

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERANSİYEL DENKLEM VE DİFERANSİYEL DENKLEM
SİSTEMLERİ İÇİN LİE SİMETRİ ANALİZİ**

Mehmet KOCABIYIK

**Danışman
Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2017**



© 2017 [Mehmet KOCABIYIK]

TEZ ONAYI

Mehmet KOCABIYIK tarafından hazırlanan "**Diferansiyel Denklem ve Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Lie Simetri Analizi**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
Selçuk Üniversitesi



Enstitü Müdürü

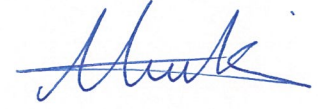
Prof. Dr. Yasin TUNCER

.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet KOCABIYIK



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAM VE TANIMLAR	3
2.1. Bir Parametrelî Lie Grupları.....	3
2.1.1. Dönüşümler grubu	3
2.1.2. Sonsuzküçük dönüşümler ve sonsuzküçük üreteçler	4
2.1.3. Lie operatörünün ürettiği dönüşüm grubu.....	6
2.1.4. Lie serisi	7
2.1.5. Kanonik form ve değişkenler	8
2.1.6. Lie gruplarının diferansiyel denklemlere uygulanışı	10
2.2. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Lie Simetri Analizi..	13
2.2.1. Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için simetri şartı	13
2.2.2. Kanonik koordinatlar.....	16
2.3. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Lie Simetri Analizi	23
2.3.1. İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için simetri şartı.....	23
2.3.2. Kanonik koordinatlar kullanılarak mertebe indirgenmesi	25
2.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Lie Simetri Analizi ..	28
2.5. Kısmi Diferansiyel Denklemler için Lie Simetri Analizi.....	30
3. DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN LİE SİMETRİ ANALİZİ İLE GENEL ÇÖZÜMLERİ	32
3.1. Hanta-virüs Sistemi için Lie Simetri Analizi.....	32
3.1.1. Adi mertebeden hanta-virüs sistemi	34
3.1.2. Kesirli mertebeden hanta-virüs sistemi	38
3.1.3. Kısmi hanta-virüs sistemi	42
3.2. Granül Hücre Üretimi Sistemi için Lie Simetri Analizi	47
3.2.1. Lineer $\delta(t)$ durumu	50
3.2.2. Rasyonel $\delta(t)$ durumu	51
3.2.3. Üstel $\delta(t)$ durumu	52
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	58
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	65
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	72

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL DENKLEM VE DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN LİE SİMETRİ ANALİZİ

Mehmet KOCABIYIK

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN

Bu tez çalışmasında diferansiyel denklem ve diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için Lie simetri analizi yapıldı.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konuya kısa bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde, bir parametrelili Lie grupları, sonsuzküçük dönüşümler ve üreteçler, Lie grup operatörünün ürettiği dönüşüm grubu tanıtılarak, adi mertebeden diferansiyel denklemler, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerde metodun uygulanılmasına değinilmiştir.

Üçüncü bölümde ise diferansiyel denklem sistemlerinden oluşan bazı modeller için çözümler yapılmış ve grafikler çizilmiştir.

Dördüncü bölümde araştırma bulgularına ve son bölüm olan beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie simetri analizi, hanta-virüs modeli, granül hücre üretimi, diferansiyel denklemler.

2017, 73 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

LIE SYMMETRY ANALYSIS FOR DIFFERENTIAL EQUATION AND DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS

Mehmet KOCABIYIK

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN

In this thesis, we have done Lie symmetry analysis for the solutions of differential equations and differential equation systems.

Thesis has five main part. In first part, there is a short enterence to subject. In the second part, there will be introduce for Lie groups with one parameter, infinitesimal transformations and generators, transformation groups which produced by Lie group operator, then there are refers to apply the methods for ordinary differential equation, fractional differential equation and partial differential equation.

In the third part, there are graphics drawn and solutions done for some differential equation system models.

In the fourth part, there are some research findings and in the final part fifth part, there are conclusion and suggestions.

Keywords: Lie symmetry analysis, hanta-virus model, granule cell generation, difer-
antial equations

2017, 73 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN'a teşekkürlerimi sunarım.

4738-YL1-16 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Tezimin gerçekleşmesinde 2211 numaralı Yurt İçi Lisansüstü Burs programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Mehmet KOCABIYIK
ISPARTA, 2017

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. (3.1.1) - (3.1.2) sistemi için Faz düzlemi.....	37
Şekil 3.2. Denklem (3.1.8) ile verilen Lojistik diferansiyel denklemin çözümü	37
Şekil 3.3. Denklem (3.1.1) ve (3.1.2) ile verilen M_s ve M_i çözümleri	37
Şekil 3.4. Density Plot (sol) ve farklı α değerleri için M_i Çözümleri.(sağ)	41
Şekil 3.5. Density Plot (sol) ve farklı α değerleri için M_s Çözümleri.(sağ).....	41
Şekil 3.6. K=20 için Fisher-Kolmogorov Denkleminin Analitik Çözüm Grafiği	45
.....	45
Şekil 3.7. K=40 için Fisher-Kolmogorov Denkleminin Analitik Çözüm Grafiği	46
.....	46
Şekil 3.8. Özel durum, K=2 için Fisher-Kolmogorov Denkleminin Analitik Çözüm Grafiği	46
Şekil 3.9. K=2 için Fisher-Kolmogorov Denkleminin Farklı Aralıkta Analitik Çözüm Grafiği	47
Şekil 3.10. $oEGL$ Doku Bölgesi için Granül Hücre Üretimi Çözümleri	54
Şekil 3.11. $A_o(t)$ için Density Plot Çizimleri. Lineer, rasyonel ve üstel durum...	54
Şekil 3.12. $iEGL$ Doku Bölgesi için Granül Hücre Üretimi Çözümleri	55
Şekil 3.13. $A_i(t)$ için Density Plot Çizimleri. Lineer, rasyonel ve üstel durum....	55
Şekil 3.14. $oEGL$ ve $iEGL$ Doku Bölgesi Granül Hücre Üretimi Çözümleri	56
Şekil 3.15. Density Plot Çizimi değişen α_p değeri için.	56
Şekil 3.16. $oEGL$ ve $iEGL$ Doku Bölgesi Granül Hücre Üretimi Çözümleri.	57
Şekil 3.17. Density Plot Çizimi değişen α_e değeri için.	57

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 3.1. <i>EGL</i> Modeli için Ölçüm Değerleri	49



SİMGELER DİZİNİ

$A_i(t)$	$iEGL$ doku bölgesindeki granül hücre değişimi
$A_o(t)$	$oEGL$ doku bölgesindeki granül hücre değişimi
a	Bulaşma oranı
b	Doğum oranı
c	Ölüm oranı
EGL	Dış granül katmanı
$gcps$	Öncü granül hücreleri
K	Çevre taşıma kapasitesi
L	Lie operatörü
M_i	Hastalıklı farelerin nüfusu
M_s	Hasta olmayan farelerin nüfusu
$N_i(t)$	$iEGL$ deki hücre sayısı
$N_o(t)$	$oEGL$ deki hücre sayısı
$iEGL$	EGL nin iç tabakası
$oEGL$	EGL nin dış tabakası
(r, s)	Kanonik koordinatlar
α_p	$gcps$ deki hız sabiti için sınır değeri
α_e	EGL den çıkan granül hücrelerindeki sınır sabiti
$\delta(t)$	Öncü granül hücrelerinin bölünerek ölümcül iki granül hücre oluşturma olasılığı
η	Lie simetrisine ait tanjant vektörü
ξ	Lie simetrisine ait tanjant vektörü

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklem, bir bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren denklemlere denir. Eğer böyle bir diferansiyel denklemdeki bilinmeyen fonksiyon yalnız bir bağımsız değişkene sahip ise bu tip diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir.

Bir diferansiyel denklemde her bağımlı değişken ve her mertebeden türevler birinci dereceden ise ve aynı zamanda bağımlı değişkenler veya türevler çarpım halinde yer almıyorlarsa böyle denklemlere doğrusal (lineer) aksi halde doğrusal olmayan (nonlinear) diferansiyel denklemler denir.

18.yüzyılın sonunda kadar bu şekilde ki adi diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri için birçok metod geliştirilmiştir. Ancak Modern Cebir yardımıyla lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözümüne ait ilk çalışmalar Sophus Lie, Felix Klein, David Hilbert gibi birçok ünlü matematikçinin katkılarıyla başlamıştır.

Lie grupları, Norveçli ünlü matematikçi Sophus Lie tarafından 1888-1896 yılları arasındaki çalışmaları sonrasında ortaya çıktı. Sophus Lie aynı zamanda bu çalışmalarını sayesinde matematikçiler arasında Lie grupları olarak bilinen modern teorisinin ortaya çıkması için önemli etkene sahip olan dönüşüm teorisinin kurucusu olarak da bilinmektedir.

Sophus Lie, sürekli bir parametrelili grup yapılarını incelemiş ve grup teorisi ile bazı diferansiyel denklemlerin integre edilebileceğini göstermiştir. Bu sayede Lie grupları fen ve mühendislik gibi bilim dalları üzerinde önemli bir çalışma ve uygulama alanı ortaya çıkarmıştır. Lie, bu çalışmaları ile bir adi diferansiyel denklemin sürekli bir parametrelili bir dönüşüm grubu altında invaryant(değişmez) kalması durumunda denklemin mertebesinin bir derece düşürebileceğini de göstermiştir.

Lie' nin çalışmalarının önemi, 1960 lı yıllarda doğa bilimlerinde ki matematiksel modellerin ürettiği diferansiyel denklemlere, Lie teorisinin uygulanmasıyla daha da fazla ortaya çıkmıştır.

20.yüzyılda dönüşüm gruplarının uygulamaları birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Örneğin, bazı araştırmacılar ise matematiksel fizik modelleri ile ilgilenmiş ve cebir metodlarını bu modellere uygulamışlardır.

Bu bilim adamlarından L.Ovsiannikov(1982), P.J.Oliver(1986), W.G.Bluman (1989) ve N.İbragimov (1994;2001) bu alanda önemli çalışmalara imza atmışlardır. Bu alanda Türkiye deki çalışmalar ise son zamanlarda özellikle tez çalışması anlamında artış göstermiştir. Bu yönde çalışmalar yapan araştırmacılar M. Özceylan (2006) ve F.A. Kiraz (2007) bu konunun daha çok diferansiyel denklemlere uygulanışı ile ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır.

Kısaca son olarak bir diferansiyel denklemin simetri grubu hakkında da bilgi vermek istersek, bir diferansiyel denklemin simetri grubu çözümlerinden oluşan kümeyi invariant bırakan bağımlı ve bağımsız değişkenlerin dönüşümlerinden oluşan bir gruptur. Bu nedenden dolayı simetri grubu elde edilen bir diferansiyel denklemin, bulunan bu çözümleri yardımıyla yeni çözümleri elde edilebilir.

2. TEMEL KAVRAM VE TANIMLAR

2.1. Bir Parametrelili Lie Grubları

2.1.1. Dönüşümler grubu

H boştan farklı bir küme ve " $*$ " sembolü de H üzerinde tanımlanmış bir ikili işlemi ifade etsin, $(H, *)$ ikilisine aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda bir **grup** denir.

1. $\forall x, y \in H$ için $x * y \in H$,
2. $\forall x, y, z \in H$ için $(x * y) * z = x * (y * z) \in H$,
3. Her $x \in H$ için $x * e = e * x = x$ özelliğini sağlayan $e \in H$ vardır,
4. Her $x \in H$ için $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ olacak şekilde $x^{-1} \in H$ vardır.

Her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\phi : \mathbb{R}^2 \times t \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : \mathbb{R}^2 \times t \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1.1)$$

fonksiyonları x, y değişkenleri ve t parametresinin iki analitik fonksiyonu olsun.

$$u(x, y, t) = x_1, \quad v(x, y, t) = y_1 \quad (2.1.2)$$

olmak üzere

$$Z_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow Z_t(x, y) = (u(x, y, t), v(x, y, t)) = (x_1, y_1) \quad (2.1.3)$$

dönüşümü yazılarak ,

$$H = [Z_t \mid t \in \mathbb{R}] \quad (2.1.4)$$

kümesi tanımlansın.

Eğer (2.1.4) kümesi üzerinde bir ikili işlem $o : H \times H \rightarrow H$ ile yukarıda verilen grup aksiyomlarını sağlamakta ise bu ifade **bir parametrelili Lie Grubu** olarak adlandırılır (Page, 1897; Cohen, 1911; Oliver, 1986).

Bir parametrelili Lie grubunun elde edilmesini sağlayan u ve v fonksiyonlarına *grubun sonlu dönüşümleri* denir. Parametrenin sonsuz küçük artışında değişmesi durumunda (x, y) ile verilen nokta da sonsuz küçük miktarda yer değiştirerek (x_1, y_1) noktasına dönüşecektir.

Burada x ve y ' nin x_1 ve y_1 değişkenlerine göre çözülebileceğini garantilemek için (2.1.2) Lie grubundaki u ve v fonksiyonlarının x ve y değişkenlerine göre bağımsız olduklarını kabul edip, yani $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}$ Jakobiyenin sıfıra özdeş olmadığını varsaymalıyız.

Bir parametrelili Lie gruplarına örnekler;

i)Dikey Öteleme: $x_1 = x, y_1 = y + a$

ii)Ölçekleme: $x_1 = e^a x, y_1 = e^a y$

iii) Rotasyon: $x_1 = x \cos a - y \sin a, y_1 = x \sin a + y \cos a$

iv)Yatay Öteleme: $x_1 = x + a, y_1 = y$

olarak verilebilir (Oliver, 1986; Özceylan, 2006).

2.1.2. Sonsuzküçük dönüşümler ve sonsuzküçük üreteçler

(2.1.2) ile verilen Lie grubu tanımında ki u ve v fonksiyonları grubun sonlu formu (global formu, kapalı formu) olarak isimlendirilir. Bu Lie grubu tanımındaki u ve v fonksiyonlarını $a = 0$ civarında Taylor serisine açabiliriz ki bu durumda ifade,

$$\begin{aligned} x_1 &= x + a \left(\frac{\partial x_1}{\partial a} \right)_{a=0} + 0(a^2) \\ y_1 &= y + a \left(\frac{\partial y_1}{\partial a} \right)_{a=0} + 0(a^2) \end{aligned}$$

halini alacaktır.

Şimdi burada,

$$\begin{aligned} \xi(x,y) &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial a} \right)_{a=0} \\ \eta(x,y) &= \left(\frac{\partial y_1}{\partial a} \right)_{a=0} \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

şeklinde $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonları tanımlanırsa bu durumda,

$$\begin{aligned} x_1 &= x + a \xi(x,y) + 0(a^2) \\ y_1 &= y + a \eta(x,y) + 0(a^2) \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

elde edilir ki buna da **Lie Grubunun sonsuzküçük formu (dönüşümü)** denir (Oliver, 1986).

(2.1.2) Lie grubunu ve bu gruba karşılık gelen (2.1.6) sonsuz küçük grubunu göz önüne alalım.

Sonsuz küçük dönüşüm altında düzgün bir $w(x,y)$ fonksiyonundaki

$$\delta w = w(x_1, y_1) - w(x, y) = w((x + a\xi), (y + a\eta)) - w(x, y)$$

değişimini gözlemleyelim. Şimdi, $\Phi(a) = w(x + a\xi, y + a\eta)$ fonksiyonunu $a = 0$ civarında Taylor serisine (Maclaurin Serisine) açacak olursak,

$$\Phi(a) = \Phi(0) + a\left(\frac{d\Phi}{da}\right)_{a=0} + \frac{a^2}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{da^2}\right)_{a=0} + \dots$$

olup burada

$$\left(\frac{d\Phi}{da}\right)_{a=0} = \left(\left(\frac{d\Phi}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{da}\right) + \left(\frac{d\Phi}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{da}\right)\right)_{a=0} = a\left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

olduğundan

$$\delta w = a\left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \dots$$

olarak elde edilir. L diferansiyel operatörünü

$$L = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.1.7)$$

biçiminde tanımlarsak, bu durumda δw nin L operatörü cinsinden,

$$\delta w = aL(w) + \frac{a^2}{2!}L^2(w) + \frac{a^3}{3!}L^3(w) + \dots$$

olacak şekilde yazılabileceği açıktır. Buradaki L diferansiyel operatörüne **Lie grubunun sonsuz küçük üretici veya Lie operatörü** denir (Cohen, 1911; Oliver, 1986; Page, 1897; Özceylan, 2006).

Sonuç 2.1 Her sonsuzküçük dönüşüm sonsuzküçük üretici tarafından tam olarak belirlenir. Öte yandan $Lx = \xi$ ve $Ly = \eta$ olduğundan

$$Lw = Lx \frac{\partial w}{\partial x} + Ly \frac{\partial w}{\partial y}$$

olacağı gözlenir.

(2.1.2) Lie grubunun (x,y) noktasını (x_1,y_1) noktasına dönüştürdüğünü göz önüne alacak olursak

$$Lw(x_1,y_1) = Lx_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + Ly_1 \frac{\partial w}{\partial y_1}$$

elde edilir (Oliver,1986; Torrisi ve Nucci, 2001; Gazizov v.d.,2011).

2.1.3. Lie operatörünün ürettiği dönüşüm grubu

Bölüm 2.1.2 de grubun sonsuz küçük dönüşümünün bulunması için Taylor seri açılımı metodu kullanıldı. Bunun tersi mümkündür, yani sonsuzküçük dönüşüm bilindiğinde bir parametrelili grubun sonlu dönüşümleri de elde edilebilmektedir. Sonsuzküçük dönüşüm (x,y) noktasını $(x + a\xi, y + a\eta)$ pozisyonuna taşıdığı bilinmektedir. Bu dönüşümün sonsuz defa tekrarlanması sonucu nokta tam olarak (x,y) noktasından geçen ve

$$\frac{dx_1}{da} = \xi(x_1,y_1), \quad \frac{dy_1}{da} = \eta(x_1,y_1) \quad (2.1.8)$$

diferansiyel denklem sisteminin integral eğrisi olan bir eğri boyunca taşınır. Bu işlemin belli bir aşamasında x ve y noktaları sırası ile x_1 ve y_1 noktalarına dönüşür ve böylece (2.1.8) için dönüşüm formülü ,

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1,y_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1,y_1)} = \frac{da}{1} \quad (2.1.9)$$

denklem sisteminin çözümleri ile verilir ve burada $a = 0$ için x_1 ve y_1 , sırasıyla x ve y ye indirgenir.

$a = 0$ iken $x_1 = x$ ve $y_1 = y$ olduğundan dolayı (2.1.9) deki eşitliklerin " a " dan bağımsız olan ilk iki denklem çözümü

$$r(x_1,y_1) = sabit = r(x,y) \quad (2.1.10)$$

şeklinde yazılabilen bir diferansiyel denklem formuna indirgenir. Bu da (x,y) noktasına karşılık gelen yörünge denklemi olarak adlandırılır.

$r(x_1, y_1) = c$ eşitliğini değişkenlere göre çözdüğümüzde, örneğin $x_1 = p(y_1, c)$ elde edilip η de yerine yazdığımızda, elde edilen diferansiyel denklem,

$$\frac{dy_1}{\eta[p(y_1, c), y_1]} = da \quad (2.1.11)$$

şeklindedir.

Son olarak x_1 ve y_1 ' e bağı olan c değeri yerine yazıldığında çözüm,

$$s(x_1, y_1) - a = sbt = s(x, y) \quad (2.1.12)$$

formuna girer.

Sonuçta (2.1.8) ve (2.1.9) nin çözümü olarak x_1 , y_1 değişkenlerinin belirlediği ve $a = 0$ için x ve y ye indirgenen denklem sistemi,

$$r(x_1, y_1) = r(x, y), \quad s(x_1, y_1) = s(x, y) + a \quad (2.1.13)$$

şeklinde elde edilir.

Burada a nın bütün değerlerine karşılık gelen tüm (2.1.13) dönüşümleri, Bölüm 2.1.1 de tanımlanan bir parametrelili Lie grubu yapısını oluşturur. Bu grup **Lie operatörü tarafından üretilen dönüşüm grubu** olarak adlandırılır (Cohen, 1911; Oliver, 1986; Page, 1897; Özceylan, 2006).

