

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNE TEORİSİ VE DİNAMİĞİ BİLİM DALI**

**KUVVETLİ NONLİNEER DİNAMİK PROBLEMLERİNİN
PERTURBASYON YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ**

Beyza BOSTANCI

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. M. M. Fatih KARAHAN**



MANİSA-2017

**Beyza
BOSTANCI**

**KUVVETLİ NONLINEER DİNAMİK PROBLEMLERİNİN
PERTURBASYON YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ**

2017

TEZ ONAYI

Beyza BOSTANCI tarafından hazırlanan "**Kuvvetli Nonlineer Dinamik Problemlerinin Perturbasyon Yöntemleri ile Çözümleri**" adlı tez çalışması 20/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak savunulmuş ve **oyçokluğu / oybirliği** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Yrd. Doç. Dr. M. M. Fatih KARAHA
	Celal Bayar Üniversitesi
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. M. M. Fatih KARAHA
	Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Mehmet ÇEVİK
	İzmir Katip Çelebi Üniversitesi
Jüri Üyesi	Doç. Dr. B. Burak ÖZHAN
	Manisa Celal Bayar Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Beyza BOSTANCI



İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	III
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IV
TEŞEKKÜR.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Kavramlar.....	1
1.2. Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri.....	3
1.3. Analitik Yöntemler Hakkında Literatür Araştırması.....	4
1.4. Bu Çalışmada Uygulanacak Olan Çözüm Yöntemi ve Tezin Amacı.....	5
2. TİTREŞİM	7
2.1. Titreşim Hareketi Hakkında	7
2.2. Titreşim Hareketinin Sınıflandırılması.....	7
2.3. Titreşim Hareketinin Modellenmesi.....	8
2.4. Titreşim Sistemini Oluşturan Temel Elemanlar	9
3. PERTURBASYON YÖNTEMLERİ.....	10
3.1. Perturbasyon Yöntemine Tarihsel Yaklaşım.....	10
3.2. Bazı Temel Perturbasyon Yöntemleri	10
3.2.1. Lindstedt-Poincare Yöntemi	10
3.2.2. Renormalizasyon Yöntemi	12
3.2.3. Ortalama Yöntemi.....	12
3.2.4. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (Multiple Scales)	13
3.2.5. Gergin Parametreler Yöntemi	14
3.2.6. Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky Yöntemi.....	15
3.3. Son Zamanlarda Geliştirilen Perturbasyon Yöntemleri	15
3.3.1. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi	16
3.3.2. Doğrusallaştırılmış (lineerleştirilmiş) Perturbasyon Yöntemi.....	16
3.3.3. Modifiye Edilmiş Lindstedt Poincare Yöntemi	19
3.3.4. Homotopi-Perturbasyon Yöntemi.....	19
3.4. Perturbatif Olmayan Yöntemler	19

3.4.1. Adomian Ayrışım Yöntemi	19
3.4.2. Homotopi Analiz Yöntemi.....	20
3.4.3. Geliştirilmiş Harmonik Denge Yöntemi (Improved Harmonic Balance Method).....	20
3.4.4. İterasyon Perturbasyon Yöntemleri	20
4. MULTIPLE SCALES LINDSTEDT POINCARÉ (MSLP) YÖNTEMİNİN FİZİKSEL PROBLEMLERE UYGULANMASI.....	23
4.1. Lineer ve Nonlinear Yaylara Bağlı Bir Kütlenin Salınım Hareketi	26
4.1.1. Sistemin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi	26
4.1.2. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS).....	31
4.1.3. Multiple Scales Lindstedt Poincaré (MSLP) Yöntemi	34
4.1.4. Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	38
4.2. Gergin Elastik Bir Teldeki Kütlenin Nonlinear Titreşim Hareketi	41
4.2.1. Sistemin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi ve Denklemin Boyutsuzlaştırılması.....	41
4.2.2. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS).....	43
4.2.3. Multiple Scales Lindstedt Poincaré (MSLP) Yöntemi	46
4.2.4. Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	49
4.3. Helmholtz-Duffing Denkleminin	54
4.3.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS).....	55
4.3.2. Multiple Scales Lindstedt Poincaré (MSLP) Yöntemi	58
4.3.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	61
4.4. Van Der Pol Denkleminin	64
4.4.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS).....	64
4.4.2. Multiple Scales Lindstedt Poincaré (MSLP) Yöntemi	68
4.4.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	72
4.5. Doğrusal Olmayan Elastik Bir Zemin Üzerindeki Kirişin Zorlamalı Titreşim Hareketi	73
4.5.1. Sistemin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi ve Denklemin Boyutsuzlaştırılması.....	73
4.5.2. Hareket Denkleminin Diskritize Edilmesi.....	79
4.5.3. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS).....	81
4.5.4. Multiple Scales Lindstedt Poincaré (MSLP) Yöntemi	84
4.5.5. Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	88
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	91
KAYNAKLAR	92

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$A_n, \bar{A}_n$	n. moda ait kompleks genlikler ve eşlenikler
a_n	n. moda ait genlik
$C(t)$	İntegral sabiti
D	Türev operatörü
dx	Diferansiyel boyuttaki elemana ait uzunluk
dt	Diferansiyel boyutta zaman
$k.e.$	Karmaşık eşlenik
MS	Çok zaman ölçekli yöntem (Multiple Scales Method)
$MSLP$	Multiple Scales Lindstedt Poincare Yöntemi
n	Mod sayısı
T	Kinetik enerji
T_0	Hızlı zaman ölçeği
T_1, T_2	Yavaş zaman ölçekleri
V	Potansiyel enerji
Y_1	Şekil fonksiyonu
Ω	Zorlama kuvvetinin frekansı
β, γ	Fazlar
ε	Küçük boyutsuz parametre (perturbasyon parametresi)
μ	Sönüm katsayısı
σ	Ayar parametresi
δ	Varyasyon
ω_0	Doğal frekans
ω	Dönüşüm frekansı
$*$	Boyutlu parametreler için gösterge

Şekil 4. 1. Lineer ve nonlinear yayların seri bağlanmasıyla oluşan m kütleli sistem	27
Şekil 4. 2. Lineer ve nonlinear yayların seri bağlanmasıyla oluşan m kütleli sistemin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\lambda = 0.5$	39
Şekil 4. 3. Lineer ve nonlinear yayların seri bağlanmasıyla oluşan m kütleli sistemin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\lambda = 5$	40
Şekil 4. 4. Lineer ve nonlinear yayların seri bağlanmasıyla oluşan m kütleli sistemin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\lambda = 25$	40
Şekil 4. 5. Gergin elastik bir telin merkezindeki kütle	41
Şekil 4. 6. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 1(a_0 = 1, \lambda = 0.5)$	51
Şekil 4. 7. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10(a_0 = 1, \lambda = 0.5)$	51
Şekil 4. 8. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100(a_0 = 1, \lambda = 0.5)$	52
Şekil 4. 9. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 1(a_0 = 1, \lambda = 0.75)$	52
Şekil 4. 10. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10(a_0 = 1, \lambda = 0.75)$	53
Şekil 4. 11. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100(a_0 = 1, \lambda = 0.75)$	53
Şekil 4. 12. Helmholtz-Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 0.1(\alpha = 0.5, a_0 = 1)$	62
Şekil 4. 13. Helmholtz-Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10(\alpha = 0.5, a_0 = 1)$	63
Şekil 4. 14. Helmholtz-Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100(\alpha = 0.5, a_0 = 1)$	63
Şekil 4. 15. Van Der Pol denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 0.1(a_0 = 1, \alpha = 1)$	72
Şekil 4. 16. Van Der Pol denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 1(a_0 = 1, \alpha = 1)$	72
Şekil 4. 17. Doğrusal olmayan elastik bir yatak üzerine basit-basit mesnetlenmiş bir Euler-Bernoulli kirişi	74
Şekil 4. 18. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ($\varepsilon = 1, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 10, f = 5, \mu = 0.2$)	89
Şekil 4. 19. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ($\varepsilon = 1, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 100, f = 5, \mu = 0.2$)	89

Şekil 4. 20. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ($\varepsilon=1, \alpha_1=10, \alpha_2=500, f=5, \mu=0.2$).....	90
Şekil 4. 21. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ($\varepsilon=1, \alpha_1=10, \alpha_2=10, f=20, \mu=0.2$).....	90



TEŞEKKÜR

Öncelikle benim bugünlere gelmemde maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, eğitim hayatım boyunca her daim yanımda olan annem Zekiye BOSTANCI ve babam Hasan Basri BOSTANCI'ya en içten duygularım ile sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ailemin diğer ferdi, benim diğer yarım değerli ikizim Büşra BOSTANCI'ya her zaman yanımda olup bana sevgi ve desteğini verdiği için sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. M. M. Fatih KARAHAN'ın yönlendirmeleri ile gerçekleşmiştir. Saygıdeğer Hocam'ın üzerimdeki emekleri büyüktür. Kendilerinin öğrencisi olmak, benim için her zaman gurur verici olmuştur ve olacaktır. Sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili hocam Sayın Doç. Dr. B. Burak ÖZHAN'a tez dönemim boyunca verdiği desteklerden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Adlarını yazamadığım bugüne kadar üzerimde emeği olan bütün öğretmenlerime, arkadaşlarıma ve yakınlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Beyza BOSTANCI
Manisa, 2017

ÖZET

Yüksek Lisans

Nonlinear Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü

Beyza BOSTANCI

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. M. M. Fatih KARAHAAN

Bu çalışmada kuvvetli nonlinear sistemler için de geçerli çözümler veren Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) yöntemi nonlinear dinamik problemlerine uygulanacaktır. Bu yeni yöntem Çok Zaman Ölçekli Yöntem ve Lindstedt Poincare tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanmaktadır.

Lindstedt Poincare tekniğinde bazı dönüşümler ve açılım tercihleri yapılarak kuvvetli nonlinear sistemlerde geçerli olan çözümler elde edilmiştir. Ancak Lindstedt Poincare tekniği sabit genlikli problemlerde işe yaramaktadır. Genliğin zamanla değiştiği problemlerde kuvvetli nonlinear sistemlere ait perturbasyon çözümleri elde edilememiştir. Bu yöntem ile çok zaman ölçekli yöntemde bazı iyileştirmeler yapılarak hem sabit genlik hem de değişken genlik durumlarında geçerli olabilecek fiziksel çözümler üretilmiştir.

MSLP yöntemi ilk olarak adi diferansiyel denklemlere daha sonra kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Aynı denklemlere çok zaman ölçekli yöntem uygulanmış ve bu çözüm yöntemleri sayısal çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma Wolfram Mathematica ve MATLAB paket programları kullanılarak yapılmıştır. Kuvvetli nonlinear sistemler için MSLP yönteminin sayısal çözümlerle uyum içinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: perturbasyon yöntemleri, kuvvetli nonlinear sistemler, multiple scales lindstedt poincare, çok zaman ölçekli yöntem, sayısal çözümler

2017, 110 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Analytical Solution Of Nonlinear Dynamic Problems

Beyza BOSTANCI

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mechanical Engineering**

Supervisor: Assist. Prof. M. M. Fatih KARAHAN

In this work, Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) method which is valid for strong nonlinear systems will be applied to nonlinear dynamic problems. The new method is a combination of Method of Multiple Scales and Lindstedt-Poincare Method.

In Lindstedt Poincare technique, some transformations and straightforward expansions are made and the solutions which are valid for strong nonlinear systems are obtained. However, the Lindstedt Poincare technique works for fixed-amplitude problems. The perturbation solutions of strong nonlinear systems for the systems that have variable amplitude are not obtained. By making some improvements with the MSLP method in multiple scales method, Physical solutions have been produced which can be applied both in constant amplitude and in variable amplitude conditions.

The MSLP method is first applied to ordinary differential equations and then to partial differential equations. Multiple time scale method has been applied to the same equations and the approximate solutions are compared with numerical solutions. This comparison is made using Wolfram Mathematica and MATLAB package programs. For strong nonlinear systems, the result that the MSLP method produced solutions with good agreement with the numerical solutions is achieved.

Keywords: Perturbation methods, strong nonlinear systems, multiple scales method, multiple scales lindstedt poincare, numerical solutions

2017, 110 pages

1. GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarının incelenmesi ilk olarak sistemin modellenmesi ile mümkündür. Modelleme, bir sistemin fiziksel özelliklerinin matematiksel olarak ifade edilmesidir. Sistemleri çözümleyebilmek için, bu matematiksel ifadeleri doğru olarak kurmak ve sistem ile ilgili bazı başlangıç ve sınır şartlarını kullanarak çözümü oluşturan fonksiyonları ortaya koymak gerekir. Formüle edilen bu matematiksel ifadelerde, birinci veya daha yüksek mertebeden türevler içeren terimler bulunabilir. Bu şekildeki matematiksel ifadeye diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemler, teorik ve pratik açıdan oldukça önemli olmakta ve mühendislik uygulamaları gibi birçok bilim dalında önemli bir yer tutmaktadır.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde diferansiyel denklemler ile ilgili bazı temel tanımlamalar yapılacaktır.

Tanım 1. Bir veya birden fazla bağımlı değişken, bir veya birden fazla bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bağıntıya diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denkleme örnek olarak Newton Kanunu verilebilir. Newton'un ikinci kanunu $Kuvvet = Kütle \times İvme$ olarak aşağıdaki gibi ifade edilir [1].

$$F(t) = ma(t) = m \frac{d^2u}{dt^2} \quad (1.1)$$

Burada $u(t)$, F kuvveti etkisindeki m kütleli parçacığın konumunu ifade eden fonksiyondur. Denklem (1.1)'de düzenleme yapılırsa

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F(t)}{m} \quad (1.2)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Tanım 2. Bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken ve yalnız bir bağımsız değişken içeren diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklem denir. Bu denklem

$$F(t, y, y', y'' \dots y^n) = 0 \quad (1.3)$$

olarak ifade edilir. Burada t bağımsız değişken, $F(t)$ fonksiyon ve $()'$ ifadesi ise bu fonksiyonun türevini ifade etmektedir.

Tanım 3. Diferansiyel denklemde, bir veya daha çok bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeren denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. y bağımlı değişken, x ve t bağımsız değişken olan kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki fonksiyon şeklinde tanımlanır [2].

$$F(x, t, y, y_x, y_t, y_{x,t}, y_{xx}, y_{tt}, \dots) = 0 \quad (1.4)$$

Tanım 4. Bir diferansiyel denklemin en yüksek mertebeli türevin mertebesi, o diferansiyel denklemin mertebesini belirler. Bir diferansiyel denklemin derecesi ise, denklemde bulunan türevin üssü olarak tanımlanmaktadır. Örnek vererek açıklamak gerekirse,

$$5y' - 3y'' + y = 0 \quad (1.5)$$

ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir,

$$5y - 7y' = 0 \quad (1.6)$$

birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

Tanım 5. Diferansiyel denklemler değişik şekilde sınıflandırılırlar. Bu sınıflandırılmalarından biri de denklemlerin lineer olup olmadıklarına göre yapılan sınıflandırılmalarıdır. Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve tüm türevleri birinci dereceden ise ve türevler veya bağımlı değişkenler çarpım halinde değilse, bu

denklem bir lineer (doğrusal) diferansiyel denklemdir. Lineer denklem daha geniş bir şekilde ifade edilirse

$$y^n + f_1(t)y^{n-1} + f_2(t)y^{n-2} + \dots + f_n(t)y = g(t) \quad (1.7)$$

formundadır. Bu yapıda olmayan denklemler yani bağımlı değişken y 'nin veya türevlerinin ikinci veya daha yüksek derecelerden kuvvetlerini içeriyorsa veya y ve y' 'nin türevlerinin çarpımını içeren terimler bulunduruyorsa ve denklemde trigonometrik ifadeler bulunmuyorsa bu denklem nonlinear bir denklemdir [3]. Dolayısı ile denklemde $y^3, yy', (y'')^2, \sin y, e^y$ gibi terimler bulunuyorsa bu denklemler lineer değildir.

Tanım 6. Denklem (1.7)'de $g(t)$ değeri sıfıra eşit ise lineer diferansiyel denklem homojendir. Fakat $g(t) \neq 0$ durumunda ise denklem homojen olmayan diferansiyel denklem olmaktadır.

1.2. Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

Önceki bölümde belirtildiği gibi, bir sistem diferansiyel denklemlerin kullanılması ile matematiksel olarak ifade edilebilir. Birçok fiziksel olayı ve mühendislik uygulamalarını içeren sistemler, nonlinear diferansiyel denklemler ile modellenmiştir. Sistemdeki temel bileşenlerin lineer veya nonlinear özelliğe sahip olması, denklemin çözümü için oldukça önem taşımaktadır. Nonlinear elemanlardan oluşan bir sistem, nonlinear fiziksel bir model oluşturur. Bu nedenle, nonlinear diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan yöntemler, problemlerin iyi analiz edilebilmesi için oldukça önem taşımaktadır. Nonlinear problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için çeşitli sayısal ve analitik yaklaşım yöntemleri geliştirilmiştir. Fakat sayısal yöntemler ile elde edilen çözümler, genel çözüm hakkında yeteri kadar bilgi vermediğinden dolayı analitik yöntemler ön plana çıkmıştır [4].

1.3. Analitik Yöntemler Hakkında Literatür Araştırması

Analitik çözüm yöntemlerinden en yaygın olarak uygulananlardan biri de perturbasyon yöntemleridir. Lineer ve nonlinear sistemlere de uygulanabilirliği açısından perturbasyon yöntemleri oldukça önem taşımaktadır. Perturbasyon yöntemleri kullanılarak, akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve mekanik titreşimler gibi birçok fiziksel probleme ait matematiksel modeller yaklaşık olarak çözülebilir [5,6,7]. Ancak, perturbasyon yöntemini kısıtlandıran bazı durumlar mevcuttur. Bu da perturbasyon yönteminde, küçük bir parametreye ihtiyaç duyulmasıdır. Bu parametre, denklemde genellikle nonlinear terimlerin başına gelmektedir ve bu da nonlinear terimin mertebe olarak düşmesine sebep olmaktadır. Böylelikle, bu parametrenin küçük değerleri için sistem zayıf nonlinear bir sistem oluşturmaktadır. Bu nedenle, zayıf nonlinear sistemler için yapılan çözümler geçerli olmaktadır. Bu parametrenin büyük olduğu değerlerde ise sistem kuvvetli nonlinear bir sistem olmaktadır. Ancak, kuvvetli nonlinear sistemler için perturbasyon yöntemleri uygun sonuçlar vermemektedir. Bu sistemler için uygun sonuçlar elde edebilmek adına Hu ve Xiong [8], Duffing denklemini ele alarak Lindstedt-Poincare yöntemini iki farklı şekilde ele alarak sonuçları karşılaştırmışlardır. Duffing denklemini ilk olarak klasik yöntem ile çözmüşlerdir. Perturbasyon açılımında değişiklikler yaparak dönüşüm frekansı yerine doğal frekansı seriye açmışlardır. Elde ettikleri çözümü, perturbasyon parametresinin büyük değerleri için sayısal çözüm ile karşılaştırmışlar ve sayısal çözüm ile uygun sonuçlar elde etmişlerdir. Bu çalışmaya benzer bir çalışma da Hu [9] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada ise kuvvetli nonlinearliğe sahip Duffing denklemi ele alınarak yaklaşık çözüm ve sayısal çözüm ile elde edilen frekans değerleri karşılaştırılmış ve uyumlu sonuçlar gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Perturbasyon parametresinden kaynaklanan bu kısıtlayıcı durumu giderebilmek adına yeni yöntemler geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları; parametrelerin açılımı yöntemi [10], lineerize edilmiş (doğrusallaştırılmış) perturbasyon yöntemi [11], düzeltilmiş (modifiye edilmiş) Lindstedt-Poincare yöntemi [9,12,13], homotopi perturbasyon yöntemi [14-18], perturbasyon iterasyon yöntemi [19,20] varyasyonel iterasyon yöntemi [4] ve bu çalışmada uygulanacak olan MSLP [21] yöntemidir. Bu analitik çözüm yöntemlerinin bazılarına, ilerideki bölümlerde bahsedilecektir.

1.4. Bu Çalışmada Uygulanacak Olan Çözüm Yöntemi ve Tezin Amacı

Geliştirilmiş analitik yöntemlerden biri de çok zaman ölçekli yöntem (MS) ile Lindstedt-Poincare yönteminin (LP) birleştirilmesi ile oluşturulan MSLP [21,22] yöntemidir. Bu yöntemde iki yöntemin eksiklikleri giderilerek özellikle kuvvetli nonlinear sistemler için geçerli çözümler sağlayan sonuçlara ulaşılmıştır.

Lindstedt-Poincare yönteminde zaman değişkenine bir dönüşüm yapılmakta ve perturbasyon açılımı zaman dönüşümüne de uygulanmaktadır. Bu sayede direkt açılımda patlamaya neden olan seküler terimler ayıklanarak tam çözüme yakın çözümler elde edilmektedir. Fakat bu yöntem, sabit genliğe sahip olan problemlerin çözümünde işe yaramaktadır. Değişken genliğe sahip olan problemlerin çözümü çok zaman ölçekli yöntem ile elde edilebilmektedir. Ancak çok zaman ölçekli yöntemde de kısıtlayıcı bazı durumlar bulunup, bu durumlarda sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlar göstermemektedir. Böylelikle, iki yöntemin avantajları bu yöntemlerin birleştirilmesi ile tek bir yöntemde (MSLP) toplanmaktadır.

Çok zaman ölçekli yöntem uygulanarak elde edilen yaklaşık çözüm ile sayısal çözüm sadece perturbasyon parametresinin küçük değerleri için uyumlu sonuçlar göstermektedir. Bu durumun aksine MSLP yöntemi, perturbasyon parametresinin farklı değerleri için her zaman sayısal çözüm ile uygun sonuçlar vermekte olup, çok zaman ölçekli yöntemin aksine patlamaya yol açan durumlar gözlenmemektedir. Bu nedenle zayıf veya kuvvetli nonlinearliğe sahip olan problemlerin çözümünde MSLP yöntemi önem taşımaktadır.

Pakdemirli ve Karahan [23], kuvvetli nonlinear sistemler için geçerli çözüm veren MSLP yöntemini ikinci ve üçüncü dereceden (kuadratik-kübik) nonlinear denklemlere uygulamışlar ve sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlara ulaşmışlardır. Daha sonra Pakdemirli ve Karahan [24], yöntemi zorlamalı titreşim problemine uygulamışlar ve frekans tepki eğrilerini karşılaştırarak sayısal çözüm ile uygun sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu çalışmada ilk olarak, ele alınan sistemlerin çözümü ile ilgili matematiksel bazı tanımlamalara yer verilecektir. Daha sonra, bu sistemlerin yapmış oldukları

salınım hareketi inceleneceğinden dolayı titreşim ile ilgili temel bilgiler anlatılacaktır. Tezin üçüncü bölümünde bazı analitik çözüm yöntemlerine değinilecek ve özellikle perturbasyon yöntemleri ile ilgili bilgiler verilecektir. Dördüncü bölümde MSLP yöntemi ilk olarak adi diferansiyel denklemlere uygulanacaktır. Daha sonra kısmi diferansiyel denklemler üzerinde durulacaktır. Bu analitik çözüm yöntemleri olarak MSLP ve çok zaman ölçekli yöntemler kullanılacaktır. Her iki yöntemden de elde edilen çözümler sayısal sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma Wolfram Mathematica ve MATLAB paket programları kullanılarak yapılacaktır. Daha sonra kısmi diferansiyel denklem ile ilgili uygulama ele alınacaktır. Bu uygulama problemi aynı şekilde çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yöntemi ile çözülecektir. Her iki çözümden elde edilen frekans-tepki eğrileri sayısal sonuçlar ile karşılaştırılarak yorumlanacaktır.

2. TİTREŞİM

Bu bölümde, ilerideki bölümlerde çözümü yapılacak olan titreşim problemlerinin anlaşılabilirliği açısından titreşim ile ilgili bilgi verilecektir.

