvaryant:** T üç boyutlu bir afin dönüşüm olsun. O halde

$$T \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) \cdot B_j^m(v) \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m T(b_{ij}) B_i^n(u) \cdot B_j^m(v)$$

olur (Marsh 2005).

Tanım 3.6.1. (Bezier Yüzeyinin Türevi)

Bezier yüzeyinin $b_u(u,v)$ ve $b_v(u,v)$ kısmi türevleri Bezier eğrileri için türev formülünden elde edilir. O halde

$$b(u, v) = \sum_i^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) \cdot B_j^m(v) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n b_{ij} B_i^n(u) \right) B_j^m(v)$$

ve parantez içindeki ifadenin u ya göre diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} b_u(u, v) &= \sum_{j=0}^m \left(n \sum_{i=0}^{n-1} (b_{(i+1)j} - b_{ij}) B_i^{n-1}(u) \right) B_j^m(v) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m b_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1} B_j^m(v) \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. Burada $b_{ij}^{(1,0)} = n(b_{(i+1)j} - b_{ij})$ dir. Benzer şekilde

$$b(u, v) = \sum_i^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m b_{ij} B_j^m(v) \right) B_i^n(u)$$

Bezier yüzeyinde parantez içindeki ifadenin v ye göre diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} b_v(u, v) &= \sum_{i=0}^n \left(m \sum_{j=0}^{m-1} (b_{i(j+1)} - b_{ij}) B_j^{m-1}(v) \right) B_i^n(u) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij}^{(0,1)} B_i^n B_j^{m-1}(v) \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada $b_{ij}^{(0,1)} = m(b_{i(j+1)} - b_{ij})$ dir. Yüksek mertebeden kısmi türevleri

$b^{(\alpha, \beta)}(u, v) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$ dir. (3.20) ve (3.21) deki uygulamalar tekrarlanarak

$$b^{(\alpha, \beta)}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-\alpha} \sum_{j=0}^{m-\beta} b_{ij}^{(\alpha, \beta)} \cdot B_i^{n-\alpha} \cdot B_j^{m-\beta}(v)$$

elde edilir. Burada $b_{ij}^{(\alpha, \beta)} = \frac{n!}{(n-\alpha)!} \cdot \frac{m!}{(m-\beta)!} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{l=0}^{\beta} (-1)^k \cdot (-1)^l \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{l} b_{(i-\alpha-k)(j+\beta-l)}$ dir (Marsh 2005).

Tanım 3.6.2. $b(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ Bezier yüzeyinin kontrol noktaları $b_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$

ile verilsin. Bu takdirde Bezier yüzeyinin parametrik gösterimi

$$b(u, v) = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m x_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m y_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m z_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \right)$$

olarak yazılır (Yılmaz 2009).

Teorem 3.6.3. $b(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ biçiminde verilen bir Bezier yüzeyinin birinci kuadratik formundaki E, F, G katsayılarının $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki değerlerinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri

a) $E = g(b_u(u, v), b_u(u, v)) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n^2 \|b_{10} - b_{00}\|^2$

b) $F = g(b_u(u, v), b_v(u, v)) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n.m.g(b_{10} - b_{00}, b_{01} - b_{00})$

c) $G = g(b_v(u, v), b_v(u, v)) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = m^2 \|b_{01} - b_{00}\|^2$

eşitlikleri ile verilir (Gürsoy ve İncesu 2003).

Teorem 3.6.4. Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki ikinci mertebeden türevinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir.

a) $b_{uu}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n.(n-1)(b_{20} - 2b_{10} + b_{00})$

b) $b_{uv}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n.m(b_{11} - b_{01} - b_{10} - b_{00})$

c) $b_{vv}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = m.(m-1)(b_{02} - 2b_{01} + b_{00})$

dır (Gürsoy ve İncesu 2003).

Teorem 3.6.5. Bezier yüzeyinin normal vektörü ile ikinci kuadratik formun katsayıları olan e, f, g nin $(u, v) = (0, 0)$ kontrol noktası cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$\text{a) } N(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{((b_{10} - b_{00}) \wedge (b_{01} - b_{00}))}{\|((b_{10} - b_{00}) \wedge (b_{01} - b_{00}))\|}$$

$$\text{b) } e = g(b_{uu}(u, v), N) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{n \cdot (n-1)}{\|c_4 \wedge c_5\|} g(c_1, g(c_4 \wedge c_5))$$

$$\text{c) } f = g(b_{uv}, N) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{n \cdot m}{\|c_4 \wedge c_5\|} g(c_3, c_4 \wedge c_5)$$

$$\text{d) } g = g(b_{vv}, N) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{m \cdot (m-1)}{\|c_4 \wedge c_5\|} g(c_2, (c_4 \wedge c_5))$$

dir. Burada $c_1 = b_{20} - b_{10}$, $c_2 = b_{02} - b_{01}$, $c_3 = b_{11} - b_{10}$, $c_4 = b_{10} - b_{00}$, $c_5 = b_{01} - b_{00}$ dir (Gürsoy ve İncesu 2003).

Teorem 3.6.6. Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki S şekil operatörünün $\{b_u, b_v\}$ bazları cinsinden ifadesi

$$S(b_u) = a_{11}b_u + a_{12}b_v$$

$$S(b_v) = a_{21}b_u + a_{22}b_v$$

şeklindedir. Burada katsayılar

$$a_1 = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, a_2 = \frac{fE - eF}{EG - F^2}, a_3 = \frac{fG - gF}{EG - F^2}, a_4 = \frac{gE - eG}{EG - F^2}$$

olarak hesaplanabilir. Sırasıyla birinci ve ikinci kuadratik formunun katsayıları olan E, F, G ve e, f, g nin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki değerlerin kontrol noktası cinsinden ifadelerini kullanarak gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$a_{11} = \frac{m \cdot (n-1) g(c_1, c_4 \wedge c_5) \cdot \|c_5\|^2 - n \cdot m \cdot g(c_3, c_4 \wedge c_5) \cdot g(c_4, c_5)}{n \cdot m \|c_4 \wedge c_5\| \cdot (\|c_4\|^2 \cdot \|c_5\|^2 - g(c_4, c_5)^2)}$$

$$a_{12} = \frac{n^2 g(c_3, c_4 \wedge c_5) \cdot \|c_4\|^2 - n(n-1) \cdot g(c_1, c_4 \wedge c_5) \cdot g(c_4, c_5)}{n \cdot m \|c_4 \wedge c_5\| \cdot (\|c_4\|^2 \cdot \|c_5\|^2 - g(c_4, c_5)^2)}$$

$$a_{21} = \frac{m \cdot g(c_3, c_4 \wedge c_5) \cdot \|c_5\|^2 - m(m-1) \cdot g(c_2, c_4 \wedge c_5) \cdot g(c_4, c_5)}{n \cdot m \|c_4 \wedge c_5\| \cdot (\|c_4\|^2 \cdot \|c_5\|^2 - g(c_4, c_5)^2)}$$

$$a_{22} = \frac{n(m-1) g(c_2, c_4 \wedge c_5) \cdot \|c_4\|^2 - n \cdot m \cdot g(c_3, c_4 \wedge c_5) \cdot g(c_4, c_5)}{n \cdot m \|c_4 \wedge c_5\| \cdot (\|c_4\|^2 \cdot \|c_5\|^2 - g(c_4, c_5)^2)}$$

katsayıları hesaplanır. Burada $c_1 = b_{20} - b_{10}$, $c_2 = b_{02} - b_{01}$, $c_3 = b_{11} - b_{10}$, $c_4 = b_{10} - b_{00}$, $c_5 = b_{01} - b_{00}$ dır. Bezier yüzeyinin $\{b_u, b_v\}$ bazına göre $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki şekil operatörü S ye karşılık gelen matris

$$S \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir (Yılmaz 2009).

Teorem 3.6.7. Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliklerinde

$$K = \det(S) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ ve } H = \frac{1}{2} \text{Iz}(S) = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$$

a_{ij} katsayıları yerine yazıldığında

$$K = \frac{\frac{(m-1) \cdot (n-1)}{m \cdot n} g(c_1, c_4 \wedge c_5) \cdot g(c_2, c_4 \wedge c_5) - g(c_3, c_4 \wedge c_5)^2}{\|c_4 \wedge c_5\| \cdot (\|c_4\|^2 \cdot \|c_5\|^2 - g(c_4, c_5)^2)}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{\frac{\|c_5\|^2 \cdot (n-1)}{n} g(c_1, c_4 \wedge c_5) - 2 \cdot g(c_4, c_5) \cdot g(c_3, c_4 \wedge c_5) + \frac{(m-1) \|c_4\|^2}{m} g(c_2, c_4 \wedge c_5)}{\|c_4 \wedge c_5\| \cdot (\|c_4\|^2 \cdot \|c_5\|^2 - g(c_4, c_5)^2)}$$

sonuçları elde edilir (Yılmaz 2009).

4. BULGULAR

Bu tezde; bilgisayar destekli geometrik tasarımda çokca kullanılan Bezier eğrileri ve yüzeylerinin Minkowski uzayında incelenmesi ele alınmıştır. Öncelikle Minkowski uzayına geçişte kolaylık sağlaması açısından Bezier eğrilerinin başlangıç ve bitiş noktasındaki Serret-Frenet çatısı ve Bishop çatısı hesaplanmış sonrasında bu çatıların türev formülleri elde edilmiştir. Daha sonra dejenere olmayan Bezier eğrileri için Serret-Frenet ve Bishop çatısı Minkowski uzayında incelenmiş, bu çatıların türev formülleri hesaplanmıştır. Son olarak da Minkowski uzayında dejenere olmayan Bezier yüzeylerinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki birinci ve ikinci temel formunun kat sayıları elde edildikten sonra yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği (Yılmaz 2009) kaynağındaki yöntemden daha farklı bir yöntemle hesaplanmıştır. (Yılmaz 2009) kaynağında Minkowski uzayında daha önce hesaplanmayan dejenere olmayan Bezier yüzeylerinin şekil operatörü hesaplanmıştır. İncelenen her bölüm için sayısal örnekler verilmiştir.

4.1. Bezier Eğrilerinin Frenet ve Bishop Çatısı

Birim hızlı olmayan $b^n(t)$ Bezier eğrisinin başlangıç ve bitiş noktalarındaki $\{T, N, B\}$ ortonormal Serret-Frenet çatısını hesaplayalım.

$$g(T, T) = 1, \quad g(N, N) = 1, \quad g(B, B) = 1$$

$$g(T, N) = 0, \quad g(T, B) = 0, \quad g(N, B) = 0$$

koşulu sağlanır. $b^n(t)$ Bezier eğrisinin hız vektörü $v = \left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|$ ve yay parametresinin uzunluğu

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\| dt \text{ denklemi ile verilir.}$$

Teorem 4.1.1. $b_i \in R^3$ kontrol noktaları olmak üzere $t = 0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı aşağıdaki denklemlerle verilir.

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|}$$

$$N|_{t=0} = \frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|} \csc \phi - \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|} \cot \phi$$

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta b_0 \wedge \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|}$$

İspat: $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısını hesaplandığında teğet vektörü

$$T|_{t=0} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|}$$

denklemleri ile bulunur. Binormal vektörü;

$$\begin{aligned}
B|_{t=0} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{[n(b_1 - b_0)] \wedge [n(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]}{\left\| n(b_1 - b_0) \wedge [n(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}] \right\|} \\
&= \frac{[n.\Delta b_0] \wedge [n(n-1)\{\Delta b_1 - \Delta b_0\}]}{\left\| n.\Delta b_0 \wedge [n(n-1)\{\Delta b_1 - \Delta b_0\}] \right\|} \\
&= \frac{\Delta b_0 \wedge [\Delta b_1 - \Delta b_0]}{\left\| \Delta b_0 \wedge [\Delta b_1 - \Delta b_0] \right\|} \\
&= \frac{\Delta b_0 \wedge \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge \Delta b_1 \right\|}
\end{aligned}$$

denklemleri ile bulunur. Normal vektörü ise;

$$\begin{aligned}
N|_{t=0} &= B \wedge T \\
&= \frac{\Delta b_0 \wedge \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge \Delta b_1 \right\|} \wedge \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|} \\
&= \frac{(\Delta b_0 \wedge \Delta b_1) \wedge \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge \Delta b_1 \right\| \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|} \\
&= \frac{g(\Delta b_0, \Delta b_0) \Delta b_1 - g(\Delta b_1, \Delta b_0) \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge \Delta b_1 \right\| \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|} \\
&= \frac{\Delta b_1}{\left\| \Delta b_1 \right\|} \csc \phi - \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|} \cot \phi
\end{aligned}$$

denklemleri ile elde edilir. Burada ϕ açısı, Δb_1 ve Δb_0 arasındaki açıdır.

Teorem 4.1.2. Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan n . dereceden bir $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=0$ noktasında eğrilik ve burulması

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{\left\| \Delta b_1 \right\|}{\left\| \Delta b_0 \right\|^2} \sin \phi \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{(n-2)}{n} \frac{(\Delta b_0 \Delta b_1 \Delta b_2)}{\left\| \Delta b_0 \wedge \Delta b_1 \right\|^2}$$

İspat: Birim hızlı olmayan $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki eğriliği;

$$\begin{aligned}
\kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|^3} \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\|n(b_1 - b_0) \wedge n(n-1)[(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]\|}{\|n(b_1 - b_0)\|^3} \\
&= \frac{n.n.(n-1)\|(b_1 - b_0) \wedge [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]\|}{n^3 \cdot \|(b_1 - b_0)\|^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|(b_1 - b_0) \wedge [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]\|}{\|(b_1 - b_0)\|^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|(b_1 - b_0) \wedge [(b_2 - b_1)]\|}{\|(b_1 - b_0)\|^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \cdot \sin \phi
\end{aligned}$$

denklemleri ile elde edilir. Burada ϕ açısı Δb_1 ve Δb_0 vektörleri arasındaki açıdır. $t=0$ daki $b^n(t)$ Bezier eğrisinin burulması ise

$$\begin{aligned}
\tau|_{t=0} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|^2} \\
&= \frac{g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \wedge \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|^2} \\
&= \frac{(n-2)}{n} \cdot \frac{g(\Delta b_0 \wedge (\Delta b_1 - \Delta b_0), (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0))}{\|\Delta b_0 \wedge [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|^2} \\
&= \frac{(n-2)}{n} \frac{(\Delta b_0 \Delta b_1 \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Başlangıç noktasındaki hızı $v = n\|b_1 - b_0\| = n\|\Delta b_0\|$ olmak üzere $t = 0$ daki Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|} \sin\phi . N$$

$$N' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|} \sin\phi . T + (n-2) \|\Delta b_0\| \frac{(\Delta b_0 \Delta b_1 \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|^2} . B$$

$$B' = -(n-2) \|\Delta b_0\| \frac{(\Delta b_0 \Delta b_1 \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|^2} . N$$

denklemleri ile verilir. $t = 0$ noktasındaki r . mertebeden değme noktaları,

$$b^n(0) = b_0$$

$$\frac{db^n(t)}{dt} \Big|_{t=0} = n . \Delta b_0$$

$$\frac{d^2 b^n(t)}{d^2 t} \Big|_{t=0} = n(n-1) (\Delta b_1 - \Delta b_0)$$

...

$$\frac{d^r b^n(t)}{d^r t} \Big|_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} . \Delta^r b_0$$

denklemleri ile hesaplanır. $t = 0$ başlangıç noktasındaki eğrilik yarıçapı aşağıdaki denklemlerde verilir. Eğrilik yarıçapı ise

$$\rho(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{\kappa} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\|\Delta b_0\|^2}{\|\Delta b_1\|} . \sin\phi$$

denklemiyle hesaplanır.

Teorem 4.1.3. $b_i \in E^3$ kontrol noktaları olmak üzere $t = 1$ bitiş noktasındaki $\{T, N, B\} \Big|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı aşağıdaki denklemlerle verilir.

$$T \Big|_{t=1} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|}$$

$$N|_{t=1} = -\frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|} \cot \psi + \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|} \csc \psi$$

$$B|_{t=1} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}\|}$$

İspat: $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısını hesapladığımızda teğet vektörü

$$T|_{t=1} = \frac{\left| \frac{db^n(t)}{dt} \right|}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|} \Big|_{t=1} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|}$$

denklemleri ile bulunur. Binormal vektörü

$$B|_{t=1} = \frac{\left| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right|}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|} \Big|_{t=1}$$

$$= \frac{n \cdot [b_n - b_{n-1}] \wedge n \cdot (n-1) [(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]}{\left\| n \cdot (b_n - b_{n-1}) \wedge n \cdot (n-1) [(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|}$$

$$= \frac{(b_n - b_{n-1}) \wedge [(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]}{\left\| (b_n - b_{n-1}) \wedge [(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|}$$

$$= \frac{\Delta b_{n-1} \wedge [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\|\Delta b_{n-1} \wedge [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}\|}$$

denklemleri bulunur. Normal vektörü ise;

$$\begin{aligned}
N|_{t=1} &= B \wedge T \\
&= -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}\|} \wedge \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|} \Big|_{t=1} \\
&= -\frac{[\Delta b_{n-2} \wedge \Delta b_{n-1}] \wedge \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}\| \|\Delta b_{n-1}\|} \\
&= -\left(\frac{g(\Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1}) \Delta b_{n-1} - g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}) \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}\| \|\Delta b_{n-1}\|} \right) \\
&= \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|} \cot \psi - \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|} \csc \psi
\end{aligned}$$

denklemleri ile elde edilir. Burada Δb_{n-2} ve Δb_{n-1} arasındaki açı ψ açısıdır.

Teorem 4.1.4. Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan n . dereceden bir $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ noktasında eğrilik ve burulması

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \quad \text{ve} \quad \tau|_{t=1} = -\frac{n-2}{n} \frac{(\Delta b_{n-1} \Delta b_{n-2} \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}\|^2} \text{ dir.}$$

İspat: Birim hızlı olmayan $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki eğriliği;

$$\begin{aligned}
\kappa|_{t=1} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|^3} \Big|_{t=1} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|(b_n - b_{n-1}) \wedge [(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1} \wedge [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi
\end{aligned}$$

denklemleri ile elde edilir, burada Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri arasındaki açı ψ dir. $t=1$ daki $b^n(t)$ Bezier eğrisinin burulması ise

$$\begin{aligned}\tau|_{t=1} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|^2} \\ &= \frac{g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \wedge \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|^2} \\ &= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_{n-1} \wedge [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}], [\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}] \right)}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \right\|^2} \\ &= -\frac{n-2}{n} \frac{(\Delta b_{n-1} \Delta b_{n-2} \Delta b_{n-3})}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2} \right\|^2}\end{aligned}$$

eşitliğinden elde edilir. Bitiş noktasındaki hızı $v = n\|b_n - b_{n-1}\| = \|\Delta b_{n-1}\|$ olmak üzere $t=1$ daki Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|} \sin\varphi . N \\ N' &= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|} \sin\psi . T - (n-2) \|\Delta b_{n-1}\| \frac{(\Delta b_{n-1} \Delta b_{n-2} \Delta b_{n-3})}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2} \right\|^2} . B \\ B' &= (n-2) \|\Delta b_{n-1}\| \frac{(\Delta b_{n-1} \Delta b_{n-2} \Delta b_{n-3})}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge \Delta b_{n-2} \right\|^2} . N\end{aligned}$$

denklemleri ile hesaplanır. $t=1$ noktasındaki r . mertebeden değme noktaları

$$\begin{aligned}
\frac{db^n(t)}{dt} \Big|_{t=1} &= n.\Delta b_{n-1} \\
\frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \Big|_{t=1} &= n(n-1)[\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \\
\frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \Big|_{t=1} &= n(n-1)(n-2)[\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}] \\
&\dots \\
\frac{d^r b^n(t)}{d^r t} \Big|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_{n-r}
\end{aligned}$$

denklemleri ile verilir. $t = 1$ bitiş noktasındaki eğrilik yarıçapı

$$\rho(t) \Big|_{t=1} = \frac{1}{\kappa} = \frac{n}{n-1} \frac{\|\Delta b_{n-1}\|^2}{\|\Delta b_{n-2}\|} \cdot \sin \phi$$

denklemleri ile verilir. $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ortonormal çatı olduğu için

$$\begin{aligned}
g(T, T) &= 1 & g(N_1, N_1) &= 1 & g(N_2, N_2) &= 1 \\
g(T, N_1) &= 0 & g(T, N_2) &= 0 & g(N_1, N_2) &= 0
\end{aligned}$$

denklemlerini sağlar. Şimdi de $b^n(t)$ Bezier eğrisinin başlangıç ve bitiş noktalarındaki Bishop çatılarını inceleyelim:

Teorem 4.1.5. $b_i \in R^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki Bishop çatısının eğrilik ve burulması

$$k_1 \Big|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \cdot \sin \phi \cos \theta \quad \text{ve} \quad k_2 \Big|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \cdot \sin \phi \sin \theta$$

dir. Burada θ açısı $\tau = \theta'$ ile hesaplanır.

