



b –CEBİRLERİ

Mustafa ASLANTAŞ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2017

Mustafa ASLANTAŞ tarafından hazırlanan “SIRALI CEBİRLER” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bahri TURAN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Birol ALTIN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Ayşe UYAR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 14/07/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa ASLANTAŞ

14/07/2017

b –CEBİRLERİ
(Doktora Tezi)

Mustafa ASLANTAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2017

ÖZET

Bu tezde, b –cebiri kavramını vererek bazı özelliklerini inceledik. Gelfand-Mazur teoreminin bir versiyonunu b –cebirlerinde şu şekilde elde ettik; A birimli Arşimedyan düzgün tam b –cebiri ve A da pozitif her eleman terse sahip ise A, \mathbb{R} 'ye Riesz ve cebir izomorfiktir. A Arşimedyan b –cebiri iken sıra sürekli biduali $(A^\sim)_n$ in Arens çarpımı ile b –cebiri olduğunu, ek olarak A pozitif kare özelliğine sahip Arşimedyan b –cebiri ise $A^{\sim\sim}$ sıra bidualinin b –cebiri olduğunu gösterdik. Daha sonra E^\sim nın $(A^\sim)_n$ üzerindeki f –modül yapısını göz önüne alarak bu yapının belirlediği $\eta : (A^\sim)_n \rightarrow Orth(E^\sim)$ Arens homomorfizminin özellikleri üzerine çalıştık. Bunun sonucunda E nin sıra idealleri ile A -altmodülleri arasındaki ilişkiyi gerekli ve yeterli koşul olarak verdik.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Riesz uzayları, Riesz cebirleri, orthomorfizmler, Arens çarpımı, sıra sınırlı ve sıra sürekli bidual

Sayfa Adedi : 69

Danışman : Prof. Dr. Bahri TURAN

b –ALGEBRAS

(Ph. D. Thesis)

Mustafa ASLANTAŞ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2017

ABSTRACT

In this thesis, we have investigated some new properties by giving the concept of b –algebras. We have obtained a version of the Gelfand-Mazur theorem in b –algebras which A is Riesz and algebraical isomorphic with the reals whenever A is a Archimedean b –algebra with unit element $e > 0$ and such that every positive element has an inverse. Moreover, we show that the order continuous bidual $(A^\sim)_n^\sim$ of an Archimedean b –algebra A is a b –algebra with respect to the Arens multiplication. Furthermore, if the b –algebra A has positive squares, then the order bidual $A^{\sim\sim}$ is again a b –algebra. Then, we have worked on the properties of $\eta: (A^\sim)_n^\sim \rightarrow Orth(E^\sim)$ Arens homomorfizm determined by this structure, taking into account the f –modul of E^\sim on $(A^\sim)_n^\sim$. As a result, we have given the relationship between the order ideals of E and A -submodules of E as a necessary and sufficient condition.

Science Code : 20404

Key Words : Riesz space, ordered algebra, orthomorphism, Arens multiplication, module,

Page Number : 69

Supervisor : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŐEKKÖR

Bu çalıőmayı hazırlarken benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, değerli yorum ve fikirleri ile bana yön veren danıőmanımdan öte ailemden biri haline gelen sayın hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a, lisansüstü eğitimim boyunca her aőamamda bulunan ve değerli görüőlerini benimle her zaman paylaőan sayın hocam Prof. Dr. Ayşe UYAR'a, benim her zaman yanımda olan stresimi ve heyecanımı paylaőan sevgili eőim Emine ASLANTAş'a ve sevgili aileme, çalışma sürecim boyunca bilim ve bilim insanından maddi manevi desteğini esirgemeyen TUBİTAK'a teőekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	5
2.1. Riesz Uzayları	5
2.2. Operatörler.....	14
2.3. Cebirler	28
3. b –CEBİRLERİ.....	33
3.1. b –Cebirleri Üzerinde Frobenius-Gelfand-Mazur Teoremi.	33
3.2. b –Cebirlerinin Sıra Bidualleri ve Sıra Sürekli Biduali	44
4. ARENS HOMOMORFİZM.....	51
4.1. Arens Homomorfizm.....	53
4.2. f –Modüllerinde Alt Modül ve Sıra İdeal	59
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	65
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	68

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış olan simgelerden bazıları aşağıda açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
I_x	x tarafından üretilen ideal
B_x	x tarafından üretilen band
x^+	x'in pozitif kısmı
x^-	x'in negatif kısmı
$Z(E)$	Merkez operatörlerin kümesi
$Orth(E)$	E üzerinde tanımlı orthomorfizmler
$L(E, F)$	Operatörlerin Riesz uzayı
$L_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörler uzayı
$x_\alpha \uparrow x$	Supremumu x olan yukarı yönlendirilmiş ağ
$x_\alpha \downarrow x$	Infimumu x olan aşağı yönlendirilmiş ağ
A^d	A kümesinin dik tümleyeni
$ x $	x'in modülü
$ T $	T operatörünün modülü
$x \vee y$	x ile y nin supremumu
$x \wedge y$	x ile y nin infimumu
E^\sim	E nin sıra sınırlı duali
E_n^\sim	E nin sıra sürekli duali
N_T	T nin sıfır ideali
C_T	T nin taşıyıcısı
$C[a, b]$	[a,b] üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
l^∞	Sınırlı diziler uzayı
I^o	I nin poları
$A \perp B$	Birbirine dik kümeler
T^\sim	T nin adjointi
$P(E)$	E üzerinde band projeksiyonlar
$E^{\sim\sim}$	E nin sıra sınırlı biduali

Simgeler**Açıklamalar** $(E^{\sim})_n$

E nin sıra sürekli bidualı

 $E \overline{\otimes} F$

E ile F nin tensor çarpımı



1. GİRİŞ

A Riesz uzayı ve cebir olsun. Eğer her $x, y \in A^+$ için $xy \in A^+$ oluyorsa A ya Riesz cebiri denir. A Riesz cebiri olmak üzere,

- her $a, b \in A$ ve $0 \leq c \in A$ için $c(a \vee b) = ca \vee cb$ ve $(a \vee b)c = ac \vee bc$ şartları sağlanıyorsa A ya d -cebiri,
- her $a, b \in A$ için $a \wedge b = 0$ iken $ab = 0$ şartını sağlıyorsa A ye hemen hemen f -cebiri,
- her $a, b \in A$ ve her $c \in A^+$ için $a \wedge b = 0$ iken $(ac) \wedge b = (ca) \wedge b = 0$ şartını sağlıyorsa A ya f -cebiri denir.

Huijsmans ve Bernau f -cebirleri, hemen hemen f -cebirleri ve d -cebirlerinin ilişkilerini incelemişlerdir[4]. Her f -cebirinin hemen hemen f -cebiri ve d -cebiri, yarı asal veya birimli Arşimedyan hemen hemen f -cebirinin (d -cebirinin) f -cebiri olduğunu göstermişlerdir.

Huijsmans Riesz cebirlerinde Gelfand-Mazur teoremi üzerine çalışma yapmıştır ve Gelfand Mazur teoremini Riesz cebirlerinde aşağıdaki biçimde sormuştur.

“A reel Riesz cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olmak üzere eğer sıfırdan farklı her elemanın tersi varsa A, \mathbb{R} ye Riesz ve cebir izomorfik midir?”

Huijsmans Riesz cebirlerinde Gelfand-Mazur teoremini aşağıdaki biçimde vermiştir[21].

“A reel Arşimedyan Riesz cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olsun. Her pozitif elemanın tersi var ve tersi pozitif ise A, \mathbb{R} ye Riesz ve cebir izomorfiktir.”

Ayrıca yine f -cebirlerinde Gelfand-Mazur teoremini aşağıdaki gibi ispatlamıştır[21].

“A Arşimedyan f -cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olsun. Her pozitif elemanın tersi var ise A, \mathbb{R} ye Riesz ve cebir izomorfiktir.”

Scheffold f -cebirleri yerine type-1 cebir kavramını tanıtmış ve bu cebir yapısı için cevabın olumlu olduğunu ispatlamıştır[27]. Uyar Gelfand-Mazur teoreminin f -cebirleri üzerinde sağlandığını ters elemanın pozitif özelliğini kullanmayıp farklı bir yolla ispatlamıştır[25]. Ercan ve Önal herhangi bir Riesz cebirinde cevabın negatif olduğunu bir örnekle gösterdiler[19].

A Arşimedyan Riesz cebiri olsun. Her $a, b \in A, f \in A^\sim$ ve $F, G \in A^{\sim\sim}$ için

$$A \times A^\sim \rightarrow A^\sim$$

$$(a, f) \rightarrow f \cdot a : (f \cdot a)(b) = f(ab)$$

$$A^{\sim\sim} \times A^\sim \rightarrow A^\sim$$

$$(F, f) \rightarrow F \cdot f : (F \cdot f)(a) = F(f \cdot a)$$

$$A^{\sim\sim} \times A^{\sim\sim} \rightarrow A^{\sim\sim}$$

$$(F, G) \rightarrow F \cdot G : F \cdot G(f) = F(G \cdot f)$$

biçiminde üç adımda $A^{\sim\sim}$ üzerinde bir çarpma tanımlanabilir ve bu çarpmaya Arens çarpımı denir.

Huijsmans ve Pagter de Arşimedyan f -cebirlerinin sıra sürekli bidualinin f -cebiri olduğunu gösterdiler[5]. Huijsmans Arşimedyan f -cebirlerinin sıra bidualinin f -cebiri olduğunu gösterdi[20]. Bernau ve Huijsmans hemen hemen f -cebirlerinin sıra biduallerinin ve sıra sürekli biduallerinin de hemen hemen f -cebiri olduğunu gösterdiler[18]. Yine aynı makalelerde d -cebirlerinin sıra sürekli bidualinin de d -cebiri olduğu ve pozitif kare özelliğine sahip d -cebirinin sıra bidualinin de d -cebiri olduğunu ispatladılar.

A f -cebiri ve E Riesz uzayı olsun. Eğer $A \times E \rightarrow E, (a, x) \rightarrow a \cdot x$ dönüşümü var ve

i) E, A üzerinde sol modül

ii) Her $a \in A^+$ ve her $x \in E^+$ için $a \cdot x \in E^+$

iii) Her $x, y \in E$ ve her $a \in A$ için $x \perp y$ iken $a \cdot x \perp y$

şartlarından i) ve ii) sağlıyorsa E ye A üzerinde o-modül (order modül) denir. Eğer i), ii) ve iii) şartlarını sağlıyorsa E ye A üzerinde sol f -modül denir. Sağ f -modül tanımı da benzer şekilde yapılır. Sol veya sağ f -modülüne kısaca f -modül denir. Burada A birimli ($e > 0$) ve f -modül olmak üzere

iv) Her $x \in E$ için $ex = x$

şartını sağlıyorsa E ye A üzerinde birimli f -modül denir.

f -modül tanımını ilk olarak [26] W.A.J. Luxemburg vermiştir. E, A üzerinde f -modül ise

$$\rho : A \rightarrow Orth(E)$$

$$a \rightarrow \rho(a) = \pi_a : \pi_a(x) = ax$$

biçiminde tanımlı ρ dönüşümü Riesz ve cebir homomorfizmdir. Karşıtı

$$\rho : A \rightarrow Orth(E)$$

$$a \rightarrow \rho(a) = \pi_a : \pi_a(x) = ax$$

biçiminde tanımlanan Riesz ve cebir homomorfizm varsa $A \times E \rightarrow E$, $(a, x) \rightarrow a.x$ dönüşümü ile E, A üzerinde f -modüldür[7]. E, A üzerinde f -modül olsun.

Bu durumda

$$A \times E^{\sim} \rightarrow E^{\sim}$$

$$(a, f) \rightarrow f.a : (f.a)(b) = f(ab)$$

$$E \times E^{\sim} \rightarrow A^{\sim}$$

$$(x, f) \rightarrow \psi(x, f) : \psi(x, f)(a) = f(ax)$$

$$(A^{\sim})_n^{\sim} \times E^{\sim} \rightarrow E^{\sim}$$

$$(F, f) \rightarrow F \circ f : F \circ f(x) = F(\psi(x, f))$$

adımları ile birlikte $E^{\sim}, (A^{\sim})_n^{\sim}$ üzerinde f -modüldür.

Bu tezde ikinci bölümde çalışma boyunca kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde b -cebiri tanımını verilerek bazı temel özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca b -cebirlerinin yukarıda verdiğimiz hemen hemen f -cebiri, d -cebiri ve f -cebiri ile ilişkisi örneklerle açıklanmıştır. Pozitif kare özelliğine sahip b -cebirinin hemen hemen f -cebiri olduğu gösterilmiştir. Son olarak b -cebirlerinin sıra bidualeri ve sıra sürekli bidualeri incelenmiştir. b -cebirlerinin sıra sürekli bidualinin de Arens çarpımıyla b -cebiri olduğu, pozitif kare özelliğine sahip b -cebirinin sıra bidualinin de b -cebiri olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde E^{\sim} nin $(A^{\sim})_n^{\sim}$ üzerinde f -olmasından elde edilen $\eta : (A^{\sim})_n^{\sim} \rightarrow Orth(E^{\sim})$ Arens homomorfizminin bazı özellikleri incelenmiştir. Bu elde edilenlerin sonucu olarak f -modüllerinde sıra idealler ile altmodüller arasındaki ilişki verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Riesz Uzayları

2.1.1. Tanım

(E, \leq) sıralı bir küme olmak üzere, her $x, y \in E$ için $x \vee y (\sup\{x, y\}) \in E$ ve $x \wedge y (\inf\{x, y\}) \in E$ ise E kümesine örgü denir [1].

2.1.2. Tanım

(E, \leq) örgü olsun. E 'nin en küçük elemanı varsa buna sıfır (null) eleman denir ve θ ile gösterilir. E 'nin en büyük elemanı varsa buna birim (unit) eleman denir ve e veya I ile gösterilir [1].

2.1.3. Tanım

E reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı " \leq " olmak üzere, her $x, y, z \in E$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $x \leq y$ iken,

$$x + z \leq y + z \text{ ve } \alpha x \leq \alpha y$$

koşullarını sağlayan E uzayına sıralı vektör uzayı denir. E sıralı vektör uzayının $x \geq 0$ bağıntısını sağlayan elemanlarına pozitif eleman, $E^+ = \{x \in A : x \geq 0\}$ kümesine de E 'nin pozitif kısmı denir [1].

2.1.1. Teorem

E sıralı vektör uzayı ve $M \subseteq E$ alt vektör uzayı ise E den gelen sıralama ile M sıralı alt vektör uzayıdır [1].

2.1.4. Tanım

E sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in E$ için $x \vee y \in E$ veya $x \wedge y \in E$ oluyorsa E uzayına Riesz uzayı denir [1].

2.1.5. Tanım

E Riesz uzayı üzerinde bir norm verilsin. Her $x, y \in E$ için

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

şartını sağlıyorsa E ye normlu örgü denir. Bu norma göre tam ise E ye Banach örgüsü denir [4].

2.1.6. Tanım

E Riesz uzayı ve $M \subseteq E$ alt vektör uzayı olsun. Her $x, y \in M$ için $x \vee y \in M$ veya $x \wedge y \in M$ oluyorsa M ye E nin Riesz alt vektör uzayı denir [1].