2.1. Titreşim Hareketi Hakkında

Mühendislik problemlerinde ele alınan en önemli konulardan biri de salınım yapan sistemlerdir. Titreşim, bir sistemin bir denge noktası etrafında yaptığı salınım hareketidir. Salınım hareketi belirli bir zaman aralığında kendini tekrar ediyor ise böyle hareketlere periyodik hareket denir.

Titreşim hareketi, kinetik ve potansiyel enerjinin birbirlerine dönüşümünü içermektedir. Bu sebeple titreşim oluşturan sistemlerde potansiyel enerji ve kinetik enerji depolayan elemanlara ihtiyaç duyulur. Sistemde kinetik enerji depolayan elemanlar kütle veya atalet elemanları, potansiyel enerji depolayan elemanlar ise yay veya elastikiyete sahip elemanlardır. Potansiyel enerji depolayan elastik elemanlar, depoladıkları enerjiyi atalet elemanına kinetik enerji olarak geri verir [25].

Titreşim hareketi yapan sistemlerin ilk hareketini vermek üzere bir zorlamaya ihtiyaç duyulur. Bu başlangıç zorlaması, sistemdeki kütleye uygulanan başlangıç deplasmanı ve/veya hızı şeklinde olabilir. Bu zorlama, sisteme kinetik ve/veya potansiyel enerji kazandırılmasına neden olur. Bu da sistemin salınım hareketi yapmasını sağlar. Sistemdeki potansiyel ve kinetik enerji toplamı sabit ise sistem korunumlu (konservatif) bir sistemdir. Bu sistemde, sistemdeki kütlenin yapmış olduğu deplasman sabittir. Fakat pratikte bu mümkün değildir. Sistemde bulunan sönüm elemanı veya sistemin ortamında bulunan sürtünme (örneğin hava direnci), sistemin enerjisini kaybetmesine sebep olur.

2.2. Titreşim Hareketinin Sınıflandırılması

Titreşim hareketi ile ilgili temel bazı sınıflandırmalar aşağıda yapılmıştır.

2.2 1. Serbest ve Zorlanmış Titreşimler

Sistem, başlangıçta verilen deplasman ile titreşirse yani sistem bir dış kuvvetin etkisi altında değilse bu sistem serbest titreşimli sistemdir. Fakat, sistem bir dış zorlama kuvveti ile titreşiyor ise bu sistem zorlanmış titreşimdir.

2.2.2. Lineer ve Nonlinear Titreşimler

Sistemi oluşturan temel elemanlar kütle, yay ve sönüm elemanları lineer özelliğe sahip ise sistem lineer titreşim sistemidir. Bu elemanlardan biri bile nonlinear bir yapıya sahip olursa sistem lineer olmaktan çıkmaktadır. Bu sistemler nonlinear titreşim sistemleridir. Sistemde nonlinearlık, geometrik, yapısal, kuvvetsel veya sürtünmeden kaynaklı olabilir [26].

2.2.3. Sönümlü ve Sönümsüz Titreşimler

Sistemde sürtünme veya benzeri dirençler nedeniyle herhangi bir enerji kaybı meydana gelmiyorsa bu sistem sönümsüz titreşim sistemleridir. Eğer sistemde sönüm elemanı bulunuyorsa sistem sönümlü titreşim sistemidir. Titreşim problemlerinde sönünüm etkisi oldukça önemlidir ve özellikle rezonans genliklerini sınırlamada sönüm elemanı önemli bir rol oynamaktadır.

2.3. Titreşim Hareketinin Modellenmesi

Titreşim yapan sistemlerin analizi için öncelikle sistemin yapısını matematiksel olarak yeterli derecede ifade edecek bir model oluşturulur. Birçok fiziksel ve mühendislik uygulamalarını oluşturan sistemler matematiksel olarak modellenebilir. Sistemdeki elemanların lineer ve nonlinear özellik taşıması, denklemin çözülebilirliği açısından oldukça önemlidir. Ancak, sistemlerin tabiata en yakın davranış biçimi genellikle nonlineerdir.

Titreşim hareketi temel olarak kütle-yay-sönüm elemanları kullanılarak modellenir. Bir sonraki bölümde, bu elemanlar hakkında kısaca bilgi verilecektir.

2.4. Titreşim Sistemini Oluşturan Temel Elemanlar

Bahsedildiği üzere titreşim yapan sistemler, kinetik ve potansiyel enerji depolayan elemanlardan oluşmaktadır.

a) Elastik Elemanlar (Yaylar)

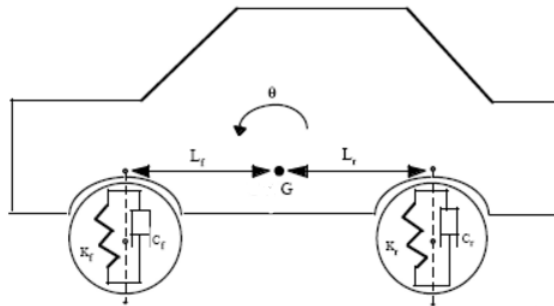
Titreşim sisteminde kütleleri birbirine bağlayarak kütlelerin hareketini sağlayan elemanlar yaylardır. Yaylar lineer ve nonlinear karakteristiğe sahip olabilirler. Lineer karakteristiğe sahip yaylar Hooke yasasına uygun davranırlar ve yayda oluşan elastik kuvvet yaydaki şekil değişimi ile orantılıdır. Fakat titreşim genliklerinin yüksek olduğu zaman ve/veya metal olmayan malzemeler kullanıldığında yaylar lineer davranışa sahip olmayabilirler [25].

b) Atalet Elemanları (Kütle)

Sistemde kinetik enerjiyi depolayan elemanlar atalet elemanlarıdır. Atalet elemanları öteleme ve dönme hareketlerini ayrı ayrı yapabilecekleri gibi, hem öteleme hem de dönme hareketini birlikte gerçekleştirilebilirler.

c) Sönüm Elemanları

Sistemdeki enerjinin azalmasını sağlayan eleman sönüm elemanlarıdır. Sönüm kuvveti, sistemdeki kütleyi denge noktasından uzaklaştırır. Amortisör tipi sönüm elemanları akışkan sürtünmesi ile enerji kaybını sağlarlar ve titreşim genliklerini eksponansiyel olarak azaltırlar. Sönüm elemanlarında mekanik enerji ısı enerjisine dönüşür [25,26]. Şekil 2.1’de bir arabanın en basit matematiksel modeli görülmektedir.



Şekil 2.1. Arabanın modellenmesi

3. PERTURBASYON YÖNTEMLERİ

Bu bölümde perturbasyon yönteminin tanımı yapılacak ve bazı analitik yaklaşım yöntemlerinden bahsedilecektir.

3.1. Perturbasyon Yöntemine Tarihsel Yaklaşım

Perturbasyon teorisi, tam çözümü yapılamayan bir problemin yaklaşık çözümünü elde etmek için kullanılan analitik yöntemler içeren teoridir. Perturbasyon yöntemleri yaklaşık bir asırdır fiziksel problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla kullanılmaktadır. Perturbasyon yöntemleri integraller, cebirsel denklemler ve diferansiyel denklemler gibi birçok denkleme uygulanmıştır [27,28].

3.2. Bazı Temel Perturbasyon Yöntemleri

Bu bölümde perturbasyon yöntemlerinden bazıları üzerinde durulacaktır.

3.2.1. Lindstedt-Poincare Yöntemi

Zaman içerisinde fiziksel olmayan büyümeleri engelleyebilmek için kullanılan bir tekniktir. Çözümün periyodik olduğu varsayılır. İlk olarak zaman değişkenine bir dönüşüm yapılır ve perturbasyon açılımı bu zaman dönüşümüne de uygulanır. Bu sayede direkt açılımda patlamaya neden olan seküler terimler elimine edilerek tam çözüme yakın çözüm elde edilir. Örnek olarak Duffing denklemi ele alınabilir.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (3.1)$$

Denkleme aşağıdaki şekilde

$$\tau = \omega t \quad (3.2)$$

zaman dönüşümü uygulanırsa

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Bağımlı değişken ve tabii frekans aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \dots \quad (3.4)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (3.5)$$

Denklemler (3.4) ve (3.5), denklem (3.3)'de yerine konulur ve mertebe ayrıştırması yapılır.

$$O(1): \omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$O(\varepsilon): \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = -2\omega_0^2 \omega_1 x_0'' - x_0^3 \quad (3.7)$$

Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$x_0 = a \cos(\tau + \beta) \quad (3.8)$$

Bu denklem, denklem (3.7)'de yerine konur ise

$$x_1'' + x_1 = \left(2a\omega_0\omega_1 - \frac{3}{4}a^3 \right) \cos(\tau + \beta) - \frac{1}{4}a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \quad (3.9)$$

elde edilir. Denklemden patlamaya yol açan seküler terimler elimine edilerek sıfıra eşitlenir. Böylece denklem (3.9)'dan

$$2a\omega_0\omega_1 - \frac{3}{4}a^3 = 0 \quad (3.10)$$

seçilir.

$$\omega_1 = \frac{3}{8\omega_0} a^2 \quad (3.11)$$

elde edilir. ε mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x_1 = \frac{1}{32} a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \quad (3.12)$$

Yaklaşık çözüm

$$x = a \cos(\tau + \beta) + \frac{\varepsilon}{32} a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. Frekans denklemi ise aşağıdaki gibidir.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{3}{8\omega_0} a^2 \quad (3.14)$$

Denklem (3.13) orijinal zaman değişkenine göre yazılırsa çözüm

$$x = a \cos\left(\left(1 + \frac{3\varepsilon}{8} a^2\right)t + \beta\right) + \frac{\varepsilon}{32} a^3 \cos(3t + 3\beta) \quad (3.15)$$

elde edilir.

3.2.2. Renormalizasyon Yöntemi

Bu yöntemde ilk olarak denkleme yaya açılımı uygulanır ve seküler terimler belirlenir. Daha sonra Lindstedt Poincare yöntemindeki gibi zaman dönüşümü yapılarak seküler terimler yok edilir. Lindstedt Poincare yönteminden tek farkı zaman dönüşümünün başta değil sonda uygulanmasıdır.

3.2.3. Ortalama Yöntemi

Ortalama yöntemi Van Der Pol denkleminin düzenlenmesiyle oluşturulan yeni bir yöntemdir. Uygulama olarak Duffing denklemi üzerinden örnek verilecek olursa

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (3.16)$$

diferansiyel denkleminde

$$\varepsilon = 0 \quad (3.17)$$

ise denklemin çözümü

$$u(t) = a \cos(t + \beta) \quad (3.18)$$

yapısındadır. Burada $a = a(t)$ ve $\beta = \beta(t)$ kabulü yapılır ve çözüm fonksiyonu bunlara göre türevlenerek denkleme yerleştirilir. Bu işlem sonrasında $a(t)$ ve $\beta(t)$ fonksiyonları veya türevleri için iki eşitlik elde edilir. Böylece baştaki bir adet nonlinear denklemden, iki adet denklem içeren bir nonlinear denklem sistemi oluşur. $a(t)$ ve $\beta(t)$ fonksiyonları $u(t)$ fonksiyonuna göre daha yavaş değişim gösterdiğinden dolayı bu yöntem analitik ve sayısal anlamda birçok avantaj sağlar. Fonksiyonların veya türevlerin belirli bir periyot üzerinden ortalaması alınır ve yavaş değişen fonksiyon ve türevlerinin sabit davranış gösterdikleri kabul edilir. Böylece çözüm fonksiyonu $u(t)$ yazılır [21].

3.2.4. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (Multiple Scales)

Bu yöntemde değişken genlikli problemler de çözülebilir. Bu yönü ile Lindstedt Poincare ve Renormalizasyon yöntemine göre avantajlıdır. Bu yöntemle elde edilen çözüm yapısı aşağıdaki gibidir.

$$u(t; \varepsilon) = u(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t; \varepsilon) \quad (3.19)$$

Zaman ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (3.20)$$

Burada T_0 hızlı zaman ölçeği, T_1 yavaş zaman ölçeği, T_2 ise daha yavaş zaman ölçeğidir. Zaman değişkeninin önüne gelen küçük perturbasyon parametresinin

kuvvetleri zamanı ölçeklendirmektedir. Denklemden bağımsız değişkene göre alınan türev ölçeklendirmesi

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (3.21)$$

olarak tanımlanır. Burada aşağıdaki tanımlama yapılır.

$$D_n \equiv \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (3.22)$$

Böylece türevler

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

olarak elde edilir.

3.2.5. Gergin Parametreler Yöntemi

Gergin parametreler yöntemi ε parametresinin küçük olduğu durumda geçiş eğrilerinin belirlenmesi için oldukça uygun bir yöntemdir. Dolayısıyla bu yöntem, bir geçiş eğrisinin küçük bir civarında geçerli bir çözüm üretmemekte olup, daha ziyade bir geçiş eğrisi üzerinde geçerli bir çözüm üretmektedir [29, 6].

Bu yöntem aşağıdaki gibi denklemlerin perturbatif çözümlerinde seküler terimlerin ortaya çıkmasını önlemek amacıyla geliştirilmiştir.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.24)$$

Bu durumda seküler terimler sonsuz alanlarla ilgili düzensizlikleri ifade etmektedir. Bu yöntemde, nonlinear sistemin frekansı değiştirilerek yeni bir bağımsız değişken $\tau = \omega t$ olarak tanımlanır ve u ile ω seriye açılır.

$$\begin{aligned} u &\cong u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots, \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hill yönteminin [30] genelleştirilmesinde, sadece bağımlı değişken değil aynı zamanda ε 'nın kuvvetlerindeki bağımsız değişken t ve yeni bağımsız değişken s de genişletilir.

$$\begin{aligned} u &\cong \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^m u_m(s) + O(\varepsilon^N), \\ t &= s + \sum_{m=1}^N \varepsilon^m u_m(s) + O(\varepsilon^{N+1}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

İkinci genişlemede, t 'den s 'ye yakın bir benzer dönüşüm görülür. ε fonksiyonları, u 'nun geçerli olduğu bir açılım belirler [31].

3.2.6. Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky Yöntemi

Bu yöntem Krylov ve Bogoliubov [32] tarafından 1937 yılında geliştirilmiştir. Yöntemin en büyük avantajı, yalnızca kararlı durum periyodik hareketlerinin belirlenmesini sağlamakla kalmaz aynı zamanda periyodik bir çözüme hareketin geçiş davranışını belirlemesine olanak tanır.

3.3. Son Zamanlarda Geliştirilen Perturbasyon Yöntemleri

Perturbasyon yöntemleri, ε olarak tanımlanan küçük perturbasyon parametresi içerir. Bu parametrelerin varlığı bu yöntemin en önemli kısıtlayıcısı olmaktadır. Çünkü her nonlinear problem bu tür parametreler içermek zorunda değildir. Ayrıca bu yöntemlerde eğer nonlinearlik kuvvetli ise analitik yaklaşım bozulabilir [17]. Bu nedenle perturbasyon yöntemleri sadece zayıf nonlinearlik durumunda uygun sonuçlar gösterir.

Bu kısıtlayıcı etkiyi ortadan kaldırmak adına iyileştirmeler yapılarak yeni perturbasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazılarını aşağıdaki bölümlerde değinilecektir.

3.3.1. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

MSLP yöntemi hakkında önceki bölümlerde bilgi verilmiş idi. Tekrar kısaca bahsedilecek olursa MSLP yöntemi, çok zaman ölçekli yöntem ve Lindstedt Poincare tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanmaktadır. Bu sayede iki yöntemin zayıflıkları giderilerek önemli ölçüde avantaj sağlayan bir yöntem geliştirilmiş olmaktadır.

Bir sonraki bölümde MSLP yönteminin uygulama basamakları detaylı bir şekilde anlatılacaktır. Ayrıca MSLP yönteminin birçok fiziksel probleme uygulaması yapılacaktır.

3.3.2. Doğrusallaştırılmış (lineerleştirilmiş) Perturbasyon Yöntemi

Lineerize edilmiş perturbasyon yöntemi ε parametresinin her değeri için uygulanabilir. Örnek olarak aşağıda verilen nonlinear bir denklem ve başlangıç şartlarını ele alalım.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = \varepsilon N(u), \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (3.27)$$

Burada N nonlinear bir operatördür. Perturbasyon parametresi $\varepsilon = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u &= 0, \\ u(0) &= A, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilir. Çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_0 = A \cos \omega t \quad (3.29)$$

Perturbasyon yöntemindeki açılım aynı şekilde yapılır.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.30)$$

Denklem (3.27)'nin yaklaşık çözümü $0 \leq \varepsilon \ll 1$ değerleri için denklem (3.29)'daki gibi olduğu düşünülebilir. Bu nedenle perturbasyon çözümleri küçük ε değerleri için geçerlidir. Bu sınırlamayı ortadan kaldırmak adına $\varepsilon N(u)$ nonlineer terimi yaklaşık lineer bir terim yapılmaya çalışılır.

$$\varepsilon N(u) \sim \alpha u \quad (3.31)$$

Burada α , denklem (3.31)'in indirgenmesi ile tanımlanan bir sabittir.

$$\int_0^{2\pi} (\varepsilon N(u) - \alpha u)^2 dt \quad (3.32)$$

Denklem (3.31)'e göre aşağıdaki lineerleştirilmiş denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} u'' + \beta^2 u &= 0, \\ u(0) &= A, \quad u'(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Burada

$$\beta^2 = \omega^2 + \alpha \quad (3.34)$$

tanımı yapılmıştır. Lineerleştirilmiş denklem (3.33)'ün çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_0 = A \cos \beta t \quad (3.35)$$

Bu lineerleştirilmiş çözüm, küçük parametreye ihtiyaç duyulmadan elde edilir. Bu nedenle perturbasyon açılımları ε parametresinin büyük değerleri için de geçerli olur. Denklem (3.33)'den yararlanarak orijinal denklem (3.27) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \beta^2 u - \varepsilon [N(u) + \eta u] = 0 \quad (3.36)$$

Burada

$$\beta^2 - \varepsilon \eta = \omega^2 \quad (3.37)$$

şeklinde tanımlanır.

Denklem (3.36) lineerleştirilmiş perturbasyon denklemdir. ε parametresine göre açılım yapılır ise

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.38)$$

elde edilir. Bu denklem, perturbe olmayan denklem (3.28)'in çözümü u_0 iken, denklem (3.30) ile aynı yapıdadır. Fakat burada lineerize edilmiş denklem (3.33)'ün çözümü u_0 'dır. Ayrıca, perturbasyon çözüm değil lineerleştirilmiş çözüm düzeltildiğinden, perturbasyon çözümünün, geleneksel perturbasyon yöntemlerinde olduğu gibi, ε parametresinin değerlerine güçlü bir şekilde bağımlılığı kalmamış olur. Denklem (3.38), denklem (3.36)'da yerine konur ve ε parametresinin katsayıları eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$u_0'' + \beta^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.39)$$

$$u_1'' + \beta^2 u_1 + N(u_0) + \eta u_0 = 0 \quad u_1(0) = A, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.40)$$

Yukarıdaki lineer sistemlerin çözümleri kolayca elde edilebilir ve N sabiti seküler terimler çıkarılarak tanımlanabilir [11].

3.3.3. Modifiye Edilmiş Lindstedt Poincare Yöntemi

Bu yöntemde nonlinear frekansın yerine, perturbasyon açılımı yapılan çözümde seküler terimlerin oluşmasını önlemek için ε parametresinin kuvvetlerinin içinde bulunduğu bir sabit seriye açılır. Böylelikle zayıf nonlinear sistemlerin çözümünün yapılabilmesinin yanı sıra kuvvetli nonlinear sistemlerin çözümü için de uygulanabilir [13].

3.3.4. Homotopi-Perturbasyon Yöntemi

He [33,34] bilinen perturbasyon yöntemlerinin aksine, küçük perturbasyon parametresine ihtiyaç duyulmayan bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopi kavramını ve perturbasyon yöntemini kullanarak oluşturulmuştur [4].

3.4. Perturbatif Olmayan Yöntemler

Önceki bölümlerde bahsedildiği gibi nonlinear problemleri analitik olarak çözmek için perturbasyon yöntemleri kullanır. Perturbasyon yöntemlerinin en önemli özelliği perturbasyon parametresi denilen küçük ya da büyük parametrelerin varlığıdır. Ancak, bilim ve mühendislikte birçok nonlinear problem perturbasyon parametresi denilen parametreler içermemektedir. Böylece, küçük parametrelere bağlı olmayan bazı perturbatif olmayan yöntemler geliştirilmiştir. Aşağıdaki bölümlerde perturbatif olmayan bazı yöntemlerden bahsedilecektir.

3.4.1. Adomian Ayrışım Yöntemi

Adomian ayrışım yöntemi [37,38] nonlinear problemler için etikili bir yarı analitik yöntemdir. Bu yöntemde bulunan çözümler seri formda olup, sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın sayısal sonuçlar bulunur. Bu yöntem, küçük ya da büyük parametreler içerseler de içermeseler de adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

3.4.2. Homotopi Analiz Yöntemi

Homotopi analiz yöntemi 1992 yılında Liao [39-41] tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntem, bilim ve mühendislikte birçok nonlinear problemi çözmek için başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bu yöntem Adomian ayrışım yöntemi gibi yarı analitik bir yöntemdir.

Homotopi analiz yöntemi ile sayısal sonuçlar birkaç iterasyon kullanılarak elde edilebilir. Ayrıca bu yöntem, herhangi varsayım ve sınırlama olmaksızın lineer ve nonlinear problemlere uygulanabilir. Homotopi analiz yönteminde yardımcı parametre h , yardımcı fonksiyon, başlangıç tahmini ve yardımcı lineer operatörü seçmek için büyük bir özgürlük vardır. Bu özgürlük homotopi analiz yönteminin geçerliliğinin ve esnekliğinin en önemli özelliği olarak rol oynar. Homotopi analiz yönteminin diğer yöntemlerden diğer bir farkı ise çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini kontrol etmek ve ayarlamak için uygun bir yol sağlamasıdır [42].

3.4.3. Geliştirilmiş Harmonik Denge Yöntemi (Improved Harmonic Balance Method)

Diğer harmonik denge yöntemlerinden farklı olarak, doğrulamayı iyileştirmek için tüm eski artık hatalar bu yaklaşıma dahil edilir. Harmonik denge denklemi her adımda iki kısma ayrılır. İlk bölüm, yaklaşım mertebesi ile aynı sayıda Fourier terimine sahiptir ve geri kalan diğer kısım ise sonraki iyileştirmede kullanılır. Düzeltmeler lineer adi diferansiyel denklem ile kontrol edilir böylece denklem harmonik denge yöntemi ile kolaylıkla çözülebilir. Guo ve ark., 2014 [43] çalışmasında harmonik denge yönteminin diferansiyel denklemlerde etkili sonuçlar verdiği sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca bu çalışmada, harmonik denge yönteminin sadece genlik tahmininde değil aynı zamanda gecikmeli diferansiyel denklem için bifürkasyonlu periyot çözümünün frekansında da uygulanabilir olduğu yorumuna ulaşmışlardır [43-46]. Ayrıca harmonik denge yönteminde küçük bir parametreye ihtiyaç duyulmaması da denklemlerin çözülebilirliği açısından oldukça önemlidir.

3.4.4. İterasyon Perturbasyon Yöntemleri

İterasyon, yaklaşık sayısal çözümlerden kesin matematiksel problemler elde etmek için kullanılan tekrarlama yöntemleridir. İterasyon matematikte, fonksiyon

yenileme işlemini ifade etmektedir. Örneğin, bir fonksiyonu yineleyerek uygulama, bir tekrardaki çıkışı sonrakinin girişi olarak kullanma gibi bir yinelenen fonksiyondur [47]. Çok sayıda iterasyon yöntemi vardır. Newton yöntemi tekrarlama yöntemine bir örnek olarak gösterilebilir. Yöntemde çözümler yerine konularak yeni tahmin değerleri bulunur. İşlemler birbirini takip eden yaklaşık değerler arasında mutlak fark çok küçük oluncaya kadar devam ettirilir.

Burada bazı iterasyon yöntemlerinden bahsedilecektir.