2.1.4. Lie serisi

$\Phi(a) = w(x + a\xi, y + a\eta)$ fonksiyonunun $\Phi(a) = \Phi(0) + a\left(\frac{d\Phi}{da}\right)_{a=0} + \frac{a^2}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{da^2}\right)_{a=0} \dots$ şeklindeki Maclaurin serisinde, (2.1.7) diferansiyel operatörü yerine yazılırsa $w(x_1, y_1) = w(x, y) + aL(w) + \frac{a^2}{2!}L^2(w) + \frac{a^3}{3!}L^3(w) + \dots$ olur ve buradan da

$$w(x_1, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} L^n(w) \quad (2.1.14)$$

serisi elde edilir ki buna w fonksiyonunun (x, y) noktası civarında **Lie Serisi** denir (Bluman ve Kumei, 1989; Oliver, 1986).

Sonuç 2.2 Lie grubunun sonlu formunu Lie serisi yardımıyla sonsuzküçük gruptan hesaplamak mümkündür. (2.1.2) Lie grubunu ve bu gruba karşılık gelen (2.1.7) sonsuzküçük üreticini göz önüne alınırsa, x_1 ve y_1 koordinatları grup aksiyomları ile x ve y koordinatlarından elde edilmiş olan koordinatlar olmak üzere eğer a 'nın her değeri için $\Theta(x_1, y_1) = \Theta(x, y)$ oluyorsa $\Theta(x, y)$ fonksiyonuna grup etkisi altında **invariant-tır(değişmezdir)** veya grubun invariantıdır denir, ki bu ifade ile de aşağıdaki teorem ifade edilir (Bluman ve Kumei, 1989; Bluman, 1990).

Teorem 2.1 $\Theta(x, y)$ fonksiyonunun invariant olması için gerek ve yeter koşul $L(\Theta) = 0$ olmasıdır (Bluman ve Kumei, 1989).

Sonuç 2.3 Bir gruba ait invariantı bulmak için (2.1.7) L diferansiyel operatörü yardımıyla,

$$L(\Theta) = \xi \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \quad (2.1.15)$$

birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denkleminin çözülmesi gerekir. Dolayısıyla $z = \Theta(x, y)$ fonksiyonu

$$\xi \frac{\partial z}{\partial x} + \eta \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2.1.16)$$

denkleminin bir çözümünü ve sonuç olarak, c_1 keyfi sabit olmak üzere,

$\Theta(x, y) = c_1$ eğrileri de (2.1.16) denkleminin karşılık gelen,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} \quad (2.1.17)$$

adi diferansiyel denkleminin çözüm eğrileri olacaktır (Oliver, 1986; Bluman ve Kumei, 1989; Bluman, 1990; Ibragimov ve Nucci, 1994; Hyden, 2000; Ibragimov, 2001; Bluman ve Anco, 2002). Lie grubu ve simetrileri ile ilgili bilgisayar programı ile tanjant vektörlerinin elde edilmesi ve çözüme ulaşılmak istenirse Cheviakov (2007), Cheviakov (2010a) ve Cheviakov (2010b) kaynaklarına bakılabilir.

2.1.5. Kanonik form ve değişkenler

Bir parametrelili Lie grubunun operatörünü istenen bir yapıya indirgeyen değişken dönüşümü bulmak, teoride her zaman mümkündür.

Bu amaçla operatörü

$$\mathbf{L}f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.1.18)$$

şeklinde elde etmek için, (2.1.19) denklemi ile verilen denklemlerin bağımsız çözümlerinin uygun ikilisi, yeni $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ değişkenleri olarak alınabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}x &= \xi(x,y) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} + \eta(x,y) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \xi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{L}y &= \xi(x,y) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + \eta(x,y) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} = \eta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Özellikle, operatörü y eksenini doğrultusunda ki ötelemelerden birine indirgemek için, yani operatörün $L = \frac{\partial}{\partial y}$ formunu almasını sağlamak için, integrallenecek denklemler,

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} &= 0 \\ \xi \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} &= 1 \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

şeklinde olacaktır.

Bu denklemlerden ilki, Bölüm 2.1.4 deki (2.1.15) formülüdür ki, bu da x bir parametrelili bir grubun $r(x,y)$ şeklindeki uygun bir değişmezi olarak alınabilineceğini ifade eder. İkinci denklemi çözmek için ise Bölüm 2.1.3 deki (2.1.9) formülünde olduğu gibi,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{d\mathbf{y}}{1} \quad (2.1.21)$$

şeklinde bulunan adi diferansiyel denklem sistemi kullanılarak Lagrange Metodu uygulanır. Burada $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$ nin çözümü olan $r(x,y) = \text{sabit}$ kullanılarak, yukarıdaki ifadede $\mathbf{y}$ elde edilir.

Burada $\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial y}$ formuna sahip Lie operatörüne, **Kanonik Formdaki operatör** ve operatörü bu forma indirgeyen değişkenlerde **Kanonik Değişkenler** denir. Her Lie operatörü $\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial y}$ şeklindeki kanonik forma indirgenebilir.

Kanonik değişkenleri bulmak için,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} \quad (2.1.22)$$

birinci dereceden diferansiyel denklemi çözmek ve bu çözüm yardımı ile (2.1.20) ifadesindeki denklemleri çözmek gerekir (Cohen, 1911; Oliver, 1986).

2.1.6. Lie gruplarının diferansiyel denklemlere uygulanışı

Eğer bir diferansiyel denklemi invaryant yani değişmez bırakan bir grup bulabilinirse, grup invaryant özelliğini ile orjinal denklemi daha kolay çözümlenebilir bir denkleme dönüştürebiliriz. Bunu ifade etmek için birinci mertebeden genel bir, $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ olmak üzere, $F(x,y,p)=0$ adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım ve bu denklemin sonsuzküçük grubundan $L^{(1)}w = \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}$ grubu altında invaryant kaldığını kabul edelim. O halde, invaryant olma özelliğinden dolayı, $L^{(1)}w = 0$ olmalıdır.

Bu durumda

$$\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial p} = 0 \quad (2.1.23)$$

denklemini çözmek gerekecektir. Bu kısmi diferansiyel denklemin, üzerinde $w(x,y,p)$ fonksiyonunun sabit kalacağı çözüm eğrileri ise,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dp}{\zeta} = \frac{d\phi}{0} \quad (2.1.24)$$

sistemine ait iki bağımsız çözümdür. Burada,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} \quad (2.1.25)$$

denkleminin bir çözümü $r(x,y) = c_1$ ve diğer bağımsız bir çözümü de $s(x,y,p) = c_2$ olarak alınırsa, $H(r)$, r 'nin keyfi bir fonksiyonu olmak üzere, bu durumda $f = s - H(u)$ fonksiyonu $L^{(1)}w = 0$ denklemini sağlayacaktır, yani $L^{(1)}(s - H(u)) = 0$ dır. Sonuç olarak $s - H(r) = 0$ denklemi $L^{(1)}$ grubu altında invaryant kalan birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin en genel hali olacaktır.

Bu ifadeler ile birinci mertebe adi diferansiyel denklemi invaryant bırakan grupları belirlemek istenirse, bunun için $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ diferansiyel denklemini ve (2.1.6) sonsuzküçük grubunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\frac{dy}{dx} - \xi_y(\frac{dy}{dx})^2] + 0(\varepsilon^2) \quad (2.1.26)$$

olacaktır. Öte yandan denklem grup altında invaryant kaldığından $\frac{dy_1}{dx_1} = F(x_1, y_1)$ olup

$$F(x_1, y_1) = F(x, y) + \varepsilon(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}) + 0(\varepsilon^2) \quad (2.1.27)$$

olduğu da bilindiğinden, sonuç olarak

$$\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)F - \xi_y F^2 \quad (2.1.28)$$

birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemini elde edilmiş olur.

Böylece temel problem; $F(x, y)$ fonksiyonu verildiğinde, bu kısmi diferansiyel denklemi sağlayan $\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$ fonksiyonlarını belirlemek olacaktır. Bu problemin tek çözümü olmadığından, denklemi sağladıkları ve $\eta = F\xi$ olduğu sürece, $\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$ fonksiyonları tamamen isteğe bağlı seçilebilir (Gazizov v.d, 2011; Hyden, 2000).

Örnek 2.1:

Bir parametrelili Lie grubu:

$$G = [T_a | T_a : R^2_{(x,y)} \rightarrow R^2_{(x_1,y_1)}, x_1 = x \cos a - y \sin a, y_1 = x \sin a + y \cos a, a \in R]$$

kümesinin bir parametrelili Lie grubu oluşturduğunu gösterelim.

i)

$$T_a(x, y) = (x \cos a - y \sin a, x \sin a + y \cos a) \text{ ve } T_b(x, y) = (x \cos b - y \sin b, x \sin b + y \cos b)$$

eşitlikleri ile yazılan $\forall T_a, T_b \in G$ için

$$(T_a * T_b)(x, y) = T_a[(x \cos b - y \sin b, x \sin b + y \cos b)]$$

$$(T_a * T_b)(x, y) = ([x \cos a - y \sin a] \cos b - [x \sin a + y \cos a] \sin b, [x \cos a - y \sin a] \sin b + [x \sin a + y \cos a] \cos b)$$

$$(T_a * T_b)(x, y) = (x \cos(a + b) - y \sin(a + b), x \sin(a + b) + y \cos(a + b))$$

elde edilir. Burada $a + b = c \in R$ aldığımızda

$$(T_a * T_b)(x, y) = T_c(x, y) \text{ işlemi sonucunda } T_c(x, y) \text{ elde edilir ve } T_c \in G \text{ dir.}$$

ii)

Yukarıdaki işlemler yardımıyla $T_a * T_b$ işleminin kuralı $T_a * T_b = T_{(a+b)}$ şeklinde ortaya çıktığından $\forall T_a, T_b, T_c \in G$ için

$$(T_a * T_b) * T_c = T_{(a+b)} * T_c = T_{a+(b+c)} T_a * T_{(b+c)} = T_a * (T_b * T_c)$$

elde edilir.

iii)

Şimdi $T_a * T_{a_0} = T_{a_0} * T_a = T_a$ eşitliklerini sağlayan $\forall T_a \in G$ için sağlayan $\exists T_{a_0} \in G$ nin varlığını araştıralım. $T_a * T_{a_0} = T_{(a+a_0)} = T_{a_0} * T_a = T_{(a_0+a)}$ ifadeleri için $a_0 = 0$ aldığımızda $T_a * T_0 = T_{(a+0)} = T_a$ ve $T_0 * T_a = T_{(0+a)} = T_a$ elde ederiz.

Burada $a_0 = 0$ parametresi ile belirlenen dönüşümün kendisi

$$T_0(x, y) = (x \cos 0 - y \sin 0, x \sin 0 + y \cos 0) = (x, y)$$

şeklinde ve düzlemdeki bütün noktaları değişmez bırakan dönüşümdür. Böylelikle elde ettiğimiz dönüşüm özdeşlik dönüşümüdür ve $T_0 \in G$ dir.

iv)

$\forall T_a \in G$ için $T_a^{-1} * T_a = T_a * T_a^{-1} = T_{a_0}$ sağlayan $\exists T_a^{-1} \in G$ nin olduğunu araştıralım.

Bu elemanın T_{-a} parametresi ile belirleneceği açıktır. Çünkü, $T_a * T_{-a} = T_{a+(-a)} = T_0$ ve $T_{-a} * T_a = T_{(-a)+a} = T_0$ olur. Burada $T_a^{-1} = T_{-a}$ yazıldığında $T_a^{-1} \in G$ elde edilir.

Sonsuz Küçük Dönüşüm:

Sonlu dönüşümleri $\phi(x, y, a) = x \cos a - y \sin a$, $\psi(x, y, a) = x \sin a + y \cos a$

şeklinde olan bir parametrelili grubun (2.1.6) sonsuz küçük dönüşümlerini kullanarak,

$$\xi(x, y) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial a} \right)_{a=0} = (-x \sin a - y \cos a|_{a=0}) = -y$$

$$\eta(x, y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)_{a=0} = (x \cos a - y \sin a|_{a=0}) = x$$

formunda bulunur.

Sonsuz Küçük Üreteç (Lie Operatörü):

Sonlu dönüşümleri ϕ ve ψ , dönüşüm grubu da ξ ve η bulunan operatörler olduğundan

sonsuzküçük üreteç $L = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ formundadır.

Lie Operatörünün ürettiği Dönüşüm Grubu:

$L = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ operatörünün ürettiği grubu bulalım.

(2.1.9), (2.1.10) ve (2.1.11) denklemleri kullanılarak,

$$\frac{dx_1}{-y_1} = \frac{dy_1}{x_1} \implies x_1 dx_1 = -y_1 dy_1 \implies x_1^2 + y_1^2 = c_1 = x^2 + y^2$$

elde edilir. Böylece $u(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2$ olur.

$\frac{dy_1}{x_1} = \frac{dt}{1}$ ve $x_1 = \sqrt{c_1 - y_1^2}$ olduğundan,

$$\int \frac{dy_1}{\sqrt{c_1 - y_1^2}} = t + c_2$$

integralinde $y_1 = \sqrt{c_1} \sin \theta$ alındığında,

$\theta = c_2 + k$ bulunur. Burada θ yerine eşiti yazıldığında

$$\tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - t = c_2 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ifadesi elde edilir.

$$v(x_1, y_1) = \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + t$$

Elde edilen iki çözümden sonlu dönüşümler $x_1 = x \cos t - y \sin t$, $y_1 = x \sin t + y \cos t$ bulunur.

Grup Operatörü Altında İnvaryant Fonksiyon:

$L = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ operatörü altında invaryant olan fonksiyonun genel tipini bulalım.

Bunun için Sonuç 2.3 yardımıyla elde edilen (2.1.17) denklemi kullanılırsa,

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \implies x dx = -y dy \implies x^2 + y^2 = c$$

elde edilir. Böylece,

$$u(x, y) = x^2 + y^2 = c$$

olur. O halde grubun invaryantları $F(u(x, y)) = F(x^2 + y^2)$ fonksiyonları olacaktır (Cohen, 1911; Oliver, 1986; Page, 1897; Özceylan, 2006).

2.2. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Lie Simetri Analizi

2.2.1. Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için simetri şartı

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için genel anlamda simetri şartını bulmak için,

$$y' = f(x, y) \tag{2.2.1}$$

formundaki adi diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Önceki bölümde gösterildiği gibi simetri dönüşümleri diferansiyel denklemin çözüm ailelerini yeni koordinatlarda değişmeden bırakır.

Yani,

$$H_\varepsilon : (x, y) \rightarrow (x_1, y_1) = (x_1(x, y, \varepsilon), y_1(x, y, \varepsilon)), \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (2.2.2)$$

şeklinde bir dönüşüm, (2.2.1) denklemi için simetri olarak kabul edilirse, bu durumda

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f(x_1, y_1) \quad (2.2.3)$$

olur ve buna (2.2.1) denklemi için simetri şartı denir. Bu şartı biraz daha kullanışlı hale getirmek için D_x , x yönündeki total (toplam) türevi göstermek üzere

$$D_x = \partial_x + y' \partial_y + y'' \partial_{y'} + \dots$$

olarak alınır; y, x in bir fonksiyonu ve x_1 ile y_1 ise x ve y nin fonksiyonu olmak üzere, D_x total türev operatörü kullanılarak,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{D_x y_1}{D_x x_1} = \frac{y_{1x} + y' y_{1y}}{x_{1x} + y' x_{1y}}$$

olarak yazılabilir. Böylece (2.2.1) denklemi için simetri şartı

$$\frac{y_{1x} + y' y_{1y}}{x_{1x} + y' x_{1y}} = f(x_1, y_1) \quad (2.2.4)$$

şeklinde elde edilir. Bu şart bazı basit adi diferansiyel denklemler için kolayca çözülebilir hale gelebiliyorsa da, genel olarak karmaşık yapıda kısmi türevli diferansiyel denklemdir ve dolayısıyla çözümü oldukça zordur.

Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için Bölüm 2.1 de kullanılan bir parametrelili Lie gruplarının Taylor seri açılımından yararlanılır. Ancak buna doğrudan geçmeden hem açılımda kullanılan hem de çözüm için kilit öneme sahip bir kavramı vermek adına düzlemdeki noktalar üzerinde, simetritelerin bir parametrelili Lie grubu etkisine bakılır. Bir Lie simetri grubu, düzlem üzerinde simetri altında invariant olmayan bir (x, y) noktası boyunca bir yörünge oluşturur. (x, y) boyunca yörünge üzerindeki noktaların koordinatları $(x_1(x, y, 0), y_1(x, y, 0)) = (x, y)$ olmak üzere $(x_1, y_1) = (x_1(x, y, \varepsilon), y_1(x, y, \varepsilon))$ şeklindedir.

Bir Lie grubunun etkisi, bir yörünge üzerindeki her bir noktayı aynı yörünge üzerindeki bir noktaya bire bir eşler. Dolayısıyla yörünge, Lie grubunun etkisi altında invarianttır.

Şimdi invariant olmayan bir (x, y) noktası boyunca yörünge göz önüne alınırsa, (x_1, y_1) noktasındaki yörünge için tanjant vektörü

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon} = \xi(x_1, y_1), \frac{dy_1}{d\varepsilon} = \eta(x_1, y_1) \quad (2.2.5)$$

olmak üzere

$$(\xi(x_1, y_1), \eta(x_1, y_1))$$

şeklindedir. Özel olarak (x, y) noktasındaki tanjant vektörü ise;

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left(\left(\frac{dx_1}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \left(\frac{dy_1}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right) \quad (2.2.6)$$

olur. Böylece Lie grubunun etkisi ile x_1 ve y_1 için (2.1.6) Taylor seri açılımları (2.2.4) ile verilen simetri şartı altında $y' = f(x, y)$ ile birlikte yazılırsa,

$$\frac{f + \varepsilon(\eta_x + f\eta_y) + 0(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon(\xi_x + f\xi_y) + 0(\varepsilon^2)} = f(x + \varepsilon\xi(x, y) + 0(\varepsilon^2), y + \varepsilon\eta(x, y) + 0(\varepsilon^2))$$

elde edilir. Şimdi bu ifadenin her iki tarafı $\varepsilon = 0$ civarında Taylor serisine açılır ve fonksiyoların analitik oldukları göz önüne alınırsa,

$$f + \varepsilon[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2] + 0(\varepsilon^2) = f + \varepsilon[\xi f_x + \eta f_y] + 0(\varepsilon^2)$$

sonucuna ulaşılır.

Buradan $0(\varepsilon^2)$ terimlerin karşılıklı eşitlenmesi ve gerekli sadeleştirmelerin yapılmasıyla,

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2 = \xi f_x + \eta f_y \quad (2.2.7)$$

bulunur. Bu şarta (2.2.1) adi diferansiyel denkleminin lineerleştirilmiş simetri şartı denir (Bluman ve Kumei, 1989; Hyden, 2000).

Örnek 2.2: $y = y(x)$, $k = k(x)$ ve c keyfi bir sabit olmak üzere birinci mertebeden $\left(\frac{y'}{k}\right)^2 + y^2 = c$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem $y' = f(x, y)$ formuna çevrilirse $c > y$ olmak üzere $f = \mp k\sqrt{c - y^2}$ biçimindedir.

(2.2.7) simetri şartı altında f fonksiyonunun $f = \mp k \sqrt{c - y^2}$ değeri yerine yazılırsa, $\eta_x + (\eta_y - \xi_x)(\mp k \sqrt{c - y^2}) - \xi_y(\mp k \sqrt{c - y^2})^2 = \xi(\mp k' \sqrt{c - y^2})_x + \eta(\frac{\mp ky}{\sqrt{c - y^2}})$ elde edilir. Şimdi y den bağımsız bir ξ ile y ye göre lineer bir η nin varlığına bakalım.

Buna göre α, β ve γ sonradan belirlenecek fonksiyonlar olmak üzere

$$\xi = \alpha(x), \quad \eta = \beta(x)y + \gamma(x)$$

olarak alınsın. Bu dönüşümler denklemde yerine yazılırsa

$$\beta'y + \gamma' \mp (\beta - \alpha')k\sqrt{c - y^2} = \mp \alpha k' \sqrt{c - y^2} \mp (\beta y + \gamma) \frac{ky}{\sqrt{c - y^2}}$$

bulunur. Burada $\sqrt{c - y^2}$ nin kuvvetlerine göre ayrıştırma yapılırsa

$$\beta = \gamma = 0 \text{ ve } \alpha'k + \alpha k' = 0$$

elde edilir. İkinci denklemden

$$(\alpha k)' = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{c_1}{k}$$

olup, böylece

$$(\xi, \eta) = (\frac{1}{k}, 0)$$

biçiminde tanjant vektörlerine ulaşılır. Ancak çözüm için bu yeterli değildir. Bunun için simetrilerin Lie grubu vasıtasıyla ulaşacağımız çözümü kolaylaştırıcı koordinatların tanımlanmasına ihtiyaç vardır (Bluman ve Kumei, 1989; Hyden, 2000; Açıl, 2013).