İspat: $k_1 \Big|_{t=0} = \kappa \cdot \cos \theta$, $k_2 \Big|_{t=0} = \kappa \cdot \sin \theta$ denklemlerinde yukarıda bulunan κ eğriliği ve Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü olan $v_1 = n\|b_1 - b_0\| = n\|\Delta b_0\|$ yerine yazıldığında başlangıç noktasındaki Bishop çatısı

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cos \theta = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \sin \phi \cos \theta$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sin \theta = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \sin \phi \sin \theta$$

denklemleri ile elde edilir.

Teorem 4.1.6. $b_i \in R^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü, $v_1 = n\|b_1 - b_0\| = n\|\Delta b_0\|$ olmak üzere Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|} \sin \phi [\cos \theta \cdot N_1 + \sin \theta \cdot N_2] \\ N_1' &= (1-n) \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|} \sin \phi \cos \theta \cdot T \\ N_2' &= (1-n) \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|} \sin \phi \sin \theta \cdot T. \end{aligned}$$

İspat: $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v_1 & k_2 v_1 \\ -k_1 v_1 & 0 & 0 \\ -k_2 v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere k_1, k_2 eğrilikleri ve Bezier eğrisinin türev formülü, $v_1 = n\|b_1 - b_0\| = n\|\Delta b_0\|$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T'|_{t=0} &= k_1 v_1 N_1 + k_2 v_1 N_2 \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \cdot \sin \phi \cos \theta \cdot n\|\Delta b_0\| \cdot N_1 + \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \cdot \sin \phi \sin \theta \cdot n\|\Delta b_0\| \cdot N_2 \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|} \sin \phi [\cos \theta \cdot N_1 + \sin \theta \cdot N_2] \end{aligned}$$

$$N'_1|_{t=0} = -k_1 v T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \cdot \sin \phi \cos \theta \cdot n \|\Delta b_0\| \cdot T$$

$$= (1-n) \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|} \sin \phi \cos \theta \cdot T$$

$$N'_2|_{t=0} = -k_2 v \cdot T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \cdot \sin \phi \sin \theta \cdot n \|\Delta b_0\| \cdot T$$

$$= (1-n) \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|} \sin \phi \sin \theta \cdot T$$

türev formülleri elde edilir.

Teorem 4.1.7. $b_i \in R^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Bishop çatısının eğrilikleri

$$k_1|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \cos \varphi \quad \text{ve} \quad k_2|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \sin \varphi$$

dir. Burada φ açısı $\tau = \varphi'$ ile hesaplanır.

İspat: $k_1|_{t=1} = \kappa \cdot \cos \varphi$, $k_2|_{t=1} = \kappa \cdot \sin \varphi$ denklemlerinde yukarıda bulunan κ eğriliği ve Bezier eğrisinin $t=1$ noktasındaki türev formülü olan $v_2 = n \|b_n - b_{n-1}\| = n \|\Delta b_{n-1}\|$ yerine yazıldığında bitiş noktasındaki Bishop çatısının eğrilikleri

$$k_1|_{t=1} = \kappa \cdot \cos \varphi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \cos \varphi$$

$$k_2|_{t=1} = \kappa \cdot \sin \varphi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \sin \varphi$$

denklemleri ile elde edilir.

Teorem 4.1.8. $b_i \in R^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ noktasındaki türev formülü, $v_2 = n \|b_n - b_{n-1}\| = n \|\Delta b_{n-1}\|$ olmak üzere Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|} \sin \psi [\cos \varphi . N_1 + \sin \varphi . N_2]$$

$$N_1' = (1-n) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|} \sin \psi \cos \varphi . T$$

$$N_2' = (1-n) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|} \sin \psi \sin \varphi . T$$

denklemleri ile hesaplanır.

İspat: $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v_1 & k_2 v_1 \\ -k_1 v_1 & 0 & 0 \\ -k_2 v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere k_1, k_2 eğrilikleri ve Bezier eğrisinin türev formülü, $v_2 = n \|b_n - b_{n-1}\| = n \|\Delta b_{n-1}\|$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T' \Big|_{t=1} &= k_1 v N_1 + k_2 v N_2 \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \cos \varphi . n \|\Delta b_{n-1}\| N_1 + \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \sin \varphi . n \|\Delta b_{n-1}\| N_2 \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|} \sin \psi [\cos \varphi . N_1 + \sin \varphi . N_2] \\ N_1' \Big|_{t=1} &= -k_1 v T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \cos \varphi . n \|\Delta b_{n-1}\| \\ &= (1-n) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|} \sin \psi \cos \varphi . T \\ N_2' \Big|_{t=1} &= -k_2 v T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^2} \cdot \sin \psi \sin \varphi . n \|\Delta b_{n-1}\| T \\ &= (1-n) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|} \sin \psi \sin \varphi . T \end{aligned}$$

denklemleri ile Bezier eğrilerinin bitiş noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri elde edilir.

4.2. Minkowski Uzayında Dejenere Olmayan Bezier Eğrileri

4.2.1. Spacelike Bezier Eğrileri

Tanım 4.2.1.1. n – boyutlu reel Minkowski uzayı R_1^n de $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ spacelike noktalar kümesi verilsin. Bu X noktalarının oluşturduğu

$$SCH \{X\} = \left\{ \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

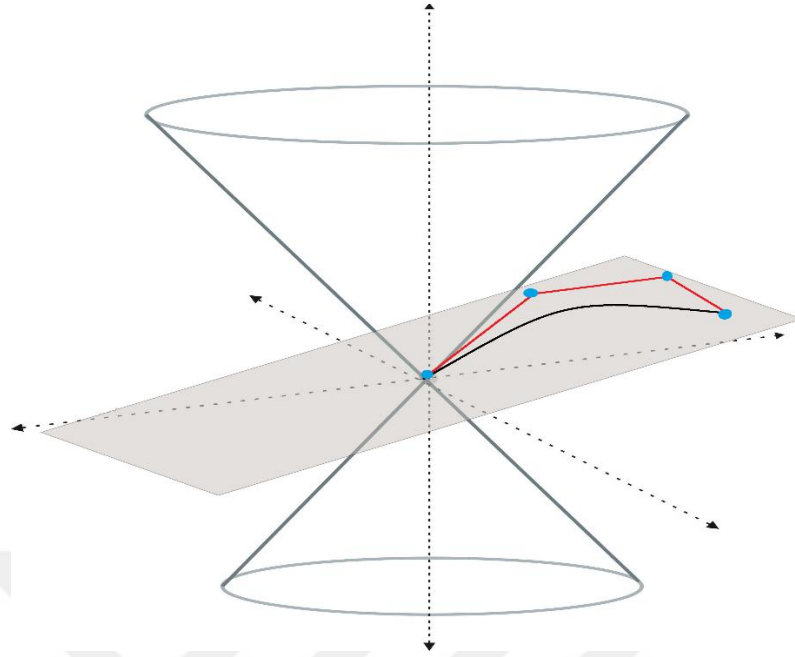
kümesine spacelike konveks çokgeni (teknesi) denir. (3.17) denkleminde yararlanarak alınan $b^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ parametrik denklemi ile verilen bir Bezier eğrisi $b^n(t)$ olmak üzere her $t \in [0, 1]$ için $b(t) \in SCH \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ dir.

Teorem 4.2.1.2. $b^n(t)$ bir Bezier eğri olsun. $\Delta b_0 = b_1 - b_0, \Delta b_1 = b_2 - b_1, \dots, \Delta b_{n-1} = b_n - b_{n-1}$ vektörlerinin hepsi spacelike vektörler ise $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$P_3^2(\Delta b_i) < P_1^2(\Delta b_i) + P_2^2(\Delta b_i)$$

koşulu sağlanır (Georgiev 2008).

Teorem 4.2.1.3. $b^n(t)$ bir Bezier eğri olsun. Konveks çokgenin bütün vektörleri spacelike ise $b^n(t)$ spacelikedir (Georgiev 2008).



Şekil 4.1 Spacelike Bezier eğrisi

4.2.1.1 Asli Normali Spacelike Olan Spacelike Bezier Eğrileri

$b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisini alalım. $b^n(t)$ Bezier eğrisi spacelike ise T teğeti spacelike olmalıdır. Ancak T' yani asli normalinin spacelike olduğu durumda $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisi “asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisi” olarak adlandırılır. T spacelike, N spacelike, B timelike olmak üzere $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ ortonormal çatısını tanımlandığında

$$g(T, T) = 1 \quad g(N, N) = 1 \quad g(B, B) = -1$$

$$g(T, N) = 0 \quad g(T, B) = 0 \quad g(N, B) = 0$$

koşulları sağlanır. Spacelike Bezier eğrisi için (3.18) den yararlanarak alınan

$$g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right) > 0 \text{ dir. Bu yüzden } b^n(t) \text{ nin hız vektörü } v = \left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\| = \sqrt{g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right)}$$

ve yay parametresinin uzunluğu $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right)} dt$ ile tanımlanır.

Teorem 4.2.1.1.1. u ve v Minkowski-3 uzayında iki vektör olsun.

1) Eğer u ve v spacelike vektörleri $|g(u, v)|_L < \|u\|_L \cdot \|v\|_L$ koşulunu sağlıyorsa $u \times v$ vektörü bir spacelike vektör için

$$|g(u, v)|_L = \|u\|_L \cdot \|v\|_L \cos \theta$$

$$\|u \times v\|_L = \|u\|_L \cdot \|v\|_L \sin \theta$$

eşitliği sağlanır. Burada θ açısı u ve v spacelike vektörleri arasındaki spacelike açıdır.

2) Eğer u ve v spacelike vektörleri $|g(u, v)|_L > \|u\|_L \cdot \|v\|_L$ koşulunu sağlıyorsa $u \times v$ vektörü bir timelike vektör için

$$|g(u, v)|_L = -\|u\|_L \cdot \|v\|_L \cosh \theta$$

$$\|u \times v\|_L = \|u\|_L \cdot \|v\|_L \sinh \theta$$

eşitliği sağlanır. Burada θ açısı u ve v spacelike vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır.

3) Eğer u ve v spacelike vektörleri $|g(u, v)|_L = \|u\|_L \cdot \|v\|_L$ eşitliğini sağlıyorsa $u \times v$ vektörü lightlike vektördür.

Teorem 4.2.1.1.2. $b^n(t)$ asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisi için $b_i \in E^3$ kontrol noktaları olsun. Δb_i ler aynı konide yer alan vektörler alındığında $t=0$ noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısının teğet vektörü

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)}}$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri için $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulu sağlanıyorsa N asal normali ve B binormali şu şekilde elde edilir.

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sin \theta}$$

$$N|_{t=0} = \frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc \theta - \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \cot \theta$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri için $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulu sağlanıyorsa N asal normali ve B binormali

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta}$$

$$N|_{t=0} = \frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc h \theta + \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \coth \theta$$

ile hesaplanır.

İspat: $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisi olduğu için teğet vektörü de spacelike vektör olmalıdır. Bu yüzden $\|\Delta b_0\|_L = \sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)}$ olur. $t=0$ başlangıç noktasındaki teğet vektörü

$$T|_{t=0} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)}}$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise spacelike açının iç çarpım ve dış çarpım özelliklerinin kullanılmasıyla $b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki binormal vektörü

$$\begin{aligned}
B|_{t=0} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{[n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]}{\left\| [n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}] \right\|_L} \\
&= \frac{n\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_0 - \Delta b_0\}]}{\left\| n\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_1 - \Delta b_0\}] \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0]}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0] \right\|_L} \\
&= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0 \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sin \theta}
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. T ve N spacelike, B timelike ise $-B \wedge_L T = N$ alınacaktır. Burada Δb_0 spacelike vektör olduğu için $\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 = g(\Delta b_0, \Delta b_0)$ dır. Asli normal vektörü

$$\begin{aligned}
N &= -B \wedge_L T \\
&= -\frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L} \\
&= -\frac{(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1) \wedge_L \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L} \\
&= -\left(\frac{-g(\Delta b_0, \Delta b_0) \cdot \Delta b_1 + g(\Delta b_1, \Delta b_0) \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sin \theta \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L} \right) \\
&= -\left(\frac{-\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \Delta b_1 + \left\| \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L \cos \theta \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sin \theta} \right) \\
&= -\left(\frac{-\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sin \theta} + \frac{\left\| \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L \cos \theta \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sin \theta} \right) \\
&= \frac{\Delta b_1}{\left\| \Delta b_1 \right\|_L} \csc \theta - \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L} \cot \theta
\end{aligned}$$

dir. Burada θ açısı Δb_0 ve Δb_1 vektörleri arasındaki spacelike açıdır. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \left\| \Delta b_0 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise hiperbolik açının iç çarpım ve dış çarpım özelliklerinin kullanılmasıyla $b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki binormal vektörü

$$\begin{aligned}
B|_{t=0} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{[n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]}{\left\| [n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}] \right\|_L} \\
&= \frac{n\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_0 - \Delta b_0\}]}{\left\| n\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_1 - \Delta b_0\}] \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0]}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0] \right\|_L} \\
&= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0 \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta}
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. T ve N spacelike, B timelike ise $-B \wedge_L T = N$ alınacaktır. Burada Δb_0 spacelike olduğu için $\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 = g(\Delta b_0, \Delta b_0)$ dır. Asli normal vektörü

$$\begin{aligned}
N &= -B \wedge_L T \\
&= -\frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L} = -\frac{(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1) \wedge_L \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L} \\
&= -\left(\frac{-g(\Delta b_0, \Delta b_0) \cdot \Delta b_1 + g(\Delta b_1, \Delta b_0) \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L} \right) \\
&= -\left(\frac{-\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \Delta b_1 - \left\| \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L \cosh \theta \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta} \right) \\
&= -\left(\frac{-\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta} - \frac{\left\| \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L \cosh \theta \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta} \right) \\
&= \frac{\Delta b_1}{\left\| \Delta b_1 \right\|_L} \csc h\theta + \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L} \coth \theta
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada Δb_0 ve Δb_1 spacelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı θ dır.

$|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L = \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise B vektörü lightlike vektördür. Bu durumda Δb_0 ve Δb_1 arasındaki açı 0° veya 180° olduğunda ortonormal bir çatı oluşmayacağından bu durum tezde değerlendirmeye alınmayacaktır.

Teorem 4.2.1.1.3. Kontrol noktaları spacelike vektörler olan $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan ve Δb_i spacelike vektörlerden oluşan n . dereceden asli normal spacelike olan spacelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasında eğrilik ve burulması iki durum için aşağıdaki gibi hesaplanır:

Δb_0 ve Δb_1 spacelike vektörleri için $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulu sağlanıyorsa

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \text{ ve } \tau|_{t=0} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2}$$

Δb_0 ve Δb_1 spacelike vektörleri için $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulu sağlanıyorsa

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \text{ ve } \tau|_{t=0} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2}.$$

İspat: Δb_0 ve Δb_1 spacelike vektörleri için $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulu sağlanıyorsa spacelike vektörler için $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin başlangıç noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\|n(b_1 - b_0) \wedge_L [n(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]\|_L}{\|n(b_1 - b_0)\|_L^3} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\|(b_1 - b_0) \wedge_L [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]\|_L}{\|b_1 - b_0\|_L^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0)\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sin \theta}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta
\end{aligned}$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 spacelike vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağladığında başlangıç noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\|n(b_1 - b_0) \wedge_L [n(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]\|_L}{\|n(b_1 - b_0)\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|(b_1 - b_0) \wedge_L [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]\|_L}{\|b_1 - b_0\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0)\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta
\end{aligned}$$

dir. Başlangıç noktasındaki burulması ise

$$\tau|_{t=0} = \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \wedge_L \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \bigg|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{g\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}, \frac{d^3b^n(t)}{dt^3}\right)}{\left\|\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}\right\|_L^2} \\
&= \frac{g\left(n\Delta b_0 \wedge_L n(n-1)(\Delta b_1 - \Delta b_0), n(n-1)(n-2)(\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0)\right)}{\left\|n\Delta b_0 \wedge_L n(n-1)(\Delta b_1 - \Delta b_0)\right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0), (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0)\right)}{\left\|\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0)\right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1, \Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0\right)}{\left\|\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0)\right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1, \Delta b_2\right)}{\left\|\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0)\right\|_L^2} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\left\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\right\|_L^2}
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.1.1.4. Asli normalı spacelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t = 0$ daki Serret-Frenet çatısının türev formülleri Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned}
T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sin \theta \cdot N \\
N' &= -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sin \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot B \\
B' &= -(n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot N
\end{aligned}$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot N$$

$$N' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot B$$

$$B' = -(n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot N$$

İspat: Asli normalı spacelike olan spacelike eğriler için Serret-Frenet türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa v_1 & 0 \\ -\kappa v_1 & 0 & \tau v_1 \\ 0 & \tau v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilir. Burada $v_1 = n \|b_1 - b_0\|_L = n \|\Delta b_0\|_L$ olmak üzere Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için spacelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$T'|_{t=0} = \kappa v_1 \cdot N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sin \theta \cdot N$$

$$N'|_{t=0} = -\kappa v_1 T + \tau v_1 B$$

$$= -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot T - \frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} n \|\Delta b_0\|_L \cdot B$$

$$= -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sin \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot B$$

$$B'|_{t=0} = \tau v_1 N = -\frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N$$

$$= -(n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot N$$

olarak elde edilir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için spacelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$T'|_{t=0} = \kappa v_1 \cdot N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot N$$

$$N'|_{t=0} = -\kappa v_1 T + \tau v_1 B$$

$$= -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot T - \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} n \|\Delta b_0\|_L \cdot B$$

$$= -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot B$$

$$B'|_{t=0} = \tau v_1 \cdot N = -\frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} n \|\Delta b_0\|_L \cdot N$$

$$= -(n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot N$$

ile hesaplanır.

Teorem 4.2.1.1.5. $b^n(t)$ asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisi için $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olsun. Δb_i ler aynı konide yer alan vektörler ise $t=1$ noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı

$$T|_{t=1} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\sqrt{g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})}}$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlıyorsa N asal normali ve B binormali şu şekilde elde edilir.

$$B|_{t=1} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi}$$

$$N|_{t=1} = -\frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \cos ec \varphi + \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \cot \varphi$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlıyorsa N asal normali ve B binormali şu şekilde elde edilir.

$$B|_{t=1} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}$$

$$N|_{t=1} = -\frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \cosh \varphi - \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \coth \varphi$$

ile hesaplanır.

