

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BEREZİN SAYILARI İÇİN KUVVET EŞİTSİZLİĞİ

Arzu OKUDAN

Danışman
Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2017



©2017[Arzu OKUDAN]

TEZ ONAYI

Arzu OKUDAN tarafından hazırlanan “Berezin Sayıları İçin Kuvvet Eşitsizliği” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç. Dr. Suna SALTAN
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç. Dr. Hüseyin TUNA
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi



Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Yasin TUNCER

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Arzu OKUDAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	12
4.1. Hardy-Hilbert Eşitsizliği ve Berezin Sayıları İçin Kuvvet Eşitsizliği	12
4.1.1. Hardy-Hilbert eşitsizliği ve Berezin sayısı	12
4.1.2. Üniter operatörlerin kümesi için uzaklık tahmini ..	17
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	19
KAYNAKLAR	20
ÖZGEÇMİŞ	24

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BEREZİN SAYILARI İÇİN KUVVET EŞİTSİZLİĞİ

Arzu OKUDAN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Daha sonra, Hardy ve Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikleri içeren bazı klasik eşitsizliklerin operatör benzerleri verildi.

Ayrıca, Berezin sembolleri yöntemi ile Hardy ve Hardy-Hilbert tipli bazı klasik eşitsizlikler arasındaki ilişki ve bunun bazı sonuçları üzerinde yoğunlaşıldı. Üretici çekirdekli Hilbert uzaylar üzerindeki kendine eş ve pozitif operatörlerin Berezin sayıları için bazı ters kuvvet eşitsizliklerini ispatlamak için bu eşitsizliklerin operatör formları uygulandı. Yani, $C > 1$ sabitleri için,

$$(ber(f(A)))^2 \leq Cber((f(A))^2)$$

eşitsizliği ispatlandı.

Aynı zamanda, son olarak, $\mathcal{U}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde tüm üniter operatörlerin kümesi ve $\mathcal{H}(\Omega)$ üzerindeki A operatörü için $dist(A, \mathcal{U})$ ifadesinin tahmini hesabı için üretici çekirdekler tekniği kullanıldı.

Anahtar kelimeler: Üretici çekirdekli Hilbert uzayı, üretici çekirdek, Berezin sembolü, Berezin sayısı, kendine eş operatör, pozitif operatör, Hardy uzayı, Hardy-Hilbert eşitsizliği, üniter operatör, uzaklık tahmini.

2017, 24 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

POWER INEQUALITY FOR BEREZIN NUMBERS

Arzu OKUDAN

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

In this work, firstly, the historical development of the topic is mentioned, and some definitions and main results used in the work are given.

Later, operator analogues of some classical inequalities, including Hardy and Hardy-Hilbert type inequalities are given.

Also, the relationship between Hardy and Hardy-Hilbert type of some classical inequalities are given for the Berezin numbers and some of its results are focused in terms of Berezin symbols. These operator forms of such inequalities for proving some inverse power inequalities for the Berezin number of self-adjoint and positive operators acting on a Reproducing kernel are applied. More precisely, is proved

$$(ber(f(A)))^2 \leq Cber((f(A))^2)$$

for some constants $C > 1$.

Finally, use reproducing kernels technique to estimate $dist(A, U)$, where U is the set of all unitary operators on a Reproducing kernel Hilbert spaces $H = H(\Omega)$ over some set Ω , for some operator A on $H(\Omega)$ is studied.

Keywords: Reproducing kernel Hilbert space, reproducing kernel, Berezin symbol, Berezin number, self-adjoint operator, positive operator, Hardy space, Hardy-Hilbert inequality, unitary operator, $dist$ -estimate.

2017, 24 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam esnasında hiçbir bilgisini benden esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Suna SALTAN'a ve Arş. Gör. Ulaş YAMANCI'ya şükranlarımı bir borç bilirim.

Aynı zamanda tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan maddi, manevi desteklerini esirgemeyen annem Havvana OKUDAN ve babam Osman OKUDAN'a ve tüm arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Arzu OKUDAN
ISPARTA, 2017

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A^*	A operatörünün adjointi
$\tilde{A}$	A operatörünün Berezin sembolü
$ber(A)$	A operatörünün Berezin sayısı
$Ber(A)$	A operatörünün Berezin kümesi
$\mathcal{B}(H)$	H Hilbert uzayındaki lineer sınırlı operatörler
$B(H)_+$	H Hilbert uzayındaki pozitif lineer sınırlı operatörler
C^*	H kompleks Hilbert uzayı üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörler
$\mathbb{D}$	Birim disk
$\{e_n\}$	Ortonormal baz
H	Fonksiyonel Hilbert uzayı
H^2	Hardy uzayı
J	Pozitif $(0, +\infty)$ yarı eksenini kaplayan aralık
$k_{\mathcal{H},\lambda}$	Üretici çekirdek
$\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek
U	Üniter operatör
Ω	Kompleks sayıların açık bir kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu

1. GİRİŞ

Üretici çekirdek konusu 1950 yılında ayrıntılı olarak Aronszajn tarafından ele alınmıştır. Günümüz matematiğinde ise, yaklaşık 1972 yılından başlayarak ağırlıklı olarak Japon matematikçisi Saburo Saitoh üretici çekirdekler metoduna sanki yeni bir hayat vererek, bu yöntemi analizde, diferansiyel denklemler ve integral denklemler teorisinde, ters problemler konusunda, operatörler teorisinde ve harmonik analizde uygulayarak çok önemli ve orijinal sonuçlar almayı başarmıştır (Saitoh, 1988; 1997).

