

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇARPIK DAĞILIMLAR İÇİN SHEWHART KONTROL GRAFİKLERİ

Handan ÖZARSLAN

TEMMUZ 18

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalında Handan ÖZARSLAN tarafından hazırlanan ÇARPIK DAĞILIMLAR İÇİN SHEWHART KALİTE KONTROL GRAFİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Süleyman ERSÖZ
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Burak BİRGÖREN _____
Üye (Danışman) : Prof. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL _____
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sibel AÇIK KEMALOĞLU _____

16/07/2018

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

ÇARPIK DAĞILIMLAR İÇİN SHEWHART KALİTE KONTROL GRAFİKLERİ

ÖZARSLAN, Handan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Prof. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL

Temmuz 2018, 108 sayfa

İstatistiksel süreç kontrolü, üretim sırasında kalite sorunlarının geciktirilmeden giderilmesi ve en ekonomik şartlarda verimliliğin en üst düzeyde tutulması için istatistiksel tekniklerin kullanılmasını kapsar. Süreç kontrolünde grafik yöntemi oldukça tercih edilen bir yöntemdir. Shewhart (1926) tarafından önerilen klasik kontrol grafikleri, kalite değişkeninin dağılımının normal dağılım olması varsayımına dayanır. Ancak kalite değişkeni her zaman normal dağılıma sahip olmayabilir. Kalite değişkeni normal dağılıma sahip olmadığında Shewhart tarafından önerilen klasik kontrol grafiklerinin kullanılması I. tip hata olasılığının artmasına neden olur ve yanıltıcı sonuçlar elde edilebilir.

Literatürde çarpık dağılımlar için $\bar{X}$ ve R kontrol grafiklerinin oluşturulması için, ağırlıklı varyans (AV), ağırlıklı standart sapma (ASS) ve çarpıklık düzeltmesi (ÇD) yöntemi gibi yöntemler önerilmektedir. Bir dağılımın simetrisinin belirlenmesinde kullanılan çarpıklık katsayısının tahmin edilmesi önemli bir problemdir. Bu çalışmada çarpıklık düzeltmesinde kullanılan çarpıklık katsayısı tahmin edicileri olarak Bowley'in çarpıklık katsayısı, Kelly'nin çarpıklık katsayısı ve momentlere dayalı çarpıklık katsayısı tahmin edicileri kullanılmıştır. Weibull dağılımı, Rayleigh

dağılım, Üstel dağılım ve Pareto dağılımı gibi çarpık dağılımlar için çarpıklık katsayıları farklı yöntemlerle hesaplanmıştır ve kontrol grafiklerinin nasıl çizdirileceği üzerinde durulmuştur. Uygulama çalışması ile ağırlıklı varyans, ağırlıklı standart sapma ve çarpıklık düzeltmesi yöntemleriyle oluşturulan grafiklerin I. tip hata olasılıkları hesaplanmıştır ve performansları Shewhart kontrol grafikleri ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: İstatistiksel süreç kontrolü, ağırlıklı varyans yöntemi, ağırlıklı standart sapma yöntemi, çarpıklık düzeltme yöntemi, Bowley'in çarpıklık katsayısı, Kelly'nin çarpıklık katsayısı, ortalama çalışma uzunluğu, Cornish-Fisher açılımı.

ABSTRACT

SHEWHART QUALITY CONTROL CHARTS FOR SKEWED DISTRIBUTIONS

ÖZARSLAN, Handan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Industrial Engineering, Ph. D. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL

July 2018, 108 pages

Statistical process control involves eliminating delayed quality problems during production and using statistical techniques to maximize efficiency in the most economical conditions. Graphical method in process control is a highly preferred method. The classical control cards proposed by Shewhart (1926) are based on the assumption that the distribution of the quality variable is a normal distribution. However, the quality variable may not always have normal distribution. The use of conventional Shewhart control charts when the quality variable does not have normal distribution leads to an increased probability of type I error and misleading results.

In the literature, methods such as weighted variance (WV), weighted standard deviation (WSD) and skew correction (SC) methods are proposed for the formation of control charts for skewed distributions. Estimating the skewness coefficient for determine the symmetry of a distribution is an important problem. In this study, Bowley's skewness coefficient, Kelly's skewness coefficient and skewness coefficient estimators based on the moments are used as the skewness coefficient estimators used in skew correction. The skewness coefficients for skewed distributions such as Weibull distribution, Rayleigh distribution, Exponential

distribution and Pareto distribution are calculated with different methods and it is emphasized how to draw control charts. Type I error probabilities of the graphs generated by weighted variance, weighted standard deviation and skew correction methods were calculated and the performances of the graphs were compared with Shewhart control charts by the application.

Key Words: Statistical process control, weighted variance method, weighted standard deviation method, skewness correction method, Bowley's skewness coefficient, Kelly's skewness coefficient, average run length, Cornish-Fisher expansion.



TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, önerileri ile beni yönlendiren, tecrübeleriyle, eğitici ve öğretici yaklaşımlarıyla doğruları bulmama yardımcı olan, gelişmemi ve ilerlememi sağlayan ve bilimsel konularda daima büyük destek olan tez yöneticisi hocam, Sayın Prof. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL'e, büyük fedakarlıklarla bana destek olan anneme, babama ve hem meslektaşım hem kardeşim olan Yücel ÖZARSLAN'a aynı zamanda desteğini her zaman hissettiğim kuzenim Eminenur GÜNEY ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1.GİRİŞ	1
1.1.Kaynak Özetleri	2
2.KALİTE KONTROL SÜRECİ İLE İLGİLİ TANIMLAR	7
2.1.Kalite Kontrol Grafiklerinin Tanımı.....	7
2.2.Kalite Kontrol Sürecinde Kullanılan Bazı İstatistiksel Dağılımların Yeri ve Önemi	9
2.2.1. Hipotez Testi ve Ortalama Çalışma Uzunluğu	10
2.2.2. Uyum İyiliği Testleri	12
2.2.2.1. Anderson-Darling Testi.....	12
2.2.2.2. Shapiro-Wilk W Testi	14
2.2.2.3. Pearson Kikare Uygunluk Testi.....	15
2.2.3. Normal Dağılım	16
2.2.4. Weibull Dağılımı.....	17
2.2.5. Rayleigh Dağılımı	19
2.2.6. Üstel Dağılım	21
2.2.7. Pareto Dağılımı	23
3.NORMAL DAĞILIMA SAHİP VERİLER İÇİN SHEWART KONTROL GRAFİKLERİNİN OLUŞTURULMASI	25
3.1. $\bar{X}$ Kontrol Grafiği.....	26
3.2. R Kontrol Grafiği	30

4.NORMAL DAĞILIMA SAHİP OLMAYAN VERİLER İÇİN KALİTE KONTROL GRAFİKLERİNİN OLUŞTURULMASI.....	34
4.1.Çarpık Dağılıma Sahip Veriler için Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması	34
4.1.1.Çarpıklık Katsayısının Ölçülmesi	35
4.1.1.1. Karl Pearson'ın Çarpıklık Katsayısı.....	36
4.1.1.2. Bowley'in Çarpıklık Katsayısı	38
4.1.1.3. Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı	40
4.1.1.4. Momentlere Dayalı Çarpıklık Katsayısı.....	41
4.1.2. Çarpıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması.....	42
4.1.2.1. Çarpıklık Düzeltmeli $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri	44
4.1.2.1.1. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Biliniyorken.....	44
4.1.2.1.2. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Bilinmiyorken.....	46
4.1.3. Ağırlıklı Varyans Yöntemiyle Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması.....	52
4.1.3.1. Ağırlıklı Varyans Yöntemiyle Çizilen $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri.....	52
4.1.3.1.1. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Biliniyorken	52
4.1.3.1.2. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Bilinmiyorken.....	54
4.1.4. Ağırlıklı Standart Sapma Yöntemiyle Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması.....	59
4.1.4.1. Ağırlıklı Standart Sapma Yöntemiyle Çizilen $\bar{X}$ Kontrol Grafiği	59
4.1.4.1.1. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Biliniyorken	59
4.1.4.1.2. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Bilinmiyorken.....	59
4.2.Basık Dağılıma Sahip Veriler İçin Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması.....	61
4.2.1. Basıklık Katsayısının Ölçülmesi	61
4.2.1.1. Momentlere Dayalı Basıklık Katsayısı.....	61
4.2.1.2. Moors'un Basıklık Katsayısı.....	62
4.2.2. Basıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması.....	62
4.2.2.1. Basıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Çizilen $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri.....	63
4.2.2.1.1.Kitlenin Dağılımı ve Parametreleri Biliniyorken.....	63
4.2.2.1.2.Kitlenin Dağılımı ve Parametreleri Bilinmiyorken.....	64

5.UYGULAMA.....	67
5.1. Üstel Dağılıma Sahip Verilerle Yapılan Bir Uygulama Çalışması.....	67
5.1.1. Shewhart Yöntemiyle Oluşturulan $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri	69
5.1.2. Çarpıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Oluşturulan $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri	71
5.1.2.1. Bowley'in Çarpıklık Katsayısı Kullanılarak Oluşturulan Çarpıklık Düzeltmeli $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri	72
5.1.2.2. Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı Kullanılarak Oluşturulan Çarpıklık Düzeltmeli $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri	74
5.1.2.3. Momentlere dayalı hesaplanan Çarpıklık Katsayısıyla Oluşturulan Çarpıklık Düzeltmeli $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri	76
5.1.3. Ağırlıklı Varyans Yöntemiyle Oluşturulan $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri...	79
5.1.4. Ağırlıklı Standart Sapma Yöntemiyle Oluşturulan $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri	81
5.1.5. Sonuç	82
5.2. Weibull Dağılımı ve I. Tip Hataların Karşılaştırılması	85
5.2.1. $\bar{X}$ Kontrol Grafiği için Karşılaştırma	87
5.2.2. R Kontrol Grafiği için Karşılaştırma	90
6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	94
KAYNAKLAR.....	96
EKLER	99
Ek 1.Cornish Fisher Açılımı	99
EK 2.Polinom İnterpolasyonu.....	103

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

Sayfa

2.1.	Kontrol grafiği sınırları.....	8
2.2.	Normal dağılım grafiği ve bazı olasılık değerleri	16
2.3.	Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	18
2.4.	Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	20
2.5.	Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	22
2.6.	Pareto dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	23
4.1.	Simetrik dağılım.....	35
4.2.	Pozitif çarpık dağılım.....	35
4.3.	Negatif çarpık dağılım	36
5.1.	Normal dağılım için uyum iyiliği grafiği.....	68
5.2.	Üstel dağılım için uyum iyiliği grafiği	69
5.3.	Shewhart yöntemi ile çizilen $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri	70
5.4.	Shewhart yöntemi ile çizilen R kontrol grafiği limitleri	71
5.5.	ÇD- $k_{3(B)}$ $\bar{X}$ kontrol grafiği	73
5.6.	ÇD- $k_{3(B)}$ R kontrol grafiği.....	73
5.7.	ÇD- $k_{3(K)}$ $\bar{X}$ kontrol grafiği	75
5.8.	ÇD- $k_{3(K)}$ R kontrol grafiği	76
5.9.	ÇD- k_3^* $\bar{X}$ kontrol grafiği.....	78
5.10.	ÇD- k_3^* R kontrol grafiği.....	78
5.11.	Ağırlıklı varyans yöntemi ile $\bar{X}$ kontrol grafiği	80
5.12.	Ağırlıklı varyans yöntemi ile R kontrol grafiği.....	80
5.13.	Ağırlıklı standart sapma yöntemi ile $\bar{X}$ kontrol grafiği	82
5.14.	Shewhart, ÇD, AV, ASS yöntemleriyle oluşturulan $\bar{X}$ kontrol grafiği	83
5.15.	Shewhart, ÇD, AV, ASS yöntemleriyle oluşturulan R kontrol grafiği.....	84
5.16.	β parametresine göre çarpıklık katsayısı değişimi	86

5.17.	$\beta = 0,85$ Weibull dağılımı $\bar{X}$ kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları..	89
5.18.	$\beta = 1,2$ Weibull dağılımı $\bar{X}$ kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları...	89
5.19.	$\beta = 3,55$ Weibull dağılımı $\bar{X}$ kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları.	90
5.20.	$\beta = 0,85$ Weibull dağılımı R kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları..	92
5.21.	$\beta = 1,2$ Weibull dağılımı R kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları	92
5.22.	$\beta = 3,5$ Weibull dağılımı R kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları	93



ÇİZELGELER DİZİNİ

ÇİZELGE

Sayfa

3.1. Kalite kontrol grafikleri için katsayılar.....	33
4.1. Pearson'ın çarpıklık katsayıları.....	38
4.2. Bowley'in çarpıklık katsayıları.....	39
4.3. Kelly'nin çarpıklık katsayıları.....	40
4.4. Momentlere dayalı hesaplanan çarpıklık katsayıları.....	42
4.5. Çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ kontrol grafiği sabitleri A_U^* ve A_L^*	49
4.6. Kontrol grafiği sabitleri (d_2^*, d_3^*, d_4^*).....	50
4.7. Çarpıklık düzeltmeli R kontrol grafiği sabitleri D_4^* ve D_3^*	51
4.8. Ağırlıklı varyans yöntemi için $\bar{X}$ kontrol grafiği sabiti W_U	55
4.9. Ağırlıklı varyans yöntemi için $\bar{X}$ kontrol grafiği sabiti W_L	55
4.10. Ağırlıklı varyans yöntemi için R kontrol grafiği sabiti V_U	57
4.11. Ağırlıklı varyans yöntemi için R kontrol grafiği sabiti V_L	58
4.12. Ağırlıklı standart sapma yöntemi için kontrol grafiği sabiti d_2^{ASS}	60
5.1. Üstel dağılıma ait veriler.....	67
5.2. Shewhart yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri.....	70
5.3. $\bar{C}_D(k_{3(B)})$ yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri.....	72
5.4. $\bar{C}_D(k_{3(K)})$ yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri.....	75
5.5. $\bar{C}_D(k_3^*)$ yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri.....	77
5.6. Ağırlıklı varyans yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri.....	79
5.7. Ağırlıklı standart sapma yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri.....	81
5.8. Yöntemlerin I. tip hata ve $O\check{C}U$ değerlerinin karşılaştırılması.....	85
5.9. β değerlerine göre çarpıklık katsayıları.....	86
5.10. β parametrelili Weibull dağılımı için dört yöntemle dayalı $\bar{X}$ kontrol grafiklerinin I. tip hataları.....	88

5.11. β parametrelili Weibull dağılımı için dört yöntemle dayalı R kontrol grafiklerinin I. tip hataları	91
--	----

SİMGELER DİZİNİ

$\bar{X}$	Ölçümlerin ortalaması
$\bar{\bar{X}}$	Ortalamaların ortalaması
R	Genişlik
$\bar{R}$	Genişliklerin ortalaması
$k_{3(P)}$	Pearson'ın çarpıklık katsayısı
$k_{3(B)}$	Bowley'in çarpıklık katsayısı
$k_{3(K)}$	Kelly'nin çarpıklık katsayısı
$k_{3(M)}$	Momentlere dayalı çarpıklık katsayısı
k_3^*	Çarpıklığın tahmin edicisi
k_4^*	Basıklığın tahmin edicisi

KISALTMALAR DİZİNİ

ÜKL	Üst Kontrol Limiti
AKL	Alt Kontrol Limiti
OÇ	Orta Çizgi
ÇD	Çarpıklık düzeltmesi
AV	Ağırlıklı varyans
ASS	Ağırlıklı standart Sapma
OÇU	Ortalama Çalışma Uzunluğu

Günümüzde teknoloji hızlı şekilde ilerlemekte, bilgiye ulaşmak çok çabuk ve kolay gerçekleşmekte, müşteri beklentileri de sürekli artmaktadır. İşletmelerin bu koşullara uyum sağlamaları için hızlı, verimli ve kaliteli üretim yapmaları zorunlu hale gelmektedir[1].