2.2.2. Kanonik koordinatlar

(2.2.1) ile verilen adi diferansiyel denkleminde ait simetrilerin bulunabileceği ve bu simetrilerin sadece y - yönündeki $(x_1, y_1) = (x, y + \varepsilon)$ ötelemelerinin Lie grubu içerdiğini varsayalım. Bu durumda tanjant vektörler

$$(\xi, \eta) = (0, 1) \tag{2.2.8}$$

şeklindedir olup, (2.2.7) ile verilen lineerleştirilmiş simetri şartı altında bu değerler yerine yazılırsa $f_y = 0$ bulunur. Bundan dolayı y - yönündeki ötelemelerin Lie grubuna sahip olan adi diferansiyel denklemler, $y' = f(x)$ formunda olmalıdır ve bu formda olması sebebiyle bu tip denklemlerin genel çözümü c integral sabiti olmak üzere,

$$y = \int f(x)dx + c$$

şeklinde elde edilir.

Bu tip simetrilere ait sonuçlardan faydalanarak, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler uygun koordinat dönüşümleri ile kolaylıkla çözülebilirler.

Bu koordinatların elde edilmesindeki temel hedef, (2.2.1) formunda ki diferansiyel denklemlerin sahip oldukları simetri dönüşümleri aracılığı ile bu diferansiyel denklemi yalnızca bağımlı değişken yönünde ötelemelerini içeren yeni bir diferansiyel denkleme dönüştürecek koordinatlara taşımak olacaktır. Bu koordinatlara ise **Kanonik Koordinatlar** denilmektedir. Bu işlemler altında yeni koordinatlar

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y)), \quad r_x s_y - r_y s_x \neq 0$$

ile gösterilirse göz önüne alınan yeni koordinatlarda adi diferansiyel denklemin sahip olduğu simetrilerin bir parametrelili Lie grubu olan

$$(r_1, s_1) = (r(x_1, y_1), s(x_1, y_1)) = (r, s + \varepsilon)$$

formunda olur. Böylece (r, s) noktasındaki tanjant vektörler,

$$\left(\frac{dr_1}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left(\frac{ds_1}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 1$$

biçimindedir.

Burada zincir kuralının uygulanmasıyla

$$\left(r_{x_1} \frac{dx_1}{d\varepsilon} + r_{y_1} \frac{dy_1}{d\varepsilon}\right) \big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left(s_{x_1} \frac{dx_1}{d\varepsilon} + s_{y_1} \frac{dy_1}{d\varepsilon}\right) \big|_{\varepsilon=0} = 1$$

elde edilir. Bu denklemler, (2.2.6) denklemi ile birlikte göz önüne alınırsa,

$$\xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y = 0, \quad \xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y = 1 \quad (2.2.9)$$

bulunur. Burada (r, s) kanonik koordinatları (ξ, η) nın durumlarına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

i) Eğer $\xi \neq 0$ ise r 'nin,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$$

diferansiyel denkleminin bir integrali olduğu gösterilebilir. Böylece yukarıdaki adi diferansiyel denklem için ilk integral $\phi(x, y) = c, \quad \phi_y \neq 0$

biçiminde olup buradan çözüm aşağıdaki gibi bulunur;

$$r = \phi(x, y) \text{ ve } s = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(x, r))}\right) \big|_{r=r(x, y)}$$

ii) Eğer $\xi = 0$ ise (2.2.9) nin ilk denkleminde $r_y = 0$ olduğu görülür. Buradan basitçe,

$$r = x \text{ ve } s = \left(\int \frac{dy}{\eta(r,y)} \right) |_{r=x}$$

şeklindeki kanonik koordinatlara ulaşılır.

(r,s) kanonik koordinatları bulunduktan sonra (2.2.1) denklemi bu koordinatlar cinsinden

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{s_x + y' s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{s_x + f(x,y) s_y}{r_x + f(x,y) r_y} \quad (2.2.10)$$

şeklinde yazılır. (2.2.10) denkleminin sağ tarafı r ve s nin bir fonksiyonu olarak ifade edilirse (2.2.1) ile ifade edilen adi diferansiyel denklem dönüştürülmüş koordinatlarda

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r,s)$$

olmalıdır.

Ancak $(r_1, s_1) = (r, s + \varepsilon)$ ötelemelerinin bir parametrelili Lie grubuna sahip olduğunda $\Omega_s = 0$ olması nedeni ile yukarıdaki adi diferansiyel denklem

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r)$$

formunda olup bunun genel çözümü

$$s = \int \Omega(r) dr + c$$

şeklinde dir. Böylece (orjinal) adi diferansiyel denklemin genel çözümü

$$s(x,y) - \int^{r(x,y)} \Omega(r) dr + c = 0$$

olarak elde edilir (Bluman ve Kumei, 1989; Hyden, 2000). Aşağıda daha önce Örnek 2.2 de tanjant vektörünün belirlendiği denklem için kanonik koordinatlar kullanılarak çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır.

Örnek 2.3: $k = k(x)$ ve $c > y$ olmak üzere $(\xi, \eta) = (\frac{1}{k}, 0)$ şeklindeki tanjant vektörüne sahip $(\frac{y'}{k})^2 + y^2 = c$ adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Burada $\xi \neq 0$ olduğundan $\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = 0$ yazılır ve dolayısıyla $y = c$ olup, böylece

$$r = y, s = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(x, r))} \right) \Big|_{r=y(x, r)} = \int k(x) dx$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{s_x + y' s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{k(x)}{y'} = \frac{k}{\pm k \sqrt{c - y^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{c - y^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{c - r^2}}$$

diferansiyel denkleminin integrali alınarak

$$s = \pm \int \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\sqrt{c}}\right)^2}} = \pm \arcsin\left(\frac{r}{\sqrt{c}}\right) + c_1, c_1 = \text{sabit}$$

çözümü elde edilir. Burada r ve s nin orjinal değişkenler cinsinden karşılıkları yazılıp düzenlenirse

$$y = \pm \sqrt{c} \sin[\int k(x) dx - c_1]$$

biçiminde genel çözümü bulunur (Bluman ve Kumei, 1989; Açıl, 2013).

Örnek 2.4: $y' = \frac{e^x}{y} + y$ diferansiyel denkleminin çözümünü simetri şartını kullanarak bulalım. Başlangıç olarak denklemi lineerleştirilmiş simetri şartı altında yerine yazalım. Bu durumda

$$\eta_x - \xi_y \left(\frac{e^x}{y} + y\right)^2 + (\eta_y - \xi_x) \left(\frac{e^x}{y} + y\right) - \xi \left(\frac{e^x}{y}\right) + \eta \left(1 - \frac{e^x}{y^2}\right) = 0$$

bulunur. Burada işlem kolaylığı açısından $\xi = 1$ ve $\eta = \eta(y)$ olarak ele alıp simetri şartında yerine yazılırsa,

$$\eta_y \left(\frac{e^x}{y} + y\right) - \left(\frac{e^x}{y}\right) + \eta \left(1 - \frac{e^x}{y^2}\right) = 0$$

bulunur. Burada bazı terimlerin sadece y ye bağlı olduğu göz önünde bulundurulursa $y\eta_y - \eta = 0$ olur ve $\eta = cy$ bulunur.

Kalan terimler yazılırsa $\eta_y + \frac{\eta}{y} - 1 = 0$ olur ve $\eta = cy$ ile de c nin $1/2$ ye eşit olduğu görülür. Böylece tanjant vektörü

$$(\xi, \eta) = (1, y/2)$$

şeklinde bulunur.

$\xi \neq 0$ olmasından dolayı $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}$ olup buradan $c = ye^{-x/2}$ elde edilir. Bu durumda, $r = c = ye^{-x/2}$

$$s = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(x, r))} \right) \Big|_{r=r(x, y)} = \int \frac{dx}{1} = x$$

Yani kanonik koordinatı $(r, s) = (ye^{-x/2}, x)$ şeklinde elde edilmiş olur. Diğer yandan

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{s_x + y' s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{1}{-1/2 ye^{-x/2} + ye^{-x/2} (y + \frac{e^x}{y})} = \frac{1}{1/2 ye^{-x/2} + y^{-1} e^{x/2}}$$

diferansiyel denkleminde $\frac{1}{1/2 ye^{-x/2} + y^{-1} e^{x/2}}$ yerinerve snin simetri şartı ile bulunan yeni değerleri cinsinden yazılırsa,

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{r^2/2 + 1}$$

bulunur. Diferansiyel denklemin integrali alınarak

$$s = \ln(r^2/2 + 1) + c, \quad c = sbt$$

çözümü elde edilir. Burada r ve s nin orjinal değişkenler cinsinden karşılıkları yazıp düzenlenirse $= \pm \sqrt{ce^{2x} - 2e^x}$ biçiminde genel çözümü bulunur (Starrett, 2007).

Örnek2.5: $y' = 1 + \frac{1-y^2}{xy}$

diferansiyel denklemini göz ününe alalım. İlk olarak denklemini, simetri şartı altında yerine yazalım. Ancak bundan önce y den bağımsız bir ξ ile y ye göre lineer bir η nın varlığına bakalım. Buna göre α, β ve γ sonradan belirlenecek fonksiyonlar olmak üzere $\xi = \alpha(x), \eta = \beta(x)y + \gamma(x)$

olarak alınsın. Bu dönüşümler yardımıyla lineerleştirilmiş simetri şartı yazılırsa

$$\beta' y + \gamma' + (\beta - \alpha') \left(1 + \frac{1-y^2}{xy}\right) = \alpha \left(\frac{y^2-1}{x^2 y}\right) - (\beta y + \gamma) \left(\frac{1+y^2}{xy^2}\right)$$

bulunur.

Burada aşağıdaki gibi y terimlerinin katsayıları yardımıyla,

$$1) y^{-2} : \gamma = 0$$

$$2) y^{-1} : (\beta - \alpha')/x = -\alpha/x^2 - \beta/x$$

$$3) y^0 : \beta = \alpha'$$

olur, burada $\gamma = 0$ ve $\alpha + \alpha/x = 0$ elde edilir. Bu denklemin çözümü ile $\alpha = \frac{c}{x}$ bulunur. Bu sonucun 3 koşulunda yerine yazılmasıyla $\beta = \frac{-c}{x^2}$ olduğu açıktır. Böylece

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{c}{x}, y\frac{-c}{x^2}\right)$$

biçiminde tanjant vektörlerine ulaşılır.

$\xi \neq 0$ olduğundan $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ olup buradan $c = xy$ olur.

Bu durumda ,

$$r = c = xy$$

$$s = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(x, r))}\right) \Big|_{r=r(x, y)} = \int \frac{dx}{c/x} = \frac{1}{2}x^2 \text{ dir.}$$

Yani kanonik koordinatı $(r, s) = (xy, \frac{1}{2}x^2)$ şeklinde bulunur.

Diğer yandan

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{s_x + y' s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{x + 0}{y + x\left(\frac{1 - y^2 - xy}{xy}\right)}$$

diferansiyel denkleminde $\frac{x + 0}{y + x\left(\frac{1 - y^2 - xy}{xy}\right)}$ yerine r ve s nin bulunan değerleri cinsin-

den yazarsak,

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{1 + r}$$

bulunur. Diferansiyel denklemin integrali alınarak

$$s = r - \ln(1 + r) + c, \quad c = sbt$$

çözümü elde edilir. Burada r ve s nin orjinal değişkenler cinsinden karşılıkları yazıp düzenlenirse

$$\frac{1}{2}x^2 = xy - \ln(1 + xy) + c$$

denklemi elde edilir. Burada y nin çözümlenmesi ile x 'e bağlı olmak üzere denklemin genel çözümü elde edilir (Starrett, 2007).

Örnek 2.6: $y' = ay - by^2$ Lojistik diferansiyel denkleminin çözümünü simetri şartını kullanarak bulalım. Burada a, b sabitlerdir. İlk önce lineerleştirilmiş simetri şartı altında denklem yerine yazılarak simetri denklemi bu simetri şartı yardımıyla;

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)(ay - by^2) - \xi_y(ay - by^2)^2 - \eta(a - 2by) = 0$$

şeklinde elde edilir. Burada $\eta = 0$ seçersek simetri şartı yardımıyla ξ nin bir sabite eşit olduğunu yani 1 olarak seçebileceğimizi görürüz. Bu durumda tanjant vektörü

$$(\xi, \eta) = (1, 0)$$

şeklinde bulunur.

$\xi \neq 0$ olduğundan $\frac{dy}{dx} = 0$ olup buradan $c = y$ olur. Bu durumda ,

$$r = c = y$$

$$s = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(x, r))} \right) \Big|_{r=r(x, y)} = \int \frac{dx}{1} = x$$

Yani kanonik koordinatı $(r, s) = (y, x)$ şeklinde bulunur.

Diğer yandan

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{s_x + y' s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{1}{ay - by^2}$$

diferansiyel denkleminde $ay - by^2$ yerine r ve s nin bulunan değerleri cinsinden yazarsak $\frac{ds}{dr} = \frac{1}{ar - br^2}$ bulunur.

Diferansiyel denklemin integrali alınarak

$$s = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{r}{ar - br^2}\right) + c, \quad c = sbt$$

çözümü elde edilir. Burada r ve s nin orjinal değişkenler cinsinden karşılıkları yazıp düzenlenirse

$$e^{a(x+c)} = \frac{y}{a - by}$$

denklemini elde edilir.

Burada y nin çözümlenmesi ile

$$y = \frac{e^{a(x+c)} a}{1 + be^{a(x+c)}}$$

şeklinde Lojistik diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur.

2.3. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Lie Simetri Analizi

2.3.1. İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için simetri şartı

Genel ikinci mertebeden,

$$y'' = w(x, y, y') \quad (2.3.1)$$

formunda olan adi diferansiyel denklemi göz önüne alınırsa, öncelikle bu formdaki denklemler için simetri şartı belirlenir. Ancak burada önceki bölümden farklı olarak, birinci mertebeyi de kapsayacak şekilde lineerleştirilmiş simetri şartını bulunması daha kolaydır. Bu simetri şartını bulmak için Bölüm 2.2' de buluna (ξ, η) tanjant vektörleri ile,

$$L = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.3.2)$$

ile gösterilen L sonsuzküçük üreticinin kullanılması gerekir. Bu verilen ifadeler yardımı ile,

$$\eta^{(k)} = D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi, k = 1, 2, \dots \quad (2.3.3)$$

olmak üzere L sonsuzküçük üretici,

$$L^{(n)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial y'} + \eta^{(2)} \frac{\partial}{\partial y''} + \dots + \eta^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \quad (2.3.4)$$

şeklinde uzanımlı form olarak adlandırılan hale getirilebilir. Buna göre ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için lineerleştirilmiş simetri şartı,

$$L^{(2)}(y'' - w(x, y, y')) = 0 \quad (2.3.5)$$

olarak ortaya çıkar. Buradan,

$$\eta^{(2)} = \xi w_x + \eta w_y + \eta^{(1)} w_{y'} \quad (2.3.6)$$

olduğu görülür.

(2.3.3) denklemi ile verilen formülün burada kullanılmasıyla

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2$$

$$\eta^{(2)} = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y''$$

bulunur. Bu değerlerin (2.3.1) denklemi göz önünde bulundurularak (2.3.6) denkleminde yerine yazılmasıyla, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için lineerleştirilmiş simetri şartı

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')w =$$

$$\xi w_x + \eta w_y + (\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2)w_{y'} \quad (2.3.7)$$

şeklinde elde edilir.

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için simetri şartının birinci mertebeye göre farkı y nin türevlerini içermesidir. Bu fark ile lineerleştirilmiş simetri şartı altında $\frac{dy}{dx}$ in kuvvetlerine göre ayrıştırma yapılabilmektedir. Bu şekilde ortaya çıkacak denklem sistemine **belirleme denklemleri** denir (Bluman ve Kumei, 1989; Hyden, 2000).

Örnek 2.7: $y'' = \sin(y'^2) + 1$

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemini göz önüne alarak Bölüm 2.3.1 de belirtilen adımları sırasıyla uygulayalım.

Öncelikle bu denklem için w fonksiyonu ve türevleri,

$$y'' = w(x, y, y') = \sin(y'^2) + 1$$

$$w_x = 0$$

$$w_y = 0$$

$$w_{y'} = 2y' \cos(y'^2)$$

şeklinde dir. Denklem (2.3.7) ile verilen lineerleştirilmiş simetri şartı altında bu değerler yerine yazılırsa,

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')(\sin(y'^2) + 1) = (\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2)(2y' \cos(y'^2))$$

elde edilir. Burada türevli ifadelerin katsayıları ayrıştırılırsa,

$$\xi_y = 0, \xi_{xx} = 0$$

$$\eta_x = 0, \eta_y - \xi_x = 0$$

$$\eta_{yy} = 0, \eta_y - 2\xi_x = 0$$

belirleme denklemlerine ulaşılır.

Böylece bulunan kısmi diferansiyel denklemin sistemi çözülerek, c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere

$$\xi = c_1, \eta = c_2$$

dönüşümleri bulunur. Buradan tanjant vektörler,

$$(\xi_1, \eta_1) = (1, 0), (\xi_2, \eta_2) = (0, 1)$$

olup dolayısıyla,

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x}, L_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

biçiminde sonsuzküçük üreteçlere ulaşılır (Bluman ve Kumei, 1989; Hyden, 2000; Açıl, 2013).

Sonsuzküçük üreteçler elde edildikten sonra tıpkı birinci mertebede yapıldığı gibi indirgeme işlemleri yapılır.

2.3.2. Kanonik koordinatlar kullanılarak mertebe indirgenmesi

Yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümünde de mertebesi küçük olan diferansiyel denklemlerde yapıldığı gibi kanonik koordinatlardan faydalanılır. Şimdi,

$$y'' = w(x, y, y')$$

formundaki diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu diferansiyel denklemin $L = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y$ şeklinde bir sonsuzküçük dönüşüme sahip olduğunu düşünelim. Önceki bölümden ikinci mertebeden diferansiyel denklemler için simetri koşulunun,

$$L^{(n)}(y'' - w(x, y, y')) = 0$$

şeklinde olduğu göz önüne alınırsa,

$$\eta^{(k)} = D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi, \quad k = 1, 2, \dots$$

olmak üzere,

$$L^{(n)} = \partial_y$$

yazılır ve dolayısıyla lineerleştirilmiş simetri şartı ile $w_y = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu nedenle de diferansiyel denklemin yeni formu aşağıdaki gibi olur:

$$y'' = w(x, y')$$

Dolayısıyla $y'(x) = v(x)$ dönüşümü ile

$$v' = w(x, y)$$

indirgenmiş diferansiyel denklemi elde edilir. Elde edilen bu diferansiyel denklemin çözülebildiği ve bu denklemin genel çözümünün de

$$v = f(x, c_1)$$

olduğu varsayılırsa bu takdirde (2.3.1) diferansiyel denklemi,

$$y' = f(x, c_1)$$

halini alır ve bu ifadenin genel çözümü ise

$$y = \int f(x, c_1) + c_2$$

şeklindedir (Bluman ve Kumei, 1989; Hyden, 2000).

Örnek 2.8: İkinci mertebeden $y'' = \frac{3y'^2}{2y} + 2y^3$ diferansiyel denklemi $L = \partial_x$ tarafından üretilen bir parametrelili simetrilerin bir tek-parametrelili ailesine sahiptir. Bu üreteçten $(\xi, \eta) = (1, 0)$ olup (r, s) kanonik koordinatları,

$$r = y, s = x$$

olarak yazılır ve buradan

$$\frac{ds}{dr} = t = \frac{1}{y'}, \frac{d^2s}{dr^2} = \frac{dt}{dr} = \frac{-y''}{y'^3} = \frac{-3}{2yy'} - 2\frac{y^3}{y'^3} = -\left(\frac{3t}{2r} + 2r^3t^3\right)$$

bulunur. Mertebe indirgemesi için $v(r) = t(r)$ eşitliği kullanılırsa, birinci mertebeden

$$v' = \frac{-3v}{2r} - 2r^3v^3$$

denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümlerini elde etmek için, önce tanjant vektörleri

$$(\xi^\sim, \eta^\sim) = (0, r^3v^3)$$

biçiminde bulunur. Buradan yeni kanonik koordinatlar

$$r^\sim = r, \quad s^\sim = \frac{-1}{2r^3v^2}$$

olur. Böylece

$$\frac{ds^\sim}{dr^\sim} = 1/2\left(\frac{3}{r^4v^2} + 2\frac{v'}{r^3v^3}\right) = -2$$

şeklinde olup $c_1 = sbt$ olmak üzere $s^\sim = c_1 - 2r^\sim$ dir.