3.4.4.1. Varyasyonel-İterasyon Yöntemi

1978 yılında, Inokuti ve ark.,1978 [48], nonlinear denklemlerin çözüm yöntemleri için bir Lagrange çarpanı yöntemi önermişlerdir. Varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM), bu yöntemin He tarafından geliştirilmesiyle elde edilmiştir [4,49-54]. VIM yöntemi, tam çözümün ardışık yaklaşımlarına hızlı bir şekilde yakınsama yapmasını sağlar. Özellikle nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça etkilidir. Ayrıca, mevcut olan bazı yöntemlerin aksine nonlinear denklemlerin çözümü için özel bir dönüşüm yapılmasını gerektirmez [55]. Bu yöntemin temel yapısı aşağıdaki gibidir.

$$Lu(t) + Nu(t) = f(t) \quad (3.41)$$

Burada L lineer operatör, N nonlinear operatör ve $f(t)$ ise verilmiş olan sürekli bir fonksiyondur. Nonlinear denklem (3.41) için düzeltme fonksiyonu olarak adlandırılan aşağıdaki fonksiyon yazılır.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\delta) \{Lu_n(\delta) + N\tilde{u}_n(\delta) - f(\delta)\} d\delta \quad (3.42)$$

Burada, λ genel Lagrange çarpanı, n indisi n . derecedeki yaklaşım, $\tilde{u}_n$ ise kısıtlanmış varyasyondur. Denklem (3.42)'ye varyasyon uygulanacaktır. Bu durumda, $\delta\tilde{u}_n = 0$ olacaktır. Varyasyon uygulanmış denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\delta) \{Lu_n(\delta) + N\tilde{u}_n(\delta) - f(\delta)\} d\delta \quad (3.43)$$

Bu yöntemdeki en temel adım Lagrange çarpanını en doğru şekilde belirlemektir.

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\delta) \{Lu_n(\delta) + N\tilde{u}_n(\delta) - f(\delta)\} d\delta = 0 \quad (3.44)$$

Burada λ , Lagrange çarpanıdır. Başlangıç şartları sağlanacak şekilde u_0 başlangıç fonksiyonu seçilir ve bu değerler denklem (3.42)'deki iterasyon formülünde yerine yazılır ve n derece için yaklaşımlar bulunur. Sonuç olarak elde edilen çözüm $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ olur.

Lineer problemler için yapılan çözümlerde, Lagrange çarpanı tam olarak belirlendiğinden dolayı bir iterasyon ile çözüme gidilebilir [4,56].

3.4.4.2. Perturbasyon-İterasyon Yöntemi

Perturbasyon-iterasyon yöntemi Pakdemirli ve arkadaşları tarafından, seküler terimlerden kaynaklanan sorunları ortadan kaldırmak amacıyla geliştirilmiştir. Taylor serisi açılımında rastgele sayıda terim ve perturbasyon açılımı PIA(n,m)'da bir düzeltme terimi kullanılarak geliştirilmiştir. Yani, ilk sayı perturbasyon açılımında düzeltme terimlerini, ikinci sayı ise Taylor açılımında türev mertebelerini ifade eder[19,57,58,]. Pakdemirli ve ark., 2012 [20], nonlinear ısı problemlerine perturbasyon-iterasyon yöntemini uygulayarak elde edilen sonuçları nümerik sonuçlar ile karşılaştırılmışlardır ve varyasyon iterasyon yönteminden daha iyi sonuçlar gösterdiği sonucuna ulaşmışlardır.

4. MULTIPLE SCALES LINDSTEDT POINCARÉ (MSLP) YÖNTEMİNİN FİZİKSEL PROBLEMLERE UYGULANMASI

MSLP yöntemi hakkında önceki bölümlerde bilgi verilmiş idi. Bu bölümde ilk olarak MSLP yönteminin uygulama basamakları anlatılacaktır. Daha sonra farklı fiziksel problemlerin matematiksel modellerinin çözümleri MSLP yöntemi ve çok zaman ölçekli yöntem (MS) ile elde edilecektir. Elde edilen yaklaşık çözümler, sayısal çözümler ile karşılaştırılacaktır. Karşılaştırma, analitik çözüm yöntemleri ile sayısal çözümlerin genlik-zaman grafikleri çizdirilerek yapılacaktır. Bu karşılaştırmada Wolfram Mathematica programı kullanılacaktır.

MSLP yöntemini anlatmak amacı ile aşağıdaki gibi bir nonlinear denklem ele alınır[21].

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon f(u) = 0 \quad (4.1)$$

Burada ε terimi perturbasyon parametresidir. Denkleminde bulunan u bağımlı değişken, $f(u)$ nonlinear terimler içeren bir fonksiyon ve ω_0 ise sistemin doğal frekansıdır. Yöntemin uygulama adımları aşağıdaki gibidir.

1) Lindstedt Poincaré tekniğinde olduğu gibi zaman dönüşümü yapılır.

$$\tau = \omega t \quad (4.2)$$

Zaman dönüşümü denklem (4.1)'e uygulanır.

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + \varepsilon f(u) = 0 \quad (4.3)$$

Burada

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = u'' \quad (4.4)$$

şeklindedir.

2) Zaman ölçeklendirmesi yapılır.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.5)$$

Burada T_0 hızlı zaman ölçeği, T_1 ve T_2 ise yavaş zaman ölçekleridir.

3) Çok zaman ölçekli yöntemdeki gibi yeni zaman değişkenine bağlı türevler aşağıdaki gibi

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (4.6)$$

olarak türevlenir.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.7)$$

Bağımlı değişkenin aşağıdaki şekilde bir seri açılımı yapılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.8)$$

4) Lindstedt-Poincare tekniğindeki gibi ω^2 parametresi seriye açılır.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (4.9)$$

5) Aynı şekilde Lindstedt-Poincare tekniğinde olduğu gibi, denklem (4.9)'dan ω_0^2 çekilir.

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (4.10)$$

6) Denklemler (4.7), (4.8) ve (4.9), denklem (4.3)'de yerine yazılır ise aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} & \omega^2 (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2)) (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) \\ & + (\omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2) (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \varepsilon f(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

7) Denklem (4.11)'de merteye ayrıştırması yapılırsa

$$O(1): \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (4.12)$$

$$O(\varepsilon): \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - f(u_0) \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = & -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 \\ & + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - f'(u_0) u_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. Birinci merteye çözümü aşağıdaki gibi önerilir.

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + k.e. \quad (4.15)$$

Burada ke kısaltması kompleks eşlenikleri belirtir.

8) İkinci ve üçüncü mertebelerde çözüme gidebilmek için, seküler terimleri ortadan kaldırmak adına bazı seçimler yapılması gerekir. İkinci mertebede meydana gelen seküler terimde ilk olarak $D_1 A = 0$ seçimi yapılır. Bu durum için ω_1 'in sanal bir değer olup olmadığına bakılır. Eğer, ω_1 değeri sanal değil ise bu seçim uygun olur. Ancak, ω_1 değeri sanal bir değer ise $\omega_1 = 0$ seçilerek seküler terimler elimine edilir. Çünkü, ω_1 değerinin sanal olması çözümde fiziksel olmayan durumlar meydana getirecektir [6, 7]. Bu durum için $D_1 A \neq 0$ olarak alınacaktır. Aynı şekilde üçüncü mertebe için de bu adımlar uygulanır. Öncelikle $D_2 A = 0$ seçilir ve bu seçim için ω_2 değerinin sanal olup olmadığı kontrol edilir. ω_2 değeri sanal değil ise bu seçim uygun olur. ω_2 değeri sanal ise $\omega_2 = 0$ seçilir ve seküler terimler elimine edilir.

4.1. Lineer ve Nonlinear Yaylara Bağlı Bir Kütlenin Salınım Hareketi

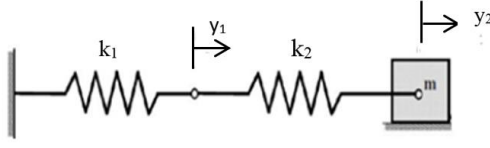
Titreşim hareketi kütle-yay-sönüm elemanları kullanılarak modellenmektedir. İncelenen sistem, sürtünmesiz temas yüzeyi üzerinde lineer ve nonlinear yaylara seri şekilde bağlı olan konsantre bir kütleden oluşmaktadır. Birçok uygulamada sistemler, yaylar veya elastikiyete sahip elemanların kullanılmasıyla oluşmaktadır. Yaylar titreşim sistemlerindeki kütleleri birbirine bağlayan ve kütlelerin bağlı hareketlerini sağlayan elemanlardır. Yaylar lineer ve nonlinear karakteristiğe sahip olabilirler. Nonlinear elemanlardan oluşan bir sistem, nonlinear fiziksel bir model oluşturur.

Lineer ve nonlinear yaylardan oluşan bu sistem üzerine literatürde çalışmalar mevcuttur. Lai ve Lim [59], incelenen sistemin hareket denklemini lineerize etmişler ve Lindstedt-Poincare yöntemi ve Harmonik Balans yöntemi ile analitik çözümler elde etmişlerdir. Elde edilen analitik çözümler nümerik çözümler ile karşılaştırılmıştır. Benzer bir çalışma da, Telli ve Kopmaz [60] tarafından yapılmıştır. Sistemin hareket denklemini elde ederek Lindstedt-Poincare yöntemi ve Harmonik Denge yöntemi ile elde ettikleri çözümleri genlik-zaman grafikleri kullanarak nümerik çözüm ile karşılaştırmışlardır. Asghari ve ark. [61], denklemin analitik çözümünü Homotopi Analiz Metodu (HAM) ile yapmışlardır. Diğer analitik yöntemlerden farklı olarak, Homotopi Analiz Metodu (HAM) ile yapılan çözümün yakınsama bölgesinin ayarlanabilir ve kontrol edilebilir olduğunu belirterek çözümlerin sayısal sonuçlar ile uyumlu olduğu sonucuna varmışlardır. Bayat ve ark., 2011 [62], He'nin varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak sistemin çözümünü elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, sistemin hareket denklemi Lagrange yöntemi ile çıkarılacaktır. Elde edilen denklem, çok zaman ölçekli yöntem ve kısmen yeni yöntem olan Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) ile çözümlü sayısal çözüm ile karşılaştırılacaktır.

4.1.1. Sistemin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

Şekil 4.1'de lineer ve nonlinear yayların seri bağlanması ile elde edilen m kütleline sahip sistem görülmektedir.



Şekil 4. 1. Lineer ve nonlinear yayların seri bağlanmasıyla oluşan m kütleyle sahip sistem

Lineer yayın yay katsayısı k_1 , nonlinear yayın yay katsayısı ise k_2 ile ifade edilmektedir. k_2 yay sabitine sahip olan nonlinear yay, kübik nonlineariteye sahip terimler içermektedir. Nonlinear yay kuvveti aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$F_2 = k_2 x = k_3 x + \lambda x^3 \quad (4.16)$$

Burada λ , k_2 yay sabitine sahip yay kuvvetinin doğrusal olmayan bölümünün katsayısı, k_3 ise yayın doğrusallığa sahip bölümünün katsayısıdır.

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{k_3} \quad (4.17)$$

tanımlaması yapılır ve denklem tekrar düzenlenir ise

$$F_2 = k_2 x = k_3 x + \varepsilon k_3 x^3 \quad (4.18)$$

elde edilir. Denklemdaki ε parametresi, sistemde bir perturbasyon parametresi gibi davranır ve kübik nonlinearite terimini etkiler. Kübik nonlinearite, sertleştirici/yumuşatıcı davranış üzerinde etkilidir. $\varepsilon > 0$ olduğu durumda denklemden sertleştirici, $\varepsilon < 0$ durumunda ise yumuşatıcı hareket meydana gelir.

Şekil 4.1’de, yay ve kütlenin bağlantı noktaları arasındaki deplasmanlar y_1 ve y_2 olarak tanımlanır. Sistemde k_1 yay sabitine sahip olan yayın deplasmanı y_1 , k_2 yay sabitine sahip olan yayın deplasmanı $(y_2 - y_1)$ ’dir. Bu durumda, m kütlesinin

deplasmanı $y_1 + (y_2 - y_1) = y_2$ olacaktır. Tek serbestlik derecesine sahip olan nonlinear sistemin hareket denklemi Lagrange yöntemi ile elde edilecektir. İlk olarak sistemin potansiyel ve kinetik enerjileri yazılır.

$$V = \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (y_2 - y_1)^2 \quad (4.19)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \quad (4.20)$$

Burada T kinetik enerjiyi, V ise potansiyel enerjiyi temsil eder.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2 \quad (4.21)$$

Burada q_i sistemin i . genel koordinatını, Q_i ise bu koordinata etki eden kuvvetlerin toplamını ifade eder. İncelenek olan sistem, korunumlu bir sistem olduğu için denklem (4.21) sıfıra eşit olmalıdır [63].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \quad (4.22)$$

Sistemin Lagrange denklemi, kinetik enerji ile potansiyel enerji farkına eşittir.

$$L = T - V \quad (4.23)$$

Bu ifade, denklem (4.22)'de yerine yazılarak

$$k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) = 0 \quad (4.24)$$

$$m\ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) = 0 \quad (4.25)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (4.24) düzenlenir ise y_1 ile y_2 arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$y_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} y_2 \quad (4.26)$$

Denklem (4.26), denklem (4.25)'de yerine yazılırsa

$$m\ddot{y}_2 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y_2 = 0 \quad (4.27)$$

elde edilir. $(\dot{})$ gösterimi, zamana göre türevi ifade eder. Denklem (4.27) tekrar yazılırsa

$$m\ddot{y}_2 + k_{eq} y_2 = 0 \quad (4.28)$$

denklemini elde edilir ve yayların eşdeğer yay sabiti $k_{eq} = \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right)$ olarak hesaplanır.

Denklem (4.28), sistemdeki m kütesinin hareket denklemidir. Denklem (4.18)'deki nonlinear yay kuvveti, denklem (4.24) ve (4.25)'de yerine yazılır ise

$$k_1 y_1 - k_3 (y_2 - y_1) - \varepsilon k_3 (y_2 - y_1)^3 = 0 \quad (4.29)$$

$$m\ddot{y}_2 + k_3 (y_2 - y_1) + \varepsilon k_3 (y_2 - y_1)^3 = 0 \quad (4.30)$$

denklemleri elde edilir. Denklemde yeni değişken tanımlamaları yapılır.

$$y_1 = v, \quad y_2 - y_1 = u \quad (4.31)$$

Yeni değişkenler, denklem (4.29) ve (4.30)'da yerine yazılırsa

$$k_1 v - k_3 u - \varepsilon k_3 u^3 = 0 \quad (4.32)$$

$$m(\ddot{u} + \ddot{v}) + k_3 u + \varepsilon k_3 u^3 = 0 \quad (4.33)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (4.32)'den

$$v = \xi u + \xi \varepsilon u^3 \quad (4.34)$$

elde edilir. Burada

$$\xi = \frac{k_3}{k_1} \quad (4.35)$$

tanımlaması yapılır. Denklem (4.34), zamana göre iki kez türevlenerek denklem (4.33) 'de yerine yazılır ve aşağıdaki

$$m\ddot{u}(1 + \xi + 3\varepsilon\xi u^2) + 6\varepsilon\xi m u \dot{u}^2 + k_3 u + \varepsilon k_3 u^3 = 0 \quad (4.36)$$

denklem elde edilir ve sadelik açısından yeni terimler tanımlanarak denklem tekrar yazılırsa

$$\ddot{u}(1 + 3\varepsilon\alpha u^2) + 6\varepsilon\alpha u \dot{u}^2 + \omega_0^2 u + \varepsilon\omega_0^2 u^3 = 0 \quad (4.37)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\alpha = \frac{\xi}{\xi + 1}, \quad \omega_0^2 = \frac{k_3}{m(1 + \xi)} \quad (4.38)$$

şeklindedir ve ω_0 terimi sistemin doğal frekansıdır. Sistem başlangıçta durağan ve a_0 konumunda olduğundan başlangıç koşulları aşağıdaki gibi alınır.

$$u(0) = a_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0 \quad (4.39)$$

4.1.2. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS)

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.40)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.41)$$

Bağımlı değişken aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.42)$$

Denklem (4.42), denklem (4.37)'ye yerleştirilir ve mertebe ayırıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da mertebe ayırıştırmasına tabi tutulur.

$$O(1): D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (4.43)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 3\alpha u_0^2 D_0^2 u_0 - 6\alpha u_0 (D_0 u_0)^2 - \omega_0^2 u_0^3$$

$$u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0 \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2): D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = & -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 \\ & - 3\alpha [2u_0 u_1 D_0^2 u_0 + u_0^2 (D_0^2 u_1 + 2D_0 D_1 u_0)] \\ & - 6\alpha [u_1 (D_0 u_0)^2 + 2u_0 D_0 u_0 (D_0 u_1 + D_1 u_0)] - 3\omega_0^2 u_0^2 u_1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + k.e. \quad (4.46)$$

şeklinde yazılır. Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.47)$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm aşağıdaki şekilde

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos(\omega_0 T_0 + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.48)$$

elde edilir. Denkleme başlangıç şartları uygulanır.

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.49)$$

Denklem (4.46), denklem (4.44)'e yerleştirilerek seküler terimleri yok edecek denklem yazılır.

$$-2i\omega_0 D_1 A + \omega_0^2 (3\alpha - 3) A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.50)$$

Kompleks genlik, denklem (4.50)' de yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a(T_2), \quad \beta = -\frac{(3\alpha - 3)}{8} \omega_0 a^2 T_1 + \beta(T_2), \quad (4.51)$$

ε mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = B e^{i\omega_0 T_0} + \frac{(1 - 9\alpha)}{8} A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + k.e. \quad (4.52)$$

Burada

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\gamma} \quad (4.53)$$

alınarak denklem (4.52)'de yerine konulduğunda gerçek genlik ve faz için u_1 çözümü

$$u_1 = b \cos(\omega_0 T_0 + \gamma) + \frac{(1-9\alpha)}{32} a^3 \cos(3\omega_0 T_0 + 3\beta) \quad (4.54)$$

elde edilir. Denkleme başlangıç şartları uygulanır.

$$b(0) = -\frac{(1-9\alpha)}{32} a_0^3, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.55)$$

Son mertebe için denklemler (4.52) ve (4.48), denklem (4.45)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$\begin{aligned} & -2i\omega_0 D_1 B - D_1^2 A - 2i\omega_0 D_2 A + A\bar{A}B(12\alpha\omega_0^2 - 6\omega_0^2) + \frac{3(1-9\alpha)}{8} \omega_0^2 \bar{A}^2 A^3 (\alpha-1) \\ & + A^2 \bar{B}(-3\alpha\omega_0^2 - 3\omega_0^2) - 6\alpha i\omega_0 A^2 D_1 \bar{A} - 12\alpha i\omega_0 A \bar{A} D_1 A = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

elde edilir. Denklemler (4.47), (4.51), (4.53) ve (4.55), denklem (4.56)'da yerine konularak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{(1-9\alpha)}{32} a_0^3, \quad \beta = \gamma = -\frac{(3\alpha-3)}{8} \omega_0 a^2 T_1 - \frac{(3\alpha-3)}{256} \omega_0 a_0^4 T_2 \quad (4.57)$$

Nihai sonuç aşağıdaki gibidir.

$$u = a_0 \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{\varepsilon(1-9\alpha)}{32} a_0^3 [\cos(3\omega_0 t + 3\beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)] + O(\varepsilon^2) \quad (4.58)$$

Genlikler ve faz orijinal değişkenlere göre yazılır.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{(1-9\alpha)}{32} a_0^3, \quad \beta = \gamma = -\varepsilon \frac{(3\alpha-3)}{8} \omega_0 a^2 t - \varepsilon^2 \frac{(3\alpha-3)}{256} \omega_0 a_0^4 t \quad (4.59)$$

Perturbasyon yakınsama kriterine göre düzeltme terimleri, başlangıç terimlerinden daima çok küçük olmalıdır. Geçerli çözümler için yakınsama kriteri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\varepsilon(1-9\alpha)}{32}a_0^2 \ll 1 \quad (4.60)$$

4.1.3. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.37)'ye, Lindstedt Poincare tekniğinde olduğu gibi $\tau = \omega t$ zaman dönüşümü uygulanır.

$$(1 + 3\varepsilon\alpha u^2)\omega^2 u'' + 6\varepsilon\alpha\omega^2 uu'^2 + \omega_0^2(u + \varepsilon u^3) = 0 \quad (4.61)$$

Buradaki türev içeren ifadeler, yeni zaman değişkenine göre türevlenir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden yazılırsa

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon\tau = \varepsilon\omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2\tau = \varepsilon^2\omega t \quad (4.62)$$

elde edilir. Yeni zaman türevleri aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.63)$$

Bağımlı değişken ve tabii frekans seriye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.64)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2 \dots \quad (4.65)$$

Bu seri açılımlar denklem (4.61)'e yerleştirilir. Denkleme ve başlangıç şartlarına mertebe ayırtması uygulanırsa

$$\begin{aligned} O(1): \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 &= 0 \\ u_0(0) &= a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon): \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 &= -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - 3\omega^2 \alpha u_0^2 D_0^2 u_0 \\
&- 6\omega^2 \alpha u_0 (D_0 u_0)^2 - \omega_0^2 u_0^3 \\
u_1(0) &= 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 &= -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2)(u_0) + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 \\
&- 3\omega^2 \alpha \left[u_0^2 (D_0^2 u_1 + 2D_0 D_1 u_0) + 2u_0 u_1 D_0^2 u_0 \right] \\
&- 6\omega^2 \alpha \left[u_1 (D_0 u_0)^2 + 2u_0 D_0 u_0 (D_0 u_1 + D_1 u_0) \right] - 3\omega_0^2 u_0^2 u_1
\end{aligned} \tag{4.68}$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + ke \tag{4.69}$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2)) \tag{4.70}$$

şeklinde. Denkleme başlangıç şartları uygulanır.

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \tag{4.71}$$

Birinci mertebe çözüm, denklem (4.67)'ye yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 A + A\omega_1 + 3\omega^2 \alpha A^2 \bar{A} - 3\omega_0^2 A^2 \bar{A} = 0 \tag{4.72}$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede,

$$D_1 A = 0 \tag{4.73}$$

seçildiğinde ω_1 kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur. Bu durumda

$a = a(T_2)$, $\beta = \beta(T_2)$ olacaktır. ω_1 ise

$$\omega_1 = 3A\bar{A}(\omega_0^2 - \alpha\omega^2) = \frac{3}{4}a^2(\omega_0^2 - \alpha\omega^2) \quad (4.74)$$

olarak bulunur. ε mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} u_1 &= Be^{iT_0} + \frac{(\omega_0^2 - 9\omega^2\alpha)}{8\omega^2} A^3 e^{3iT_0} + ke \\ &= b \cos(T_0 + \gamma) + \frac{(\omega_0^2 - 9\omega^2\alpha)}{32\omega^2} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Denkleme başlangıç koşulları uygulanır.

$$b(0) = -\frac{(\omega_0^2 - 9\omega^2\alpha)}{32\omega^2} a_0^3, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.76)$$

Son mertebede, denklemler (4.75) ve (4.70), denklem (4.68)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$\begin{aligned} &-2i\omega^2 D_2 A + A\omega_2 + (-3\omega_0^2 + 3\omega^2\alpha) A\bar{A}B + (-3\omega_0^2 + 3\omega^2\alpha) A^2 \bar{B} \\ &+ (\omega_0^2 - 9\omega^2\alpha) \left(\frac{-3\omega_0^2 + 3\omega^2\alpha}{8\omega^2} \right) A^3 \bar{A}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

olarak elde edilir. Seküler ifadede, aynı şekilde ilk olarak $D_2 A = 0$ seçilir ise ω_2 kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur. Cebirsel işlemler sonrasında denklem (4.77)'den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{(\omega_0^2 - 9\omega^2\alpha)}{32\omega^2}a_0^3, \quad \beta = \gamma = 0$$

$$\omega_2 = \frac{30\alpha\omega^2\omega_0^2 - 27\alpha^2\omega^4 - 3\omega_0^4}{128\omega^2}a_0^4 \quad (4.78)$$

Frekans denklemi

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4}a_0^2(\omega_0^2 - \alpha\omega^2) + \varepsilon^2 \left(\frac{30\alpha\omega^2\omega_0^2 - 27\alpha^2\omega^4 - 3\omega_0^4}{128\omega^2} \right) a_0^4 \quad (4.79)$$

şeklinde elde edilir. İfade çözülürse frekans aşağıdaki gibi bulunur.