Kalite, müşteri memnuniyeti, verimlilik, esneklik, etkililik gibi birçok parametreyi ön plana çıkaran bir kavramdır. Bu yönüyle bütün bir yaşamı çevreler ve içine alır[2]. Kaliteyi, bir ürünün ya da hizmetin özelliklerinin kişilerin isteklerini karşılayabilme derecesi olarak tanımlamak mümkündür. Aynı zamanda kalite, müşteri tatminine yönelik ürün ve hizmet özelliklerinin toplamıdır. Müşterilerin tatmin derecesi ne kadar yüksekse, kalite de o oranda yüksek sayılır.

Üretimin ve hizmetin tüketici açısından en ekonomik ve en iyi yapılması için kalite kontrol çalışmalarını planlamak, geliştirmek ve sürdürmek gerekir. Çünkü kalite kontrolün öncelikli hedefi tüketicilerin isteklerini mümkün olan en ekonomik seviyede karşılayan ürün ve hizmetlerin üretimidir.

Üretim sistemlerinin büyümesi, işletmeler arası ilişkiler, rekabetin uluslararası nitelik kazanması, yaşam düzeyinin yükselmesi, tüketicilerin bilinçlenmesi ve tüketiciyi koruyan yasaların ortaya çıkışı endüstride istatistiksel kalite kontrol yöntemlerinin uygulanmasını zorunlu hale getirdi. İstatistiksel kalite kontrolün amacı, bir ürün ya da hizmetin istenen kalite seviyesine ulaşabilmesi için üretimin herhangi bir aşamasını denetlemektense üretimi oluşturan sürecin hepsini kontrol etmektir.

İstatistiksel süreç kontrolü, üretim sırasında kalite sorunlarının geciktirilmeden giderilmesi ve mümkün en ekonomik şartlarda verimliliğin en üst düzeyde tutulması için istatistiksel tekniklerin kullanılmasını kapsar. İstatistiksel süreç kontrolünde kullanılan veri toplama, veri analizi, histogramlar ve kalite kontrol grafikleri gibi pek çok yöntem ve teknik vardır.

Kalite kontrol grafiklerinin kullanılması fikri 1926 yılında Shewhart tarafından ortaya atılmıştır. Bu grafikler bir sürecin istatistiksel yöntemlerle kontrol altında tutulmasında en etkili araçlardır ve sürecin ne derece iyi işlediğini gösterirler.

Shewhart tarafından geliştirilen kalite kontrol grafikleri merkezi limit teoremine dayalıdır. Bu teorem ana kütleden alınan yeterli büyüklükteki örneklemelerin ortalamalarının normal dağıldığı varsayımına dayanır. Yine bu teorem yardımıyla normal dağılıma sahip olmayan değişik tipteki birçok olayı normal dağılım ile incelemek mümkündür.

Geleneksel Shewhart kontrol grafikleri kalite değişkeninin dağılımının normal ya da normale yakın olması varsayımına dayandırılmıştır. Dolayısıyla kalite değişkeni normal dağılıma sahip olmadığında süreci klasik kontrol grafikleriyle izlemek yanıltıcı olabilir. Birçok durumda ilgilenilen kalite değişkeninin gösterdiği dağılım normallikten uzak çarpık bir dağılım olabilir. Kitledeki değişkenlik nedeniyle çarpık dağılımlarda klasik kontrol grafiklerinin kullanılması çarpıklık arttıkça I. tip hata olasılığının artmasına yol açmaktadır. Bunun için örneklem büyüklüğünün artırılması önerilse de bu çözüm zaman ve maliyet açısından pahalı bir çözümdür.

Uygulamada normal dağılımdan sapmalar olduğu durumlarda Shewhart kontrol grafikleri çarpıklık düzeltmesi, ağırlıklı varyans, ağırlıklı standart sapma yöntemleriyle oluşturulabilmektedir. Bununla ilgili olarak Weibull, Rayleigh Üstel ve Pareto gibi bazı simetrik olamayan dağılımlar teorik olarak incelenmiştir. Bu dağılımlar için kontrol grafiği limitlerinin oluşturulması konusu ele alınmış, uygulamada Üstel dağılıma sahip veri seti için hesaplamalar gösterilmiştir.

1.1.Kaynak Özetleri

Bu konuyla ilgili yapılan pek çok çalışma bulunmaktadır.

D. S. Bai – I.S. Choi (1995) tarafından yapılan “Çarpık veriler için $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri” adlı çalışmada çarpık dağılıma sahip veriler için Ağırlıklı Varyans

yöntemine dayalı olarak $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği sınırlarının oluşturulması anlatılmıştır. Weibull, Bur ve Lognormal dağılan veriler için Ağırlıklı Varyans yönteminin I. tip hata olasılığı Monte Carlo simülasyonu yapılarak Shewhart ve Ferrell yöntemleriyle karşılaştırılmıştır.

Young Soon Chang - Do Sun Bai (2001) tarafından yapılan “Gerçek Çarpık Kitleler için Ağırlıklı Standart Sapmalı Kontrol Grafikleri” adlı çalışmada, bir orijinal standart sapma bölünerek elde edilen ağırlıklı standart sapma ile kontrol grafiği oluşturmak için basit bir yöntem önerilmiştir. Ağırlıklı standart sapma yöntemi çarpıklık derecesi ve yönüne göre standart sapmanın iki parçaya ayrılmasıyla elde edilen ağırlıklı standart sapmalara dayalı çarpık dağılımlar için deneysel bir yöntemdir. Bu yöntemle göre çarpık dağılım ortalamaya göre iki parçaya ayrılır ve her bir parça yeni simetrik dağılım olarak kullanılır. Bu çalışmada çarpık dağılımlarda kontrol grafiği sabitlerini tahmin etmek için basit formüller türetilmiştir. Ağırlıklı standart sapma yönteminin mevcut yöntemler üzerinde önemli iyileştirmeler gerçekleştirdiği görülmektedir. Özellikle süreç parametreleri bilinmediğinde ve örneklem boyutu küçük olduğunda önerilen ağırlıklı standart sapmalı ortalama grafiğinin son derece iyi olduğu gözlenmiştir.

Lai K. Chan ve Heng J. Cui (2002) “Çarpık Dağılımlar için $\bar{X}$ ve R Grafiklerinde Çarpıklık Düzeltmesi” adlı çalışmalarında çarpık süreç dağılımlarında $\bar{X}$ ve R kontrol grafikleri oluşturmak için çarpıklık düzeltmesi yöntemini önermektedirler. Grafiklerin simetrik olmayan kontrol limitleri örneklem çarpıklığının derecesine bağlı çıkmıştır. Eğer süreç dağılımının simetrik olduğu biliniyorsa $\bar{X}$ grafiği neredeyse Shewhart $\bar{X}$ grafiğiyle aynı olmuştur. Yeni grafikler Shewhart grafikleri ve ağırlıklı varyans yöntemiyle oluşturulan kontrol grafikleriyle karşılaştırılmıştır. Süreç dağılımı Weibull, Lognormal, Burr ve Binom ailelerinin bazı komşulukları olduğunda simülasyon çarpıklık düzeltmeli kontrol grafiklerinin normal şartlarda 0,0027’ye yakın I. tip hata olasılığına sahip olduğunu göstermiştir. Süreç dağılımı üstel olduğunda çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ ve R grafiklerinin sadece I. tip hata olasılıkları değil II. Tip hata olasılıklarının da 0,0027’ye Ağırlıklı Varyans ve Shewhart yöntemlerinden daha yakın olduğu görülmüştür. Simülasyon çalışması

Çarpıklık düzeltmesi, Ağırlıklı Varyans ve Shewhart yöntemlerinin I. tip hata olasılığının simetrik dağılımlar için uyumlu olduğunu göstermektedir ve arpıklık düzeltmesi yöntemi I. tip hata olasılığının 0,0027'ye yakın olması istenildiğinde Ağırlıklı Varyans ve Shewhart yöntemi üzerinde önemli bir iyileştirme sunmaktadır. Süreç dağılımlarının üstel olduğu bilindiğinde arpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ ve R grafiklerinin 0,0027'ye Ağırlıklı Varyans ve Shewhart yöntemiyle zilen grafiklerden daha yakın olduğu görülmektedir.

Betül Kan ve Berna Yazıcı (2006) tarafından yapılan “Burr Dağılan veriler için Bireysel Kontrol Grafikleri” adlı makalede Burr dağılımına sahip veriler için bireyler kontrol grafikleri arpıklık düzeltmesi yönteminin gelişimi gösterilmiştir. Burada kullanılan fonksiyon Chan ve Cui'nin modeline bağlıdır. Burr dağılımı, kontrol limitleri elde etmek için uygulanmıştır. $n=5$ ve $n=7$ için bir simülasyon çalışması tasarlanmıştır. $n=7$ iken arpıklık düzeltmesi yöntemiyle elde edilen kontrol grafiği limitleri Shewhart yönteminin limitlerinden daha geniş ve Alpha testinin limitlerinden daha küçük kmıştır. c Şekil parametresi bk değerli olduğunda  yöntem uyumlu olmuştur. Çarpıklık düzeltmesi yönteminin c Şekil parametresinin küçük değerleri için daha ılımlı olduğu anlaşılmıştır. Bu çalışmada karşılaştırılan kontrol grafiklerine göre veri setinin dağılımı Burr dağıldığında n bklğindeki geniş örneklem için arpıklık düzeltmesi yöntemiyle hesaplanan bireysel kontrol grafiği limitleri alpha yöntemiyle hesaplanan bireysel kontrol grafiği limitlerine yakındır. Özellikle c arttığında bu böyledir. Bu yüzden eğer veri seti Burr dağılırsa araştırmacılar Shewhart bireysel kontrol grafikleri yerine arpıklık düzeltmesiyle elde edilen bireysel kontrol grafiğini kullanmışlardır.

Berna Yazıcı ve Betül Kan (2008) tarafından yapılan “Küçük rneklemeler için Simetrik Olmayan Kontrol Limitleri” adlı çalışmada normal olmayan kitlelerde bireyler kontrol grafikleri için arpıklık düzeltmesi yönteminin gelişimi ele alınmıştır. Altta yatan dağılım çarpık olduğunda asimetrik kontrol limitleri kullanmak daha doğru olmuştur. Üç farklı dağılım Şekil parametrelerinin farklı kombinasyonları için incelenmiştir. Simülasyon alışması $n=2,3,4$ için tasarlanmıştır. Kontrol grafik limitleri Burr, Lognormal ve üstel veriler için elde edilmiştir. $n=2,3,4$ için arpıklık düzeltme metodunun st kontrol limiti ile alt kontrol limiti arasındaki

fark Shewhart metodundan daha geniş ve Alpha metodundan daha küçük olduğu gösterilmiştir. Ek olarak Burr dağılan verilerde c ve k şekil parametrelerinin büyük değerleri için üç yöntem de uyumlu çıkmıştır. Sigmanın büyük değerleri için çarpıklık düzeltmesi yönteminin Lognormal dağılan veriler için daha ılımlı olduğu görülmüştür. Dahası bireysel kontrol grafiklerinin kontrol limitleri içinde kalan tüm noktalar sürecin kontrolde olduğunu göstermektedir. $\sigma=0,5$ iken 10 ve 4 büyüklüğündeki örneklem kullanıldığında Shewhart bireysel kontrol grafiklerinde üst kontrol limitinin üzerinde nokta bulunmaktadır. Shewhart ve çarpıklık düzeltmesi yöntemi arasında düşük örneklem sayılarının farkı verilen örneklem sayısına göre değişmez. Bu makalede çarpıklığın etkisi göz ardı edilmemiştir. Bireyseller için kontrol grafiklerinin performansı üzerinde çarpıklığın etkisi güçlü olabilmektedir. Böylece eğer veri seti Burr, Lognormal, üstel dağıldıysa araştırmacılar Shewhart bireysel kontrol grafiklerine bir alternatif olarak çok kolay çizilen bireysel kontrol grafiklerini çarpıklık düzeltmesi yöntemiyle kullanmaktadır.

Karagöz Derya ve Hamurkaroğlu Canan (2012) tarafından yapılan “Çarpık Dağılımlar için Kontrol Grafikleri: Weibull, Gamma, Lognormal” adlı çalışmada çarpık dağılımlar için $\bar{X}$ ve R kontrol grafiklerinin kontrol limitleri, klasik, Ağırlıklı Varyans, ağırlıklı standart sapma ve çarpıklık düzeltmesi yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu yöntemler Monte Carlo simülasyonu kullanılarak karşılaştırılmıştır. Weibull, Gamma ve Lognormal dağılımlarının kontrol grafiklerinin I. tip hata olasılığı farklı alt grup boyutlarıyla karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçları çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hata olasılığının daha düşük olduğunu göstermiştir.

James Morrison (2012) tarafından yapılan “Kalite Kontrolünde Lognormal Dağılım” adlı çalışmada değiştirilmiş kalite kontrol grafiği çarpık dağılmış valve test verileri üzerinde başarılı bir şekilde kullanılmıştır ve standart kalite kontrol grafikleri verilerin doğru yorumlanmasında başarısız olmuştur. Tek pratik problem ne zaman standart grafik ve ne zaman değiştirilmiş grafik kullanılacağı karar verilirken ortaya çıkmıştır. Cevap standart grafiği kullanmak ve aslında var olan kontrol grafikleri üzerindeki herhangi tehlike eğilimi sinyallerini orijinal veriler için doğrulamak olmuştur. Eğer bu olmuyorsa dağılımın şeklinin incelenmesi gerekmektedir ve çarpık

olduğu tespit edilirse lognormal kontrol grafiği normal grafiğin yerine kabul edilmelidir.

B. Srinivasa Rao ve R. R. L. Kantam (2012) tarafından yapılan “Çarpık Dağılımlar için $\bar{X}$ ve R Grafikleri: Yarı Lojistik Dağılama Bağlı Bir Karşılaştırma” adlı çalışmada çarpık dağılımlar için $\bar{X}$ ve R grafikleri iki farklı yolla çizilmiştir. Bunlardan birincisi örneklem ortalaması ve aralığı için örneklem dağılımının yüzdeliklerinin kullanılmasıdır. Diğer bir yaklaşım ise çarpıklık katsayısına bağlı çarpıklık düzeltme yöntemidir. Her iki yaklaşımda da kapsama olasılıkları simülasyon yoluyla hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır. Bu makalede çarpık olan Yarı Lojistik dağılım çalışılmıştır. İlk olarak yüzdelikler ile $\bar{X}$ ve R kontrol grafiklerinin sabitleri belirlenmiş ikinci olarak da kontrol grafiklerinin sabitleri çarpıklık düzeltmesi yöntemiyle belirlenmiştir. Yarı Lojistik dağılımla modellenen süreç değişkenleri için kontrol grafikleri çizilmiştir.

M. Ch. Priya ve R. R. L. Kantam (2017) “Değişken Kontrol Grafikleri – Linear Failure Rate Dağılımı” adlı çalışmada çarpık bir dağılım olan Linear Failure Rate dağılımı ele alınmıştır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, dağılım fonksiyonunun tersi ve bazı momentleri verilmiştir. Dağılım fonksiyonunun tersi kullanılarak çeyrekliklere dayanan Bowley’in çarpıklık katsayısı ve yüzdeliklere dayanan Kelly’nin çarpıklık katsayısı hesaplanmıştır. Bu katsayılar ile kontrol grafiği limitleri bulunmuştur ve Kelly’nin çarpıklık katsayısı kullanılarak oluşturulan çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ kontrol grafiğinin verileri kapsama olasılığı açısından tercih edilebilir olduğu anlatılmıştır.

2.1. Kalite Kontrol Grafiklerinin Tanımı

Kalite isteklerini sağlamak ve gereksinimlerini yerine getirmek için kullanılan her türlü teknik ve faaliyet kalite kontrolü olarak adlandırılır. İşletmelerin üretim birimlerinde meydana gelen hataları saptamak ve eğilimleri görmek amacı ile kullanılan her türlü teknik ve araç kalite kontrol kapsamına girer[2].