Üretici çekirdekler kullanılarak tanımlanabilen Berezin sembolleri kavramı ilk olarak Rus matematikçisi ve fizikçisi Berezin tarafından verilmiştir (Berezin, 1972; 1974). Berezin, aslında operatörler için kovaryant ve kontravaryant sembol kavramlarını vermiştir. Daha sonra üretici çekirdek ve Berezin sembolü çok sayıda matematikçilerin ilgisini çekmiş ve bu yönde önemli sonuçlar elde edilmiştir (Englis, 1994; Nordgren ve Rosenthal, 1994; Axler ve Zheng, 1998). Fakat bu konularda çok sayıda çözülmemiş problemler de vardır (Zhu, 1990; 2007). Berezin sembolünün operatörler teorisinin gelişimindeki rolü oldukça büyüktür. Bundan dolayı ilk olarak Nordgren ve Rosenthal tarafından standart fonksiyonel Hilbert uzayındaki kompakt operatörlerin karakterizasyonu Berezin sembolü kullanılarak verilmiştir (Nordgren ve Rosenthal, 1994). Kılıç, herhangi fonksiyonel Hilbert uzayında iki operatörün çarpımının Berezin sembolünün ayrı ayrı Berezin sembollerinin çarpımına eşit olması için gerekli koşulları incelemiştir (Kılıç, 1995). Bilim ve teknoloji alanında hızlı gelişmelere bağlı olarak yeni uygulama arayışları, Berezin sembolü ile ilgili çalışmaların en etkili yürütücü kuvveti olmuştur. Berezin sembollerinin Bergman uzaylarında ve Poisson çekirdeğinin Hardy uzaylarında önemli bir role sahip olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Eğer Berezin sembollerinin tanımladığı kümenin, yani Berezin kümesinin operatörün nümerik değer kümesinin alt kümesi olduğu dikkate alınırsa, bu kavramların haberleşme alanında geniş bir uygulamaya sahip olduğu söylenilebilir. Bunlara ilaveten, elektronların Wieck ve anti-Wieck sembollerinin Berezin sembolleri ile sıkı bir ilişkiye sahip olmasından dolayı da yine Berezin

sembollerinin elektronların enerji seviyelerinin belirlenmesinde var olduğu görülmüştür (Berezin, 1971).

Hardy eşitsizlikleri 1906-1928 yılları arasında geliştirilmiş önemli ifadelerdir. Bu eşitsizlikler birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve geliştirilmiştir. 1900 lü yılların başında tartışılmaya başlanan Hilbert eşitsizlikleri Hardy eşitsizlikleri ile yakından ilgilidir. Hardy-Hilbert eşitsizlikleri ilk olarak Hardy vd. (1967) tarafından verilmiştir. Bu eşitsizlikler fonksiyon teorisi, analiz ve onların uygulamalarını içeren matematiğin birçok branşında önemli olmuştur (Mitrinovic vd, 1991). Bu eşitsizliklerin birçok genelleştirmesi elde edilmiştir (Das ve Sahoo, 2010; Krinic ve Pecaric, 2006; Mitrinovic vd., 1991). Hardy-Hilbert eşitsizliklerinin integral formları ve operatör teorideki uygulamaları Hansen vd, (2010) ve Kian (2012) ın çalışmalarında bulunabilir. Hansen Hardy eşitsizliğinin operatör versiyonunu $1 < p \leq 2$ durumunda H kompleks Hilbert uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin C^* -cebirinde incelenmiştir (Hansen, 2009).

Bu tez çalışması temel olarak aşağıdaki ana başlıklardan oluşmaktadır:

- ✓ Berezin sembolü ve özelliklerinin incelenmesi,
- ✓ Hilbert operatör uzayları için Hardy-Hilbert tipli eşitsizliklerin ve $\mathcal{B}(H)_h$ uzayında Hardy-Hilbert eşitsizliklerinin incelenmesi,
- ✓ Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikleri kullanarak üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerindeki self adjoint ve pozitif operatörlerin Berezin sayıları için $(ber(f(A)))^2 \leq Cber((f(A))^2)$ eşitsizliğinin ispatlanması,
- ✓ Üretici çekirdekler tekniği kullanılarak, üniter operatörlerin kümesi için uzaklık tahmini üzerinde durulması.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Berezin sembolünün tanımında kullanılan üretici çekirdek kavramı ilk olarak Moore tarafından çekirdeğin üretici özelliğe sahip olmasıyla bahsedilmiştir (Moore, 1916; 1935). Daha sonra üretici çekirdeklerin genel teorisi Aronszajn (1950) tarafından ele alınmış ve Schwartz (1964) tarafından geliştirilmiştir. Aynı yıllarda Krein (1963), farklı bağlamda üretici çekirdeklerin genel teorisini geliştirmiştir.

Kompleks değerli bir fonksiyon olan Berezin sembolü ise ilk olarak Berezin tarafından tanımlanmıştır (Berezin, 1972; 1974). Bu kavramın yardımıyla Berezin, kuantum fiziğinin ve istatistiksel fiziğin önemli operatörlerinin (Schrödinger operatörü, Hamilton operatörü, Jacobi operatörü vd.) özdeğerlerinin dağılımı için önemli sonuçlar almıştır. Örneğin ilk olarak nükleer operatörün izini Berezin sembolü ile ifade etmiştir. Ayrıca eliptik tipli kısmi diferensiyel operatörün pozitif özdeğerlerinin sayısı için de önemli formüller elde etmiştir. Daha sonra Berezin sembolünün, operatörler teorisinin iç gelişimindeki rolü daha çok ortaya çıkmıştır. Bundan dolayı ilk olarak Nordgren ve Rosenthal, standart fonksiyonel Hilbert uzayındaki kompakt operatörlerin karakterizasyonunu Berezin sembolü kullanarak vermişlerdir (Nordgren ve Rosenthal, 1994). Bilindiği gibi harmonik fonksiyonların Berezin sembolleri yardımıyla tasvir edilmesi Engliš, Axler ve Zheng tarafından ortaya konulmuştur ve Berezin sembolünün günümüzde farklı alanlarda kullanılışı ve önemi ortaya çıkmıştır (Engliš, 1994; Axler ve Zheng, 1998). Bergman uzayı üzerinde operatörlerin kompakt olmasıyla Berezin dönüşümleri arasındaki ilişki analiz edilmiştir (Zorboska, 2002).

Berezin kümesi ve Berezin sayısı ise Karaev tarafından tanımlanmıştır (Karaev, 2006). Üretici çekirdekli Hilbert uzayında herhangi bir $A : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ operatörünün Berezin sembolünün çarpımsal özelliği Kılıç (1995) tarafından incelenmiştir. Yani, her $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörü için $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ olması için gerek ve yeter koşulun A operatörünün çarpım operatörü olması gerektiğini elde etmiştir. Daha sonra, farklı üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında operatörlerin çarpımsal özelliği Berezin sembolleri yardımıyla elde edilmiştir (Karaev ve

Gürdal, 2010). Buna ilaveten Hardy ve Bergman uzayları üzerinde operatörlerin Berezin sembolleri ile ilgili bazı problemler araştırılmıştır (Karaev vd., 2013).