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 12\varepsilon^2 \frac{\omega_0^2 a_0^4}{128 + 96\varepsilon a_0^2 \alpha + 27\varepsilon^2 \alpha^2 a_0^4}}} \quad (4.80)$$

Burada

$$z = \frac{-128 - 96\varepsilon a_0^2 - 30\varepsilon^2 \alpha a_0^4}{128 + 96\varepsilon a_0^2 \alpha + 27\varepsilon^2 \alpha^2 a_0^4} \quad (4.81)$$

şeklinde tanımlanır. Nihai çözüm

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \varepsilon \frac{(\omega_0^2 - 9\alpha\omega^2)}{32\omega^2} a_0^3 (\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)) + O(\varepsilon^2) \quad (4.82)$$

şeklinde elde edilir. Daha önce de belirtildiği üzere geçerli çözümler için yakınsama kriteri aşağıdaki gibidir.

$$\varepsilon \frac{(\omega_0^2 - 9\alpha\omega^2)}{32\omega^2} a_0^2 \ll 1 \quad (4.83)$$

4.1.4. Yöntemlerin Karşılaştırılması

Her iki yöntemden elde edilen yakınsama kriterleri ε parametresinin büyük olduğu değerler için karşılaştırılır ise çok zaman ölçekli yöntem (MS) ile hesaplanan yakınsama kriteri (4.60) sağlanmaz. Ancak MSLP yöntemi ile elde edilen yakınsama kriteri (4.83) sağlanmaktadır. Bu değerlendirmenin doğruluğuna ulaşmak için limit alınması yeterli olacaktır.

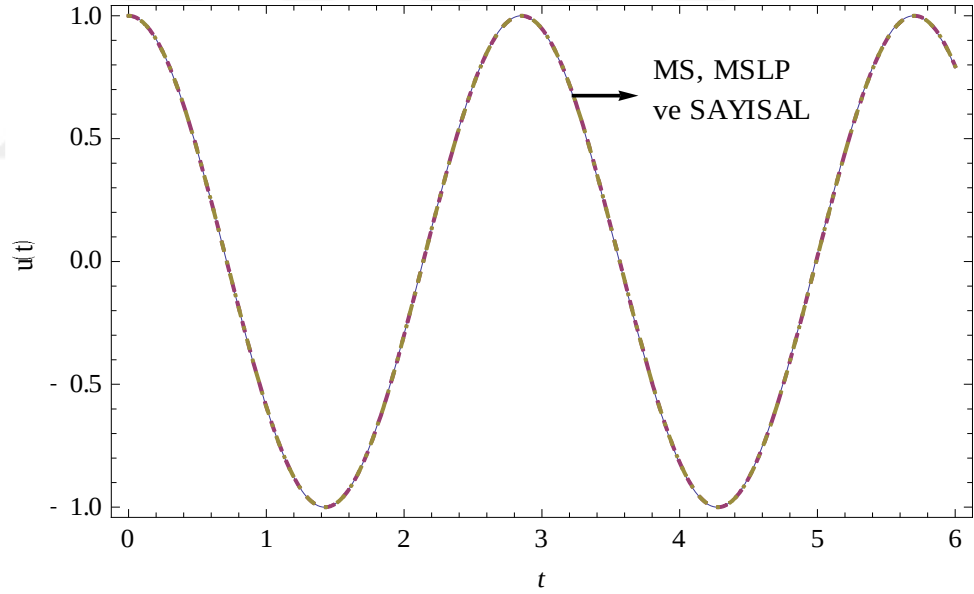
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon(\omega_0^2 - 9\alpha\omega^2)}{32\omega^2} a_0 = \frac{\varepsilon(\omega_0^2 - 9\alpha\omega^2)}{32 \left(-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 12\varepsilon^2 \frac{\omega_0^2 a_0^4}{128 + 96\varepsilon a_0^2 \alpha + 27\varepsilon^2 \alpha^2 a_0^4}} \right)} a_0 = 0.0312 \ll 1 \quad (4.84)$$

Görüldüğü üzere MSLP çözümündeki düzeltme terimi her durum için başlangıç teriminden küçüktür. Fakat bu durum çok ölçekli yöntem için söylenemez. Çok ölçekli yöntemin yakınsama kriterinin paydası sabit olduğundan dolayı bu ifadenin limiti $\varepsilon \rightarrow \infty$ durumunda yakınsama kriteri 1'den büyük olmaktadır. Bu nedenle, ε 'un büyük değerleri için düzeltme terimi, başlangıç teriminden her durumda büyük olacaktır.

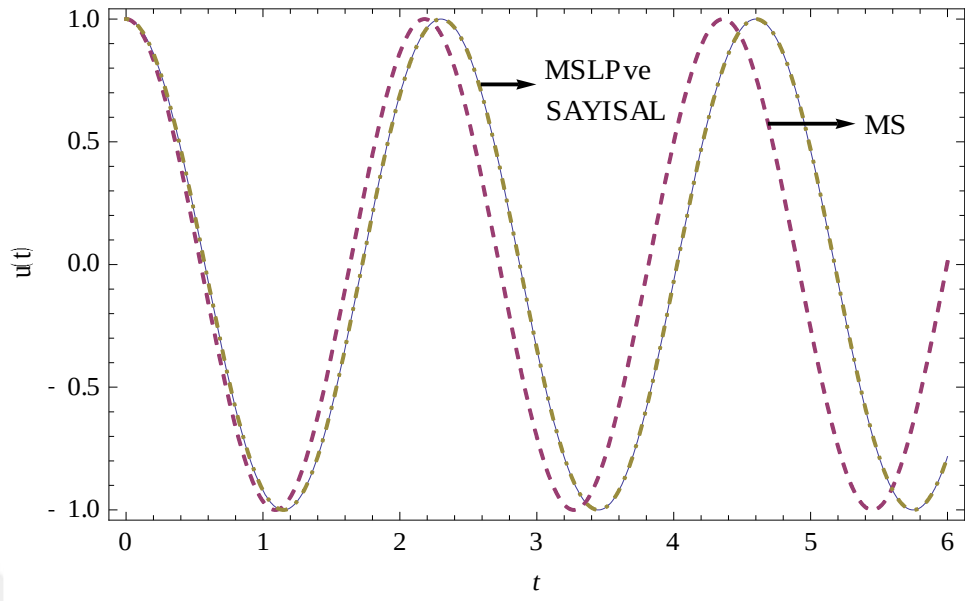
Sonuçların karşılaştırılması, iki farklı yöntemden elde edilen analitik çözümlerin ve sayısal çözümün genlik-zaman grafiklerinin karşılaştırılması ile ele alınmıştır. Karşılaştırmalar, denklemdeki ikinci (nonlinear) yayın kübik nonlineariteye sahip bölümünün meydana getirdiği doğrusal olmayan duruma yol açan parametrenin farklı değerleri için yapılmıştır.

Denklemin doğrusallığını etkileyen parametre, ikinci yayın kübik nonlineariteye sahip olan bölümüdür. Bu terim ise denklemde, yukarıda bahsedildiği üzere λ parametresidir. λ parametresinin değişimi, denklemde perturbasyon parametresi görevindeki ε 'un değişimi üzerinde direkt olarak etkilidir. Bu nedenle karşılaştırmalar, λ parametresinin farklı değerleri için ele alınmıştır.

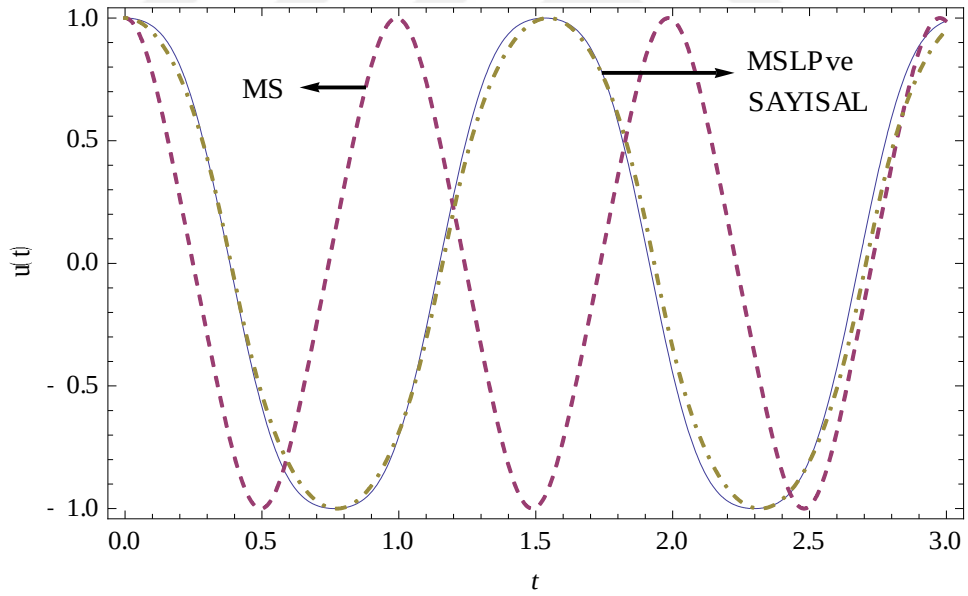
Tüm karşılaştırmalar, $a_0 = 1$, $m = 1$ ve $\xi = 0.1(k_1 = 50, k_3 = 5)$ değerleri için yapılmıştır. Şekil 4.2' de sonuçlar $\lambda = 0.5$ için karşılaştırılmıştır. Analitik çözümler ile sayısal çözüm çakışmaktadır. Şekil 4.3'de $\lambda = 5$ seçilerek sistem kuvvetli nonlinear sistem haline getirilmiştir. Bu durumda MSLP yöntemi, sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlar göstermiştir. Çok zaman ölçekli yöntemin genlik değerleri, sayısal çözüm ile uyum içerisinde olmasına rağmen frekans değerlerinde sapmalar gözlemlenmiştir. Son olarak, $\lambda = 25$ değeri için karşılaştırma yapılmıştır. MSLP çözümü ile sayısal çözüm uyumlu sonuçlar göstermesine rağmen çok zaman ölçekli yöntem sayısal çözümden oldukça farklılık göstererek ayrılmaktadır. Karşılaştırmalardan anlaşılacağı üzere, kuvvetli nonlinear sistemlerde, MSLP çözümü sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlar göstermesine rağmen çok zaman ölçekli yöntemin çözümü sayısal çözüm ile uyuşmamaktadır.



Şekil 4. 2. Lineer ve nonlinear yayların seri bağlanmasıyla oluşan m kütleye sahip sistemin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\lambda = 0.5$



Şekil 4. 3. Lineer ve nonlineer yayların seri bağlanmasıyla oluşan m kütleyle sahip sistemin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\lambda = 5$



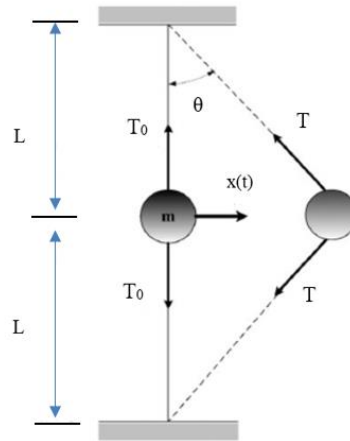
Şekil 4. 4. Lineer ve nonlineer yayların seri bağlanmasıyla oluşan m kütleyle sahip sistemin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\lambda = 25$

4.2. Gergin Elastik Bir Teldeki Kütlenin Nonlineer Titreşim Hareketi

Sistem gergin durumdaki bir telin merkezine bağlı bir m kütlesinden oluşmaktadır. Sistem üzerine birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır. Durmaz ve ark., 2011 [64], sistemin hareket denklemini elde ederek analitik çözüm yöntemleri ile denklemini çözmüşlerdir. Analitik çözüm yöntemlerinden He'nin max-min yaklaşımı, He'nin frekans-genlik yöntemi ve He'nin parametrelerin açılımı yöntemini kullanmışlardır. Belendez ve ark. 2007 [65], problemi harmonik denge yöntemiyle çözmüşler ve elde edilen frekans sonuçlarını sayısal frekans ile karşılaştırarak hata oranlarını hesaplamışlardır. Sun ve ark., 2007 [66], problemi harmonik denge ve Newton yönteminin birleşimi ile oluşan bir yöntem uygulayarak çözmüşlerdir. Bu çalışmada ise problem, çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yöntemi ile çözülecek ve sonuçlar sayısal sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

4.2.1. Sistemin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi ve Denklemin Boyutsuzlaştırılması

Sistem gergin durumdaki bir telin merkezine bağlı bir m kütlesinden oluşmaktadır. Kütlenin yapmış olduğu salınım hareketi incelenecektir. Kütle, tek boyutta sadece x yönünde hareket ile sınırlandırılmıştır.



Şekil 4. 5. Gergin elastik bir telin merkezindeki kütle

Şekil 4.5'deki kütlenin hareket denklemini elde etmek için, kütleye x yönünde etki eden kuvvetler toplamı yazılır.

$$m\ddot{x} = -2T \sin \theta \quad (4.85)$$

Burada T elastik telin gerilme kuvvetidir. Kütle başlangıçta durağan ve x konumunda bulunmaktadır. Bu nedenle başlangıç şartları

$$x(0) = x, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.86)$$

yazılır. Telin gerilme kuvveti

$$T = T_0 + EA \frac{\sqrt{L^2 + x^2} - L}{L^2} \quad (4.87)$$

olmaktadır. Burada, T_0 telin başlangıçtaki gerilme kuvveti, EA ise telin eksenel rijitlik kuvvetidir. Denklem (4.85)'de T değeri yerine konulursa

$$m\ddot{x} = -2EA \frac{x}{L} + \frac{\frac{x}{L}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{L}\right)^2}} (2T_0 - 2EA) = 0 \quad (4.88)$$

elde edilir. Denkleme boyutsuzlaştırma uygulanır. Boyutsuz değişkenler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$u = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{\frac{mL}{2EA}}} \quad (4.89)$$

Denklem (4.89), denklem (4.88)'de yerine konulursa

$$\ddot{u} + u - \left(1 - \frac{T_0}{EA}\right) \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = 0, \quad 0 \leq T_0 \leq EA \quad (4.90)$$

elde edilir ve denklemi sadeleştirmek adına tanımlama yapılır.

$$\lambda = 1 - \frac{T_0}{AE}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (4.91)$$

Boyutsuzlaştırma yapılan denklem ve başlangıç şartları düzenlenerek yazılır ise

$$\ddot{u} + u - \frac{\lambda u}{\sqrt{1+u^2}} = 0 \quad (4.92)$$

$$u(0) = \frac{x}{L} = a_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0 \quad (4.93)$$

elde edilir. Hareket denklemindeki kareköklü ifadeyi elimine etmek adına terim Taylor serisine açılır.

$$\ddot{u} + u - \lambda u \left(1 - \frac{1}{2} u^2 \right) = 0 \quad (4.94)$$

Elde edilen denklem Duffing denklemi yapısındadır ve buna bağlı olarak ε parametresi denkleme uygun bir şekilde yerleştirilir. Denklem ve başlangıç şartlarının nihai durumu aşağıdaki gibidir.

$$\ddot{u} + (1 - \lambda)u + \frac{\varepsilon \lambda}{2} u^3 = 0 \quad (4.95)$$

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (4.96)$$

4.2.2. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS)

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.97)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots\end{aligned}\tag{4.98}$$

Bağımlı değişken seriye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots\tag{4.99}$$

Açılım, denklem (4.95)'e yerleştirilerek mertebe ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde mertebe ayrıştırması, başlangıç şartları için de uygulanır.

$$O(1): D_0^2 u_0 + (1 - \lambda) u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0\tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + (1 - \lambda) u_1 &= -2D_0 D_1 u_0 - \frac{\lambda}{2} u_0^3 \\ u_1(0) &= 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0\end{aligned}\tag{4.101}$$

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 u_2 + (1 - \lambda) u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - \frac{3\lambda}{2} u_0^2 u_1\tag{4.102}$$

Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\sqrt{(1-\lambda)}T_0} + k.e.\tag{4.103}$$

Burada kompleks genlik

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}\tag{4.104}$$

şeklinde ifade edilir. Birinci mertebe çözüm, gerçek genlik ve faz açısından ifade edilecek olursa

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos\left(\sqrt{(1-\lambda)}T_0 + \beta(T_1, T_2)\right) \quad (4.105)$$

şeklinde yazılır. Denkleme başlangıç şartları uygulanır.

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.106)$$

Birinci mertebe çözüm, denklem (4.101)'e yerleştirilir ve seküler terimleri elimine edecek olan denklem elde edilir.

$$-2i\sqrt{(1-\lambda)}D_1A - \frac{3\lambda}{2}A^2\bar{A} = 0 \quad (4.107)$$

Kompleks genlik ifadesini denklem (4.107)'de yerine konulursa

$$a = a(T_2), \quad \beta = \frac{3\lambda}{16\sqrt{(1-\lambda)}}a^2T_1 + \beta_0(T_2), \quad \beta_0(0) = 0 \quad (4.108)$$

elde edilir. ε mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = Be^{i\sqrt{(1-\lambda)}T_0} + \frac{\lambda}{16(1-\lambda)}A^3e^{3i\sqrt{(1-\lambda)}T_0} + ke \quad (4.109)$$

Burada

$$B = \frac{1}{2}be^{i\gamma} \quad (4.110)$$

olarak alınır. Gerçek genlik ve faz için, ε mertebesindeki çözüm tekrar yazılırsa

$$u_1 = b \cos\left(\sqrt{(1-\lambda)}T_0 + \gamma\right) + \frac{\lambda}{64(1-\lambda)}a^3 \cos\left(3\sqrt{(1-\lambda)}T_0 + 3\beta\right) \quad (4.111)$$

elde edilir. u_1 çözümüne başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = -\frac{\lambda}{64\sqrt{(1-\lambda)}} a_0^3, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.112)$$

elde edilir. Son mertebe için, u_0 ve u_1 çözümü olan denklemler (4.103) ve (4.109), denklem (4.102)'de yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{\lambda}{64\sqrt{(1-\lambda)}} a_0^3, \quad (4.113)$$

$$\beta = \gamma = \frac{3\lambda}{16\sqrt{(1-\lambda)}} a_0^2 T_1 + \frac{21\lambda^2}{1024(1-\lambda)^{3/2}} a_0^4 T_2$$

Nihai sonuç,

$$u = a_0 \cos(\sqrt{(1-\lambda)}t + \beta) + \frac{\varepsilon\lambda}{64(1-\lambda)} a_0^3 \left[\cos(3\sqrt{(1-\lambda)}t + 3\beta) - \cos(\sqrt{(1-\lambda)}t + \beta) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (4.114)$$

olarak elde edilir. Nihai çözüm için yakınsama kriteri matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\varepsilon\lambda}{64(1-\lambda)} a_0^2 \ll 1 \quad (4.115)$$

4.2.3. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.95)'e $\tau = \omega t$ zaman dönüşümü uygulanır ise

$$\omega^2 u'' + (1-\lambda)u + \frac{\lambda}{2} \varepsilon u^3 = 0 \quad (4.116)$$

elde edilir. Burada $()'$ gösterimi, yeni zaman değişkeni olan τ 'ya göre türevi ifade etmektedir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.117)$$

Yeni zaman türevleri aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.118)$$

Bağımlı değişken ve tabii frekans aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.119)$$

$$(1 - \lambda) = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (4.120)$$

Bu seri açılımlar denklem (4.116)'ya yerleştirilir. Denklem ve başlangıç şartları için aşağıdaki şekilde merteye ayrıştırması yapılır.

$$O(1): \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (4.121)$$

$$O(\varepsilon): \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - \frac{\lambda}{2} u_0^3$$

$$u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0 \quad (4.122)$$

$$O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2)(u_0) + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - \frac{3\lambda}{2} u_0^2 u_1 \quad (4.123)$$

Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + ke = a(T_1, T_2) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.124)$$

Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.125)$$

elde edilir. Denklem (4.124)'deki u_0 çözümü, denklem (4.122)'ye yerleştirilir ve seküler terimleri elimine edecek denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-2iD_1A + \frac{\omega_1}{\omega^2}A + -\frac{3\lambda}{2\omega^2}A^2\bar{A} = 0 \quad (4.126)$$

Seküler ifadede, $D_1A = 0$ seçildiğinde ω_1 kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur. Bu durumda $a = a(T_2)$, $\beta = \beta(T_2)$ olacaktır. ω_1 ise aşağıdaki gibi

$$\omega_1 = \frac{3\lambda}{2}A\bar{A} = \frac{3\lambda}{8}a^2 \quad (4.127)$$

bulunur. $\mathcal{E}$ mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = Be^{iT_0} + \frac{\lambda}{16\omega^2}A^3e^{3iT_0} + ke = b \cos(T_0 + \gamma) + \frac{\lambda}{64\omega^2}a^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (4.128)$$

Denkleme başlangıç şartı uygulanır ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$b(0) = -\frac{\lambda a_0^3}{64\omega^2}, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.129)$$

Son mertebede, denklemler (4.128) ve (4.124), denklem (4.123)'de yerine konularak seküler terimleri yok edecek olan denklem elde edilir.

$$2iD_1B + 2iD_2A - \frac{\omega_1}{\omega^2}B - \frac{\omega_2}{\omega^2}A + \frac{3\lambda}{2\omega^2} \left(A^2\bar{B} + \frac{\lambda}{16\omega^2}\bar{A}^2A^3 + 2A\bar{A}B \right) = 0 \quad (4.130)$$

Seküler ifadede, $D_2 A = 0$ seçilir ise ω_2 kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur. Cebirsel işlemler sonrasında denklem (4.130)'dan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{\lambda a_0^3}{64\omega^2}, \quad \beta = \gamma = 0, \quad \omega_2 = -\frac{3\lambda^2}{512\omega^2} a_0^4 \quad (4.131)$$

Frekans denklemi ise aşağıdaki gibidir.

$$\omega^2 = 1 - \lambda + \varepsilon \frac{3\lambda}{8} a_0^2 - \varepsilon^2 \left(\frac{-3\lambda^2}{512\omega^2} a_0^4 \right) \quad (4.132)$$

İfade çözülür ise frekans

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \lambda + \frac{3\varepsilon\lambda}{8} a_0^2 \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \lambda + \frac{3\varepsilon\lambda}{8} a_0^2 \right)^2 - \frac{12\varepsilon^2\lambda^2}{512} a_0^4}} \quad (4.133)$$

olarak elde edilir. Nihai çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon \lambda a_0^3}{64\omega^2} (\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)) + O(\varepsilon^2) \quad (4.134)$$

Daha önce de belirtildiği üzere geçerli çözümler için yakınsama kriteri

$$\frac{\varepsilon \lambda a_0^2}{64\omega^2} \ll 1 \quad (4.135)$$

olarak ifade edilir.