Kalite kontrol ölçülerek elde edilen verilerin grafik şeklinde gösterilmesidir. Bu kontrol grafiklerinin amacı, süreçteki sapmaları ve sürecin kararlılığını göstermek ve kaliteyi iyileştirmektir.

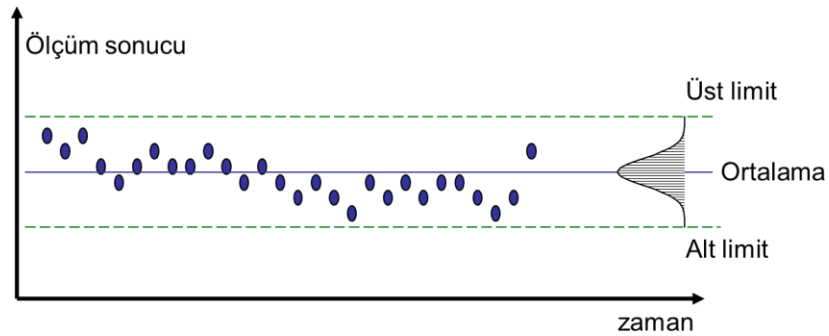
Kontrol grafiklerinin imalat, hizmet, araştırma ve yönetim faaliyetlerinin hemen her dalında kullanılabilmek olanağı vardır. Bilinçli olarak kullanılan kontrol grafikleri teknik ve yönetsel konularda doğru karar vermeye yardımcı olan araçlardır.

1924'te Bell Telefon Laboratuvarı'nda çalışan W.A. Shewhart kontrol grafiklerinin oluşturulması hakkında bir rapor düzenlemiş ve aynı şirkette çalışan H.F. Dodge ve H.G. Roming ile birlikte örnekleme ve kontrol yöntemlerini geliştirmişlerdir. Geliştirdikleri yöntem yalnızca ürünlerin kontrolünü değil, aynı zamanda ürünlerin üretildiği sürecin kontrolünü de amaçlamaktadır. Bu şekilde kalite kontrol alanında istatistiksel süreç kontrolü yerini almıştır.

İstatistiksel süreç kontrolünün amacı, süreci kontrol ederek kusurlu parçaların nedenlerini bulmak ve bunların tekrarlanmaması için önlemler almaktır. Bu hususta yardımcı olmak amacıyla çeşitli bilim adamları birtakım araçlar geliştirmişlerdir. Bunlardan frekans dağılımı, dağılım eğrisi ve kontrol grafikleri istatistiksel süreç kontrolünün temelini oluşturmaktadır. Frekans dağılımı, herhangi bir amaç için toplanan verilerin tekrarlanma sayısını gösterir. Kalite kontrolde en çok kullanılan dağılım eğrisi normal dağılım eğrisidir. Kontrol grafiklerini yatay ve dikey eksen, noktalar, orta çizgi (OÇ), üst kontrol limiti (ÜKL) çizgisi ve alt kontrol limiti (AKL)

izgisi oluşturmaktadır. Yatay eksen ölçülen örneklem numarasını, dikey eksen ise ürünün özelliğini gösterir. Noktalar hesaplanan değerleri gösterir. Değişimi gözlemlemek için noktalar çizgiler ile birleştirilir. Orta izgi, kalite özelliğinin ortalama değerini yani hedeflenen değeri gösterir. st ve alt kontrol limit çizgileri normal dağılımın esaslarına göre hesaplanır. Noktalar kontrol limitlerinin içinde rastgele bir dağılım göstererek bulunursa sürecin kararlı olduğu yani normal çalıştığı anlamına gelir. Noktalardan bir veya birkaçının kontrol limitlerinin dışında olduğu veya kontrol limitleri içinde bulunup belirli bir diziliş, kümeleme veya eğilim gösterdikleri durumda süreçte birtakım sistematik hataların var olduğu anlamına gelmektedir[3]. Kalite kontrol grafiklerinde sürecin kontrol altında olma koşullarını şöyle maddeleyebiliriz:

- AKL altında ve ÜKL üstünde nokta olmamalı
- Noktaların yaklaşık yarısı O altında yarısı O üstünde olmalı
- Noktaların büyük kısmı O’ye yakın olmalı
- Artış ya da azalış trendi gibi rasgeleliği bozan bir desen (sistematik davranış) göze arpmamalı[4]



şekil 2.1. Kontrol grafiği sınırları

X , ortalaması μ_x standart sapması σ_x olan rasgele değişken olsun. Kontrol grafiği sınırları (2.1)’de gösterildiği gibi oluşturulmaktadır.

$$\begin{aligned}
\dot{U}KL &= \mu_x + \phi \sigma_x \\
O\dot{C} &= \mu_x \\
AKL &= \mu_x - \phi \sigma_x
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

Burada ϕ katsayısı, OÇ' den üst kontrol sınırı ve alt kontrol sınırına olan mesafeyi belirlemede kullanılır. Genel bir yaklaşım olarak kontrol grafiği sınırları için $\phi = 3$ olarak alınır.

Uygulamada $\bar{X}$ (ortalama), R (aralık) ve S (standart sapma) gibi kontrol grafikleri çizilmektedir. $\bar{X}$ grafiği sürecin ortalamasını, R ve S grafikleri sürecin dağılımını kontrol etmek amacıyla kullanılır. Bu grafikler çift yani $\bar{X} - R$ grafikleri veya $\bar{X} - S$ grafikleri biçiminde oluşturulur. Bunlardan genellikle $\bar{X}$ ve R grafikleri kullanılmaktadır.

2.2.Kalite Kontrol Sürecinde Kullanılan Bazı İstatistiksel Dağılımların Yeri ve Önemi

Üretilen ürünlerin kalite kontrolünün yapılabilmesi için ürünlerden ölçümle elde edilen verilerin yorumlanması istatistiksel dağılım bilgisi kullanılarak yapılırsa daha güvenilir sonuçlar elde edilir. Örneklemin geldiği kitlenin dağılımı bilinirse çeşitli olasılık hesaplamaları yapmak mümkündür ve momentler, varyans, çarpıklık katsayısı, basıklık katsayısı gibi dağılım ölçüleri hesaplanabilir. Bu kısımda kalite kontrolünde çok karşılaşılan bazı istatistiksel dağılımlar anlatılacaktır. Ancak uygulamada hangi dağılımla çalışılacağına karar verilmesi önemli bir problemdir. Bu problemi bir hipotez testi olarak ifade edip uygun dağılıma karar vermeye yardımcı olan uyum iyiliği testlerine kısaca değinilecektir.

2.2.1. Hipotez Testi ve Ortalama Çalışma Uzunluğu

Hipotez, ana kütleden seçilen bir örnek grubu ile ilgili olarak yapılan varsayımdır. Aynı zamanda araştırmanın beklenen sonuçlarını ifade eden ve problemin altında yatan gerçekleri yansıtan önermelerdir[5]. Kontrol grafikleri ile istatistikteki hipotez testleri arasında sıkı bir bağlantı vardır. Kontrol grafikleri için sürecin istenilen sınırlar arasında bulunup bulunmadığını tespit etmek amacıyla yapılan araştırmada hipotez testleri uygulanır.

Hipotez testi bir hipotezin kabulü veya reddi için ortaya konan bir karar kuralından ibarettir. Kural, genellikle ana kütleden tesadüfen seçilen bir örnek grubunun veya gruplarının istatistik ölçülerine dayanılarak oluşturulur. Örnek grubu ana kütlenin bir temsilcisidir. İstatistik ölçülerinin ana kütleninkilerle eşit olması beklenemez. Dolayısı ile örnek grubuna dayanarak çıkarılacak sonuçlarda yani verilecek kararlarda bir hata söz konusudur.

Öncelikle doğruluğunun kanıtlanması istenen hipoteze sıfır hipotezi denir ve H_0 ile gösterilir. H_0 'ın yanlışlığı kanıtlandığı takdirde kabul edilecek hipoteze karşı hipotez denir ve H_1 ile gösterilir. Bu testler yapılırken dört olasılık gözlemlenir.

α : H_0 hipotezi doğru iken reddedilme olasılığı (I. tip hata)

$1-\alpha$: H_0 hipotezi doğru iken kabul edilme olasılığı (testin güvenilirlik düzeyi)

β : H_0 hipotezi doğru değil iken kabul edilme olasılığı (II. tip hata)

$1-\beta$: H_0 hipotezi doğru değil iken reddedilme olasılığı (testin gücü)

I. tip hata yapma olasılığına testin anlamlılık düzeyi denir ve α ile gösterilir. Araştırmacılar doğru olan sıfır hipotezini reddetmekten yani I. tip hata yapmaktan kaçınırlar. Dolayısıyla α hatasını küçültmeye çalışırlar[6].

I. tip hata, II. tip hata ve testin gücünü kontrol grafikleri açısından yeniden tanımlayalım.

I. tip hata: Süreç kontrol altındayken yeni işaretlenen nokta ile sürecin kontrol dışına çıktığına hükmedilmesi.

II. tip hata: Süreç kontrol dışındayken yeni işaretlenen nokta ile bunun fark edilmemesi, sürecin kontrol altında olduğuna hükmedilmesi.

$1-\beta$: Süreç kontrol dışındayken yeni işaretlenen nokta ile bunun fark edilmesi, sürecin kontrol dışına çıktığına hükmedilmesi olasılığı[4].

Süreçte ortalama ve standart sapma değişmediği sürece 0,0027 olasılıkla sınır ihlali görülecektir. Bu ortalama $1/0,0027 \cong 370$ noktada bir sınır ihlali anlamına gelir. Kalite kontrolünde böyle küçük olasılıkla bir nokta görüldüğünde ortalama ya da standart sapma değerinde bir değişiklik olduğuna diğer bir deyişle olasılık dağılımının değiştiğine hükmedilir. Aslında bu yaklaşım istatistiksel hipotez testlerinin temelindeki yaklaşım biçimidir. Bu yüzden de kontrol grafiğine işaretlenen her nokta ile görsel bir hipotez testi gerçekleştirildiği söylenir[4].

Ortalama çalışma uzunluğu (OÇU) kontrol grafiklerinin performansını ölçmek için kullanılan bir karşılaştırma yöntemidir. Bu ölçü süreç kontrol altındayken kontrol grafiği üzerine işaretlenen ortalama nokta sayısını gösterir[7]. OÇU,

$$\alpha = P(\text{I. tip hata}) \quad (2.2)$$

$$P(\text{I. tip hata}) = 1 - P(AKL < \bar{X} < ÜKL) \quad (2.3)$$

$$OÇU = \frac{1}{1 - P(AKL < \bar{X} < ÜKL)} \quad (2.4)$$

$$OÇU = \frac{1}{\alpha} \quad (2.5)$$

olarak hesaplanır [6].

2.2.2. Uyum İyiliği Testleri

Bazı araştırmalarda söz konusu tesadüfi değişkenin nasıl bir olasılık dağılımı gösterdiği bilinmez. Ana kütlede alınan bir örnek grubu üzerinde yapılan ölçme sonuçlarına göre değişkenin frekans dağılımı çizilir. Histogram ve benzeri grafiğin şekline bakılarak teorik olasılık dağılımları ile kıyaslama yapılır. Pratik olarak gözle yapılan kıyaslamalarda araştırmacının yeterli tecrübesi de varsa, değişkenin hangi dağılıma uyduğunu belirtmek mümkün olabilir. Ancak bu yöntem çoğu kez yeterli kabul edilemez. Verilen kararın geçerliliğinin belirli bir güvenilirlikle matematiksel olarak kanıtlanması istenir.

Uyum iyiliği testlerinin amacı teorik dağılım ile örnek grubuna ait dağılımlar arasındaki farkların belirli bir güvenilirlikle anlamlı olup olmadığına karar vermektir.

Normal dağılıma uygunluk testi, normal dağılım gösterdiği varsayılan bir değişken için ana kütlede alınan örnek grubuna ait değerlere dayanarak yapılan bir hipotez testinden ibarettir. Aslında ana kütle tam anlamı ile normal dağılım gösterse bile örnek grubunun dağılımında farklar bulunabilir. Örnek grubu ana kütlede bir temsilcisi olup ona ait değerlerin tahminlerini verir. Tahminlerde ise her zaman bir yanılma payı bulunması doğaldır.

Çok sayıda ve farklı yaklaşımlara göre geliştirilmiş normal dağılıma uygunluk testleri bulunmaktadır. Bu testlerden yaygın kullanımı olanlar aşağıda kısaca açıklanmıştır.

2.2.2.1. Anderson-Darling Testi

Anderson-Darling testi, Anderson ve Darling tarafından 1954 yılında deneysel dağılım fonksiyonu istatistiklerine dayanarak geliştirilmiştir. Çok güçlü normallik testlerinden birisidir. Kolmogorov-Smirnov testinin küçük ve büyük uç değerlere karşı duyarsızlığı giderilerek güçlendirilmiş ve değiştirilmiş bir biçimdir. Bu testin, bazı şartlarda Shapiro-Wilk testi kadar güçlü bir test olduğu saptanmıştır.

Anderson-Darling testi uygulanacak verilerin ham veriler olması gereklidir. Bu test, Normal, Weibull, Lognormal ve fonksiyonları bilinen dağılımlara uygulanabilir. Hesaplanan olasılık fonksiyonları ile n birimden elde edilen verilerin deneysel dağılım fonksiyonları arasındaki farkların beklenen uyum içinde olup olmadıkları test edilir[8].

Anderson-Darling testi büyüklük sırasına dizilmiş $X_{(i)}$ gözlemlerinin deneysel birikimli olasılık dağılımının birikimli standart normal dağılıma uygunluğu test eder. Bu nedenle her bir gözlemin standart dönüşümleri yapılarak elde edilen standart Z_i değerlerinin olasılıklarının standart normal dağılım ile uygunluğu araştırılır. Bu amaçla Anderson-Darling testinde A^2 test istatistiği hesaplanarak verilen Normal dağılımı formunda olup olmadığını test edilir[8].

Anderson-Darling test istatistiği A^2 aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\ln(F_0(Z_i)) + \ln(1 - F_0(Z_{n-i+1}))] \quad (2.6)$$

ya da

$$A^2 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\ln(F_0(Z_i)) + \ln(1 - F_0(Z_{n-i+1}))] - n \quad (2.7)$$

Burada $F_0(Z_i)$ Standart Normal dağılımın Z_i noktasındaki birikimli olasılık değerini; Z_i , $X_{(i)}$ gözlemlerinin standardize dönüşüm değerini, $Z_i \sim N(0,1)$ ve n örnek birim sayısını, i ise birikimli olasılık değeri hesaplanan i . gözlemi belirtmektedir[8].

A^2 test istatistiği küçük hacimli örnekler için düzeltilerek kullanılır. Düzeltilmiş A^2 istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A_{düz}^2 = A^2 \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right) \quad (2.8)$$

A^2 değerinin önemliliği, Normal dağılım varsayımı için türetilen A^2 kritik değerleri $A_{0.05}^2=0.752$, $A_{0.025}^2=0.873$, $A_{0.01}^2=1.035$ aracılığı ile belirlenir[8].

2.2.2.2. Shapiro-Wilk W Testi

Normallik testleri içinde en güçlü testlerden biri olarak kabul edilen Shapiro-Wilk W testi 1965'te Shapiro ve Wilk tarafından geliştirilmiştir. Normal dağılıma uyan kitleden rastgele seçilen n birimlik gözlemlerinin normal dağılıma uygunluğu bu test istatistiği ile kontrol edilir. W test istatistiği, gözlenen $X_{(i)}$ değerlerinin varyansı ve büyüklük sırasına dizilmiş $X_{(i)}$ gözlemlerinin sıra istatistiklerinden hesaplanan ortalama, varyans ve kovaryansları aracılığı ile belirlenen a_i ağırlıkları ile aşağıdaki gibi hesaplanır[8].