Klasik Hardy eşitsizliği ℓ_p dizi uzayında negatif olmayan reel sayıların herhangi $a = (a_n)_{n \geq 1}$ dizisi için ve $p > 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_n, b_n \geq 0$ için $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < +\infty$ ve $0 < \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q < +\infty$ sağlanıyorsa o zaman,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.2)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m+n} \right)^p < \left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \quad (2.3)$$

eşitsizlikleri Hardy-Hilbert eşitsizliği olarak adlandırılır (Hardy vd., 1967). Bu eşitsizliği sağlayan $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ ve $\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \right)^p$ sabitleri en iyi sabitlerdir. Bu eşitsizlikler fonksiyon teorisi, analiz ve onların uygulamalarını içeren matematiğin birçok alanında önemlidir (Mitrinovic vd., 1991). Bu eşitsizliklerin birçok genelleştirilmesi elde edilmiştir (Das ve Sahoo, 2010; Krinic ve Pecaric, 2006; Mitrinovic vd., 1991).

Bu eşitsizliklerin integral formları aşağıdaki gibidir:

$p > 1$ ve f fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde negatif olmayan p -integrallenebilir fonksiyon ise o zaman

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f^p(x) dx.$$

dir.

$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \geq 0$ ve $0 < \int_0^{+\infty} f^p(x) dx < +\infty, 0 < \int_0^{+\infty} g^q(x) dx < +\infty$ ise o zaman,

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x) g(y)}{x+y} dx dy < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left(\int_0^{\infty} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hansen, (2.1) Hardy eşitsizliğinin operatör versiyonunu $1 < p \leq 2$ durumunda H kompleks Hilbert uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin C^* -cebirinde incelemiştir (Hansen 2009). (2.2) eşitsizliğinin operatör versiyonu aynı zamanda Hansen vd. (2010) de verilmiştir. Bu eşitsizliklerin hepsi ve operatör teorideki onların değerli uygulamaları Hansen (2009), Moslehion (2009), Hansen vd (2010) ve Kian (2012) gibi matematikçilerin çalışmalarında bulunabilir.

Ele alınan konularla ilgili literatürde yeterli sayıda çalışma olmasına rağmen, Berezin sembolleri ve üretici çekirdeğin uygulamaları ile ilgili literatürde çok az sayıda çalışma yer almaktadır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.1. Kompleks sayıların açık bir Ω kümesi üzerinde, her $\lambda \in \Omega$ için $f \rightarrow f(\lambda)$ lineer fonksiyoneli $\mathcal{H}$ uzayında sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerindeki f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına "fonksiyonel Hilbert uzayı" ya da "üretici çekirdekli Hilbert uzayı" denir (Halmos, 1982).

Klasik Riesz temsil teoreminden, $\lambda \in \Omega$ için $f(\lambda) = \langle f, k_{\mathcal{H},\lambda} \rangle$ olacak şekilde bir tek $k_{\mathcal{H},\lambda} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu vardır. $\Omega \times \Omega$ kümesi üzerinde $k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k(z, \lambda)$ ile tanımlanan bu k fonksiyonuna " $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeği" denir (Halmos, 1982).

Diğer taraftan üretici çekirdek bazlar yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.2. $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayının herhangi ortonormal bazı $\{e_n\}$ olsun. O zaman $\mathcal{H}$ uzayının k üretici çekirdeği

$$k_\lambda(z) = k(z, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilir (Stroethoff, 1997).

Şimdi üretici çekirdeklere örnek verilecektir.

Örnek 3.3 (Hardy uzayı). $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski üzerinde kareleri toplanabilen, kompleks katsayılarla sahip kuvvet serisi şeklinde yazılabilen tüm analitik fonksiyonların oluşturduğu uzaya "Hardy uzayı" denir. Yani,

$$H^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty \right\}$$

koşulunu sağlayan $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ uzayına klasik Hardy uzayı denir. H^2 uzayında iç çarpım $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ ve $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n) z^n$ için $\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$

ile tanımlanır. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$ vektörünün normu

$\|f\|_{H^2} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}$ şeklinde olup, burada $\widehat{f}(n) = f^{(n)}(0) / (n!)$ değeri $f(z)$ analitik fonksiyonunun n inci Taylor katsayısıdır (Rosenblum ve Rovnyak, 1985; Martinez-Avendano ve Rosenthal, 2007).

$H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayı, $\{z^n : n \geq 0\}$ ortonormal bazına sahip olduğundan bu uzayın üretici çekirdeği her $\lambda, z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} k_{H^2, \lambda}(z) &= \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) = \sum_{n \geq 0} \overline{\lambda}^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (\overline{\lambda} z)^n = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z} \end{aligned}$$

dir. Bu çekirdeğe aynı zamanda "Szegő çekirdeği" de denir (Stroethoff, 1997).

Tanım 3.4. $\mathcal{H}$ uzayı Ω kümesi üzerinde $\widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}$ normalleştirilmiş üretici çekirdeğe sahip fonksiyonel Hilbert uzayı ve A bu uzayda lineer sınırlı operatör olsun. Bu durumda

$$\widetilde{A}(\lambda) = \left\langle A \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{A}$ fonksiyonuna A operatörünün Berezin sembolü denir (Berezin, 1972).

Tanım 3.5. k_{λ} üretici çekirdeğine sahip, boş olmayan bir Ω kümesi üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir A operatörünün "Berezin kümesi" ve "Berezin sayısı", sırasıyla,

$$Ber(A) = Range(\widetilde{A}) = \left\{ \widetilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\} \text{ ve } ber(A) = \sup \left\{ \left| \widetilde{A}(\lambda) \right| : \lambda \in \Omega \right\}$$

ifadeleriyle tanımlanır (Karaev, 2006). Ayrıca nümerik değer ve nümerik yarıçap da sırasıyla,

$$Ber(A) \subset W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1 \}$$

ve

$$ber(A) \leq w(A) = \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1 \}$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıda Berezin sembolünün bazı temel özellikleri verilmiştir (Kılıç, 1994).