4.2.4. Yöntemlerin Karşılaştırılması

İki yöntem ile elde edilen yakınsama kriterleri, ε perturbasyon parametresinin büyük olduğu değerler için karşılaştırma yapılır ise MSLP yöntemi ile hesaplanan

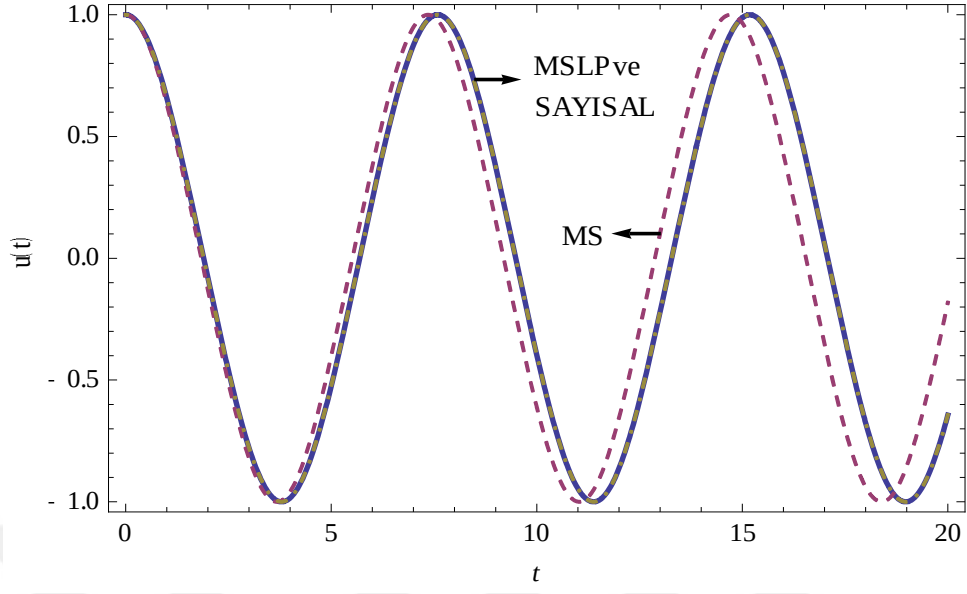
yakınsama kriteri (4.135) uygun olur iken çok zaman ölçekli yöntem ile elde edilen yakınsama kriteri (4.115) ile doğruluk sağlanmaz. Bu durumu gösterebilmek adına limit almak yeterli olacaktır.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \lambda a_0^2}{64\omega^2} = \frac{\varepsilon \lambda a_0^2}{64 \left(\frac{1}{2} \left(1 - \lambda + \frac{3\varepsilon\lambda}{8} a_0^2 \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \lambda + \frac{3\varepsilon\lambda}{8} a_0^2 \right)^2 - \frac{12\varepsilon^2 \lambda^2}{512} a_0^4} \right)} = 0 \ll 1 \quad (4.136)$$

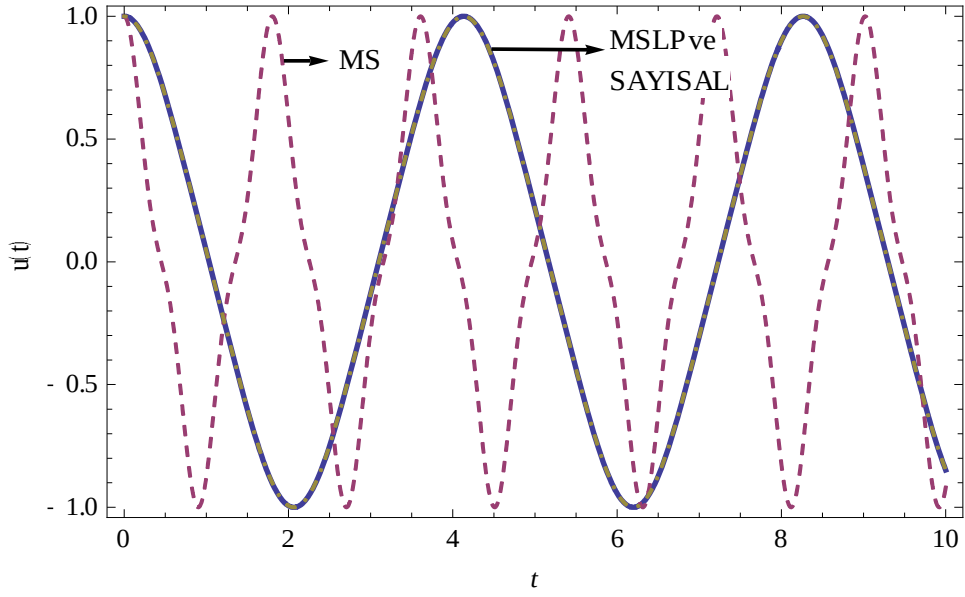
Denklem (4.136)'da her durumda düzeltme teriminin başlangıç teriminden küçük olduğu görülmektedir. Fakat bu durumu denklem (4.115) için söylemek mümkün değildir. Çünkü doğal frekans değeri paydada sabit olarak bulunmaktadır. Bu nedenle ε 'un büyük değerleri için düzeltme terimi başlangıç teriminden büyük olmaktadır.

Analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması, genlik-zaman grafikleri yardımı ile yapılacaktır. Karşılaştırma, denklemde bulunan parametrelerin farklı değerleri için yapılmıştır. Bu nedenle denklemdeki her bir parametrenin, denklemi nasıl etkilediği incelenmiştir. Şekiller 4.6-4.8'de ε değerleri artırılarak çözümlerin karşılaştırılması yapılmıştır. Şekil 4.6'da $\varepsilon = 1$ alınmıştır. Sayısal çözüm ile MSLP çözüm uyum içinde olmasına rağmen çok zaman ölçekli yöntem çözümü sayısal çözümden frekans değeri açısından ayrılmıştır. Şekiller 4.7 ve 4.8'de ε değerleri daha da arttırılmıştır. Beklendiği gibi MSLP ve sayısal çözümler uyum içindedir. Ancak çok zaman ölçekli yöntem çözümü, sayısal çözümden hem frekans hem de genlik açısından çok farklı değerler almıştır.

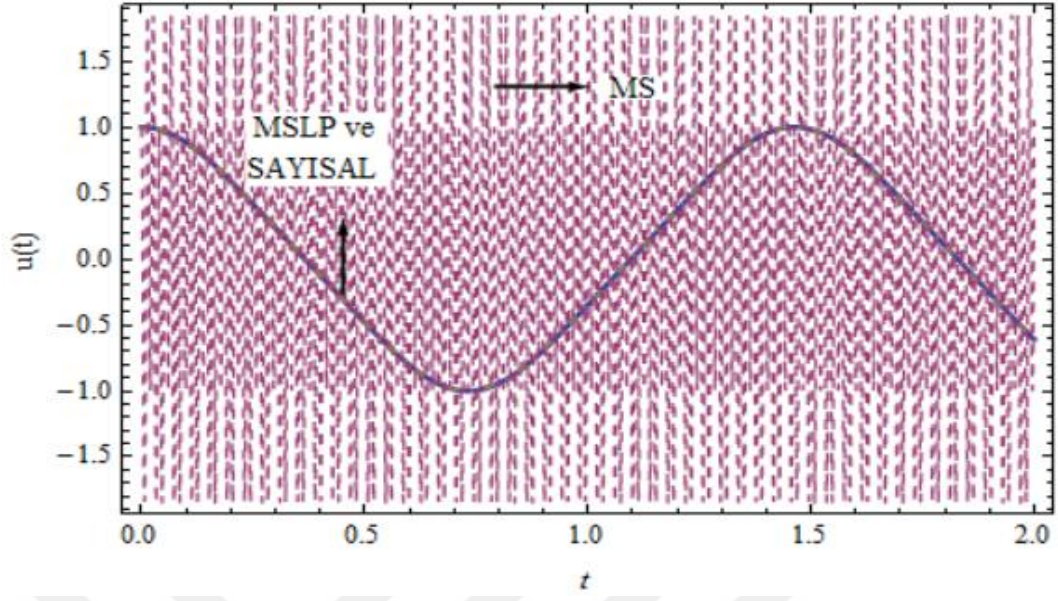
Şekiller 4.9-4.11'de, denklemdeki kübik nonlinear terimin katsayısı artırılarak $\lambda = 0.75$ alınmıştır ve çözümü nasıl etkileyeceği incelenmiştir. ε parametresinin farklı değerleri için karşılaştırmalar yapılmıştır. Belirtilen şekillerde görüldüğü gibi MSLP çözümü ile sayısal çözüm uyum içindedir. Ancak, çok zaman ölçekli yöntem çözümü hem nitelik hem de nicelik açısından sayısal çözümden çok farklı sonuçlar vermektedir.



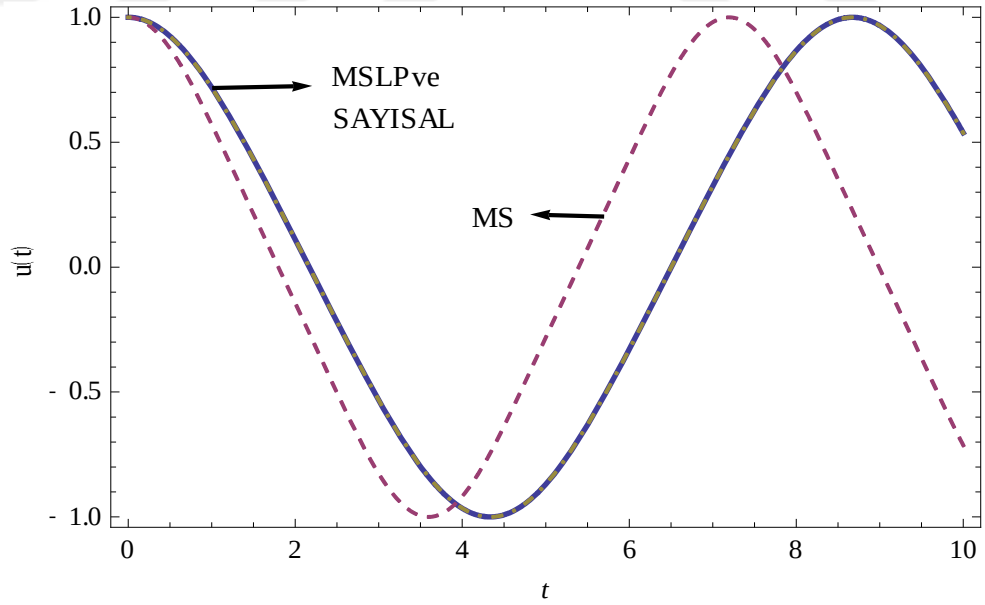
Şekil 4. 6. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 1 (a_0 = 1, \lambda = 0.5)$



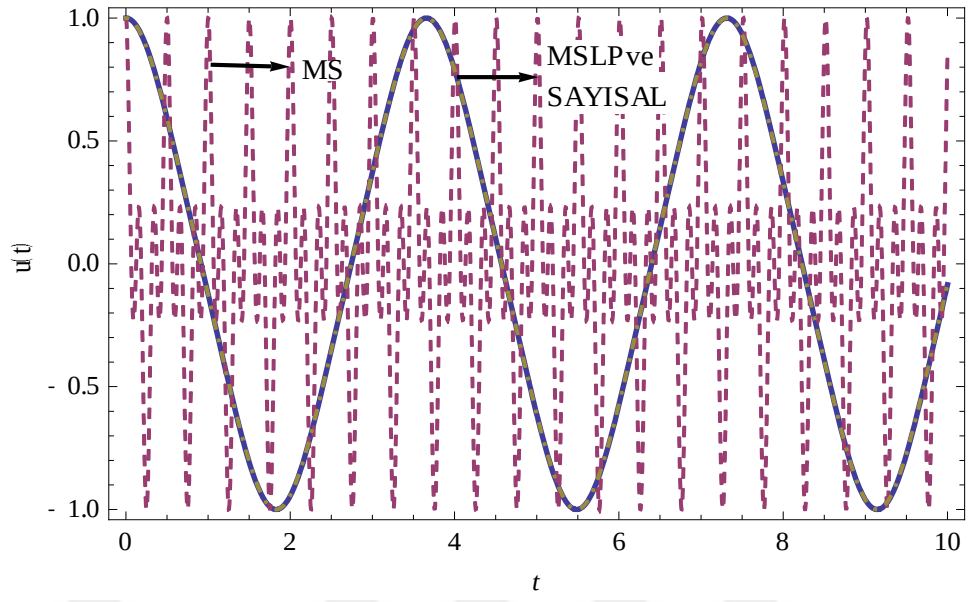
Şekil 4. 7. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10 (a_0 = 1, \lambda = 0.5)$



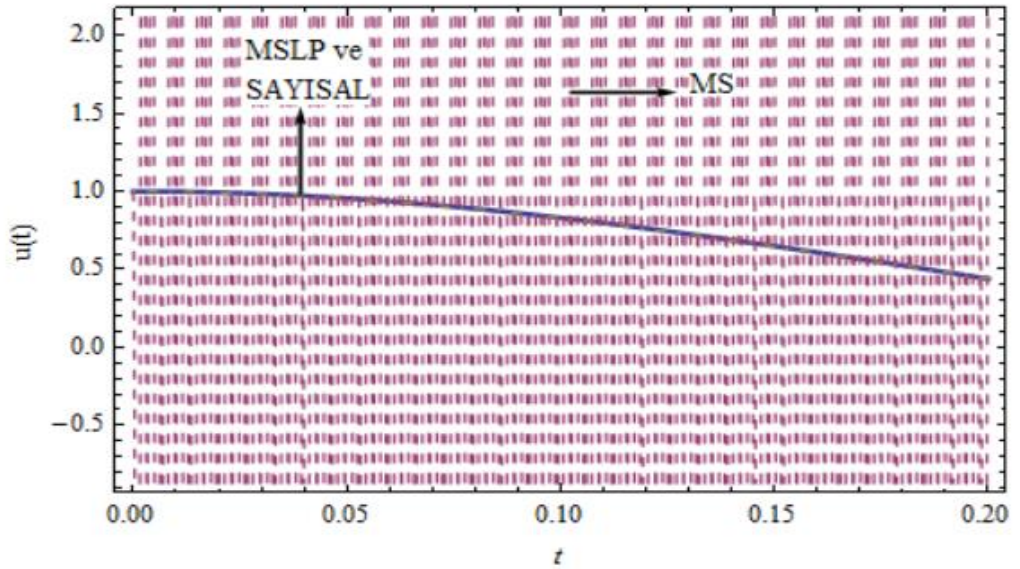
Şekil 4. 8. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100 (a_0 = 1, \lambda = 0.5)$



Şekil 4. 9. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 1 (a_0 = 1, \lambda = 0.75)$



Şekil 4. 10. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10 (a_0 = 1, \lambda = 0.75)$



Şekil 4. 11. Gergin elastik bir teldeki kütlenin hareket denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100 (a_0 = 1, \lambda = 0.75)$

4.3. Helmholtz-Duffing Denklemi

Aşağıda Helmholtz-Duffing denklemi [67] görülmektedir.

$$\ddot{y} + y + (1 - \alpha)\varepsilon y^2 + \varepsilon^2 \alpha y^3 = 0 \quad (4.137)$$

Burada α asimetrik parametredir. $\alpha = 1$ olması durumunda denklem klasik bir Duffing denklemi olmaktadır. $\alpha = 0$ olması durumunda ise, denklem Helmholtz denklemi olmaktadır.

Sistemin $[-b, a]$ arasında salınım yaptığı varsayılmaktadır. Bu nedenle, sistem pozitif ve negatif durumlarda simetrik olmayan nonlinear davranış göstermektedir. Bu sebeple sistem iki bölüme ayrılarak incelenmektedir. Denklem (4.137), iki yardımcı denklem kullanılarak tekrar yazılırsa

$$y \geq 0 \text{ için } \ddot{y} + y + (1 - \alpha)\varepsilon y^2 + \varepsilon^2 \alpha y^3 = 0 \quad (4.138)$$

$$y \leq 0 \text{ için } \ddot{y} + y - (1 - \alpha)\varepsilon y^2 + \varepsilon^2 \alpha y^3 = 0 \quad (4.139)$$

elde edilir. Sistem başlangıç durumunda durağandır ve belirtildiği üzere $[-b, a]$ arasında salınım yapmaktadır. Denklem (4.138) için başlangıç şartları,

$$y(0) = a, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (4.140)$$

Denklem (4.139) için ise başlangıç şartları

$$y(0) = b, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (4.141)$$

olmaktadır.

Literatürde Helmholtz-Duffing denklemi ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Mirzabeig ve ark ., 2014 [68], denklemi analitik çözüm yöntemleri ile çözerek elde ettikleri periyot değerlerini, sayısal çözümün periyot değerleri ile

karşılaştırmışlardır. Analitik çözüm için Minimum-Maksimum Yöntemi, Hamilton Yöntemi ve “Global Error Minimization” yöntemlerini kullanmışlardır. Yapılan karşılaştırmalarda, Global Error Minimization Yöntemi ile elde edilen çözümün diğer çözümlere göre gerçek çözüme daha yakın sonuçlar verdiği sonucuna varmışlardır. Akbarzade ve ark., 2012 [69], denklemi Homotopy-Varyasyonel Yaklaşım ve Hamilton Yöntemi ile çözerek elde ettikleri periyotları gerçek çözümün periyot değerleri ile karşılaştırmışlardır. H. Askari ve ark., 2011 [70], denklemi analitik çözüm yöntemlerinden “He’s Energy Balance” Metodu (HEBM) ve “He’s Frequency Amplitude Formulation” Metodu ile çözmüşlerdir. Leung ve Guo denklemi Homotopi Perturbasyon Yöntemi [71] ve Homotopi Harmonik Denge Yöntemi [72]. ile çözerek elde ettikleri analitik çözümü, sayısal çözüm ile karşılaştırmışlardır. Yakın zamanda ise Hosen ve Chowdhury [73], Helmholtz-Duffing denkleminde, klasik Harmonik Denge Yöntemini değil yeni bir yöntem olan “Modified Harmonic Balance Method (MHBM)” yöntemini uygulamışlardır.

Bu çalışmada problem $y \geq 0$ için çözülecektir. MSLP yöntemi ve çok zaman ölçekli yöntem, denklem (4.138)’ye uygulanarak genlik-zaman grafikleri sayısal çözüm ile karşılaştırılacaktır.

4.3.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS)

Daha önceki bölümlerde belirtildiği gibi denklem (4.137) için merteye ayrıştırması yapılır.

$$O(1): D_0^2 y_0 + y_0 = 0 \quad y_0(0) = a, \quad D_0 y_0(0) = 0 \quad (4.142)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 y_1 + y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - (1-\alpha) y_0^2$$

$$y_1(0) = 0, \quad (D_0 y_1 + D_1 y_0)(0) = 0 \quad (4.143)$$

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 y_2 + y_2 = -2D_0 D_1 y_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2)(y_0) - 2(1-\alpha) y_0 y_1 - \alpha y_0^3 \quad (4.144)$$

Birinci mertebede elde edilen çözüm

$$y_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + k.e. \quad (4.145)$$

olmaktadır. Burada kompleks genlik

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.146)$$

olarak ifade edilir. Birinci mertebe çözüm, gerçek genlik ve faz açısından aşağıdaki gibidir.

$$y_0 = a(T_1, T_2) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.147)$$

Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.148)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.145), denklem (4.143)'de yerine konur ve seküler terimleri elimine edecek olan denklem

$$-2iD_1 A = 0 \quad (4.149)$$

olarak elde edilir. Bu denklemde kompleks genlik yerine konulduğunda aşağıdaki ifadelerin elde edildiği açıkça görülmektedir.

$$a = a(T_2), \quad \beta = \beta(T_2) \quad (4.150)$$

$\mathcal{E}$ mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y_1 = B e^{iT_0} + \frac{(1-\alpha)}{3} A^2 e^{2iT_0} + 2(\alpha-1) A \bar{A} + k.e. \quad (4.151)$$

Burada

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\gamma} \quad (4.152)$$

olarak alınır. Gerçek genlik ve faz açısından y_1 çözümü aşağıdaki gibidir.

$$y_1 = b \cos(T_0 + \gamma) + \frac{(1-\alpha)^2}{6} a^2 [\cos(2T_0 + 2\beta) - 3] \quad (4.153)$$

Denkleme başlangıç koşulları uygulanır ise aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$b(0) = \frac{(1-\alpha)}{3} a^2, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.154)$$

Son mertebe için denklemler (4.151) ve (4.145), denklem (4.144)'de yerine konularak seküler terimleri yok edecek olan denklem yazılır.

$$-2iD_1 B - D_1^2 A - 2iD_2 A - \frac{2}{3}(1-\alpha)^2 A^2 \bar{A} - 3\alpha A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.155)$$

Denklemler (4.149), (4.150), (4.152) ve (4.154), denklem (4.155)'de yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a, \quad b = \frac{(1-\alpha)}{3} a^2, \quad \beta = \gamma = \left[\frac{(1-\alpha)^2}{12} + \frac{3\alpha}{8} \right] a^2 T_2 \quad (4.156)$$

Nihai çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y = a_0 \cos(t + \beta) + \varepsilon \frac{(1-\alpha)}{6} a^2 [2 \cos(t + \beta) + \cos(2t + 2\beta) - 3] + O(\varepsilon^2) \quad (4.157)$$

Geçerli çözüm için yakınsama kriteri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\varepsilon a_0 (1-\alpha)}{6} \ll 1 \quad (4.158)$$

4.3.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.138)'ye yeni zaman dönüşümü $\tau = \omega t$ uygulanır.

$$\omega^2 y'' + y + \varepsilon (1-\alpha) y^2 + \varepsilon^2 \alpha y^3 = 0 \quad (4.159)$$

Yeni zaman değişkeni cinsinden, hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.160)$$

Yeni zaman türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (4.161)$$

Bağımlı değişken ve frekans aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$y = y_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon y_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.162)$$

$$1 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (4.163)$$

Denklemler (4.162) ve (4.163), denklem (4.159)'a yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır.

$$O(1): \omega^2 D_0^2 y_0 + \omega^2 y_0 = 0 \quad y_0(0) = a_0, \quad D_0 y_0(0) = 0 \quad (4.164)$$

$$O(\varepsilon): \omega^2 D_0^2 y_1 + \omega^2 y_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 y_0 - (1-\alpha) y_0^2 + \omega_1 y_0$$

$$y_1(0) = 0, \quad (D_0 y_1 + D_1 y_0)(0) = 0 \quad (4.165)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 y_2 + \omega^2 y_2 = & -2\omega^2 D_0 D_1 y_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2)(y_0) \\ & + \omega_1 y_1 + \omega_2 y_0 - 2(1-\alpha)y_0 y_1 - \alpha y_0^3 \end{aligned} \quad (4.166)$$

Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + k.e. = a(T_1, T_2) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.167)$$

Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi alınır.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.168)$$

Denklem (4.167)'ye başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.169)$$

elde edilir. Denklem (4.167)'deki çözüm, denklem (4.165)'e yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek olan denklem

$$-2i\omega^2 D_1 A + \omega_1 A = 0 \quad (4.170)$$

elde edilir. $D_1 A = 0$ seçildiği durumda, ω_1 kompleks yapıda olmaz. Bu nedenle bu seçim uygun olur. Bu durumda, $A = A(T_2)$ ve $\beta = \beta(T_2)$ olacaktır. Böylece

$$\omega_1 = 0 \quad (4.171)$$

olarak bulunur. ε mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y_1 = Be^{iT_0} + \frac{(1-\alpha)}{3\omega^2} (A^2 e^{2iT_0} - 6A\bar{A}) + k.e. = b \cos(T_0 + \gamma) + \frac{(1-\alpha)}{6\omega^2} a^2 (\cos(2T_0 + 2\beta) - 3) \quad (4.172)$$

Denkleme başlangıç şartları uygulanır.

$$b(0) = \frac{(1-\alpha)}{3\omega^2} a^2, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.173)$$

Son mertebe için denklemler (4.172) ve (4.167), denklem (4.166)'da yerine konur ve seküler terimleri elimine edecek olan denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-2i\omega^2 D_2 A + \omega_2 A + \frac{10(1-\alpha)^2}{3\omega^2} A^2 \bar{A} - 3\alpha A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.174)$$

Aynı şekilde seküler ifadede $D_2 A = 0$ seçilir ise ω_2 kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden bu seçim uygundur. Cebirsel işlemler yapılır ve denklem (4.174)'dan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a, \quad \beta = \gamma = 0, \quad b = \frac{(1-\alpha)}{3\omega^2} a^2, \quad \omega_2 = \left[\frac{3}{4} \alpha - \frac{5}{6\omega^2} (1-\alpha)^2 \right] a^2 \quad (4.175)$$

Frekans denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon^2 \left[\frac{3}{4} \alpha - \frac{5}{6\omega^2} (1-\alpha)^2 \right] a^2 \quad (4.176)$$