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.9)$$

Burada, $X_{(i)}$ sıralı gözlemleri, a_i , n sıralı gözlemin standart normal dağılım Z_i değerlerinden yararlanılarak hesaplanan ağırlık katsayılarıdır[8].

W test istatistiği, $0 < W \leq 1$ aralığında değişim gösterir. 1'e yakın değerler değişkenin Normal dağılıma sahip olduğunu, 0'a yakın değerler ise değişkenin normal dağılıma sahip olmadığını gösterir. W test istatistiğinin önemliliği, Shapiro ve Wilk tarafından verilen asimtotik kritik değerlere göre belirlenir[8].

Shapiro-Wilk testinin uygulanabilmesi için örneklem büyüklüğünün $7 < n \leq 2000$ olması ve veri setinde sapan değerlerin bulunmaması gerekir. Shapiro-Wilk testi sapan değerlere aşırı duyarlı bir testtir. Bu nedenle heterojen veri setlerinin ve sapan

değer içeren veri setlerinin normal dağılıma yakın olsa bile dağılımın normale uygun olmadığını göstermektedir[8].

2.2.2.3. Pearson Kikare Uygunluk Testi

Frekans dağılımı biçiminde k sınıfta sınıflanmış verilerin μ ve σ^2 parametrelili normal dağılıma uygunluğunu ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) test etmekte yararlanılan testlerden birisidir. $r \times 1$ ya da $1 \times c$ tipinde tablolaştırılmış verilerin gözlenen frekanslarının (G_i), μ ve σ^2 parametrelili normal dağılım varsayımına göre hesaplanan teorik frekansları (T_i) ile uyumluluğu aşağıdaki Pearson Kikare test istatistiği ile test edilir [8].

$$\chi_p^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(G_i - T_i)^2}{T_i} \quad (2.10)$$

Kikare uygunluk testi ile

$$\begin{aligned} H_0 : X &\sim N(\mu, \sigma^2) \\ H_1 : X &\not\sim N(\mu, \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

hipotezleri test edilir. χ_p^2 test istatistiğinin önemliliği $sd=k-1$ serbestlik dereceli Kikare dağılımının kritik değerleri yardımı ile belirlenir. Eğer test istatistiğinin gözlenme olasılığı $p > 0.05$ ise dağılımın, parametreleri verilen normal dağılıma uygun olduğu veya verilerin $N(\mu, \sigma^2)$ parametrelili normal dağılım gösterdiği, $p < 0.05$ ise değişkenin $N(\mu, \sigma^2)$ parametrelili normal dağılım göstermediği yönünde karar verilir[8].

Kikare uygunluk testinde teorik dağılım parametreleri (μ ve σ^2) nin tahminleri olan ve örnek frekans dağılımından hesaplanan örnek ortalama ve varyansı ($\bar{X}$ ve S^2) kullanılır. χ_p^2 test istatistiğinin önemliliği $sd=k-3$ serbestlik dereceli Kikare dağılımının kritik değerlerine göre belirlenir. Kikare uyum iyiliği testi SPSS, Minitab gibi paket programları aracılığı ile yapılabilmektedir[8].

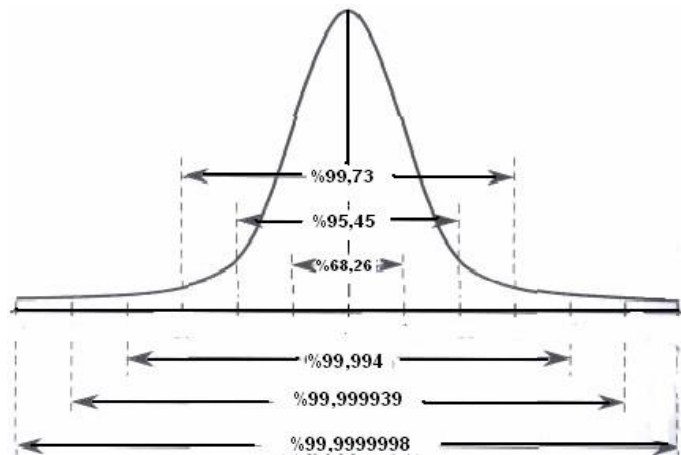
Kikare uyum iyiliği testinin frekans dağılımı formundaki verilere uygulanması için örneklerin çok sayıda birim içermesi gerekir. Çünkü sınıflardaki teorik frekansların 5’den küçük olanlarının sınıf sayısının %20’sini aşmaması gibi kısıtlar içermektedir.

2.2.3. Normal Dağılım

Kontrol grafikleri sürecin zaman içindeki gelişimini ve o andaki durumunu yansıtır. Bununla birlikte süreç değişkenliğinin normal sınırlar içinde kalıp kalmadığını anlama olanağı sağlar.

Rasgele değişkenlikten dolayı meydana gelen değişmeler istatistik kanunlarına uyarlar. Günlük yaşantımızda karşılaştığımız çoğu değişken gibi üretim süreci incelendiğinde, bu sürece ilişkin pek çok değişkenin normal dağılıma sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Sürekli bir rasgele değişkenin ölçüm değerlerinin genel olarak normal dağılım gösterdiği bilinir. Normal dağılım $(-\infty, +\infty)$ arasında bir dağılım göstermesine karşın hemen hemen tüm değişken değerleri, $\bar{\mu} + 3\sigma$ aralığına düşecektir. Normal dağılım ve dağılım aralıkları Şekil 2.2.’de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Normal dağılım grafiği ve bazı olasılık değerleri

Şekil 2.2. incelendiğinde değişken değerlerinin;

$\pm\sigma$ 'lık alanda bulunması olasılığı %68,26

$\pm2\sigma$ 'lık alanda bulunması olasılığı %95,45

$\pm3\sigma$ 'lık alanda bulunması olasılığı %99,73

$\pm4\sigma$ 'lık alanda bulunması olasılığı %99,994

$\pm5\sigma$ 'lık alanda bulunması olasılığı %99,999939

$\pm6\sigma$ 'lık alanda bulunması olasılığı %99,9999998

olduğu görülür.

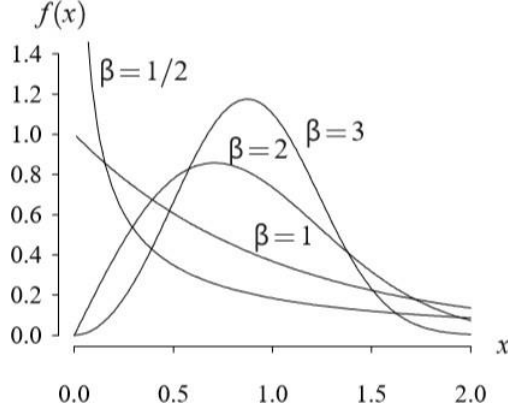
Normal dağılıma sahip verilerin yaklaşık 0,9973 ünün $\mu \pm 3\sigma$ sınırları içinde bulunduğu ve 0,0027' sinin ise $\mu \pm 3\sigma$ sınırları dışında olduğu kabul edilmektedir. Ortalamadan simetrik olarak yerleştirilen bu limitler bütün mümkün durumların %99,73' ünü kapsamaktadır. Bu da normal dağılmış bir ana kütleinin sadece on binde 27'sinin 3 sigmalık kontrol limitlerinin dışına çıktığı anlamını taşımaktadır.

2.2.4. Weibull Dağılımı

$\lambda > 0$ konum parametrelili, $\alpha > 0$ ölçek parametrelili ve $\beta > 0$ şekil parametrelili Weibull dağılımına sahip X rasgele değişkenini belirtmek için $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \alpha, \beta)$ gösterimi kullanılır. Bu dağılıma sahip X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\lambda}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{x-\lambda}{\alpha} \right)^{\beta} \right], \quad x > 0 \quad (2.12)$$

biçimindedir ve $\beta = 1/2$, $\beta = 1$, $\beta = 2$ ve $\beta = 3$ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği Şekil 2.3.'te çizilmiştir.



Şekil 2.3. Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

Weibull dağılımı bir nesnenin ve bir organizmanın ömrünü veya hizmet süresini modellemek için yaşam analizinde ve güvenilirlikte kullanılır. $Weibull(0, \alpha, 1)$ olduğunda dağılım üstel dağılım, $Weibull(0, \alpha, 2)$ olduğunda ise dağılım standart Rayleigh dağılımı olur.

Weibull dağılımına sahip X rasgele değişkeninin sırasıyla birikimli dağılım fonksiyonu ve bu fonksiyonun tersi şunlardır:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-\lambda}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \quad x > 0 \quad (2.13)$$

$$F^{-1}(p) = \lambda + \alpha \left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right) \right]^{1/\beta}, \quad 0 < p < 1 \quad (2.14)$$

Weibull dağılımına sahip X rasgele değişkeninin medyanı,

$$\lambda + \alpha (\ln 2)^{1/\beta} \quad (2.15)$$

olarak hesaplanır. Weibull dağılımına sahip X rasgele değişkeninin sırasıyla kitle ortalaması, varyansı, çarpıklığı ve basıklığı,

$$E[X] = \lambda + \alpha \Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) \quad (2.16)$$

$$V[X] = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) \right]^2 \right\} \quad (2.17)$$

$$E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{2\Gamma^3\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) - 3\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{\beta+3}{\beta}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) \right]^{3/2}} \quad (2.18)$$

$$E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{-3\Gamma^4\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) + 6\Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - 4\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+3}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{\beta+4}{\beta}\right)}{\left[\Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \right]^2} - 3 \quad (2.19)$$

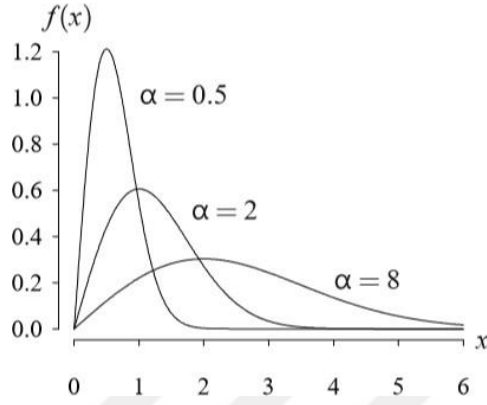
şeklinde hesaplanır.

2.2.5. Rayleigh Dağılımı

α parametrelili Rayleigh dağılımına sahip X rastgele değişkenini belirtmek için $X \sim \text{Rayleigh}(\alpha)$ gösterimi kullanılır. Pozitif α parametrelili Rayleigh dağılımına sahip X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{2x}{\alpha} e^{-x^2/\alpha}, \quad x > 0 \quad (2.20)$$

biçimindedir ve üç farklı parametre değeriyle oluşturulmuş olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği Şekil 2.4.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

Rayleigh dağılımı bir nesnenin ömrünü veya hizmet süresini modellemek için kullanılabilir.

Rayleigh dağılımına sahip X rasgele değişkeninin sırasıyla birikimli dağılım fonksiyonu ve bu fonksiyonun tersi şunlardır:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-x^2/\alpha}, \quad x > 0 \quad (2.21)$$

$$F^{-1}(p) = \sqrt{-\alpha \ln(1-p)}, \quad 0 < p < 1 \quad (2.22)$$

Rayleigh dağılımına sahip X rasgele değişkeninin medyanı,

$$\sqrt{\alpha \ln 2} \quad (2.23)$$

olarak hesaplanır. Rayleigh dağılımına sahip X rasgele değişkeninin sırasıyla kitle ortalaması, varyansı, çarpıklığı ve basıklığı,

$$E[X] = \sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}} \quad (2.24)$$

$$V[X] = \frac{\alpha(4-\pi)}{4} \quad (2.25)$$

$$E\left[\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|^3\right] = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}} \quad (2.26)$$

$$E\left[\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|^4\right] = \frac{6\pi(4-\pi)-16}{(\pi-4)^2} \quad (2.27)$$

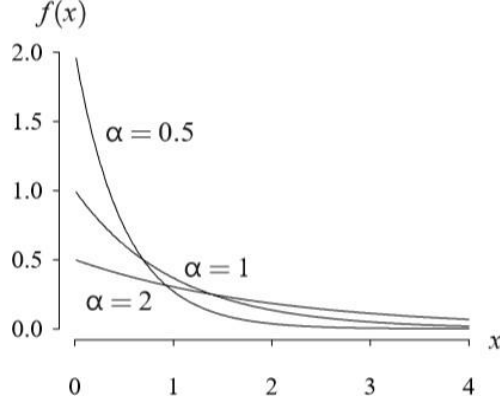
şeklinde hesaplanır.

2.2.6. Üstel Dağılım

α parametrelili Üstel dağılımına sahip X rasgele değişkenini belirtmek için $X \sim \text{Üstel}(\alpha)$ gösterimi kullanılır. α parametrelili Üstel dağılımına sahip X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha}, \quad x > 0 \quad (2.28)$$

biçimindedir. Üstel dağılım bir nesnenin istatistiksel anlamda ömrünü modellemek için güvenilirlikte kullanılır. Bu dağılım hafızasızlık özelliğine sahiptir ve bu özelliğe sahip tek sürekli dağılımdır. Üstel dağılım müşteri gelişi ile hizmet süresi arasındaki zamanları modellemek için kuyruk teorisinde kullanılır. Ayrıca bir nesnenin bakım sonrası ömrünü veya hizmet süresini modellemek için yaşam analizlerinde kullanılır. $\alpha = 0,5, 1, 2$ değerleri ile çizilen olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği Şekil 2.5.'te gösterilmiştir.



Şekil 2.5. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

Üstel dağılımına sahip X rasgele değişkeninin sırasıyla birikimli dağılım fonksiyonu ve bu fonksiyonun tersi şunlardır:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-x/\alpha}, \quad x > 0 \quad (2.29)$$

$$F^{-1}(p) = -\alpha \ln(1 - p), \quad 0 < p < 1 \quad (2.30)$$

Üstel dağılımına sahip X rasgele değişkeninin medyanı,

$$\alpha \ln 2 \quad (2.31)$$

olarak hesaplanır. Üstel dağılımına sahip X rasgele değişkeninin sırasıyla kitle ortalaması, varyansı, çarpıklığı ve basıklığı,

$$E[X] = \alpha \quad (2.32)$$

$$V[X] = \alpha^2 \quad (2.33)$$

$$E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right] = 0 \quad (2.34)$$

$$E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right] = 9 \quad (2.35)$$

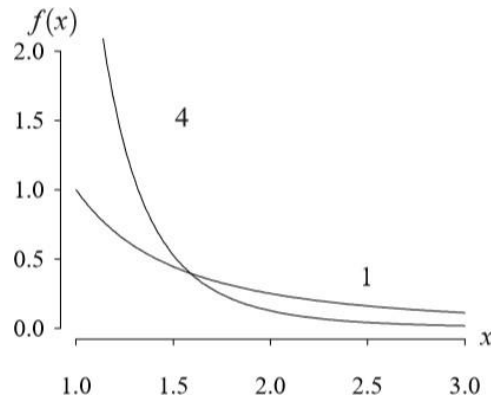
şeklinde hesaplanır.

2.2.7. Pareto Dağılımı

λ ve α parametrelili Pareto dağılımına sahip X rasgele değişkenini belirtmek için $X \sim \text{Pareto}(\lambda, \alpha)$ gösterimi kullanılır. Pozitif λ ve α parametrelili Pareto dağılımına sahip X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x > \lambda \quad (2.36)$$

biçimindedir ve $\lambda = 1$ ve $\alpha = 1,4$ değerleri ile çizilen Pareto olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği Şekil 2.6.'da gösterilmiştir.



Şekil 2.6. Pareto dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

Pareto dağılımı genellikle gelir dağılımını modellemek için kullanılır. Burada λ parametresi minimum ücrettir, α parametresi ise gelir dağılımını modeller. Pareto dağılımı λ garanti süreli bir nesnenin ömrünü modellemek için de kullanılabilir.