1. A pozitif operatör ise o zaman $\tilde{A}$ pozitif fonksiyondur.

2.

$$\begin{aligned} |\tilde{A}(\lambda)| &= \left| \langle A\hat{k}_{H,\lambda}, \hat{k}_{H,\lambda} \rangle \right| \leq \|A\hat{k}_{H,\lambda}\| \|\hat{k}_{H,\lambda}\| \\ &\leq \|A\| \|\hat{k}_{H,\lambda}\|^2 = \|A\| \quad (\lambda \in \Omega) \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{A}$ Berezin sembolü sınırlı bir fonksiyondur.

3. A^* adjoint operatörünün Berezin sembolü, $\tilde{A}$ nın kompleks eşleniğine eşittir.

Yani

$$\tilde{A}^*(\lambda) = \langle A^*\hat{k}_{H,\lambda}, \hat{k}_{H,\lambda} \rangle = \langle \hat{k}_{H,\lambda}, A\hat{k}_{H,\lambda} \rangle = \overline{\langle A\hat{k}_{H,\lambda}, \hat{k}_{H,\lambda} \rangle} = \overline{\tilde{A}(\lambda)}$$

dir.

4. Her $\lambda \in \Omega$ için $\tilde{A}(\lambda) = \tilde{B}(\lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul, $A = B$ olmasıdır.

Tanım 3.6. Analiz ve diferansiyel denklemlerin uygulanabilir eşitsizliklerinden biri olan Hardy eşitsizliği, $p > 1$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif reel sayılar ve $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$, olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitsizlik kesindir, yani; $\left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ sabiti bu sağlayan içeren en küçük sayıdır. Bu eşitsizliğin integral formu aşağıdaki gibidir:

$p > 1$, f , $(0, \infty)$ aralığında negatif olmayan ve p -integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p dx$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.7. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_n, b_n \geq 0$ olmak üzere $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$ ve $0 < \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q < \infty$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{n+m} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde tanımlı eşitsizlik Hardy-Hilbert eşitsizliği olarak adlandırılır. Bu eşitsizliğin integral formu:

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g \geq 0$ ve $0 < \int_0^{\infty} f(x)^p dx < \infty$, $0 < \int_0^{\infty} g(x)^q dx < \infty$, olmak üzere

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\int_0^{\infty} f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} g(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde dir. Genelleştirilmiş hali ise $2 - \min\{p, q\} < s \leq 2$ aralığında, $L_1 = B\left(\frac{p+s-2}{p}, \frac{q+s-2}{q}\right)$ ve $B(u, v)$ bir β -fonksiyon olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{(n+m)^s} < L_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{1-s} a_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-s} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(s-1)(p-1)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{(n+m)^s} \right)^p < L_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^{1-s} a_m^p$$

şeklinde ifade edilir (Yang, 2006).

Teorem. 3.8. $1 < p \leq 2$ bir reel sayı ve f fonksiyonu, $(0, \infty)$ aralığından $\mathbb{B}(H)$ uzayının tüm pozitif operatörlerinin kümesi olan $\mathbb{B}(H)_+$ kümesine tanımlı olsun. Bu durumda zayıf ölçülebilir dönüşüm olan

$$\int_0^{\infty} f(x)^p dx$$

integrali H uzayında sınırlı lineer operatör olarak tanımlansın. Böylece

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx$$

$\left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ sabit olmak üzere eşitsizliği sağlar.

Teorem 3.9. f, g fonksiyonları J aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar ve $f, g \geq 0$ olsun. Her $A, B \in \mathbb{B}(H)_h$ operatörleri ve her $x, y \in H$ birim vektörleri için, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle f(A)g(A)x, x \rangle + \frac{1}{3} \langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)y, y \rangle \\ & + \frac{1}{3} \langle f(A)y, y \rangle \langle g(B)x, x \rangle + \frac{1}{4} \langle f(B)g(B)y, y \rangle \\ & \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left\langle (f(A)^p + f(B)^p)^{\frac{1}{p}} (g(A)^q + g(B)^q)^{\frac{1}{q}} x, x \right\rangle \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 3.10. f ve g fonksiyonları J aralığında tanımlı ve $f, g \geq 0$ ise, her A kendine eş operatör ve her $x \in H$ birim vektörü için

$$\langle f(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle \leq \frac{3}{2} \left(2\pi - \frac{3}{4} \right) \langle f(A)g(A)x, x \rangle$$

dir.

Sonuç 3.11. f ve g fonksiyonları J aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar ve $f, g \geq 0$ olsun. Her $A, B \in \mathbb{B}(H)_h$ operatörleri ve her $x, y \in H$ birim vektörleri için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle f(A)g(A)x, x \rangle + \frac{1}{3} \langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)y, y \rangle \\ & + \frac{1}{3} \langle f(A)y, y \rangle \langle g(B)x, x \rangle + \frac{1}{4} \langle f(B)g(B)y, y \rangle \\ & \leq \pi \left\langle (f(A)^2 + f(B)^2)^{\frac{1}{2}} (g(A)^2 + g(B)^2)^{\frac{1}{2}} x, x \right\rangle \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.12. f ve g fonksiyonları J aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlar ve $f, g \geq 0$ olsun. Her $A, B \in \mathbb{B}(H)_h$ operatörleri ve her $x, y \in H$ birim vektörleri için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle f(B)y, y \rangle \langle f(A)x, x \rangle + \frac{1}{3} \langle g(B)y, y \rangle \langle f(A)x, x \rangle \\ & + \frac{1}{3} \langle f(B)y, y \rangle \langle g(A)x, x \rangle + \frac{1}{4} \langle g(B)y, y \rangle \langle g(A)x, x \rangle \\ & \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left\langle (f(B)^q + g(B)^q)^{\frac{1}{q}} y, y \right\rangle \left\langle (f(A)^p + g(A)^p)^{\frac{1}{p}} x, x \right\rangle \end{aligned}$$

dir.

f ve g fonksiyonlarının konveks olması durumunda aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 3.13. $f, g : J \rightarrow [0, \infty)$ konveks fonksiyonlar ve $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Her $A, B \in \mathbb{B}(H)_h$ operatörleri ve her x, y birim vektörleri için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} f(\langle Ax, x \rangle) g(\langle Ax, x \rangle) + \frac{1}{3} f(\langle Ax, x \rangle) g(\langle By, y \rangle) \\ & + \frac{1}{3} (\langle g(Ax, x) \rangle f(\langle By, y \rangle) + \frac{1}{4} \langle f(B)g(B)y, y \rangle) \\ & \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\frac{1}{p} (\langle f(A)^p x, x \rangle + \langle f(B)^p y, y \rangle) + \frac{1}{q} \langle g(A)^q x, x \rangle + \langle g(B)^q y, y \rangle \right) \end{aligned}$$

dir.