İspat: $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisi olduğu için teğet vektörü de spacelike vektör olmalıdır. Bu yüzden $\|\Delta b_{n-1}\|_L = \sqrt{g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})}$ olur.

$$T|_{t=1} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\sqrt{g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})}}$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise spacelike açının iç çarpım ve dış çarpım özelliklerinin kullanılmasıyla $b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki binormal vektörü

$$B|_{t=1} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \Big|_{t=1}$$

$$= \frac{n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]}{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L}$$

$$= \frac{n.\Delta b_{n-1} \wedge_L n.(n-1)[\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\left\| n.\Delta b_{n-1} \wedge_L n.(n-1)[\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \right\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \right\|_L}$$

$$= \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L}$$

$$= -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi}$$

ile hesaplanır. T ve N spacelike, B timelike ise $N = -B \wedge_L T$ alınacaktır. Burada Δb_{n-1} spacelike olduğu için $\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 = g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})$ dır. Asli normal vektörü

$$\begin{aligned}
N &= -B \wedge_L T \\
&= -\frac{[-\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}]}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \\
&= \frac{(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}) \wedge_L \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \\
&= \left(\frac{-g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}) \Delta b_{n-2} + g(\Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1}) \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \right) \\
&= \left(-\frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2} + \|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cos \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi} \right) \\
&= \left(-\frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi} + \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cos \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi} \right) \\
&= -\frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \cos \varphi + \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \cot \varphi
\end{aligned}$$

Burada φ açısı Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} arasındaki açıdır.

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler ise hiperbolik açının iç çarpım ve dış çarpım özelliklerinin kullanılmasıyla $b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki binormal vektörü

$$\begin{aligned}
B|_{t=1} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \bigg|_{t=1} \\
&= \frac{n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]}{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n.\Delta b_{n-1} \wedge_L n.(n-1)[\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\|n.\Delta b_{n-1} \wedge_L n.(n-1)[\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|_L} \\
&= \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} \\
&= -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. T ve N spacelike, B timelike için vektörel çarpım $N = -B \wedge_L T$ alınmalıdır.

Burada Δb_{n-1} spacelike olduğu için $\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 = g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})$ dır. Asli normal vektörü

$$\begin{aligned}
N &= -B \wedge_L T \\
&= -\frac{[-\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}]}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \\
&= \frac{(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}) \wedge_L \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \\
&= \left(\frac{-g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}) \cdot \Delta b_{n-2} + g(\Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1}) \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \right) \\
&= \left(-\frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2} - \|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cosh \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi} \right) \\
&= \left(-\frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi} - \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cosh \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi} \right) \\
&= -\frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \cosh \varphi - \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \coth \varphi
\end{aligned}$$

olarak ispatlanır. Burada Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} spacelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı φ dır.

$|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L = \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise B lightlike vektördür. Bu durumda Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} arasındaki açı 0° veya 180° olduğunda ortanormal bir çatı oluşmayacağından bu durum değerlendirmeye alınmayacaktır.

Teorem 4.2.1.1.6. $b_0, b_1, \dots, b_n$ kontrol noktaları spacelike vektörler olan ve Δb_i spacelike vektörlerden oluşan n . dereceden asli normali spacelike olan spacelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasında eğrilik ve burulması için iki durum vardır:

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için spacelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \varphi \quad \text{ve} \quad \tau|_{t=1} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2},$$

dir. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için spacelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \quad \text{ve} \quad \tau|_{t=1} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \text{ dir.}$$

İspat: Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için bitiş noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=1} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=1} \\ &= \frac{\|n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]\|_L}{\|n.(b_n - b_{n-1})\|_L^3} \\ &= \frac{\|n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]\|_L}{\|n.(b_n - b_{n-1})\|_L^3} \\ &= \frac{(n-1) \|\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2})\|_L}{n \|\Delta b_{n-1}\|_L^3} = \frac{(n-1) \|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L}{n \|\Delta b_{n-1}\|_L^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sin \varphi$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için bitiş noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=1} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=1} \\ &= \frac{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L}{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \right\|_L^3} \\ &= \frac{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L}{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \right\|_L^3} \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^3} = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^3} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sinh \varphi \end{aligned}$$

dir. Bitiş noktasındaki burulması ise

$$\begin{aligned} \tau|_{t=1} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \wedge_L \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \bigg|_{t=1} \\ &= \frac{g\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}, \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \\ &= \frac{g\left(n\Delta b_{n-1} \wedge_L n(n-1)(\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}), n(n-1)(n-2)(\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}) \right)}{\left\| n\Delta b_{n-1} \wedge_L n(n-1)(\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-2}{n} \frac{g(\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}), (\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}))}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2})\|_L^2} \\
&= -\frac{n-2}{n} \frac{g(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2})\|_L^2} \\
&= -\frac{n-2}{n} \frac{g(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2})\|_L^2} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2}
\end{aligned}$$

burada spacelike vektörlerinde kullanılan her iki koşul için burulma denklemi aynıdır.

Teorem 4.2.1.1.7. Asli normalı spacelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=1$ deki Serret-Frenet çatısının türev formülleri iki durumu vardır:

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned}
T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi . N \\
N' &= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi . T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . B \\
B' &= (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . N
\end{aligned}$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned}
T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi . N \\
N' &= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi . T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . B
\end{aligned}$$

$$B' = (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . N$$

İspat: Asli normalı spacelike olan spacelike eğriler için Serret-Frenet türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa v_2 & 0 \\ -\kappa v_2 & 0 & \tau v_2 \\ 0 & \tau v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

dir. Bezier eğrisinin türev formülleri, $v_2 = n \|b_n - b_{n-1}\|_L = n \|\Delta b_{n-1}\|_L$ olmak üzere Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} T' &= \kappa v_2 . N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sin \varphi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi . N \end{aligned}$$

$$N' = -\kappa v_2 . T + \tau v_2 . B$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sin \varphi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . T + \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . B \\ &= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi . T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= \tau v_2 . N = \frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N \\ &= (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . N \end{aligned}$$

dir. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$T' = \kappa v_2 \cdot N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sinh \varphi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \cdot N$$

$$N' = -\kappa v_2 \cdot T + \tau v_2 \cdot B$$

$$= -\frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sinh \varphi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot T + \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot B$$

$$= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \cdot T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot B$$

$$B' = \tau v_2 \cdot N = \frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N$$

$$= (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot N$$

ile hesaplanır.

Şimdi de asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrilerinin Bishop çatısını hesaplayalım:

$\{T, N_1, N_2\}$ asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrilerinin Bishop çatısı ortanormal çatı olduğu için

$$g(T, T) = 1 \quad g(N_1, N_1) = 1 \quad g(N_2, N_2) = -1$$

$$g(T, N_1) = 0 \quad g(T, N_2) = 0 \quad g(N_1, N_2) = 0$$

denklemleri sağlanır. Şimdi de asli normali spacelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin başlangıç ve bitiş noktasındaki Bishop çatısını inceleyelim:

Teorem 4.2.1.1.8. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan asli normali spacelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki spacelike Bishop çatısının eğrilikleri ise Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cosh \psi \quad \text{ve} \quad k_2|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \sinh \psi$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için

$$k_1|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cosh \psi \quad \text{ve} \quad k_2|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \sinh \psi$$

dir. Burada ψ açısı için $\tan \psi = \frac{k_2|_{t=0}}{k_1|_{t=0}}$ ve $\tau = \psi$ ' dir.

İspat: $k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \psi$, $k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \psi$ denklemlerinde yukarıda bulunan κ eğriliği ve Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü olan $v_1 = n\|b_1 - b_0\|_L = n\|\Delta b_0\|_L$ yerine yazıldığında başlangıç noktasındaki Bishop çatısı elde edilir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cosh \psi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \sinh \psi$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cosh \psi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \sinh \psi$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.1.9. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü, $v_1 = n\|b_1 - b_0\|_L = n\|\Delta b_0\|_L$ olmak üzere asli

normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta [\cosh \psi . N_1 - \sinh \psi . N_2]$$

$$N_1' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta \cosh \psi . T$$

$$N_2' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta \sinh \psi . T$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta [\cosh \psi . N_1 - \sinh \psi . N_2]$$

$$N_1' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \cosh \psi . T$$

$$N_2' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \sinh \psi . T$$

İspat: Asli normali spacelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v_1 & -k_2 v_1 \\ -k_1 v_1 & 0 & 0 \\ -k_2 v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere k_1, k_2 eğrilikleri ve Bezier eğrisinin türev formülü, $v_1 = n\|b_1 - b_0\|_L = n\|\Delta b_0\|_L$ yerine yazılırsa Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için

$$\begin{aligned}
T' |_{t=0} &= k_1 v_1 N_1 - k_2 v_1 N_2 \\
&= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cosh \psi \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N_1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \sinh \psi \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N_2 \\
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta [\cosh \psi \cdot N_1 - \sinh \psi \cdot N_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N'_1 |_{t=0} &= -k_1 v_1 \cdot T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cosh \psi \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot T \\
&= -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta \cosh \psi \cdot T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N'_2 |_{t=0} &= -k_2 v_1 \cdot T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \sinh \psi \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot T \\
&= -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta \sinh \psi \cdot T
\end{aligned}$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned}
T' |_{t=0} &= k_1 v_1 \cdot N_1 - k_2 v_1 \cdot N_2 \\
&= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cosh \psi \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N_1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \sinh \psi \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N_2 \\
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta [\cosh \psi \cdot N_1 - \sinh \psi \cdot N_2]
\end{aligned}$$

$$N'_1 |_{t=0} = -k_1 v_1 \cdot T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cosh \psi \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot T$$

$$\begin{aligned}
N'_2 |_{t=0} &= -k_2 v_1 \cdot T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \sinh \psi \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot T \\
&= -(n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \sinh \psi \cdot T
\end{aligned}$$

dir. Asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisinin başlangıç noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.1.1.10. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan asli normali spacelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki spacelike Bishop çatısının eğrilikleri Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \varphi \cosh \phi \quad k_2|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \varphi \sinh \phi$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \cosh \phi \quad k_2|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \sinh \phi \cdot$$

dir. Burada ϕ açısı için $\tanh \phi = \frac{k_2|_{t=0}}{k_1|_{t=0}}$ ve $\tau = \phi'$ dir.

İspat: $k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \phi$, $k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \phi$ denklemlerinde yukarıda bulunan κ eğriliği ve Bezier eğrisinin $t=0$ noktasındaki türev formülü olan $v_1 = n\|b_n - b_{n-1}\|_L = n\|\Delta b_{n-1}\|_L$ yerine yazıldığında bitiş noktasındaki Bishop çatısı elde edilir.

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \varphi \cosh \phi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \varphi \sinh \phi$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \phi \cosh \phi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \phi \sinh \phi$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.1.11. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=1$ noktasındaki türev formülü, $v_2 = n\|b_n - b_{n-1}\|_L = n\|\Delta b_{n-1}\|_L$ olmak üzere asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi [\cosh \phi \cdot N_1 - \sinh \phi \cdot N_2]$$

$$N_1' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi \cosh \phi \cdot T$$

$$N_2' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi \sinh \phi \cdot T$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi [\cosh \phi \cdot N_1 - \sinh \phi \cdot N_2]$$

$$N_1' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi \cosh \phi \cdot T$$

$$N_2' = -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi \sinh \phi \cdot T$$

denklemleri ile hesaplanır.

İspat: Asli normali spacelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v_2 & -k_2 v_2 \\ -k_1 v_2 & 0 & 0 \\ -k_2 v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere k_1, k_2 eğrilikleri ve Bezier eğrisinin türev formülü, $v_2 = n \|b_n - b_{n-1}\|_L = n \|\Delta b_{n-1}\|_L$ yerine yazılırsa Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned} T'|_{t=1} &= k_1 v_2 \cdot N_1 - k_2 v_2 \cdot N_2 \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \phi \cosh \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N_1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \phi \sinh \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N_2 \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi [\cosh \phi \cdot N_1 - \sinh \phi \cdot N_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1'|_{t=1} &= -k_1 v_2 \cdot T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \phi \cosh \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot T \\ &= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi \cosh \phi \cdot T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2'|_{t=1} &= -k_2 v_2 \cdot T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \phi \sinh \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot T \\ &= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi \sinh \phi \cdot T \end{aligned}$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

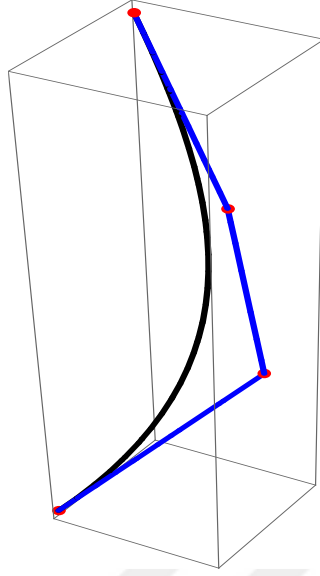
$$\begin{aligned} T'|_{t=1} &= k_1 v_2 \cdot N_1 - k_2 v_2 \cdot N_2 \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \phi \cosh \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N_1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \phi \sinh \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi [\cosh \phi . N_1 - \sinh \phi . N_2] \\
N'_1|_{t=1} &= -k_1 v_2 . T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \phi \cosh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . T \\
&= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi \cosh \phi . T \\
N'_2|_{t=1} &= -k_2 v_2 . T = -\frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \phi \sinh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . T \\
&= -(n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi \sinh \phi . T
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

Örnek 4.2.1.1.12. (Asli normali spacelike olan spacelike Bezier Eğrisinin Uygulaması)

$b^n(t)$ kontrol noktaları $b_0 = (3,1,2)$, $b_1 = (5,1,3)$, $b_2 = (8,2,4)$ $b_3 = (9,4,6)$ olan kübik bir Bezier eğrisi olsun. O halde spacelike konveks çokgen (tekne) $\Delta b_0 = b_1 - b_0 = (2,0,1)$, $\Delta b_1 = b_2 - b_1 = (3,1,1)$, $\Delta b_2 = b_3 - b_2 = (1,2,2)$ vektörleri ile verilir. Buradaki vektörler $g(\Delta b_i, \Delta b_i) > 0$ koşulunu sağlayan her bir vektörden dolayı spacelike vektördür. Böylece $b^n(t)$ spacelike Bezier eğri olur. Bu örnekte asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısı ve eğriliklerini hesaplayacağız.



Şekil 4.2. MATHEMATICA programındaki çıktısı

$$\begin{aligned}
 b^n(t) &= \sum_{i=0}^3 B_i^n(t) \cdot b_i = (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t)t^2 b_2 + t^3 b_3 \\
 &= (1-t)^3 (3,1,2) + 3(1-t)^2 t (5,1,3) + 3(1-t)t^2 (8,2,4) + t^3 (9,4,6) \\
 &= \begin{pmatrix} 3(1-t)^3 + 15(1-t)^2 t + 24(1-t)t^2 + 9t^3, (1-t)^3 + 3(1-t)^2 t + 6(1-t)t^2 + 4t^3, \\ 2(1-t)^3 + 9(1-t)^2 t + 12(1-t)t^2 + 6t^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$b^n(t)$ nin $t=0$ başlangıç noktasındaki birinci, ikinci, üçüncü türevleri

$$\left. \frac{db^n(t)}{dt} \right|_{t=0} = n \cdot \Delta b_0 = 3(2,0,1) = (6,0,3)$$

$$\left. \frac{d^2 b^n(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = n \cdot (n-1) (\Delta b_1 - \Delta b_0) = 3 \cdot (3-1) ((3,1,1) - (2,0,1)) = (6,6,0)$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^3 b^n(t)}{dt^3} \right|_{t=0} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) = 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) ((1,2,2) - 2(3,1,1) + (2,0,1)) \\
 &= (-18,0,6)
 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada Δb_0 in normu $\|\Delta b_0\|_L = \sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)} = \sqrt{(2^2 + 0^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$ ile hesaplanır. Asli normal spacelike olan spacelike Bezier eğrisinin başlangıç noktasındaki teğet vektörü

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{(2, 0, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

elde edilir. Burada $g(T, T) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + 0^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = 1$ olduğundan dolayı T teğet vektörü spacelike vektördür. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri sağladığı için bu özelliğin iç ve dış çarpım özelliğini kullanacağız.

$$|g((0, 2, 1), (3, 1, 1))|_L < \|(0, 2, 1)\|_L \cdot \|(3, 1, 1)\|_L = 5 < 3\sqrt{3}$$

$g((0, 2, 1), (3, 1, 1)) = \sqrt{2^2 + 0^2 - 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 - 1^2} \cos \theta$ buradan $\cos \theta = \frac{5}{3\sqrt{3}}$ elde edilir. Vektörel

çarpımı $\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 2)$ denklemi ile hesaplanır. İki spacelike vektör ile

bir timelike vektör ortonormal çatı oluşturur. Δb_0 ve Δb_1 iki spacelike vektöre dik olan vektör timelike olduğundan $\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L = \sqrt{-(1^2 + (-1)^2 - 2^2)} = \sqrt{2}$ ile elde edilir. Ayrıca

$$\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L = \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \cdot \sin \theta$$

$$\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{3} \sin \theta$$

burada $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ dır. Binormal vektörü

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 2)$$

elde edilir. Burada $g(B, B) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 = -1$ olduğundan dolayı B binormal vektörünün timelike vektör olduğu açıktır. Asli normal vektörü ise

$$N = -B \wedge_L T = - \cdot - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 3, -2)$$

dir. Yukarıda elde edilen asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısında yerine yazıldığında aynı sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned} N &= \frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc \theta - \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \cot \theta \\ &= \frac{(3,1,1)}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}} - \frac{(2,0,1)}{\sqrt{3}} \frac{\frac{5}{3\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}} = \frac{(9,3,3)}{\sqrt{6}} - \frac{(10,0,5)}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 3, -2) \end{aligned}$$

Böylece asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısı

$T|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2, 0, 1)$, $N|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 3, -2)$, $B|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 2)$ olarak elde edilir. Ayrıca $b^n(t)$

nin eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\|(6, 0, 3) \wedge_L (6, 6, 0)\|_L}{\|(6, 0, 3)\|_L^3} = \frac{\|18, -18, 36\|_L}{(3\sqrt{3})^3} = \frac{18\sqrt{2}}{81\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dir. Asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrisinde elde ettiğimiz eğrilikte değerleri yerine yazılırsa

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta = \frac{3-1}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2) denklemlerinden görüldüğü üzere iki farklı yöntemle elde edilen eğrinin eğriliği için aynı değerler bulunmuştur. $b^n(t)$ nin burulması ise

$$\begin{aligned} \tau|_{t=0} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \quad \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \quad \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \bigg|_{t=0} \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \\ -18 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{\|(6,0,3) \wedge_L (6,6,0)\|_L^2} = - \frac{36 \cdot 6 + 6 \cdot 54}{18^2 \cdot (-2)} = \frac{36 \cdot 15}{18 \cdot 18 \cdot -2} = -\frac{5}{6} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak elde eldir. Benzer şekilde asli normalı spacelike olan spacelike Bezier eğrilerinin başlangıç noktasında burulma değerlerini yazıldığında

$$\tau|_{t=0} = - \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} = - \frac{3-2}{3} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{(\sqrt{2})^2} = -\frac{5}{6} \quad (4.4)$$

(4.3) ve (4.4) denklemlerinden görüldüğü üzere iki farklı yöntemle elde edilen eğrinin burulması

için aynı değerler bulunmuştur. $v_1 = \left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L = \|(6,0,3)\|_L = 3\sqrt{3}$ olmak üzere Serret-Frenet

türev formülü aşağıda verilmiştir:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa v_1 & 0 \\ -\kappa v_1 & 0 & \tau v_1 \\ 0 & \tau v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}3\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}3\sqrt{3} & 0 & -\frac{5}{6}3\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{5}{6}3\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{5\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

4.2.1.2. Asli Normali Timelike Olan Spacelike Bezier Eğrileri

$b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisini alalım. $b^n(t)$ Bezier eğrisi spacelike ise T teğeti spacelike olmalıdır. Ancak T' yani asli normalinin timelike olduğu durumda $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisi ‘‘asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisi’’ olarak adlandırılır. Bu durumda T spacelike, N timelike, B spacelike olmak üzere $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ ortonormal çatısını tanımlayalım. Böylece

$$\begin{aligned} g(T, T) &= 1 & g(N, N) &= -1 & g(B, B) &= 1 \\ g(T, N) &= 0 & g(T, B) &= 0 & g(N, B) &= 0 \end{aligned}$$

koşulları sağlanır. $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisi için $g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right) > 0$ dır. Bu yüzden $b^n(t)$

nin hız vektörü $v = \left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L = \sqrt{g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right)}$ ve yay parametresinin uzunluğu

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right)} dt \text{ ile tanımlanır.}$$

Teorem 4.2.1.2.1. $b^n(t)$ asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisi için $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olsun. Δb_i ler aynı konide yer alan vektörler ise $t=0$ noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)}}$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulu sağlanıyorsa N asal normali ve B binormali şu şekilde elde edilir.