Örnek

i) \mathbb{R}^n kümesi her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ için } x_i \leq y_i$$

sıralaması ile Riesz uzayıdır [1].

ii) (Ω, τ) topolojik uzay olmak üzere $C(\Omega) = \{f \mid f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$ kümesi

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

sıralaması ile birlikte Riesz uzayıdır [1].

iii) (X, Σ, μ) ölçü uzayı olmak üzere gerçel değerli, μ ölçülebilir ve $\int |f|^p d\mu < \infty$ özelliğine sahip $L_p(\mu)$ ($0 < p < \infty$) uzayı, her $f, g \in L_p(\mu)$ için

$$f \leq g \Leftrightarrow \text{hemen her } x \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

sıralaması ile Riesz uzayıdır.

- iv) $F = \{f : f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonu } \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } \exists m \in \mathbb{R} \ni f(x) = mx\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ailesi fonksiyonların toplama, skalerler çarpma ve noktasal sıralama ile sıralı vektör uzayıdır. Fakat Riesz uzayı değildir.
- v) $M = \{f : f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ türevlenebilen fonk.}\}$ ailesi sıralı vektör uzayıdır. Fakat Riesz uzayı değildir.

2.1.7. Tanım

Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı her alt kümesinin infimumu varsa bu uzaya Dedekind tam Riesz uzayı denir [1].

2.1.8. Tanım

Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı sayılabilir her alt kümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı sayılabilir her alt kümesinin infimumu varsa bu uzaya σ -Dedekind tam Riesz uzayı denir [1].

2.1.2. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olmak üzere,

- 1) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$
- 2) $x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$
- 3) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
- 4) $\lambda \geq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) için $\lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y$ ve $\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y$

önergeleri doğrudur [1].

2.1.9. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere,

- i) $x^+ = x \vee 0$ elemanına x 'in pozitif kısmı
- ii) $x^- = (-x) \vee 0$ elemanına x 'in negatif kısmı
- iii) $|x| = x \vee (-x)$ elemanına x 'in modülü (mutlak değeri) denir [1].

2.1.3. Teorem

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere,

- i) $x = x^+ - x^-$
- ii) $|x| = x^+ + x^-$
- iii) $x^+ \wedge x^- = 0$

önergeleri doğrudur, ayrıca $x = y - z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $y = x^+$ ve $z = x^-$ dir [1].

.

2.1.4 Teorem

E sıralı vektör uzayı olsun.

- i) E Riesz uzayıdır.
- ii) Her $x \in E$ için $x^+ \in E$
- iii) Her $x \in E$ için $x^- \in E$
- iv) Her $x \in E$ için $|x| \in E$

önergeleri denktir [1].

2.1.5. Teorem

E Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olmak üzere,

$$\text{i) } x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \text{ ve } x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$\text{ii) } |x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$$

$$\text{iii) } |x| \vee |y| = (|x + y| + |x - y|)$$

$$\text{iv) } |x| \wedge |y| = \left| \frac{|x + y| - |x - y|}{2} \right|$$

önermeleri doğrudur [1].

2.1.6. Teorem

E Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olmak üzere,

$$\text{i) } \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\text{ii) } |x \vee z - y \vee z| \leq |x - y| \text{ ve } |x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$$

$$\text{iii) } \text{Eğer } x, y, z \geq 0 \text{ ise } x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$$

eşitsizlikleri sağlar [1].

2.1.10. Tanım

E Riesz uzayı ve $M, N \subseteq E$ olmak üzere,

$$\text{i) } M^+ = \{x^+ : x \in M\}$$

$$\text{ii) } M^- = \{x^- : x \in M\}$$

$$\text{iii) } |M| = \{|x| : x \in M\}$$

$$\text{iv) } z \in E, z \vee M = \{z \vee x : x \in M\}$$

$$\text{v) } z \in E, z \wedge M = \{z \wedge x : x \in M\}$$

$$\text{vi) } M \vee N = \{x \vee y : x \in M, y \in N\}$$

$$\text{vii) } M \wedge N = \{x \wedge y : x \in M, y \in N\}$$

biçiminde tanımlanır [1].

2.1.7. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $\emptyset \neq M \subseteq E$ olsun. Eğer $\sup M$ var ise her $x \in E$ için $\sup(x \wedge M)$ var ve

$$\sup(x \wedge M) = x \wedge \sup M$$

dır. Eğer $\inf M$ var ise her $x \in E$ için $\inf(x \vee M)$ var ve $\inf(x \vee M) = x \vee \inf M$ dir [1].

2.1.11. Tanım

E Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine diktir denir ve bu durum $x \perp y$ biçiminde gösterilir [1].

$\emptyset \neq M \subseteq E$ olmak üzere, $M^d = \{x \in E : \text{Her } y \in M \text{ için } x \perp y\}$ kümesine M kümesinin dik tümleyeni denir. $M, N \subseteq E$ alındığında her $x \in M$ ve her $y \in N$ için $x \perp y$ oluyorsa M ile N kümeleri birbirine diktir denir ve $M \perp N$ biçiminde gösterilir [1].

2.1.12. Tanım

(x_λ) , E Riesz uzayında bir ağ olmak üzere her $x_\alpha, x_\beta \in (x_\lambda)$ için E deki sıralamaya göre $x_\alpha \leq x_\gamma$ ve $x_\beta \leq x_\gamma$ olacak şekilde bir $x_\gamma \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) ağı yukarı yönlendirilmiş denir ve $x_\lambda \uparrow$ şeklinde gösterilir. $x_\lambda \uparrow$ ve $\sup(x_\lambda) = x$ elemanı E içinde varsa $x_\lambda \uparrow x$ biçiminde gösterilir [1].

Benzer şekilde her $x_\alpha, x_\beta \in (x_\lambda)$ için E 'daki sıralamaya göre $x_\gamma \leq x_\alpha$ ve $x_\gamma \leq x_\beta$ olacak şekilde $x_\gamma \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) ağı aşağı yönlendirilmiştir denir ve $x_\lambda \downarrow$ şeklinde gösterilir. $x_\lambda \downarrow$ ve $\inf(x_\lambda) = y$ elemanı E içinde varsa $x_\lambda \downarrow y$ biçiminde gösterilir. (x_λ) ağı yerine herhangi bir $M \subseteq E$ alt kümesi alındığında, $M \uparrow$ ve $\sup M = x \in E$ içinde varsa $M \uparrow x$ biçiminde gösterilir. $M \downarrow$ ve $\inf M = y \in E$ içinde varsa $M \downarrow y$ biçiminde gösterilir [1].

2.1.13. Tanım

E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ ise E ye Arşimedyan (Archimedean) Riesz uzayı denir [1].

2.1.14. Tanım

E Riesz uzayı olsun. $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesine sıralı aralık, $M \subseteq E$ için $M \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ varsa M ye sıra sınırlı küme denir [1].

2.1.8. Teorem

E Riesz uzayı olsun ve $M \subseteq E$ olmak üzere, M nin sıra sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $M \subseteq [-x, x]$ olacak şekilde en az bir $x \in E^+$ elemanının var olmasıdır.

2.1.15. Tanım

E Riesz uzayı ve $I \subseteq E$ olsun. Her $y \in E$ ve $x \in I$ için $|y| \leq |x|$ iken $y \in I$ oluyorsa I ya solid küme, I alt uzay ve solid ise I ya E içinde (sıra) ideal denir [1].

$\emptyset \neq M \subseteq E$ olsun. M yi kapsayan en küçük ideale M nin ürettiği ideal denir ve M kümesinin ürettiği ideal I_M ile gösterilir ve

$$I_M = \left\{ x \in E : \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \ni |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|, n \in \mathbb{N} \right\}$$

dir. Burada $M = \{x\}$ alınırsa $I_x = \{y \in E : \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, |y| \leq \lambda|x|\}$ dir. Her bir sıra idealin bir Riesz alt uzayı olduğu aşikardır.

2.1.9. Teorem

E Riesz uzayı olsun. I ve J , E de ideal ise $I \cap J$ ve $I + J$ E de idealdir [1].

2.1.16. Tanım

E Riesz uzayı ve B, E de ideal olsun. Her $M \subseteq B$ için $\sup M = a \in E$ iken $a \in B$ oluyorsa B ye E içinde band denir [1].

$\emptyset \neq M \subseteq E$ olsun. M yi kapsayan en küçük band M nin ürettiği banddır ve M kümesinin ürettiği band B_M ile gösterilir ve

$$B_M = \{ x \in E : \exists (x_\alpha) \subseteq M^+, 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \}$$

dir [1]. Burada $M = \{x\}$ alınırsa $B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$ dir. Arşimedyan Riesz uzayında her $M \subseteq E$ için M^d banddır.

2.1.17. Tanım

E Riesz uzayı ve M, E nin Riesz alt uzayı olsun. Eğer her $0 < x \in E$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in M$ varsa M ye E içinde sıra yoğun (order dense) denir [1].

2.1.10. Teorem

E Riesz uzayı, $I \subseteq E$ ideal olmak üzere,

- 1) I nin E de sıra yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul $I^d = \{0\}$ olmasıdır
- 2) $I \oplus I^d$ ideali E içinde sıra yoğundur
- 3) I ideali I^{dd} içinde sıra yoğundur [1].

2.1.11. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, $\emptyset \neq M \subseteq E$ olsun. $B_M = M^{dd}$ dir ve M band ise $M = M^{dd}$ dir [1].

2.1.18. Tanım

E Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olmak üzere,

- 1) $I_e = E$ ise e ye güçlü birim (strong unit) denir
- 2) $B_e = E$ ise e ye zayıf birim (weak unit) denir [1].

2.1.19. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere,

- 1) $(x_n) \subseteq E$, $x \in E$ ve $u \in E^+$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ iken $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x elemanına u -düzgün (uniformly) yakınsar denir. (x_n) dizisi x elemanına en az bir $u \in E^+$ için u -düzgün yakınsıyorsa (x_n) dizisi x elemanına göreceli düzgün yakınsar denir ve $x_n \xrightarrow{r.u} x$ biçiminde gösterilir.
- 2) $(x_n) \subseteq E$ ve $u \in E^+$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $|x_n - x_m| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine u -düzgün (uniformly) Cauchy dizisi denir. (x_n) dizisi en az bir $u \in E^+$ için u -düzgün Cauchy dizisi ise (x_n) dizisi göreceli düzgün Cauchy dizisi denir.
- 3) E Riesz uzayı olmak üzere E içindeki her göreceli düzgün Cauchy dizisi göreceli düzgün yakınsak ise E düzgün tam Riesz uzayı denir.
- 4) $M \subseteq E$ olmak üzere her $(x_n) \subseteq M$ dizisi için $x_n \xrightarrow{r.u} x$ iken $x \in M$ oluyorsa M ye göreceli düzgün (uniformly) kapalı küme denir.
- 5) $(x_\alpha) \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq E^+$ ağı varsa (x_α) ağı x elemanına sıra(order) yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ gösterilir [1].

2.1.20. Tanım

E Riesz uzayı ve $I \subseteq E$ ideal olsun. E/I bölüm uzayı olmak üzere, her $\bar{x} \in E/I$ için

$$\bar{x} = x + I = \{ x + a : a \in I \}$$

biçiminde tanımlıdır [6].

2.1.12. Teorem

E Riesz uzayı ve $I \subseteq E$ ideal olsun. Her $\bar{x}, \bar{y} \in E/I$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$

$$\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}$$

işlemleri ile birlikte vektör uzayıdır. Ayrıca

$$\bar{x} \leq \bar{y} \Leftrightarrow \exists x_1 \in \bar{x}, y_1 \in \bar{y}; x_1 \leq y_1$$

sıralaması ile sıralı vektör uzayı,

$$\bar{x} \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge y}$$

$$\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \vee y}$$

örgü işlemleri ile Riesz uzayıdır [6].

2.1.13. Teorem

E Riesz uzayı ve $I \subseteq E$ ideal olsun. Her $\bar{x}, \bar{y} \in E/I$ için aşağıdakiler denktir.

- i) $\bar{x} \leq \bar{y}$
- ii) Her $x_1 \in \bar{x}$ için $x_1 \leq y_1$ olacak şekilde $y_1 \in \bar{y}$ vardır
- iii) Her $x_1 \in \bar{x}$ ve $y_1 \in \bar{y}$ için $q \leq y_1 - x_1$ olacak şekilde $q \in I$ vardır [6].

2.1.14. Teorem

E Riesz uzayı ve $I \subseteq E$ ideal olsun. E/I Arşimedyan Riesz uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul I nin göreceli düzgün kapalı olmasıdır [6].

2.2. Operatörler

2.2.1. Tanım

E ve F iki sıralı vektör uzayı $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Her $x \in E^+$ için $Tx \geq 0$ oluyorsa T operatörüne pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ biçiminde gösterilir [1].

2.2.2. Tanım

E, F Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. Eğer T pozitif operatörü her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ şartını sağlıyorsa T ye aralık koruyan operatör denir [1].

2.2.3. Tanım

E ve F Riesz uzayları olsun. $T: E \rightarrow F$ operatörü için $T \vee (-T)$ varsa bu supremuma T operatörünün modülü denir ve $|T|$ ile gösterilir [1].

2.2.1. Teorem

E ve F Riesz uzayları olsun. $T: E \rightarrow F$ operatör olmak üzere $|T|$ varsa her $x \in E^+$ için $|Tx| \leq |T|(x)$ eşitsizliği sağlanır [1].

2.2.4. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa T ye dikliği koruyan operatör denir [1].

2.2.5. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ operatör olsun. Eğer T operatörü E deki her sıra sınırlı kümeyi F deki sıra sınırlı kümeye dönüştürüyorsa T operatörüne sıra sınırlı operatör denir.

E den F ye tanımlanan bütün sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E, F)$ ile gösterilir. $T_1, T_2 \in L_b(E, F)$ için

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow \text{Her } x \in E^+ \text{ için } T_1(x) \leq T_2(x)$$

sıralama bağıntısıyla $L_b(E, F)$ bir sıralı vektör uzayıdır. F Dedekind tam Riesz uzayı ise her $S, T \in L_b(E, F)$ ve her $x \in E^+$ için

$$S \vee T(x) = \sup\{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } x = y + z\}$$

$$S \wedge T(x) = \inf \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } x = y + z\}$$

örgü işlemleri ile $L_b(E, F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır. $L_b(E, F)$ pozitif kısmı pozitif operatörlerden oluşmaktadır. Eğer $E = F$ ise kısaca $L_b(E)$ ile gösterilir [1].

2.2.6. Tanım

Her pozitif operatör sıra sınırlıdır [1].

2.2.7. Tanım

$T \in L_b(E, F)$ ve $\{x_\alpha\} \subseteq E$ olsun. E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T operatörüne sıra sürekli operatör denir [1].

T pozitif operatör olmak üzere T nin sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \downarrow 0$ (ya da $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $Tx_\alpha \uparrow Tx$) olmasıdır. Sıra sürekli operatörlerin kümesini $L_n(E, F)$ ile göstereceğiz. $L_n(E, F)$, $L_b(E, F)$ nin altuzayıdır. Eğer F Dedekind tam ise $L_n(E, F)$, $L_b(E, F)$ içinde banddır.

2.2.8. Tanım

E Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olsun.

$$N_T = \{x \in E : |T|(|x|) = 0\}$$

kümesine T nin sıfır ideali denir. $C_T = N_T^d$ kümesine de T nin taşıyıcısı denir[1].

Burada T sıra sürekli ise N_T, E içinde banddır.