O halde (r, v) kanonik koordinatlar cinsinden denklem

$$v = \mp \sqrt{\frac{1}{2r^3(2r - c_1)}}$$

olup buradan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$x = \mp \int \frac{dy}{\sqrt{2y^3(2y - c_1)}} + c_2 = \mp \frac{\sqrt{2y^3(2y - c_1)}}{c_1 y^2} + c_2$$

olarak elde edilir (Bluman ve Kumei, 1989; Hyden, 2000; Açıl, 2013).

Örnek 2.9: İkinci mertebeden $y'' = \frac{y'^2}{y} + (y - \frac{1}{y})y'$ diferansiyel denklemi $L = \partial_x$ tarafından üretilen bir parametrelili simetrilerin bir tek-parametrelili ailesine sahiptir. Bu aile yardımıyla diferansiyel denklemi simetri metodu yardımıyla çözelim.

Verilen aile yardımıyla denklemin tanjant vektörü $(\xi, \eta) = (1, 0)$ olarak bulunur. Buradan denklemin kanonik koordinatlarını $\xi = 0$ olduğundan $r = y$, $s = x$ olarak bulabiliriz ve buradan

$$\frac{ds}{dr} = v = \frac{1}{y'}, \frac{d^2s}{dr^2} = \frac{dv}{dr} = \frac{-y''}{y'^3} = \frac{-(\frac{y'^2}{y} + (y - \frac{1}{y})y')}{y'^3} = (\frac{1}{r} - r)v^2 - \frac{v}{r}$$

bulunur. Mertebe indirgemesi için $u(r) = v(r)$ eşitliği kullanılırsa, birinci mertebeden

$$u' = (\frac{1}{r} - r)u^2 - \frac{u}{r}$$

denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümlerini elde etmek için, önce tanjant vektörleri $(\xi^\sim, \eta^\sim) = (0, u^2 r)$ biçiminde bulunur. Buradan yeni kanonik koordinatlar

$$r^\sim = r, s^\sim = \frac{-1}{ur}$$

olur. Böylece ifadeleri $\frac{ds^\sim}{dr^\sim}$ de yerine yazıp integral alınırsa $c_1 = sbt$ olmak üzere (r, u) kanonik koordinatlar cinsinden denklem

$$u = -\frac{1}{c_1 r - r^2 - 1}$$

olup buradan diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir (Bluman ve Kumei, 1989; Hyden, 2000; Açıl, 2013);

$$x = \int -\frac{1}{c_1 y - y^2 - 1} + c_2$$

2.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Lie Simetri Analizi

Genel kesirli mertebeden

$$D_x^\alpha y(x) = f(x, y) \quad (2.4.1)$$

formunda, mertebesi α olan diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $\alpha, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n - 1 \leq \alpha < n$ aralığındadır.

Burada kullanılan $D_x^\alpha y(x)$, operatörü Riemann-Liouville kesirli türev operatörü olmak üzere

$$D_x^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y(t)}{(x - t)^\alpha} dt \quad (2.4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Gamma(\cdot)$, Gamma fonksiyonudur.

Kesirli mertebe için genelleştirilmiş Leibnitz Kuralı ise

$$D_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right) D_x^{\alpha-n} f(x) g^n(x), \quad \alpha > 0 \quad (2.4.3)$$

şeklindedir (Oldham ve Spainer, 1974; Samko vd., 1993; Podlubny, 1999; Kilbas, 2006; Gazizov v.d,2007).

Lie grup teorisi düşüncesi ışığında sonsuzküçük dönüşümün n . mertebeden ve α mertebeden genişletilmesiyle

$$x_1 = x + a\xi(x, y) + 0(a^2) \quad (2.4.4)$$

$$y_1 = y + a\eta(x, y) + 0(a^2) \quad (2.4.5)$$

$$y_1^n = y^n(x) + a\eta^n(x, y) + 0(a^2) \quad (2.4.6)$$

$$D_x^\alpha y_1 = D_x^\alpha y + a\eta^n(x, y) + 0(a^2) \quad (2.4.7)$$

şeklinde sonsuzküçük dönüşümler elde edilir.

Bu eşitliklerin kullanılmasıyla n . mertebeden genişletilmiş sonsuzküçük üreteç

$$\eta^n = D(\eta^{(n-1)}) - y^{(n)}D(\xi) \quad (2.4.8)$$

olup buradaki D , adi mertebeden diferansiyel denklemler de tanımlandığı gibi total türev operatörüdür. (2.4.8) denklemi ile verilen ifadeye *Prolongation formülü* de denilmektedir. Bu ifade D total türev tanımı ve $y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$ ifadesi yardımıyla,

$$\eta^n = D^n(\eta - \xi y^{(1)}) + \xi y^{(n+1)} \quad (2.4.9)$$

şeklinde de tanımlanabilir. (2.4.9) eşitliği ile verilen tanım yardımıyla α mertebe kesirli denklemler için Prolongation formülü

$$\eta^{(n)} = D_x^{(\alpha)}(\eta - \xi y^{(1)}) + \xi D_x^{(\alpha+1)}y \quad (2.4.10)$$

şeklinde bulunur. Prolongation formülü α mertebeden kesirli denklemler için kolayca şu şekilde genelleştirilebilir (Ovsiannikov, 1982; Hyden, 2000):

$$\eta^\alpha = D_x^\alpha \eta + D_x^\alpha (D_x(\xi)y) + \xi D_x^{\alpha+1}y - D_x^{\alpha+1}(\xi y) \quad (2.4.11)$$

Başta verdiğimiz x_1, y_1 sonsuzküçük üreteçleri ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemin simetri grup dönüşümünün $D_x^\alpha y_1 = f(x_1, y_1)$ olduğu göz önünde bulundurulursa, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için simetri şartı

$$(\eta^\alpha - \frac{\partial f}{\partial x} \xi - \frac{\partial f}{\partial y} \eta)|_{D_x^\alpha y = f(x,y)} = 0 \quad (2.4.12)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada ki η^α ile verilen Prolongation formülü olup (2.4.3) de verdiğimiz genelleştirilmiş Leibnitz Kuralı ile bu ifade

$$\eta^\alpha = D_x^\alpha \eta + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{\alpha-n} y D_x^{n+1} \xi \quad (2.4.13)$$

şeklinde de ifade edilebilir (Gaziziov, 2007). Kesirli diferansiyel denklemlerin simetrisi üzerine daha fazla bilgi edinmek istenirse, Oldham ve Spanier (1974), Samko v.d. (1993) ve Baleanu (2012) çalışmalarına bakılabilir.

2.5. Kısmi Diferansiyel Denklemler için Lie Simetri Analizi

Genel formu

$$F(t, x, u, u_x, u_t, \dots) = 0 \quad (2.5.1)$$

olan n . mertebeden bir kısmi diferansiyel denkleme ait bir parametrelili Lie grup dönüşümü,

$$\bar{t} = t + \mu \delta(t, x, u)$$

$$\bar{x} = x + \mu \xi(t, x, u)$$

$$\bar{u} = u + \mu \eta(t, x, u)$$

$$\bar{u}_i = u_i + \mu \eta_i(t, x, u, u_1)$$

...

$$\bar{u}_{i,j,\dots,kl} = u_{i,j,\dots,k} + \mu \eta_{i,j,\dots,k}(t, x, u, u_1, \dots, u_k)$$

şeklindedir. Burada μ önceki bölümlerde tanımlandığı gibi grup parametresidir.

Elde edilen bu dönüşüme karşılık gelen Lie diferansiyel operatörü,

$$L = \delta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.5.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \delta(t, x, u)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \xi(t, x, u)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \eta(t, x, u)$$

tanjant vektörleri tanımlanabilir. Lie diferansiyel operatörün tanımının kullanılmasıyla,

$$L^n = L + \eta_i(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u_i} + \dots + \eta_{i,j,\dots,k}(t, x, u, u_1, \dots, u_k) \frac{\partial}{\partial u_{i,j,\dots,k}}$$

olarak elde edilir. Burada kullanılacak sonsuzküçük üreteçler önceki bölümde tanımlanan D total türev operatörü yardımıyla,

$$\eta_i = D_i \eta - (D_i \delta) u_t - (D_i \xi) u_x$$

şeklinde tanımlanır.

Burada birkaç ifadenin yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= D_t(\eta) - u_t D_t(\delta) - u_x D_t(\xi) \\
&= \eta_t + (\eta_u - \delta_t)u_t - \xi_t u_x - \delta_u (u_t)^2 - \xi_u u_t u_x \\
\eta_2 &= D_x(\eta) - u_t D_x(\delta) - u_x D_x(\xi) \\
&= \eta_x + (\eta_u - \delta_x)u_x - \delta_x u_t - \xi_u (u_x)^2 - \delta_u u_t u_x \\
\eta_{11} &= D_t(\eta_1) - u_{tt} D_t(\delta) - u_{tx} D_t(\xi) \\
&= \eta_{tt} + (2\eta_{tu} - \delta_{tt})u_t + (\eta_{uu} - 2\delta_{tu})(u_t)^2 - \delta_{uu}(u_t)^3 - 3\delta_u u_t u_{tt} - \xi_{tt} u_x - 2\xi_{ut} u_t u_x - \\
&\quad 2\xi_t u_{tx} - \xi_{uu} u_x (u_t)^2 - \xi_u u_x u_{tt} - 2\xi_u u_t u_{xt} \\
\eta_{22} &= D_x(\eta_2) - u_{tx} D_x(\delta) - u_{xx} D_x(\xi) \\
&= \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x - \delta_{xx} u_t + (\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\delta_x u_{tx} + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})(u_x)^2 - \\
&\quad 2\delta_{xu} u_t u_x - \xi_{uu}(u_x)^3 - \delta_{uu} u_t (u_x)^2 - 3\xi_u u_x u_{xx} - \delta_u u_t u_{xx} - 2\delta_u u_x u_{tx}
\end{aligned}$$

şeklinde çözüm için gerekli ifadeler bulunur. Burada, örneğin $u_t = u_{xx}$ denklemi için 2. mertebeden genişletilmiş Lie operatörü L ile $\eta_1 = \eta_{22}$ eşitliği elde edilip, çözüm için simetriler bulunur. Bu simetriler bulunduktan sonra ise, δ, ξ ve η yardımıyla kısmi mertebeden diferansiyel denklemi simetri çözümü ile adi diferansiyel denkleme aşağıdaki gibi indirgeyebiliriz.

$$\frac{dt}{\delta(t, x, u)} = \frac{dx}{\xi(t, x, u)} = \frac{du}{\eta(t, x, u)}$$

Bu sistemden elde edilen iki integralin çözülmesiyle elde edilen ifadeleri v ve z olarak adlandıırırsak indirgeme işlemi için $w(z) = v$ alınır. Bu ifadenin verilen kısmi diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla denklem adi diferansiyel denkleme indirgenir sonrasında bu adi diferansiyel denklemin w çözümü kısmi diferansiyel denklemin çözümü olarak elde edilir (Clarkson ve Elizabeth, 1994; Gbetoula, 2011; Verna vd., 2014; Kiraz, 2007).

3. DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN LİE SİMETRİ ANALİZİ İLE GENEL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, Lie simetri analizi ile bazı diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunması ele alınacaktır. İlk olarak Hanta-virüs model sistemi ele alınıp, adi mertebeden, kesirli mertebeden ve kısmi mertebeden türevli halleri için genel çözüm araştırılacaktır. Daha sonrasında ise Granül hücre üretimi modeli ele alınıp, farklı $\delta(t)$ durumlarına karşılık gelen çözümleri araştırılacaktır.

3.1. Hanta-virüs Sistemi için Lie Simetri Analizi

Hanta-virüsü aslında farelerden bulaşan ve virüslerin genetik olarak tek zincirli RNA içermesi sebebi ile özellikle öldürücü olabilen bir hastalıktır. İlk kez Güney Kore'deki Hanta Nehri'nde keşfedilen virüsün çeşitli türleri vardır. Hanta-virüs dinamiklerini daha iyi anlamak ve analiz etmek için Abramson vd.(2002) tarafından önerilen ve bu tez çalışmasında incelenecek olan matematiksel model, Abramson-Kenkre modeli olarak da bilinir. Allen vd.(2003) de Hanta-virüs enfeksiyonu için bir adi diferansiyel denklem modeli önerdi. Allen vd. (2006) da, dişi ve erkek kemirgenlerdeki hanta-virüs enfeksiyonu için iki yeni model daha geliştirmiştir. Abramson-Kenkre modeli infecte(hastalıklı) fareden susceptible(duyarlı) fareye virüs geçişini tanımlayan bir lineer olmayan diferansiyel denklem sistemidir.

Abramson vd. (2003) de kısmi diferansiyel denklemi ile tanımlanan model, tüm fare (mice) popülasyonunu duyarlı ve hastalıklı olmak üzere iki gruba ayırmıştır.

Adi mertebeden türe ve sahip Hanta-virüs modeli Abramson vd.(2002) de aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\frac{dM_s}{dt} = b(M_s + M_i) - cM_s - \frac{M_s(M_s + M_i)}{K} - aM_sM_i \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -cM_i - \frac{M_i(M_s + M_i)}{K} + aM_sM_i \quad (3.1.2)$$

Lineer olmayan bu diferansiyel denklem sisteminde,

M_s : Hasta olmayan farelerin nüfusunu

M_i : Hastalıklı farelerin nüfusunu

a : Bulaşma oranını,

b : Doğum oranını,

c : Ölüm oranını

K : Çevre taşıma kapasitesini göstermektedir.

Bu modelde yayılma süreci olarak fare hareketi göz ardı edilmiş ve tüm nüfus duyarlı ve hastalıklı fareler olmak üzere iki durumdan oluşmuştur.

(3.1.1)-(3.1.2) diferansiyel denklem sisteminin taraf taraf toplanması ile elde edilen Lojistik diferansiyel denklem,

$$\frac{dM}{dt} = (b - c)M - \frac{M^2}{K} \quad (3.1.3)$$

şeklinde. Burada $M = M_s + M_i$ toplam nüfusu gösterir. Bundan sonraki aşamalarda, Lojistik diferansiyel denklemin Lie simetri metodu ile genel çözümden yararlanılarak, geriye yerine yerleştirme yapıp M_s ve M_i nüfusları hesaplanacaktır.

Ayrıca kesirli mertebeden türeve sahip Hanta-virüs modeli ise;

$$D_t^\alpha M_s = b(M_s + M_i) - cM_s - \frac{M_s(M_s + M_i)}{K} - aM_sM_i \quad (3.1.4)$$

$$D_t^\alpha M_i = -cM_i - \frac{M_i(M_s + M_i)}{K} + aM_sM_i \quad (3.1.5)$$

şeklinde tanımlanır, burada tanımlanan D_t^α kesirli türev operatörüdür ve Riemann Li-ouville tanımına göre kullanılmıştır. Kesirli türev, ekosistemlerde homojen olmayan karakterleri tanımlamak için kullanılır. Ancak burada kesirli türev kullanılırken rakip türün varlığına da dikkat edilir. α parametresi buradan rakip türün yoğunluğuna karşılık gelmektedir (Abdullah ve Ismail, 2011; Rida vd., 2012).

Bilindiği üzere lineer olmayan diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin genel çözümünü bulmak oldukça zordur. Bu sorun bazı problemlerde Lie simetri metodu yöntemi ile ortadan kaldırılabilir. Detaylı literatür taraması yapıldığında Hanta-virüs modelinin genel çözümüne rastlanmamış olup, bazı nümerik yöntemlerle yaklaşık çözümler elde edilmeye çalışılmıştır (Chen ve Clemence, 2006a; Chen ve Clemence, 2006b; Allen v.d, 2006; Wesley,2008; Goh vd.,2009; Ruan ve Jianghong, 2009; Gokdogan v.d, 2012; Ding vd.,2013; Yuzbaşı ve Sezer, 2013; Karadem ve Ongun, 2016).

Son olarak ise Kısmi mertebeden türeve sahip Hanta-virüs sistemi ise Abramson (2003)'de,

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} + b(M_s + M_i) - cM_s - \frac{M_s(M_s + M_i)}{K} - aM_sM_i \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 M_i}{\partial x^2} - cM_i - \frac{M_i(M_s + M_i)}{K} + aM_sM_i \quad (3.1.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Hanta-virüs sisteminin kısmi haline ait denklemlerinin taraf tarafa toplanması ile elde edilen Lojistik denklem özel olarak Fisher-Kolmogorov denklemi olarak adlandırılır.

Literatür çalışmalarına bakıldığında bu denkleme ait çözümlerin elde edilmesinde farklı yöntemlerle çalışıldığı görülmüştür (Ablowitz ve Anthony, 1979; Kaushal vd., 2006).

Bu bölümün son başlığı altında ise bu Fisher-Kolmogorov denkleminin Lie simetri ile çözümleri araştırılacaktır.

Hanta-virüs sistemi için bu tez çalışması boyunca analitik çözümlerin hesaplanması ve sabitlerin bulunmasında kullanılması için $a = 0.1$, $b = 1$, $c = 0.5$ ve $K = 20$ olarak alınmıştır. Bu verilen ifadelerle ilişkin sabitler hem adi kem kesirli hem de kısmi mertebeden hanta-virüs sistemlerinde aynı alınmıştır (Abramson ve Kenkre, 2002).

3.1.1. Adi mertebeden hanta-virüs sistemi

Denklem (3.1.1) ve (3.1.2) ile verilen Hanta virüs modelinde taraf tarafa toplama işlemi yapıp $M = M_s + M_i$, olarak alınırsa yeni denklem

$$\frac{dM}{dt} = (b - c)M - \frac{M^2}{K} \quad (3.1.8)$$

şeklinde Lojistik diferansiyel denkleme dönüşür. Denklem (3.1.8) denkleminin lineerleştirilmiş simetri şartı altında yerine yazılmasıyla tanjant vektörleri $(\xi, \eta) = (1, 0)$ olarak elde edilir.

Sonrasında $\xi \neq 0$ olması nedeniyle ve kanonik koordinatlar yardımıyla;

$$r = c \quad \text{ve} \quad s = x$$

şeklinde bulunur. Daha sonra bulunan bu kanonik koordinatlarda $\frac{ds}{dr}$ ile ifade edilen adi diferansiyel deklemler çözülerek,

$$M = \frac{K(b-c)e^{(C_1b-C_1c+bt-ct)}}{-1 + e^{(C_1b-C_1c+bt-ct)}} \quad (3.1.9)$$

çözümü elde edilir. Burada C_1 keyfi sabittir.

(3.1.8) denkleminde $M - M_i = M_s$ şeklinde çekilip, (3.1.9) denklemi ile genel çözümü bulunan M değeri ile (3.1.2) denklemi tekrar yazılırsa, bu denklemin yeni hali;

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} = -cM_i - \frac{M_i \left(\left(\frac{K(b-c)e^{(C_1b-C_1c+bt-ct)}}{-1 + e^{(C_1b-C_1c+bt-ct)}} - M_i \right) + M_i \right)}{K} + \\ a \left(\frac{K(b-c)e^{(C_1b-C_1c+bt-ct)}}{-1 + e^{(C_1b-C_1c+bt-ct)}} - M_i \right) M_i \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

şeklinde birinci mertebeden adi diferansiyel denklem olur. (3.1.10) denklemini lineerleştirilmiş simetri şartı altında yerine yazarsak Maple 18 paket programı yardımıyla bu denklemin tanjant vektörleri;

$$(\xi, \eta) = (0, -(e^{(tc)} - e^{(C_1b-C_1c+bt)})^{(-aK)} M_i^2 (e^{(tc(aK+1))}) - e^{(acKt(C_1b-C_1c+bt))})$$

olarak elde edilir. Böylece M_i denkleminin çözümü,

$$A = e^{C_1b} e^{tb} - e^{C_1c} e^{tc}, \quad I = \int \frac{ae^{C_1c} (-Ae^{-C_1c})^{aK}}{e^{acKt}} dt$$

olmak üzere

$$M_i = \frac{\left(\frac{A}{e^{C_1c}} \right)^{aK} e^{C_1c}}{e^{acKt} A (I + C_2)} \quad (3.1.11)$$

şeklinde elde edilir. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

(3.1.11) denklemindeki M_i çözümü ve (3.1.9) de verilen M denklemi çözümü yardımıyla M_s denkleminin çözümü

$$M_s = \frac{K(b-c)e^{(C_1b-C_1c+bt-ct)}}{-1+e^{(C_1b-C_1c+bt-ct)}} - \frac{\left(\frac{A}{e^{C_1c}}\right)^{aK}e^{C_1c}}{e^{acKt}A(I+C_2)} \quad (3.1.12)$$

şeklinde bulunur.