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sin \theta}$$

$$N|_{t=0} = -\frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc \theta + \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \cot \theta$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulu sağlanıyorsa N asal normali ve B binormali şu şekilde elde edilir.

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta}$$

$$N|_{t=0} = -\frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc h \theta - \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \coth \theta$$

ile hesaplanır.

İspat: $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisi olduğu için teğet vektörü de spacelike olmalıdır. Bu yüzden $\|\Delta b_0\|_L = \sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)}$ olur. $t=0$ başlangıç noktasındaki teğet vektörü

$$T|_{t=0} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)}}$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise spacelike açının iç çarpım ve dış çarpım özelliklerinin kullanılmasıyla $b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki binormal vektörü

$$\begin{aligned} B|_{t=0} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{[n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]}{\|n(b_1 - b_0) \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]\|_L} \\ &= \frac{n\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_0 - \Delta b_0\}]}{\|n\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_1 - \Delta b_0\}]\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0]}{\|\Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|_L} \\ &= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0\|_L} \\ &= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0\|_L \|\Delta b_1\|_L \sin \theta} \end{aligned}$$

ile hesaplanır. T spacelike, N timelike, B spacelike ise $N = B \wedge_L T$ alınacaktır. Burada Δb_0 spacelike olduğu için $\|\Delta b_0\|_L^2 = g(\Delta b_0, \Delta b_0)$ dır. Asli normal vektörü

$$\begin{aligned} N &= B \wedge_L T \\ &= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1) \wedge_L \Delta b_0}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L \cdot \|\Delta b_0\|_L} \\ &= \left(\frac{-g(\Delta b_0, \Delta b_0) \cdot \Delta b_1 + g(\Delta b_1, \Delta b_0) \cdot \Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sin \theta \cdot \|\Delta b_0\|_L} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \Delta b_1 + \|\Delta b_1\|_L \cdot \|\Delta b_0\|_L \cos \theta \cdot \Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \|\Delta b_1\|_L \sin \theta} \right) \\
&= \left(-\frac{\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \Delta b_1}{\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \|\Delta b_1\|_L \sin \theta} + \frac{\|\Delta b_1\|_L \cdot \|\Delta b_0\|_L \cos \theta \cdot \Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \|\Delta b_1\|_L \sin \theta} \right) \\
&= -\frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc \theta + \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \cot \theta
\end{aligned}$$

dır. Burada Δb_0 ve Δb_1 vektörleri arasındaki spacelike açı θ dır.

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise hiperbolik açının iç çarpım ve dış çarpım özelliklerinin kullanılmasıyla $b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki binormal vektörü

$$\begin{aligned}
B|_{t=0} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{[n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]}{\left\| [n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}] \right\|_L} \\
&= \frac{n\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_0 - \Delta b_0\}]}{\left\| n\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_1 - \Delta b_0\}] \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0]}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0] \right\|_L} \\
&= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0 \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0\|_L \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta}
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. T spacelike, N timelike, B spacelike ise $N = B \wedge_L T$ alınacaktır. Burada Δb_0 spacelike olduğu için $\|\Delta b_0\|_L^2 = g(\Delta b_0, \Delta b_0)$ dır. Asli normal vektörü

$$\begin{aligned}
N &= B \wedge_L T \\
&= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1) \wedge_L \Delta b_0}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L \cdot \|\Delta b_0\|_L} \\
&= \left(\frac{-g(\Delta b_0, \Delta b_0) \cdot \Delta b_1 + g(\Delta b_1, \Delta b_0) \cdot \Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta \cdot \|\Delta b_0\|_L} \right) \\
&= \left(\frac{-\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \Delta b_1 - \|\Delta b_1\|_L \cdot \|\Delta b_0\|_L \cosh \theta \cdot \Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta} \right) \\
&= \left(-\frac{\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \Delta b_1}{\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta} - \frac{\|\Delta b_1\|_L \cdot \|\Delta b_0\|_L \cosh \theta \cdot \Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L^2 \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta} \right) \\
&= -\frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc \theta - \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \coth \theta
\end{aligned}$$

Burada Δb_0 ve Δb_1 spacelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı θ dır.

$|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L = \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise B vektörü lightlike vektördür. Bu durumda Δb_0 ve Δb_1 arasındaki açı 0° veya 180° olduğunda ortanormal bir çatı oluşmayacağından bu durum değerlendirmeye alınmayacaktır.

Teorem 4.2.1.2.2. $b_0, b_1, \dots, b_n$ kontrol noktaları spacelike vektörler olan ve Δb_i spacelike vektörlerden oluşan n . dereceden asli normal timelike olan spacelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasında eğrilik ve burulması; Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \quad \text{ve} \quad \tau|_{t=0} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2}$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \quad \text{ve} \quad \tau|_{t=0} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2}$$

denklemleri ile hesaplanır.

İspat: Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için başlangıç noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\left\| n(b_1 - b_0) \wedge_L [n(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}] \right\|_L}{\|n(b_1 - b_0)\|_L^2} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\left\| (b_1 - b_0) \wedge_L [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)] \right\|_L}{\|b_1 - b_0\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0)\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sin \theta}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta
\end{aligned}$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için başlangıç noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\left\| n(b_1 - b_0) \wedge_L [n(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}] \right\|_L}{\|n(b_1 - b_0)\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\left\| (b_1 - b_0) \wedge_L [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)] \right\|_L}{\|b_1 - b_0\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0)\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta
\end{aligned}$$

dir. Şimdi de başlangıç noktasındaki burulmasını bulalım.

$$\begin{aligned}
\tau|_{t=0} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \wedge_L \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{g\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}, \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \\
&= \frac{g\left(n\Delta b_0 \wedge_L n(n-1)(\Delta b_1 - \Delta b_0), n(n-1)(n-2)(\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) \right)}{\left\| n\Delta b_0 \wedge_L n(n-1)(\Delta b_1 - \Delta b_0) \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0), (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) \right)}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0) \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1, \Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0 \right)}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0) \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1, \Delta b_2 \right)}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0) \right\|_L^2} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L^2}
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.1.2.3. Asli normali timelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=0$ daki Serret Frenet çatısının türev formülleri Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned}
T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sin \theta \cdot N \\
N' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sin \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot B \\
B' &= -(n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot N
\end{aligned}$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot N$$

$$N' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot B$$

$$B' = -(n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot N$$

denklemleri ile hesaplanır.

İspat: Asli normal timelike olan spacelike eğriler için Serret-Frenet türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa v_1 & 0 \\ \kappa v_1 & 0 & \tau v_1 \\ 0 & \tau v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Bezier eğrisinin türev formülleri, $v_1 = n\|b_1 - b_0\|_L = n\|\Delta b_0\|_L$ olmak üzere Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için Frenet çatısının türev formülleri

$$T'|_{t=0} = \kappa v_1 \cdot N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sin \theta \cdot N$$

$$N'|_{t=0} = \kappa v_1 \cdot T + \tau v_1 \cdot B$$

$$= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot T - \frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} n \|\Delta b_0\|_L \cdot B$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sin \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot B$$

$$B'|_{t=0} = \tau v_1 \cdot N = -\frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} n \|\Delta b_0\|_L \cdot N$$

$$= -(n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot N$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}
T'|_{t=0} &= \kappa v_1 \cdot N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N \\
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot N \\
N'|_{t=0} &= \kappa v_1 \cdot T + \tau v_1 \cdot B \\
&= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot T - \frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} n \|\Delta b_0\|_L \cdot B \\
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot B \\
B'|_{t=0} &= \tau v_1 \cdot N = -\frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot n \|\Delta b_0\|_L \cdot N \\
&= -(n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot N
\end{aligned}$$

ile hesaplanır.

Teorem 4.2.1.2.4. $b^n(t)$ asli normalı timelike olan spacelike Bezier eğrisi için $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olsun. Δb_i ler aynı konide yer alan vektörler ise $t=1$ noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısının teğet vektörü

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\sqrt{g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})}}$$

eşitliği ile hesaplanır. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlıyorsa N asal normalı ve B binormalı

$$\begin{aligned}
B|_{t=1} &= -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi} \\
N|_{t=1} &= \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \cos ec \varphi - \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \cot \varphi
\end{aligned}$$

dir. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlıyorsa N asal normali ve B binormali

$$B|_{t=1} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}$$

$$N|_{t=1} = \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \cos ech \varphi + \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \coth \varphi$$

denklemleri ile elde edilir.

İspat: $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisi olduğu için teğet vektörü de spacelike olmalıdır. Bu yüzden $\|\Delta b_{n-1}\|_L = \sqrt{g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})}$ olur.

$$T|_{t=1} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\sqrt{g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})}}$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise spacelike açının iç çarpım ve dış çarpım özelliklerinin kullanılmasıyla $b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki binormal vektörü

$$B|_{t=1} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \bigg|_{t=1}$$

$$= \frac{n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]}{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L}$$

$$= \frac{n.\Delta b_{n-1} \wedge_L n.(n-1)[\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\left\| n.\Delta b_{n-1} \wedge_L n.(n-1)[\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \right\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \right\|_L}$$

$$= \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L}$$

$$= -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi}$$

ile hesaplanır. T spacelike, N timelike, B spacelike ise $N = B \wedge_L T$ alınacaktır. Burada Δb_{n-1} spacelike olduğu için $\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 = g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})$ dır. Asli normal vektörü

$$\begin{aligned}
N &= B \wedge_L T \\
&= -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} = -\frac{(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}) \wedge_L \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \\
&= -\left(\frac{-g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}) \cdot \Delta b_{n-2} + g(\Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1}) \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \right) \\
&= -\left(-\frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2} + \|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cos \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi} \right) \\
&= -\left(-\frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi} + \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cos \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi} \right) \\
&= \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \cos \varphi - \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \cot \varphi
\end{aligned}$$

dir. Burada φ açısı Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} arasındaki açıdır.

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise hiperbolik açının içi çarpım ve dış çarpım özelliklerinin kullanılmasıyla $b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki binormal vektörü

$$\begin{aligned}
B|_{t=1} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \Big|_{t=1} \\
&= \frac{n \cdot (b_n - b_{n-1}) \wedge_L n \cdot (n-1) [(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]}{\left\| n \cdot (b_n - b_{n-1}) \wedge_L n \cdot (n-1) [(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L} \\
&= \frac{n \cdot \Delta b_{n-1} \wedge_L n \cdot (n-1) [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\left\| n \cdot \Delta b_{n-1} \wedge_L n \cdot (n-1) [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \right\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \right\|_L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} = - \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} \\
&= - \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. T spacelike N timelike, B spacelike ise $N = B \wedge_L T$ alınacaktır. Burada Δb_{n-1} spacelike olduğu için $\|\Delta b_{n-1}\|^2 = g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})$ dir. Asli normal vektörü

$$\begin{aligned}
N &= B \wedge_L T \\
&= - \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \\
&= - \frac{(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}) \wedge_L \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \\
&= - \left(\frac{-g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}) \cdot \Delta b_{n-2} + g(\Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1}) \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \right) \\
&= - \left(- \frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2} - \|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cosh \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi} \right) \\
&= - \left(- \frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi} - \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cosh \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi} \right) \\
&= \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \operatorname{cosech} \varphi + \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \coth \varphi
\end{aligned}$$

denklemleri ile elde edilir. Burada Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} spacelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı φ dir. $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L = \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektör ise B vektörü lightlike vektördür. Bu durumda Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} arasındaki açı 0° veya 180° olduğunda ortanormal bir çatı oluşmayacağından bu durum değerlendirmeye alınmayacaktır.

Teorem 4.2.1.2.5. $b_0, b_1, \dots, b_n$ Kontrol noktaları spacelike vektörler olan ve Δb_i spacelike vektörlerden oluşan n . dereceden asli normal timelike olan spacelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasında eğrilik ve burulması Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \varphi \quad \text{ve} \quad \tau|_{t=1} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2}$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \quad \text{ve} \quad \tau|_{t=1} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2}$$

denklemleri ile hesaplanır.

İspat: Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için bitiş noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=1} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2 b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \Big|_{t=1} \\ &= \frac{\|n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]\|_L}{\|n.(b_n - b_{n-1})\|_L^3} \\ &= \frac{\|n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})]\|_L}{\|n.(b_n - b_{n-1})\|_L^3} \\ &= \frac{(n-1) \|\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2})\|_L}{n \|\Delta b_{n-1}\|_L^3} = \frac{(n-1) \|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L}{n \|\Delta b_{n-1}\|_L^3} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sin \varphi}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sin \varphi \end{aligned}$$

dir. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için bitiş noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa|_{t=1} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=1} \\
&= \frac{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \wedge_L n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L}{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \right\|_L^3} \\
&= \frac{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \wedge n.(n-1)[(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L}{\left\| n.(b_n - b_{n-1}) \right\|_L^3} \\
&= \frac{(n-1) \left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L}{n \left\| \Delta b_{n-1} \right\|_L^3} = \frac{(n-1) \left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L}{n \left\| \Delta b_{n-1} \right\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\left\| \Delta b_{n-1} \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_{n-2} \right\|_L \sinh \varphi}{\left\| \Delta b_{n-1} \right\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\left\| \Delta b_{n-2} \right\|_L}{\left\| \Delta b_{n-1} \right\|_L^2} \sinh \varphi.
\end{aligned}$$

Bitiş noktasındaki burulması

$$\begin{aligned}
\tau|_{t=1} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \wedge_L \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \bigg|_{t=1} \\
&= \frac{g \left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}, \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \\
&= \frac{g \left(n\Delta b_{n-1} \wedge_L n(n-1)(\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}), n(n-1)(n-2)(\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}) \right)}{\left\| n\Delta b_{n-1} \wedge_L n(n-1)(\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g \left(\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}), (\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}) \right)}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L^2} \\
&= -\frac{n-2}{n} \frac{g \left(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3} \right)}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n-2}{n} \frac{g(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2})\|_L^2} = -\frac{n-2}{n} \cdot \frac{-\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2}
\end{aligned}$$

denklemleri ile elde edilir.

Teorem 4.2.1.2.6. Asli normali timelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=1$ deki Serret-Frenet çatısının türev formülleri Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned}
T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi . N \\
N' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi . T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . B \\
B' &= (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . N
\end{aligned}$$

dir. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned}
T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi . N \\
N' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi . T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . B \\
B' &= (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . N
\end{aligned}$$

formülleri ile elde edilir.

İspat: Asli normali timelike olan spacelike eğriler için Serret-Frenet türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa v_2 & 0 \\ \kappa v_2 & 0 & \tau v_2 \\ 0 & \tau v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

dir. Burada $v_2 = n \|b_n - b_{n-1}\|_L = n \|\Delta b_{n-1}\|_L$ olmak üzere Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} T' &= \kappa v_2 \cdot N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sin \varphi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi \cdot N \\ N' &= \kappa v_2 \cdot T + \tau v_2 \cdot B \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sin \varphi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot T + \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot B \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi \cdot T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot B \\ B' &= \tau v_2 \cdot N = \frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N \\ &= (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot N \end{aligned}$$

dir. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} T' &= \kappa v_2 \cdot N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sinh \varphi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \cdot N \\ N' &= \kappa v_2 \cdot T + \tau v_2 \cdot B \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \sinh \varphi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot T + \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi . T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\| \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . B \\
B' &= \tau v_2 . N = \frac{(n-2)}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N \\
&= (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . N
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. Asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrilerinin Bishop çatısını inceleyelim:
 $\{T, N_1, N_2\}$ Asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrilerinin Bishop çatısı ortanormal çatı olduğu için

$$\begin{aligned}
g(T, T) &= 1 \quad g(N_1, N_1) = -1 \quad g(N_2, N_2) = 1 \\
g(T, N_1) &= 0 \quad g(T, N_2) = 0 \quad g(N_1, N_2) = 0
\end{aligned}$$

denklemleri sağlanır.

Teorem 4.2.1.2.7. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan asli normali timelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki spacelike Bishop çatısının eğrilikleri Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için

$$k_1|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cosh \psi \quad k_2|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \sinh \psi$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörleri için

$$k_1|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cosh \psi \quad k_2|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \sinh \psi$$

burada ψ açısı için $\tan \psi = \frac{k_2|_{t=0}}{k_1|_{t=0}}$ ve $\tau = \psi$ ' dir.

İspat: $k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \psi$, $k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \psi$ denklemlerinde yukarıda bulunan κ eğriliği ve Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü olan $v_1 = n \|b_1 - b_0\|_L = n \|\Delta b_0\|_L$ yerine yazıldığında başlangıç noktasındaki Bishop çatısı elde edilir.

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \cosh \psi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sin \theta \sinh \psi$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cosh \psi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \sinh \psi$$

formülleri ile hesaplanır.

Teorem 4.2.1.2.8. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü, $v_1 = n \|b_1 - b_0\|_L = n \|\Delta b_0\|_L$ olmak üzere asli normal timelike olan spacelike Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta [\cosh \psi \cdot N_1 - \sinh \psi \cdot N_2]$$

$$N_1' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta \cosh \psi \cdot T$$

$$N_2' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sin \theta \sinh \psi \cdot T$$

dir. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta [\cosh \psi . N_1 - \sinh \psi . N_2]$$

$$N'_1 = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \cosh \psi . T$$

$$N'_2 = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \sinh \psi . T$$

İspat: Asli normal timelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N'_1 \\ N'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v_1 & -k_2 v_1 \\ k_1 v_1 & 0 & 0 \\ k_2 v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere k_1, k_2 eğrilikleri ve Bezier eğrisinin türev formülü, $v_1 = n\|b_1 - b_0\|_L = n\|\Delta b_0\|_L$ yerine yazılırsa Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L < \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned} T' \Big|_{t=0} &= k_1 v_1 . N_1 - k_2 v_2 . N_2 \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sin \theta \cosh \psi . n \|\Delta b_0\|_L . N_1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sin \theta \sinh \psi . n \|\Delta b_0\|_L . N_2 \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta [\cosh \psi . N_1 - \sinh \psi . N_2] \end{aligned}$$

$$N'_1 \Big|_{t=0} = k_1 v_1 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sin \theta \cosh \psi . n \|\Delta b_0\|_L . T = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \cosh \psi . T$$

$$N'_2 \Big|_{t=0} = k_2 v_1 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sin \theta \sinh \psi . n \|\Delta b_0\|_L . T = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \sinh \psi . T$$

Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned}
T' \Big|_{t=0} &= k_1 v_1 . N_1 - k_2 v_2 . N_2 \\
&= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sinh \theta \cosh \psi . n \|\Delta b_0\|_L . N_1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sinh \theta \sinh \psi . n \|\Delta b_0\|_L . N_2 \\
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta [\cosh \psi . N_1 - \sinh \psi . N_2] \\
N'_1 \Big|_{t=0} &= k_1 v_1 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sinh \theta \cosh \psi . n \|\Delta b_0\|_L . T \\
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \cosh \psi . T \\
N'_2 \Big|_{t=0} &= k_2 v_1 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sinh \theta \sinh \psi . n \|\Delta b_0\|_L . T \\
&= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \sinh \psi . T
\end{aligned}$$

Asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisinin başlangıç noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.1.2.9. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan asli normali timelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki spacelike Bishop çatısının eğrilikleri Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L . \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1 \Big|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sin \varphi \cosh \phi \quad \text{ve} \quad k_2 \Big|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sin \varphi \sinh \phi$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L . \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1 \Big|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \varphi \cosh \phi \quad \text{ve} \quad k_2 \Big|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \varphi \sinh \phi$$

dir. Burada ϕ açısı için $\tanh \phi = \frac{k_2|_{t=1}}{k_1|_{t=1}}$ ve $\tau = \phi'$ dir.