2.2.2. Teorem (Nakano)

E Arşimedyan Riesz uzayı ve $f, g \in E_n^\sim$ olsun. Bu durumda

i) $f \perp g$

ii) $C_f \subseteq N_g$

$$\text{iii) } C_g \subseteq N_f$$

$$\text{iv) } C_f \perp C_g$$

önermeleri denktir [1].

2.2.3. Teorem

E Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olsun. Bu durumda her $x \in E_+$ için

$$\text{i) } |T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$$

$$\text{ii) } T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$$

$$\text{iii) } T^-(x) = \sup\{-Ty : 0 \leq y \leq x\}$$

dır [1].

2.2.4. Teorem

E Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. Her $T \in L_b(E, F)$ ve her $x \in E$ için

$$\text{i) } T(x^+) = \sup\{S(x) : 0 \leq S \leq T\}$$

$$\text{ii) } T(x^-) = \sup\{-S(x) : 0 \leq S \leq T\}$$

$$\text{iii) } T(|x|) = \sup\{S(x) : -T \leq S \leq T\}$$

dir [1].

2.2.9. Tanım

E Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow E$ operatör olmak üzere E nin her bir B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa, T ye band koruyan operatör denir [1].

2.2.5. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow E$ operatör olsun. B_x, x in ürettiği band olmak üzere

- 1) T band koruyandır
 - 2) $x \perp y$ iken $Tx \perp y$
 - 3) $x \in E$ iken $Tx \in B_x$
- önergeleri denktir [1].

2.2.10. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere $T: E \rightarrow E$ sıra sınırlı ve band koruyan operatör ise T ye orthomorfizma denir [1].

$T: E \rightarrow E$ sıra sınırlı operatör ise T nin orthomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ olmasıdır. E üzerindeki orthomorfizmaların kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir. $Orth(E), L_b(E)$ nin altvektör uzayıdır. $L_b(E)$ den indirgenen noktasal sıralama ile $Orth(E)$ sıralı vektör uzayıdır. $Orth(E), L_b(E)$ içinde idealdir. E Dedekind tam Riesz uzayı ise $Orth(E) \cap L_b(E)$ nin birimi tarafından üretilen banddır.

2.2.6. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı ise $Orth(E)$ Arşimedyan Riesz uzayıdır. Her $S, T \in Orth(E)$ ve her $x \in E^+$ için,

$$(S \vee T)(x) = S(x) \vee T(x) \text{ ve } (S \wedge T)(x) = S(x) \wedge T(x)$$

sağlanır [1].

2.2.7. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzayı ve $x \in E^+$ olsun. Her $y \in E$ için $|y| \leq x$ iken $T(x) = y$ ve $0 \leq T \leq I$ olacak şekilde $T \in Orth(E)$ vardır [1].

2.2.8. Teorem

E Riesz uzayı ve T orthomorfizma olsun. Bu durumda T sıra süreklidir [1].

2.2.9. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzayı ve $T \in Orth(E)$ olsun. Her $u \in E$ için $(T^+)(u) = (Tu)^+$ ve $(T^-)(u) = (Tu)^-$ sağlanır [1].

2.2.11. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere

$$Z(E) = \{T \in L_b(E) \mid |T| \leq \lambda I \text{ olacak şekilde } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ vardır.}\}$$

kümesine E nin merkezi denir [1].

E Dedekind tam ise $Z(E)$ $L_b(E)$ içinde biriminin ürettiği idealdir. Ayrıca E Dedekind tam Riesz uzayı iken $Z(E)$ ve $Orth(E)$ Dedekind tam Riesz uzaylarıdır.

2.3.10. Teorem

E Banach örgüsü olsun. Bu durumda $Z(E) = Orth(E)$ dir [1].

2.2.12. Tanım

E Riesz uzayında bir B bandı için $E = B \oplus B^d$ ise B 'ye projeksiyon band denir. Bir Riesz uzayında her band, projeksiyon band ise bu uzaya projeksiyon özelliğine sahiptir denir [1].

Dedekind tam Riesz uzayları projeksiyon özelliğine sahiptir.

2.2.11. Teorem

E Riesz uzayı ve B bir ideal olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

i) B projeksiyon banddır. Yani $E = B \oplus B^d$ dir

ii) Her $x \in E^+$ için $B^+ \cap [0, x]$ supremumu E içinde var ve bu supremum B ye aittir [2].

2.2.13. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere, x in ürettiği band olan B_x projeksiyon band ise x e projeksiyon eleman, B_x bandına da esas band denir. Bir Riesz uzayında her eleman projeksiyon eleman ise bu uzaya esas projeksiyon özelliğine sahiptir denir [1].

2.2.14. Tanım

E Riesz uzayı olsun. $P: E \rightarrow E$ operatör olmak üzere $P^2 = P$ ise P ye projeksiyon denir. P, E Riesz uzayı üzerinde projeksiyon ve pozitif operatör ise, P ye pozitif projeksiyon denir. $B \subseteq E$ projeksiyon band olsun. Bu durumda her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ için

$$P_B: E \rightarrow E \\ x \rightarrow x_1$$

biçiminde tanımlanan P_B operatörüne band projeksiyon denir. P_B pozitif projeksiyondur. Benzer şekilde

$$P_{B^d}: E \rightarrow E \\ x \rightarrow x_2$$

biçiminde tanımlı P_{B^d} band projeksiyonu da pozitiftir. Band projeksiyonların kümesi $P(E)$ ile gösterilir [1].

Band projeksiyonlar, orthomorfizmler ve merkez operatörler arasında $P(E) \subseteq Z(E) \subseteq Orth(E) \subseteq L_b(E)$ ilişkisi vardır.

2.2.12. Teorem

E Riesz uzayındaki her projeksiyon banda karşılık bir band projeksiyon vardır [1].

2.2.13. Teorem

E Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

- i) T band projeksiyondur
- ii) $I: E \rightarrow E$ birim operatör olmak üzere T projeksiyon ve $0 \leq T \leq I$
- iii) Her $x, y \in E$ için $Tx \perp (y - Ty)$ [1].

2.2.15. Tanım

E Riesz uzayı olsun. Her $x \in E$ için $x \neq 0$ iken $f(x) \neq 0$ olacak biçimde $f \in E^\sim$ var ise E^\sim , E nin noktalarını ayırıyor denir [1].

2.2.16. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, her $x, y \in E$ için

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$$

oluyorsa, T ye Riesz homomorfizması denir [1].

2.2.14. Teorem

Her Riesz homomorfizması pozitif operatördür [1].

2.2.15. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ Riesz homomorfizması olsun. $T(E) \subseteq F$ Riesz alt uzayıdır.

2.2.16. Teorem

E ve F iki Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine

denktir.

- 1) T operatörü Riesz homomorfizmasıdır
- 2) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$
- 3) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$
- 4) Her $x, y \in E$ için E uzayı içinde $x \wedge y = 0$ ise F uzayı içinde $T(x) \wedge T(y) = 0$
- 5) Her $x \in E$ için $T|x| = |Tx|$ [1].

2.2.17. Teorem

Her band projeksiyon Riesz homomorfizmasıdır [1].

2.2.17. Tanım

E ve F Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ Riesz homomorfizması olsun. T birebir ve örten ise T ye Riesz izomorfizma denir. E den F ye Riesz izomorfizma varsa, E ve F Riesz izomorfiktir denir [1].

2.2.18. Teorem

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ birebir ve örten operatör olmak üzere T nin Riesz izomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır [1].

2.2.18. Tanım

E, F Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ ye sıra sınırlı operatör olsun. Her $f \in F^\sim$ ve $x \in E$ için

$$T^\sim: F^\sim \rightarrow E^\sim$$

$$f \rightarrow T^\sim(f), T^\sim(f)(x) = f(Tx)$$

dönüşümüne T nin adjointi denir [1].

2.2.19. Teorem

E ve F Riesz uzayları olsun. $T: E \rightarrow F$ aralık koruyan operatör ise $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$ Riesz homomorfizmadır [1].

2.2.20. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve F^\sim , F nin noktalarını ayırsın. $T : E \rightarrow F$ Riesz homomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$ aralık koruyan operatör olmasıdır [1].

2.2.21. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ Riesz homomorfizma olmak üzere,

- i) $\text{Ker}(T)$, E içinde idealdir
- ii) T sıra sürekli ise $\text{Ker}(T)$, E içinde banddır

önergeleri doğrudur[1].

2.2.19. Tanım

E Riesz uzayı ve $E^{\sim\sim}$, E nin iki sıra duali olsun. Her $x \in E$ ve $f \in E^\sim$ için

$$\sigma : E \rightarrow E^{\sim\sim}$$

$$x \rightarrow \sigma(x) = x'', \quad x''(f) = f(x)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme kanonik gömme dönüşümü denir. $\sigma(E) \subseteq (E^\sim)_n^\sim$ ve eğer E^\sim , E nin noktalarını ayırıyorsa kanonik gömme dönüşümü birebir Riesz homomorfizmadır [1].

2.2.20. Tanım

G reel vektör uzayı ve F Riesz uzayı olmak üzere $p : G \rightarrow F$ bir fonksiyon olsun.

- i) $\forall x, y \in G$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
 ii) $\forall x, y \in G$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ için $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

şartlarını sağlıyorsa p ye alt lineer dönüşüm denir [1].

2.2.22. Teorem

G reel vektör uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $p : G \rightarrow F$ alt lineer dönüşüm olsun.
 $H \subseteq G$ alt vektör uzayı $\phi : H \rightarrow F$ bir operatör ve her $x \in H$ için $\phi(x) \leq p(x)$ ise

- i) $\forall x \in H$ için $\Psi(x) = \phi(x)$
 ii) $\forall x \in G$ için $\Psi(x) \leq p(x)$

şartlarını sağlayan $\Psi : G \rightarrow F$ operatörü vardır [1].

2.2.21. Tanım

E vektör uzayı ve $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i) $\forall u \in E$ için $\rho(u) \geq 0$
 ii) $\forall u, v \in E$ için $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$
 iii) $\forall u \in E$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\rho(\lambda u) = |\lambda| \rho(u)$

şartlarını sağlıyorsa ρ ye yarı norm denir [6].

2.2.22. Tanım

E Riesz uzayı olsun. E üzerinde her $u \in E$ için $\rho_f(u) = |f(u)|$ biçiminde tanımlanan $\{\rho_f : f \in E^\sim\}$ yarı norm ailesinin ürettiği topolojiye lokal konveks $\sigma(E, E^\sim)$ zayıf topolojisi denir [8].

Benzer şekilde E^\sim üzerinde $\sigma(E^\sim, E)$ zayıf topolojisi her $f \in E^\sim$ için $\rho_u(f) = |f(u)|$ biçiminde tanımlanan $\{\rho_u : u \in E\}$ yarı norm ailesinin ürettiği topolojiye lokal konveks $\sigma(E^\sim, E)$ zayıf topolojisi denir [8].

2.2.23. Tanım

E topolojik vektör uzayı olsun. E , konveks kümeleri içeren sıfırın komşuluklar tabanına sahip ise E ye lokal konveks topolojik uzay denir [8].

2.2.24. Tanım

E topolojik vektör uzayı olsun. E , solid kümeleri içeren sıfırın komşuluklar tabanına sahip ise E ye lokal solid topolojik uzay denir [8].

Eğer E hem lokal konveks topolojik uzay hemde lokal solid topolojik uzay ise E ye lokal konveks-solid topolojik uzay denir.

2.2.25. Tanım

E Riesz uzayı olsun. Her $u \in E$ için $\rho_f(u) = |f|(|u|)$ biçiminde tanımlanan $\{\rho_f : f \in E^\sim\}$ yarı norm ailesinin ürettiği topolojiye lokal konveks-solid $|\sigma|(E, E^\sim)$ mutlak zayıf topolojisi denir [8].

2.2.23. Teorem

(E, τ) Hausdorff lokal konveks uzay ve $V \subseteq E$ olmak üzere, .

- i) V τ sınırlı olması için gerek ve yeterli koşul V $\sigma(E, E^\sim)$ sınırlı olmasıdır.
- ii) Eğer V konveks ise V τ kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul V $\sigma(E, E^\sim)$ kapalıdır.

önergeleri doğrudur[8].

2.2.24. Teorem

(E, τ) lokal konveks-solid Riesz uzayı olsun. Bu durumda $\sigma(E, E^\sim) \subseteq |\sigma|(E, E^\sim) \subseteq \tau$ sağlanır [8]

2.2.26. Tanım

E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq V \subseteq E$, $\emptyset \neq V \subseteq E^\sim$ olsun.

$$V^o = \{ f \in E^\sim : \forall x \in V \text{ için } f(x) = 0 \}$$

kümesine V nin poları,

$${}^oU = \{ x \in E : \forall f \in U \text{ için } f(x) = 0 \}$$

kümesine U nin ters poları denir [9].

2.2.25. Teorem

E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq I \subseteq E$ olsun. I ideal ise I^o, E^\sim içinde banddır [9].

2.2.26. Teorem

E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq V \subseteq E$ olsun.

$V, \sigma(E, E^\sim)$ kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul ${}^o(V^o) = V$ olmasıdır [9].

2.2.27. Teorem

E Riesz uzayı ve E^\sim, E nin noktalarını ayırsın.

i) $E^\sim = E_n^\sim$

ii) E deki $\sigma(E, E^\sim)$ kapalı her kapalı ideal banddır.

önergeleri birbirine denktir[9].

2.2.27. Tanım

E, F Riesz uzayı, $T: E \times E \rightarrow F$ bi-lineer dönüşüm olsun. Her $x, y \in E^+$ için $x \rightarrow T(x, y)$ ve $y \rightarrow T(x, y)$ lineer dönüşüm ise T ye bi-lineer dönüşüm denir ve bi-lineer dönüşümlerin ailesi $L_{bv}(E, F; G)$ ile gösterilir [11].

2.2.28. Tanım

E, F ve G Riesz uzayı, $T: E \times F \rightarrow G$ bi-lineer dönüşüm olsun. Her $x \in E^+, y \in F^+$ için $x \rightarrow T(x, y)$ ve $y \rightarrow T(x, y)$ Riesz homomorfizma ise T ye bilattice homomorfizma denir [11].

2.2.28. Teorem

E ve F Arşimedyan Riesz uzayı olsun.

" H Arşimedyan Riesz uzayı ve $\Psi: E \times F \rightarrow H$ bilattice homomorfizma ise $T\varphi = \Psi$ olacak biçimde $T: G \rightarrow H$ Riesz homomorfizması vardır ve tektir."

önermesini doğru yapan bir tek G Arşimedyan Riesz uzayı ve $\varphi: E \times F \rightarrow G$ bilattice homomorfizması vardır [10].

Yukardaki teoremde G Riesz uzayına E ile F nin tensör çarpımı denir ve $E \otimes \overline{F}$ ile gösterilir.

2.2.29. Teorem

E, F Riesz uzayı ve G Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda $L_{bv}(E, F; G)$, $L_b(E \otimes \overline{F}, G)$ ve $L_b(E, L_b(F, G))$ Riesz uzayları izomorfiktir [12].