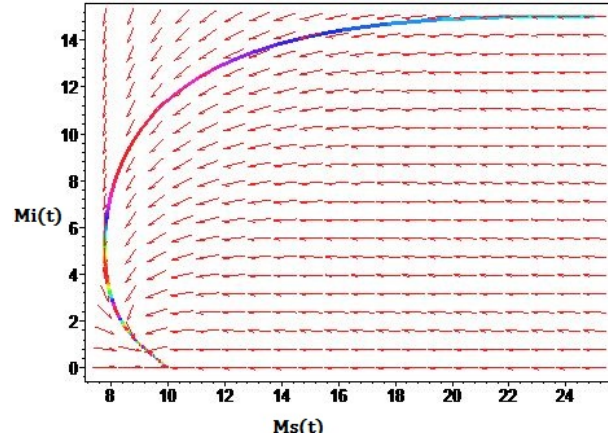
(3.1.1) - (3.1.2) adi mertebeden diferansiyel denklem sisteminin (3.1.11) ve (3.1.12) denklemleri ile verilen çözümlerinde bölüm başında verilen değerlerin yerine yazılmasıyla M_i ve M_s çözümleri kolayca elde edilir. $M_s(0) = 25$ ve $M_i(0) = 15$ başlangıç koşullarının kullanılması ile C_1 ve C_2 sabitleri;

$$C_1 = 0.5753641449 \quad C_2 = -0.1777777778$$

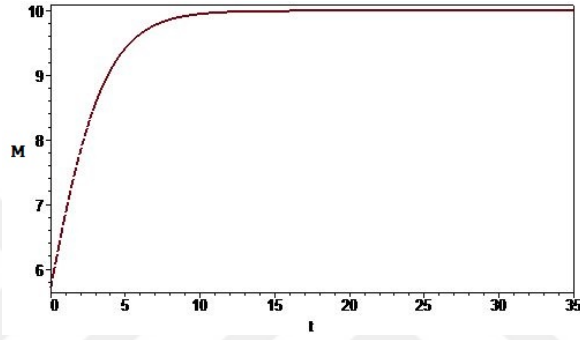
şeklinde bulunur (Ongun ve Kocabıyık, 2017). Bu tez çalışmasında tüm nümerik hesaplamalar ve simülasyonlar Maple 18 paket programı kullanılarak yapılmıştır. Aşağıda adi mertebeden ve kesirli mertebeden çözümlere ait bazı grafiklere yer verilmiştir. Şekil 3.1 de; adi mertebeden sistem için faz portesi çizimine, Şekil 3.3 de ise; hastalıklı ve duyarlı nüfuslara ait bulunan çözüm grafiğine yer verilmiştir.

Bu çizimlerde $b > c$, $K \leq \frac{b}{a(b-c)}$ için denge noktası $(K(b-c), 0)$ asimptotik kararlı olduğu görülmektedir. Eğer $b > c$, $K > \frac{b}{a(b-c)}$ durumu ele alınırsa aynı işlemlerle, $\left(\frac{b}{a}, K(b-c) - \frac{b}{a}\right)$ şeklinde elde edilen denge noktasının asimptotik kararlı olduğu görülür.

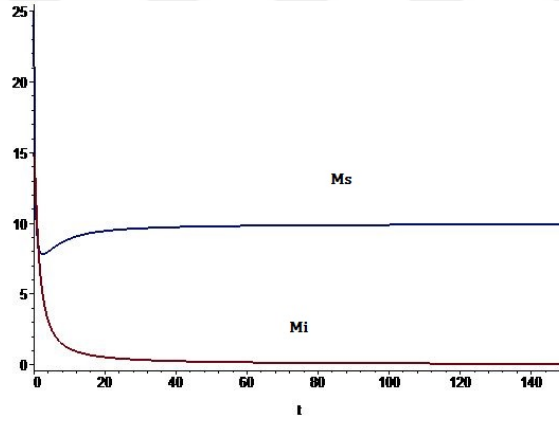
Şekil 3.2 te ise; (3.1.8) ile elde edilen Lojistik diferansiyel denkleminin çözümündeki keyfi sabit $M_s(0) + M_i(0) = M(0) = 40$ olmak üzere $C_1 \cong 0.5753641449$ olarak alınmıştır (Ongun ve Kocabıyık, 2017).



Şekil 3.1. (3.1.1) - (3.1.2) sistemi için Faz düzlemi



Şekil 3.2. Denklem (3.1.8) ile verilen Lojistik diferansiyel denklemin çözümü



Şekil 3.3. Denklem (3.1.1) ve (3.1.2) ile verilen M_s ve M_i çözümleri

3.1.2. Kesirli mertebeden hanta-virüs sistemi

(3.1.4) -(3.1.5) denklemleri ile verilen kesirli mertebeden türev içeren Hanta-virüs modelinde, önceki bölümlerde verilen benzer işlemler yapılarak

$$D_t^\alpha M = (b - c)M - \frac{M^2}{K} \quad (3.1.13)$$

şeklinde kesirli mertebeden Lojistik diferansiyel denkleme ulaşılır. Burada $M = M_i + M_s$ dir. (3.1.13) ile verilen kesirli mertebeden diferansiyel denklem için simetri koşulu,

$$\eta^\alpha - \eta \left((b - c) - \frac{2}{K}M \right) = 0 \quad (3.1.14)$$

şeklindedir. Burada $\xi = \xi(t)$ ve $\eta = p(t)M + q(t)$ olarak seçilip η^α yerinede (2.4.13) ile verilen Leibnitz kuralı uygulanarak, gerekli bazı uzun işlemler sonucunda, belirleme denklemleri;

$$D1: D_t^\alpha q(t) = (b - c)q(t)$$

$$D2: \frac{2}{\alpha(b - c)K} q(t) = \xi'(t)$$

$$D3: -\alpha \xi'(t) = p(t)$$

$$D4: p^n(t) + \frac{n - \alpha}{n + 1} \xi^{(n+1)}(t) = 0$$

şeklinde elde edilir. Burada $n \in \mathbb{N}$ dir. D1 denklemi Kilbas v.d. (2006) dan faydalınarak çözümlürse,

$$q(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((b - c)t^\alpha) C_3$$

olarak elde edilir. Burada $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ iki prametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ve C_3 keyfi sabittir. İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımı aşağıdaki gibidir,

$$E_{\alpha,\beta}(t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Burada Mittag-Leffler fonksiyonu üstel fonksiyonun bir genişletilmesi yani uzantısıdır. $\alpha = 1$ olduğunda, $q(t)$ denklemi $(b-c)e^t$ şeklindeki denkleme indirgenir. D2 ifadesinin çözümü için ise D1’ de bulunan $q(t)$ nin integralinin alınmasıyla,

$$\xi(t) = C_3 \frac{2}{K\alpha(b-c)} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}((b-c)t^\alpha) + C_4$$

şeklinde bulunur. Burada C_3 ve C_4 keyfi integral sabitleridir. D3 denkleminde, $\xi'(t)$ türevi yerine yazılarak,

$$p(t) = C_3 \frac{-2}{K(b-c)} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((b-c)t^\alpha)$$

şeklinde elde edilir. D4 denkleminin, elde edilen $p(t)$ ve $\xi(t)$ nin yerine yazılması ile sağlandığı açıktır.

Böylece L sonsuzküçük üretici,

$$L = [C_3 \frac{2}{K\alpha(b-c)} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}((b-c)t^\alpha) + C_4] \frac{\partial}{\partial t} + [C_3 \frac{-2}{K(b-c)} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((b-c)t^\alpha) M + C_3 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((b-c)t^\alpha)] \frac{\partial}{\partial M}$$

olarak bulunur. Bu diferansiyel operatör ve simetri şartında verilen denklemin kullanılması ile genel çözüm için,

$$\frac{dt}{\frac{2}{K\alpha(b-c)} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}((b-c)t^\alpha)} = \frac{dM}{\frac{-2}{K(b-c)} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((b-c)t^\alpha) M + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((b-c)t^\alpha)}$$

ifadelerinin birbirine eşitlenmesiyle M çözümü,

$$M = \frac{[(t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}((b-c)t^\alpha)^{-\alpha} - 1]}{-2/(K(b-c))} + C_5 \quad (3.1.15)$$

olarak elde edilir. Burada C_5 keyfi sabittir.

Elde edilen bu ifadenin çözümü ve $M - M_i = M_s$ alınmasıyla, (3.1.5) denkleminin yeni hali,

$$D_t^\alpha M_i = -cM_i - \frac{M_i \left(\frac{[(t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}((b-c)t^\alpha)^{-\alpha}) - 1]}{-2/(K(b-c))} + C_5 \right)}{K} + \quad (3.1.16)$$

$$a \left(\frac{[(t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}((b-c)t^\alpha)^{-\alpha}) - 1]}{-2/(K(b-c))} + C_5 - M_i \right) M_i$$

şeklinde olur. Bu denklem için de simetri koşulu uygulanıp, belirleme denklemleri çözülürse tanjant vektörü,

$$(\xi, \eta) = \left(\left(c + \frac{M}{K} - aM \right) \frac{-1}{\alpha}, \left(\left(c + \frac{M}{K} - aM \right) \frac{-1}{\alpha} \right)^{-1} (M' - aM') M_i \right) \quad (3.1.17)$$

olarak bulunur. Burada M , (3.1.13) denklemi ile verilen kesirli mertebeden Lojistik diferansiyel denklemin (3.1.15) ile verilen çözümüdür. Buradan kanonik değişkenler kullanılarak M_i çözümü ,

$$M_i = \left(c + \frac{\left[\frac{[(t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}((b-c)t^\alpha)^{-\alpha}) - 1]}{-2/(K(b-c))} + C_5 \right]}{K} - \right. \quad (3.1.18)$$

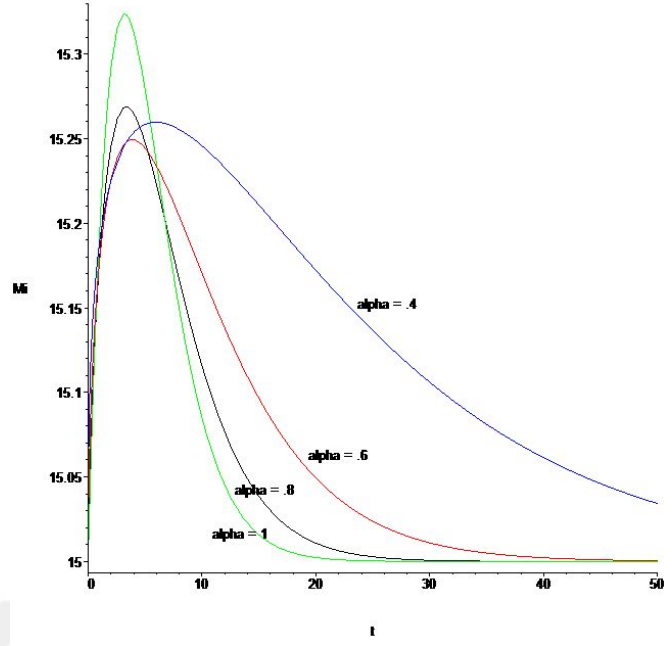
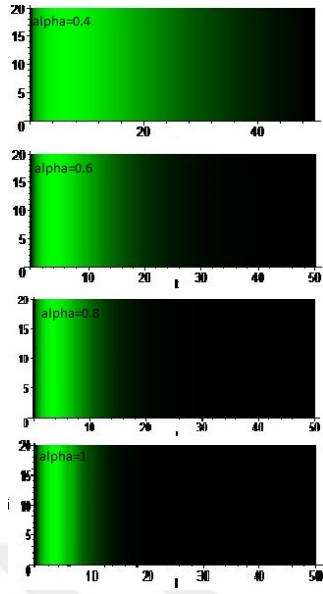
$$\left. a \left(\frac{[(t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}((b-c)t^\alpha)^{-\alpha}) - 1]}{-2/(K(b-c))} + C_5 \right) \right) + C_6$$

şeklinde elde edilir. Burada C_6 keyfi sabittir. (3.1.18) denklemi ve (3.1.15) denklemini yardımıyla M_s çözümü,

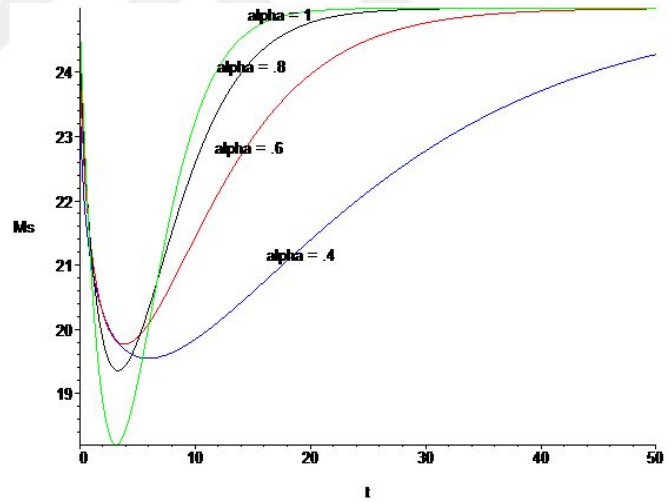
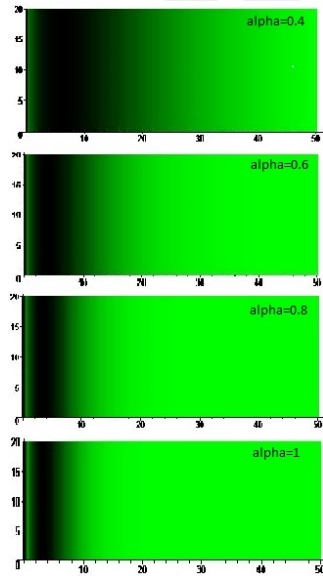
$$M_s = \frac{[(t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}((b-c)t^\alpha)^{-\alpha}) - 1]}{-2/(K(b-c))} + C_5 - \left(c + \frac{\left[\frac{[(t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}((b-c)t^\alpha)^{-\alpha}) - 1]}{-2/(K(b-c))} + C_5 \right]}{K} - \right. \quad (3.1.19)$$

$$\left. a \left(\frac{[(t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}((b-c)t^\alpha)^{-\alpha}) - 1]}{-2/(K(b-c))} + C_5 \right) \right) + C_6.$$

olarak elde edilir. Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 te ise (3.1.5) ve (3.1.4) ile verilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemin farklı α değerleri için M_s ve M_i çözüm grafikleri ve density plot çizimleri verilmiştir (Ongun ve Kocabıyık, 2017).



Şekil 3.4. Density Plot (sol) ve farklı α değerleri için M_i Çözümleri.(sağ)



Şekil 3.5. Density Plot (sol) ve farklı α değerleri için M_s Çözümleri.(sağ)

3.1.3. Kısmi hanta-virüs sistemi

(3.1.6)-(3.1.7) denklemleri ile verilen kısmi Hanta-virüs sisteminin taraf tarafa toplanması, yine diğer alt bölümlerde olduğu gibi $M = M_i + M_s$ fadesinin kullanılmasıyla bu sistem,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + (b-c)M[1 - \frac{M}{(b-c)K}] \quad (3.1.20)$$

şeklindeki Fisher tipi Lojistik diferansiyel denklem halini alır. Kolaylık açısından bu denklemi,

$$u_t = u_{xx} + A.u - B.u^2$$

olarak ifade edelim, burada $A = (b-c)$ ve $B = \frac{1}{K}$ şeklinde alınmış ve M ifadesi ise u ile gösterilmiştir. Yani daha genel bir ifade ile $u_t = u_{xx} + f(u)$ olarak gösterilebilir.

Bölüm 2.5 te verilen ikinci mertebeden genişletilmiş Lie operatörü olan L operatörünün kullanılması ile elde edilen Fisher denkleminin Lie simetri çözümü için,

$$-\eta f_u + \eta_1 - \eta_{22} = 0 \quad (3.1.21)$$

ifadesinin çözülmesi gereklidir. η_1 ve η_{22} eşitliklerinin yerine yazılması ile (3.1.21) denklemi,

$$\begin{aligned} & -\eta f_u + \eta_t + (\eta_u - \delta_t)u_t - \xi_t u_x - \delta_u(u_t)^2 - \xi_u u_t u_x - \eta_{xx} + (-2\eta_{xu} + \xi_{xx})u_x + \delta_{xx}u_t + \\ & (-\eta_u + 2\xi_x)u_{xx} + 2\delta_x u_{tx} + (-\eta_{uu} + 2\xi_{xu})(u_x)^2 \\ & + 2\delta_{xu}u_t u_x + \xi_{uu}(u_x)^3 + \delta_{uu}(u_x)^2 u_t + 3\xi_u u_x u_{xx} + \delta_u u_t u_{xx} + 2\delta_u u_x u_{tx} = 0 \end{aligned}$$

şeklini alır. Başta verilen $u_t = u_{xx} + f(u)$ ifadesi ile u_{xx} yerine $u_t - f(u)$ yazılmasıyla kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki hale dönüşür;

$$\begin{aligned} & [-\eta f_u - (-\eta_u + 2\xi_x)f(u) + \eta_t - \eta_{xx}] \\ & + [\eta_u - \xi_t + \xi_{xx} + (-\eta_u + 2\xi_x) - \delta_u f(u)]u_t \\ & + [-\delta_u + \delta_u](u_t)^2 + [-\xi_u + 2\delta_{xu} + 3\xi_u]u_t u_x \\ & + [-\xi_t - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} - 3\xi_u f(u)]u_x + [\xi_{uu}](u_x)^3 \\ & + [-\eta_{uu} + 2\xi_{xu}](u_x)^2 + [\delta_x]u_{tx} + [\delta_u]u_x u_{tx} \\ & + [\delta_{uu}](u_x)^2 u_t = 0 \end{aligned}$$

u ya göre bütün mertebeden türevlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki sistem elde edilir.

$$sbt : -\eta f_u - (-\eta_u + 2\xi_x)f(u) + \eta_t - \eta_{xx} = 0$$

$$u_t : \eta_u - \delta_t + \delta_{xx} + (-\eta_u + 2\xi_x) - \delta_u f(u) = 0$$

$$(u_t)^2 : -\delta_u + \delta_u = 0$$

$$u_t u_x : -\xi_u + 2\delta_{xu} + 3\xi_u = 0$$

$$u_x : -\xi_t - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} - 3\xi_u f(u) = 0$$

$$(u_x)^2 : -\eta_{uu} + 2\xi_{xu} = 0$$

$$(u_x)^3 : \xi_{uu} = 0$$

$$u_t x : \delta_x = 0$$

$$u_x u_t x : \delta_u = 0$$

$$(u_x)^2 u_t : \delta_{uu} = 0$$

Buradan ifadelerin çözümlenmesiyle,

$$\delta = C_1, \xi = q, \eta = 0$$

elde edilir. C_1 ve q keyfi sabitlerdir. Bu durumda,

$$L = \delta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

diferansiyel operatörü ile elde edilen simetriler $L_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ olarak bulunur.

Burada $C_1 = 1$ alınırsa grup indirgeme yardımıyla kısmi diferansiyel denklemin çözümü için,

$$\frac{dt}{\partial 1} = \frac{dx}{q} = \frac{du}{0}$$

ifadesinin çözülmesi gerekir. $z = x - qt$ olmak üzere, iki integral çözümü ile $w(z) = u$ şeklinde, ifadelerin u çözümü bulunur. Burada w keyfi bir fonksiyondur.

Elde edilen w çözümünün, Fisher tipi Lojistik denklemde yerine yazılmasıyla kısmi diferansiyel denklem,

$$w'' + qw' + Aw - Bw^2 = 0 \quad (3.1.22)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur. Fisher tipi diferansiyel denkleminin çözümü hakkında çalışmalar için, Ablowitz ve Anthony (1979), Clarkson ve Elizabeth (1994), Gbetoula (2011) ve Verna v.d. (2014) çalışmalarına bakılabilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü oldukça zordur bununla ilgili ansatz metodu yardımıyla genel çözüm Kaushal vd. (2006) çalışmasıyla,

$$M(x, t) = \frac{A}{4B} ([1 \pm \tanh(d(x - qt))])^2 \quad (3.1.23)$$

şeklinde elde edilir ki burada q ve d keyfi sabitlerdir, çözüm için ise $q = \pm 5\sqrt{\frac{A}{6}}$ ve $d = \pm\sqrt{\frac{A}{24}}$ olarak seçilmiştir. Özel olarak $A = B$ alınırsa, elde edilecek diferansiyel denklem $\beta = A = B$ olmak üzere;

$$w'' + qw' + \beta w(1 - w) = 0 \quad (3.1.24)$$

şeklinde elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü oldukça zordur, ancak Ablowitz ve Anthony (1979) ve Verna vd. (2014) daki çalışmalar sonucunda $q = -5\sqrt{\frac{\beta}{6}}$ seçilmesiyle genel çözüm,

$$M(x, t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \tanh(-c_1 + \frac{1}{12} \sqrt{6\beta}(x - qt)) + \frac{1}{4} (\tanh(c_1 + \frac{1}{12} \sqrt{6\beta}(x - qt)))^2 \quad (3.1.25)$$

olarak, c_1 keyfi sabit olmak üzere elde edilir.