İspat: $k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \phi$, $k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \phi$ denklemlerinde yukarıda bulunan κ eğriliği ve Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü olan $v_1 = n \|b_n - b_{n-1}\|_L = n \|\Delta b_{n-1}\|_L$ yerine yazıldığında bitiş noktasındaki Bishop çatısı elde edilir. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \phi \cosh \phi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sin \phi \sinh \phi$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cosh \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \phi \cosh \phi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sinh \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \phi \sinh \phi$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.2.10. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisinin $t=1$ noktasındaki türev formülü, $v_1 = n \|b_n - b_{n-1}\|_L = n \|\Delta b_{n-1}\|_L$ olmak üzere asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L < \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi [\cosh \phi \cdot N_1 - \sinh \phi \cdot N_2]$$

$$N_1' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi \cosh \phi.T$$

$$N_2' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \phi \sinh \phi.T$$

Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi [\cosh \phi.N_1 - \sinh \phi.N_2]$$

$$N_1' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi \cosh \phi.T$$

$$N_2' = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \phi \sinh \phi.T$$

türev denklemleri elde edilir.

İspat: Asli normal timelike olan $b^n(t)$ spacelike Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v_2 & -k_2 v_2 \\ k_1 v_2 & 0 & 0 \\ k_2 v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere k_1, k_2 eğrilikleri ve Bezier eğrisinin türev formülü, $v_2 = n\|b_n - b_{n-1}\|_L = n\|\Delta b_{n-1}\|_L$ yerine yazılırsa Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$\begin{aligned} T' \Big|_{t=1} &= k_1 v_2 . N_1 - k_2 v_2 . N_2 \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sin \phi \cosh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N_1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sin \phi \sinh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N_2 \end{aligned}$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi [\cosh \phi . N_1 - \sinh \phi . N_2]$$

$$N'_1|_{t=1} = k_1 v_2 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sin \varphi \cosh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . T$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi \cosh \phi . T$$

$$N'_2|_{t=1} = k_2 v_2 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sin \varphi \sinh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . T$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sin \varphi \sinh \phi . T$$

dir. Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} vektörleri $|g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2})|_L > \|\Delta b_{n-1}\|_L . \|\Delta b_{n-2}\|_L$ koşulunu sağlayan spacelike vektörler için

$$T'|_{t=1} = k_1 v_2 . N_1 - k_2 v_2 . N_2$$

$$= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \varphi \cosh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N_1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \varphi \sinh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N_2$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi [\cosh \phi . N_1 - \sinh \phi . N_2]$$

$$N'_1|_{t=1} = k_1 v_2 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \varphi \cosh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . T$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \cosh \phi . T$$

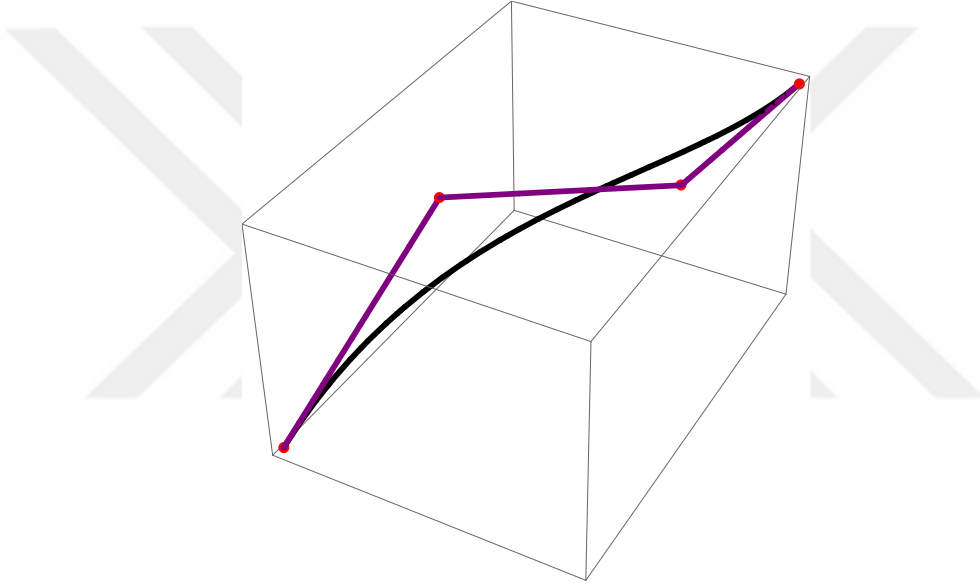
$$N'_2|_{t=1} = k_2 v_2 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \varphi \sinh \phi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . T$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \sinh \phi . T$$

denklemleri elde edilir.

Örnek 4.2.1.2.12 (Asli Normali Timelike Olan Spacelike Bezier Eğrisinin Uygulaması)

$b^n(t)$ kontrol noktaları $b_0 = (1, 2, 3)$, $b_1 = (2, 5, 6)$, $b_2 = (5, 7, 6)$ $b_3 = (6, 9, 7)$ olan kübik bir Bezier eğrisi olsun. O halde spacelike konveks çokgeni (teknesi) $\Delta b_0 = b_1 - b_0 = (1, 3, 3)$, $\Delta b_1 = b_2 - b_1 = (3, 2, 0)$ $\Delta b_2 = b_3 - b_2 = (1, 2, 1)$ vektörleri ile verilir. Buradaki vektörler $g(\Delta b_i, \Delta b_i) > 0$ koşulunu sağlayan her bir vektörden dolayı spacelike vektördür. Böylece $b^n(t)$ spacelike Bezier eğri olur. Şimdi asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısı ve eğriliklerini hesaplayacağız.



Şekil 4.3. MATHEMATICA programındaki çıktısı

$$\begin{aligned} b^n(t) &= \sum_{i=0}^3 B_i^n(t) \cdot b_i = (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t)t^2 b_2 + t^3 b_3 \\ &= (1-t)^3 (1, 2, 3) + 3(1-t)^2 t (2, 5, 6) + 3(1-t)t^2 (5, 7, 6) + t^3 (6, 9, 7) \\ &= \begin{pmatrix} (1-t)^3 + 6(1-t)^2 t + 15(1-t)t^2 + 6t^3, 2(1-t)^3 + 15(1-t)^2 t + 21(1-t)t^2 + 9t^3, \\ 3(1-t)^3 + 18(1-t)^2 t + 18(1-t)t^2 + 7t^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$b^n(t)$ nin $t = 0$ başlangıç noktasındaki birinci, ikinci, üçüncü türevleri

$$\left. \frac{db^n(t)}{dt} \right|_{t=0} = n. \Delta b_0 = 3(1, 3, 3) = (3, 9, 9)$$

$$\left. \frac{d^2 b^n(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = n.(n-1) (\Delta b_1 - \Delta b_0) = 3.(3-1) ((3, 2, 0) - (1, 3, 3)) = (12, -6, -18)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^3 b^n(t)}{dt^3} \right|_{t=0} &= n.(n-1).(n-2) (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) = 3.(3-1).(3-2) ((1, 2, 1) - 2(3, 2, 0) + (1, 3, 3)) \\ &= (-24, 6, 24) \end{aligned}$$

denklemleriyle hesaplanır. Burada Δb_0 in normu $\|\Delta b_0\|_L = \sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)} = \sqrt{(1^2 + 3^2 - 3^2)} = 1$ ile hesaplanır. Asli normal timelike olan spacelike Bezier eğrisinin başlangıç noktasındaki teğet vektörü

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{(1, 3, 3)}{1} = (1, 3, 3)$$

olarak elde edilir. Burada $g(T, T) = 1^2 + 3^2 - 3^2 = 1$ olduğundan dolayı T teğet vektörü spacelike vektördür. Δb_0 ve Δb_1 vektörleri $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L > \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L$ koşulunu sağladığı için $|g((1, 3, 3), (3, 2, 0))|_L > \|(1, 3, 3)\|_L \cdot \|(3, 2, 0)\|_L = 9 > \sqrt{13}$ elde edilir ve

$$g((1, 3, 3), (3, 2, 0)) = -\sqrt{1^2 + 3^2 - 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 - 0^2} \cosh \theta$$

iç çarpımından $9 = -\sqrt{13} \cosh \theta$ sonucu bulunur. Böylece $\cosh \theta = -\frac{9}{\sqrt{13}}$ elde edilir. Vektörel çarpımları

$$\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (6, -9, -7)$$

dır. Normu alındığında

$\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L = \sqrt{(6^2 + (-9)^2 - (-7)^2)} = \sqrt{68}$ böylece $\sinh \theta = \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{13}}$ olarak hesaplanır. Binormal vektörü $B|_{t=0} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{(6, -9, -7)}{\sqrt{68}} = \left(\frac{6}{\sqrt{68}}, -\frac{9}{\sqrt{68}}, -\frac{7}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{68}}(6, -9, -7)$ olarak elde edilir. Burada $g(B, B) = \left(\frac{6}{\sqrt{68}} \right)^2 + \left(-\frac{9}{\sqrt{68}} \right)^2 - \left(\frac{7}{\sqrt{68}} \right)^2 = 1$ olduğu için B binormal vektörünün spacelike vektör olduğu açıktır. Asli normal vektörü ise

$$N = B \wedge_L T = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ \frac{6}{\sqrt{68}} & -\frac{9}{\sqrt{68}} & -\frac{7}{\sqrt{68}} \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{68}}(6, 25, 27)$$

Yukarıda elde ettiğimiz asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısında yerine yazdığımızda aynı sonuçları elde ederiz.

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \coth \theta - \frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc h \theta \\ &= -\frac{(1, 3, 3)}{1} \cdot \frac{-\frac{9}{\sqrt{13}}}{\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{13}}} - \frac{(3, 2, 0)}{\sqrt{13}} \frac{1}{\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{13}}} = \frac{(9, 27, 27)}{\sqrt{68}} - \frac{(3, 2, 0)}{\sqrt{68}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{68}}(6, 25, 27) \end{aligned}$$

Böylece Asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısı

$T|_{t=0} = (1, 3, 3)$, $N|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{68}}(6, 25, 27)$, $B|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{68}}(6, -9, -7)$ olarak elde edilir. Ayrıca $b^n(t)$ nin eğriliği

$$\kappa|_{t=0} = \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\|(3,9,9) \wedge_L (-18,0,6)\|_L}{\|(3,9,9)\|_L^3} = \frac{\|108,-162,-126\|_L}{(3)^3} = \frac{18\sqrt{68}}{27} = \frac{2\sqrt{68}}{3} \quad (4.5)$$

dir. Asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrisinde elde ettiğimiz eğrilikte değerleri yerine yazıldığında

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta = \frac{3-1}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{1} \cdot \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{68}}{3} \quad (4.6)$$

(4.5) ve (4.6) denklemlerinden görüldüğü üzere iki farklı yöntemle elde edilen eğrinin eğriliği için aynı değerler bulunmuştur . $b^n(t)$ nin burulması ise

$$\begin{aligned} \tau|_{t=0} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \bigg|_{t=0} \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 12 & -6 & -18 \\ -24 & 6 & 24 \end{vmatrix}}{\|(3,9,9) \wedge_L (12,-6,-18)\|_L^2} = - \frac{18.12+18.18}{18^2 \cdot (\sqrt{68})^2} = - \frac{18.30}{18.18.68} = - \frac{5}{204} \end{aligned} \quad (4.7)$$

olarak elde eldir. Benzer şekilde asli normal timelike olan spacelike Bezier eğrilerinin başlangıç noktasında burulma değerleri yazdığımızda

$$\tau|_{t=0} = - \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} = - \frac{3-2}{3} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{(\sqrt{68})^2} = - \frac{5}{204} \quad (4.8)$$

dir. (4.7) ve (4.8) denklemlerinden görüldüğü üzere iki farklı yöntemle elde edilen eğrinin

eğriliği için aynı değerler bulunmuştur . $v_1 = \left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L = \|(3,9,9)\|_L = 3$ olmak üzere Serret-

Frenet türev formülü aşağıda hesaplanmıştır:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa v_1 & 0 \\ \kappa v_1 & 0 & \tau v_1 \\ 0 & \tau v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{68}}{3}.3 & 0 \\ \frac{2\sqrt{68}}{3}.3 & 0 & -\frac{5}{204}.3 \\ 0 & -\frac{5}{204}.3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{68} & 0 \\ 2\sqrt{68} & 0 & -\frac{5}{68} \\ 0 & -\frac{5}{68} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

4.2.2. Timelike Bezier Eğrileri

Birim hızlı olmayan timelike $b^n(t)$ Bezier eğrisini alalım. $b^n(t)$ Bezier eğrisi timelike ise T teğeti timelike olmalıdır. O halde T timelike, N ve B spacelike vektörleri için $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasında $\{T, N, B\}|_{t=0}$ ortonormal çatısı tanımlansın. Böylece

$$g(T, T) = -1 \quad g(N, N) = 1 \quad g(B, B) = 1$$

$$g(T, N) = 0 \quad g(T, B) = 0 \quad g(N, B) = 0$$

koşulu sağlanır. $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin hız vektörü olduğu için

$$v = \left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L = \sqrt{-g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right)}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin yay parametresinin uzunluğu

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right)} dt$$

formülü ile hesaplanır. Şimdi timelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısını elde edelim.

Teorem 4.2.2.1. Δb_i ve Δb_j timelike vektörler ise

$$g(\Delta b_i, \Delta b_j) = -\|\Delta b_i\|_L \|\Delta b_j\|_L \cosh \theta$$

$$\|\Delta b_i \wedge_L \Delta b_j\|_L = \|\Delta b_i\|_L \|\Delta b_j\|_L \sinh \theta$$

olur ve burada θ timelike açıdır (Lopez 2014) .

Teorem 4.2.2.2. $b^n(t)$ Bezier eğrisi timelike ise b_0 başlangıç noktasındaki teğet vektörü Δb_0 ve b_{n-1} bitiş noktasındaki teğet vektörü Δb_{n-1} timelike vektördür.

İspat: $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisi olduğu için $\forall t \in [0,1]$ için $g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right) < 0$ dir. O

halde Δb_0 timelike vektördür. $t=0$ başlangıç noktasındaki türev denkleminde $\left.\frac{db^n(t)}{dt}\right|_{t=0} = n.\Delta b_0$

elde edilir. Çünkü $g(n.\Delta b_0, n.\Delta b_0) < 0$ $n \in \mathbb{R}$, $g(\Delta b_0, \Delta b_0) < 0$ ve Δb_0 timelike vektördür. Benzer

şekilde $t=1$ bitiş noktasındaki $b^n(t)$ nin birinci türevi $\left.\frac{db^n(t)}{dt}\right|_{t=1} = n.\Delta b_{n-1}$ olarak elde edilir.

Çünkü $g(n.\Delta b_{n-1}, n.\Delta b_{n-1}) < 0$ $n \in \mathbb{R}$, $g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}) < 0$ dir. Böylece Δb_{n-1} teğet vektörünün bitiş noktasında timelike vektör olduğu elde edilir.

Tanım 4.2.2.3. n – boyutlu reel Minkowski uzayında $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ timelike noktalar kümesi verilsin. Bu X noktalarının oluşturduğu

$$SCH \{X\} = \left\{ \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

kümesine timelike konveks çokgeni (teknesi) denir. $b^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ parametrik denklemiyle verilen bir Bezier eğrisi $b^n(t)$ olmak üzere her $t \in [0,1]$ için $b(t) \in SCH \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ dir.

Teorem 4.2.2.4. $b^n(t)$ bir Bezier eğri olsun. Bütün $\Delta b_0 = b_1 - b_0, \Delta b_1 = b_2 - b_1, \dots, \Delta b_{n-1} = b_n - b_{n-1}$ vektörleri timelike vektörler ise $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$P_3^2(\Delta b_i) > P_1^2(\Delta b_i) + P_2^2(\Delta b_i)$$

koşulu sağlanır.

İspat: Δb_i ler timelike ise $g(\Delta b_i, \Delta b_i) < 0$ koşulu sağlanır ve $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$g((P_1(\Delta b_i), P_2(\Delta b_i), P_3(\Delta b_i)), (P_1(\Delta b_i), P_2(\Delta b_i), P_3(\Delta b_i))) < 0$$

$P_3^2(\Delta b_i) > P_1^2(\Delta b_i) + P_2^2(\Delta b_i)$ eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 4.2.2.5. $b^n(t)$ bir Bezier eğri olsun. Konveks çokgenin bütün vektörleri timelike ise $b^n(t)$ timelike eğridir.

İspat: $b^n(t)$ nin birinci türevi $t \in [0,1]$ için $\frac{db^n}{dt}(t) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_i \cdot B_i^{n-1}$ dir. Teorem(4.3.3)

kullanılarak $i \neq j$ için $\Delta b_i = (P_1(\Delta b_i), P_2(\Delta b_i), P_3(\Delta b_i))$ ve $\Delta b_j = (P_1(\Delta b_j), P_2(\Delta b_j), P_3(\Delta b_j))$ timelike vektörleri $P_3^2(\Delta b_i) > P_1^2(\Delta b_i) + P_2^2(\Delta b_i)$ ve $P_3^2(\Delta b_j) > P_1^2(\Delta b_j) + P_2^2(\Delta b_j)$ koşulu

sağlanır. $|P_3(\Delta b_i)| \cdot |P_3(\Delta b_j)| > |P_1(\Delta b_i)P_1(\Delta b_j) + P_2(\Delta b_i)P_2(\Delta b_j)|$ buradan her $t \in [0,1]$ için

$$g\left(\frac{db^n(t)}{dt}, \frac{db^n(t)}{dt}\right) < 0 \text{ olduğunu gösterir.}$$

Tanım 4.2.2.6. $b^n(t)$ bir timelike Bezier eğrisi, $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in R_1^3$ de timelike Bezier eğrisinin kontrol noktası olsun. $b^n(t)$ eğrisinin birinci mertebeden türevi hodograf olarak adlandırılır. Eğer bütün Δb_i ler aynı konideki timelike vektörler ise bu durumda $b^n(t)$ hodograf eğrisi aynı konide timelike eğrileridir.

Teorem 4.2.2.7. $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisi için $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olsun. Δb_i ler aynı konide yer alan vektörler ise $t=0$ noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T|_{t=0} &= \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\sqrt{-g(\Delta b_0, \Delta b_0)}} \\ N|_{t=0} &= \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \coth \theta - \frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc h \theta \\ B|_{t=0} &= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0\| \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta} \end{aligned}$$

denklemleri ile hesaplanır.

İspat: $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki Δb_0 vektörü timelike olduğu için $\|\Delta b_0\|_L = \sqrt{-g(\Delta b_0, \Delta b_0)}$ olur.

$$T|_{t=0} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{\Delta b_0}{\sqrt{-g(\Delta b_0, \Delta b_0)}}$$

$b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki binormal vektörü

$$\begin{aligned}
B|_{t=0} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{[n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}]}{\left\| [n(b_1 - b_0)] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\}] \right\|_L} \\
&= \frac{n.\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_1 - \Delta b_0\}]}{\left\| n.\Delta b_0 \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_1 - \Delta b_0\}] \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0]}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L [\Delta b_1 - \Delta b_0] \right\|_L} \\
&= \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 - \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_0 \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta}
\end{aligned}$$

denklemleri ile hesaplanır. Timelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin T teğeti timelike, N ve B spacelike vektörleri olduğu için $N = -T \wedge_L B$ vektörel çarpımı kullanılacaktır. Burada Δb_0 timelike olduğu için $\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 = -g(\Delta b_0, \Delta b_0)$ olarak alınacaktır. Δb_0 ve Δb_1 timelike vektörler olduğu için $g(\Delta b_0, \Delta b_1) = -\left\| \Delta b_0 \right\|_L \left\| \Delta b_1 \right\|_L \cosh \theta$ ve $\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L = \left\| \Delta b_0 \right\|_L \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta$ şartı sağlanmalıdır. Burada Δb_0 ve Δb_1 iki timelike vektör arasındaki açı θ olmak üzere

$$\begin{aligned}
N &= -T \wedge_L B \\
&= -\frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L} = -\frac{(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1) \wedge_L \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L} \\
&= -\left(\frac{-g(\Delta b_0, \Delta b_0) \cdot \Delta b_1 + g(\Delta b_1, \Delta b_0) \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L} \right) \\
&= -\left(\frac{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \Delta b_1 - \left\| \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L \cosh \theta \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta} \right) \\
&= -\left(\frac{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \Delta b_1}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta} - \frac{\left\| \Delta b_1 \right\|_L \cdot \left\| \Delta b_0 \right\|_L \cosh \theta \cdot \Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L^2 \cdot \left\| \Delta b_1 \right\|_L \sinh \theta} \right) \\
&= -\frac{\Delta b_1}{\left\| \Delta b_1 \right\|_L} \csc h \theta + \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L} \coth \theta = \frac{\Delta b_0}{\left\| \Delta b_0 \right\|_L} \coth \theta - \frac{\Delta b_1}{\left\| \Delta b_1 \right\|_L} \csc h \theta
\end{aligned}$$

dir. Burada θ açısı $\Delta b_0, \Delta b_1$ arasındaki açıdır.