2.2.30. Teorem

E, F ve G Riesz uzayı, H Dedekind tam Riesz uzayı ve $p: E \times F \rightarrow G$ bi-lineer dönüşüm olsun.

i) p aralık koruyan dönüşüm ve H^{\sim}, H nin noktalarını ayırıyor ise $L_b(G, H)$ den $L_{bv}(E, F; H)$ ye $S \rightarrow S \circ p$ dönüşümü Riesz homomorfizmadır.

ii) p Riesz bimorphism ise $L_b(G, H)$ den $L_{bv}(E, F; H)$ ye $S \rightarrow S \circ p$ dönüşümü aralık koruyandır.

önergeleri doğrudur[11].

2.3. Cebirler

2.3.1. Tanım

A Riesz uzayı ve cebir olsun. Eğer her $x, y \in A^+$ için $xy \in A^+$ oluyorsa A ya Riesz cebiri denir[4].

2.3.2. Tanım

A Riesz cebiri olmak üzere, her $a, b \in A$ ve $0 \leq c \in A$ için

$$c(a \vee b) = ca \vee cb \text{ ve } (a \vee b)c = ac \vee bc$$

şartları sağlanıyorsa A ya d –cebiri denir[4].

2.3.3. Tanım

A Riesz cebiri olmak üzere her $a, b \in A$ için $a \wedge b = 0$ iken $ab = 0$ şartını sağlıyorsa A ya hemen hemen f –cebiri denir[4].

2.3.4. Tanım

A Riesz cebiri olmak üzere her $a, b \in A$ ve her $c \in A^+$ için $a \wedge b = 0$ iken $(ac) \wedge b = (ca) \wedge b = 0$ şartını sağlıyorsa A ya f –cebiri denir[4].

2.3.5 Tanım

A Riesz cebiri olsun. Her $a \in E$ için $a^2 \geq 0$ oluyorsa A ye pozitif kare özelliğine sahip denir[4]. Her f –cebiri ve hemen hemen f –cebiri pozitif kare özelliğine sahiptir.

2.3.1. Teorem

Her f -cebiri hem hemen hemen f -cebiri hem de d -cebiridir [4].

2.3.2. Teorem

Her Arşimedyan f -cebiri ve hemen hemen f -cebiri değişmelidir [23].

2.3.6.Tanım

A f -cebiri ve $u \in E$ olsun. Eğer en az bir k doğal sayısı için $u^k = 0$ iken $u \neq 0$ oluyorsa A ye yarı-asal f -cebiri denir [4].

A f -cebirinin yarı asal olması için gerekli ve yeterli koşul $u^2 = 0$ iken $u = 0$ olmasıdır. Her Arşmedyan birimli f -cebiri yarı asaldır.

2.3.3. Teorem

E Riesz uzayı olsun. Her $T, S \in Orth(E)$ ve her $x \in E$ için $T \circ S(x) = T(S(x))$ çarpma işlemiyle birlikte birimli f -cebirdir [1].

2.3.4. Teorem

A birim elemanı e olan f -cebiri olsun.

- i) $e \geq 0$
- ii) Her $a \in A_+$ için a^{-1} varsa $a^{-1} \geq 0$
- iii) Her $a \in A_+$ için a^{-1} varsa $a \wedge a^{-1} \leq e$
- iv) Her $a, b \in A_+$ için a^{-1} ve b^{-1} varsa

$$(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$$

$$(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1} \text{ önermeleri doğrudur [23].}$$

2.3.5. Teorem

A f -cebiri olsun. Her $a, b \in A$ için $ab = (a \wedge b)(a \vee b)$ dir [23].

2.3.6. Teorem

A birimli Arşimedyan f -cebiri olmak üzere $A^{\sim\sim} = (A^{\sim})^{\sim}$ sağlanır [5].

2.3.7. Teorem

A birim elemanı e olan Arşimedyan f -cebiri olsun. Her $u \in A^+$ için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

- i) $0 \leq u - u \wedge ne \leq n^{-1}u^2$
- ii) $0 \leq u \wedge me - u \wedge ne \leq n^{-1}(u \wedge me)(u \wedge ne)$ [23].

2.3.8. Teorem

A birim elemanı e olan Arşimedyan f -cebiri olsun.

- i) A f -cebiridir
- ii) e zayıf sıra birimdir

önergeleri denktir [23].

2.3.9. Teorem

A birim elemanı $e > 0$ olan Arşimedyan düzgün tam Riesz cebiri olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

- i) B_e projeksiyon banddır. Yani $A = B_e \oplus B_e^d$ dir
- ii) Her $a \in B_e$ için sağ çarpım ve sol çarpım operatörleri sırasıyla R_a ve L_a olmak üzere $R_a, L_a \in Orth(A)$ dir [2].

Çalışma boyunca bütün Riesz uzayları Arşimedyan Riesz uzayı ve E^{\sim}, E nin noktalarını ayırdığı kabul edilecektir.





3. b –CEBİRLERİ

Bu bölümde b –cebiri kavramını tanımlayacak ve onun cebirsel özellikleri ile sıralama özelliklerini iki kısımda inceleyeceğiz.

3.1. b –Cebirleri Üzerinde Frobenius-Gelfand-Mazur Teoremi

Bu kısımda b –cebiri tanımını verip Giriş bölümünde verdiğimiz f –cebiri, hemen hemen f –cebiri ve d –cebiri ile karşılaştırmalarını yapacağız. Ayrıca Gelfand-Mazur teoreminin b –cebiri üzerindeki versiyonunu verip ispatlayacağız.

İlk olarak f –cebiri, hemen hemen f –cebiri ve d –cebiri üzerindeki karşılaştırmalı örneklerini verip, hangi durumlarda denk olduklarını verelim.

Örnek

$A = \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in A$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ ve } x_2 \leq y_2 \text{ ve } xy = (0, x_1y_1)$$

işlemleri ile birlikte A Arşimedyan hemen hemen f –cebiri ve d –cebidir. Fakat $x = (1,0)$, $y = (0,1)$ ve $z = (1,0)$ seçersek $x \wedge y = 0$ olmasına rağmen $zx \wedge y \neq 0$ olduğundan A f –cebiri değildir.

Örnek

$A = \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in A$ için $xy = (x_1y_1, x_1y_2)$ işlemiyle birlikte A bir d –cebidir. Fakat $x = (1,0)$, $y = (0,1)$ alırsak $x \wedge y = 0$ olmasına rağmen $xy \neq 0$ olduğundan A hemen hemen f –cebiri değildir.

Örnek

$A = \mathbb{R}^3$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in A$,

$$xy = (x_2y_2 + x_3y_3, x_2y_2, x_3y_3)$$

işlemleri birlikte A hemen hemen f -cebiri. Fakat $x = (1,1,0), y = (0,0,1)$ ve $z = (1,1,1)$ alırsak $x \wedge y = 0$ dır. $zx \wedge zy \neq 0$ olduğundan A d -cebiri değildir.

Yukardaki örneklerden de anlaşılacağı gibi hemen hemen f -cebiri ile d -cebiri arasında doğrudan bir ilişki yoktur. Her f -cebiri hemen hemen f -cebiri ve d -cebiri. Fakat karşınının doğru olmadığı yine örneklerde görülmektedir. Şimdi hangi durumlarda karşıtı var onunla ilgili teoremleri verelim.

A Riesz cebiri olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur[4].

- i) Her yarı asal hemen hemen f -cebiri veya d -cebiri, f -cebiri.
- ii) $e > 0$ birim eleman olmak üzere birimli hemen hemen f -cebiri veya d -cebiri f -cebiri.

Yukardaki teoremden anlaşılacağı gibi birimli ya da yarı asal Arşimedyan Riesz cebirinde hemen hemen f -cebiri, d -cebiri ve f -cebiri birbirlerini gerektirmektedirler.

3.1.1. Tanım

A Riesz cebiri olsun. A daki her band A nın altcebiri oluyorsa A ya b -cebiri denir.

3.1.1. Teorem

A Arşimedyan Riesz cebiri olsun. A b -cebiri olması için gerekli ve yeterli koşul her $a, b, c \in A$ için $a \wedge b = 0$ ve $a \wedge c = 0$ iken $a \wedge bc = 0$ dır.

İspat

A b -cebiri ve her $a, b, c \in A$ için $a \wedge b = a \wedge c = 0$ olsun. $a \wedge b = a \wedge c = 0$ olduğundan $b \in B_a^d$ ve $c \in B_a^d$ dir. A b -cebiri olduğundan $bc \in B_a^d$ dir. O halde $a \wedge bc = 0$ bulunur.

Karşıt olarak, her $a, b, c \in A$ için $a \wedge b = a \wedge c = 0$ iken $a \wedge bc = 0$ ve B , A da herhangi bir band olsun. Her $a, b \in B$ olmak üzere her $c \in B^d$ için $|a| \wedge |c| = |b| \wedge |c| = 0$ olduğundan hipotezden dolayı $|c| \wedge |a| |b| = 0$ dır. O halde $|a| |b| \in B^{dd}$ bulunur. B band olduğundan $B = B^{dd}$ olacağından $|a| |b| \in B$ bulunur. Ayrıca

$$0 \leq |ab| \leq |a| |b|$$

olup ve B band dolayısıyla ideal olduğundan $ab \in B$ dir. Yani B altcebirdir. Dolayısıyla A b –cebiridir.

Örnek

$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}$ olmak üzere matrislerdeki sıralama, bilinen çarpma işlemleri ile birimli b –cebiridir, fakat hemen hemen f –ceberi ve d –ceberi değildir. Gerçekten her $M_1, M_2, M_3 \in A$ için $M_1 \wedge M_2 = 0$ ve $M_1 \wedge M_3 = 0$ olsun.

$$M_1 \in A \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \text{ olacak şekilde } a_1, b_1, c_1 \in R \text{ vardır.}$$

$$M_2 \in A \Rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \text{ olacak şekilde } a_2, b_2, c_2 \in R \text{ vardır.}$$

$$M_3 \in A \Rightarrow M_3 = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \text{ olacak şekilde } a_3, b_3, c_3 \in R \text{ vardır.}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} M_1 \wedge M_2 = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \wedge a_2 & b_1 \wedge b_2 \\ 0 & c_1 \wedge c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow a_1 \wedge a_2 = 0, b_1 \wedge b_2 = 0 \text{ ve } c_1 \wedge c_2 = 0 \\ &\Rightarrow (a_1 = 0 \vee a_2 = 0), \quad (b_1 = 0 \vee b_2 = 0) \text{ ve } (c_1 = 0 \vee c_2 = 0) \\ &(3.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 \wedge M_3 = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \wedge a_3 & b_1 \wedge b_3 \\ 0 & c_1 \wedge c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow a_1 \wedge a_3 = 0, b_1 \wedge b_3 = 0 \text{ ve } c_1 \wedge c_3 = 0 \\ &\Rightarrow (a_1 = 0 \vee a_3 = 0), (b_1 = 0 \vee b_3 = 0) \text{ ve } (c_1 = 0 \vee c_3 = 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} M_1 \wedge M_2 M_3 &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a_2 a_3 & a_2 b_3 + b_2 c_3 \\ 0 & c_2 c_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \wedge a_2 a_3 & b_1 \wedge (a_2 b_3 + b_2 c_3) \\ 0 & c_1 \wedge c_2 c_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinde ki tüm durumlar incelendiğinde $a_1 \wedge a_2 a_3 = 0$, $c_1 \wedge c_2 c_3 = 0$ ve $b_1 \wedge (a_2 b_3 + b_2 c_3) = 0$ olduğu kolayca görülür. Yani $M_1 \wedge M_2 M_3 = 0$ dır. A kümesi matrislerin sıralaması ve bilinen çarpma işlemiyle birimli b –cebiri.

Fakat $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $M_1, M_2 \in A$ için $M_1 \wedge M_2 = 0$ olmasına rağmen

$$M_1 M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan A hemen hemen f –cebiri değildir. Ayrıca $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$ ve $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $M_1, M_2 \in A$, $M_3 \in A^+$ için

$$M_3(M_1 \vee M_2) = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } (M_3 M_1 \vee M_3 M_2) = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $M_3(M_1 \vee M_2) \neq (M_3 M_1 \vee M_3 M_2)$ bulunur. Yani A d –cebiri değildir.

3.1.2. Teorem

A Arşimedyan b –cebiri olsun. A pozitif kare özelliğine sahip ise A hemen hemen f –cebiri.

İspat

A pozitif kare özelliğine sahip Arşimedyan b –cebiri olsun. Her $a, b \in A$ için $a \wedge b = 0$ olsun. A pozitif kare özelliğine sahip olduğundan her $n=1,2,3,\dots$ için

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{a}{n}b &\leq \frac{a}{n}b + b\frac{a}{n} \\
&= \frac{a^2}{n^2} + b^2 - \left(\frac{a}{n} - b\right)^2 \\
&\leq \frac{a^2}{n^2} + b^2
\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$0 \leq ab \leq \frac{a^2}{n} + nb^2$$

dır. Benzer şekilde

$$0 \leq ab \leq na^2 + \frac{b^2}{n}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
0 \leq ab &= ab \wedge (a^2 + b^2) \\
&\leq (ab \wedge a^2) + (ab \wedge b^2) \\
&\leq \left[\left(\frac{a^2}{n} + nb^2 \right) \wedge a^2 \right] + \left[\left(na^2 + \frac{b^2}{n} \right) \wedge b^2 \right] \\
&\leq \left(\frac{a^2}{n} \wedge a^2 \right) + (nb^2 \wedge a^2) + (na^2 \wedge b^2) + \left(\frac{b^2}{n} \wedge b^2 \right)
\end{aligned}$$

dır. A b -cebiri olduğundan $a^2 \wedge b^2 = 0$ dır. O halde $nb^2 \wedge a^2 = 0$ ve $na^2 \wedge b^2 = 0$ olacağından

$$\begin{aligned}
0 \leq ab &\leq \left(\frac{a^2}{n} \wedge a^2 \right) + \left(\frac{b^2}{n} \wedge b^2 \right) \\
&= \frac{a^2}{n} + \frac{b^2}{n}
\end{aligned}$$

bulunur. A Arşimedyan olduğundan $ab = 0$ dır.

Her f -cebiri, b -cebiridir. Fakat karşıtı doğru değildir. Ayrıca hemen hemen f -cebiri ve d -cebiri de b -cebiri olmak zorunda değildir.

Örnek

$C[0,1] = \{f \mid f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$ olmak üzere $A = C[0,1]$ olsun. A üzerinde çarpma işlemi her $f, g \in A$ ve $x \in [0,1]$ için

$$(f * g)(x) = f(0)g(0)$$

olarak tanımlansın. $*$ işlemi ile birlikte A Arşimedyan değişmeli d -cebiri ve dolayısıyla hemen hemen f -cebiridir [2]. Fakat b -cebiri değildir.

$$f = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} -2x + 1, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar $[0,1]$ de sürekli olduğundan $f, g \in A$ dır. Her $x \in [0,1]$ için $f \wedge g = 0$ dır. Fakat $x = 1 \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} (f \wedge g * g)(1) &= f(1) \wedge (g * g)(1) \\ &= f(1) \wedge g(0)g(0) \\ &= 1 \wedge 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan A b -cebiri değildir.

3.1.3. Teorem

A Arşimedyan Riesz cebiri olsun. Eğer A b -cebiri ise her $a \in A^+$ için $(a^2 \wedge na)$ dizisi a^2 'ye

göreceli düzgün yakınsar. Eğer A pozitif kare özelliğine sahip ve $A \sim A$ 'nın noktalarını ayırıyorsa karşıtı da doğrudur.