Yardımcı Teorem 3.14. $a, b \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 1$ ve $p, q > 1$ öyle ki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq \left(\frac{a^{pr}}{p} + \frac{b^{qr}}{q} \right)^{\frac{1}{r}} \text{ dir. } (r \geq 1)$$

Sonuç 3.15. $f, g : J \rightarrow [0, \infty)$ konveks fonksiyonlar ve $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Buradan her $A \in \mathbb{B}(H)_h$ operatörü ve her x birim vektörü için

$$f(\langle Ax, x \rangle) g(\langle Ax, x \rangle) \leq \frac{12}{17} \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\frac{2}{p} \langle f(A)^p x, x \rangle + \frac{2}{q} \langle g(A)^q x, x \rangle \right)$$

elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Hardy-Hilbert Eşitsizliği ve Berezin Sayıları İçin Kuvvet Eşitsizliği

Bu bölümde sayılar için Hardy ve Hardy-tipli eşitsizlikleri içeren bazı klasik eşitsizliklerin operatör benzerleri verilmiştir. Üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında kendine eş ve pozitif operatörlerin Berezin sayıları için bazı ters kuvvet eşitsizliklerini ispatlamak amacıyla bu eşitsizliklerin operatör formları uygulanmıştır. Yani, bazı $C > 1$ sabitleri için

$$(ber(f(A)))^2 \leq C ber((f(A))^2)$$

eşitsizliği ispatlanmıştır. Aynı zamanda $\mathcal{U}, \mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde tüm üniter operatörlerin kümesi ve $\mathcal{H}(\Omega)$ üzerindeki A operatörü için $dist(A, \mathcal{U})$ ifadesinin tahmini hesabı için üretici çekirdekler tekniği kullanılmıştır.

4.1.1. Hardy-Hilbert eşitsizliği ve Berezin sayısı

Bu kısımda, $\mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayında kendine eş operatörler için Hardy-Hilbert eşitsizliğinin benzeri ispatlanmış ve onun kuvvetlerinin Berezin sayısının hesaplanmasındaki tahmini için bu teknik uygulanmıştır. Tüm $n \geq 1$ tam sayıları için

$$w(A^n) \leq (w(A))^n$$

iyi bilinen durumu hatırlayalım (Halmos, 1982). Bununla birlikte, $n \geq 2$ için

$$ber(A^n) \leq (ber(A))^n$$

literatürde bilinmeyen benzer eşitsizliği ifade edebiliriz. Burada açık soru alttaki gibidir: Berezin sayısı için

$$(ber(A))^n \leq C (ber(A^n)), \quad n > 1, \quad (4.1)$$

ters kuvvet eşitsizliği sağlanacak şekilde $C = C(n) > 1$ sabiti mevcut mudur?

Burada $n = 2$ değeri ve $\mathcal{H}(\Omega)$ uzayı üzerindeki bazı pozitif A operatörleri için (4.1) eşitsizliğini ispatlayarak daha sonraki soru kısmen çözümlenmiştir. Bunun için temelde Kian (2002) nın makalesindeki bazı argümanlar kullanılmıştır.

Bunu takiben pozitif $(0, +\infty)$ yarı eksenini kapsayan aralık J ile tanımlanmıştır. Aynı zamanda, λI skaler operatörü için λ notasyonu kullanılmıştır.

Yardımcı Teorem 4.1.1. f, g fonksiyonları J aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar ve $f, g \geq 0$ olsun. Eğer $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ise o zaman J de spektrumları kapsayan herhangi kendine eş $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörleri ve her $\lambda, \mu \in \Omega$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \widetilde{f(A)g(A)}(\lambda) + \frac{1}{3} \widetilde{f(A)}(\lambda) \widetilde{g(B)}(\mu) + \frac{1}{3} \widetilde{f(A)}(\mu) \widetilde{g(B)}(\lambda) + \\ & + \frac{1}{4} \widetilde{f(B)g(B)}(\mu) \\ & \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left[(f^p(A) + f^p(B))^{1/p} (g^q(A) + g^q(B))^{1/q} \right]^\sim(\lambda) \end{aligned}$$

dır.

İspat. (2.2) eşitsizliğinde her $n \geq 3$ için $a_n = 0$, $b_n = 0$ alalım. $a_n, b_n \geq 0$ olduğu için (2.2) Hardy-Hilbert eşitsizliğinden

$$\frac{a_1 b_1}{2} + \frac{a_1 b_2}{3} + \frac{a_2 b_1}{3} + \frac{a_2 b_2}{4} \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} (a_1^p + a_2^p)^{1/p} (b_1^q + b_2^q)^{1/q}. \quad (4.2)$$

elde edilir. $x, y \in J$ olsun. Her $x, y \in J$ için $f, g \geq 0$ olduğu gözönüne alındığında (4.2) eşitsizliğinde $a_1 = f(x)$, $a_2 = f(y)$, $b_1 = g(x)$ ve $b_2 = g(y)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)g(x)}{2} + \frac{f(x)g(y)}{3} + \frac{f(y)g(x)}{3} + \frac{f(y)g(y)}{4} \\ & \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} (f^p(x) + f^p(y))^{1/p} (g^q(x) + g^q(y))^{1/q} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur. Bir A kendine eş operatörü sürekli fonksiyonların sınıfına göre fonksiyonel hesaplamaları uygulanarak ve (4.3) eşitsizliği

kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{f(A)g(A)}{2} + \frac{f(A)g(y)}{3} + \frac{f(y)g(A)}{3} + \frac{f(y)g(y)}{4} \\ & \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} (f^p(A) + f^p(y))^{1/p} (g^q(A) + g^q(y))^{1/q}, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $\lambda \in \Omega$ ve $y \in J$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\langle f(A)g(A) \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \frac{1}{3} g(y) \left\langle f(A) \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \\ & + \frac{1}{3} f(y) \left\langle g(A) \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \frac{f(y)g(y)}{4} \\ & \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left\langle (f^p(A) + f^p(y))^{1/p} (g^q(A) + g^q(y))^{1/q} \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \end{aligned}$$