Teorem 4.2.2.8. Kontrol noktaları timelike vektörler olan $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve Δb_i timelike vektörlerden oluşan n . dereceden timelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasında eğrilik ve burulması

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \text{ ve } \tau|_{t=0} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2}$$

denklemleri ile hesaplanır.

İspat: $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\left\| n(b_1 - b_0) \wedge_L \left[n(n-1) \{ (b_2 - b_1) - (b_1 - b_0) \} \right] \right\|_L}{\|n(b_1 - b_0)\|_L^3} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\left\| (b_1 - b_0) \wedge_L \left[(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0) \right] \right\|_L}{\|b_1 - b_0\|_L^3} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0)\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^3} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta}{\|\Delta b_0\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \end{aligned}$$

dir. Şimdi de başlangıç noktasındaki burulmasını bulalım.

$$\begin{aligned}
\tau|_{t=0} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \wedge_L \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{g\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}, \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \\
&= \frac{g\left(n\Delta b_0 \wedge_L n(n-1)(\Delta b_1 - \Delta b_0), n(n-1)(n-2)(\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) \right)}{\left\| n\Delta b_0 \wedge_L n(n-1)(\Delta b_1 - \Delta b_0) \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0), (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) \right)}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0) \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1, \Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0 \right)}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0) \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1, \Delta b_2 \right)}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L (\Delta b_1 - \Delta b_0) \right\|_L^2} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\left\| \Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 \right\|_L^2}
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.2.9. $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisi ve Δb_i ler timelike vektör olsun. O halde $t=0$ başlangıç noktasındaki Serret Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}
T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot N \\
N' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot B \\
B' &= (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge \Delta b_1\|_L^2} \cdot N
\end{aligned}$$

burada θ açısı Δb_0 ve Δb_1 arasındaki açıdır.

İspat: Timelike Eğriler için Frenet türev formülü üzerinde $\kappa|_{t=0}$, $\tau|_{t=0}$ ve Bezier eğrisinin türev formülü $v_1 = n\|b_1 - b_0\|_L = n\|\Delta b_0\|_L$ yerine yazıldığında timelike Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki Serret Frenet çatısının türev formülleri

$$T'|_{t=0} = \kappa v_1 \cdot N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cdot n\|\Delta b_0\|_L \cdot N = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot N$$

$$N'|_{t=0} = \kappa v_1 \cdot T + \tau v_1 \cdot B$$

$$= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cdot n\|\Delta b_0\|_L \cdot T - \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} n\|\Delta b_0\|_L \cdot B$$

$$= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \cdot \sinh \theta \cdot T - (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot B$$

$$B'|_{t=0} = -\tau v_1 \cdot N = -\left(-\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \right) \cdot n\|\Delta b_0\|_L \cdot N$$

$$= (n-2) \|\Delta b_0\|_L \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} \cdot N$$

denklemleri ile hesaplanır.

Teorem 4.2.2.10. $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisi için $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olsun. Δb_i ler aynı konide yer alan vektörler ise $t=1$ noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı

$$T|_{t=1} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\sqrt{-g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})}}$$

$$N|_{t=1} = \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \operatorname{csch} \varphi - \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \coth \varphi$$

$$B|_{t=1} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}$$

İspat: $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Δb_{n-1} vektörü timelike olduğu için

$$\|\Delta b_{n-1}\|_L = \sqrt{-g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})} \text{ olur.}$$

$$T|_{t=1} = \frac{\frac{db^n(t)}{dt}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\sqrt{-g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})}}$$

$b^n(t)$ birim hızlı olmayan Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki binormal vektörü

$$\begin{aligned} B|_{t=1} &= \frac{\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \Big|_{t=1} \\ &= \frac{[n(b_n - b_{n-1})] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})\}]}{\left\| [n(b_n - b_{n-1})] \wedge_L [n.(n-1)\{(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})\}] \right\|_L} \\ &= \frac{n.\Delta b_{n-1} \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}\}]}{\left\| n.\Delta b_{n-1} \wedge_L [n.(n-1)\{\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}\}] \right\|_L} \\ &= \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \right\|_L} \\ &= \frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L} \\ &= -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L} = -\frac{\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi} \end{aligned}$$

ile hesaplanır. Timelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin T teğeti timelike, N ve B spacelike vektörler olduğu için $N = -T \wedge_L B$ vektörel çarpımı kullanılacaktır. Burada Δb_{n-1} timelike vektör olduğu için $\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 = -g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1})$ olarak alınacaktır. Δb_{n-1} , Δb_{n-2} de timelike vektör olduğu için $g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}) = -\|\Delta b_{n-1}\|_L \|\Delta b_{n-2}\|_L \cosh \varphi$ ve $\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L = \|\Delta b_{n-1}\|_L \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi$ şartı sağlanmalıdır. Burada Δb_{n-1} , Δb_{n-2} iki timelike vektör arasındaki açı φ olmak üzere asal normali

$$\begin{aligned} N &= -T \wedge_L B \\ &= -\frac{[-\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}]}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L} \wedge_L \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} = \frac{(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}) \wedge_L \Delta b_{n-1}}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-g(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}) \cdot \Delta b_{n-2} + g(\Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1}) \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2} - \|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cosh \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi} - \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-1}\|_L \cosh \varphi \cdot \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2 \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}} \right) \\
&= \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|_L} \csc \varphi - \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \coth \varphi
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. Burada φ açısı Δb_{n-1} , Δb_{n-2} arasındaki açıdır.

Teorem 4.2.2.11. $b_0, b_1, \dots, b_n$ kontrol noktaları timelike vektörler olan ve Δb_i timelike vektörlerden oluşan n . dereceden timelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasında eğrilik ve burulması

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \quad \tau|_{t=1} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2}$$

formülleri ile hesaplanır.

İspat: Timelike $b^n(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa|_{t=1} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2 b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \Big|_{t=1} \\
&= \frac{\left\| n(b_n - b_{n-1}) \wedge_L \left[n(n-1) \{ (b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2}) \} \right] \right\|_L}{\|n(b_n - b_{n-1})\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\left\| (b_n - b_{n-1}) \wedge_L [(b_n - b_{n-1}) - (b_{n-1} - b_{n-2})] \right\|_L}{\|b_n - b_{n-1}\|_L^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2})\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^3} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot \|\Delta b_{n-2}\|_L \sinh \varphi}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi
\end{aligned}$$

dir. Bitiş noktasındaki burulması

$$\begin{aligned}
\tau|_{t=0} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \wedge_L \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \bigg|_{t=1} = \frac{g\left(\frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2}, \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L^2} \\
&= \frac{g\left(n\Delta b_{n-1} \wedge_L n(n-1)(\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}), n(n-1)(n-2)(\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}) \right)}{\left\| n\Delta b_{n-1} \wedge_L n(n-1)(\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}), (\Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3}) \right)}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L^2} \\
&= -\frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1} - 2\Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-3} \right)}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L^2} \\
&= -\frac{n-2}{n} \frac{g\left(\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3} \right)}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) \right\|_L^2} = -\frac{n-2}{n} \frac{-\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L^2}
\end{aligned}$$

olarak ispatlanır.

Teorem 4.2.2.12. $b^n(t)$ timelike Bezier eğri ve Δb_i ler timelike vektör olsun. O halde $t=1$ bitiş noktasındaki Serret Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}
T' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \cdot \sinh \varphi \cdot N \\
N' &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \cdot \sinh \varphi \cdot T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\left\| \Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2} \right\|_L^2} \cdot B
\end{aligned}$$

$$B' = -(n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . N$$

dir. Burada φ açısı Δb_{n-1} ve Δb_{n-2} arasındaki açıdır.

İspat: Timelike eğriler için Frenet türev formülü üzerinde $\kappa|_{t=1}$, $\tau|_{t=1}$ ve hız vektörü $v_2 = n \|b_n - b_{n-1}\|_L = n \|\Delta b_{n-1}\|_L$ yerine yazıldığında timelike Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Serret Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} T'|_{t=1} &= \kappa v_2 . N = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \varphi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} . \sinh \varphi . N \\ N'|_{t=1} &= \kappa v_2 . T + \tau v_2 . B \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} . \sinh \varphi . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . T + \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} n \|\Delta b_{n-1}\|_L . B \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi . T + (n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . B \\ B'|_{t=0} &= -\tau v_1 . N = - \left(\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} \right) . n \|\Delta b_{n-1}\|_L . N \\ &= -(n-2) \|\Delta b_{n-1}\|_L \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \wedge_L \Delta b_{n-2}\|_L^2} . N \end{aligned}$$

Şimdi de timelike Bezier eğrilerinin Bishop çatılarını elde edelim.

Teorem 4.2.2.13. Timelike Bezier eğrisinin $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısında T teğeti timelike ve N_1 ve N_2 spacelike olduğu için

$$g(T, T) = -1 \quad g(N_1, N_1) = 1 \quad g(N_2, N_2) = 1$$

$$g(T, N_1) = 0 \quad g(T, N_2) = 0 \quad g(N_1, N_2) = 0$$

koşulları sağlanır. $b_i \in R^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki timelike Bishop çatısının eğrilikleri

$$k_1|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cos \psi \quad k_2|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \sin \psi$$

dir, burada $\tan \psi = \frac{k_2|_{t=0}}{k_1|_{t=0}}$ ve $\psi = \arctan \left(\frac{k_2}{k_1} \right)_{t=0}$ dir. Ayrıca ψ açısı $\psi' = \tau|_{t=0}$ denkleminde elde edilir.

İspat: $k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cos \psi$, $k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sin \psi$ denklemlerinde yukarıda bulunan κ eğriliği ve Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü olan $v_1 = n\|b_1 - b_0\|_L = n\|\Delta b_0\|_L$ yerine yazıldığında başlangıç noktasındaki Bishop çatısı

$$k_1|_{t=0} = \kappa \cdot \cos \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \cos \psi$$

$$k_2|_{t=0} = \kappa \cdot \sin \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} \cdot \sinh \theta \sin \psi$$

denklemleri ile elde edilir.

Teorem 4.2.2.14. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasındaki türev formülü, $v_1 = n\|b_1 - b_0\|_L = n\|\Delta b_0\|_L$ olmak üzere timelike Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri

$$T' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta [\cos \psi \cdot N_1 + \sin \psi \cdot N_2]$$

$$N_1' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \cos \psi \cdot T$$

$$N_2' = (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \sin \psi \cdot T$$

denklemleri ile elde edilir.

İspat: $b^n(t)$ timelike eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v_1 & k_2 v_2 \\ k_1 v_1 & 0 & 0 \\ k_2 v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere k_1, k_2 eğrilikleri ve Bezier eğrisinin türev formülleri, $v_1 = n \|b_1 - b_0\|_L = n \|\Delta b_0\|_L$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T' \Big|_{t=0} &= k_1 v_1 . N_1 + k_2 v_2 . N_2 \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sinh \theta \cos \psi . n \|\Delta b_0\|_L . N_1 + \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sinh \theta \sin \psi . n \|\Delta b_0\|_L . N_2 \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta [\cos \psi . N_1 + \sin \psi . N_2] \\ N_1' \Big|_{t=0} &= k_1 v_1 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sinh \theta \cos \psi . n \|\Delta b_0\|_L . T \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \cos \psi . T \\ N_2' \Big|_{t=0} &= k_2 v_2 . T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L^2} . \sinh \theta \sin \psi . n \|\Delta b_0\|_L . T \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_1\|_L}{\|\Delta b_0\|_L} \sinh \theta \sin \psi . T \end{aligned}$$

başlangıç noktasındaki timelike Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.2.15. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki timelike Bishop çatısının eğrilikleri

$$k_1|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \cos \phi \quad k_2|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \sin \phi$$

dir, burada $\tan \phi = \frac{k_2|_{t=1}}{k_1|_{t=1}}$ ve $\phi = \arctan \left(\frac{k_2}{k_1} \right)_{t=1}$ dir. Ayrıca ϕ açısı $\phi' = \tau|_{t=1}$ denkleminde elde edilir.

İspat: $k_1|_{t=1} = \kappa \cdot \cos \phi$, $k_2|_{t=1} = \kappa \cdot \sin \phi$ denklemlerinde yukarıda bulunan κ eğriliği ve Bezier eğrisinin $t=1$ noktasındaki türev formülü olan $v_2 = n\|b_n - b_{n-1}\|_L = n\|\Delta b_{n-1}\|_L$ yerine yazıldığında bitiş noktasındaki Bishop çatısı

$$k_1|_{t=1} = \kappa \cdot \cos \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \cos \phi$$

$$k_2|_{t=1} = \kappa \cdot \sin \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \sin \phi$$

denklemleri ile elde edilir.

Teorem 4.2.2.16. $b_i \in R_1^3$ kontrol noktaları olmak üzere birim hızlı olmayan $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin $t=1$ noktasındaki türev formülü, $v_2 = n\|b_n - b_{n-1}\|_L = n\|\Delta b_{n-1}\|_L$ olmak üzere timelike Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri

$$T'|_{t=1} = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi [\cos \phi \cdot N_1 + \sin \phi \cdot N_2]$$

$$N_1'|_{t=1} = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \cos \phi \cdot T$$

$$N_2'|_{t=1} = (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \sin \phi \cdot T$$

denklemleri ile verilir.

İspat: $b^n(t)$ timelike eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Bishop çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N'_1 \\ N'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v_2 & k_2 v_2 \\ k_1 v_2 & 0 & 0 \\ k_2 v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere k_1, k_2 eğrilikleri ve Bezier eğrisinin türev formülleri, $v_2 = n \|b_n - b_{n-1}\|_L = n \|\Delta b_{n-1}\|_L$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T' \Big|_{t=1} &= k_1 v_1 \cdot N_1 + k_2 v_2 \cdot N_2 \\ &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \cos \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N_1 + \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \sin \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot N_2 \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi (\cos \phi \cdot N_1 + \sin \phi \cdot N_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'_1 \Big|_{t=1} &= k_1 v_2 \cdot T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \cos \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot T \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \cos \phi \cdot T \end{aligned}$$

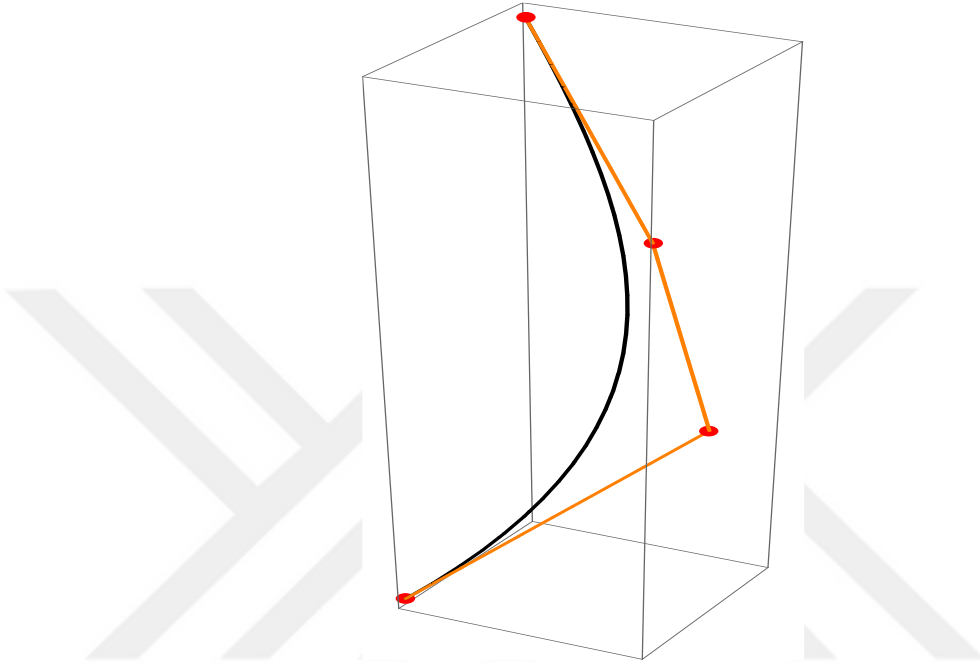
$$\begin{aligned} N'_2 \Big|_{t=1} &= k_2 v_2 \cdot T = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L^2} \cdot \sinh \varphi \sin \phi \cdot n \|\Delta b_{n-1}\|_L \cdot T \\ &= (n-1) \frac{\|\Delta b_{n-2}\|_L}{\|\Delta b_{n-1}\|_L} \sinh \varphi \sin \phi \cdot T \end{aligned}$$

bitiş noktasındaki timelike Bezier eğrisine ait Bishop çatısının türev formülleri elde edilmiş olur.