İspat

A b -cebiri olsun. Her $a \in A^+$ ve $n=1,2,3,\dots$ için

$$\begin{aligned} (a^2 - a^2 \wedge na) \wedge (na - a^2 \wedge na) = 0 &\Rightarrow (a^2 - a^2 \wedge na) \wedge \left(a - \frac{a^2}{n} \wedge a \right) = 0 \\ &\Rightarrow (a^2 - a^2 \wedge na) \wedge \left(a - \frac{a^2}{n} \wedge a \right)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (a^2 - a^2 \wedge na) \wedge \left[a^2 - a \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right) - \right. \\ &\left. \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right) a + \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a^2 = (a^2 \wedge na) \vee \left[a \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right) + \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right) a - \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right)^2 \right]$$

dır.

$$0 \leq a^2 - a^2 \wedge na$$

$$\begin{aligned} &\leq a \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right) + \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right) a - \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right)^2 \\ &\leq a \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right) + \left(\frac{a^2}{n} \wedge a \right) a \\ &\leq a \left(\frac{a^2}{n} \right) + \left(\frac{a^2}{n} \right) a \\ &= \frac{2}{n} a^3 \end{aligned}$$

bulunur. O halde her $a \in A^+$ için $(a^2 \wedge na) \rightarrow a^2$ göreceli düzgün yakınsaktır.

Karşıtı olarak; her $a \in A^+$ için $(a^2 \wedge na) \rightarrow a^2$ göreceli düzgün yakınsak, A pozitif kare

özelliğine sahip Riesz cebiri ve A^\sim A 'nın noktalarını ayırsın. Her $a, b, c \in A$ için $a \wedge b = 0$ ve $a \wedge c = 0$ olsun. $\sigma: A \rightarrow (A^\sim)_n^\sim$, $a \rightarrow \sigma(a) = a''$ kanonik gömme dönüşümü Riesz homomorfizma olduğundan $a'' \wedge b'' = 0$ ve $a'' \wedge c'' = 0$ dır. $\Phi \in (A^\sim)_n^\sim$ olmak üzere

$$N_\Phi = \{ f \in A^\sim : |\Phi||f| = 0 \}$$

sıfır ideali band olduğundan $A^\sim = N_\Phi \oplus C_\Phi$ ve $C_\Phi = N_\Phi^d$ dir[7]. Nakano Teoreminden $C_{a''} \subseteq N_{b''}$ ve $C_{a''} \subseteq N_{c''}$ sağlanır. Bu yüzden her $f \in A^\sim$ için

$$f = g + h, g \wedge h = 0 \text{ ve } a''(g) = g(a) = b''(h) = h(b) = c''(h) = h(c) = 0$$

olacak şekilde $g, h \in A^\sim$ vardır. Buradan her $n=1,2,3,\dots$ için $0 \leq b^2 \wedge nb \leq nb$ olup h pozitif fonksiyonel ve $h(b) = 0$ olduğundan $h(b^2 \wedge nb) = 0$ dır. Benzer şekilde $h(c^2 \wedge nc) = 0$ dır. Hipotezden ve $h \geq 0$ göreceli düzgün sürekli olduğundan $h(b^2) = 0$ ve $h(c^2) = 0$ dır.

A pozitif kare özelliğine sahip olduğundan $bc \leq b^2 + c^2$ olduğu kolayca görülür.

$$\begin{aligned} 0 \leq f(a \wedge bc) &= (g + h)(a \wedge bc) \\ &= g(a \wedge bc) + h(a \wedge bc) \\ &\leq g(a) + h(bc) \\ &\leq g(a) + h(b^2) + h(c^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. A^\sim A 'nın noktalarını ayırdığından $a \wedge bc = 0$ dır.

3.1.4 Teorem

A Arşimedyan b -ceberi ve $I \subseteq A$ ideal olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

- i) A/I b -cebidir.
- ii) Her $a, b, c \in A$ için $a \wedge b \in I$ ve $a \wedge c \in I$ ise $a \wedge bc \in I$ dır.

İspat

- i) A Arşimedyan b -cebiri ve $I \subseteq A$ ideal olsun. Her $[a], [b], [c] \in A/I$ için $[a] \wedge [b] = [0]$ ve $[a] \wedge [c] = [0]$ olsun.

$$[a] \wedge [b] = [0] \Rightarrow [a \wedge b] = [0] \Rightarrow a \wedge b \in I$$

$$[a] \wedge [c] = [0] \Rightarrow [a \wedge c] = [0] \Rightarrow a \wedge c \in I$$

dir. Ayrıca

$$[a] \geq [a] \wedge [b] = [0] \Rightarrow \exists a_1 \in [a] : a_1 \geq 0$$

$$[b] \geq [a] \wedge [b] = [0] \Rightarrow \exists b_1 \in [b] : b_1 \geq 0$$

$$[c] \geq [a] \wedge [c] = [0] \Rightarrow \exists c_1 \in [c] : c_1 \geq 0$$

dir. Ayrıca $a_1 \in [a]$ olduğundan $[a_1] = [a]$ dir. Benzer şekilde $[b_1] = [b]$ ve $[c_1] = [c]$ bulunur. O halde $a_1 \wedge b_1 \in I$ ve $a_1 \wedge c_1 \in I$ dir.

$$0 \leq a_1 \wedge (b_1 + c_1) \leq (a_1 \wedge b_1) + (a_1 \wedge c_1)$$

olup ve I ideal olduğundan $a_1 \wedge (b_1 + c_1) \in I$ dir. $a_1 \wedge b_1, a_1 \wedge c_1, a_1 \wedge (b_1 + c_1) \in I$ olduğundan

$$[a_1] = [a_1 - (a_1 \wedge (b_1 + c_1))]$$

$$[b_1] = [b_1 - (a_1 \wedge b_1)]$$

$$[c_1] = [c_1 - (a_1 \wedge c_1)]$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_1 - (a_1 \wedge (b_1 + c_1))) \wedge (b_1 - (a_1 \wedge b_1)) \\ &\leq (a_1 - (a_1 \wedge b_1)) \wedge (b_1 - (a_1 \wedge b_1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$0 \leq (a_1 - (a_1 \wedge (b_1 + c_1))) \wedge (c_1 - (a_1 \wedge c_1))$$

$$\begin{aligned} &\leq (a_1 - (a_1 \wedge c_1)) \wedge (c_1 - (a_1 \wedge c_1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. A b –cebiri olduğundan

$$\begin{aligned} &((a_1 - (a_1 \wedge (b_1 + c_1))) \wedge (b_1 - (a_1 \wedge b_1)))(c_1 - (a_1 \wedge c_1)) = 0 \\ &\Rightarrow [a_1 - (a_1 \wedge (b_1 + c_1))] \wedge [b_1 - (a_1 \wedge b_1)] [c_1 - (a_1 \wedge c_1)] = [0] \\ &\Rightarrow [a_1] \wedge [b_1] [c_1] = [0] \\ &\Rightarrow [a] \wedge [b] [c] = [0] \end{aligned}$$

bulunur. Yani A/I b –cebidir.

ii) Her $a, b, c \in A$ için $a \wedge b \in I$ ve $a \wedge c \in I$ olsun.

$$\begin{aligned} a \wedge b \in I &\Rightarrow [a \wedge b] = [0] \Rightarrow [a] \wedge [b] = [0] \\ a \wedge c \in I &\Rightarrow [a \wedge c] = [0] \Rightarrow [a] \wedge [c] = [0] \end{aligned}$$

bulunur. A/I b –cebiri olduğundan

$$[a] \wedge [b] [c] = [0] \Rightarrow [a] \wedge [bc] = [0] \Rightarrow [a \wedge bc] = [0] \Rightarrow a \wedge bc \in I$$

bulunur.

3.1.5. Teorem

A Arşimedyan Riesz cebiri olsun. A b –cebiri olması için gerekli ve yeterli koşul A 'daki her göreceli düzgün kapalı ideal altcebirdir.

İspat

A daki her göreceli düzgün kapalı ideal altcebir ve $B \subseteq A$ da herhangi bir band olsun. Her band göreceli düzgün kapalı ideal olduğundan hipotezden altcebirdir. O halde A b b –cebidir. Karşıtı A b –cebiri ve $I \subseteq A$ da göreceli düzgün kapalı herhangi bir ideal olsun. Her $a, b \in I$ için $c = |a| \vee |b|$ seçelim.

$$0 \leq |ab| \leq |a||b| \leq c^2$$

Teorem 3.1.3 ten $c^2 \in I$ ve I ideal olduğundan $ab \in I$ dır. Yani I altcebirdir.

3.1.6. Teorem

A birimli ($e > 0$) Arşimedyan düzgün tam b –cebiri olsun. Eğer her $0 < a \in A$ için $a^{-1} \in A$ ise A f –cebidir.

İspat

A birimli ($e > 0$) Arşimedyan düzgün tam b –cebiri ve her $0 < a \in A$ için $a^{-1} \in A$ olsun. Teorem 2.3.9 (i) den $A = B_e \oplus B_e^d$ ve B_e f –cebiri olduğundan $B_e^d = \{0\}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Her $a \in B_e^d$ için kabul edelim ki $a > 0$ olsun. Hipotezden $a^{-1} \in A$ ve $a^{-1} = b + c$ olacak şekilde $b \in B_e$ ve $c \in B_e^d$ vardır. Buradan $e = a^{-1}a = ba + ca$ bulunur. Her $b \in B_e$ için Teorem 2.3.9 (ii) den sol çarpımsal operatör orthomorfizm olduğundan $ba \in B_e^d$ dir. Ayrıca A b –cebiri olduğundan B_e^d alt cebirdir. O halde $ca \in B_e^d$ bulunur. Buradan $e = ba + ca$ olduğundan $e \in B_e^d$ olur ki çelişki elde edilir. O halde $B_e^d = \{0\}$ dır. Yani $A = B_e$ olup A f –cebidir.

Sonuç

A birimli ($e > 0$) Arşimedyan düzgün tam b –cebiri olsun. Eğer her $0 < a \in A$ için $a^{-1} \in A$ oluyorsa A, \mathbb{R} 'ye Riesz ve cebir izomorfiktir.

İspat

A birimli ($e > 0$) Arşimedyan düzgün tam b –cebiri ve her $0 < a \in A$ için $a^{-1} \in A$ olsun. Teorem 3.1.6 dan A f –cebidir. A, \mathbb{R} 'ye Riesz ve cebir izomorfiktir [21].

3.2. b –Cebirlerinin Sıra Bidualleri ve Sıra Sürekli Bidualleri

Bu kısımda b –cebirlerinin sıra bidualleri ve sıra sürekli bidualleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

A Arşimedyan Riesz cebiri olsun. Her $a, b \in A, f \in A^\sim$ ve $F, G \in A^{\sim\sim}$ için,

$$A \times A^\sim \rightarrow A^\sim$$

$$(a, f) \rightarrow f.a : (f.a)(b) = f(ab)$$

$$A^{\sim\sim} \times A^\sim \rightarrow A^\sim$$

$$(F, f) \rightarrow F.f : (F.f)(a) = F(f.a)$$

$$A^{\sim\sim} \times A^{\sim\sim} \rightarrow A^{\sim\sim}$$

$$(F, G) \rightarrow F.G : F.G(f) = F(G.f)$$

biçiminde üç adımda $A^{\sim\sim}$ üzerinde bir çarpma tanımlanabilir ve bu çarpmaya Arens çarpımı denir. A Arşimedyan b -cebiri iken $(A^\sim)_n$ 'nin Arens çarpımıyla Arşimedyan b -cebiri olduğunu gösterdik. Ayrıca pozitif kare özelliğine sahip Arşimedyan b -cebirinin sıradualinin de b -cebiri olduğu ispatlandı.

3.2.1. Teorem

A Arşimedyan b -cebiri ve A^\sim , A 'nın noktalarını ayırsın. Eğer her $0 \leq a \in A$, $0 \leq \Phi, \Gamma, \Psi \in (A^\sim)_n$ için $\Phi \wedge \Psi = 0$, $\Phi \wedge \Gamma = 0$ ve $0 \leq \Phi, \Gamma, \Psi \leq a''$ ise $\Phi \wedge \Psi \Gamma = 0$ dir.

İspat

Her $0 \leq a \in A, 0 \leq \Phi, \Gamma, \Psi \in (A^\sim)_n$ için $\Phi \wedge \Psi = 0$, $\Phi \wedge \Gamma = 0$ ve $0 \leq \Phi, \Gamma, \Psi \leq a''$ olsun. $\Phi \in (A^\sim)_n$ olmak üzere sıfır ideal

$$N_\Phi = \{f \in A^\sim : |\Phi||f| = 0\}$$

band olduğundan $A^\sim = N_\Phi \oplus C_\Phi$ ve $C_\Phi = N_\Phi^d$ dir. $C_\Phi \subseteq N_\Psi$ ve $C_\Phi \subseteq N_\Gamma$ dir. $f + a''f + f.a \in A^\sim$ için $f + a''f + fa = g + h$, $g \wedge h = 0$ ve $\Phi(g) = \Psi(h) = \Gamma(h) = 0$ olacak şekilde $g, h \in A^\sim$ vardır.

$$0 = (g \wedge h)(a) = \inf\{g(c) + h(d) : a = c + d, 0 \leq c, d \in A\}$$

O halde $\varepsilon > 0$ için $a = c + d$ ve $g(c) + h(d) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 \leq c, d \in A$ vardır.

$$\Phi_1 = \Phi \wedge (c - c \wedge d)''$$

$$\Psi_1 = \Psi \wedge (d - c \wedge d)''$$

$$\Gamma_1 = \Gamma \wedge (d - c \wedge d)''$$

şeklinde tanımladığımız fonksiyonlar oluşumlarından dolayı $0 \leq \Phi_1, \Psi_1, \Gamma_1 \in (A^\sim)_n^\sim$ dir.

$$\begin{aligned} 0 \leq \Phi - \Phi_1 &= \Phi - (\Phi \wedge (c - c \wedge d)'') \\ &= (\Phi - (c - c \wedge d)'')^+ \\ &\leq (a'' - (c'' - (c \wedge d)''))^+ \\ &= (c'' + d'' - (c'' - (c \wedge d)''))^+ \\ &\leq 2d'' \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} 0 \leq \Psi - \Psi_1 &= \Psi - (\Psi \wedge (d - c \wedge d)'') \\ &= (\Psi - (d - c \wedge d)'')^+ \\ &\leq (a'' - (d'' - (c \wedge d)''))^+ \\ &= (c'' + d'' - (d'' - (c \wedge d)''))^+ \\ &\leq 2c'' \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} 0 \leq \Gamma - \Gamma_1 &= \Gamma - (\Gamma \wedge (d - c \wedge d)'') \\ &= (\Gamma - (d - c \wedge d)'')^+ \\ &\leq (a'' - (d'' - (c \wedge d)''))^+ \\ &= (c'' + d'' - (d'' - (c \wedge d)''))^+ \\ &\leq 2c'' \end{aligned}$$

bulunur. A b –cebiri olduğundan

$$\begin{aligned}(c - c \wedge d) \wedge (d - c \wedge d) = 0 &\implies (c'' - (c \wedge d)'') \wedge (d'' - (c \wedge d)'') = 0 \\ &\implies (c'' - (c \wedge d)'') \wedge (d'' - (c \wedge d)'')^2 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$0 \leq \Phi_1 \wedge \Psi_1 \Gamma_1 \leq (c'' - (c \wedge d)'') \wedge (d'' - (c \wedge d)'')^2 = 0$$

olduğundan $\Phi_1 \wedge \Psi_1 \Gamma_1 = 0$ dir. Şimdi her $0 \leq f \in A^\sim$ için $(\Phi_1 \wedge \Psi \Gamma_1)(f)$ inceleyelim.