İfade çözülür ise frekans aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 a^2 \alpha \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 a^2 \alpha \right)^2 - \frac{10}{3} \varepsilon^2 a^2 (1-\alpha)^2}} \quad (4.177)$$

Nihai çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y = a \cos(\omega t) + \varepsilon \frac{(1-\alpha)}{6\omega^2} a^2 [2 \cos(\omega t) + \cos(2\omega t) - 3] + O(\varepsilon^2) \quad (4.178)$$

Belirtildiği üzere geçerli çözüm için yakınsama kriteri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon \frac{(1-\alpha)}{6\omega^2} a \ll 1 \quad (4.179)$$

4.3.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması

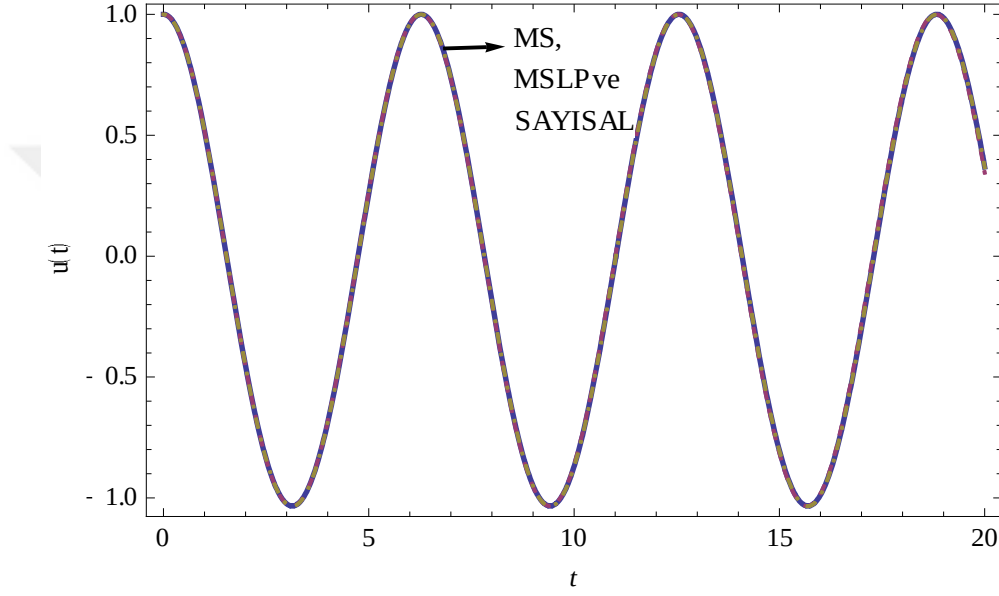
MSLP yöntemi ile elde edilen yakınsama kriterleri, ε parametresinin büyük olduğu değerler için uygundur. Fakat çok zaman ölçekli yöntem ile elde edilen yakınsama kriteri, büyük ε değerleri için uygun sonuçlar sağlamaz. Bu değerlendirmenin doğruluğunu görmek adına limit almak yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon(1-\alpha)a}{6\omega^2} \\ &= \frac{(1-\alpha)a_0}{6 \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 a_0^2 \alpha \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 a_0^2 \alpha \right)^2 - \frac{10}{3} \varepsilon^2 a_0^2 (1-\alpha)^2} \right)} = 0.28 \ll 1 \end{aligned} \quad (4.180)$$

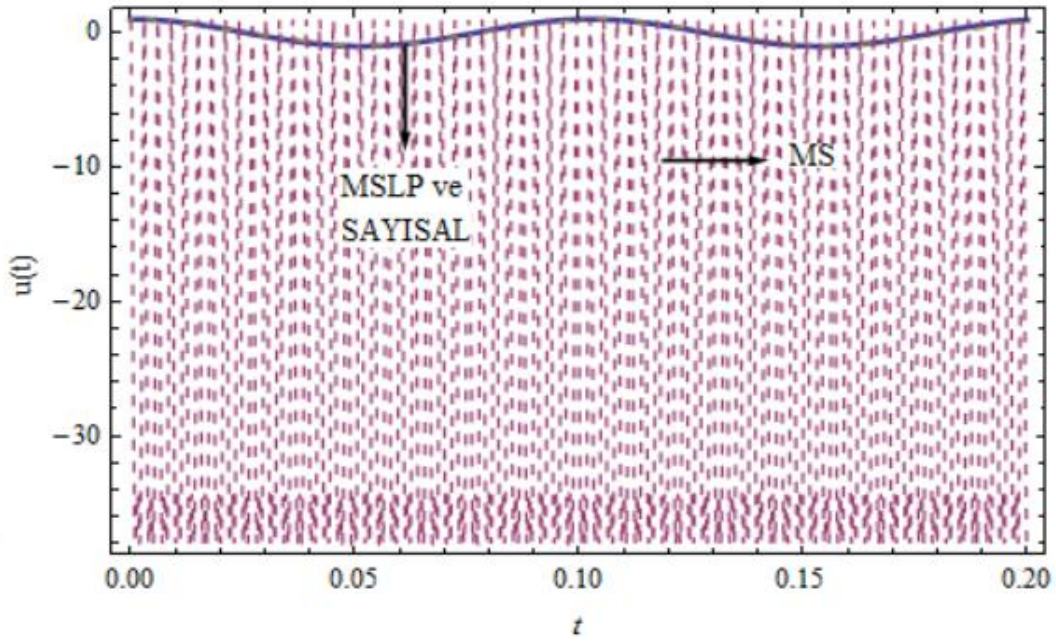
MSLP yöntemi ile elde edilen yakınsama kriteri denklem (4.180)'de her durumda düzeltme terimin başlangıç teriminden küçük olduğu görülmektedir. Fakat bu durumu denklem (4.158) için söylemek mümkün değildir. Denklem (4.158), ε parametresinin büyük değerleri için başlangıç teriminden büyük olacaktır.

Elde edilen analitik çözümlerin sayısal çözüm ile karşılaştırılması genlik-zaman grafikleri ile ele alınacaktır. Karşılaştırmalar, ε parametresinin farklı değerleri için yapılmıştır. ε değerinin artmasıyla oluşan kuvvetli nonlinear sistemlerin, sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlar gösterip göstermediği değerlendirilmiştir. Bütün karşılaştırmalarda, $\alpha = 0.5$ ve $a = 1$ seçilmiştir. Şekil 4.12'de karşılaştırma $\varepsilon = 0.1$ değeri için yapılmıştır. MSLP yöntemi ile edilen çözüm sayısal çözüm ile uygun

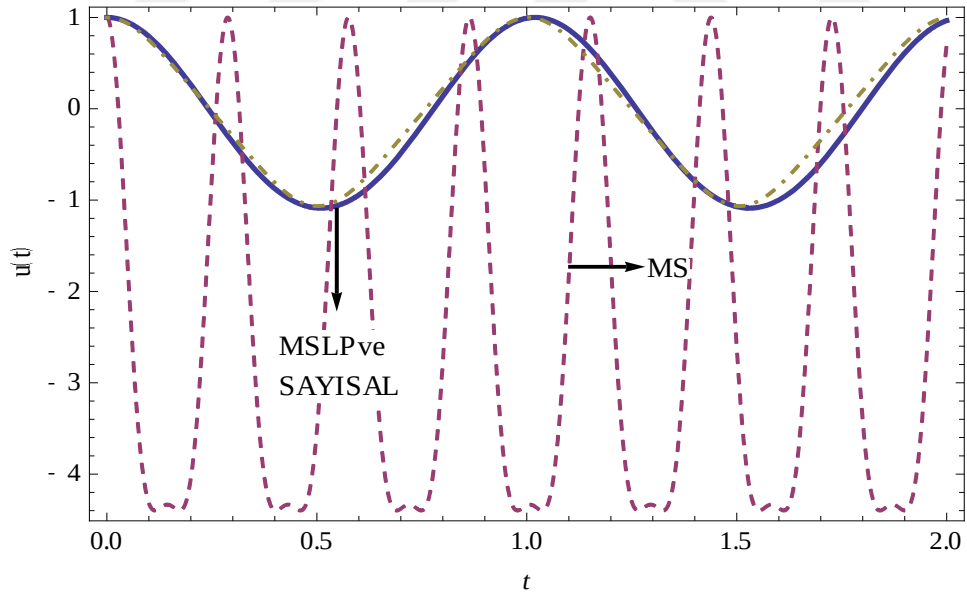
sonuçlar göstermiştir. Ayrıca, karşılaştırma küçük ε değeri için yapıldığından dolayı, çok zaman ölçekli yöntem ile elde edilen çözüm de sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlar göstermiştir. şekil 4.13’de sonuçlar $\varepsilon = 10$ için karşılaştırılmıştır. şekil 4.14’de $\varepsilon = 100$ alınarak karşılaştırma yapılmıştır. MSLP yöntemi ile elde edilen çözüm sayısal çözüm ile uygun sonuçlar gösterir iken çok zaman ölçekli yöntem ile elde edilen çözüm nitelik ve nicelik açısından sayısal çözümden çok farklı sonuçlar vermiştir.



şekil 4. 12. Helmholtz-Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 0.1 (\alpha = 0.5, a = 1)$



Şekil 4. 13. Helmholtz-Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10 (\alpha = 0.5, a = 1)$



Şekil 4. 14. Helmholtz-Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100 (\alpha = 0.5, a = 1)$

4.4. Van Der Pol Denklemi

Van Der Pol osilatörü Hollandalı elektrik mühendisi ve fizikçi Balthasar Van Der Pol tarafından modellenmiştir [74]. Van der Pol denklemi hem fiziksel ve hem de biyolojik bilimlerde kullanılan uzun bir geçmişe sahiptir. Örneğin, biyolojide, Fitzhugh [75] ve Nagumo [76] nöronların hareket potansiyeli için bir model olarak düzlemsel bir alanda denklemi genişletmişlerdir. Çoğunlukla bu denklem elektrik devrelerinde kullanılır ve sistemin döngü salınımlarını göstermektedir. Ayrıca denklemde bulunan sönüm elemanından kaynaklanan, negatif sönümlemeye sahip bir sistem olarak modellenen bir çok uygulama da bulunmaktadır.

Konservatif olmayan bir sistemi niteleyen Van Der Pol denklemi ve başlangıç koşulları aşağıda verilmiştir.

$$\ddot{u} + u = \varepsilon(1 - \alpha u^2)\dot{u} \quad (4.181)$$

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (4.182)$$

Bu bölümde Van der pol denklemi çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yöntemi ile çözülecektir. Bulunan analitik çözümler sayısal çözüm ile karşılaştırılarak yorumlanacaktır.

4.4.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS)

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibidir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.183)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (4.184)$$

Bağımlı değişken aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.185)$$

Denklemler (4.184) ve (4.185), denklem (4.181)'e yerleştirilir ve mertebe ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da mertebe ayrıştırmasına tabi tutulur.

$$O(1): D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (4.186)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + D_0 u_0 - \alpha (D_0 u_0) u_0^2 \\ u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0 \quad (4.187)$$

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 u_2 + u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2)(u_0) \\ + (D_0 u_1 + D_1 u_0)(1 - \alpha u_0^2) - 2\alpha u_0 u_1 (D_0 u_0) \quad (4.188)$$

Birinci mertebe çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + k.e. \quad (4.189)$$

Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.190)$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.191)$$

elde edilir. Denkleme başlangıç şartları uygulanır.

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.192)$$

Denklem (4.189), denklem (4.187)'ye yerleştirilerek seküler terimleri yok edecek denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-2iD_1A + iA - 2i\alpha A^2\bar{A} + i\alpha A^2\bar{A} = 0 \quad (4.193)$$

Kompleks genlik, denklem (4.193)'de yerine konularak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\beta = \beta(T_2), \quad D_1a = \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\alpha a^3 \quad (4.194)$$

Denklem (4.194)'deki genlik aşağıdaki gibi bulunur.

$$a(T_1) = \frac{2e^{\frac{T_1}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{4 - a_0^2\alpha}{a_0^2}\right) + \alpha e^{T_1}}} \quad (4.195)$$

ε mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = iBe^{iT_0} + \frac{\alpha i}{8}A^3e^{3iT_0} + ke = -b\sin(T_0 + \gamma) - \frac{\alpha}{32}a^3\sin(3T_0 + 3\beta) \quad (4.196)$$

Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = \frac{1}{2}\left(a_0 - \frac{7}{16}\alpha a_0^2\right), \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.197)$$

ifadesi elde edilir. Son mertebe için denklemler (4.196) ve (4.189), denklem (4.188)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$\begin{aligned} 2D_1B - D_1^2A - 2iD_2A - B + D_1A + \frac{1}{8}\alpha^2A^3\bar{A}^2 - \alpha A^2D_1\bar{A} \\ - 2A\bar{A}D_1A + 2\alpha A\bar{A}B - \alpha A^2\bar{B} = 0 \end{aligned} \quad (4.198)$$

elde edilir. Denklemden ilk olarak B terimi içeren ifadeler ayrılır.

$$2D_1B - B + 2\alpha A\bar{A}B - \alpha A^2\bar{B} = 0 \quad (4.199)$$

Denklem (4.199)'dan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\beta = \gamma, \quad b = \left(a_0 - \frac{7\alpha}{16} a_0^3 \right) e^{\frac{T_1 - \ln[4 + (e^{T_1} - 1)\alpha a_0^2]}{2}} \quad (4.200)$$

Bu durumda denklem (4.198)'de çözülmeyen kısımlar, sadece A terimi içeren ifadelerden oluşmaktadır.

$$-D_1^2 A - 2iD_2 A + D_1 A + \frac{1}{8} \alpha^2 A^3 \bar{A}^2 - \alpha A^2 D_1 \bar{A} - 2A\bar{A}D_1 A = 0 \quad (4.201)$$

Denklem (4.201)'den genlik ve faz ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a = a(T_1), \quad \beta = \frac{1}{8} \left(a^2 \alpha - a - \frac{7}{8} a^5 \alpha^2 \right) T_2 \quad (4.202)$$

Nihai sonuç aşağıdaki gibidir.

$$u = a \cos(t + \beta) + \varepsilon \left[-b \sin(t + \beta) - \frac{\alpha}{32} a^3 \sin(3t + 3\beta) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (4.203)$$

Genlikler ve faz orjinal değişkenlere göre aşağıdaki gibi bulunur.

$$a = \frac{2e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{4 - a_0^2 \alpha}{a_0^2} \right) + \alpha e^{\varepsilon t}}}, \quad b = \left(a_0 - \frac{7\alpha}{16} a_0^3 \right) e^{\frac{\varepsilon t - \ln[4 + (e^{\varepsilon t} - 1)\alpha a_0^2]}{2}},$$

$$\beta = \frac{1}{8} \left(a^2 \alpha - a - \frac{7}{8} a^5 \alpha^2 \right) \varepsilon^2 t \quad (4.204)$$

4.4.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.181)'ye $\tau = \omega t$ zaman dönüşümü uygulanır.

$$\omega^2 u'' + u - \varepsilon(1 - \alpha u^2) \omega u' = 0 \quad (4.205)$$

Burada türev içeren ifadeler, yeni zaman değişkenine göre türevlenir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.206)$$

Yeni zaman türevleri aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.207)$$

Bağımlı değişken ve tabii frekans seriyeye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.208)$$

$$1 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (4.209)$$

Bu seri açılımlar denklem (4.205)'e yerleştirilir. Denkleme ve başlangıç şartlarına mertebe ayırtması uygulanırsa aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$O(1): \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (4.210)$$

$$O(\varepsilon): \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 + \omega D_0 u_0 (1 - \alpha u_0^2) \\ u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0 \quad (4.211)$$

$$O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2)(u_0) + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 \\ + \omega (D_0 u_1 + D_1 u_0)(1 - \alpha u_0^2) - 2\alpha \omega u_0 u_1 (D_0 u_0) \quad (4.212)$$

Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + k.e. \quad (4.213)$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.214)$$

Denkleme başlangıç şartları uygulanır.

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.215)$$

Birinci mertebe çözüm, denklem (4.211)'e yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 A + \omega_1 A + \omega i A - \alpha \omega i A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.216)$$

olarak elde edilir. Seküler ifadede, $D_1 A = 0$ durumunda ω_1 ifadesi kompleks yapıdadır. Bu nedenle

$$\omega_1 = 0 \quad (4.217)$$

olarak seçilir. Bu durumda $D_1 A \neq 0$ olacaktır. Bu ifade çözülürse

$$D_1 A = \frac{1}{2\omega} (A - A^2 \bar{A} \alpha) \quad (4.218)$$

olarak elde edilir. Denklem (4.218)'den genlik ve faz ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a(T_1) = \frac{2e^{\frac{T_1}{2\omega}}}{\sqrt{\left(\frac{4-a_0^2\alpha}{a_0^2}\right) + \alpha e^{\frac{T_1}{\omega}}}}, \quad \beta = \beta(T_2) \quad (4.219)$$

ε mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = iBe^{iT_0} + \frac{\alpha i}{8\omega} A^3 e^{3iT_0} + ke = -b \sin(T_0 + \gamma) - \frac{\alpha}{32\omega} a^3 \sin(3T_0 + 3\beta) \quad (4.220)$$

Denkleme başlangıç koşulları uygulanır ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$b(0) = \frac{1}{2\omega} \left(a_0 - \frac{7}{16} a_0^3 \alpha \right), \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.221)$$

Son mertebede, denklemler (4.220) ve (4.70), denklem (4.212)'da yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} 2\omega^2 D_1 B - \omega^2 D_1^2 A - 2i\omega^2 D_2 A + \omega_2 A - \omega B + \omega D_1 A + 2\omega\alpha A\bar{A}B + \frac{1}{8}\alpha^2 \bar{A}^2 A^3 \\ - 2\omega\alpha A\bar{A}D_1 A - \omega\alpha A^2 \bar{B} - \omega\alpha A^2 D_1 \bar{A} = 0 \end{aligned} \quad (4.222)$$

Denklem (4.222)'de ilk olarak B terimi içeren ifadeler yazılır.

$$2\omega^2 D_1 B - \omega B + 2\omega\alpha A\bar{A}B - \omega\alpha A^2 \bar{B} = 0 \quad (4.223)$$

Denklem (4.223)'den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$b = \left(\frac{a_0}{\omega} - \frac{7\alpha a_0^3}{16\omega} \right) e^{\frac{-\ln(4+\alpha a_0^2(-1+e^{\alpha t})) + \varepsilon t}{2}}, \quad \beta = \gamma \quad (4.224)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.222)'de geriye kalan diğer ifadeler aşağıda görüldüğü gibi sadece A terimi içeren ifadelerdir.

$$-\omega^2 D_1^2 A - 2i\omega^2 D_2 A + \omega_2 A + \omega D_1 A + \frac{1}{8} \alpha^2 \bar{A}^2 A^3 - 2\omega \alpha A \bar{A} D_1 A - \omega \alpha A^2 D_1 \bar{A} = 0 \quad (4.225)$$

Aynı şekilde ilk olarak $D_2 A = 0$ seçilir ise ω_2 kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur. Cebirsel işlemler sonrasında denklem(4.225)'den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a(T_1) = \frac{2e^{\frac{T_1}{2\omega}}}{\sqrt{\left(\frac{4 - a_0^2 \alpha}{a_0^2}\right) + \alpha e^{T_1/\omega}}}, \quad b(T_1) = \left(\frac{a_0}{\omega} - \frac{7\alpha a_0^3}{16\omega}\right) e^{\frac{-\ln\left(4 + \alpha a_0^2 \left(-1 + e^{T_1/\omega}\right)\right) + T_1}{2\omega}},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{4} \left(-1 + \alpha a^2 - \frac{7\alpha^2}{32} a^4 \right) \quad (4.226)$$

Frekans denklemi

$$\omega^2 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(-1 + \alpha a^2 - \frac{7\alpha^2}{32} a^4 \right) \quad (4.227)$$

olarak elde edilir. İfade çözülürse frekans aşağıdaki gibi bulunur.

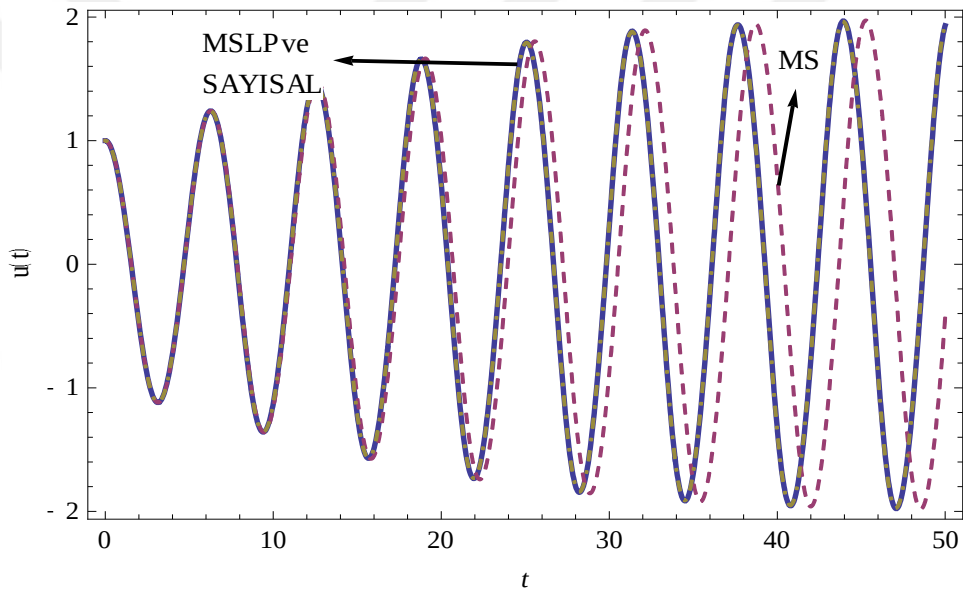
$$\omega = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{4} a^2 - \frac{7\alpha^2}{128} a^4 \right)} \quad (4.228)$$

Nihai çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

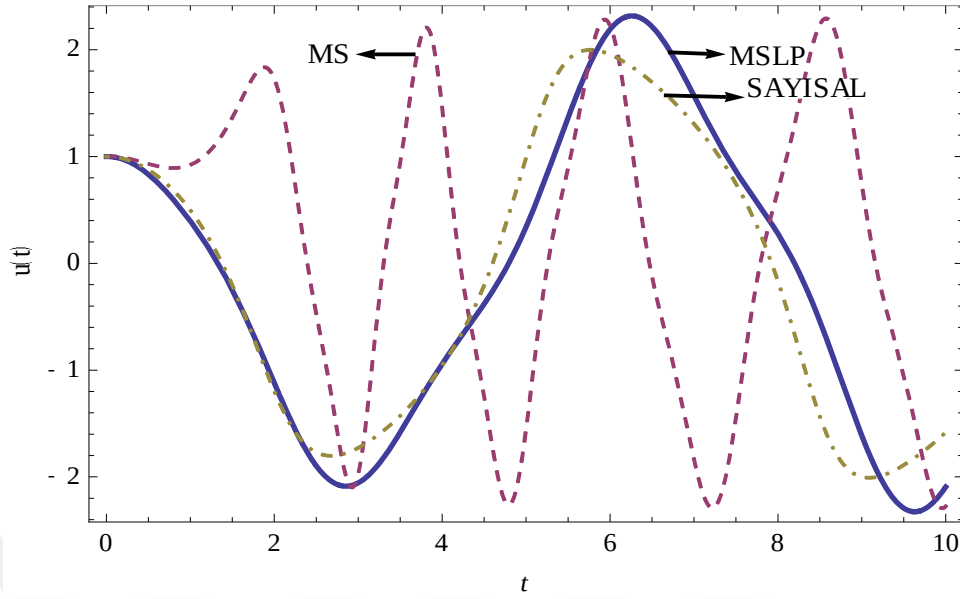
$$u = a \cos(\omega t) - \varepsilon \left[b \sin(\omega t) + \frac{\alpha}{32\omega} a^3 \sin(3\omega t) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (4.229)$$

4.4.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması

İlk olarak $\varepsilon = 0.1$ alınarak zayıf nonlinear sistem için karşılaştırma yapılmıştır. Şekil 4.15’de görüldüğü gibi zaman parametreleri arttıkça çok zaman ölçekli çözümü sayısal çözümünden uzaklaşmaktadır. Ancak MSLP, sayısal çözüm ile uyum içindedir. Sistemde $\varepsilon = 1$ alınarak karşılaştırma yapıldığında analitik çözümlerin sayısal çözümünden ayrıldığı görülmektedir. MSLP çözümünün sayısal çözüm ile kısmen uyuşmasına rağmen çok zaman ölçekli çözümü ile çok farklı sonuçlar vermektedir.