Pareto dağılımına sahip X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu ve bu fonksiyonun tersi şunlardır:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x} \right)^\alpha, \quad x > \lambda \quad (2.37)$$

$$F^{-1}(p) = \frac{\lambda}{(1-p)^{1/\alpha}}, \quad 0 < p < 1 \quad (2.38)$$

Pareto dağılımına sahip X rasgele değişkeninin medyanı,

$$\lambda 2^{1/\alpha} \quad (2.39)$$

olarak hesaplanır. Pareto dağılımına sahip X rasgele değişkeninin sırasıyla kitle ortalaması, varyansı, çarpıklığı ve basıklığı,

$$E[X] = \frac{\alpha \lambda}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1 \quad (2.40)$$

$$V[X] = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2 \quad (2.41)$$

$$E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right] = 2 \frac{(\alpha + 1)}{(\alpha - 3)} \sqrt{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}, \quad \alpha > 3 \quad (2.42)$$

$$E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{3(\alpha - 2)(3\alpha^3 + \alpha + 2)}{\alpha(\alpha - 3)(\alpha - 4)}, \quad \alpha > 4 \quad (2.43)$$

şeklinde hesaplanır.

3.NORMAL DAĞILIMA SAHİP VERİLER İÇİN SHEWART KONTROL GRAFİKLERİNİN OLUŞTURULMASI

Bir sürecinin kalite kontrolü, ürün veya herhangi bir çıktının ölçülebilen veya ölçülemeyen özelliklerine göre kontrol grafikleri ile sağlanabilir. Kontrol grafikleri oluşturmak için en uygun kalite özelliği ve bu özelliğe uyumlu kontrol grafikleri seçilmelidir.

Walter A. Shewhart tarafından oluşturulan klasik kontrol grafikleri, ölçülebilen kalite karakteristikleri için kullanılan $\bar{X}$, R ve σ kontrol grafikleri, ölçülemeyen kalite karakteristikleri için kullanılan c , u , n ve np kontrol grafikleri şeklindedir. Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan değişkenlere ilişkin kontrol grafiklerinden $\bar{X}$ ve R kontrol grafiklerinin Shewhart yöntemiyle nasıl oluşturulacağına ilişkin bilgiler verilecektir.

Kalite kontrol grafikleri, kontrol edilen özelliğin normal veya normale yakın bir dağılıma sahip olduğu durumlarda geçerlidir. Ölçülebilen özelliklerin kontrol grafikleri bir sürece ilişkin belli sayıdaki gözlemin ortalamasında ve yayılmasında meydana gelen değişimleri görebilme aracıdır ve sürecin istatistiksel olarak kontrol altında olduğunu denetler[1].

Kalite kontrol grafiği sınırları, μ ortalamalı σ standart sapmalı normal dağılım gösteren bir kitleden alınan n ölçümlü örneklemelerin özelliklerinden elde edilir.

Ortalaması μ standart sapması σ olan normal dağılımın kitle ortalaması için Shewhart kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \mu_X + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \\ OC_{\bar{X}} &= \mu_X \\ AKL_{\bar{X}} &= \mu_X - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklindedir. $P\left(Z > Z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2$ ve α I. tip hata $1-\alpha$ ise sürecin kontrol altında olma olasılığıdır. Uygulamada en yaygın $Z_{\alpha/2} = 3$ değerini kullanılmaktadır. Bu yüzden 3 sigma adı verilen kontrol sınırlarında $\alpha = 0,0027$ kullanılır[10].

3.1. $\bar{X}$ Kontrol Grafiği

$\bar{X}$ Kontrol grafiği süreç ortalamasının kontrol altında olup olmadığını belirlemek için kullanılır. Alınan örneklemelerin aritmetik ortalamaları süreç parametrelerinin bilinip bilinmediği durumlara göre, oluşturulan grafik üzerine işaretlenir.

Kontrol limitleri dışında bir ya da birkaç noktanın varlığı veya ortalamanın herhangi bir tarafındaki yığılma süreç ortalamasındaki bir kayma olarak değerlendirilir.

Örneklem ortalamalarının dağılımının parametreleri $\mu_{\bar{X}}$ ve $\sigma_{\bar{X}}$ olmak üzere grafiğin parametreleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \\ O\bar{C}_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} \\ \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde belirlenmektedir.

$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_m$ örneklemelere ait ortalamalar olmak üzere, i' inci örneklemin ortalaması,

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij} \quad (3.3)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Buradan örneklem ortalamalarının ortalaması ise,

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \quad (3.4)$$

olarak belirlenmektedir.

Süreç parametresi μ bilinmediğinde genel ortalama $\bar{\bar{X}}$, süreç ortalaması μ ' nün yansız bir tahmin edicisi olmak üzere $\bar{\bar{X}}$ kontrol grafiğinin parametreleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \\ O\bar{C}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} \\ \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak bulunmaktadır. Burada $\sigma_{\bar{X}}$, süreç standart sapması σ ve örneklem büyüklüğü n olmak üzere

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.6)$$

biçiminde belirlenmektedir. Süreç parametresi σ da bilinmediğinden tahmin edilmesi gerekmektedir. σ ' nın tahmin edilmesinde, örneklem değişim aralığı ya da örneklem standart sapması kullanılabilir.

Değişkenlik ölçüsü olarak değişim aralığı R kullanıldığında, sürecin standart sapması,

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (3.7)$$

biçiminde tahmin edildiğinde ve burada σ yerine tahmin edici yazıldığında

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \quad (3.8)$$

elde edilir. Buna bağılı olarak da kontrol limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{x}} &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \\ O\bar{C}_{\bar{x}} &= \bar{\bar{X}} \\ \bar{A}KL_{\bar{x}} &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

olur ve

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \quad (3.10)$$

şeklinde belirtilirse, $\bar{X}$ kontrol grafiğinin limitleri

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{x}} &= \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ O\bar{C}_{\bar{x}} &= \bar{\bar{X}} \\ \bar{A}KL_{\bar{x}} &= \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak bulunmaktadır[11].

Değişkenlik ölçüsü olarak örneklem standart sapması S kullanıldığında ise, sürecin bilinmeyen standart sapması, örneklem standart sapmalarından hareketle ve bunların ortalaması $\bar{S}$ olmak üzere,

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4} \quad (3.12)$$

şeklinde tahmin edilir. $\sigma_{\bar{X}}$ değerinde yerine konursa, kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned}\bar{U}KL_{\bar{X}} &= \bar{X} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}} \\ \bar{O}Ç_{\bar{X}} &= \bar{X} \\ \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \bar{X} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}}\end{aligned}\tag{3.13}$$

olur ve

$$A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}\tag{3.14}$$

olarak belirtilirse $\bar{X}$ kontrol grafiğinin limitleri

$$\begin{aligned}\bar{U}KL_{\bar{X}} &= \bar{X} + A_3 \bar{S} \\ \bar{O}Ç_{\bar{X}} &= \bar{X} \\ \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \bar{X} - A_3 \bar{S}\end{aligned}\tag{3.15}$$

şeklinde bulunur.

Süreç parametreleri μ ve σ bilindiğinde ise; grafiğin parametreleri

$$\begin{aligned}\bar{U}KL_{\bar{X}} &= \mu + 3\sigma_{\bar{X}} \\ \bar{O}Ç_{\bar{X}} &= \mu \\ \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \mu - 3\sigma_{\bar{X}}\end{aligned}\tag{3.16}$$

şeklindedir.

Sürecin standart sapması σ bilindiğinden (3.16) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\dot{U}KL_{\bar{X}} &= \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
OC_{\bar{X}} &= \mu \\
AKL_{\bar{X}} &= \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

elde edilir. Burada

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \tag{3.18}$$

şeklinde belirtilirse, $\bar{X}$ kontrol grafiğinin parametreleri

$$\begin{aligned}
\dot{U}KL_{\bar{X}} &= \mu + A\sigma \\
OC_{\bar{X}} &= \mu \\
AKL_{\bar{X}} &= \mu - A\sigma
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

olarak elde edilir[11].

3.2.R Kontrol Grafiği

R kontrol grafiği, kitlenin dağılımının zamanla değişip değişmediğini saptamak için oluşturulur ve değişim aralığı olarak tanımlanır. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, n hacimli bir örneklem olduğunda, en küçük ve en büyük ölçüm değerleri arasındaki fark değişim aralığı olarak ifade edilip,

$$R = X_{mak} - X_{min} \tag{3.20}$$

şeklinde gösterilmektedir. Her biri n birimden oluşan r tane örnek alındığında, $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ bu örneklerin değişim aralıkları olmak üzere değişim aralıkları ortalaması,

$$\bar{R} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n R_i \quad (3.21)$$

olarak hesaplanmaktadır. Böylece R kontrol grafiğinin limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= \mu_R + 3\sigma_R \\ OC_R &= \mu_R \\ \bar{A}KL_R &= \mu_R - 3\sigma_R \end{aligned} \quad (3.22)$$

biçiminde belirtilmektedir. $\bar{R}$, değişim aralıklarının örnekleme dağılımının ortalaması μ_R 'nin bir tahminidir. R_j 'lerin gösterdiği dağılımın standart sapması σ_R bilinmediğinden tahmin edilmesi gerekir. σ_R 'nin tahmini,

$$\hat{\sigma}_R = \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \quad (3.23)$$

dir. Burada d_3 ve d_2 örnek büyüklüğü n 'ye bağlı olan tablo değerleridir. Söz konusu değerler Çizelge 3.1.'de verilmiştir. μ_R ve σ_R 'nin tahminleri yerine konulduğunda R kontrol grafiğinin parametreleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3\frac{d_3}{d_2} \bar{R} \\ OC_R &= \bar{R} \\ \bar{A}KL_R &= \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3\frac{d_3}{d_2} \bar{R} \end{aligned} \quad (3.24)$$

olarak elde edilmektedir ve kontrol limitleri $\bar{R}$ parantezine alındığında katsayılar,

$$\begin{aligned} D_3 &= 1 + 3\frac{d_3}{d_2} \\ D_4 &= 1 - 3\frac{d_3}{d_2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

biçiminde elde edilmektedir ve elde edilen değerler Çizelge 3.1.'de gösterilmektedir. Buradan R kontrol grafiğinin parametreleri,

$$\begin{aligned}\bar{U}KL_R &= D_4 \bar{R} \\ O\bar{C}_R &= \bar{R} \\ AKL_R &= D_3 \bar{R}\end{aligned}\tag{3.26}$$

olarak elde edilmektedir[11].

Sürecin ilgilenilen kalite karakteristiğine ilişkin bir standart sapma değeri σ verildiğinde ya da belirli bir değere eşit olduğu kabul edildiğinde ise, R kontrol grafiğinin oluşturulmasında bu σ değerinden yararlanılacaktır.

$\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$ şeklinde tahmin edildiğinden $\bar{R} = \hat{\sigma} d_2$ olur ve $\sigma_R = d_3 \sigma$ olduğundan bu değerler yerine yazılırsa, R kontrol grafiğinin parametreleri,

$$\begin{aligned}\bar{U}KL_R &= d_2 \sigma + 3 d_3 \sigma \\ O\bar{C}_R &= d_2 \sigma \\ AKL_R &= d_2 \sigma - 3 d_3 \sigma\end{aligned}\tag{3.27}$$

olarak elde edilmektedir ve σ parantezine alındığında,

$$\begin{aligned}D_1 &= d_2 - 3 d_3 \\ D_2 &= d_2 + 3 d_3\end{aligned}\tag{3.28}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}\bar{U}KL_R &= D_2 \bar{R} \\ O\bar{C}_R &= d_2 \sigma \\ AKL_R &= D_1 \sigma\end{aligned}\tag{3.29}$$

olmaktadır[11].

Çizelge 3.1. Kalite kontrol grafikleri için katsayılar

ÖRNEKTEKİ GÖZLEM SAYISI	ORTALAMA GRAFİKLERİ				STANDART SAPMA GRAFİKLERİ						DEĞİŞİM ARALIĞI GRAFİKLERİ							
	KONTROL LİMİTLERİ KATSAYILARI				ORTA ÇİZGİ KATSAYILARI		KONTROL LİMİTLERİ KATSAYILARI				ORTA ÇİZGİ KATSAYILARI		KONTROL LİMİTLERİ KATSAYILARI					
	A	A ₁	A ₂	A ₃	C ₄	C ₂	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₂	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
2	2,121	3,76	1,880	2,659	0,7979	0,5642	0	1,843	0	3,267	0	2,606	1,128	0,853	0	3,686	0	3,267
3	1,732	2,394	1,023	1,954	0,8862	0,7236	0	1,858	0	2,568	0	2,276	1,693	0,888	0	4,358	0	2,575
4	1,500	1,88	0,729	1,628	0,9213	0,7999	0	1,808	0	2,266	0	2,088	2,059	0,880	0	4,698	0	2,282
5	1,342	1,596	0,577	1,427	0,9400	0,8407	0	1,756	0	2,089	0	1,964	2,326	0,864	0	4,918	0	2,115
6	1,225	1,41	0,483	1,287	0,9515	0,8686	0,026	1,711	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	1,277	0,419	1,182	0,9594	0,8882	0,105	1,672	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	1,175	0,373	1,099	0,9650	0,9027	0,167	1,638	0,185	1,815	0,179	1,751	2,847	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	1,094	0,337	1,032	0,9693	0,9139	0,219	1,609	0,239	1,761	0,232	1,707	2,970	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	1,028	0,308	0,975	0,9727	0,9227	0,262	1,584	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,945	0,973	0,285	0,927	0,9754	0,9300	0,299	1,561	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,925	0,266	0,886	0,9776	0,9359	0,331	1,541	0,354	1,646	0,346	1,610	3,258	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,884	0,249	0,850	0,9794	0,9410	0,359	1,523	0,382	1,618	0,374	1,585	3,336	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,848	0,235	0,817	0,9810	0,9453	0,384	1,507	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,816	0,223	0,789	0,9823	0,9490	0,406	1,492	0,428	1,572	0,421	1,544	3,472	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,788	0,212	0,763	0,9835	0,9523	0,427	1,478	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,762	0,203	0,739	0,9845	0,9551	0,445	1,465	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,738	0,194	0,718	0,9854	0,9576	0,461	1,454	0,482	1,518	0,475	1,496	3,640	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,717	0,187	0,698	0,9862	0,9599	0,477	1,443	0,497	1,503	0,490	1,483	3,689	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,697	0,180	0,680	0,9869	0,9619	0,491	1,433	0,510	1,490	0,504	1,470	3,735	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,679	0,663	0,663	0,9876	0,9638	0,504	1,424	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,724	1,605	6,951	0,425	1,575
22	0,640	0,662	0,647	0,647	0,9882	0,9655	0,516	1,415	0,534	1,466	0,528	1,448	3,819	0,720	1,659	6,979	0,434	1,566
23	0,626	0,647	0,633	0,633	0,9887	0,9670	0,527	1,407	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,716	1,710	5,006	0,443	1,557
24	0,612	0,632	0,619	0,619	0,9892	0,9684	0,538	1,399	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,712	1,759	5,031	0,451	1,548
25	0,600	0,619	0,606	0,606	0,9896	0,9696	0,548	1,392	0,565	1,435	0,559	1,420	3,931	0,708	1,806	5,056	0,459	1,541

4.NORMAL DAĞILIMA SAHİP OLMAYAN VERİLER İÇİN KALİTE KONTROL GRAFİKLERİNİN OLUŞTURULMASI

Kontrol grafikleri sürecin bir fotoğrafını vermek açısından histograma benzerler. Histogram, süreçten alınan farklı zaman dönemlerindeki örneklemelere dayanarak sürecin belirli bir dönemdeki durumunu gösterir. Kontrol grafikleri ise sürecin zaman içindeki gelişimini ve durumunu yansıtır. Bununla birlikte süreç değişkenliğinin normal sınırlar içinde kalıp kalmadığını anlama olanağı sağlar.