$$\begin{aligned}0 \leq (\Phi_1 \wedge \Psi \Gamma_1)(f) &= (\Phi_1 \wedge ((\Psi - \Psi_1) + \Psi_1) \Gamma_1)(f) \\ &\leq (\Phi_1 \wedge ((\Psi - \Psi_1) \Gamma_1 + \Psi_1 \Gamma_1))(f) \\ &\leq (\Phi_1 \wedge ((\Psi - \Psi_1) \Gamma_1))(f) + (\Phi_1 \wedge \Psi_1 \Gamma_1)(f) \\ &= (\Phi_1 \wedge ((\Psi - \Psi_1) \Gamma_1))(f) \\ &\leq ((\Psi - \Psi_1) \Gamma_1)(f) \\ &\leq ((\Psi - \Psi_1) a'')(f) \\ &= (\Psi - \Psi_1)(a'' f) \\ &\leq (\Psi - \Psi_1)(f + a'' f + f \cdot a) \\ &= (\Psi - \Psi_1)(g + h) \\ &= (\Psi - \Psi_1)(g) + (\Psi - \Psi_1)(h) \\ &\leq 2c''(g) + \Psi(h) \\ &= 2g(c) \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

olup $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $(\Phi_1 \wedge \Psi \Gamma_1)(f) = 0$ dir. Şimdi her $0 \leq f \in A^\sim$ için $(\Phi_1 \wedge \Psi \Gamma)(f)$ inceleyelim.

$$\begin{aligned}0 \leq (\Phi_1 \wedge \Psi \Gamma)(f) &= (\Phi_1 \wedge (\Psi((\Gamma - \Gamma_1) + \Gamma_1)))(f) \\ &\leq (\Phi_1 \wedge (\Psi(\Gamma - \Gamma_1) + \Psi \Gamma_1))(f) \\ &\leq (\Phi_1 \wedge (\Psi(\Gamma - \Gamma_1)))(f) + (\Phi_1 \wedge \Psi \Gamma_1)(f) \\ &= (\Phi_1 \wedge (\Psi(\Gamma - \Gamma_1)))(f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\Psi(\Gamma - \Gamma_1))(f) \\
&\leq (a''(\Gamma - \Gamma_1))(f) \\
&= a''((\Gamma - \Gamma_1).f) \\
&= ((\Gamma - \Gamma_1).f)(a) \\
&= (\Gamma - \Gamma_1)(f.a) \\
&\leq (\Gamma - \Gamma_1)(f + a''f + f.a) \\
&= (\Gamma - \Gamma_1)(g + h) \\
&= (\Gamma - \Gamma_1)(g) + (\Gamma - \Gamma_1)(h) \\
&\leq 2c''(g) + \Gamma(h) \\
&= 2g(c) \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

olup $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $(\Phi_1 \wedge \Psi \Gamma)(f) = 0$ dir. Şimdi her $0 \leq f \in A^\sim$ için $(\Phi \wedge \Psi \Gamma)(f)$ inceleyelim.

$$\begin{aligned}
0 \leq (\Phi \wedge \Psi \Gamma)(f) &= (((\Phi - \Phi_1) + \Phi_1) \wedge \Psi \Gamma)(f) \\
&\leq ((\Phi - \Phi_1) \wedge \Psi \Gamma)(f) + (\Phi_1 \wedge \Psi \Gamma)(f) \\
&= ((\Phi - \Phi_1) \wedge \Psi \Gamma)(f) \\
&\leq (\Phi - \Phi_1)(f) \\
&\leq (\Phi - \Phi_1)(f + a''f + f.a) \\
&= (\Phi - \Phi_1)(g + h) \\
&= (\Phi - \Phi_1)(g) + (\Phi - \Phi_1)(h) \\
&\leq \Phi(g) + 2 d''(h) \\
&= 2 h(d) \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

olup $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $(\Phi \wedge \Psi \Gamma)(f) = 0$ dir. O halde her $0 \leq f \in A^\sim$ için $(\Phi \wedge \Psi \Gamma)(f) = 0$ olduğundan $\Phi \wedge \Psi \Gamma = 0$ dir.

3.2.2. Teorem

A Arşimedyan b -cebiri olsun. Bu durumda Arens çarpımı ile $(A^\sim)_n$ sürekli sıra duali b -cebiri dir.

İspat

Her $0 \leq \Phi, \Psi, \Gamma \in (A^\sim)_n$ için $\Phi \wedge \Psi = 0$ ve $\Phi \wedge \Gamma = 0$ olsun. Eğer $0 \leq \Phi, \Psi, \Gamma \in I_{\sigma(A)}$ ise bu durumda

$$0 \leq \Phi \leq a'', \quad 0 \leq \Psi \leq b'', \quad 0 \leq \Gamma \leq c''$$

olacak şekilde $a, b, c \in A$ vardır. Buradan

$$0 \leq \Phi, \Psi, \Gamma \leq a'' + b'' + c'' = (a + b + c)''$$

yazabiliriz. Teorem 3.2.1 den $\Phi \wedge \Psi \Gamma = 0$ bulunur. Şimdi keyfi $0 \leq \Phi, \Psi, \Gamma \in (A^\sim)_n$ olsun. $I_{\sigma(A)}$, $(A^\sim)_n$ içinde güçlü sıra yoğun olduğundan

$$0 \leq \Phi_\alpha \uparrow \Phi, \quad 0 \leq \Psi_\beta \uparrow \Psi, \quad 0 \leq \Gamma_\gamma \uparrow \Gamma$$

olacak şekilde $\Phi_\alpha, \Psi_\beta, \Gamma_\gamma \in I_{\sigma(A)}$ netleri vardır. Ayrıca $\Phi \wedge \Psi = 0$ ve $\Phi \wedge \Gamma = 0$ olduğundan $\Phi_\alpha \wedge \Psi_\beta = 0$ ve $\Phi_\alpha \wedge \Gamma_\gamma = 0$ dır. $\Phi_\alpha, \Psi_\beta, \Gamma_\gamma \in I_{\sigma(A)}$ olduğundan her α, β, γ için

$$\Phi_\alpha \wedge \Psi_\beta \Gamma_\gamma = 0$$

olur. $0 \leq \Phi_\alpha \uparrow \Phi$ olduğundan $\Phi_\alpha \wedge \Psi_\beta \Gamma_\gamma \uparrow \Phi \wedge \Psi_\beta \Gamma_\gamma$ dır. O halde her β, γ için

$$\Phi \wedge \Psi_\beta \Gamma_\gamma = 0$$

bulunur. $0 \leq f \in A^\sim$ seçelim. Her $a \in A$ için $0 \leq \Gamma_\gamma(f \cdot a) \uparrow \Gamma(f \cdot a)$ dır. Her $a \in A$ için $0 \leq (\Gamma_\gamma \cdot f)(a) \uparrow (\Gamma \cdot f)(a)$ olduğu için $0 \leq (\Gamma_\gamma \cdot f) \uparrow (\Gamma \cdot f)$ dır. Ψ_β sıra sürekli olduğundan

$$0 \leq \Psi_\beta(\Gamma_\gamma \cdot f) = (\Psi_\beta \cdot \Gamma_\gamma)(f) \uparrow \Psi_\beta(\Gamma \cdot f) = (\Psi_\beta \cdot \Gamma)(f)$$

sağlanır. Her $0 \leq f \in A^\sim$ için sağlandığından $0 \leq (\Psi_\beta \cdot \Gamma_\gamma) \uparrow (\Psi_\beta \cdot \Gamma)$ yazabiliriz. Bu yüzden $\Phi \wedge \Psi_\beta \Gamma_\gamma \uparrow \Phi \wedge \Psi_\beta \Gamma$ olduğundan

$$\Phi \wedge \Psi_\beta \Gamma = 0$$

bulunur. Ayrıca $0 \leq \Psi_\beta \uparrow \Psi$ olduğundan her $0 \leq f \in A^\sim$ için

$$0 \leq \Psi_\beta(\Gamma.f) = (\Psi_\beta.\Gamma)(f) \uparrow \Psi(\Gamma.f) = (\Psi.\Gamma)(f)$$

sağlanır. Her $0 \leq f \in A^\sim$ için sağlandığından $0 \leq (\Psi_\beta.\Gamma) \uparrow (\Psi.\Gamma)$ yazabiliriz. O halde $\Phi \wedge \Psi_\beta \Gamma \uparrow \Phi \wedge \Psi \Gamma$ olduğundan $\Phi \wedge \Psi \Gamma = 0$ bulunur.

3.2.3. Teorem

A Arşimedyan b -cebiri olsun. Eğer A pozitif kare özelliğine sahip ise Arens çarpımı ile $A^{\sim\sim}$ sıra duali b -cebiridir.

İspat

A pozitif kare özelliğine sahip Arşimedyan b -cebiri olsun. Bu durumda Teorem 3.1.2 den A hemen hemen f -cebiridir. Her $\Phi, \Psi, \Gamma \in A^{\sim\sim}$ için $\Phi \wedge \Psi = 0$ ve $\Phi \wedge \Gamma = 0$ olsun. $A^{\sim\sim} = (A^\sim)_n \oplus (A^\sim)_s$ olduğundan

$\Phi = \Phi_n + \Phi_s$ olacak şekilde $\Phi_n \in (A^\sim)_n$ ve $\Phi_s \in (A^\sim)_s$ vardır.

$\Psi = \Psi_n + \Psi_s$ olacak şekilde $\Psi_n \in (A^\sim)_n$ ve $\Psi_s \in (A^\sim)_s$ vardır.

$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_s$ olacak şekilde $\Gamma_n \in (A^\sim)_n$ ve $\Gamma_s \in (A^\sim)_s$ vardır.

Ayrıca Teorem 3.2.2 den $(A^\sim)_n$ b -cebiri olduğundan $\Phi_n \wedge \Psi_n = 0$ ve $\Phi_n \wedge \Gamma_n = 0$ için

$$\Phi_n \wedge \Psi_n \Gamma_n = 0$$

bulunur. Ayrıca $\Psi \Gamma = \Psi_n \Gamma_n$ ve $\Psi_n \Gamma_n \in (A^\sim)_n$ yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} 0 \leq \Phi \wedge \Psi \Gamma &= \Phi \wedge \Psi_n \Gamma_n \\ &= (\Phi_n + \Phi_s) \wedge \Psi_n \Gamma_n \\ &\leq (\Phi_n \wedge \Psi_n \Gamma_n) + (\Phi_s \wedge \Psi_n \Gamma_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $A \sim b$ –cebiridir.



4. ARENS HOMOMORFİZİM

E, A üzerinde f -modül ise

$$\rho : A \rightarrow Orth(E)$$

$$a \rightarrow \rho(a) = \pi_a : \pi_a(x) = ax$$

dönüşümü Riesz ve cebir homomorfizmdir. Karşıtı

$$\rho : A \rightarrow Orth(E)$$

$$a \rightarrow \rho(a) = \pi_a : \pi_a(x) = ax$$

biçiminde tanımlanan Riesz ve cebir homomorfizm varsa $A \times E \rightarrow E, (a, x) \rightarrow a.x$ dönüşümü ile E, A üzerinde f -modülüdür [7].

E, A üzerinde f -modül olsun. Bu durumda

$$A \times E^{\sim} \rightarrow E^{\sim}$$

$$(a, f) \rightarrow f.a : (f.a)(b) = f(ab) \quad (4.1)$$

$$E \times E^{\sim} \rightarrow A^{\sim}$$

$$(x, f) \rightarrow \psi(x, f) : \psi(x, f)(a) = f(ax) \quad (4.2)$$

$$(A^{\sim})^{\sim}_n \times E^{\sim} \rightarrow E^{\sim}$$

$$(F, f) \rightarrow F \circ f : F \circ f(x) = F(\psi(x, f)) \quad (4.3)$$

adımları ile birlikte $E^{\sim}, (A^{\sim})^{\sim}_n$ üzerinde f -modülüdür.

Şimdi f -modül yapısıyla tanımlanan ρ dönüşümlerinin verildiği aşağıdaki örnekleri inceleyelim

Örnekler

1. $A = \mathbb{R}$ alırsak, E Riesz uzayı, \mathbb{R} üzerinde f -modülüdür.

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R} &\rightarrow Orth(E) \\ \lambda &\rightarrow \rho(\lambda) = \pi_\lambda : \pi_\lambda(x) = \lambda x \end{aligned}$$

gömmeye dönüşümü Riesz ve cebir homomorfizmdir.

2. A f -cebiri olsun. A kendi üzerinde f -modülüdür.

$$\begin{aligned} \rho : A &\rightarrow Orth(A) \\ a &\rightarrow \rho(a) = \pi_a : \pi_a(x) = ax \end{aligned}$$

dönüşümü Riesz ve cebir homomorfizmdir. Eğer A birimli ise ρ Riesz ve cebir izomorfizmdir[1,9].

3. E Riesz uzayı olsun.

$$\begin{aligned} Orth(E) \times E &\rightarrow E \\ (\pi, x) &\rightarrow \pi \cdot x = \pi(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm ile $E, Orth(E)$ üzerinde f -modülüdür.

$\rho : Orth(E) \rightarrow Orth(E)$ özdeşlik dönüşümüdür.

4. A f -cebiri olsun. Arens çarpımının 2. adımında tanımlanan dönüşüm ile $A^\sim, (A^\sim)_n^\sim$ üzerinde f -modülüdür.

$$\begin{aligned} \rho : (A^\sim)_n^\sim &\rightarrow Orth(A^\sim) \\ F &\rightarrow \rho(F) ; \rho(F)(f) = F \cdot f \end{aligned}$$

dönüşümü Riesz ve cebir homomorfizmdir. Eğer $(A^\sim)_n^\sim$ birimli ise ρ Riesz ve cebir izomorfizmdir [5].

5. E, A üzerinde birimli f -modül olsun. Yukarıda (4.1) ve (4.3) adımlarında tanımlanan dönüşüm ile E^\sim hem A üzerinde hemde $(A^\sim)_n^\sim = A^{\sim\sim}$ üzerinde f -modülüdür.

$\rho : A \rightarrow Orth(E^\sim)$ ve $\rho : A^{\sim\sim} \rightarrow Orth(E^\sim)$ dönüşümleri cebir ve Riesz homomorfizmadır [7].

Biz bu bölümde 5. Örnekte verilen $\rho : A^{\sim\sim} \rightarrow Orth(E^\sim)$ dönüşümü üzerinde çalışma yaptık. Bu dönüşüme Arens homomorfizm adını verip η ile göstereceğiz. Bu bölüm boyunca A birimli f -cebiri olarak alınmıştır.

4.1. Arens Homomorfizm

4.1.1. Teorem

E Riesz uzayı ve her $x \in E, f \in E^\sim$ ve $S \in L_b(E^\sim)$ için

$$\begin{aligned} \Gamma : E \times E^\sim &\rightarrow L_b(E^\sim)^\sim \\ (x, f) &\rightarrow \Gamma(x, f)(S) = S(f)(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm bilattice homomorfizmadır.