olarak yazılır. Kendine eş B operatörüne bir kez daha fonksiyonel işlemler uygulayarak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \widetilde{(fg)}(A)(\lambda) + \frac{1}{3} \widetilde{f(A)}(\lambda) g(B) + \frac{1}{3} \widetilde{g(A)}(\lambda) f(B) + \frac{1}{4} (fg)(B) \\ & \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left[(f^p(A) + f^p(B))^{1/p} (g^q(A) + g^q(B))^{1/q} \right]^\sim(\lambda). \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da her $\lambda, \mu \in \Omega$ ve J aralığında spektrumları bulunan herhangi $A, B \in \mathcal{H}(\Omega)$ kendine eş operatörleri için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \widetilde{f(A)g(A)}(\lambda) + \frac{1}{3} \widetilde{f(A)}(\lambda) \widetilde{g(B)}(\mu) + \frac{1}{3} \widetilde{f(B)}(\mu) \widetilde{g(A)}(\lambda) + \\ & + \frac{1}{4} \widetilde{f(B)g(B)}(\mu) \\ & \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left[(f^p(A) + f^p(B))^{1/p} (g^q(A) + g^q(B))^{1/q} \right]^\sim(\lambda). \end{aligned} \quad (4.4)$$

olduğunu gösterir. Buradan, yardımcı teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1.2. J aralığında spektrumları bulunan herhangi pozitif $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü için

$$(\text{ber}(f(A)))^2 \leq \left(\frac{3\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} - \frac{9}{8} \right) \text{ber}(f^2(A))$$

dır.

İspat. Yardımcı Teoremden 4.1.1 de A operatörü ile B ve λ ile μ yer değiştirerek ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gerçeğini kullanarak (4.4) eşitsiliğinden

$$\frac{2}{3} \left(\widetilde{f(A)}(\lambda) \right)^2 \leq \left[\frac{2\pi}{\sin(\pi/p)} - \frac{3}{4} \right] \widetilde{f^2(A)}(\lambda)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $\lambda \in \Omega$ için

$$\left(\widetilde{f(A)}(\lambda) \right)^2 \leq \left[\frac{3\pi}{\sin(\pi/p)} - \frac{9}{8} \right] \widetilde{f^2(A)}(\lambda)$$

dır. $\left(\widetilde{f(A)}(\lambda) \right)^2 \geq 0$ ve $\widetilde{f^2(A)}(\lambda) \geq 0$ olduğundan, bu eşitsizlik bize $\sigma(A) \subset J$ spektrumlu $\mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde herhangi A operatörü için pozitif operatörü ve A nın spektrumu için,

$$\left(\sup_{\lambda \in \Omega} \widetilde{f(A)}(\lambda) \right)^2 \leq \left[\frac{3\pi}{\sin(\pi/p)} - \frac{9}{8} \right] \sup_{\lambda \in \Omega} \widetilde{f^2(A)}(\lambda),$$

veya denk olarak

$$(\text{ber}(f(A)))^2 \leq \left[\frac{3\pi}{\sin(\pi/p)} - \frac{9}{8} \right] \text{ber}(f^2(A))$$

eşitsizliğini verir. Bu da sonucu ispatlar.

Genelde $\widetilde{AB} \neq \widetilde{A}\widetilde{B}$ olduğuna dikkat etmemiz gerekir.

Sonuç 4.1.3. $\sigma(A) \subset J$ özelliğine sahip her pozitif A operatörü için

$$(\text{ber}(f(A)))^2 \leq \left(3\pi - \frac{9}{8} \right) \text{ber}((f(A))^2)$$

dır.

Şimdi (2.2) Hardy-Hilbert eşitsizliğinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m+n} \right)^p < \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

denk formunu düşünerek pozitif operatörlerin Berezin sayısı için ters eşitsizliği ispatlayacağız. Bu kısımdaki temel sonucumuz bir sonraki teoremden verilen eşitsizlik olup Sonuç 4.1.3 den daha keskin tahmini vermiştir.

Teorem 4.1.4. f fonksiyonu bir J aralığı üzerinde tanımlı negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman J de spektrumları içeren herhangi pozitif $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörü için

$$(\text{ber}(f(A)))^2 \leq \frac{16\pi^2 - 77}{72} \text{ber}(f^2(A))$$

dır.

İspat. Hardy-Hilbert eşitsizliğinde $p = 2$ için (2.3) eşitsizliğinden

$$\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4}\right)^2 < \pi^2 (a_1^2 + a_2^2). \quad (4.5)$$

dır. $x, y \in J$ olsun. f fonksiyonu J üzerinde sürekli pozitif fonksiyon olduğundan (4.5) eşitsizliğinde $a_1 = f(x)$ ve $a_2 = f(y)$ alınarak

$$\left(\frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{3}\right)^2 + \left(\frac{f(x)}{3} + \frac{f(y)}{4}\right)^2 < \pi^2 (f^2(x) + f^2(y)),$$

elde ederiz ve buradan

$$\frac{13}{36}f^2(x) + \frac{1}{2}f(x)f(y) + \frac{25}{144}f^2(y) < \pi^2 (f^2(x) + f^2(y)) \quad (4.6)$$

olur. Bu sebeple Yardımcı Teorem 4.1.1 in ispatında olduğu gibi (4.6) eşitsizliğinde fonksiyonel işlemler yapılırsa

$$\frac{13}{36}f^2(A) + \frac{1}{2}f(y)f(A) + \frac{25}{144}f^2(y) < \pi^2 (f^2(A) + f^2(y)),$$

olur ve bundan dolayı her $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \frac{13}{36} \langle f^2(A) \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \frac{1}{2}f(y) \langle f(A) \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \frac{25}{144}f^2(y) \\ & < \pi^2 \left(\langle f^2(A) \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + f^2(y) \right) \end{aligned}$$

dır. A ya fonksiyonel işlemler uygulanırsa

$$\frac{13}{36} \widetilde{f^2(A)}(\lambda) + \frac{1}{2} \widetilde{f(A)}(\lambda) f(A) + \frac{25}{144} f^2(A) < \pi^2 \left(\widetilde{f^2(A)}(\lambda) + f^2(A) \right).$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan her $\lambda \in \Omega$ için