Örnek 4.2.2.17. Timelike Bezier Eğrisinin Uygulaması

$b^n(t)$ kontrol noktaları $b_0 = (2, 1, 3)$, $b_1 = (4, 2, 6)$, $b_2 = (3, 3, 8)$, $b_3 = (2, 3, 11)$ olan kübik bir Bezier eğrisi olsun. O halde $\Delta b_0 = b_1 - b_0 = (2, 1, 3)$, $\Delta b_1 = b_2 - b_1 = (-1, 1, 2)$,

$\Delta b_2 = b_3 - b_2 = (-1, 0, 3)$ konveks çokgenin (teknenin) vektörleri $g(\Delta b_i, \Delta b_i) < 0$ koşulunu sağladığı için timelike vektördür. O halde $b^n(t)$ Bezier eğrisi timelike olur. Şimdi $b^n(t)$ timelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısı ve eğriliklerini hesaplayalım. Timelike Bezier eğrisi



Şekil 4.4. MATHEMATICA programındaki çıktısı

$$\begin{aligned}
 b^n(t) &= \sum_{i=0}^3 B_i^n(t) = (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t)t^2 b_2 + t^3 b_3 \\
 &= (1-t)^3 (2, 1, 3) + 3(1-t)^2 t (4, 2, 6) + 3(1-t)t^2 (3, 3, 8) + t^3 (2, 3, 11) \\
 &= \begin{pmatrix} 2(1-t)^3 + 12(1-t)^2 t + 9(1-t)t^2 + 2t^3, (1-t)^3 + 6(1-t)^2 t + 9(1-t)t^2 + 3t^3, \\ 3(1-t)^3 + 18(1-t)^2 t + 24(1-t)t^2 + 11t^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$b^n(t)$ nin $t=0$ başlangıç noktasındaki birinci, ikinci, üçüncü türevleri

$$\left. \frac{db^n(t)}{dt} \right|_{t=0} = n \cdot \Delta b_0 = 3(2, 1, 3) = (6, 3, 9)$$

$$\left. \frac{d^2 b^n(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = n \cdot (n-1) (\Delta b_1 - \Delta b_0) = 3 \cdot (3-1) ((-1, 1, 2) - (2, 1, 3)) = (-18, 0, -6)$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^3b^n(t)}{dt^3}\right|_{t=0} &= n.(n-1).(n-2) (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) = 3.(3-1).(3-2) ((-1,0,3) - 2(-1,1,2) + (2,1,3)) \\ &= (18, -6, 12)\end{aligned}$$

denklemleri ile hesaplanır. Burada Δb_0 ın normu

$$\|\Delta b_0\|_L = \sqrt{g(\Delta b_0, \Delta b_0)} = \sqrt{-(2^2 + 1^2 - 3^2)} = 2$$

ile hesaplanır. Timelike Bezier eğrisinin başlangıç noktasındaki teğet vektörü

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} = \frac{(2,1,3)}{2} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

elde edilir. Burada $g(T, T) = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -1$ olduğundan dolayı T teğet vektörü timelike vektördür. Şimdi $|g(\Delta b_0, \Delta b_1)|_L = -\|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \cosh \theta$ ifadesinden Δb_0 ve Δb_1 arasındaki θ açısını hesaplayacağız.

$$|g((2,1,3), (-1,1,2))|_L = -\|(2,1,3)\|_L \cdot \|(-1,1,2)\|_L \cosh \theta$$

$$|g((2,1,3), (-1,1,2))|_L = -\sqrt{-(2^2 + 1^2 - 3^2)} \sqrt{-((-1)^2 + 1^2 - 2^2)} \cosh \theta$$

$$|-2 + 1 - 6| = 2 \cdot \sqrt{2} \cosh \theta$$

buradan $\cosh \theta = \frac{7}{2\sqrt{2}}$ elde edilir. Vektörel çarpımı

$$\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1 = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, 7, 3)$$

dır. Ayrıca vektörel çarpımın normu $\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L = \sqrt{1^2 + 7^2 - 3^2} = \sqrt{41}$ olarak hesaplanır. Öte yandan vektörel çarpımın normu $\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L = \|\Delta b_0\|_L \cdot \|\Delta b_1\|_L \sinh \theta$ ifadesinden

$$\sqrt{41} = \|(2,1,3)\|_L \cdot \|(-1,1,2)\|_L \sinh \theta \sqrt{41} = 2 \cdot \sqrt{2} \sinh \theta$$

Burada $\sinh \theta = \frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{2}}$ olarak bulunur. Timelike Bezier eğrisinin Binormal vektörü

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L} = \frac{(1, 7, 3)}{\sqrt{41}} = \frac{1}{\sqrt{41}}(1, 7, 3)$$

olarak elde edilir. Burada $g(B, B) = \left(\frac{1}{\sqrt{41}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{41}}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{41}}\right)^2 = 1$ olduğundan dolayı B binormal vektörünün spacelike vektör olduğu açıktır. Asli normal vektörü ise

$$N = -B \wedge_L T = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ \frac{1}{\sqrt{41}} & \frac{7}{\sqrt{41}} & \frac{3}{\sqrt{41}} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{41}}(18, 3, 13)$$

dir. Yukarıda elde ettiğimiz timelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısında yerine yazıldığında aynı sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned} N &= \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|_L} \coth \theta - \frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|_L} \csc h \theta \\ &= \frac{(2, 1, 3)}{2} \cdot \frac{\frac{7}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{2}}} - \frac{(-1, 1, 2)}{\sqrt{2}} \frac{1}{\frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{41}}(18, 3, 13) \end{aligned}$$

böylece timelike Bezier eğrisinin Serret-Frenet çatısı $T|_{t=0} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $N|_{t=0} = \frac{1}{2\sqrt{41}}(18, 3, 13)$

ve $B|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{41}}(1, 7, 3)$ olarak elde edilir. Ayrıca $b^n(t)$ nin eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L^3} \bigg|_{t=0} = \frac{\|(6, 3, 9) \wedge_L (-18, 0, -6)\|_L}{\|(6, 3, 9)\|_L^3} \\ &= \frac{\|18, 126, 54\|_L}{(6)^3} = \frac{18\sqrt{41}}{6^3} = \frac{\sqrt{41}}{12} \end{aligned} \quad (4.9)$$

timelike Bezier eğrisinde elde ettiğimiz eğrilikte değerleri yerine yazıldığında

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^2} \cdot \sinh \theta = \frac{3-1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{41}}{12} \quad (4.10)$$

eşitliği elde edilir. (4.9) ve (4.10) denklemlerinden görüldüğü üzere iki farklı yöntemle elde edilen eğrinin eğriliği için aynı değerler bulunmuştur. $b^n(t)$ nin burulması ise

$$\begin{aligned} \tau|_{t=0} &= \frac{\left(\frac{db^n(t)}{dt} \quad \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \quad \frac{d^3b^n(t)}{dt^3} \right)}{\left\| \frac{db^n(t)}{dt} \wedge_L \frac{d^2b^n(t)}{dt^2} \right\|_L} \bigg|_{t=0} = - \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 \\ -18 & 0 & -6 \\ 18 & -6 & 12 \end{vmatrix}}{\|(6, 3, 9) \wedge_L (-18, 0, -6)\|_L^2} \\ &= - \frac{60.18}{18^2 \cdot (\sqrt{41})^2} = - \frac{60.18}{18.18.41} = - \frac{10}{123} \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde eldir. Benzer şekilde timelike Bezier eğrilerinin başlangıç noktasında burulma değeri yazıldığında

$$\tau|_{t=0} = - \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \wedge_L \Delta b_1\|_L^2} = - \frac{(3-2)}{3} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{(\sqrt{41})^2} = - \frac{10}{123} \quad (4.12)$$

sonucu elde edilir. (4.11) ve (4.12) denklemlerinden görüldüğü üzere iki farklı yöntemle elde

ettiğimiz eğrinin burulması için aynı değerler bulunur. $v_1 = \left\| \frac{db^n(t)}{dt} \right\|_L = \|(6, 3, 9)\|_L = 6$ olmak

üzere Serret-Frenet türev formülü aşağıda hesaplanmıştır:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa v_1 & 0 \\ \kappa v_1 & 0 & \tau v_1 \\ 0 & -\tau v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{41}}{12}.6 & 0 \\ \frac{\sqrt{41}}{12}.6 & 0 & -\frac{10}{123}.6 \\ 0 & \frac{10}{123}.6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{41}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{41}}{2} & 0 & -\frac{20}{41} \\ 0 & \frac{20}{41} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

4.3. Minkowski Uzayında Dejenere Olmayan Bezier Yüzeyleri

(3.19) denkleminde verilen Bezier yüzeylerinde b_{ij} kontrol noktaları Minkowski uzayında alınarak dejenere olmayan metrikle tanımlı Minkowski iç çarpımı kullanıldığında Minkowski uzayında dejenere olmayan Minkowski Bezier yüzeyleri tanımlanmış olur. Dejenere olmayan metrikle tanımlı Minkowski Bezier yüzeyleri için $b(U)$ nun her noktasında teğet düzleminin bir yerel bazı

$B = \{b_u, b_v\}$ olsun. B bazlarına göre birinci temel formun matris gösterimi $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ dir. Burada

$E = g(b_u, b_u)$, $F = g(b_u, b_v)$, $G = g(b_v, b_v)$ dir. $W = EG - F^2$ ile gösterilsin. Eğer

$W = EG - F^2 > 0$ ise yüzey spacelike, $W = EG - F^2 < 0$ ise yüzey timelike yüzeydir. Birim

normal vektör alanı $N = \frac{b_u \wedge_L b_v}{\|b_u \wedge_L b_v\|}$ dir. Timelike ve spacelike yüzeylerinin aynı anda temsil

edilmesi için $g(N, N)$ iç çarpımı ε ile eşitlenir. Yani $g(N, N) = \varepsilon$ olarak verildiğinde $\varepsilon = 1$ iken yüzey timelike, $\varepsilon = -1$ iken yüzey spacelike olur. Yani Bezier yüzeyi timelike Bezier yüzeyi ise teğet düzlemi timelike olur. Bu durumda N normali spacelike olur ve $g(N, N) = \varepsilon = 1$ dir. Eğer yüzey spacelike Bezier yüzeyi ise teğet düzlemi spacelike vektördür. Bu durumda N normali

timelike vektördür. Yani $g(N, N) = \varepsilon = -1$ dir. Burada $\|b_u \wedge_L b_v\| = \sqrt{-\varepsilon(E.G - F^2)} = \sqrt{-\varepsilon.W}$ dir.

B ye göre $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ ikinci temel formun matris gösterimi olsun. Yani

$$e = -g(Ab_u, b_u) = -g(N_u, b_u) = g(N, b_{uu})$$

$$f = -g(Ab_u, b_v) = -g(N_v, b_u) = -g(b_v, N_u) = g(N, b_{uv})$$

$$g = -g(Ab_v, b_v) = -g(N_v, b_v) = g(N, b_{vv})$$

dir. Burada A şekil operatörüdür. Öyleyse $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ dir (Lopez 2014, Ugail, Marquez ve Yılmaz 2012).

Tanım 4.3.1. $b(u, v)$ Minkowski uzayında dejenere olmayan bir Bezier yüzeyinin $b_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ parametrik gösteriminin u ve v türünden kısmi türevlerinin çarpımı

$$b_u(u, v) \wedge_L b_v(u, v) = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m x_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m y_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m z_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} x_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} y_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} z_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \end{vmatrix}$$

$$= e_1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m z_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} y_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m y_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} z_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \right)$$

$$+ e_2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m x_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} z_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m x_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m z_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \right)$$

$$- e_3 \cdot \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} x_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m y_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m x_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} y_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \right)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.3.2. Sırasıyla timelike ve spacelike Bezier yüzeylerinin maksimum ve minimum noktasındaki birinci mertebeden türevleri sırasıyla timelike ve spacelike vektörlerdir. Kısmi türevleri ise

$$\text{i) } b_u(0,0) = n.(b_{10} - b_{00}) = b_{00}^{10}, \quad b_u(1,1) = n.(b_{nm} - b_{(n-1)m}) = b_{(n-1)m}^{(1,0)}$$

$$\text{ii) } b_v(0,0) = m.(b_{01} - b_{00}) = b_{00}^{(0,1)}, \quad b_v(1,1) = m.(b_{nm} - b_{n(m-1)}) = b_{n(m-1)}^{(0,1)}$$

olarak indislenir.

Teorem 4.3.3. Minkowski uzayında dejenere olmayan metrikle tanımlı Bezier yüzeyinin $(u,v) = (0,0)$ noktasındaki ikinci mertebeden türevleri

$$\text{i) } b_{uu}(0,0) = (n-1)(b_{10}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)})$$

$$\text{ii) } b_{uv}(0,0) = m(b_{01}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)})$$

$$\text{iii) } b_{vv}(0,0) = (m-1)(b_{01}^{(0,1)} - b_{00}^{(0,1)})$$

denklemleri ile ifade edilir.

$$\text{İspat: i) } b_{uu}(0,0) = n.(n-1)(b_{20} - 2b_{10} + b_{00})$$

$$= n.(n-1)\{(b_{20} - b_{10}) - (b_{10} - b_{00})\}$$

$$= n.(n-1)\left\{\frac{1}{n}b_{10}^{(1,0)} - \frac{1}{n}b_{00}^{(1,0)}\right\}$$

$$= (n-1)(b_{10}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)})$$

$$\text{ii) } b_{uv}(0,0) = n.m(b_{11} - b_{01} - b_{10} + b_{00})$$

$$= n.m\{(b_{11} - b_{01}) - (b_{10} - b_{00})\}$$

$$= n.m\left\{\frac{1}{n}b_{01}^{(1,0)} - \frac{1}{n}b_{00}^{(1,0)}\right\}$$

$$= m(b_{01}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)})$$

$$\text{iii) } b_{vv}(0,0) = m.(m-1)(b_{02} - 2b_{01} + b_{00})$$

$$\begin{aligned}
&= m.(m-1)\{(b_{02}-b_{01})-(b_{01}-b_{00})\} \\
&= m.(m-1)\left\{\frac{1}{m}b_{01}^{(0,1)}-\frac{1}{m}b_{00}^{(0,1)}\right\} \\
&= (m-1)(b_{01}^{(0,1)}-b_{00}^{(0,1)})
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.4. Minkowski uzayında dejenere olmayan Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki birinci temel formunun katsayıları $E = g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)})$, $F = g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)})$, $G = g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)})$ denklemleri ile ifade edilir.

İspat: $E = g(b_u(0,0), b_u(0,0)) = g(n.(b_{10}-b_{00}), n.(b_{10}-b_{00}))$

$$\begin{aligned}
&= g(n.(x_{10}-x_{00}, y_{10}-y_{00}, z_{10}-z_{00}), n.g(x_{10}-x_{00}, y_{10}-y_{00}, z_{10}-z_{00})) \\
&= n^2 \cdot \left[(x_{10}-x_{00})^2 + (y_{10}-y_{00})^2 - (z_{10}-z_{00})^2 \right] \\
&= \left((x_{00}^{(1,0)})^2 + (y_{00}^{(1,0)})^2 - (z_{00}^{(1,0)})^2 \right) = g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)})
\end{aligned}$$

$F = g(b_u(0,0), b_v(0,0)) = g(n.(b_{10}-b_{00}), m.(b_{01}-b_{00}))$

$$\begin{aligned}
&= g(n.(x_{10}-x_{00}, y_{10}-y_{00}, z_{10}-z_{00}), m.(x_{01}-x_{00}, y_{01}-y_{00}, z_{01}-z_{00})) \\
&= n.m \left((x_{10}-x_{00}).(x_{01}-x_{00}) + (y_{10}-y_{00}).(y_{01}-y_{00}) - (z_{10}-z_{00}).(z_{01}-z_{00}) \right) \\
&= \left(x_{00}^{(1,0)}.x_{00}^{(0,1)} + y_{00}^{(1,0)}.y_{00}^{(0,1)} - z_{00}^{(1,0)}.z_{00}^{(0,1)} \right) = g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)})
\end{aligned}$$

$G = g(b_v(0,0), b_v(0,0)) = g(m.(b_{01}-b_{00}), m.(b_{01}-b_{00}))$

$$\begin{aligned}
&= g(m.(x_{01}-x_{00}, y_{01}-y_{00}, z_{01}-z_{00}), m.(x_{01}-x_{00}, y_{01}-y_{00}, z_{01}-z_{00})) \\
&= m^2 \cdot \left((x_{01}-x_{00})^2 + (y_{01}-y_{00})^2 - (z_{01}-z_{00})^2 \right) \\
&= \left((x_{00}^{(0,1)})^2 + (y_{00}^{(0,1)})^2 - (z_{00}^{(0,1)})^2 \right) = g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)})
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.5. Minkowski uzayında $b(u, v)$ dejenere olmayan Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki birinci temel formu

$$ds^2 = g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) d_u^2 + 2g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) d_u d_v + g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) d_v^2$$

denklemleri ile verilir.

Teorem 4.3.6. Minkowski uzayında dejenere olmayan Bezier yüzeyinin N normal vektörü ile ikinci temel formun e, f, g katsayılarının $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki değerlerinin kontrol noktası türünden ifadeleri

$$\text{i) } N(0, 0) = \frac{b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L}$$

$$\text{ii) } e = (n-1) \cdot \frac{g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}$$

$$\text{iii) } f = m \cdot \frac{g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}$$

$$\text{iv) } g = (m-1) \cdot \frac{g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}$$

ile verilir. Burada $\lambda_1 = (y_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} - y_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)})$, $\lambda_2 = (x_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)})$,

$\lambda_3 = (x_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} y_{00}^{(1,0)})$ ve $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ olarak alınır.

$$\text{İspat: i) } N = (u, v) = \frac{b_u(u, v) \wedge_L b_v(u, v)}{\|b_u(u, v) \wedge_L b_v(u, v)\|_L}$$

$$N(0, 0) = \frac{b_u(0, 0) \wedge_L b_v(0, 0)}{\|b_u(0, 0) \wedge_L b_v(0, 0)\|_L} = \frac{b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L}$$

$$\text{ii) } e = g(b_{uu}(0, 0), N(0, 0))$$

$$\begin{aligned}
&= g \left((n-1) \cdot (b_{10}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)}), \frac{b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} \right) = \frac{(n-1)}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} g \left((b_{10}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)}), (b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}) \right) \\
&= \frac{(n-1)}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} \left(g \left(b_{10}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)} \right) \right) = \frac{(n-1)}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} \left(-\det \left(b_{10}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)} \right) \right) \\
&= (n-1) \cdot \frac{x_{10}^{(1,0)} \left(y_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} - y_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} \right) + y_{10}^{(1,0)} \left(x_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} \right) - z_{10}^{(1,0)} \left(x_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} y_{00}^{(1,0)} \right)}{\sqrt{\left(y_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} - y_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} \right)^2 + \left(x_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} \right)^2 - \left(x_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} y_{00}^{(1,0)} \right)^2}} \\
&= (n-1) \cdot \frac{x_{10}^{(1,0)} \lambda_1 + y_{10}^{(1,0)} \lambda_2 - z_{10}^{(1,0)} \lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} = (n-1) \cdot \frac{g \left((x_{10}^{(1,0)}, y_{10}^{(1,0)}, z_{10}^{(1,0)}), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right)_L}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} \\
&= (n-1) \cdot \frac{g \left(b_{10}^{(1,0)}, \lambda \right)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}
\end{aligned}$$

iii) $f = g(b_{uv}(0,0), N(0,0))$

$$\begin{aligned}
&= g \left(m \cdot (b_{01}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)}), \frac{b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} \right) = \frac{m}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} g \left((b_{01}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)}), (b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}) \right) \\
&= \frac{m}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} \left(g \left(b_{01}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)} \right) \right) = \frac{m}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} \left(-\det \left(b_{01}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)} \right) \right) \\
&= m \cdot \frac{x_{01}^{(1,0)} \left(y_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} - y_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} \right) + y_{01}^{(1,0)} \left(x_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} \right) - z_{01}^{(1,0)} \left(x_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} y_{00}^{(1,0)} \right)}{\sqrt{\left(y_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} - y_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} \right)^2 + \left(x_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} \right)^2 - \left(x_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} y_{00}^{(1,0)} \right)^2}} \\
&= m \cdot \frac{x_{01}^{(1,0)} \lambda_1 + y_{01}^{(1,0)} \lambda_2 - z_{01}^{(1,0)} \lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} = m \cdot \frac{g \left((x_{01}^{(1,0)}, y_{01}^{(1,0)}, z_{01}^{(1,0)}), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right)_L}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} \\
&= m \cdot \frac{g \left(b_{01}^{(1,0)}, \lambda \right)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}
\end{aligned}$$

$$\text{iv) } g = g(b_{vv}(0), N(0,0))$$

$$\begin{aligned}
&= g \left((m-1) \cdot (b_{01}^{(0,1)} - b_{00}^{(0,1)}), \frac{b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} \right) = \frac{(m-1)}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} g \left((b_{01}^{(0,1)} - b_{00}^{(0,1)}), (b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}) \right) \\
&= \frac{(m-1)}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} g(b_{01}^{(0,1)}, b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}) = \frac{(m-1)}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L} \left(-\det(b_{01}^{(0,1)}, b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \right) \\
&= (m-1) \cdot \frac{x_{01}^{(0,1)} (y_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} - y_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)}) + y_{01}^{(0,1)} (x_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)}) - z_{01}^{(0,1)} (x_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} y_{00}^{(1,0)})}{\sqrt{(y_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)} - y_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)})^2 + (x_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)})^2 - (x_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} y_{00}^{(1,0)})^2}} \\
&= (m-1) \cdot \frac{x_{01}^{(0,1)} \lambda_1 + y_{01}^{(0,1)} \lambda_2 - z_{01}^{(0,1)} \lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} = (m-1) \cdot \frac{g((x_{01}^{(0,1)}, y_{01}^{(0,1)}, z_{01}^{(0,1)}), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))_L}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} \\
&= (m-1) \cdot \frac{g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \cdot g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - g^2(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \\
&= \left((x_{00}^{(1,0)})^2 + (y_{00}^{(1,0)})^2 - (z_{00}^{(1,0)})^2 \right) \cdot \left((x_{00}^{(1,0)})^2 + (y_{00}^{(1,0)})^2 - (z_{00}^{(1,0)})^2 \right) - (x_{00}^{(1,0)} x_{00}^{(0,1)} + y_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - z_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)})^2 \\
&= (x_{00}^{(1,0)} y_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} y_{00}^{(1,0)})^2 + (x_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - x_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)})^2 - (y_{00}^{(1,0)} z_{00}^{(0,1)} - y_{00}^{(0,1)} z_{00}^{(1,0)})^2 \\
&= -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2) = -g(\lambda, \lambda)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $(u, v) = (0, 0)$ noktası için birinci temel formun ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}), \quad F = g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}), \quad G = g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) \\
e &= (n-1) \cdot \frac{g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}, \quad f = m \cdot \frac{g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}, \quad g = (m-1) \cdot \frac{g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}, \quad EG - F^2 = -g(\lambda, \lambda)
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

Teorem 4.3.7. Minkowski uzayında dejenere olmayan $b(u, v)$ Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = -\varepsilon \cdot \frac{(n-1) \cdot (m-1) g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L - m^2 g^2(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L}{g^2(\lambda, \lambda)}$$

$$H = -\varepsilon \cdot \left(\frac{(n-1) g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - 2 \cdot m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) + (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)})}{2\sqrt{\varepsilon} \cdot g^3(\lambda, \lambda)} \right)$$

denklemleri ile verilir.