Kontrol grafikleri istatistiksel süreç kontrolünde süreci öğrenmek, gözlemlemek ve düzeltip iyileştirmek için kullanılan güçlü araçlardır. Shewhart kontrol grafiklerinin oluşturulması X rasgele değişkeninin ya da kalite karakteristiğinin yoğunluk fonksiyonunun normal dağılım göstermesi varsayımına bağlıdır[12]. Ancak çoğu durumda süreç kitlesinin normallik varsayımı geçerli değildir. Bazı durumlarda dağılım çarpık veya basık olabilir.

Kalite değişkenleri çarpık veya basık dağılıma sahip olduğunda Shewhart tarafından kullanılan $\bar{X}$ ve R kontrol grafikleri gözlemler için yanıltıcı olabilir. Kalitedeki değişkenlik yüzünden çarpıklık arttığında, çarpık dağılımlarda Shewhart kontrol grafiklerinin kullanımı I. tip hata olasılığının artmasına neden olur[13].

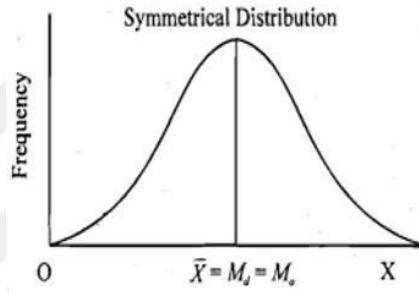
4.1.Çarpık Dağılıma Sahip Veriler için Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması

Bu bölümde ilk olarak farklı yöntemlerle çarpıklık katsayısının hesaplanması anlatılacak daha sonra çarpık olan dağılımlar için çarpıklık düzeltmesi, ağırlıklandırılmış varyans ve ağırlıklandırılmış standart sapma yöntemleri ile kontrol grafiği limitleri oluşturulacaktır.

4.1.1. Çarpıklık Katsayısının Ölçülmesi

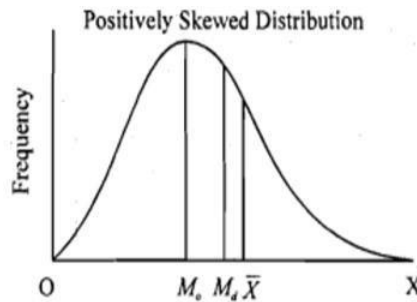
Dağılım simetrik olduğunda ortalama, medyan ve mod değerleri birbirine eşit olmaktadır[14]. Çarpıklık ölçüleri simetrik dağılıma sahip olmayan bir veri setinin normallikten hangi düzeyde ve yönde uzaklaştığını saptamaya yarayan ölçülerdir. Bir dağılımın çarpıklığı hakkında bilgi edinmenin en kolay yolu dağılımın aritmetik ortalamasını, medianını ve modunu karşılaştırmaktır.

Dağılım simetrik ise, $\bar{X} = Medyan = Mod$ olacağından Çarpıklık Katsayısı=0 olur.



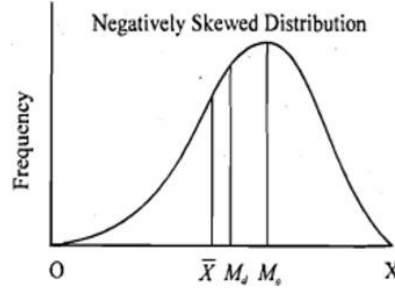
Şekil 4.1. Simetrik dağılım

Dağılım sağa çarpık ise $\bar{X} > Medyan > Mod$ olacağından Çarpıklık katsayısı>0 olur.



Şekil 4.2. Pozitif çarpık dağılım

Dağılım sola çarpık ise $\bar{X} < Medyan < Mod$ olacağından Çarpıklık katsayısı < 0 olur.



Şekil 4.3. Negatif çarpık dağılım

Çarpıklığın yönü ve genişliği çeşitli yollarla ölçülebilmektedir. Bu bölümde çarpık katsayısının ölçülmesinde kullanılan farklı yöntemlere değinilecektir [15].

Bu çalışmada çarpıklık katsayılarının hesaplanmasında ortalama ve mod arasındaki farka dayanan Karl Person'ın çarpıklık katsayısı $k_{3(P)} = \frac{\text{Ortalama} - \text{Mod}}{\text{Standart Sapma}}$,

çeyrekliğe $Q_i (i=1,2,3)$ dayanan Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$, yüzdeliğe $P_i (i=10,50,90)$ dayanan Kelly'nin çarpıklık

katsayısı $k_{3(K)} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$ [15], ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı

$k_3^* = \frac{1}{nr-3} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{X_{ij} - \bar{X}}{s} \right)^3$ formülleri kullanılmıştır.

4.1.1.1. Karl Pearson'ın Çarpıklık Katsayısı

Karl Pearson tarafından önerilen ve çarpıklığı ölçen bu yöntem, Pearson'ın çarpıklık katsayısı olarak bilinir. Bu çarpıklık katsayısı ortalama ve mod arasındaki farka

dayanır. Bu fark karşılaştırmalı ölçüm vermek için yani değişkenlerin farklı ölçü birimlerini ortadan kaldırmak amacıyla standart sapmaya bölünür. Böylece Pearson'ın çarpıklık katsayısı (4.1) formülü gibi yazılır.

$$k_{3(P)} = \frac{\text{Ortalama} - \text{Mod}}{\text{Standart Sapma}} \quad (4.1)$$

Aritmetik ortalama ile mod arasındaki farkın büyüklüğü çarpıklık düzeyi için kaba bir ölçüt oluşturur. Hafif çarpık veri setinde aritmetik ortalama ile mod arasındaki fark, aritmetik ortalama ile medyan arasındaki farkın yaklaşık üç katına eşittir. Bu eşitlik (4.2) formülü gibi gösterilir.

$$k_{3(P)} = \frac{3(\text{Ortalama} - \text{Medyan})}{\text{Standart Sapma}} \quad (4.2)$$

Karl Pearson'ın çarpıklık katsayısının özellikleri şunlardır:

- $-1 \leq k_{3(P)} \leq +1$
- $k_{3(P)} = 0$ ise dağılım simetriktir.
- $k_{3(P)} > 0$ ise dağılım sağa çarpıktır.
- $k_{3(P)} < 0$ ise dağılım sola çarpıktır.

Pearson'ın çarpıklık katsayısının hesaplanmasında kullanılan istatistik ölçülerinden mod ve medyanın veri setindeki tüm birim değerlerine dayanarak hesaplanmaması bu çarpıklık katsayısının duyarlılığını önemli ölçüde azaltmaktadır. Ayrıca Pearson'ın çarpıklık katsayısı ölçüsünün sapan birimlerden olumsuz bir şekilde etkilenmesi yani uç değerlere bağımlı olması bu istatistiğin en önemli eksiliği arasında yer alır.

Weibull, Rayleigh, Üstel ve Pareto dağılımına ait parametreler bilindiği durumda dağılım fonksiyonunun tersi kullanılarak hesaplanan Pearson'ın çarpıklık katsayıları Çizelge 4.1. 'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. Pearson'ın çarpıklık katsayıları

	$k_{3(P)}$
Weibull Dağılımı	$\frac{3 \left\{ \Gamma \left(\frac{1+\beta}{\beta} \right) - (\ln 2)^{\frac{1}{\beta}} \right\}}{\sqrt{\left\{ \Gamma \left(\frac{\beta+2}{\beta} \right) - \left[\Gamma^2 \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right) \right] \right\}}}$
Rayleigh Dağılımı	$\frac{6 \left(\frac{\sqrt{\alpha\pi}}{2} - \sqrt{\alpha \ln(2)} \right)}{\sqrt{\alpha(4-\pi)}}$
Üstel Dağılım	0,920558
Pareto Dağılımı	$\frac{3 \left\{ \frac{\alpha\lambda}{\alpha-1} - \frac{\lambda}{(0,5)^{\frac{1}{\alpha}}} \right\}}{\sqrt{\frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}}}$

4.1.1.2. Bowley'in Çarpıklık Katsayısı

Bowley'in çarpıklık katsayısı çeyrekliklere dayanmaktadır. Çarpıklığın sapan değerlerden etkilenmesinin istenmediği durumlarda kullanılabilir. Çeyreklikler yardımıyla çarpıklığın saptanmasına dayanan bu ölçütün mantığında Simetrik dağılımlarda birinci çeyreklik (Q_1) ve üçüncü çeyreklik (Q_3) ile medyanın (Q_2) arasındaki farkın yani ($Q_3 - Q_2$) değerinin ($Q_2 - Q_1$) değerine eşit olması yatmaktadır. Bowley'in çarpıklık katsayısı (4.3) formülü gibi hesaplanmaktadır.

$$k_{3(B)} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} \quad (4.3)$$

Bowley'in çarpıklık katsayısının özellikleri şunlardır:

- $-1 \leq k_{3(B)} \leq +1$
- $k_{3(B)} = 0$ ise dağılım simetriktir.
- $k_{3(B)} > 0$ ise dağılım sağa çarpıktır.
- $k_{3(B)} < 0$ ise dağılım sola çarpıktır.

Veri setindeki tüm birimlerin değerlerine dayanmadığı için momentlere dayanan çarpıklık ölçüsüne göre daha az duyarlı bir ölçüdür. Diğer bir deyişle Bowley'in çarpıklık ölçüsü veri setindeki üç değere (Q_1, Q_2, Q_3) dayanılarak hesaplanmaktadır.

Weibull, Rayleigh, Üstel ve Pareto dağılımına ait parametreler bilindiği durumda dağılım fonksiyonunun tersi kullanılarak hesaplanan Bowley'in çarpıklık katsayıları Çizelge 4.2. 'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.2. Bowley'in çarpıklık katsayıları

	$k_{3(B)}$
Weibull Dağılımı	$\frac{[\ln(4)]^{1/\beta} - 2[\ln(2)]^{1/\beta} + \left[\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{1/\beta}}{[\ln(4)]^{1/\beta} - \left[\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{1/\beta}}$
Rayleigh Dağılımı	$\frac{\sqrt{-\alpha \ln(0,25)} - 2\sqrt{-\alpha \ln(0,50)} + \sqrt{-\alpha \ln(0,75)}}{\sqrt{-\alpha \ln(0,25)} - \sqrt{-\alpha \ln(0,75)}}$
Üstel Dağılım	$\frac{[-\alpha \ln(0,25)] - 2[-\alpha \ln(0,50)] + [-\alpha \ln(0,75)]}{[-\alpha \ln(0,25)] - [-\alpha \ln(0,75)]}$
Pareto Dağılımı	$\frac{(0,25)_{1/\alpha}^{\lambda} - 2(0,5)_{1/\alpha}^{\lambda} + (0,75)_{1/\alpha}^{\lambda}}{(0,25)_{1/\alpha}^{\lambda} - (0,75)_{1/\alpha}^{\lambda}}$

4.1.1.3. Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı

Bowley'in çarpıklık katsayısı hesaplanırken dağılımın her iki uç noktasındaki gözlemlerin %25'i bırakılmaktadır. Bu yüzden Bowley'in çarpıklık katsayısı gözlemlerin %50'sine dayanmaktadır. Kelly, Bowley'in Çarpıklık katsayısı ölçüsünü iyileştirerek başka bir çarpıklık katsayısı önermiştir. Kelly'nin önerdiği çarpıklık katsayısı dağılımın her iki uç noktasındaki gözlemlerin sadece %10'unu ihmal eden, P_{10} ve P_{90} yüzdelerine dayanan bir ölçüdür ve (4.4) formülü gibi hesaplanır.

$$k_{3(K)} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} \quad (4.4)$$

Weibull, Rayleigh, Üstel ve Pareto dağılımına ait parametreler bilindiği durumda dağılım fonksiyonunun tersi kullanılarak hesaplanan Kelly'nin çarpıklık katsayıları Çizelge 4.3. 'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. Kelly'nin çarpıklık katsayıları

	$k_{3(K)}$
Weibull Dağılımı	$\frac{[\ln(10)]^{1/\beta} - 2[\ln(2)]^{1/\beta} + \left[\frac{(\ln(10))^{1/\beta}}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)} \right]}{[\ln(10)]^{1/\beta} - \left[\frac{(\ln(10))^{1/\beta}}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)} \right]}$
Rayleigh Dağılımı	$\frac{\sqrt{-\alpha \ln(0,10)} - 2\sqrt{-\alpha \ln(0,50)} + \sqrt{-\alpha \ln(0,90)}}{\sqrt{-\alpha \ln(0,10)} - \sqrt{-\alpha \ln(0,90)}}$
Üstel Dağılım	$\frac{[-\alpha \ln(0,10)] - 2[-\alpha \ln(0,50)] + [-\alpha \ln(0,90)]}{[-\alpha \ln(0,10)] - [-\alpha \ln(0,90)]}$
Pareto Dağılımı	$\frac{(0,10)_{\frac{\lambda}{\alpha}} - 2(0,50)_{\frac{\lambda}{\alpha}} + (0,90)_{\frac{\lambda}{\alpha}}}{(0,10)_{\frac{\lambda}{\alpha}} - (0,90)_{\frac{\lambda}{\alpha}}}$

Ortalamalara (Pearson), çeyrekliklere (Bowley), yüzeliklere (Kelly) dayanarak hesaplanan çarpıklık katsayıları birbiri ile karşılaştırılmaz. Fakat çarpıklık olmaması durumunda her üç istatistik sıfıra eşit olmaktadır.

4.1.1.4. Momentlere Dayalı Çarpıklık Katsayısı

Dağılımlar ile ilgili istatistiklerin duyarlı bir şekilde belirlenmesinde moment adı verilen ölçüler kullanılmaktadır. İstatistikte önemli bir yeri olan moment kavramı, birilerin sıfıra, ortalamaya veya herhangi bir sabit değere göre farklarını çeşitli dereceden kuvvetlerinin aritmetik ortalaması olarak tanımlanmaktadır.

İstatistikte momentlerin ilk dört derecesi önemlidir. Sıfıra göre birinci dereceden moment aritmetik ortalamaya, ikinci dereceden moment kareli ortalamanın karesine eşittir. Ortalamadan farkların cebirsel toplamı sıfır olduğu için ortalama etrafındaki birinci dereceden moment sıfıra, ikinci dereceden moment ise her zaman varyansa eşit olmaktadır. Ayrıca üçüncü dereceden moment çarpıklığın, dördüncü dereceden moment ise basıklığın mutlak bir ölçüsü olarak kullanılmaktadır.

Çarpıklığın mutlak bir ölçüsü olarak kullanılan aritmetik ortalamadan farkların üçüncü dereceden momenti karşılaştırmalara uygun hale getirmek için standart sapmanın küpüne bölünür ve aşağıdaki (4.5) formülü gibi hesaplanır.

$$k_{3(M)} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (4.5)$$

$k_{3(M)}$ katsayısı sıfıra eşit olduğunda verilerin simetrik olarak dağılıma sahip olduğu anlaşılır. Bu katsayının büyüklüğü çarpıklığın gücünü, işareti (+,-) yönünü (sağa veya sola çarpık) gösterir.

Weibull, Rayleigh, Üstel ve Pareto dağılımına ait parametreler bilindiği durumda dağılım fonksiyonunun tersi kullanılarak hesaplanan momentlere dayalı çarpıklık katsayıları Çizelge 4.4. 'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.4. Momentlere dayalı hesaplanan çarpıklık katsayıları

	$k_{3(M)}$
Weibull Dağılımı	$\frac{2\Gamma^3\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) - 3\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{\beta+3}{\beta}\right)}{\sqrt{\left(\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\right)^3}}$
Rayleigh Dağılımı	$\frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}}$
Üstel Dağılım	2
Pareto Dağılımı	$2 \frac{(\alpha+1)}{(\alpha-3)} \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}$

İstatistik paket programlarında örneklemden elde edilen veriler için (4.6) formülündeki çarpıklık katsayısı kullanılır. Bu formüller arasındaki en önemli fark, her birim değerinin aritmetik ortalamadan farklarının örnek standart sapmasına bölünerek standartlaştırılmasıdır.

$$k_3^* = \frac{1}{nr-3} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{X_{ij} - \bar{X}}{s} \right)^3 \quad (4.6)$$

4.1.2.Çarpıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması

$\bar{X}$ ve R kontrol grafikleri normal dağılım varsayımı altında çizilen grafiklerdir. Ancak üretilen ürünlerin ölçülen değişkeni her zaman normal dağılmış olmayabilir. Ürün maliyeti göz önünde bulundurulduğu zaman büyük örnekleme çalışmak her zaman mümkün olmadığından limit teoremleri kullanışlı olmayabilir.