İspat

Her $x \in E_+$, ve $f \in E^\sim_+$ için $\Gamma_x : E^\sim \rightarrow L_b(E^\sim)^\sim$ ve $\Gamma_f : E \rightarrow L_b(E^\sim)^\sim$ dönüşümleri pozitiftir. O halde $\Gamma : E \times E^\sim \rightarrow L_b(E^\sim)^\sim$ dönüşümü bipozitifdir. Γ_x Riesz homomorfizma olduğunu göstermek için $\Gamma_x(f^+) = \Gamma_x(f)^+$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Γ_x pozitif olduğundan $\Gamma_x(f) \leq \Gamma_x(f^+)$ dir. Buradan $\Gamma_x(f)^+ \leq \Gamma_x(f^+)$ bulunur. Şimdi tersini gösterelim. Her $S \in L_b(E^\sim)_+, x \in E$ ve $f \in E^\sim$ için,

$$\begin{aligned} \Gamma_x(f)^+(S) &= \Gamma(x, f)^+(S) \\ &= \sup\{\Gamma(x, f)(R) : 0 \leq R \leq S\} \\ &= \sup\{R(f)(x) : 0 \leq R \leq S\} \end{aligned}$$

dır. $f \in E^\sim$ nin ürettiği band B_{f^+} ve $P : E^\sim \rightarrow B_{f^+}$ projeksiyon band olmak üzere $R_1 = S \circ P$ olarak tanımlayalım. $0 \leq R_1 \leq S, R_1 \in L_b(E^\sim)$ olduğundan $\Gamma(x, f)(R_1) \leq \Gamma(x, f)^+(S)$ dir.

Ayrıca ,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_x(f)^+(S) &\geq \Gamma(x, f)(R_1) \\
 &= R_1(f)(x) \\
 &= S \circ P(f)(x) \\
 &= S(f^+)(x) \\
 &= \Gamma(x, f^+)(S) \\
 &= \Gamma_x(f^+)(S)
 \end{aligned}$$

olduğundan Γ_x Riesz homomorfizmadır. Γ_f Riesz homomorfizma olduğunu gösterelim Γ_f pozitif olduğundan $\Gamma_f(x)^+ \leq \Gamma_f(x^+)$ dir. Her $S \in L_b(E^\sim), f \in E^\sim$ ve $x \in E$ için

$$\begin{aligned}
 \Gamma_f(x^+)(S) &= \Gamma(x^+, f)(S) \\
 &= S(f)(x^+) \\
 &= \sup\{ g(x) : 0 \leq g \leq S(f) \}
 \end{aligned}$$

E^\sim Dedekind tam ve $0 \leq g \leq S(f)$ olduğundan $0 \leq \pi \leq I$ ve $\pi(S)(f) = g$ olacak şekilde $\pi \in Orth(E^\sim)$ vardır. $R_1 = \pi \circ S$ tanımlarsak $0 \leq R_1 \leq S, R_1(f) = g$ ve $R_1 \in L_b(E^\sim)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x, f)^+(S) &= \sup\{\Gamma(x, f)(R) : 0 \leq R \leq S \} \\
 &= \sup\{R(f)(x) : 0 \leq R \leq S \} \\
 &\geq R_1(f)(x)
 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 R_1(f)(x) &= \pi \circ S(f)(x) \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

olup her iki taraftan supremum aldığımızda

$$\Gamma_f(x)^+(S) \geq \sup\{ g(x) : 0 \leq g \leq S(f) \} = \Gamma_f(x^+)(S)$$

bulunur. O halde $\Gamma_f(x^+) = \Gamma_f(x)^+$ olduğundan Γ_f Riesz homomorfizmadır. Yani Γ bilattice homomorfizmadır.

E, A üzerinde f -modül olsun. Her $a \in A$ için

$$\psi : E \times E^\sim \rightarrow A^\sim$$

$$(x, f) \rightarrow \Psi(x, f) = \psi_{x,f}, \quad \psi(x, f)(a) = f(ax)$$

dönüşümü her $x \in E^+$ ve $f \in E_+^\sim$ için $f \rightarrow \psi(u, f)$ ve $x \rightarrow \psi(x, g)$ dönüşümleri pozitifdir. ψ nin adjointi

$$\psi^\sim : A^{\sim\sim} \rightarrow L_b(E^\sim)$$

$$F \rightarrow \psi^\sim(F), \quad \psi^\sim(F)(f)(x) = F(\psi_{x,f})$$

dönüşümü η kendisidir.

Genellikle bi-lineer dönüşümün görüntüsü lineer uzay olmayabilir. Aşağıdaki teoremden ψ bi-lineer dönüşümün görüntüsü lineer uzay olduğunu gösterdik. Bu teoremi B. Turan [7] de $A = Z(E)$ özel durumunda ve A. Uyar [24] te farklı yoldan ispatlarını vermişlerdir.

4.1.2. Teorem

E, A üzerinde birimli f -modül ve $B = \{\psi(x, f) : x \in E \text{ ve } f \in E^\sim\}$ olsun. B, A^\sim içinde sıra idealdir.

İspat

$f, g \in E^\sim, x, y \in E$ ve $\mu = \psi(x, f) + \psi(y, g) \in A^\sim$ olsun.

$$0 \leq \mu^+$$

$$\leq |\psi(x, f) + \psi(y, g)|$$

$$\leq \psi(|x|, |f|) + \psi(|y|, |g|)$$

$$\leq \psi(|x| + |y|, |f| + |g|)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$0 \leq \mu^- \leq \psi(|x| + |y|, |f| + |g|)$$

bulunur. $z = |x| + |y|$ ve $h = |f| + |g|$ alırsak $0 \leq \mu^+ \leq \psi(z, h)$ ve $0 \leq \mu^- \leq \psi(z, h)$ sağlanır. A^\sim Dedekind tam olduğundan $0 \leq \pi \leq I$ ve $\pi(\psi(z, h)) = \mu^+$ olacak şekilde $\pi \in Orth(A^\sim)$ vardır. Ayrıca [5] den

$$v : A^{\sim\sim} \rightarrow Orth(A^\sim)$$

$$F \rightarrow v(F), v(F)(f) = F.f$$

dönüşümü cebir ve Riesz izomorfizma olduğundan $v(H) = \pi$ olacak şekilde $H \in A^{\sim\sim}$ vardır.

Her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned} \Psi(x, f).a(b) &= \Psi(x, f)(ab) \\ &= f(abx) \\ &= f(bax) \\ &= \Psi(ax, f)(b) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} H.\psi(z, h)(a) &= H(\psi(z, h).a) \\ &= H(\psi(az, h)) \\ &= H \circ h(az) \\ &= \psi_{z, H \circ h}(z) \end{aligned}$$

olduğundan $H.\psi(z, h) = \psi_{z, H \circ h}$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mu^+ &= \pi(\psi(z, h)) \\ &= v(\pi)(\psi(z, h)) \\ &= H.\psi(z, h) \end{aligned}$$

$$= \psi(z, H \circ h)$$

bulunur. Benzer şekilde $K \in A^{\sim\sim}$ için $\mu^- = \psi(z, K \circ h)$ bulunur.

$$\begin{aligned} \mu &= \mu^+ - \mu^- \\ &= \psi(z, H \circ h) - \psi(z, K \circ h) \\ &= \psi(z, (H - K) \circ h) \end{aligned}$$

olduğundan B de iki elemanın toplamı B de bulunur. Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda\psi(x, f) = \psi(\lambda x, f)$ olduğundan $\lambda\psi(x, f) \in B$ dir. O halde B, A^{\sim} nin alt uzayıdır. Şimdi B nin ideal olduğunu gösterelim. Her $\mu \in A^{\sim}$ için $0 \leq |\mu| \leq \psi(x, f)$ olacak biçimde $\psi(x, f) \in B$ olsun. A^{\sim} Dedekind tam olduğundan $\pi(\psi(x, f)) = \mu$ olacak biçimde $\pi \in Orth(A^{\sim})$ vardır. O halde $v(H) = \pi$ olacak şekilde $H \in A^{\sim\sim}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \mu &= \pi(\psi(x, f)) \\ &= v(H)(\psi(x, f)) \\ &= \psi(x, H \circ f) \end{aligned}$$

bulunur. Yani $\mu \in B$ bulunur. O halde B, A^{\sim} nin idealidir.

4.1.3. Teorem

Eğer E, A üzerinde f -modül ise

$\psi : E \times E^{\sim} \rightarrow A^{\sim}$ bilattice homomorfizma $\Leftrightarrow \psi^{\sim} : A^{\sim\sim} \rightarrow L_b(E^{\sim})$ aralık koruyandır

İspat

ψ bilattice homomorfizma olsun. Teorem 2.2.30. da $F = E^{\sim}, G = B^{\sim}$ ve $H = \mathbb{R}$ alırsak $\psi^{\sim} : B^{\sim\sim} \rightarrow L_{bv}(E, E^{\sim}; \mathbb{R})$ aralık koruyan operatörünü elde ederiz. Ayrıca Teorem 2.2.29. da verdiğimiz teoremden uygun seçimler yapıldığında $L_{bv}(E, E^{\sim}; \mathbb{R}) \simeq (E \overline{\otimes} E^{\sim})^{\sim} \simeq L_b(E^{\sim})$ olduğundan $\psi^{\sim} : B^{\sim\sim} \rightarrow L_b(E^{\sim})$ aralık koruyan operatördür.

Tersine ψ^{\sim} aralık koruyan olsun. Teorem 2.2.19. dan $\psi^{\sim\sim}: L_b(E^{\sim})^{\sim} \rightarrow A^{\sim\sim\sim}$ Riesz homomorfizmadır. Her $x \in E, f \in E^{\sim}$ ve $H \in A^{\sim\sim}$ için $\sigma: A \rightarrow (A^{\sim})^{\sim}$ doğal gömme dönüşümü olmak üzere,

$$\begin{aligned}\psi^{\sim\sim}(\Gamma(x, f))(H) &= \Gamma(x, f)(\psi^{\sim}(H)) \\ &= \psi^{\sim}(H)(f)(x) \\ &= H(\psi(x, f)) \\ &= \sigma(\psi(x, f))(H)\end{aligned}$$

bulunur. Her $x, y \in E, f \in E^{\sim}$ için

$$\begin{aligned}\sigma(\psi(x \wedge y, f)) &= \psi^{\sim\sim}(\Gamma(x \wedge y, f)) \\ &= \psi^{\sim\sim}(\Gamma(x, f)) \wedge \psi^{\sim\sim}(\Gamma(y, f)) \\ &= \sigma(\psi(x, f)) \wedge \sigma(\psi(y, f))\end{aligned}$$

bulunur. Her $x \in E^+, f, g \in E^{\sim}$ için

$$\begin{aligned}\sigma(\psi(x, f \wedge g)) &= \psi^{\sim\sim}(\Gamma(x, f \wedge g)) \\ &= \psi^{\sim\sim}(\Gamma(x, f)) \wedge \psi^{\sim\sim}(\Gamma(x, g)) \\ &= \sigma(\psi(x, f)) \wedge \sigma(\psi(x, g))\end{aligned}$$

bulunur. σ birebir Riesz homomorfizma [9] ve Γ bilattice homomorfizma olduğundan ψ bilattice homomorfizmadır.

Sonuç : E, A üzerinde f -modül olsun.

$\psi: E \times E^{\sim} \rightarrow A^{\sim}$ bilattice homomorfizma $\Leftrightarrow \eta: A^{\sim\sim} \rightarrow Orth(E^{\sim})$ aralık koruyandır.

4.1.1. Tanım

E, A üzerinde birimli f -modül, $x \in E$ ve $0 \leq y \leq x$ olsun. Eğer A içinde $0 \leq a_{\alpha} \leq e$ ve $a_{\alpha}x \xrightarrow{\sigma(E, E^{\sim})} y$ şartını sağlayan $\{a_{\alpha}\}$ neti varsa E, A' ya göre topolojik doludur denir [7].

4.1.4. Teorem

E, A üzerinde topolojik dolu f -modülü ve E^\sim, E nin noktalarını ayırsın. Bu durumda

$$\Psi : E \times E^\sim \rightarrow A^\sim$$

$$(x, f) \rightarrow \Psi(x, f) = \Psi_{x,f}$$

dönüşümü bilattice homomorfizmadır [7].

4.2. f –Modüllerinde Alt Modül ile Sıra İdeal

C.D. Huijsmans ve B. Pagter de cebir idealleri ile sıra idealler arasındaki ilişkiyi incelediler. Önce [14] yaptıkları çalışmada aşağıdaki teoremi ispatladılar.

“ A Arşimedyan f -cebiri olsun. A daki her göreceli düzgün kapalı sıra ideali l -idealdir (sıra ve cebir ideali).”

Daha sonra [15] yaptıkları çalışmada diğer yönünü aşağıdaki teoremle elde ettiler

“Arşimedyan birimli f -cebirinin her göreceli düzgün kapalı cebir ideali sıra idealdir.”

Bizde bu kısımda f -modüllerinde sıra ideal ile altmodüller arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

4.2.1. Teorem

E, A üzerinde f -modül ve I, E nin $\sigma(E, E^\sim)$ kapalı ideali olsun. O zaman $\pi(I) \subseteq I$ olacak şekilde $\pi \in Orth(E)$ vardır. Ayrıca E nin her $\sigma(E, E^\sim)$ kapalı I ideali E nin A -altmodülüdür.

İspat

I, E nin $\sigma(E, E^\sim)$ kapalı ideali olsun. O halde Teorem 2.2.25 ten

$$I^0 = \{f \in E^\sim : \forall x \in I, f(x) = 0\}$$

banddır. Bu yüzden her $r \in Orth(E^\sim)$ ve $f \in E^\sim$ için r band koruyan olduğundan $r(f) \in I^0$ dir. $\pi \in Orth(E)$ olsun. $\pi \in Orth(E)$ olduğundan $\pi^\sim \in Orth(E^\sim)$ dir. Bu durumda her $f \in I^0$ için $\pi^\sim(f) \in I^0$ dir. Yani $f \in I^0$ ve $x \in I$ için $\pi^\sim(f)(x) = 0 \Rightarrow f(\pi x) = 0$

bulunur. Yani $\pi x \in {}^0(I^0)$ dir. Teorem 2.2.26 den ${}^0(I^0) = I$ olduğundan $\pi x \in I$ dir. O halde $\pi(I) \subseteq I$ dir. Üstelik her $a \in A$ için $\pi_a \in Orth(E)$ olduğundan $\pi_a(I) \subseteq I$ sağlanır. Yani E nin $\sigma(E, E^\sim)$ kapalı I ideali E nin A –altmodülüdür.

4.2.2. Teorem

E, A üzerinde birimli f –modül olsun. Aşağıdakiler önermeler denktir.

- i) E, A ya göre topolojik doludur
- ii) η Arens homomorfizmasının görüntüsü $Orth(E^\sim)$ içinde idealdir
- iii) E^\sim nin her $\sigma(E^\sim, E)$ kapalı A -alt modülü idealdir
- iv) E nin her $\sigma(E, E^\sim)$ kapalı A –alt modülü idealdir.