İspat:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\frac{(n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}} \cdot \frac{(m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}} - \frac{m^2 \cdot g^2(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}}{-g(\lambda, \lambda)} \\ &= -\varepsilon \cdot \frac{(n-1) \cdot (m-1) g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L - m^2 g^2(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L}{g^2(\lambda, \lambda)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \varepsilon \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{(n-1) g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)})}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}} - \frac{2 \cdot m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)})}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}} + \frac{(m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)})}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}}}{-g(\lambda, \lambda)} \\ &= -\varepsilon \cdot \left(\frac{(n-1) g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - 2 \cdot m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) + (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L \cdot g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)})}{2\sqrt{\varepsilon} \cdot g^3(\lambda, \lambda)} \right) \end{aligned}$$

Teorem 4.3.8. Minkowski uzayında dejenere olmayan $b(u, v)$ Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki şekil operatörüne karşılık gelen matrisin katsayıları

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}} \left((n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \right) \\
a_{12} &= \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}} \cdot \left(-(n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) + m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \right) \\
a_{21} &= \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}} \cdot \left(m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \right) \\
a_{22} &= \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}} \left(-m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) + (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \right)
\end{aligned}$$

eşitliği ile hesaplanır.

İspat: Minkowski uzayında dejenere olmayan yüzeyin şekil operatörü Bezier yüzeylerine uygulanmıştır.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-g(\lambda, \lambda)} \begin{pmatrix} g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) & -g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \\ -g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) & g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{(n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}} & \frac{m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}} \\ \frac{m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}} & \frac{(m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda)_L}{\sqrt{\varepsilon g(\lambda, \lambda)}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}} \begin{pmatrix} g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) & -g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \\ -g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) & g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) & m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) \\ m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) & (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) \\ -m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) \\ -(m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -(n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \\ +m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \\ +(m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Minkowski uzayında dejenere olmayan Bezier yüzeyinde Gauss ve ortalama eğriliği şekil operatörü yardımı ile aşağıdaki biçimde elde edilebilir:

$$K = \varepsilon \det(A) = \varepsilon (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}} \right)^2 \left(\begin{array}{c} \left((n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \right) \\ \cdot \left(-m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) + (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \right) \\ \left(m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \right) \\ - \left(-(n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) + m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \right) \end{array} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{g^3(\lambda, \lambda)} \left\{ g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) \cdot g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) - g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left((m-1) \cdot (n-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) - m^2 g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) \right) \right\} \\
&= \frac{\varepsilon}{g^3(\lambda, \lambda)} \left(\{G.E - F^2\} \left((m-1) \cdot (n-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) - m^2 g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) \right) \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{g^3(\lambda, \lambda)} \left(-g(\lambda, \lambda) \cdot \left((m-1) \cdot (n-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) - m^2 g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) \right) \right) \\
&= -\varepsilon \cdot \frac{\left((n-1) \cdot (m-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) - m^2 g^2(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) \right)}{g^2(\lambda, \lambda)}
\end{aligned}$$

$$H = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} I z A = \frac{\varepsilon}{2} (a_{11} + a_{22})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}} \cdot \left(\begin{array}{c} (n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) \\ -m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) + (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) \end{array} \right) \\
&= -\varepsilon \cdot \frac{(n-1) \cdot g(b_{10}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) - 2m \cdot g(b_{01}^{(1,0)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) + (m-1) \cdot g(b_{01}^{(0,1)}, \lambda) g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)})}{2\sqrt{\varepsilon g^3(\lambda, \lambda)}}
\end{aligned}$$

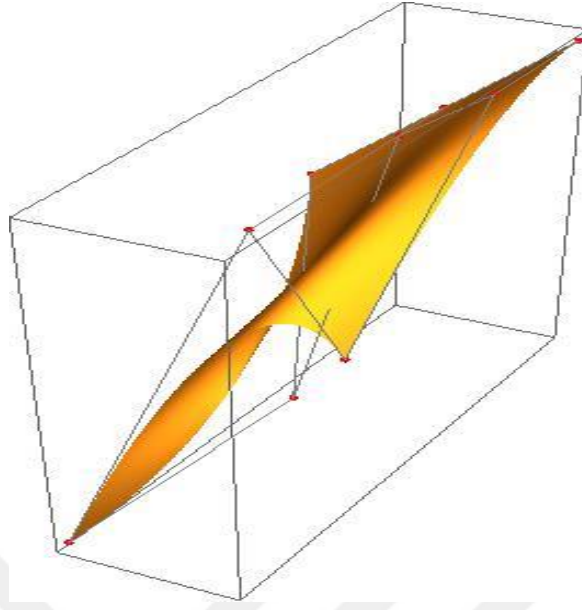
ile hesaplanır.

Örnek 4.3.9. (Timelike Bezier Yüzeyinin Uygulaması)

$b(u, v)$ kontrol noktaları $b_{00} = (2, 1, 3)$, $b_{01} = (4, 2, 6)$, $b_{02} = (2, 6, 7)$, $b_{10} = (3, 3, 8)$, $b_{11} = (3, 6, 8)$, $b_{12} = (3, 7, 8)$, $b_{20} = (4, 3, 6)$, $b_{21} = (4, 6, 9)$, $b_{22} = (4, 8, 9)$ olan kuadratik timelike Bezier yüzeyinin denklemi

$$\begin{aligned}
 b(u, v) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(u) B_j^2(v) . b_{ij} = \sum_{i=0}^2 \left(\sum_{j=0}^2 B_j^2(v) . b_{ij} \right) B_i^2(u) \\
 &= \sum_{i=0}^2 \left(B_0^2(v) . b_{i0} + B_1^2(v) . b_{i1} + B_2^2(v) . b_{i2} \right) B_i^2(u) \\
 &= \begin{pmatrix} \left(B_0^2(v) . b_{00} + B_1^2(v) . b_{01} + B_2^2(v) . b_{02} \right) B_0^2(u) \\ + \left(B_0^2(v) . b_{10} + B_1^2(v) . b_{11} + B_2^2(v) . b_{12} \right) B_1^2(u) \\ + \left(B_0^2(v) . b_{20} + B_1^2(v) . b_{21} + B_2^2(v) . b_{22} \right) B_2^2(u) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left((1-v)^2 . b_{00} + 2v(1-v) . b_{01} + v^2 . b_{02} \right) (1-u)^2 \\ + \left((1-v)^2 . b_{10} + 2v(1-v) . b_{11} + v^2 . b_{12} \right) . 2.u . (1-u) \\ + \left((1-v)^2 . b_{20} + 2v(1-v) . b_{21} + v^2 . b_{22} \right) . u^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left((1-u)^2 . (1-v)^2 . b_{00} + 2(1-u)^2 . v(1-v) . b_{01} + (1-u)^2 v^2 . b_{02} \right) \\ + \left(2.u . (1-u) . (1-v)^2 . b_{10} + 4u.v(1-u) . (1-v) . b_{11} + 2.u(1-u) . v^2 . b_{12} \right) \\ + \left(u^2 . (1-v)^2 . b_{20} + 2u^2.v(1-v) . b_{21} + u^2 v^2 . b_{22} \right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left((1-u)^2 . (1-v)^2 . (2, 1, 3) + 2(1-u)^2 . v(1-v) . (2, 4, 6) + (1-u)^2 v^2 . (2, 6, 7) \right) \\ + \left(2.u . (1-u) . (1-v)^2 . (3, 3, 8) + 4u.v(1-u) . (1-v) . (3, 6, 8) + 2.u(1-u) . v^2 . (3, 7, 8) \right) \\ + \left(u^2 . (1-v)^2 . (4, 3, 6) + 2u^2.v(1-v) . (4, 6, 9) + u^2 v^2 . (4, 8, 9) \right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.5. MATHEMATICA programındaki çıktısı

Kuadratik timelike Bezier yüzeyinin birinci mertebeden kısmi türevleri $b_{ij}^{(1,0)} = n(b_{(i+1)j} - b_{ij})$ ve $b_{ij}^{(0,1)} = m(b_{i(j+1)} - b_{ij})$ ifadesinden

$$b_{10}^{(1,0)} = n(b_{20} - b_{10}) = 2 \cdot ((4, 3, 6) - (3, 3, 8)) = (2, 0, -4)$$

$$b_{01}^{(0,1)} = m(b_{02} - b_{01}) = 2 \cdot ((2, 6, 7) - (2, 4, 6)) = (0, 4, 2)$$

$$b_{00}^{(1,0)} = n(b_{10} - b_{00}) = 2 \cdot ((3, 3, 8) - (2, 1, 3)) = (2, 4, 10)$$

$$b_{00}^{(0,1)} = m(b_{01} - b_{00}) = 2 \cdot ((2, 4, 6) - (2, 1, 3)) = (0, 6, 6)$$

$$b_{01}^{(1,0)} = n(b_{11} - b_{01}) = 2 \cdot ((3, 6, 8) - (2, 4, 6)) = (2, 4, 4)$$

olarak bulunur. Kuadratik timelike Bezier yüzeyinin birinci temel formunun E, F, G katsayıları sırasıyla

$$E = g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(1,0)}) = ((2, 4, 10), (2, 4, 10)) = -80$$

$$F = g(b_{00}^{(1,0)}, b_{00}^{(0,1)}) = ((2, 4, 10), (0, 6, 6)) = -36$$

$$G = g(b_{00}^{(0,1)}, b_{00}^{(0,1)}) = ((0, 6, 6), (0, 6, 6)) = 0$$

hesaplanır. Kuadratik timelike Bezier yüzeyinin birinci temel formunun ifadesi ise

$$ds^2 = E.du^2 + 2.du.dv + G.dv^2 = -80du^2 - 72.du.dv$$

dır. Kuadratik timelike Bezier yüzeyinin ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki gibidir.

$$b_{uu}(0,0) = (n-1)(b_{10}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)}) = ((2,0,-4) - (2,4,10)) = (0,-4,-14)$$

$$b_{uv}(0,0) = m.(b_{01}^{(1,0)} - b_{00}^{(1,0)}) = 2.((2,4,4) - (2,4,10)) = (0,0,-12)$$

$$b_{vv}(0,0) = (m-1).(b_{01}^{(0,1)} - b_{00}^{(0,1)}) = ((0,4,2) - (0,6,6)) = (0,-2,-4)$$

Kuadratik timelike Bezier yüzeyinin N normal vektörü ve ikinci temel formun katsayıları e, f, g katsayıları

$$N(u,v) = \frac{b_u(u,v) \wedge_L b_v(u,v)}{\|b_u(u,v) \wedge_L b_v(u,v)\|_L}$$

$$N(0,0) = \frac{b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}}{\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L}$$

$$b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)} = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 36.e_1 + 12.e_2 + 12.e_3$$

$$\|b_{00}^{(1,0)} \wedge_L b_{00}^{(0,1)}\|_L = \|36.e_1 + 12.e_2 + 12.e_3\|_L = \sqrt{(36)^2 + (12)^2 - (12)^2} = 36$$

eşitliği ile hesaplanır. Buradan $N(0,0) = e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3 = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ olarak hesaplanır. Böylece

$g(N(0,0), N(0,0)) = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$ denklemi elde edilir. O halde N normal vektörü

spacelike vektör olduğundan ikinci temel formun katsayıları

$$e = g(b_{uu}(0,0), N(0,0)) = g\left((0,-4,-14), \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{10}{3}$$

$$f = g(b_{uv}(0,0), N(0,0)) = g\left((0,0,-12), \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = 4$$

$$g = g(b_{vv}(0,0), N(0,0)) = g\left((0,-2,-4), \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}$$

ile hesaplanır. $EG - F^2 = -(36)^2 < 0$ olduğundan yüzey timelike yüzeydir. Yüzey timelike olduğundan $\varepsilon = 1$ alınacaktır. Kuadratik timelike Bezier yüzeyinin sırasıyla Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \varepsilon \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) = \frac{\frac{10}{3} \cdot \frac{2}{3} - 16}{-(36 \cdot 36)} = \frac{31}{81 \cdot 36} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} H &= \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{10}{3} \cdot 0 - 2 \cdot 4 \cdot (-36) + \frac{2}{3} \cdot (-80)}{-(36 \cdot 36)} \right) = \left(\frac{4.72 - \frac{160}{3}}{-(72 \cdot 36)} \right) = -\frac{22}{243} \end{aligned} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir. Kuadratik timelike Bezier yüzeyinin şekil operatörü

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{-(36 \cdot 36)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 36 \\ 36 & -80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 4 \\ 4 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-(36 \cdot 36)} \cdot \begin{pmatrix} 144 & 24 \\ -200 & \frac{272}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{54} \\ \frac{25}{162} & -\frac{17}{243} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

hesaplanır. Burada matrisin katsayıları $a_{11} = -\frac{1}{9}$, $a_{12} = \frac{25}{162}$, $a_{21} = -\frac{1}{54}$, $a_{22} = -\frac{17}{243}$ elde edilir.

Kuadratik timelike Bezier yüzeyinin şekil operatörü yardımıyla sırasıyla Gauss ve ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon \det(A) = \varepsilon (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \\ &= \left(-\frac{1}{9} \right) \cdot \left(-\frac{17}{243} \right) - \left(\frac{25}{162} \right) \cdot \left(-\frac{1}{54} \right) \\ &= \frac{17}{9 \cdot 243} + \frac{25}{9 \cdot 4 \cdot 243} = \frac{31}{81 \cdot 36} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
H &= \varepsilon \cdot \frac{1}{2} (IzA) = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} - \frac{17}{243} \right) = -\frac{22}{243}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

denklemleri ile hesaplanır. (4.13), (4.14) ve (4.15), (4.16) denklemlerinden görüldüğü üzere iki farklı yöntemle elde ettiğimiz Gaus ve ortalama eğrilikleri için aynı değerler bulunmuştur.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Minkowski uzayında Bezier eğrileri ve yüzeylerinin Serret-Frenet ve Bishop çatılarının temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Bezier eğrilerinin (Farin 1996) ve (Marsh 2005) kaynaklarında verilen başlangıç ve bitiş noktalarındaki eğrilik ve burulması, Serret-Frenet çatısı ve Bishop çatısı hesaplanmıştır. Asli normali spacelike olan spacelike Bezier eğrileri ve asli normali timelike olan spacelike Bezier eğrilerinin başlangıç ve bitiş noktasındaki Serret-Frenet çatısı ve Bishop çatısı incelenerek sayısal bir örnek verilmiştir. Timelike Bezier eğrilerinin başlangıç ve bitiş noktasındaki Serret-Frenet çatısı ve Bishop çatısı incelenerek sayısal bir örnek verilmiştir. Minkowski uzayında dejenere olmayan Bezier yüzeylerinin birinci temel formu ve ikinci temel formu verilmiştir. Şekil operatörü, Gauss ve ortalama eğrilikleri incelendikten sonra sayısal bir örnek verilmiştir. İleride yapılabilecek çalışmalarda, Minkowski uzayında dejenere olmayan Bezier eğri ve yüzeyleriyle ilgili olan daha farklı geometrik özellikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Bilici M, Çalışkan M, 2009. On the Involutives of the Spacelike Curve with. In International Math. Forum, 4 (31): 1497-1509.
- Bishop LR, 1975. There is more than one way to frame a curve. Amer. Math. Mon. (82): 246-251.
- Bukcu B, Karacan M, 2008a. Special Bishop Motion and Bishop Darboux Rotation Axis of the Space Curve. J. Dyn. Syst. Geo. Theo., 63 (1): 80-90.
- Bukcu B, Karacan M, 2008 b. Bishop frame of the Spacelike curve with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. series, 57 (1): 13-22.
- Bukcu B, Karacan MK, 2010. Bishop frame of the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space. Selçuk Journal of Applied Mathematics, 11 (1): 15-25.
- Georgiev GH, 2008. Space-like Bézier Curves in the Three-dimensional Minkowski Space. Proceedings of the 34th Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'08), 1067 (1) : 373-380.
- Farin G, 1996. Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. Arizona State University, USA.
- İlarslan K, 2005. Spacelike Normal Curves in Minkowski Space. Turkish Journal of Mathematics, 29 (1): 53-63.
- İlarslan K, Nesovic, E, 2004. Timelike and null normal curves in Minkowski space. Indian J. Püre Appl. Math, 35 (7): 881-888.
- İncesu M, 2003. Bezier Eğrileri, Bezier Yüzeyleri ve Matlab ile Sayısal Algoritmalar. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Karacan M, Bukcu B, 2008. Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-space. SDU Journal, 3 (1): 80-90.

- Kazaz M, Uğurlu H, 2014. Bertnard Partner D-Curves in the Minkowski 3-Space. Math. Sci. and Appl. E-Notes, 2 (1):68-82.
- Kim DS, Papalambros PY, Woo TC, 1995. Tangent, normal, and visibility cones on Bézier surfaces. Computer Aided Geometric Design, 12(3): 305-320.
- Kreyszig E, 1968. Introdurcion to differential geometry and Riemannian geometry (Vol. 16). University of Toronto Press.
- López R, 2014. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space.
- Marsh D, 2005. Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. Springer-Verlag London Berlin Heidelberg.
- Monterde J, Ugail H, 2006. A general 4th-order PDE method to generate Bézier surfaces from the boundary. Computer Aided Geometric Design, 23 (2): 208-225.
- Monterde J, 2004. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach. Computer Aided Geometric Design, 21 (2): 117-136.
- Monterde J, Ugail H, 2004. On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. Computer Aided Geometric Design, 21 (7): 697-715.
- Önder M, Kocayığit H, 2007. Minkowski Uzayında Lorentz Küresel Timelike ve Null Eğriler Üzerine. Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi.3 (2): 153-158. Indian Jour. Pure App. Math, 35 (7): 881-888.
- Turgut A, 1995. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ankara.
- Ugail, H, Márquez, MC and Yılmaz A, 2011. On Bézier surfaces in three-dimensional Minkowski space. Computers & Mathematics with Applications, 62 (8): 2899-2912.
- Uğurlu HH, Çalışkan A, 2012. Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi. Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa.

Yamaguchi F, 1988. Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design. Springer.

Yılmaz A, 2009. Bezier Eğrileri ve Bezier Yüzeyleri. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.



ÖZGEÇMİŞ

15 Ağustos 1991 yılında İslahiye’de doğdu. İlkokulu Cumhuriyet İlköğretim okulunda ve liseyi de İslahiye İbni Sina Lisesi’nde tamamladı. 2010 yılında Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaparak lisans öğrenimine başladı. 2014 yılında mezun oldu ve aynı yıl Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün Matematik Anabilim dalında açmış olduğu tezli yüksek lisans programına başladı.

Serkan ÇELİK