Şekil 4. 15. Van Der Pol denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 0.1(a_0 = 1, \alpha = 1)$



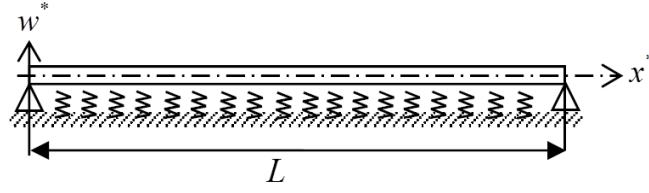
Şekil 4. 16. Van Der Pol denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması
 $\varepsilon = 1(a_0 = 1, \alpha = 1)$

4.5. Doğrusal Olmayan Elastik Bir Zemin Üzerindeki Kirişin Zorlamalı Titreşim Hareketi

Bu bölümde doğrusal olmayan elastik bir zemin üzerindeki kirişin zorlamalı titreşim hareketi incelenecektir. Öncelikle Hamilton prensibi uygulanarak sistemin hareket denklemi elde edilecektir. MSLP yöntemi, Karahan ve Pakdemirli [77] tarafından belirtilen kısmi diferansiyel denkleme direkt uygulanmıştır. Bu bölümde, denklem önce diskrite edilip sonra MSLP ve çok zaman ölçekli yöntemleri ile çözülecektir.

4.5.1. Sistemin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi ve Denklemin Boyutsuzlaştırılması

Doğrusal olmayan elastik bir yatak üzerine basit-basit mesnetlenmiş bir Euler-Bernoulli kirişi Şekil 4.17’de görülmektedir.



Şekil 4. 17. Doğrusal olmayan elastik bir yatak üzerine basit-basit mesnetlenmiş bir Euler-Bernoulli kirişi [77]

Burada, kirişin enine deplasmanı w^* , kirişin kesit alanı A , kirişin uzunluğu L , kirişin tarafsız eksene göre atalet momenti I , kirişin yoğunluğu ρ , Young modülü E , elastik yatağın lineer ve nonlinear yay katsayıları sırasıyla k_1 ve k_2 olarak tanımlanmaktadır.

Sistemin hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak elde edilecektir. Hamilton prensibi bir sistemin t_1 ve t_2 gibi iki an arasındaki tüm hareketini göz önüne almaktadır. Prensip, dinamik problemleri skaler bir integralin incelenmesine dönüştürmektedir. Prensibin en önemli avantajı, kullanılan koordinat sisteminden bağımsız olmasıdır. Genelleştirilmiş Hamilton prensibine göre bir sistem keyfi bir t_1 - t_2 zaman aralığında, kinetik enerjisinin varyasyonu ile kendisine etkimekte olan aktif kuvvetlerin yaptığı virtüel işler toplamının integrali sıfır olacak biçimde hareket etmesi olarak tanımlanır [78]. Hamilton prensibinin matematiksel formülasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} L dt = 0 \quad (4.230)$$

Lagrange (L) fonksiyonu kinetik ve potansiyel enerjilerin farkı olarak tanımlanır.

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} (T - V) dt = 0 \quad (4.231)$$

Hamilton prensibini uygulamak için öncelikle sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri yazılır.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{w}^{*2} dx^* \quad (4.232)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI w^{*''2} dx^* + \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(u^{*'} + \frac{w^{*'}2}{2} \right)^2 dx^* + \frac{1}{2} k_1 \int_0^L w^{*2} dx^* + \frac{1}{2} k_2 \int_0^L w^{*4} dx^* \quad (4.233)$$

Burada T kinetik enerjiyi, V ise potansiyel enerjiyi ifade eder. Potansiyel enerji denklemindeki ilk terim kirişin eğilmesinden kaynaklanan potansiyel enerjiyi, ikinci terim kirişin eğilmesi sırasında uzama etkisinden kaynaklanan potansiyel enerjiyi, üçüncü ve dördüncü terim ise elastik zemin üzerindeki yayların depo ettikleri potansiyel enerjileri ifade etmektedir.

Denklem (4.232) ve denklem (4.233), denklem (4.231)'de yerine yazılır.

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{w}^{*2} dx^* - \frac{1}{2} \int_0^L EI w^{*''2} dx^* - \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'}2 \right)^2 dx^* \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^L k_1 w^{*2} dx^* - \frac{1}{2} \int_0^L k_2 w^{*4} dx^* \right] dt^* = 0 \end{aligned} \quad (4.234)$$

Varyasyon integralin içine alınır.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L 2 \rho A \dot{w}^* \delta \dot{w}^* dx^* - \frac{1}{2} \int_0^L 2 EI w^{*''} \delta w^{*''} dx^* - \frac{1}{2} \int_0^L 2 EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'}2 \right) \left(\delta u^{*'} + w^{*'} \delta w^{*'} \right) dx^* \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^L 2 k_1 w^* \delta w^* dx^* - \frac{1}{2} \int_0^L 4 k_2 w^{*3} \delta w^* dx^* \right] dt^* = 0 \end{aligned} \quad (4.235)$$

Denklem (4.235)'deki integraller kısmi integrasyon uygulanılarak hesaplanır. Kısmi integral hesaplamaları için kullanılan formül yapısı aşağıdaki gibidir.

$$\int_0^L u dv = uv \Big|_0^L - \int_0^L v du \quad (4.236)$$

Denklem (4.235)'ye kısmi integrasyon uygulandıktan sonra aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \ddot{w}^* \delta w^* dx^* - \int_{t_1}^{t_2} EI w^{*'''} \Big|_0^L \delta w^* dt^* + \int_{t_1}^{t_2} EI w^{*'''} \Big|_L^0 \delta w^* dt^* - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI w^{*IV} \delta w^* dx^* dt^* \\ & - \int_{t_1}^{t_2} EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'^2} \right) \Big|_0^L \delta u^* dt^* + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'^2} \right)' \delta u^* dx^* dt^* \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L E'A \left[\left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'^2} \right) w^{*'} \right]' \delta w^* dx^* dt^* - \int_{t_1}^{t_2} E'A \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'^2} \right) w^{*'} \Big|_0^L \delta w^* dt^* \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (k_1 w^* + k_2 w^{*3}) \delta w^* dx^* dt^* = 0 \end{aligned} \quad (4.237)$$

Çift katlı integraller sistemin hareket denklemini, tek katlı integraller ise sistemin olası sınır şartlarını ifade eder. Çift katlı integraller birlikte yazılırsa kirişin enine titreşimini ifade eden aşağıdaki hareket denklemi elde edilir.

$$\rho A \ddot{w}^* + EI w^{*IV} - EA \left[w^{*'} \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'^2} \right) \right]' + (k_1 w^* + k_2 w^{*3}) = 0 \quad (4.238)$$

Aynı şekilde çift katlı integrallerden boyuna titreşimi ifade eden hareket denklemi elde edilir.

$$EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'^2} \right)' = 0 \quad (4.239)$$

Denklem (4.238), denklem (4.239) kullanılarak

$$EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*'^2} \right) = C(t^*) \quad (4.240)$$

şekline gelir. Bu ifade, denklem(4.239)'nin konuma bağlı olmadığını gösterir. Denklem (4.240)'de her iki tarafın tanım kümesi üzerinden integrasyon alınırsa

$$C(t^*) = \frac{EA}{2L} \int_0^L w^{*2} dx^* \quad (4.241)$$

elde edilir. Denklem (4.241), denklem (4.238)'de yerine yazılır ve düzenlenirse kirişin enine titreşimlerini ifade eden hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$EI \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \rho A \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \int_0^L \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 dx^* + k_1 w^* + k_2 w^{*3} = 0 \quad (4.242)$$

Elde edilen nonlinear diferansiyel denkleme sönüm ve zorlama etkileri dahil edilerek aşağıdaki kirişin enine titreşimlerini ifade eden boyutlu hareket denklemi elde edilir.

$$EI \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \rho A \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + \mu \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + k_1 w^* + k_2 w^{*3} = \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 dx^* \right] + F(x^*) \cos \Omega t^* \quad (4.243)$$

Burada μ sönüm katsayısını, F zorlama kuvvetinin genliğini, Ω ise zorlama frekansını ifade etmektedir. Kirişin olası sınır şartlarını vermek üzere tek katlı integraller yazılır.

$$\begin{aligned} & EI w^{*'}(0) \delta w^{*'}(0) - EI w^{*''}(L) \delta w^{*'}(L) + \left(EI w^{*'''}(L) - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*2} \right) w^{*'} \right) \delta w^*(L) \\ & - \left(EI w^{*'''}(0) + EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*2} \right) w^{*'} \right) \delta w^*(0) \\ & - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*2} \right) \delta u^*(L) + EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w^{*2} \right) \delta u^*(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.244)$$

Basit-basit mesnet için sınır şartları aşağıdaki şekildedir.

$$w^*(0, t^*) = 0, \quad \frac{\partial^2 w^*(0, t^*)}{\partial x^{*2}} = 0, \quad w^*(L, t^*) = 0, \quad \frac{\partial^2 w^*(L, t^*)}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (4.245)$$

Kiriş için enine titreşim hareketini tanımlayan hareket denklemine ve sınır şartlarına boyutsuzlaştırma uygulanır. Boyutsuz değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$w = \frac{w^*}{r}, \quad x = \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{t^*}{T} \quad (4.246)$$

Burada r kirişin kesit alanının atalet yarıçapıdır. Nihai boyutsuz denklem

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha_1 w + \alpha_2 w^3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \bar{F} \cos \Omega t \quad (4.247)$$

olarak elde edilir. Boyutsuz parametreler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$2\bar{\mu} = \frac{\mu^* L^2}{rA\sqrt{E\rho}}, \quad \bar{F} = \frac{F^* L^4}{EI r}, \quad \Omega = \frac{\Omega^* L^2}{r} \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad \alpha_1 = \frac{k_1 L^4}{EI}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2 L^4}{EA} \quad (4.248)$$

T bir zaman ölçeği olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (4.249)$$

Denklem (4.245) düzenlenirse boyutsuz sınır şartları

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(1, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.250)$$

şeklinde elde edilir. Nonlineer terimin ε mertebesine alınabilmesi için denklem (4.247)'de aşağıdaki dönüşüm uygulanır.

$$u = \frac{w}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (4.251)$$

Burada ε terimi sistemdeki perturbasyon parametresini temsil etmektedir. Sönüm ve zorlama terimleri aşağıdaki gibi mertebelenmiştir.

$$\bar{\mu} = \varepsilon^2 \mu, \quad \bar{F} = \varepsilon^2 f \quad (4.252)$$

Kısmi diferansiyel denklem ve sınır şartları son olarak aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon^2 \mu \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 u + \varepsilon \alpha_2 u^3 = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \varepsilon^2 f \cos \Omega t \quad (4.253)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.254)$$

4.5.2. Hareket Denkleminin Diskritize Edilmesi

Öncelikle adi diferansiyel denklem elde etmek amacıyla denklem (4.253) diskrite edilir. Yani lineer çözümün özfonksiyonları mekan çözümü kullanılarak kısmi diferansiyel denklemden adi diferansiyel denklem formuna indirgenir. İndirgenen lineer denklem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.255)$$

İndirgenen denkleme

$$W(x, t) = A \cos(\omega t + \vartheta) Y(x) \quad (4.256)$$

çözümü önerilir. Denklem (4.254)'deki sınır şartları denkleme uygulanırsa şekil fonksiyonu ve tabii frekansları veren ifade

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \sqrt{2} \sin n\pi x \\ \omega_n &= n^2 \pi^2, n=1,2,3... \end{aligned} \quad (4.257)$$

olarak elde edilir. Denklemin çözümünün bilinmeyen bir $q_l(t)$ fonksiyonu ile $Y_l(x)$ fonksiyonlarının çarpımlarının sonsuz toplamı olduğu varsayılır.

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} q_l(t) Y_l(x) \quad (4.258)$$

Burada $Y_l(x)$ fonksiyonu lineer problemin özfonksiyonlarını temsil etmektedir. Önerilen çözüm olan denklem (4.258), denklem (4.247)'e yerleştirilir. Denklemin tümü bir $Y_n(x)$ fonksiyonu ile çarpılır ve tanım kümesi üzerinden integral alınır. Nihai olarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + 2\varepsilon^2 \mu \dot{q} + \varepsilon(\alpha_2 K_1 - K_3) q^3 = \varepsilon^2 K_2 f \cos \Omega t \quad (4.259)$$

Burada sistemin doğal frekansı

$$\omega_0 = \sqrt{n^4 \pi^4 + \alpha_1}, \quad (4.260)$$

sistemdeki parametreler ise

$$K_1 = \frac{\int_0^1 Y^{iv} dx}{\int_0^1 Y^2 dx}, \quad K_2 = \frac{\int_0^1 Y dx}{\int_0^1 Y^2 dx}, \quad K_3 = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 (Y')^2 dx \int_0^1 Y^* Y dx}{\int_0^1 Y^2 dx} \quad (4.261)$$

olarak tanımlanır. Elde edilen adi diferansiyel denklem çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemi ile çözülecektir.

4.5.3. Çok Zaman Ölçekli Yöntem (MS)

Bu bölümde denklem (4.259) çok zaman ölçekli yöntem ile çözülecektir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.262)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.263)$$

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (4.264)$$

Sistemin deplasmanı aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$q(t; \varepsilon) = q_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.265)$$

Denklem (4.263) ve (4.265), denklem (4.259)'da yerine yazılır.

$$\begin{aligned} & (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2)) (q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2) + \omega_0^2 (q_0 + \varepsilon q_1 + \dots) \\ & + 2\varepsilon^2 \mu (D_0 + D_1 + \dots) (q_0 + \varepsilon q_1 + \dots) + \varepsilon (\alpha_2 K_1 - K_3) (q_0 + \varepsilon q_1 + \dots)^3 = \varepsilon^2 K_2 f \cos \Omega t \end{aligned} \quad (4.266)$$

Denkleme mertebe ayrıştırması yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$O(1): D_0^2 q_0 + \omega_0^2 q_0 = 0 \quad (4.267)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - (\alpha_2 K_1 - K_3) q_0^3 \quad (4.268)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2): D_0^2 q_2 + \omega_0^2 q_2 = & -2D_0 D_1 q_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) q_0 - 2\mu (D_0 q_0) \\ & - 3(\alpha_2 K_1 - K_3) q_0^2 q_1 + K_2 f \cos \Omega t \end{aligned} \quad (4.269)$$

Birinci mertebedeki çözüm için aşağıdaki ifade önerilir.

$$q_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + k.e. \quad (4.270)$$

Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.271)$$

Denklem (4.270), denklem (4.268)'de yerine yazılır ve seküler terimleri yok edecek olan denklem

$$-2i\omega_0 D_1 A - 3A^2 \bar{A} (\alpha_2 K_1 - K_3) = 0 \quad (4.272)$$

olarak elde edilir. Kompleks genlik, denklem (4.272)'de yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$a = a(T_2), \quad \beta = -\frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)}{8\omega_0} a^2 T_1 + \beta_0(T_2) \quad (4.273)$$

ε mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$q_1 = \frac{(\alpha_2 K_1 - K_3)}{8\omega_0^2} (A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + k.e) \quad (4.274)$$

Denklem (4.274) ve (4.270), denklem (4.269)'de yerine yazılır ve zorlama frekansı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \sigma \quad (4.275)$$

Baskın rezonans durumu için seküler terimleri yok edecek denklem

$$-D_1^2 A - 2i\omega_0 D_2 A - 2i\mu\omega_0 A - \frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)}{8\omega_0^2} A^3 \bar{A}^2 + \frac{K_2}{2} f e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (4.276)$$

elde edilir. Yüksek mertebeli çözümlerde genlik-faz modülasyon denklemlerini tanımlamak için Reconstitution yöntemi [79] kullanılır. D_2A ifadesini tanımlamak adına denklem (4.272), denklem (4.276)'da yerine yazılır.

$$2i\omega_0 D_2 A = \frac{15(\alpha_2 K_1 - K_3)}{8\omega_0^2} A^3 \bar{A}^2 - 2\mu i\omega_0 D_2 A + K_2 \frac{f}{2} e^{i\sigma T_2} \quad (4.277)$$

Kompleks genlik modülasyon denklemleri

$$2i\omega_0 \frac{dA}{dt} = 2i\omega_0 (\varepsilon D_1 A + \varepsilon^2 D_2 A) \quad (4.278)$$

veya

$$2i\omega_0 \frac{dA}{dt} = \varepsilon (-3(\alpha_2 K_1 - K_3) A^2 \bar{A}) + \varepsilon^2 \left(\frac{15(\alpha_2 K_1 - K_3)}{8\omega_0^2} A^3 \bar{A}^2 - 2\mu i\omega_0 + K_2 \frac{f}{2} e^{i\sigma T_2} \right) \quad (4.279)$$

olarak elde edilir. Denklemin gerçek ve sanal kısımları ayrılır ise genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir.

$$\dot{a} = \varepsilon^2 \left(-\mu a + \frac{K_2 f}{2\omega_0} \sin \gamma \right) \quad (4.280)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{3\varepsilon}{8\omega_0} (\alpha_2 K_1 - K_3) a^2 + \varepsilon^2 \left(\sigma + \frac{15(\alpha_2 K_1 - K_3)^2}{256\omega_0^3} a^4 + \frac{K_2 f}{2a\omega_0} \cos \gamma \right) \quad (4.281)$$

Buradaki (*) ifadesi t zaman değerine göre türevi ifade etmektedir. Faz aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\gamma = \sigma T_2 - \beta \quad (4.282)$$

Düzgün rejim durumu için $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$ olmalıdır. Frekans ayar parametresi olan σ ifadesi denklem (4.275)'da yerine konulursa aşağıdaki frekans tepki bağıntısı

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon \left(\frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)}{8\omega_0} a^2 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{15(\alpha_2 K_1 - K_3)^2}{256\omega_0^3} a^4 \pm \sqrt{\frac{K_2^2 f^2}{4a^2 \omega_0^2} - \mu^2} \right) \quad (4.283)$$

elde edilir. Nihai yaklaşık çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} w(t) &= \sqrt{\varepsilon} a \cos(\Omega t - \gamma) \sqrt{2} \sin \pi x \\ &+ \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{(\alpha_2 K_1 - K_3)}{32\omega_0^2} a^3 \cos(3(\Omega t - \gamma)) \sqrt{2} \sin \pi x + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.284)$$

Genlik ve faz modülasyon denklemleri, denklem (4.280) ve (4.281)'de belirtildiği gibidir.

4.5.4. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.259)'e, $\tau = \omega t$ zaman dönüşümü uygulanır.

$$\omega^2 q'' + \omega_0^2 q + 2\varepsilon^2 \mu \omega q + \varepsilon(\alpha_2 K_1 - K_3) q^3 = \varepsilon^2 K_2 f \cos \frac{\Omega}{\omega} T_0 \quad (4.285)$$

Buradaki türev içeren ifadeler, yeni zaman değişkenine göre türevlidir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden yazılırsa

$$T_0 = \tau = \omega t, T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.286)$$

elde edilir. Yeni zaman türevleri aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.287)$$

Bağımlı değişken ve tabii frekans seriye açılır.

$$q = q_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.288)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \quad (4.289)$$

Bu seri açılımlar denklem (4.285)'e yerleştirilir ve denklem merteye ayrıştırmasına tabi tutulursa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$O(1): \omega^2 D_0^2 q_0 + \omega^2 q_0 = 0 \quad (4.290)$$

$$O(\varepsilon): \omega^2 D_0^2 q_1 + \omega^2 q_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 q_0 + \omega_1 q_0 - (\alpha_2 K_1 - K_3) q_0^3 \quad (4.291)$$

$$O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 q_2 + \omega^2 q_2 = -2\omega^2 D_0 D_1 q_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) q_0 + \omega_1 q_1 + \omega_2 q_0 - 2\mu \omega D_0 q_0 - 3(\alpha_2 K_1 - K_3) q_0^2 q_1 + K_2 f \cos \frac{\Omega}{\omega} T_0 \quad (4.292)$$

Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$q_0 = A e^{iT_0} + k e = a \cos(T_0 + \beta) \quad (4.293)$$

Birinci merteye çözüm denklem (4.291)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 A + \omega_1 A - 3(\alpha_2 K_1 - K_3) A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.294)$$

olarak elde edilir. Seküler ifadede $D_1 A = 0$ seçimi için ω_1 değeri kompleks yapıda değildir. Bu yüzden seçim uygundur. Bu durumda

$$D_1 A = 0 \Rightarrow A = A(T_2) \quad (4.295)$$

$$\omega_1 = 3(\alpha_2 K_1 - K_3) A \bar{A} = \frac{3}{4}(\alpha_2 K_1 - K_3) a^2 \quad (4.296)$$

olarak bulunur. ε mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$q_1 = \frac{(\alpha_2 K_1 - K_3)}{8\omega^2} A^3 e^{3iT_0} + ke = \frac{(\alpha_2 K_1 - K_3)}{32\omega^2} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (4.297)$$

Zorlama frekansı ile dönüşüm frekansı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Omega = \omega(1 + \varepsilon^2 \sigma) \quad (4.298)$$

Denklem (4.293), (4.297) ve (4.298) son mertebenin çözümü için denklem (4.292)'da yerine yazılır ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_2 A + \omega_2 A - 2i\mu\omega A - \frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)}{8\omega^2} A^3 \bar{A}^2 + \frac{f}{2} K_2 e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (4.299)$$

elde edilir. Seküler ifadede, aynı şekilde ilk olarak $D_2 A = 0$ seçimi yapılır. Bu seçim için ω_2 değeri sanal olacaktır. Bu nedenle

$$\omega_2 = 0 \quad (4.300)$$

seçimi yapılır. Bu durumda geriye kalan denklem

$$2i\omega^2 D_2 A + 2\mu\omega i A + \frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)^2}{8\omega^2} A^3 \bar{A}^2 - \frac{K_2 f}{2} e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (4.301)$$

elde edilir. Denklem (4.301)'de kutupsal form kullanılır. Denklemin gerçekte ve sanal kısımları ayrılırsa genlik ve faz modülasyon denklemleri

$$D_2 a = -\frac{\mu}{\omega} a + \frac{K_2 f}{2\omega^2} \sin \gamma \quad (4.302)$$

$$D_2\gamma = \sigma - \frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)^2}{256\omega^4} a^4 + \frac{K_2 f}{2a\omega^2} \cos \gamma \quad (4.303)$$

elde edilir. Burada faz

$$\gamma = \sigma T_2 - \beta \quad (4.304)$$

olarak tanımlanır. Düzgün rejim durumu için $D_2 A = 0$ ve $D_2 \gamma = 0$ olmalıdır. Bu durum için denklem (4.302) ve (4.303) beraber çözülürse

$$\sigma = \frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)^2}{256\omega^4} a^4 \pm \sqrt{\frac{K_2^2 f^2}{4a^2 \omega^4} - \left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2} \quad (4.305)$$

elde edilir. Bu ifade denklem (4.298)'de yerine yazılırsa düzgün rejim durumu için zorlama frekansını veren denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Omega = \omega \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)^2}{256\omega^4} a^4 \pm \sqrt{\frac{K_2^2 f^2}{4a^2 \omega^4} - \left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2} \right) \right] \quad (4.306)$$

Burada

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} (\alpha_2 K_1 - K_3) a^2} \quad (4.307)$$

olarak tanımlanır. Sistemin yaklaşık genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sqrt{\varepsilon} a \cos(\Omega t - \gamma) \sqrt{2} \sin \pi x \\ &+ \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{(\alpha_2 K_1 - K_3)}{32\omega^2} a^3 \cos[3(\Omega t - \gamma)] \sqrt{2} \sin \pi x + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.308)$$

Genlik ve faz modülasyon denklemleri

$$\dot{a} = \varepsilon^2 \left(-\mu a + \frac{K_2 f}{2\omega} \sin \gamma \right) \quad (4.309)$$

$$\dot{\gamma} = \varepsilon^2 \left(\omega \sigma - \frac{3(\alpha_2 K_1 - K_3)^2}{256\omega^3} a^4 + \frac{K_2 f}{2a\omega} \cos \gamma \right) \quad (4.310)$$

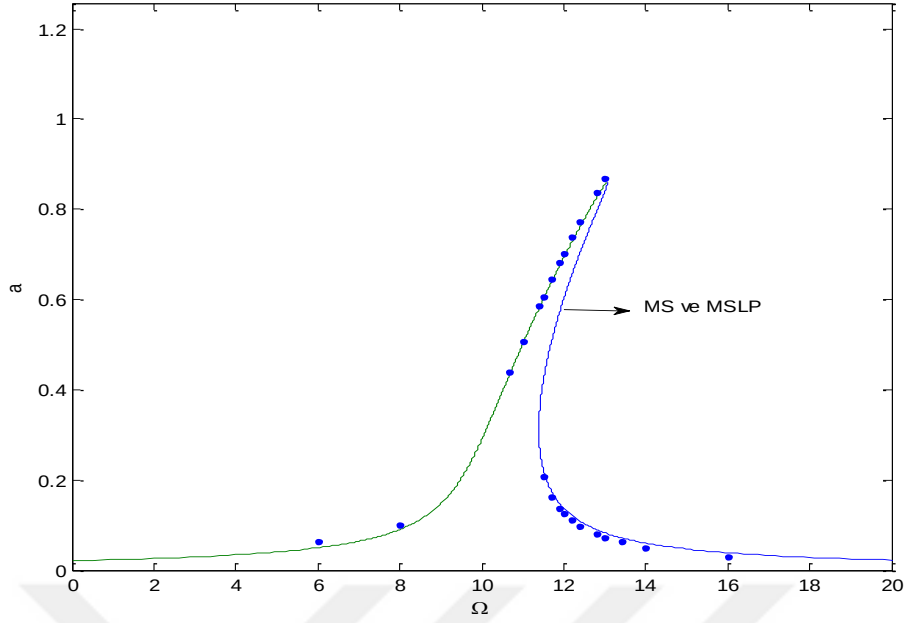
şeklinde elde edilir.