(3.1.6) ve (3.1.7) ile verilen Hanta-virüs sistemi yardımıyla bulunan Lojistik Fisher-Kolmogorov denklemi için bölüm girişinde verilen değerlerin seçilmesi durumunda $A = b - c = 0.5$ ve $B = 1/20$ olarak elde edilir. Genel çözüm için ise, $q = 5\sqrt{0.5}/\sqrt{6}$ ve $d = \sqrt{0.5}/\sqrt{24}$ değerleri bulunur.

Bu koşullar altında Fisher-Kolmogorov denkleminin genel çözümü,

$$M(x,t) = 0.5/(4/20)([1 \pm \tanh(\sqrt{0.5}/\sqrt{24}(x - \sqrt{0.5}/\sqrt{6}t))])^2$$

olarak elde edilir bu çözüm düzenlenirse,

$$M(x,t) = 5/2([1 \pm \tanh(\frac{1}{4\sqrt{3}})(x - \frac{5}{2\sqrt{3}}t)])^2$$

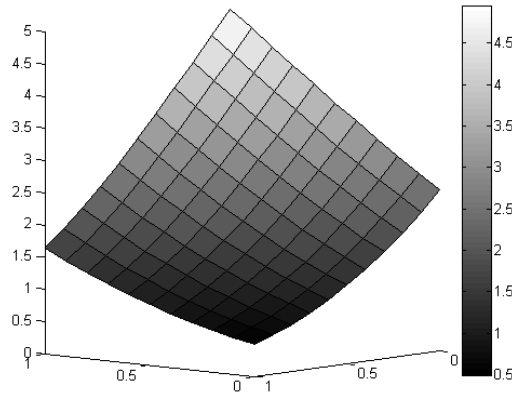
şeklinde elde edilir. Şekil 3.6 da analitik çözümün $K = 20$ için grafiği verilmiştir. Eğer $K = 40$ seçilirse bu durumda denkleme ait genel çözüm,

$$M(x,t) = 5([1 \pm \tanh(\frac{1}{4\sqrt{3}})(x - \frac{5}{2\sqrt{3}}t)])^2$$

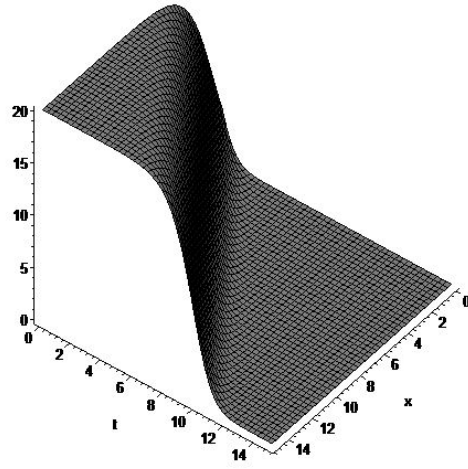
halini alır. $K = 40$ için genel çözüme ait grafik ise şekil 3.7 de verilmiştir. Eğer yine farklı olarak $A = B$ olması için $K = 2$ seçilirse bu durumda analitik çözüm,

$$M(x,t) = 1/4([1 \pm \tanh(\frac{1}{4\sqrt{3}})(x - \frac{5}{2\sqrt{3}}t)])^2$$

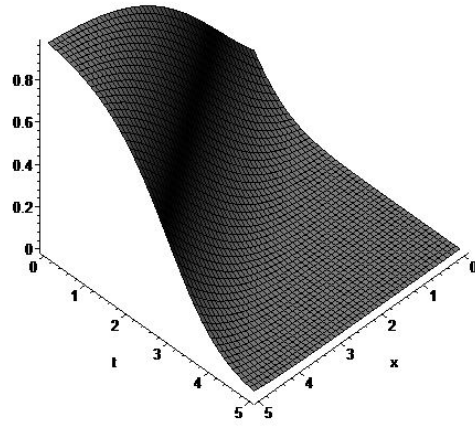
şeklinde elde edilir. Bu çözüme ait grafikler ise Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 ile aşağıdaki gibidir.



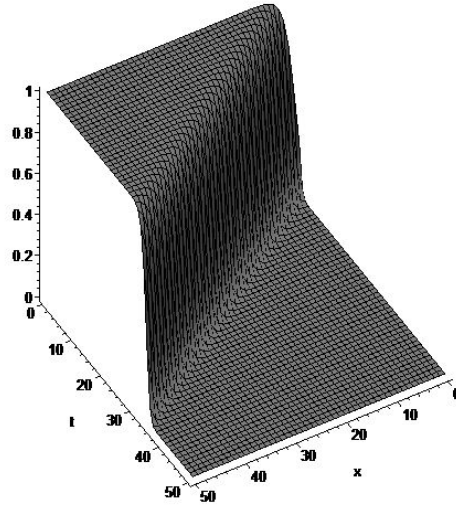
Şekil 3.6. $K=20$ için Fisher-Kolmogorov Denkleminin Analitik Çözüm Grafiği



Şekil 3.7. $K=40$ için Fisher-Kolmogorov Denkleminin Analitik Çözüm Grafiği



Şekil 3.8. Özel durum, $K=2$ için Fisher-Kolmogorov Denkleminin Analitik Çözüm Grafiği



Şekil 3.9. $K=2$ için Fisher-Kolmogorov Denkleminin Farklı Aralıkta Analitik Çözüm Grafiği

3.2. Granül Hücre Üretimi Sistemi için Lie Simetri Analizi

Beyin gelişiminin farklı dönemlerinde sinir hücreleri arasındaki çoğalma ve farklılaşma dengesinin kurulumu çok önemlidir. Bu bölümde, bu dengenin kurulumu için matematiksel olarak Leffler vd. (2016) tarafından ortaya konulan ve farelerde beyincik gelişimi hakkında bilgi veren granül hücre sistemi olarak adlandırılan sistemin Lie simetri çözümü araştırılacaktır. Aynı zamanda bu model tanımlanırken dış granül katmanındaki (*EGL*) hücresel davranışlar da göz önünde bulundurulmuştur.

Hücresel davranışların modellenmesinde, bazı önemli etkenler vardır ki bunlardan ilki, *EGL* nin dış katmanındaki (*oEGL*) öncü granül hücreleri (*gcps*) tarafından üretilen çoğalmada ki değişiklik ve diğeri ise *EGL* nin iç katmanındaki (*iEGL*) farklılaşan granül hücre sayısındaki farklılıktır.

Leffler vd. (2016) tarafından önerilen bu modelin kullanılmasıyla fare beyinciklerinde bilgi edinmenin artması ve bu bilgiler ile beyincik gelişiminde fayda sağlanması amaçlanmaktadır. Aslında hücresel düzeyde, farelerde ki öncü granül hücreler ve granül hücreleri konuları 50 yıla yakındır çalışılmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları Haddara ve Nooreddin (1966), Fujita (1967), Mares ve Lodin (1970), Seil vd. (1970), Goldowitz vd. (1997), Hatten vd. (1981), Espinosa vd. (2008), Legue vd. (2015), Szulc vd. (2015), Leffler vd.(2016) şeklinde örneklendirilebilir.

Son dönemdeki Espinosa vd. (2008) ve Legue vd. (2015) tarafından yapılan çalışmalar ile klonal analiz hakkında yeni ve önemli bilgiler sağlamıştır.

EGL deki granül hücre üretimine ait sistemi Leffler vd. (2016) tarafından verilen şekilde aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\frac{dN_o}{dt} = \alpha_p(1 - \delta)N_o - \alpha_p\delta N_o \quad (3.2.1)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = 2\alpha_p\delta N_o - \alpha_e N_i \quad (3.2.2)$$

burada,

$N_o(t)$: *oEGL* deki hücre sayısı ,

$N_i(t)$: *iEGL* deki hücre sayısı ,

α_p : *gcps* deki hız sabiti için sınır değeri,

α_e : *EGL* den çıkan granül hücrelerinde ki sınır sabiti,

$\delta(t)$: Öncü granül hücresinin bölünerek ölümcül iki granül hücre oluşturma olasılığıdır.

(3.2.1) -(3.2.2) denklem sistemi ile fare beyincik gelişimi sırasında granül hücrelerinin üretimini ve beklenen ortalama klon bir bireyin öncü granül hücresi büyüklüğü tahmin edilmektedir. Bu modeli kanser de dahil insan nörogelişimindeki fare modellerinde hücre özelliklerine bağlı değişimin anormal üretimlerindeki yükselişini çalışmak için oldukça kullanışlıdır.

Eğer bu sistemde δ bir sabit olarak alınırsa Denklem (3.2.1) ve Denklem (3.2.2) ile verilen ifadelerin çözümleri kolaylıkla elde edilir.

Farklı δ değerleri göz önüne alınır ise, Leffler vd. (2016) çalışmalarının ışığı altında N_o ın davranışlarının belirlenmesi fazla zor olmamaktadır,

i) $0 \leq \delta \leq 1/2$ için $N_o(t)$ zamana bağlı artan üstel bir fonksiyon,

ii) $\delta = 1/2$ için $N_o(t)$ sabit,

iii) $1/2 \leq \delta \leq 1$ için $N_o(t)$ zamana bağlı azalan üstel bir fonksiyondur.

Bu davranışların hiçbiri doğal gözlemler altında kararlı değildir, bu nedenle Leffler vd. (2016) çalışmasında δ nin zamana bağlı fonksiyon olması gerektiği sonucuna ulaşmıştır.

Bu sebeple aşağıdaki koşulu sağlayan farklı δ fonksiyonları seçilmiştir:

“ $\delta(t)$ başlangıçta 1/2 den az olmalıdır, ve sonrasında bazı zamanlarda 1/2 den fazla olmalıdır. Öncü granül hücrelerinin, granül hücrelerine dönüşmeden önceki zaman tam olarak $t = 0$ anında olduğu için $\delta(t) = 0$ varsayılmaktadır. ” (Leffler vd., 2016)

Bu nedenlerden dolayı verilen granül hücre üretimi sisteminde, bu koşulu sağlayan üç farklı $\delta(t)$ olasılık fonksiyonu çalışılmıştır. Bu olasılık fonksiyonları ise lineer, rasyonel ve üstel olarak sınıflandırılmıştır.

İlk olarak Denklem (3.2.1) ile verilen $N_o(t)$ ye ait sistemin çözümü araştırılmış ve sonrasında bulunan bu çözümün (3.2.2) denkleminde yerine yazılmasıyla $N_i(t)$ ye ait sistemin genel çözümüne ulaşılmıştır.

Granül hücre üretimi modeli ile bulunan ve *EGL* deki hücre sayılarını veren $N_o(t)$ ve $N_i(t)$ zamana bağlı fonksiyonlarının yardımı ile, doku bölgesindeki değişimi bulmak için aşağıdaki kolay formül kullanılabilir.

Bu formülde $A_o(t)$, *oEGL* bölgesindeki değişimi ifade etmek üzere şu şekilde ifade edilir,

$$A_o(t) = \frac{v_c N_o(t)}{L} \quad (3.2.3)$$

$A_i(t)$ ise *iEGL* bölgesindeki değişime karşılık gelir ve tanımı aşağıdaki gibidir,

$$A_i(t) = \frac{v_c N_i(t)}{L} \quad (3.2.4)$$

Burada v_c granül hücrenin şiddetidir ve $300\text{-}\mu\text{m}^3$ olarak kabul edilmektedir. Bu formüllerdeki L ise beyinciğin orta lobunun genişliğidir ve $775\text{-}\mu\text{m}$ ($\pm\%20$) olarak ölçülmüştür (Leffler vd., 2016). Şimdi bu formül ve ölçüm değerlerinin kullanılmasıyla doku bölgesinde ki değişimi incelemek amacıyla bazı grafikler verilecektir. Burada başlangıç koşulu olarak $A_o(0)$ için aşağıda verilen değerler ve $A_i(0) = 0$ olarak kullanılacaktır. Aşağıda tabloda verilen ve burada kullanılacak değerler farklı biyolojik gözlemler ile elde edilmiştir (Leffler vd., 2016).

Çizelge 3.1. *EGL* Modeli için Ölçüm Değerleri

$\delta(t)$ Fonksiyonu	Lineer	Rasyonel	Üstel
α_p	0.0348	0.0558	0.0443
α_e	0.0387	0.0588	0.0474
a	0.0029	0.0059	0.0041
$A_o(0)$	1994	1005	1411

3.2.1. Lineer $\delta(t)$ durumu

Bu bölümde $\delta(t)$ ' nin lineer olması durumu ele alınacaktır. Burada a , $\delta(t)$ nin başlangıç eğimi olmak üzere $\delta(t) = at$ alınması ile bu ifadenin (3.2.1)-(3.2.2) sisteminde yerine yazılmasıyla, bu duruma ait granül hücre üretimi sistemi,

$$\frac{dN_o}{dt} = \alpha_p(1 - at)N_o - \alpha_p at N_o \quad (3.2.5)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = 2\alpha_p at N_o - \alpha_e N_i \quad (3.2.6)$$

olur. Öncelikle denklem (3.2.5) ele alınıp, bu denklem lineerleştirilmiş simetri şartı altında yerine yazılırsa, (3.2.5) denkleminde ait tanjant vektörleri $(\xi, \eta) = (0, N_o)$ olarak elde edilir.

Böylece bu denklem için $\xi = 0$ olduğundan kanonik koordinatlar yardımıyla, $r = t$ ve $s = \int \frac{dt}{N_o}$ olarak elde edilir ve bu çözümler ile N_o için analitik çözüm,

$$N_o(t) = \frac{e^{\alpha_p t} c_1}{e^{at^2 \alpha_p}} \quad (3.2.7)$$

olarak bulunur. Burada c_1 keyfi sabittir. Bulunan bu çözümün (3.2.6) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\frac{dN_i}{dt} = 2\alpha_p at \frac{e^{\alpha_p t} c_1}{e^{at^2 \alpha_p}} - \alpha_e N_i. \quad (3.2.8)$$

şeklinde N_i ye ait adi mertebeden diferansiyel denklem elde edilir. Benzer şekilde, bu adi diferansiyel denkleme lineerleştirilmiş simetri şartı uygulanırsa, $r = t$ ve $s = \int \frac{dt}{e^{-\alpha_e t}}$ kanonik koordinatlar elde edilir. Bu kanonik koordinatların kullanılmasıyla N_i ifadesine ait genel çözüm,

$$\begin{aligned} N_i(t) = & \left[2c_1 a \alpha_p \left(\frac{-1}{2} \frac{e^{-at^2 \alpha_p + (\alpha_p + \alpha_e)t}}{a \alpha_p} \right. \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \frac{(\alpha_p + \alpha_e)^2}{a \alpha_p} \operatorname{erf} \left(\sqrt{a \alpha_p} t - \frac{1}{2} \frac{(\alpha_p + \alpha_e)}{\sqrt{a \alpha_p}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{(\alpha_p + \alpha_e) \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4} \frac{(\alpha_p + \alpha_e)^2}{a \alpha_p}}}{a \alpha_p \sqrt{a \alpha_p}} \right. \\ & \left. + c_2 \right] / e^{\alpha_e t} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

olarak bulunur. Burada c_2 keyfi sabittir.

Burada verilen lineer durum için tablo ifadelerinin (3.2.7) ve (3.2.9) denklemlerinde yerine yazılmasıyla sabitler,

$$c_1 = 11797, c_2 = 11797.$$

olarak bulunur.

3.2.2. Rasyonel $\delta(t)$ durumu

Bu bölümde ise $\delta(t)$ nin rasyonel bir fonksiyon olarak alınması durumunda çözümün nasıl olacağı araştırılmıştır. Bu sebeple $\delta(t) = \frac{at}{1+at}$ olarak seçilirse, (3.2.1)-(3.2.2) diferansiyel denklem sisteminin yeni hali,

$$\frac{dN_o}{dt} = \alpha_p(1 - (\frac{at}{1+at}))N_o - \alpha_p(\frac{at}{1+at})N_o \quad (3.2.10)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = 2\alpha_p(\frac{at}{1+at})N_o - \alpha_e N_i. \quad (3.2.11)$$

olarak bulunur. Bir önceki durumda olduğu gibi, yine ilk olarak (3.2.10) denkleminde lineerleştirilmiş simetri şartı uygulanırsa tanjant vektörler $(\xi, \eta) = (0, N_o)$ şeklinde elde edilir. Kananik koordinatlar tanımlarının kullanılmasıyla N_o ' a ait genel çözüm,

$$N_o(t) = \frac{(at+1)^{\left(\frac{\alpha_p}{a}\right)^2}}{e^{\alpha_p t} \left(e^{\left(\frac{\alpha_p}{a}\right)^2}\right)^2} \quad (3.2.12)$$

biçiminde bulunur. Burada c_3 keyfi sabittir. Bulunan bu analitik çözümün denklem (3.2.11) de yerine yazılmasıyla, N_i için adi mertebeden diferansiyel denklem,

$$\frac{dN_i}{dt} = 2\alpha_p(\frac{at}{1+at})\left(\frac{(at+1)^{\left(\frac{\alpha_p}{a}\right)^2}}{e^{\alpha_p t} \left(e^{\left(\frac{\alpha_p}{a}\right)^2}\right)^2}\right) - \alpha_e N_i \quad (3.2.13)$$

olarak bulunur. Simetri şartında ifadelerin yerine yazılmasıyla $(\xi, \eta) = (0, e^{-\alpha_e t})$ olarak bulunur ve (r, s) kanonik koordinatların kullanılmasıyla ,

$$N_i(t) = \frac{\int \left(\frac{2\alpha_p at(at+1)^{\left(\frac{\alpha_p}{a}-1\right)} e^{\alpha_e t}}{e^{\alpha_p t} \left(e^{\left(\frac{\alpha_p}{a}\right)^2}\right)^2} \right) dt + c_4}{e^{\alpha_e t}} \quad (3.2.14)$$

olacak şekilde N_i nin genel çözümü elde edilir, burada c_4 yine bir keyfi sabittir.

Tabloda ölçülen değerler kullanılarak rasyonel durum çözümleri (3.2.12) ve (3.2.14) ifadelerinin çözülmesiyle,

$$c_3 = -0.4594, c_4 = 298.5502.$$

olarak bulunur.

3.2.3. Üstel $\delta(t)$ durumu

Üçüncü ve son durumda ise $\delta(t)$ nin üstel bir ifade seçilmesi durumunda yani $\delta(t) = 1 - e^{(-at)}$ olarak alınmasıyla oluşan analitik çözümler araştırılmıştır. Üstel ifadenin yerine yazılmasıyla (3.2.1)-(3.2.2) ile verilen granül hücre üretimi sisteminin yeni hali aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{dN_o}{dt} = \alpha_p(1 - (1 - e^{(-at)}))N_o - \alpha_p(1 - e^{(-at)})N_o \quad (3.2.15)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = 2\alpha_p(1 - e^{(-at)})N_o - \alpha_e N_i \quad (3.2.16)$$

Diğer durumlarda olduğu gibi yine aynı işlemler uygulanırsa,

$$N_o(t) = \frac{c_5}{\frac{\alpha_p e^{(-at)}}{e^{(\alpha_p t)} (e^{\frac{(-at)}{a}})^2}} \quad (3.2.17)$$

ve,

$$N_i(t) = \left[\int (-2c_5 \alpha_p e^{\left(-\frac{at^2 \alpha_e t a + at \alpha_p + 2\alpha_p e^{(-at)}}{a}\right)} + 2c_5 \alpha_p e^{\left(-\frac{-\alpha_e t a + at \alpha_p + 2\alpha_p e^{(-at)}}{a}\right)} dt + c_6 \right] / e^{(\alpha_e t)} \quad (3.2.18)$$

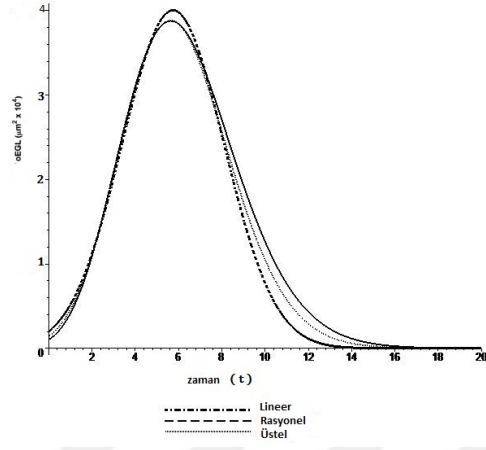
olarak genel çözümler elde edilir. Burada c_5 ve c_6 keyfi sabitlerdir. Diğer durumlarda olduğu gibi, benzer işlemlerle tanjant vektörler N_o için $(0, N_o)$ ve N_i için $(0, e^{-\alpha_e t})$ şeklinde bulunmuştur. Yine tablo değerlerinin üstel çözümlerde yerine yazılmasıyla ,

$$c_5 = 0.202572398410^{14}, c_6 = 0.$$

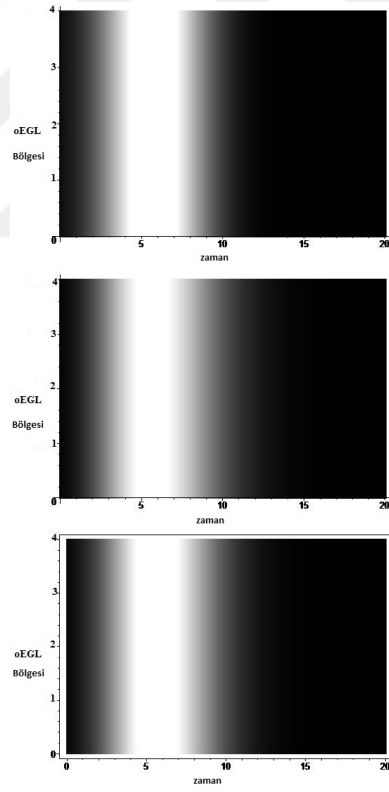
sabitleri elde edilir.