Çarpıklık düzeltmesi yöntemi çarpık dağılımlar için $\bar{X}$ ve R kontrol grafiklerini oluşturmak için kullanılır. Çarpık dağılımlar için çarpıklık derecesine dayanan kontrol grafiklerinin oluşturulmasına ilişkin ve süreç dağılımı ile ilgili hiçbir varsayım gerektirmeyen bir yöntemdir [17].

Örneklem çarpık bir dağılıma sahip ise çarpıklık katsayısı k_3 'dür. Eğer örneklemin dağılımı çarpıklık katsayısı 0 olan bir dağılım ise bilinen standart Shewhart kontrol grafiği limitleri elde edilir. Eğer bir dağılım sağa çarpıksa $k_3 > 0$ dır. Bu durumda üst kontrol limitinin merkezi çizgiden uzaklığı, alt kontrol limitinin merkezi çizgiye olan uzaklığından daha büyük olmalıdır. Eğer $k_3 < 0$ ise dağılım sola çarpık demektir ve bu durumda alt kontrol limitinin merkezi çizgiden uzaklığı, üst kontrol limitinin merkezi çizgiye olan uzaklığından daha büyük olmalıdır. Ancak kontrol grafiklerinin bant genişliği daima altı sigma'dır [18].

Çarpık bir dağılıma sahip örneklem için Shewhart kontrol grafikleri çizilirken çarpıklık düzeltmesi metodu kullanılabilir.

X , 0 ortalamalı, 1 standart sapmalı k_3 çarpıklık katsayısına sahip standartlaştırılmış bir rasgele değişken olsun. k_3 biliniyorsa, bireysel gözlemler için çarpıklık düzeltmesi yöntemine dayalı kontrol limitleri

$$\begin{aligned} \bar{U}KL &= 3 + \frac{\frac{4}{3}k_3}{1 + 0,2k_3^2} \\ OÇ &= 0 \\ AKL &= -3 + \frac{\frac{4}{3}k_3}{1 + 0,2k_3^2} \end{aligned} \tag{4.9}$$

olarak yazılır[18].

Burada çarpıklık katsayısı Ek.1'de anlatılan Cornish Fisher açılımına dayanmaktadır.

4.1.2.1. Çarpıklık Düzeltmeli $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

4.1.2.1.1. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Biliniyorken

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, ortalaması μ_X , standart sapması σ_X ve çarpıklığı k_3 olarak bilinen dağılımın alt örneklem grubu olsun. bu durumda Chan ve Cui'nin önerdiği çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitleri aşağıda gösterilmiştir.

Çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_X &= \mu_X + \left(3 + \frac{3 \frac{4}{\sqrt{n}} k_3(\bar{X})}{1 + 0,2 k_3^2(\bar{X})/n} \right) \sigma_X / \sqrt{n} \\ O\bar{C}_X &= \mu \\ \bar{A}KL_X &= \mu_X + \left(-3 + \frac{3 \frac{4}{\sqrt{n}} k_3(\bar{X})}{1 + 0,2 k_3^2(\bar{X})/n} \right) \sigma_X / \sqrt{n} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Çarpıklık düzeltmeli R kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} UKL_R &= \mu_R + \left(3 + \frac{3 \frac{4}{\sqrt{n}} k_3(R)}{1 + 0,2 k_3^2(R)} \right) \sigma_R \\ O\bar{C}_R &= \mu_R \\ A\bar{K}L_R &= \mu_R + \left(-3 + \frac{3 \frac{4}{\sqrt{n}} k_3(R)}{1 + 0,2 k_3^2(R)} \right) \sigma_R \end{aligned} \quad (4.11)$$

olmak üzere $k_3(\bar{x})$ ve $k_3(R)$ sırasıyla örneklem ortalaması $\bar{X}$ ve örneklem genişliği R 'nin dağılımının çarpıklık katsayısıdır [18].

$\bar{X}$ kontrol grafiği limitlerinin hesaplanmasında kullanılan $\frac{3^4 k_3(\bar{x})}{1 + 0,2k_3^2(\bar{x})}$ formülü c_4^* ile R kontrol grafiği limitlerinin hesaplanmasında kullanılan $\frac{3^4 k_3(R)}{1 + 0,2k_3^2(R)}$ formülü

d_4^* ile gösterilir ve bu sabitler çarpıklık düzeltmesidir.

$d_2^* = \frac{\mu_R}{\sigma_x}$, $d_3^* = \frac{\sigma_R}{\sigma_x}$, R/σ 'in ortalaması ve standart sapmasıdır. Dolayısıyla $\sigma_x = \frac{\mu_R}{d_2^*}$ ve $\sigma_R = \frac{d_3^*}{d_2^*} \mu_R$ olarak hesaplanır.

c_4^* , d_4^* , d_2^* ve d_3^* sabitleri formülde yerine koyulduğunda $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitleri aşağıdaki gibi oluşturulur.

Çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \mu_X + (3 + c_4^*)\sigma_X / \sqrt{n} \\ O\bar{C}_{\bar{X}} &= \mu_X \\ \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \mu_X + (-3 + c_4^*)\sigma_X / \sqrt{n} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Çarpıklık düzeltmeli R kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= \mu_R + (3 + d_4^*)\sigma_R \\ O\bar{C}_R &= \mu_R \\ \bar{A}KL_R &= \mu_R + (-3 + d_4^*)\sigma_R \end{aligned} \quad (4.13)$$

olarak hesaplanır.

c_4^* ve d_4^* sabitleri çarpıklık düzeltmesidir ve AKL_R negatif ise 0 alınır. Eğer dağılım simetrik ise $c_4^*=0$ olur ve $\bar{X}$ grafiği Shewhart grafiği sınırlarına sahip olur[18].

4.1.2.1.2. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Bilinmiyorken

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ $i=1,2,\dots,r$ ortalaması μ , standart sapması σ , çarpıklığı k_3 olan süreç dağılımının n hacimli r tane örneklem grubu olsun. Eğer dağılımın parametreleri bilinmiyorsa kontrol grafiklerinin oluşturulabilmesi için bu parametrelerin tahmin edilmesi gerekmektedir.

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ $i=1,2,\dots, r$ süreç dağılımından seçilen n hacimli r tane örneklem olsun. $\bar{X}$ süreç ortalamasının en iyi tahmin edicisini verir ve (4.14) formülü gibi hesaplanır.

$$\bar{X} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i} + \dots + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ri}}{r} = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n X_{ij} \quad (4.14)$$

$R_1, R_2, \dots, R_r$ r tane örneklemin genişliği olsun. $\bar{R}$, r tane örneklemin genişliğinin ortalamasından tahmin edilen bir tahmin edicidir (4.15) formülü gibi hesaplanır.

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^r R_i}{r} \quad (4.15)$$

S_{nr} , sürecin standart sapması için bir tahmin edicidir ve (4.16) formülü gibi hesaplanır.

$$S_{nr} = \sqrt{\frac{1}{nr-1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2} \quad (4.16)$$

S_R , süreç genişliğinin standart sapması için bir tahmin edicidir ve (4.17) formülü gibi hesaplanır.

$$S_R = \sqrt{\frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r (R_i - \bar{R})^2} \quad (4.17)$$

k_3^* , çarpıklık katsayısı k_3 için bir tahmin edicidir ve (4.18) formülü gibi hesaplanır.

$$k_3^* = \frac{1}{nr-3} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{X_{ij} - \bar{X}}{S} \right)^3 \quad (4.18)$$

Simetri varsayımını bir hipotez testi ile test edersek hipotez (4.19)'da gösterildiği gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned} H_0 : k_3^* &= 0 \\ H_1 : k_3^* &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Burada eğer $\left| \frac{k_3^*}{\sqrt{\frac{6nr(nr-1)}{(nr-2)(nr+1)(nr+3)}}} \right| > Z_{\alpha/2}$ ise H_1 hipotezi $(1-\alpha)$ güven

düzeyinde kabul edilir[10].

k_3^* , çarpıklık katsayısı k_3 'ün tutarlı bir tahmin edicisidir. Formül (4.18) deki S_{nr} , $\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ ile değiştirilebilir. Örneklem çarpıklığı k_3^* aslında üçüncü moment tahmin edicisidir. Tutarlı olmasına rağmen bazen $\bar{X}$ ve S_{nr} 'den daha büyük standart

sapmaya sahip olabilir. Eğer $|k_3^*|$ çok küçük veya büyük olursa çarpıklık düzeltme

miktarı $\frac{\frac{4}{3}k_3^*}{1+0,2k_3^{*2}}$ her halükarda küçük olacaktır. Bu, k_3^* büyük rasgele değişkenliğe

sahip olsa bile çarpıklık düzeltmesi miktarı üzerinde etkisi küçüktür anlamına gelir. Yani çarpıklık düzeltme miktarı, çarpıklık katsayısı k_3 'ün tahmin edicisinden daha kararlıdır [18].

Eğer çarpıklık katsayısı k_3 biliniyorsa, $\bar{X}$ serisinin çarpıklık katsayısı $k_3/\sqrt{n}$ dir. Çarpıklık düzeltmesi metoduyla elde edilmeye çalışılan kontrol grafikleri için gerekli katsayılar olan d_2^* ve d_3^* normal dağılım altında elde edilmeye çalışılan kontrol grafikleri için gerekli katsayılar olan d_2 ve d_3 'ün yerine geçer. Bu durumda çarpıklık düzeltmesiyle elde edilen $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \bar{X} + \left(3 + \frac{4k_3/(3\sqrt{n})}{1+0,2k_3/n} \right) \frac{\bar{R}}{d_2^* \sqrt{n}} \equiv \bar{X} + A_U^* R \\ O\bar{C}_{\bar{X}} &= \bar{X} \\ \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \bar{X} + \left(-3 + \frac{4k_3/(3\sqrt{n})}{1+0,2k_3/n} \right) \frac{\bar{R}}{d_2^* \sqrt{n}} \equiv \bar{X} - A_L^* R \end{aligned} \quad (4.20)$$

olarak hesaplanır. Burada,

$$\begin{aligned} A_U^* &= \left(3 + \frac{4k_3/(3\sqrt{n})}{1+0,2k_3/n} \right) \frac{1}{d_2^* \sqrt{n}} \\ A_L^* &= \left(-3 + \frac{4k_3/(3\sqrt{n})}{1+0,2k_3/n} \right) \frac{1}{d_2^* \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

olduğu görülür.

Hesaplanan k_3 değerine ve örneklem büyüklüğüne göre A_U^* ve A_L^* sabitlerinin değerleri Çizelge 4.5'te, d_2^* sabitinin değerleri ise Çizelge 4.6'da verilmiştir. Eğer hesaplanan k_3 değeri tabloda yer almıyorsa A_U^* ve A_L^* sabitleri (4.22)'de belirtilen interpolasyon formülü ile hesaplanmaktadır. İnterpolasyon Ek.2'de anlatılmıştır.

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \quad (4.22)$$

Çizelge 4.5. Çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ kontrol grafiği sabitleri A_U^* ve A_L^*

	$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$		$n=7$		$n=10$	
k_3	A_U^*	A_L^*	A_U^*	A_L^*	A_U^*	A_L^*	A_U^*	A_L^*	A_U^*	A_L^*	A_U^*	A_L^*
0,0	1,88	1,88	1,03	1,03	0,73	0,73	0,58	0,58	0,42	0,42	0,31	0,31
0,4	2,14	1,67	1,13	0,92	0,82	0,69	0,63	0,53	0,45	0,39	0,33	0,29
0,8	2,37	1,47	1,25	0,84	0,87	0,61	0,68	0,50	0,48	0,37	0,35	0,28
1,2	2,61	1,32	1,37	0,77	0,95	0,57	0,74	0,46	0,52	0,35	0,37	0,26
1,6	2,83	1,22	1,49	0,72	1,03	0,54	0,79	0,44	0,56	0,33	0,39	0,25
2,0	3,02	1,15	1,60	0,68	1,10	0,51	0,85	0,42	0,59	0,32	0,42	0,25
2,4	3,19	1,12	1,69	0,65	1,18	0,49	0,91	0,40	0,63	0,30	0,44	0,23
2,8	3,32	1,13	1,78	0,64	1,24	0,47	0,95	0,39	0,66	0,29	0,46	0,22
3,2	3,45	1,16	1,86	0,64	1,29	0,47	1,00	0,38	0,69	0,29	0,48	0,22
3,6	3,52	1,20	1,92	0,65	1,34	0,47	1,04	0,37	0,72	0,28	0,50	0,21
4,0	3,59	1,52	1,97	0,66	1,39	0,47	1,07	0,37	0,75	0,27	0,51	0,21

Örneğin $n=5$ iken $k_3=1,2$ olarak hesaplanırsa, A_U^* değerinin 0,74, A_L^* değerinin 0,46 olduğu görülmektedir. Eğer $k_3=-1,2$ olarak hesaplanırsa, A_U^* değeri 0,46, A_L^* değeri 0,74 olur. Yine $n=5$ iken $k_3=1,35$ olarak hesaplanırsa A_U^* ve A_L^* sabitlerinin değerleri (4.22)'deki interpolasyon formülü kullanılarak,

$$A_U^* = \frac{1,35-1,6}{1,2-1,6} 0,74 + \frac{1,35-1,2}{1,6-1,2} 0,79 = 0,75875$$

$$A_L^* = \frac{1,35-1,6}{1,2-1,6} 0,46 + \frac{1,35-1,2}{1,6-1,2} 0,44 = 0,4525$$
(4.23)

olarak hesaplanır.

Çizelge 4.6. Kontrol grafiği sabitleri (d_2^*, d_3^*, d_4^*)

k_3	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=7$	$n=10$
0,0	1,12, 0,88, 0,99	1,68, 0,90, 0,66	2,06, 0,88, 0,59	2,32, 0,85, 0,55	2,70, 0,82, 0,50	3,07, 0,78, 0,47
0,4	1,12, 0,87, 1,12	1,68, 0,90, 0,86	1,99, 0,89, 0,78	2,31, 0,87, 0,71	2,69, 0,85, 0,68	3,05, 0,81, 0,68
0,8	1,11, 0,88, 1,27	1,66, 0,93, 1,07	2,02, 0,94, 0,99	2,28, 0,93, 0,96	2,66, 0,92, 0,95	3,02, 0,90, 0,96
1,2	1,08, 0,91, 1,39	1,62, 0,98, 1,25	1,98, 1,00, 1,20	2,24, 1,01, 1,18	2,60, 1,01, 1,16	2,98, 1,01, 1,16
1,6	1,05, 0,95, 1,46	1,57, 1,04, 1,38	1,92, 1,08, 1,34	2,18, 1,09, 1,32	2,55, 1,11, 1,30	2,93, 1,13, 1,29
2,0	1,02, 0,98, 1,49	1,52, 1,10, 1,45	1,86, 1,14, 1,42	2,12, 1,17, 1,41	2,49, 1,21, 1,39	2,88, 1,25, 1,37
2,4	0,98, 1,01, 1,48	1,48, 1,14, 1,48	1,81, 1,20, 1,47	2,06, 1,24, 1,46	2,43, 1,30, 1,44	2,82, 1,35, 1,42
2,8	0,95, 1,04, 1,46	1,43, 1,18, 1,49	1,76, 1,26, 1,48	2,00, 1,31, 1,48	2,38, 1,38, 1,47	2,77, 1,44, 1,45
3,2	0,92, 1,06, 1,43	1,39, 1,22, 1,48	1,70, 1,30, 1,48	1,95, 1,36, 1,48	2,32, 1,44, 1,48	2,72, 1,52, 1,47
3,6	0,90, 1,08, 1,39	1,35, 1,25, 1,46	1,66, 1,34, 1,47	1,90, 1,40, 1,48	2,27, 1,50, 1,48	2,68, 1,60, 1,48
4,0	0,88, 1,10, 1,35	1,31, 1,27, 1,43	1,62, 1,38, 1,46	1,86, 1,45, 1,47	2,23, 1,55, 1,47	2,63, 1,65, 1,47

Çarpıklık düzeltmesi yöntemine dayalı olarak hesaplanan R kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}_{KL_R} &= \left[1 + \left(3 + \frac{d_4^*}{d_2^*} \right) \frac{d_3^*}{d_2^*} \right] \bar{R} = D_4^* \bar{R} \\ O\check{C}_R &= \bar{R} \\ AKL_R &= \left[1 + \left(-\frac{d_4^*}{d_2^*} + \frac{d_3^*}{d_2^*} \right) \frac{d_3^*}{d_2^*} \right] \bar{R} = D_3^* \bar{R} \end{aligned}$$
(4.24)

olarak hesaplanır. Çarpık dağılımlar için D_4^* ve D_3^* sabitlerinin değerleri Çizelge 4.7’de, d_2^* ve d_3^* sabitlerinin değerleri de Çizelge 4.6’da verilmiştir.