4.5.5. Yöntemlerin Karşılaştırılması

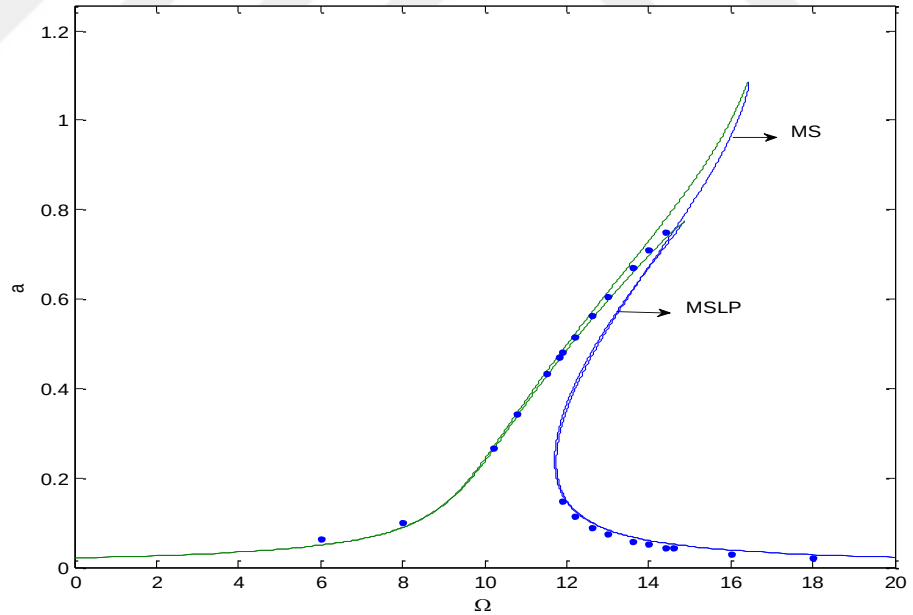
Burada iki yöntem için bulunan frekans tepki grafiği sayısal çözümler ile karşılaştırılacaktır.

Şekiller 4.18-4.20’de kübik nonlinearlik artırılarak karşılaştırma yapılmıştır. Bu şekillerde $\varepsilon = 1$, $\alpha_1 = 10$, $f = 5$, $\mu = 0.2$ değerleri alınmıştır. Şekil 4.18’de $\alpha_2 = 10$ alındığında belirtilen iki yöntem ile elde edilen çözümlerin sayısal çözümler ile uyumlu olduğu görülmüştür. Şekil 4.19’da, α_2 artırıldığında MSLP ve sayısal çözümün uyum içinde olduğu görülmesine rağmen çok zaman ölçekli çözümü genlik değeri bakımından farklılık göstermektedir. Şekil 4.20’de kübik nonlinearlik büyük ölçüde artırılarak $\alpha_2 = 500$ seçimi yapıldığında çok zaman ölçekli yöntem fiziksel olmayan sonuçlar göstermektedir. Bu durumun aksine MSLP yöntemi sayısal çözümler ile uyumluluk göstermeye devam etmektedir.

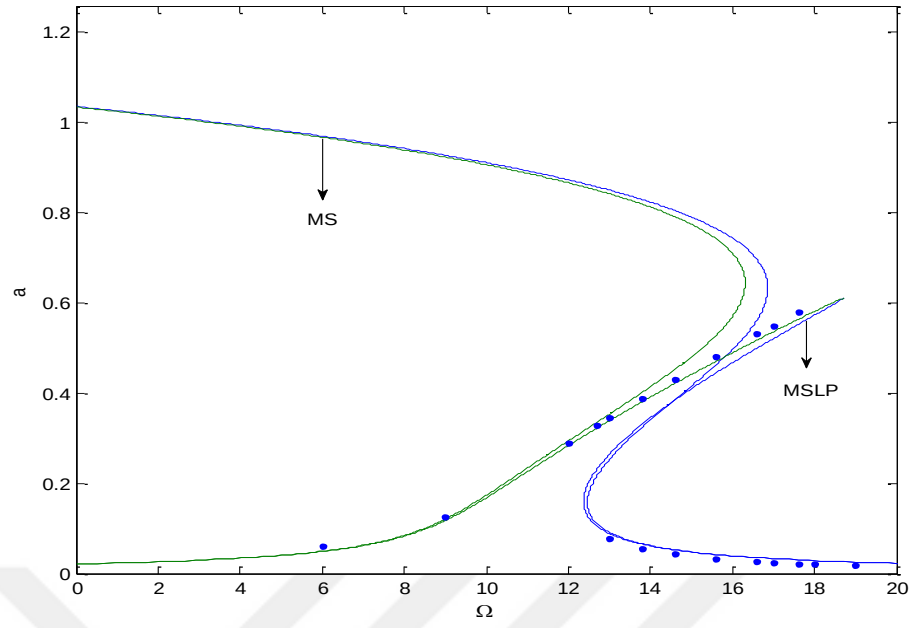
Şekil 4.21’de dış zorlama genliği artırılarak $f = 20$ için karşılaştırma yapılmıştır. Bu karşılaştırma için çok zaman ölçekli yöntem fiziksel olmayan çözümler verir iken MSLP yöntemi sayısal çözümler ile uygun sonuçlar verdiği görülmektedir.



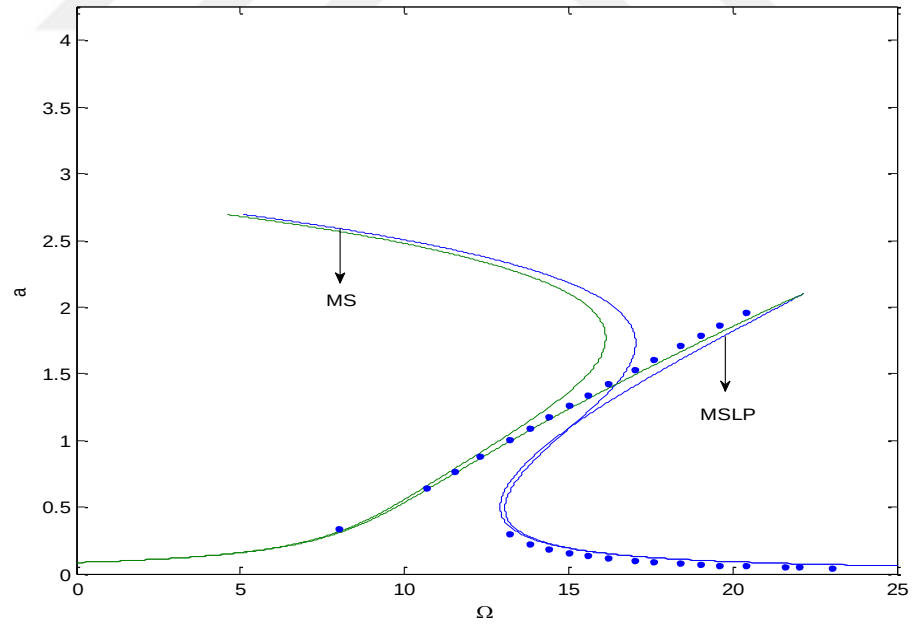
Şekil 4. 18. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ($\varepsilon = 1$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 10$, $f = 5$, $\mu = 0.2$)



Şekil 4. 19. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ($\varepsilon = 1$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 100$, $f = 5$, $\mu = 0.2$)



Şekil 4. 20. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ($\varepsilon = 1$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 500$, $f = 5$, $\mu = 0.2$)



Şekil 4. 21. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ($\varepsilon = 1$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 10$, $f = 20$, $\mu = 0.2$)

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kuvvetli nonlinear sistemler için de geçerli çözümler veren MSLP yöntemi nonlinear dinamik problemlerine uygulanmıştır. Bu yeni yöntem çok zaman ölçekli yöntem ve Lindstedt Poincare tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanmaktadır. Bu yöntemde iki yöntemin eksiklikleri giderilerek özellikle kuvvetli nonlinear sistemler için geçerli çözümler sağlayan sonuçlara ulaşılmıştır. Her iki yöntemin avantaj ve eksikliklerinden bahsedilecek olursa, Lindstedt-Poincare yönteminde zaman değişkenine bir dönüşüm yapılır ve perturbasyon açılımı zaman dönüşümüne de uygulanır. Bu sayede direkt açılımda patlamaya neden olan seküler terimler ayıklanarak tam çözüme yakın çözümler elde edilmektedir. Fakat bu yöntem, sabit genliğe sahip olan problemlerin çözümü için işe yaramaktadır. Değişken genliğe sahip olan problemlerin çözümü için çok zaman ölçekli yöntem uygulanabilmektedir. Ancak çok zaman ölçekli yöntem de bazı durumlarda sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlar göstermemektedir. Böylelikle, iki yöntemin avantajları bu yöntemlerin birleştirilmesi ile tek bir yöntemde (MSLP) toplanmaktadır.

Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemleri hem adi diferansiyel hem de kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Çok zaman ölçekli yöntem uygulanarak elde edilen yaklaşık çözümler ile sayısal çözümler sadece perturbasyon parametresinin küçük değerleri için uyumlu sonuçlar göstermiştir. Bu durumun aksine MSLP yöntemi, perturbasyon parametresinin farklı değerleri için her zaman sayısal çözümler ile uygun sonuçlar vermiş olup patlamaya yol açan durumlar ortaya çıkarmamıştır. Bu nedenle zayıf veya kuvvetli nonlinearliğe sahip olan problemlerin çözümünde MSLP yöntemi oldukça önem taşımaktadır.

Bu çalışmanın ilerisinde yapılabilecek çalışma konuları aşağıdaki şekildedir:

1. Yöntem integro diferansiyel denklemlere uygulanabilir.
2. Yöntem parametrik zorlamalı sistemlerin çözümü için kullanılabilir.

KAYNAKLAR

1. Çengel, Y. A., Engin, T. Mühendisler için Diferansiyel Denklemler. Sakarya Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü, Sakarya, 2008.
2. Battal, E. Zamana bağlı kısmi türevli denklemlerin sınıflandırılması ve nümerik çözümleri. Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak, 2012 (Yüksek Lisans Tezi).
3. Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G., Oturanç, G. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. Barış Yayınları, İzmir, 2011.
4. He, J. H. A new approach to nonlinear partial differential equations, Communication Nonlinear Science Numerical Simulation. 1997, 2, 230-235.
5. Nayfeh, A. H., Mook, T. Nonlinear Oscillations. John Wiley and Sons, New York, 1979.
6. Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley and Sons, New York, 1981.
7. Mickens, R. E. Oscillations to Perturbation Techniques. Word Scientific, New York, 1996.
8. Hu, H., Xiong, Z. G. Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods. Journal of Sound and Vibration. 2004, 278, 437-444.
9. Hu, H. A classical perturbation technique which is valid for large parameters. Journal of Sound and Vibration. 2004, 269, 409.
10. Xu, L. Determination of limit cycle by He's parameter-expanding method for strongly nonlinear oscillators. Journal of Sound and Vibration. 2007, 302, 178-184.
11. He, J. H. Linearized Perturbation Technique and its Applications to Strongly Nonlinear Oscillators. Computers and Mathematics with Applications. 2003, 45, 1-8.
12. He, J. H. Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part I: expansion of a constant. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2002, 37, 309-314.
13. He, J. H. Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part II: a new transformation. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2002, 37, 309-320.
14. Liao, S. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. Applied Mathematics and Computation. 2004, 147, 499-513.

15. Leung, A., Guio, Z. Homotopy perturbation for conservative Helmholtz–Duffing oscillators. *Journal of Sound and Vibration*. 2009, 325, 287–296.
16. Ge, M., Hsiao, C., Chen, Y., Chang, C. Chaos and chaos control for a two-degree-of-freedom heavy symmetric gyroscope. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2007, 8, 89-100.
17. He, J. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation*. 2003, 135, 73-79.
18. He, J. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities. *Applied Mathematics and Computation*. 2004, 151, 287-292.
19. Aksoy, Y., Pakdemirli, M. New perturbation iteration solutions for Bratu-type equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2010, 59, 2802-2808.
20. Aksoy, Y., Pakdemirli, M., Abbasbandy, S., Boyacı, H. New perturbation-iteration solutions for nonlinear heat transfer equations. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. 2012, 22, 814-828.
21. Karahan, M. Kuvvetli Nonlineer Dinamik Problemlerini Çözmede Alternatif Perturbasyon Yöntemlerinin Geliştirilmesi. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Manisa, 2010 (Doktora Tezi).
22. Pakdemirli, M., Karahan, M., Boyacı, H. A New Perturbation Algorithm with Better Convergence Properties: Multiple Scales Lindstedt Poincare Method. *Mathematical and Computational Applications*. 2009, 14, 31-44.
23. Pakdemirli M., Karahan, M. A new perturbation solution for systems with strong quadratic and cubic nonlinearities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2010, 33, 704-712.
24. Pakdemirli, M., Karahan M., Boyacı, H. Forced Vibrations of Strongly Nonlinear Systems with Multiple Scales Lindstedt Poincare Method. *Mathematical and Computational Applications*. 2011, 16, 879-889.
25. Kırıl, Z. Mekanik Titreşimler Ders Notları Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü.
26. Özhan, B. Kübik nonlineer bir sürekli ortam sisteminin dış zorlamalı ve parametrik titreşimlerine genel bir yaklaşım. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Manisa, 2009 (Doktora Tezi).
27. Ağırseven, D. Bazı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin homotopi perturbasyon ve homotopi analiz metotları ile çözümlerinin analizi üzerine. Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009 (Doktora Tezi).
28. Aksoy, Y. Yeni bir perturbasyon-iterasyon metodu ve mühendislik problemlerine uygulamaları. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Manisa, 2013 (Doktora Tezi).

29. Özek, M. A. Perturbasyon metotlar ve bu metotların diferansiyel denklemlere uygulanması. Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Isparta, 2013.
30. Lighthill, M.J. The diffraction of blast. Proceedings of the Royal Society A Mathemaical, Physical and Engineering Sciences. 1949, 198, 454–470.
31. Shivamoggi, B. K. Perturbation Methods for Differential Equations. Springer Science+Business Media, Birkhauser Boston, 2003, 41-50.
32. Krylov, N., Bogoliubov, N. N. Introduction to Nonlinear Mechanics, Princeton University Press, USA, 1947.
33. He, J. H. Homotopy perturbation technique. Calculation Methods Applications Mechanical Engineering. 1999, 178, 257–262.
34. He, J. H. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2000, 35(1), 37–43.
35. Merdan, M., Khaniyev, T. Variational Iteration and Homotopy Perturbation Method for Solving a Three Species Food Chain Model. Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, Afyon, 2008, 8, 27-36 s.
36. Kadakal, H. Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Perturbasyon Metodu ile Yaklaşık Analitik Çözümleri. T.C. Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir, 2011.
37. Adomian, G., Rach, R. Modified Decomposition Solution of Linear and Nonlinear Boundary-Value Problems. Nonlinear Analysis. 1994, 23(5), 615-619.
38. Adomian, G. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. Kluwer Academic Publishers. Boston, 1994.
39. Liao, S.J. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. Shanghai Jiao Tong Üniversitesi. 1992 (Doktora Tezi).
40. Liao, S.J. An explicit, totally analytic approximation of Blasius' viscous flow problems. International Journal of Non-Linear Mechanics. 1999, 34 (4), 759–778.
41. Liao, S.J. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method. Chapman & Hall/ CRC. 2003.
42. Akkuş, S. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümlerinde Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Perturbasyon Metodunun Karşılaştırılması. T.C. Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kahramanmaraş, 2009 (Yüksek Lisans Tezi).

43. Guo, Z. J., Leung, A. Y. T., Ma, X. Solution procedure of residue harmonic balance method and its applications. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*. 2014, 57(8), 1581–1591.
44. Ju, P. Global residue harmonic balance method for Helmholtz-Duffing oscillator. *Applied Mathematical Modelling*. 2015, 39(8), 2172-2179.
45. Gottlieb, H. P. W. Harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations. *Journal of Sound and Vibration*. 2004, 271, 671-683.
46. Wu, B. S., Lim, C. W., Sun, W. P. Improved harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations. *Physics Letter A*. 2006, 354,95-100.
47. Topçu, A. Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 2014.
48. Inokuti, M., Sekine, H., Mura, T. General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics. *Variational Method in the Mechanics of Solids*. Pergamon Press. New York, 1978, 159-162.
49. He, J. H. Variational iteration method for delay differential equations. *Communication Nonlinear Science Numerical Simulation*. 1997, 2(4), 235-236.
50. He, J. H. A variational iteration method for nonlinearity and its applications. *Mech. Practice*. 1998, 20(1), 30-32.
51. He, J. H. Variational iteration approach to 2.spring system. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 1998, 17(2), 221-223.
52. He, J. H. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998, 167(1-2), 57-68.
53. He, J. H. Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 167 (1-2), 1998, 69-73
54. He, J. H. Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International Journal of Nonlinear Mechanics*. 1999, 34(4), 699-708.
55. Wazwaz, A. M. The variation method for exact solutions of Laplace equation. *Pyhsics Letters A*. 2007, 363, 260- 262.
56. Wazwaz, A. M. The variational iteration method for rational solutions for KdV,K(2,2), burgers and cubic Boussinesq equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007, 207, 18-23.
57. Pakdemirli, M. Perturbation-iteration method for strongly nonlinear vibrations. *Journal of Vibration and Control*. 2015.

58. Pakdemirli, M., Boyacı, H., Şenol, M., Aksou, Y. A new perturbation iteration approach for first order differeantial equations. *Mathematical and Computational Applications*. 2011,16, 890-899.
59. Lai, S. K., Lim, C. W. Accurate approximate analytical solutions for nonlinear free vibration of systems with serial linear and nonlinear stiffness. *Journal of Sound and Vibration*. 2007, 307, 720-736.
60. Telli, S., Kopmaz, O. Free vibrations of a mass grounded by linear and nonlinear springs in series. *Journal of Sound and Vibration*. 2006, 289, 689-710.
61. Hoseinia, S. H., Pirbodaghi, T., Asghari, M., Farrahi, G. H., Ahmadian, M. T. Nonlinear free vibration of conservative oscillators with inertia and static type cubic nonlinearities using homotopy analysis method. *Journal of Sound and Vibration*. 2008, 316, 263-273.
62. Bayat, M., Bayat, M., Bayat, M. An analytical approach on a mass grounded by linear and nonlinear springs in series. *International Journal of the Physical Sciences*. 2011, 6(2), 229-236.
63. Inman, D. J. *Engineering Vibration*; Prentice Hall. New Jersey. 1996.
64. Durmaz, S., Demirbağ, S. A., Kaya, M. O. Approximate solutions for nonlinear oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire. *Computers and Mathematics with Applications*. 2011, 61, 578-585.
65. Belendez, A., Hernandez, A., Belendez, T., Alvarez, M., Gallego, S., Ortuno, M., Neipp, C. Application of the harmonic balance method to a nonlinear oscillator typified by a mass attached to a stretched wire. *Journal of Sound and Vibration*. 2007, 302,1018-1029.
66. Sun, W., Wu, B., Lim, C. Approximate analytical solutions for oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire. *Journal of Sound and Vibration*. 2007, 300, 1042-1047.
67. Thylwe, K. E. Exact quenching phenomenon of undamped driven Helmholtz and Duffing oscillators. *Journal of Sound and Vibrations*. 1993, 161(2), 203-211.
68. Mirzabeigy, A., Yazdi, M. K., Nasehi, M. H. Approximate Periodic Solution for the Nonlinear Helmholtz-Duffing Oscillator via Analytical Approaches. *International Journal of Computational Mathematics*. 2014.
69. Akbarzade, M., Khan, Y., Kargar, A. Determination of periodic solution for the Helmholtz- Duffing oscillators by Hamiltonian approach and coupled homotopy-variational formulation. *International Journal of the Physical Sciences*. 2012, 7(4), 560 – 565.
70. Askari, H., Saadatnia, Z., Younesian, D., Yildirim, A., Yazdi, M. K. Approximate periodic solutions for the Helmholtz–Duffing equation. *Computers and Mathematics with Applications*. 2011, 62, 3894-3901.

71. Leung, A.Y.T., Guo, Z. Homotopy perturbation for conservative Helmholtz–Duffing oscillators. *Journal of Sound And Vibration*. 2009, 325, 287-296.
72. Guo, Z., Leung, A. The iterative homotopy harmonic balance method for conservative Helmholtz–Duffing oscillators. *Applied Mathematics and Computation*. 2010, 215, 3163-3169.
73. Hosen, M. A., Chowdhury, M. S. H. Analytical approximate solutions for Helmholtz Duffing Oscillator. *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2015, 10(23).
74. Cartwright, M.L. Balthazar van der Pol. *Journal of the London Mathematical Society*. 1960, 35, 367-376.
75. FitzHugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes. *Biophysics Journal*. 1961, 1, 445-466.
76. Nagumo, J., Arimoto, S. Yoshizawa, S. An active pulse transmission line simulating nerve axon., *Proceedings of the IEEE*. 1962, 50, 2061-2070.
77. Karahan, M., Pakdemirli, M. Vibration Analysis of a Beam on a Nonlinear Elastic Foundation. *Structural Engineering and Mechanics*. 2017
78. Gürgöze, M. Analitik Metotlarla Titreşimlerin Etüdü. İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Fakültesi Ofset Baskı Atölyesi. T.C. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yayın. İstanbul, 1984.
79. Nayfeh, A. H. Resolving controversies in the application of the method of Multiple Scales and Generalized of Averaging. *Nonlinear Dynamics*. 2005, 40, 61-102.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Beyza BOSTANCI

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : bostanci.beyza@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Suphi Koyuncuoğlu Anadolu Lisesi, 2006-2010

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 2010-2014

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 2014-2017