$$\frac{13}{36} \widetilde{f^2(A)}(\lambda) + \frac{1}{2} \left(\widetilde{f(A)}(\lambda) \right)^2 + \frac{25}{144} \widetilde{f^2(A)}(\lambda) < 2\pi^2 \widetilde{f^2(A)}(\lambda)$$

olur. Böylece her $\lambda \in \Omega$ için

$$\left(\widetilde{f(A)}(\lambda) \right)^2 < \frac{16\pi^2 - 77}{72} \left(\widetilde{f(A)^2}(\lambda) \right)$$

dır. Bu eşitsizlik

$$(\text{ber}(f(A)))^2 < \frac{16\pi^2 - 77}{72} \text{ber}((f(A))^2) \quad (\approx 1.121 \text{ber}(f^2(A)))$$

eşitsizliğini ifade etmektedir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.1.2. Üniter operatörlerin kümesi için uzaklık tahmini

H Hilbert uzayı üzerindeki üniter operatörlerin bütüşen tersler ile tersinebilir bütüşmeler tarafından karakterize edildiği çok iyi bilinmektedir (Stampfli, 1967). Yani A ile ilgili olarak $\|A\| \leq 1$ ve $\|A^{-1}\| \leq 1$ dır.

Genelde eğer $A \in \mathcal{B}(H)$ tersinebilir ise ozaman

$$\text{dist}(A, \mathcal{U}) = \max \left\{ \|A\| - 1, 1 - \|A^{-1}\|^{-1} \right\}$$

dır. Burada $\mathcal{U} := \{U \in \mathcal{B}(H) : U \text{ üniter}\}$ kümesi H uzayı üzerinde her üniter operatörlerin kümesidir. Aynı zamanda bu formülün ispatından şunu elde edebiliriz: Eğer $A \in \mathcal{B}(H)$ operatörü bazı $r \geq 1$ için $\|A\| \leq r$ ve $\|A^{-1}\| \leq r$ koşulunu sağlayan bir tersinebilir operatör ise o zaman

$$\|A - U\| \leq r - 1 \tag{4.7}$$

olacak şekilde $U \in \mathcal{B}(H)$ üniter operatörü mevcuttur.

Burada $H = \mathcal{H}(\Omega)$ olması durumunda $\text{dist}(A, \mathcal{U})$ için (4.7) eşitsizliğine benzeyen bir tahmin verilmiştir.

Teorem 4.1.5. $r \geq 1$ ve

$$1) \quad XA = AX = rI \text{ (ya da, } X \left(\frac{1}{r}A \right) = \left(\frac{1}{r}A \right) X = I)$$

2)

$$\sup_{\lambda \in \Omega} \left(\|A^* \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 + \|X \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 \right) \leq 2r \quad (4.8)$$

koşullarını sağlayan bir $X := X_A$ operatörü mevcut olacak şekilde $A : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ tanımlı bir operatör olsun. O zaman $\text{dist}(A, \mathcal{U}) \leq \sqrt{r} - 1$ dir.

İspat. $AX = XA = rI$ olduğundan, her $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \|(A^* - X) \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 &= \langle (A^* - X) \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}, (A^* - X) \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda} \rangle \\ &= \|A^* \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 + \|X \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 - \langle A^* \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}, X \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda} \rangle - \\ &\quad - \langle X \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}, A^* \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda} \rangle \\ &= \|A^* \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 + \|X \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 - \langle \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}, AX \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda} \rangle - \\ &\quad - \langle AX \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda} \rangle \\ &= \|A^* \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 + \|X \widehat{k}_{\mathcal{H}, \lambda}\|^2 - 2r \leq 0 \text{ ((4.8) koşulundan),} \end{aligned}$$

olup, bu da $(A^* - X) \frac{k_{\mathcal{H}, \lambda}}{\|k_{\mathcal{H}, \lambda}\|} = 0$ olduğunu yani her $\lambda \in \Omega$ için $(A^* - X) k_{\mathcal{H}, \lambda} = 0$ dir (her $\lambda \in \Omega$ için $\|k_{\mathcal{H}, \lambda}\| \neq 0$ olduğundan). Ayrıca $\text{span}\{k_{\mathcal{H}, \lambda} : \lambda \in \Omega\} = \mathcal{H}(\Omega)$ olduğu için $X = A^*$ sonucuna varılır. Bundan dolayı $AA^* = A^*A = rI$ ve $\left(\frac{A}{\sqrt{r}}\right)^* \frac{A}{\sqrt{r}} = \frac{A}{\sqrt{r}} \left(\frac{A}{\sqrt{r}}\right)^* = I$ olduğu için bu da bize $\frac{A}{\sqrt{r}}$ nin üniter olduğunu verir. O zaman

$$\left\| A - \frac{A}{\sqrt{r}} \right\| = (\sqrt{r} - 1) \left\| \frac{A}{\sqrt{r}} \right\| = \sqrt{r} - 1$$

eşitsizliği elde edilir ki bunun anlamı $\text{dist}(A, \mathcal{U}) \leq \left\| A - \frac{A}{\sqrt{r}} \right\| = \sqrt{r} - 1$, yani, $\text{dist}(A, \mathcal{U}) \leq \sqrt{r} - 1$ demektir. O halde teorem ispatlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışmasında, üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında Hardy-Hilbert eşitsizlikleri kullanılarak self-adjoint ve pozitif operatörlerin Berezin sayısı için yeni tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca, üretici çekirdekler metodu yardımıyla üretici çekirdekli Hilbert uzayında herhangi bir operatör ile üniter operatörlerin kümesi arasında uzaklık kavramı tahmin edilmeye çalışılmıştır.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir kaç öneri vardır:

1. Literatürde ters nümerik yarıçap ile ilgili eşitsizlikler pek fazla bilinmemektedir. Acaba Hardy ve Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler kullanılarak ters nümerik yarıçap eşitsizlikleri elde edilebilir mi?
2. Hardy ve Hardy-Hilbert eşitsizlikleri yardımıyla Berezin sayısı için farklı tip eşitsizlikler elde edilebilir mi?