Şekil 3.10 da $A_o(t)$ ' a ait üç farklı duruma ait çözümler için grafik verilmiştir. Daha sonrasında ise Şekil 3.11 de bu çözümlere ait density plot çizimlerine yer verilmiştir. Şekil 3.12 de ise $A_i(t)$ genel çözümüne ait grafik ifade edilmiştir. Yine aynı şekilde Şekil 3.13 de ise üç tip durum için de çözümlerine ait density plot ifadelerine yer verilmiştir. Sonrasında α_p nin tablo değerindeki değişim ile ($\alpha_p = 1.5 \times 0.0348$) granül hücre sayısının değişimi hakkında bilgi edinmek için Şekil 3.14 ve Şekil 3.15 ile bu değişime ait bilgileri içeren grafikler verilmiştir. En son olarak da, α_e değişkeninin değişimi ile ($\alpha_e = 0.5 \times 0.0387$) elde edilen grafikler Şekil 3.16 ve Şekil 3.17 ile elde edilmiştir.

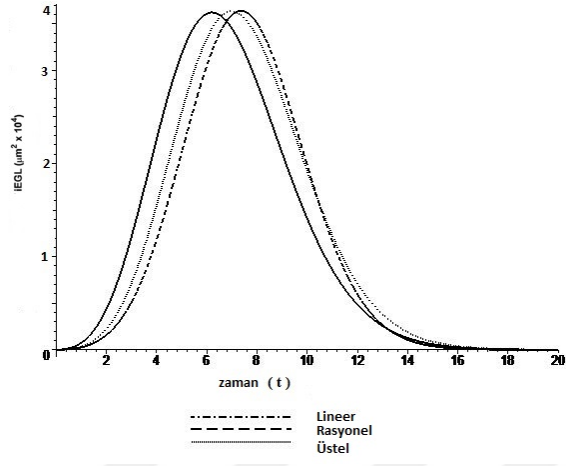




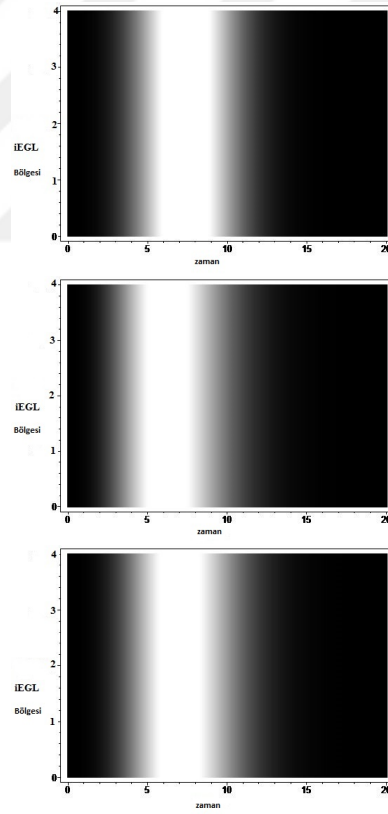
Şekil 3.10. $oEGL$ Doku Bölgesi için Granül Hücre Üretimi Çözümleri



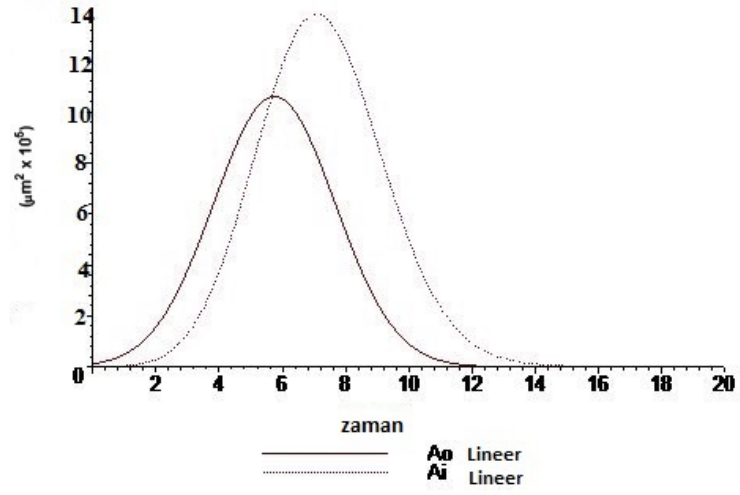
Şekil 3.11. $A_o(t)$ için Density Plot Çizimleri. Lineer, rasyonel ve üstel durum.



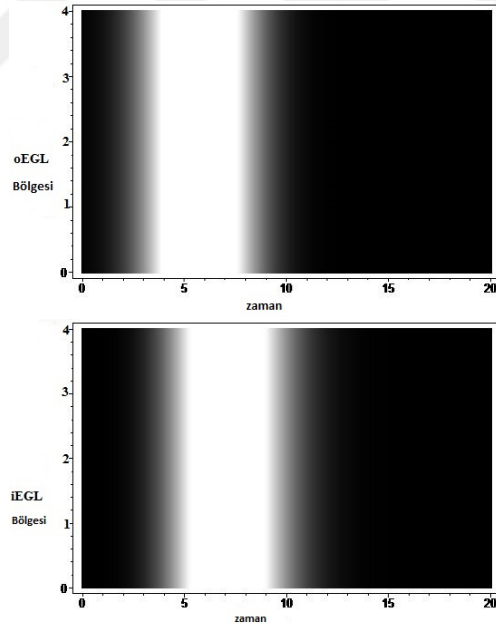
Şekil 3.12. $iEGL$ Doku Bölgesi için Granül Hücre Üretimi Çözümleri



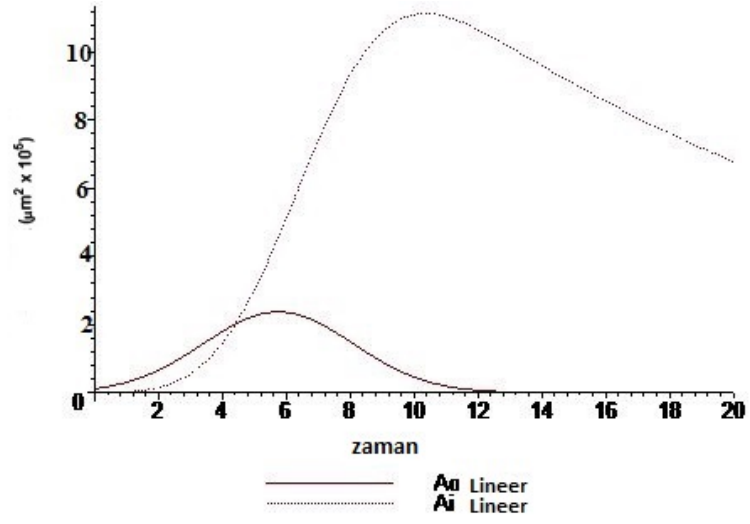
Şekil 3.13. $A_i(t)$ için Density Plot Çizimleri. Lineer, rasyonel ve üstel durum.



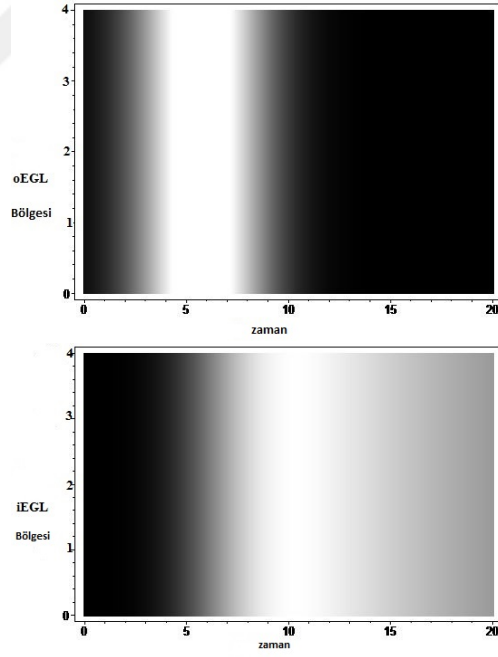
Şekil 3.14. *oEGL* ve *iEGL* Doku Bölgesi Granül Hücre Üretimi Çözümleri .



Şekil 3.15. Density Plot Çizimi değişen α_p değeri için.



Şekil 3.16. *oEGL* ve *iEGL* Doku Bölgesi Granül Hücre Üretimi Çözümleri.



Şekil 3.17. Density Plot Çizimi değişen α_e değeri için.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, ilk olarak tez çalışması içinde verilen lineer ve lineer olmayan bazı örneklere dair Maple paket programlarına yer verilmiştir.

Daha sonrasında ise Lie simetri metodu ile Hanta-virüs sistemi ve Granül hücre üretimi sistemine ait denklem sistemlerinin genel çözümleri hesaplanmasında kullanılan Maple paket programına yer verilmiştir. Bulunan bu çözümlerin Maple 18 yardımıyla grafik ve simülasyonları elde edilmiştir.

Hanta-virüs sisteminde üç tip durum için Maple ile çözümler hesaplandı. Bu durumlar adi, kesirli ve kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi olarak belirtildi. Burada çözümlerin elde edilmesinde ise gerekli basit işlemler ile bulunan Lojistik diferansiyel denklemin ifadesi kullanılmıştır.

Granül hücre üretimi sisteminde ise denklem içerisindeki $\delta(t)$ bağımlı değişkeninin lineer, rasyonel ve üstel durumları için elde edilen sistemin genel çözümleri hesaplandı.

Elde edilen genel çözümler ışığında görüldü ki, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerin genel çözümünde, Lie simetri metodunun bazı durumlarda oldukça kullanışlı olduğu ve paket program yardımı ile de genel çözüme ulaştırdığı gözlemlendi. Aşağıda Bölüm 2 ve Bölüm 3 de kullanılan hesaplamalara ait programlardan bazıları verilmiştir.

Örnek 2.4' e ait Maple paket programı:

> restart : with(DEtools) :

> ODE := diff(y(x),x) = $\frac{\exp(x)}{y(x)} + y(x)$;

$$ODE := \frac{d}{dx}y(x) = \frac{\exp(x)}{y(x)} + y(x)$$

> sku := symgen(ODE);

$$sku := [\xi = 1, \eta = y/2]$$

> czm := dsolve(ODE,'can');

$$czm := y(x) = \pm \sqrt{C_1 e^{2x} - 2e^x}$$

Örnek 2.6 için Maple paket programı:

> restart : with(DEtools) :

> ODE := diff(y(x), x) = a*y(x) - b*y(x)^2;

$$ODE := \frac{d}{dx}y(x) = ay(x) - by(x)^2$$

> sku := symgen(ODE);

$$sku := [\xi = 1, \eta = 0]$$

> czm := dsolve(ODE, 'can');

$$czm := y(x) = \frac{e^{(C1a+ax)}a}{1 + be^{(C1a+ax)}}$$

Örnek 2.8' e ait Maple paket programı:

> restart : with(DEtools) :

> ODE := diff(y(x), x, x) = 3/2 * diff(y(x), x)^2 / y(x) + 2 * y(x)^3;

$$ODE := \frac{d^2}{dx^2}y(x) = 3/2 \frac{(\frac{d}{dx})^2}{y(x)} + 2y(x)^3$$

> sku := symgen(ODE);

$$sku := [\xi = 1, \eta = 0], [\xi = -x, \eta = y], [\xi = -x^2/2, \eta = yx]$$

> czm := dsolve(ODE, gon2);

$$czm := y(x) = \frac{4C1}{16C1^2 - C2^2 - 2C2x - x^2}$$

Bölüm 3.1.1' e ait çözümlerin bulunmasında kullanılan Maple programı:

```
[ > restart:
[ > with(plots):
[ > with(DEtools):
[ > ODE:=(diff(u(t),t)=u(t)*(b-c)-(1/k)*u(t))):
[ > sku:=symgen(ODE):
[ > czm:=dsolve(ODE,'can'):
[ > ODE2:=diff(y(t),t)=-c*y(t)-(y(t)^2/k)-((1-a*k)/k)*(czm-y(t))*y(t):
[ > ODE3:=diff(y(t),t)=
[ -(-a*k+1)/k*y(t)*(k*(b-c)/(-1+exp(_C1*b-_C1*c+b*t-c*t))*exp(_C1*
[ b-_C1*c+b*t-c*t)-y(t))-y(t)^2/k-c*y(t):
[ > sku:=symgen(ODE3):
[ > czm2:=dsolve(ODE3,'can'):
[ > I1:=(- (exp(_C1*b)*exp(t*b)-exp(_C1*c)*exp(t*c))/exp(_C1*c))^(a*k
[ )*exp(_C1*c)*a*(exp(a*c*k*t)*exp(_C1*b)^3/exp(_C1*c)*exp(t*b)^3/
[ exp(t*c)-3*exp(a*c*k*t)*exp(_C1*b)^2*exp(t*b)^2+3*exp(a*c*k*t)*e
[ xp(_C1*b)*exp(_C1*c)*exp(t*b)*exp(t*c)-exp(a*c*k*t)*exp(_C1*c)^2
[ *exp(t*c)^2)/(exp(_C1*b)*exp(t*b)-exp(_C1*c)*exp(t*c))/(-exp(a*c
[ *k*t)*exp(_C1*b)*exp(t*b)+exp(a*c*k*t)*exp(_C1*c)*exp(t*c))^2/(-
[ 1+exp(_C1*b)/exp(_C1*c)*exp(t*b)/exp(t*c)):
[ > I2:=factor(I1):
[ > I3:=int(I2,t):
[ > czm3:=-((exp(_C1*c)*exp(t*c)-exp(_C1*b)*exp(t*b))/exp(_C1*c))^(a
[ *k)*exp(_C1*c)/(-I3*exp(a*c*k*t)*exp(_C1*b)*exp(t*b)-_C2*exp(a*c
[ *k*t)*exp(_C1*b)*exp(t*b)+I3*exp(a*c*k*t)*exp(_C1*c)*exp(t*c)+_C
[ 2*exp(a*c*k*t)*exp(_C1*c)*exp(t*c)):
[ > a:=0.1:
[ > b:=1:
[ > c:=0.5:
[ > k:=20:
[ > czm3:
[ > y:=czm3:
[ > x=czm-y:
[ > x2:=
[ 10.0/(-1+exp(.5*_C1+.5*t))*exp(.5*_C1+.5*t)+((exp(.5*_C1)*exp(.5
[ *t)-exp(_C1)*exp(t))/exp(.5*_C1))^2.0*exp(.5*_C1)/(-.1000000000/
[ exp(.5000000000*_C1)*(exp(_C1)*t+2.*exp(-.5000000000*t+.50000000
[ 00*_C1))*exp(1.00*t)*exp(_C1)*exp(t)-_C2*exp(1.00*t)*exp(_C1)*ex
[ p(t)+.1000000000/exp(.5000000000*_C1)*(exp(_C1)*t+2.*exp(-.50000
[ 00000*t+.5000000000*_C1))*exp(1.00*t)*exp(.5*_C1)*exp(.5*t)+_C2*
[ exp(1.00*t)*exp(.5*_C1)*exp(.5*t)):
[ > t:=0:
[ >
```

```

[ > t:=0:
[ > y:
[ > x2:
[ > solve({y=15,x2=25},{_C1,_C2});
[                               _CI := 0.5753641449, _C2 := -0.1777777778;
[ > restart;
[ > with(plots):
[ > with(DEtools):
[ > _C1:= .5753641449;
[                               _CI := 0.5753641449
[ > _C2:= -.1777777778;
[                               _C2 := -0.1777777778
[ > y:=- (exp(.5*_C1)*exp(.5*t)-exp(_C1)*exp(t))/exp(.5*_C1))^2.0*exp
[ p(.5*_C1)/(-.1000000000/exp(.5000000000*_C1)*(exp(_C1)*t+2.*exp(
[ -.5000000000*t+.5000000000*_C1))*exp(1.00*t)*exp(_C1)*exp(t)-_C2
[ *exp(1.00*t)*exp(_C1)*exp(t)+.1000000000/exp(.5000000000*_C1)*(e
[ xp(_C1)*t+2.*exp(-.5000000000*t+.5000000000*_C1))*exp(1.00*t)*ex
[ p(.5*_C1)*exp(.5*t)+_C2*exp(1.00*t)*exp(.5*_C1)*exp(.5*t));
[
[ y := -1.333333333 (1.000000000 e(0.5 t) - 1.333333334 et)2.0 / (
[ -0.1333333334 (1.777777778 t + 2. e(-0.5000000000 t + 0.2876820724)) e(1.00 t) et
[ + 0.3160493828 e(1.00 t) et
[ + 0.1000000000 (1.777777778 t + 2. e(-0.5000000000 t + 0.2876820724)) e(1.00 t) e(0.5 t)
[ - 0.2370370370 e(1.00 t) e(0.5 t))
[ > x:=10./(-1+exp(.5*_C1+.5*t))*exp(.5*_C1+.5*t)+(exp(.5*_C1)*exp
[ (.5*t)-exp(_C1)*exp(t))/exp(.5*_C1))^2.0*exp(.5*_C1)/(-.10000000
[ 00/exp(.5000000000*_C1)*(exp(_C1)*t+2.*exp(-.5000000000*t+.5000
[ 00000*_C1))*exp(1.00*t)*exp(_C1)*exp(t)-_C2*exp(1.00*t)*exp(_C1)
[ *exp(t)+.1000000000/exp(.5000000000*_C1)*(exp(_C1)*t+2.*exp(-.50
[ 00000000*t+.5000000000*_C1))*exp(1.00*t)*exp(.5*_C1)*exp(.5*t)+_
[ C2*exp(1.00*t)*exp(.5*_C1)*exp(.5*t));
[
[ x :=  $\frac{10.0 e^{(0.2876820724 + 0.5 t)}}{-1 + e^{(0.2876820724 + 0.5 t)}} + 1.333333333 (1.000000000 e^{(0.5 t)} - 1.333333334 e^t)^{2.0} / ($ 
[ -0.1333333334 (1.777777778 t + 2. e(-0.5000000000 t + 0.2876820724)) e(1.00 t) et
[ + 0.3160493828 e(1.00 t) et
[ + 0.1000000000 (1.777777778 t + 2. e(-0.5000000000 t + 0.2876820724)) e(1.00 t) e(0.5 t)
[ - 0.2370370370 e(1.00 t) e(0.5 t))
[ >

```

Adi mertebeden Lojistik diferansiyel denklemin programı:

```
[ > restart;
> czm:=
  k*(b-c)/(1+exp(_C1*b-_C1*c+b*t-c*t))*exp(_C1*b-_C1*c+b*t-c*t):

$$czm := \frac{k(b-c)e^{(\_C1 b - \_C1 c + b t - c t)}}{1 + e^{(\_C1 b - \_C1 c + b t - c t)}}$$

> b:=1:
> c:=0.5:
> k:=20:
> czm:

> t:=0:
> czm:
> solve(czm=40,{_C1});
{ _C1 = 0.5753641449 + 6.283185307 I }
```