İspat

i) \Rightarrow ii) E, A ya göre topolojik dolu olsun. $\psi: E \times E^\sim \rightarrow A^\sim$ dönüşümü bilattice homomorfizmadır. O halde yukardaki Sonuçtan dolayı $\eta: A^{\sim\sim} \rightarrow Orth(E^\sim)$ aralık koruyan operatör aynı zamanda Riesz homomorfizma olduğundan. $\eta(A^{\sim\sim}), Orth(E^\sim)$ içinde sıra idealdir.

ii) \Rightarrow iii) N, E^\sim nin $\sigma(E^\sim, E)$ kapalı A – altmodülü ve $F \in (A^\sim)^\sim_n = A^{\sim\sim}$ olsun. Bu durumda $a''_\alpha \xrightarrow{\sigma(A^{\sim\sim}, A^\sim)} F$ olacak şekilde $(a_\alpha) \subseteq A$ vardır.

$$\begin{aligned} a''_\alpha \circ f(x) &= a''_\alpha(\Psi(x, f)) \\ &= \Psi(x, f)(a_\alpha) \\ &= f(a_\alpha x) \\ &= a_\alpha \cdot f(x) \end{aligned}$$

bulunur. $N, E \sim A$ –altmodülü olduğundan $a_\alpha \cdot f \in N$ dir. Yani $a''_\alpha \circ f \in N$ dir. Ayrıca N kapalı olup $a''_\alpha \circ f \rightarrow F \circ f$ olduğundan $F \circ f \in N$ dir. O halde $N, E \sim$ nın $A \sim \sim$ –alt modülüdür. Diğer yandan A nın cebirsel birimi e ise e'' , $A \sim \sim$ nın cebirsel birimidir. η cebir homomorfizm olduğundan $\eta(e'') = I$ dir. O halde $I \in \eta(A \sim \sim)$ olup $\eta(A \sim \sim)$ ideal olduğundan $Z(E \sim) \subseteq \eta(A \sim \sim)$ bulunur.

$f \in N$ ve $S \in Z(E \sim) \subseteq \eta(A \sim \sim)$ dönüşümü f^+ tarafından üretilen band üzerine band projeksiyon olsun. Yani $S(f) = f^+$ dir. Ayrıca $S \in \eta(A \sim \sim)$ olduğundan $\eta(S) = G$ olacak şekilde $G \in A \sim \sim$ vardır.

$$f^+ = S(f) = \eta(G)(f) = G \circ f$$

olup $N, E \sim$ nın $A \sim \sim$ –alt modülü olduğundan $G \circ f = f^+ \in N$ dir. Yani N alt Riesz uzayıdır. Her $f \in N$ ve $g \in E \sim$ için $0 \leq g \leq f$ olsun. $E \sim$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $R(f) = g$ olacak şekilde $R \in Z(E \sim) \subseteq \eta(A \sim \sim)$ vardır. $R \in \eta(A \sim \sim)$ olduğundan $\eta(P) = R$ olacak şekilde $P \in A \sim \sim$ vardır. O halde

$$g = R(f) = \eta(P)(f) = P \circ f$$

olup $N, E \sim$ nın $A \sim \sim$ – alt modülü olduğundan $P \circ f = g \in N$ dir. O halde N idealdir.

iii) \Rightarrow iv) Her $a \in A$ ve $f \in M^o$ için $a \cdot f \in M^o$ olduğunu gösterelim. Her $x \in M$ için $a \cdot f(x) = f(ax)$ ve M, E nin A –alt modülü olduğundan $ax \in M$ dir. Buradan her $x \in M$ için $a \cdot f(x) = f(ax) = 0$ bulunur. Yani $a \cdot f \in M^o$ dir. $M^o, \sigma(E \sim, E)$ kapalı olduğundan, $M^o, E \sim$ nın $\sigma(E \sim, E)$ kapalı A -alt modülüdür. Hipotezden dolayı M^o idealdir. olduğundan M idealdir.

iv) \Rightarrow i) Her $x, y \in E$ ve $0 \leq y \leq x$ olsun. $Ax = \{ax : a \in A\} \subseteq A$ kümesinin $|\sigma|(E \sim, E)$ kapanışını K ile gösterelim. K konveks küme olduğundan Teorem 2.2.23 den $K, \sigma(E \sim, E)$ kapalı kümedir. Hipotezden K, E içinde idealdir. A birimli olduğundan $x \in K$ olup K ideal olduğundan $y \in K$ dir. O halde $a_\alpha x \xrightarrow{|\sigma|(E \sim, E)} y$ olacak şekilde $(a_\alpha) \subseteq A$ neti vardır.

$b_\alpha = (a_\alpha)^+ \wedge e$ olacak şekilde (b_α) netini tanımlayalım. Tanımından $0 \leq b_\alpha \leq e$ dir. A f -cebiri ve x pozitif olduğundan $b_\alpha x = (a_\alpha x)^+ \wedge x$ tir.

$$\begin{aligned} a_\alpha x \xrightarrow{|\sigma|(E^\sim, E)} y &\Rightarrow (a_\alpha x)^+ \xrightarrow{|\sigma|(E^\sim, E)} y \\ &\Rightarrow (a_\alpha x)^+ \wedge x \xrightarrow{|\sigma|(E^\sim, E)} y \wedge x \\ &\Rightarrow b_\alpha \xrightarrow{|\sigma|(E^\sim, E)} y \end{aligned}$$

dir. Teorem 2.2.24. den $b_\alpha \xrightarrow{\sigma(E^\sim, E)} y$ dir. Yani E, A ya göre topolojik doludur.

Sonuç : E Banach örgüsü ve A üzerinde birimli f -modülü olsun. Aşağıdakiler önermeler denktir.

- i) E, A ya göre topolojik doludur.
- ii) η Arens homomorfizmin görüntüsü $Z(E^\sim)$ ya örtendir.
- iii) E^\sim nin her $\sigma(E^\sim, E)$ kapalı A -alt modülü idealdir.
- iv) E nin her $\sigma(E, E^\sim)$ kapalı A -alt modülü idealdir.

İspat

E Banach örgüsü olduğundan E^\sim Banach örgüsü olduğundan $Z(E^\sim) = Orth(E^\sim)$ dır. $E^\sim = E'$ sağlandığından ispatı açıktır.

Arens homomorfizma genelde birebir değildir.

Örnek

$E = l^1$ ve $A = l^\infty$ olsun. l^1, l^∞ a göre topolojik doludur ve $\rho: l^\infty \rightarrow Orth(l^\infty)$ dönüşümü Riesz ve cebir izomorfizmadır. $E^\sim = l^\infty$ dır. Yani $Orth(E^\sim) = l^\infty$ dur. Diğer taraftan $A^{\sim\sim} = (l^\infty)''$ ve $\eta, (l^\infty)''$ dan $l^\infty = Orth(E^\sim)$ ya örten band projeksiyondur. Bu yüzden Arens homomorfizma birebir değildir.

4.2.3. Teorem

E, A üzerinde birimli f -modül olsun.

Arens homomorfizma birebirdir $\Leftrightarrow B = \{\Psi(x, f) : x \in E \text{ ve } f \in E^\sim\}$ nin $\sigma(A^\sim, A^{\sim\sim})$ kapanışı A^\sim dir.

İspat

$\Rightarrow B = \{\Psi(x, f) : x \in E \text{ ve } f \in E^\sim\}$ nin $\sigma(A^\sim, A^{\sim\sim})$ kapanışı A^\sim olsun.

Her $F \in \text{Cek}(\eta), f \in E^\sim$ ve $x \in E$ için

$$\begin{aligned} F \in \text{Cek}(\eta) &\Rightarrow \eta(F)(f)(x) = 0 \\ &\Rightarrow F(\Psi(x, f)) = 0 \end{aligned}$$

dir. Hipotezden dolayı her $\mu \in A^\sim$ için $F(\mu) = 0$ dir. O halde $F = 0$ dir. Yani $\text{Cek}(\eta) = \{0\}$ olduğundan η birebirdir.

$\Rightarrow \eta$ birebir olsun. $cl(B), B$ nin $\sigma(A^\sim, A^{\sim\sim})$ kapanışı olsun. Teorem 4.1.2. iii) den $cl(B), A^\sim$ içinde idealdir. $A^{\sim\sim} = (A^\sim)_n^\sim$ olduğundan Teorem 2.2.27. dan $cl(B), A^\sim$ içinde banddır. $S: A^\sim \rightarrow cl(B)^d$ band projeksiyon olsun. Ayrıca $v(A^{\sim\sim}) = \text{Orth}(A^\sim)$ olduğundan $v(F) = S$ olacak şekilde $F \in A^{\sim\sim}$ vardır. Her $x \in E$ ve $f \in E^\sim$ için

$$\begin{aligned} F. \Psi(x, f) &= v(F)(\Psi(x, f)) \\ &= S(\Psi(x, f)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \eta(F)(f)(x) &= F(\Psi(x, f)) \\ &= F(\Psi(x, f). e) \\ &= F. \Psi(x, f)(e) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve η birebir olduğundan $F = 0$ dir. Yani $S = 0$ dir. O halde $A^\sim = cl(B) \oplus cl(B)^d$ ve $cl(B)^d = \{0\}$ olduğundan $A^\sim = cl(B)$ dir.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tanımını yaptığımız b -cebirlerinin cebirsel özellikleri incelendi ve Huijsmans'ın Riesz cebirlerinde sorduğu Gelfand-Mazur teoreminin b -cebirlerindeki ispatı verildi. Ayrıca b -cebirlerinin sıra sürekli biduallerinin b -cebiri olduğu, pozitif kare özelliğine sahip olması durumunda sıra biduallerinin b -cebiri olduğu ispatlandı.

Pozitif kare özelliğine sahip veya değişmeli d -cebiri hemen hemen f -cebidir. Pozitif kare özelliğine sahip b -cebirlerinin hemen hemen f -cebiri olduğunu gösterdik. Fakat değişmeli b -cebirlerinin özelliklerini henüz belirleyemedik. f -cebirlerine karşılık gelen operatör grubu orthomorfizmalardır.

$$A \rightarrow Orth(A)$$

$$a \rightarrow \pi_a, \pi_a(b) = ab$$

örgü ve cebir homomorfizma dönüşümü ile f -cebirleri orthomorfizmalar içine gömülebilmektedir. Hatta burada f -cebiri birimli ise bu dönüşüm örgü ve cebir izomorfizmadır. b -cebirlerine karşılık gelen operatör grubunu henüz tanımlayamadık. Bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.

E, A üzerinde f -modül olsun. E^\sim nin $A^{\sim\sim}$ üzerinde f -modül yapısını elde ettik. E, A üzerinde topolojik dolu f -modülü ve $E^\sim E$ nin noktalarını ayırıyorsa Arens homomorfizm diye tanımladığımız

$$\eta: A^{\sim\sim} \rightarrow Orth(E^\sim)$$

$$F \rightarrow \eta(F), \eta(F)(f) = F \circ f$$

dönüşümünün aralık koruyan olduğunu gösterdik. $\eta(A^{\sim\sim})$ nin $Orth(E^\sim)$ içinde ideal olduğu sonucunu elde ettik. Bunun sonucu olarak A - altmodül ile idealler arasındaki ilişkiyi elde ettik.

$$E, A \text{ üzerinde } f\text{-modül olmak üzere } A \rightarrow Orth(E) \text{ dönüşümü ve } \eta: A^{\sim\sim} \rightarrow Orth(E^\sim)$$

dönüşümünün örten olması için gerekli ve yeterli koşulu henüz elde edemedik. Bu konu üzerine çalışmalarımız devam etmektedir.



KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (1985). *Positive Operators*. Orlando: Academic Press, 1-251.
2. Huijsmans, C. D. (1988). Element with unit spectrum in a Banach lattice algebra. *Proceedings A 91*, 43-51.
3. Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz* (Üçüncü Baskı). İstanbul: Gazi Kitabevi, 255-288.
4. Huijsmans, C. D. and Bernau, S. J. (1990). Almost f -algebras and d -algebras. *Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*, 287-308.
5. Pagter De, B. and Huijsmans, C. D. (1984) The order bidual of lattice ordered algebras. *Journal of Functional Analysis*, 59, 41-64.
6. Luxemburg, W.A.J. and Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Space I*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
7. Turan, B. (2000). On f -linearity and f -orthomorphism. *Positivity*, 4, 293-301.
8. Aliprantis, C. D. And Burkinshaw, O. (1978). *Locally Solid Riesz Spaces*. London: Academic Press.
9. Zaanen, A. C. (1983). *Riesz Space II*(Birinci Baskı). Amsterdam: North Holland Publishing Company.
10. Fremlin, D. H. (1972). Tensor Products of Archimedean Vector Lattices. *American Journal of Mathematics*, 94(3), 777-798.
11. Boulabiar, K., Buskes, G. and Page, R. (2005). On Some Properties of Bilinear Maps of Order Bounded Variation. *Positivity*, 9, 401-414.
12. Buskes, G. and Van Rooij, A. (2003). Bounded variation and tensor product of Banach lattices. *Positivity*, 7, 47-59.
13. Alpay, Ş. and Turan, B. (1995). On f -modules. *Revue Roumaine Mathématique Pures Applications*, 40, 233-241.
14. Huijsmans, C. D. and Pagter De, B. (1982). Ideal theory in f -algebras. *Transaction of American Mathematical Society*, 269, 225-245.
15. Huijsmans, C. D. and Pagter De, B. (1984). Subalgebras and Riesz subspaces of an f -algebra. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 148, 161-174.
16. Orhon, M. (2010). The ideal center of the dual of a Banach lattice. *Positivity*, 14, 841-847.

17. Wickstead, A.W. (1981). Extremal structure of cones of operators. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 32, 239-253.
18. Bernau, S. J. and Huijsmans, C. D. (1990). The order bidual of almost f -algebras and d -algebras. *Transaction of American Mathematical Society*, 347, 4259-4275.
19. Ercan, Z. and Önal, S. (2006). Some observation on Riesz algebras. *Positivity*, 10, 731-736.
20. Huijsmans, C. D. (1989). The order bidual of lattice ordered algebras II. *Journal of Operator Theory*, 22, 277-290.
21. Huijsmans, C. D. (1992). Lattice-ordered division algebras. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 92, 239-241.
22. Meyer-Nieberg, P. (1991). *Banach Lattices*, Springer:Berlin.
23. Pagter de, B. (1981). *f-Algebras and Orthomorphisms*, Unpublished Ph.D.'s thesis, Rijksuniversiteit Groningen, Leiden, 141-145.
24. Uyar, A. (2005). Quotient f -modules. *Turkish Journal of Mathematics*, 29, 121-127.
25. Uyar, A. (2005). On Banach Lattice Algebras. *Turkish Journal of Mathematics*, 285-290.
26. Luxemburg, W. A. J. (1989). *Ordered Algebraic Structures in Analysis*. California: Kluwer Academic Publishers, 131-142.
27. Scheffold, E. (2003). Über Banachverbandsalgebren vom Typ 1. *Arkiv för Matematik*, 41(2), 375-379.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ASLANTAŞ, Mustafa
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 27.04.1987, Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 202 1523
 e-mail : mustafaaslantas_06@hotmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi /Fen Bil. Ens./Matematik	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Fen Bil. Ens./Matematik	2012
Lisans	Gazi Üniversitesi / Fen Fak./Matematik Böl.	2009
Lise	Keçiören Yabancı Dil Ağırlıklı Süper Lis.	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2014-Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2013-2014	Karabük Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Turan, B. and Aslantaş, M. (2014). Archimedean l-algebras with multiplication closed bands. *Indagationes Mathematicae*, 25, 588-595.
2. Turan, B. and Aslantaş, M., (2012). On Principal Ideals and Bands on l-algebra. *Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliquees*, 57(4), 423-429.



GAZİ GELECEKTİR..