KAYNAKLAR

- Aronzajn, N., 1950. Theory of Reproducing Kernels. Transactions of the American Mathematical Society, 68, 337-404.
- Axler, S., Zheng, D., 1998. The Berezin Transform on the Toeplitz Algebra. Studia Mathematica, 127, 113-136.
- Balinsky, A., Evans W.D., Lewis, R.T., 2012. Hardy's inequality and curvature, Journal of Functional Analysis, 262, no. 2, 648-666.
- Berezin, F. A., 1971. Wick and anti-Wick operator symbols. Mathematics of the USSR-Sbornik, 86 (128).
- Berezin, F.A., 1972. Covariant and Contravariant Symbols for Operators Mathematics of the USSR-Izvestiya, 6, 1117-1151.
- Berezin, F.A., 1974. Quantization. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 8, 1109-1163.
- Cañestro, A.M.I., Salvador, O.P., Torreblanca, R.C., 2012. Weighted bilinear Hardy inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 387, no. 1, 320-334.
- Chalendar, I., Fricain, E., Gürdal, M., Karaev, M.T., 2012. Compactness and Berezin Symbols. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 78, 315-329.
- Das, N., Sahoo, S., 2010. New inequalities of Hardy-Hilbert type, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica, 63, 109-120.
- Engliř, M., 1994. Functions Invariant under the Berezin Transform. Journal of Functional Analysis, 121, 223-254.
- Gao P., 2005. A note on Hardy-type inequalities, Proceedings of the American Mathematical Society, 133, no. 7, 1977-1984..

- Gokhberg, I. Ts., Krein, M. G., 1965. Introduction to the Theory of not Self-Adjoint Operators in Hilbert Spaces, Nauka, Moscow.
- Halmos, P., 1982. A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin.
- Hansen, F., 2009. Non-commutative Hardy inequalities, Bulletin of the London Mathematical Society, 41, no. 6, 1009-1016.
- Hansen, F., Krulic, K., Pecaric J., Persson L.-E., 2010. Generalized noncommutative Hardy and Hardy-Hilbert type inequalities International Journal of Mathematics, 21, no. 10, 1283-1295.
- Hardy, G.H., 1991. Divergent Series. AMS Chelsea Publishing, 394, New York.
- Hardy, G., Littewood J.E., Polya G., 1967. Inequalities, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge
- Karaev, M. T., 2002. Berezin Symbols and Schatten-von Neumann Classes. Mathematical Notes, 72, 185-192.
- Karaev, M.T., Saltan, S., 2005. Some Results on Berezin Symbols. Complex Variables: Theory and Applications, 50, 185-193.
- Karaev, M. T., 2006. Berezin Symbol and Invertibility of Operators on the Functional Hilbert Spaces. Journal of Functional Analysis, 238, 181-192.
- Karaev, M. T., 2006. Reproducing Kernels and Berezin Symbols Techniques in Various Questions of Operator Theory, Complex Analysis Operator Theory, (4), 983-1018.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., 2010. On the Berezin symbols and Toeplitz operators Extracta Mathematicae, 25(1), 83-102.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2013. Special operator classes and their properties. Banach Journal of Mathematical Analysis, 7(2), 75-86.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2014. Some results related with Berezin

- symbols and Toeplitz operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 17 (3), 1031-1045.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., Huban, M.B., 2016. Reproducing kernels, English algebras and some applications. *Studia Mathematica*, 232 (2), 113-141.
- Kian, M., 2012. Hardy-Hilbert type inequalities for Hilbert space operators, *Annals of Functional Analysis* 3 (2), 128-134.
- Kiliç, S., 1995. The Berezin symbol and multipliers of functional Hilbert spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123 (12), 3687-3691.
- Krein, M.G., 1963. Hermitian Positive Kernels on Homogeneous Spaces. *American Mathematical Society Translations*, 2 (34), 69-108, (1963).
- Krnić, M., Pecarić J., 2006. Extension of Hilbert's inequality, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 324, 150-160.
- Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L.-E., 2006. The prehistory of the Hardy inequality, *American Mathematical Monthly*, 113, no. 8, 715-732.
- Mitrinović, D.S., Pecarić, J.E., Fink, A.M., 1991. *Inequalities involving Functions and their Integrals and Derivatives*, Kluwer Academic Publishers.
- Moore, E.H., 1916. On properly Positive Hermitian Matrices. *Bulletin of American Mathematical Society*, 23, 59.
- Moore, E.H., 1935. *General Analysis* Memoirs of the American Philosophical Society, Part 1.
- Moslehian, M.S., 2009. Operator extensions of Hua's inequality, *Linear Algebra and its Applications*, 430(4), 1131-1139.
- Nikolski, N. K., 1986. *Treatise on the Shift Operator*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary Values of Berezin symbols. *Operator Theory: Advances and Applications*, 73, 362-368.

- Rogers, D.D., 1977. Approximation by unitary and essentially operators, *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* 39(1-2), 141-151.
- Saitoh, S., 1988. *Theory of Reproducing Kernels and Its Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189.
- Saitoh, S., 1997. *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 369.
- Saitoh, S., Alpay, D., Ball, J.A., Ohsawa T., 1999. *Reproducing Kernels and their Applications*, Kluwer Academic Publishers..
- Stampfli, J.G., 1967. Minimal range theorem for operators with thin spectra, *Pacific Journal of Mathematics* 23, 601-612.
- Yang, B., 2006 On an extension of Hardy-Hilberts integral inequality, *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*,. 21, no. 1, 96-102.
- Yang, B., 2011 On a new reverse extended Hardy's integral inequality, *Journal of Mathematical Research and Exposition* 31, no. 3, 474-478.
- Zhu, K., 1990. *Operator Theory in Function Spaces*. Marcel Dekker, 280, New York.
- Zhu, K., 2007. *Operator Theory in Function Spaces*, volume 138 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.
- Zorboska, N., 2003. The Berezin transform and radial operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 793-800.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Arzu OKUDAN
Doğum Yeri ve Yılı : ANTALYA, 1989
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : arzuokudan@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Karatay Anadolu Lisesi, 2003-2007
Lisans : Erciyes Üniversitesi, 2009-2013

Mesleki Deneyim

Yayınları

Garayev, M.T., Gürdal, M., Okudan, A., 2016. Hardy-Hilbert's inequality and Power inequalities for Berezin numbers of operators, Mathematical Inequalities Applications 19(3), 883-891.