Farklı α mertebeleri için M'_s in çözüm programı:

```
[ > restart;
> with(DEtools):
> with(plots):
> a:=0.1:
> b:=1:
> c:=0.5:
> K:=20:
> mittag1:=sum(((b-c)*x^(0.4))^k/(GAMMA(0.4+1+0.4*k)),k=0..infinity):
> mittag2:=sum(((b-c)*x^(0.6))^k/(GAMMA(0.6+1+0.6*k)),k=0..infinity):
> mittag3:=sum(((b-c)*x^(0.8))^k/(GAMMA(0.8+1+0.8*k)),k=0..infinity):
> mittag4:=sum(((b-c)*x^(1))^k/(GAMMA(1+1+1*k)),k=0..infinity):
> M1:=(x^(0.4)*(mittag1)^(-0.4)-1)/(-2/(K*(b-c)))+35:
> M2:=(x^(0.6)*(mittag2)^(-0.6)-1)/(-2/(K*(b-c)))+35:
> M3:=(x^(0.8)*(mittag3)^(-0.8)-1)/(-2/(K*(b-c)))+35:
> M4:=(x^(1)*(mittag4)^(-1)-1)/(-2/(K*(b-c)))+35:
> M_i1:=(16.5)+(c+(M1/K)-(a*M1)):
> M_i2:=(16.5)+(c+(M2/K)-(a*M2)):
> M_i3:=(16.5)+(c+(M3/K)-(a*M3)):
> M_i4:=(16.5)+(c+(M4/K)-(a*M4)):
> M_s1:=M1-M_i1:
> M_s2:=M2-M_i2:
> M_s3:=M3-M_i3:
> M_s4:=M4-M_i4:
> plot({M_s1,M_s2,M_s3,M_s4},x=0..25);
```

Farklı α mertebeleri için M'_i nin çözüm programı:

```
[ > restart;
[ > with(DEtools):
[ > with(plots):
[ > a:=0.1:
[ > b:=1:
[ > c:=0.5:
[ > K:=20:
[ > mittag1:=sum(((b-c)*x^(0.4))^k)/(GAMMA(0.4+1+0.4*k)),k=0..infinity):
[ > mittag2:=sum(((b-c)*x^(0.6))^k)/(GAMMA(0.6+1+0.6*k)),k=0..infinity):
[ > mittag3:=sum(((b-c)*x^(0.8))^k)/(GAMMA(0.8+1+0.8*k)),k=0..infinity):
[ > mittag4:=sum(((b-c)*x^(1))^k)/(GAMMA(1+1+1*k)),k=0..infinity):
[ > M1:=(x^(0.4)*(mittag1)^(-0.4)-1)/(-2/(K*(b-c)))+35:
[ > M2:=(x^(0.6)*(mittag2)^(-0.6)-1)/(-2/(K*(b-c)))+35:
[ > M3:=(x^(0.8)*(mittag3)^(-0.8)-1)/(-2/(K*(b-c)))+35:
[ > M4:=(x^(1)*(mittag4)^(-1)-1)/(-2/(K*(b-c)))+35:
[ > M_i1:=(16.5)+(c+(M1/K)-(a*M1)):
[ > M_i2:=(16.5)+(c+(M2/K)-(a*M2)):
[ > M_i3:=(16.5)+(c+(M3/K)-(a*M3)):
[ > M_i4:=(16.5)+(c+(M4/K)-(a*M4)):
[ > M_s1:=M1-M_i1:
[ > M_s2:=M2-M_i2:
[ > M_s3:=M3-M_i3:
[ > M_s4:=M4-M_i4:
[ > plot({M_s1,M_s2,M_s3,M_s4},x=0..25);
```

Lineer EGL sisteminin çözüm programı:

```
[ > restart;
[ > with(DEtools):
[ > ode:=diff(N[o](t),t)-alpha[p]*N[o](t)+2*alpha[p]*a*t*N[o](t)=0:
[ > sku:=symgen(ode):
[ > czm:=dsolve(ode,'can'):
[ > N[o](t):=1/exp(a*t^2*alpha[p])*exp(alpha[p]*t)*_C1:
[ > ode2:=diff(N[i](t),t)-2*alpha[p]*(a*t)*(1/exp(a*t^2*alpha[p]))*exp(alpha[p]*t)*_C1+alpha[e]*N[i](t)=0:
[ > sku2:=symgen(ode2):
[ > czm2:=dsolve(ode2,'can');
```

Rasyonel EGL sisteminin çözüm programı:

```
[ > restart;
[ > with(DEtools):
[ > ode:=diff(N[o](t),t)-alpha[p]*N[o](t)+2*alpha[p]*((a*t)/(1+a*t))
[   *N[o](t)=0:
[ > sku:=symgen(ode):
[ > czm:=dsolve(ode,'can'):
[ > N[o](t) =
[   1/exp(alpha[p]*t)*((a*t+1)^(alpha[p]/a))^2/exp(alpha[p]/a*_C1)^2
[   :
[ > ode2:=diff(N[i](t),t)-2*alpha[p]*((a*t)/(1+a*t))*(1/exp(alpha[p]
[   *t)*((a*t+1)^(alpha[p]/a))^2/exp(alpha[p]/a*_C1)^2)+alpha[e]*N[i
[   ](t)=0:
[ > sku2:=symgen(ode2):
[ > czm2:=dsolve(ode2,'can'):
```

Üstel EGL sisteminin çözüm programı:

```
[ > restart;
[ > with(DEtools):
[ > ode:=diff(N[o](t),t)-alpha[p]*N[o](t)+2*alpha[p]*(1-exp(-a*t))*N
[   [o](t)=0:
[ > sku:=symgen(ode):
[ > czm:=dsolve(ode,'can'):
[ > N[o](t) = 1/exp(alpha[p]*t)/exp(1/a*alpha[p]*exp(-a*t))^2*_C1:
[ > ode2:=diff(N[i](t),t)-2*alpha[p]*(1-exp(-a*t))*(1/exp(alpha[p]*t
[   )/exp(1/a*alpha[p]*exp(-a*t))^2*_C1)+ (alpha[e]*N[i](t))=0:
[ > sku2:=symgen(ode2):
[ > czm2:=dsolve(ode2,'can'):
```

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, diferansiyel denklemlerin ve diferansiyel denklem sistemlerinin genel çözümünün Lie simetri analizi yapılarak nasıl bulunacağı üzerine odaklanılmıştır. Ayrı ayrı alt başlıklar altında, adi diferansiyel denklemler, kesirli diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemlere yöntemin uygulaması gösterilmiştir. Bu bakış açısı ile, diferansiyel denklem sistemlerine uygulanması olarak da, iki model ve bu modellerin çözümleri tartışılmıştır.

Tez çalışmasının ilk kısmında da anlaşılabacağı üzere, adi diferansiyel denklem sisteminin Lie simetri çözümleri tanjant vektörleri kullanımıyla elde edilir. Örnek model için, kolayca ilk olarak Lojistik diferansiyel denklemin çözümüne oradan da Hanta-virüs sisteminin çözümleri elde edilmiştir.

Fakat kesirli diferansiyel denklem veya denklem sistemlerinin Lie simetri çözümlerinin Mittag-Leffler fonksiyonunu içermesinden dolayı, keyfi sabitlerin seçimi oldukça önemli ve zordur. Bu keyfi sabitlerin seçiminde başlangıç koşullarına bağlı pozitif çözümleri garantilemek için uygunluk oldukça önemlidir. Bundan dolayı, verilen başka koşullar altında negatif çözüme karşı sabitlerin seçimine dikkat edilmelidir.

En son durumda ise Hanta-virüs modeli olarak verilen lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü için Lie simetri metodundan yararlanılmıştır. Toplam fare nüfusunun Fisher-Kolmogorov denklemi olarak elde edilmesinden sonra, bu denklemin çözümü için Lie simetrilerinin bulunmasındaki güçlük sebebi ile bazı sabit değerlerin özel seçimleri gerekmiştir.

Bir diğer sistem olan Granül hücre üretimi sisteminde ise beyincik granül hücrelerinin dış katmandaki değişikliği ile elde edilen zamana bağlı fonksiyonların genel çözümleri Lie analizi ile elde edilmiştir. İlk olarak (3.2.1) ile verilen *EGL* nin dış katmanındaki hücre sayısının veren $N_o(t)$ çözümüne ulaşılmış ve sonrasında bu çözüm ile (3.2.2) ile verilen $N_i(t)$ çözümü yani *EGL* nin iç katmanındaki hücre sayısı zamana bağlı olarak elde edilmiştir.

Daha sonra bu genel çözümler ile doku bölgesindeki değişikliğe ait $A_o(t)$ ve $A_i(t)$ zamana bağlı fonksiyonları elde edilmiş ve aylık periyotlar halinde grafikleri çizilmiştir. Bu çözümler ve çizimler sırasında $\delta(t)$ ye ait üç farklı durum ele alınmıştır. Elde edilen bu sonuçlar ile sinir hastalıkları için ortaya konulan yeni bakış açısının grafikleri ve density plot çizimleri kullanılmıştır.



KAYNAKLAR

- Abdullah F.A., Ismail A.I., 2011. Simulations of the spread of the Hantavirus using fractional differential equations. *Matematika*, 27,149-158.
- Ablowitz, M. J., Anthony Z., 1979. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. *Bulletin of Mathematical Biology* 41.6,835-840.
- Abramson, G., Kenkre V. M., 2002. Spatiotemporal patterns in the hantavirus infection. *Physical Review E*, 66.1, 011912.
- Abramson, G., Kenkre, V. M., Yates, T. L., Parmenter, R. R., 2003. Traveling waves of infection in the Hantavirus epidemics. *Bulletin of mathematical biology*, 65(3), 519-534 .
- Açıl M., 2013. Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin lie simetrileri üzerine, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Manisa.
- Allen, L., Michel L., Carleton J.P., 2003. The dynamics of two viral infections in a single host population with applications to hantavirus. *Mathematical biosciences* 186.2, 191-21.
- Allen, L., Robert K. M., Colleen B.J., 2006. Mathematical models for hantavirus infection in rodents. *Bulletin of mathematical biology* 68.3, 511-524.
- Baleanu, D., Mohammadi H., Rezapour S., 2012. Positive solutions of an initial value problem for nonlinear fractional differential equations, *Abstract and Applied Analysis*. Vol., Hindawi Publishing Corporation.
- Bluman, G.W., Kumei S., 1989. *Symmetries and Differential Equations*, New York, Springer-Verlag.
- Bluman, G.W., 1990. Invariant solutions for ordinary differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50.6, 1706-1715.
- Bluman, G. W., Stephen C., 2002. *Symmetry and integration methods for differential equations*, no. 154, Springer, Verlag New York, Inc.
- Chen, M., Clemence, D.P., 2006a. Analysis of and numerical schemes for a mouse population model in Hantavirus epidemics. *Journal of Difference Equations and Applications*, 12(9), 887-899.
- Chen, M., Clemence D.P., 2006b. Stability properties of a nonstandard finite difference scheme for a hantavirus epidemic model. *Journal of Difference Equations and Applications*, 12(12), 1243-1256.
- Cheviakov, A. F., 2007. GeM software package for computation of symmetries and conservation laws of differential equations. *Computer physics communications* 176.1, 48-61 .

- Cheviakov, A. F., 2010a. Computation of fluxes of conservation laws. *Journal of Engineering Mathematics* 66.1-3, 153-173.
- Cheviakov, A. F., 2010b. Symbolic computation of local symmetries of nonlinear and linear partial and ordinary differential equations. *Mathematics in Computer Science* 4.2-3, 203-222 .
- Clarkson, P. A., Elizabeth L. M., 1994. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 70.3, 250-288.
- Cohen, A., 1911. *An Introduction To The Lie Theory Of One-Parameter Groups With Applications To The Solutions Of Differential Equations*. D.C. Heath Co., Publishers, Boston, New York, Chicago.
- Ding, D., Qiang M., Xiaohua D., 2013. A non-standard finite difference scheme for an epidemic model with vaccination. *Journal of Difference Equations and Applications*, 19.2, 179-190.
- Espinosa, J.S., Liqun L., 2008. Timing neurogenesis and differentiation: insights from quantitative clonal analyses of cerebellar granule cells. *The Journal of Neuroscience* 28.10, 2301-2312.
- Fujita, S., 1967. Quantitative analysis of cell proliferation and differentiation in the cortex of the postnatal mouse cerebellum. *The Journal of Cell Biology* 32.2, 277-287.
- Gazizov, R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Y., 2007. Continuous transformation groups of fractional differential equations. *Vestnik USATU* 9, 3(21), 125–135.
- Gazizov, R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Y., 2011. Groupinvariant solutions of fractional differential equations. In: Machado, J.A.T., Luo, A.C.J., Barbosa, R.S., Silva, M.F., Figueiredo, L.B. (eds.) *Nonlinear Science and Complexity*, Springer, Heidelberg, pp. 51–58.
- Gbetoula, M.K., 2011. Symmetry Analysis of Fisher's Equation, University of KwaZulu-Natal, South Africa, 3-21.
- Goh, S. M., Ismail, A. I. M., Noorani, M. S. M., Hashim, I., 2009. Dynamics of the Hantavirus infection through variational iteration method. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(4), 2171-2176.
- Gokdogan A., Merdan M., Yildirim A., 2012. A multistage differential transformation method for approximate solution of Hantavirus infection model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17.1, 1-8.
- Goldowitz, D., Cushing, R. C., Laywell, E., D'Arcangelo, G., Sheldon, M., Sweet, H. O., 1997. Cerebellar disorganization characteristic of reeler in scrambler mutant mice despite presence of reelin. *The Journal of Neuroscience* 17.22, 8767-8777.

- Haddara, M. A., Nooreddin M.A., 1966. A quantitative study on the postnatal development of the cerebellar vermis of mouse. *Journal of Comparative Neurology* 128.2, 245-253.
- Hatten, M. E., Rifkin, D. B., Furie, M. B., Mason, C. A., Liem, R. K., 1981. Biochemistry of granule cell migration in developing mouse cerebellum. *Progress in Clinical and Biological Research* 85, 509-519.
- Hyden, P.E., 2000. *Symmetry Methods for Differential Equations (A Beginner's Guide)*, Cambridge Texts In Applied Mathematics, Cambridge University Press.
- Ibragimov, N. H., Nucci M.C., 1994. Integration of third order ordinary differential equations by Lie's method equations admitting three-dimensional Lie algebras. *Lie Groups and Their Applications* 1, 49-64 .
- Ibragimov, N. H., 2001. *Selected Works. Vol. 1, 2.* Karlskrona, Sweden, Alga Publications, Blekinge Institute of Technology.
- Karadem, Z.G., Ongun, M.Y., 2016. Logistic differential equation obtained from Hanta-virus model, *Suleyman Demirel University Journal of Science (e-Journal)*, 11(1), 82-91.
- Kaushal, R. S., Ranjit K., Awadhesh P., 2006. On the exact solutions of nonlinear diffusion-reaction equations with quadratic and cubic nonlinearities. *Pramana* 67.2, 249-256.
- Kilbas, A.A , Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, The Netherlands.
- Kiraz, F. A., 2007. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Lie Sistemleri üzerine, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İzmir.
- Leffler, Shoshana R., Legué, E., Aristizábal, O., Joyner, A. L., Peskin, C. S., Turnbull, D. H., 2016. A Mathematical Model of Granule Cell Generation During Mouse Cerebellum Development. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1-20.
- Legué, E., Elyn, R., Alexandra, L.J., 2015. Clonal analysis reveals granule cell behaviors and compartmentalization that determine the folded morphology of the cerebellum. *Development* 142.9, 661-1671.
- Mares, V., Lodin, Z., 1970. The cellular kinetics of the developing mouse cerebellum. II. The function of the external granular layer in the process of gyrification. *Brain research* 23.3, 43-352.
- Oldham, B.K., Spainer, J., 1974. *The Fractional Calculus: Theory and applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order.*
- Oliver, P.J., 1986. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

- Ovsiannikov, L.V., 1982. Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, New York.
- Özceylan, M., 2006. "Bir parametrelili Lie gruplarının diferansiyel denklemlere uygulanması". Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Edirne.
- Page, J.M., 1897. Ordinary Differential Equations An Elementary Text Book With in Introduction To Lie's Theory Of The Group Of One Parameter, Macmillan And Co. Limited, London.
- Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, Academic press, Mathematics in Science and Engineering.
- Rida, S. Z., El Radi, A. A., Arafa, A., Khalil, M., 2012. The effect of the environmental parameter on the Hantavirus infection through a fractional-order SI model. International Journal of Basic and Applied Sciences 1.2, 88-99
- Ruan, S., Jianhong, W., 2009. Modeling spatial spread of communicable diseases involving animal hosts. Spatial Ecology, pp.293-316.
- Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., 1993. Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon.
- Seil, F.J., Robert, M.H., 1970. Cerebellar Granule Cells in Vitro a Light and Electron Microscope Study. The Journal of Cell Biology 45.2, 212-220.
- Starrett, J., 2007. Solving differential equations by symmetry groups. American Mathematical Monthly, 114(9), 778-792
- Szulc, K.U., Lerch, J. P., Nieman, B. J., Bartelle, B. B., Friedel, M., Suero-Abreu, G. A., Turnbull, D. H., 2015. 4D MEMRI atlas of neonatal FVB/N mouse brain development. Neuroimage 118, 49-62.
- Torrisi, V., Nucci, M.C., 2001. Application of Lie Group Analysis to a Mathematical Model." The Geometrical Study of Differential Equations, NSF-CBMS Conference on the Geometrical Study of Differential Equations, June 20-25, 2000, Howard University, Washington, American Mathematical Soc.
- Ongun, M.Y., Kocabiyık, M., 2017. Lie Symmetry Analysis of the Hanta-Epidemic Systems. Journal of Mathematics and Computer Science, 332-344.
- Verna, A., Ram J., Mehmet K., 2014. Analytic and numerical solutions of nonlinear diffusion equations via symmetry reductions. Advances in Difference Equations, pp. (1-13).

Yuzbasi, S., Sezer, M., 2013. An exponential matrix method for numerical solutions of Hantavirus infection model. *Applications and Applied Mathematics*, 8.1.

Wesley, C.L., 2008. Discrete-time and continuous-time models with applications to the spread of hantavirus in wild rodent and human populations. Doctoral Dissertation, Texas Tech University.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet KOCABIYIK
Doğum Yeri ve Yılı : Isparta 1992
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
Eposta : dogangunesmehmet@hotmail.com

Taranmış
Fotoğraf
(3.5cm x 3cm)

Eğitim Durumu

Lise : Isparta Anadolu Lisesi, 2010
Lisans : SDÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik, 2015

Yayınları

- Ongun M.Y., Kocabıyık M., 2017. Lie Symmetry Analysis of the Hanta-Epidemic Systems. Journal of Mathematics and Computer Science, 332-344.
- Kocabıyık M., Ongun M.Y., 2017. Hanta-Virüs Modelinden Elde Edilen Fisher-Kolmogorov Denkleminin Lie Simetri Analizi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. (Submit Edildi)
- Kocabıyık M., Ongun M.Y., 2017. Lie Symmetry Analysis Of a Model For Granule Cell Generation. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi.(Submit Edildi)

Konferans Sunumları

1. Kocabıyık M., III. International Conference on Symmetries, Differential Equations and Applications (SDEA-III). Lie Symmetry Analysis of an Epidemic Systems, 14-17 Ağustos 2017. (Poster Sunumu için submit edildi)
2. Kocabıyık M.,III. International Conference on Symmetries, Differential Equations and Applications (SDEA-III). Lie Symmetry Analysis for Granule Cell Generation Model, 14-17 Ağustos 2017. (Sözlü Sunumu için submit edildi)
3. Karadem Z.G., Kocabıyık M., Ongun M.Y.. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017),On solutions of Epidemic System, Harran University, Şanlıurfa, 11-13 May 2017.

Projeler

1. Lisans Projesi, TÜBİTAK,2209-A Üniversite Öğrencileri Yurt İçi Araştırma Projeleri Destekleme Programı, Proje Yürütücüsü.(2015)
2. Yüksek Lisans Projesi, Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri, 4738- YL1-16 nolu Yüksek Lisans Tez Projesi (Devam ediyor).

Burslar

1. TÜBİTAK, 2228-A Son Sınıf Lisans Öğrencileri İçin Lisansüstü Burs Programı, Bursiyer (Devam ediyor).

Sınav ve Not Bilgileri

1. Akademik Personel ve Lisansüstü Eğitim Sınavı (ALES) : 96,38 (2016-Sonbahar)
2. Yabancı Dil Sınavı(YDS) :73,75 (2014-Sonbahar)
3. Mezuniyet Not Ortalaması :3,91 (YÖK Dönüşüm Tablosuna Göre 97,90)