Örneğin $n=7$ iken $k_3=2,8$ olarak hesaplanırsa, D_4^* değerinin 3,58, D_3^* değerinin 0,11 olduğu görülmektedir. Yine $n=7$ iken $k_3=2,45$ olarak hesaplanırsa D_4^* ve D_3^* sabitlerinin değerleri (4.22)’de gösterilen interpolasyon formülü ile hesaplanır.

$$D_4^* = \frac{2,45 - 2,8}{2,4 - 2,8} 3,37 + \frac{2,45 - 2,4}{2,8 - 2,4} 3,58 = 3,39625$$

$$D_3^* = \frac{2,45 - 2,8}{2,4 - 2,8} 0,11 + \frac{2,45 - 2,4}{2,8 - 2,4} 0,16 = 0,11625$$

(4.25)

Çizelge 4.7. Çarpıklık düzeltmeli R kontrol grafiği sabitleri D_4^* ve D_3^*

	$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$		$n=7$		$n=10$	
k_3	D_4^*	D_3^*	D_4^*	D_3^*	D_4^*	D_3^*	D_4^*	D_3^*	D_4^*	D_3^*	D_4^*	D_3^*
0,0	4,12	0,00	2,93	0,00	2,53	0,00	2,30	0,10	2,06	0,24	1,88	0,35
0,4	4,21	0,00	3,06	0,00	2,69	0,01	2,40	0,14	2,16	0,27	1,98	0,38
0,8	4,41	0,00	3,28	0,00	2,85	0,07	2,61	0,17	2,36	0,29	2,17	0,39
1,2	4,70	0,00	3,58	0,00	3,13	0,09	2,88	0,17	2,61	0,28	2,41	0,37
1,6	5,03	0,00	3,90	0,00	3,44	0,07	3,17	0,15	2,88	0,26	2,65	0,34
2,0	5,32	0,00	4,20	0,00	3,71	0,03	3,44	0,11	3,13	0,21	2,90	0,28
2,4	5,60	0,00	4,46	0,00	3,97	0,00	3,69	0,06	3,37	0,16	3,11	0,24
2,8	5,85	0,00	4,71	0,00	4,21	0,00	3,92	0,05	3,58	0,11	3,31	0,19
3,2	6,09	0,00	4,93	0,00	4,42	0,00	4,13	0,00	3,78	0,00	3,50	0,14
3,6	6,27	0,00	5,12	0,00	4,61	0,00	4,31	0,00	3,96	0,00	3,67	0,09
4,0	6,44	0,00	5,30	0,00	4,79	0,00	4,48	0,00	4,11	0,00	3,81	0,04

4.1.3. Ağırlıklı Varyans Yöntemiyle Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması

Ağırlıklı varyans yöntemi çarpık bir dağılımın ortalama iki parçaya bölünebildiği ve yeni bir simetrik dağılım oluşturmak için kullanıldığı fikrine dayanmaktadır. Çarpık dağılımdan oluşturulan iki yeni dağılım aynı ortalamalara farklı standart sapmalara sahiptir. Ağırlıklı varyans yöntemi kontrol grafiği limitlerini oluşturmak için bu iki dağılımı kullanır[19].

Ağırlıklı varyans yöntemiyle kitlenin çarpıklığına göre kontrol grafiği limitleri düzenlenir. Bu yöntem de Shewhart yöntemi gibi kontrol grafiği sınırlarını belirlemek için standart sapmayı kullanır. Ancak ağırlıklı varyans yöntemi standart sapmanın iki farklı çarpanla çarpılması yönüyle Shewhart yönteminden farklıdır. Birinci çarpan ÜKL diğer çarpan ise AKL için kullanılır. P_x , X rasgele değişkeninin μ_x 'den daha küçük veya eşit olma olasılığı olsun. ÜKL çarpanı $\sqrt{2P_x}$, AKL çarpanı $\sqrt{2(1-P_x)}$ olarak hesaplanır[19].

Ağırlıklı varyans yöntemi X 'in dağılımını düzenlemeye dayanmaktadır ancak $\bar{X}$ 'nin dağılımına uygulandığı zaman n 'nin küçük ve orta değerleri için klasik Shewhart yönteminden daha iyi çalıştığı deneysel olarak bulunmuştur[19].

4.1.3.1. Ağırlıklı Varyans Yöntemiyle Çizilen $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

4.1.3.1.1. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Biliniyorken

Kalite değişkeni X 'in ortalamadan daha küçük veya eşit olma olasılığı,

$$P_x = P(X \leq \mu_x) \quad (4.26)$$

olmak üzere,

$\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \mu_X + 3 \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{2P_X} \\ O\check{C}_{\bar{X}} &= \mu_X \\ \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \mu_X - 3 \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{2(1-P_X)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

olarak hesaplanır.

R kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= \mu_R + 3\sigma_R \sqrt{2P_X} \\ O\check{C}_R &= \mu_R \\ \bar{A}KL_R &= \left[\mu_R - 3\sigma_R \sqrt{2(1-P_X)} \right]^+ \end{aligned} \quad (4.28)$$

olarak hesaplanır.

μ_R ve σ_R sırasıyla genişlik R 'nin ortalaması ve standart sapmasıdır. Eğer $[\mu_R + 3\sigma_R \sqrt{2(1-P_X)}] = a$ ise $[a]^+$, $\max\{0, a\}$ 'yı ifade eder. Eğer veri seti simetrik ise $P_X = 0,5$ olarak hesaplanır ve $\bar{X}$ ve R kontrol grafikleri Shewhart kontrol grafikleri gibi oluşturulur. Eğer veri seti sağa çarpık ise P_X değeri 0,5'ten büyüktür ve $\bar{U}KL$ ile $O\check{C}$ arasındaki mesafe, $\bar{A}KL$ ile $O\check{C}$ arasındaki mesafeden geniştir. Benzer şekilde eğer veri seti sola çarpık ise P_X değeri 0,5'ten küçüktür ve $\bar{A}KL$ ile $O\check{C}$ arasındaki mesafe $\bar{U}KL$ ile $O\check{C}$ arasındaki mesafeden geniştir[19].

4.1.3.1.2. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Bilinmiyorken

Genel olarak pratikte P_x ve kitle parametreleri bilinmez. Bu durumda P_x ve kitle parametrelerinin tahmin edilmesi gerekir. Birçok gözlem kullanılarak tahmin edilen P_x 'in tahmin edicisi $\hat{P}_x$ ile gösterilir ve (4.29) formülü gibi hesaplanır.

$$\hat{f}_x = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \delta(\bar{\bar{X}} - X_{ij})}{nr} \quad (4.29)$$

r ve n alt grubun örneklem ve gözlem sayılarıdır. $\bar{\bar{X}} - X_{ij} \geq 0$ için $\delta(\bar{\bar{X}} - X_{ij})=1$ diğer durumlarda $\delta(X)=0$ 'dır.

$\bar{\bar{X}}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_x &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2' \sqrt{n}} \sqrt{2\hat{P}_x} = \bar{\bar{X}} + W_U \bar{R} \\ O\bar{C}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} \\ \bar{A}KL_x &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2' \sqrt{n}} \sqrt{2(1-\hat{P}_x)} = \bar{\bar{X}} - W_L \bar{R} \end{aligned} \quad (4.30)$$

olarak hesaplanır. Buradan W_U ve W_L değerleri,

$$\begin{aligned} W_U &= 3 \frac{\sqrt{2\hat{P}_x}}{d_2' \sqrt{n}} \\ W_L &= 3 \frac{\sqrt{2(1-\hat{P}_x)}}{d_2' \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

biçimindedir. n ve P_x 'in farklı değerleri için ağırlıklı varyans yönteminin $\bar{\bar{X}}$ kontrol grafiği sabitleri W_U ve W_L sırasıyla Çizelge 4.8 ve Çizelge 4.9'da verilmiştir.

Çizelge 4.8. Ağırlıklı varyans yöntemi için $\bar{X}$ kontrol grafiği sabiti W_U

P_x	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
0,50	1,88	1,02	0,73	0,58	0,48	0,42	0,37	0,34	0,31	0,22	0,18	0,15
0,52	1,93	1,05	0,75	0,59	0,50	0,43	0,38	0,34	0,32	0,23	0,18	0,16
0,54	1,97	1,08	0,77	0,61	0,51	0,44	0,39	0,35	0,32	0,23	0,19	0,16
0,56	2,04	1,11	0,79	0,63	0,52	0,45	0,40	0,37	0,33	0,24	0,19	0,16
0,58	2,14	1,14	0,82	0,65	0,54	0,47	0,42	0,38	0,35	0,25	0,20	0,17
0,60	2,26	1,22	0,86	0,68	0,56	0,49	0,43	0,39	0,36	0,25	0,20	0,17
0,62	2,36	1,28	0,91	0,71	0,59	0,51	0,45	0,41	0,37	0,26	0,21	0,17
0,64	2,53	1,36	0,96	0,76	0,63	0,54	0,47	0,43	0,39	0,27	0,21	0,18
0,66	2,74	1,49	1,04	0,81	0,67	0,58	0,51	0,45	0,41	0,28	0,22	0,18
0,68	2,98	1,59	1,12	0,88	0,71	0,61	0,54	0,47	0,42	0,29	0,23	0,19
0,70	3,26	1,78	1,23	0,99	0,72	0,62	0,55	0,50	0,44	0,30	0,24	0,19

Çizelge 4.8.'de $P_x \leq 0,5$ olduğu durumda W_U , $1-P_x$ için W_L ile aynıdır ve tersi için de durum böyledir[18]. Örneğin $n=5$ olduğu durumda, $P_x=0,64$ için $W_U=0,76$, $W_L=0,57$; $P_x=0,36$ için $W_U=0,57$, $W_L=0,76$ 'dır. Eğer P_x değeri tabloda yok ise kontrol grafiği sabitleri yakın değerler kullanılarak interpolasyon formülü ile hesaplanır.

Çizelge 4.9. Ağırlıklı varyans yöntemi için $\bar{X}$ kontrol grafiği sabiti W_L

P_x	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
0,50	1,88	1,02	0,73	0,58	0,48	0,42	0,37	0,34	0,31	0,22	0,18	0,15
0,52	1,86	1,01	0,72	0,57	0,48	0,41	0,37	0,33	0,30	0,22	0,18	0,15
0,54	1,83	0,99	0,71	0,56	0,47	0,41	0,36	0,33	0,30	0,22	0,18	0,15
0,56	1,81	0,98	0,70	0,56	0,47	0,40	0,36	0,32	0,30	0,21	0,17	0,14
0,58	1,82	0,97	0,70	0,56	0,46	0,40	0,35	0,32	0,30	0,21	0,17	0,14
0,60	1,84	0,99	0,71	0,56	0,46	0,40	0,35	0,32	0,29	0,21	0,17	0,14
0,62	1,85	1,00	0,71	0,56	0,46	0,40	0,35	0,32	0,29	0,21	0,17	0,13
0,64	1,89	1,02	0,72	0,57	0,47	0,40	0,35	0,32	0,29	0,20	0,16	0,13
0,66	1,96	1,08	0,75	0,58	0,48	0,42	0,37	0,32	0,29	0,20	0,16	0,13
0,68	2,04	1,09	0,77	0,61	0,49	0,42	0,37	0,32	0,29	0,20	0,16	0,13
0,70	2,13	1,17	0,81	0,65	0,50	0,43	0,36	0,32	0,29	0,20	0,15	0,13

R kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned}\bar{U}KL_R &= \bar{R} + 3\bar{R}\frac{d'_3}{d'_2}\sqrt{2\hat{P}_X} = V_U \bar{R} \\ O\bar{C}_R &= \bar{R} \\ \bar{A}KL_R &= \left[\bar{R} - 3\bar{R}\frac{d'_3}{d'_2}\sqrt{2(1-\hat{P}_X)} \right]^+ = V_L \bar{R}\end{aligned}\tag{4.32}$$

olarak hesaplanır.

Buradan, V_U ve V_L değerleri,

$$\begin{aligned}V_U &= 1 + 3\frac{d'_3}{d'_2}\sqrt{2\hat{P}_X} \\ V_L &= 1 - 3\frac{d'_3}{d'_2}\sqrt{2(1-\hat{P}_X)}\end{aligned}\tag{4.33}$$

biçimindedir.

Çizelge 4.10 ve Çizelge 4.11’de verilen V_U ve V_L değerleri ağırlıklı varyans yönteminde kullanılan tablo değerleridir[19]. d'_2 ve d'_3 ise çarpık dağılıma sahip veri seti için hesaplanmış ağırlıklı varyansa dayalı kontrol grafiği sabitleridir ve normal dağılım için kullanılan d_2 ve d_3 sabitlerine karşılık gelir. d'_2 ve d'_3 sabitleri n ve P_X değerlerine göre hesaplanır.

Çizelge 4.10. Ağırlıklı varyans yöntemi için R kontrol grafiği sabiti V_U

P_x	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
0,30	4,47	3,89	3,58	3,52	3,10	2,97	2,95	2,84	2,71	2,60	2,52	2,43
0,32	4,24	3,49	3,25	3,16	2,91	2,79	2,75	2,66	2,57	2,49	2,38	2,31
0,34	4,03	3,27	3,01	2,81	2,72	2,64	2,57	2,54	2,45	2,38	2,24	2,20
0,36	3,79	3,07	2,82	2,63	2,52	2,44	2,38	2,35	2,33	2,24	2,14	2,07
0,38	3,58	2,94	2,67	2,51	2,40	2,32	2,27	2,23	2,19	2,08	2,04	1,97
0,40	3,49	2,82	2,53	2,39	2,27	2,21	2,15	2,12	2,09	1,94	1,92	1,87
0,42	3,37	2,67	2,43	2,29	2,18	2,10	2,04	2,02	1,98	1,85	1,80	1,75
0,44	3,28	2,62	2,32	2,23	2,12	2,04	1,99	1,96	1,93	1,78	1,71	1,66
0,46	3,26	2,59	2,30	2,15	2,04	1,96	1,90	1,86	1,83	1,70	1,63	1,59
0,48	3,25	2,58	2,28	2,13	2,00	1,92	1,86	1,82	1,79	1,67	1,60	1,55
0,50	3,25	2,58	2,28	2,11	2,00	1,92	1,86	1,82	1,78	1,65	1,59	1,54
0,52	3,34	2,64	2,33	2,18	2,04	1,96	1,90	1,86	1,82	1,70	1,62	1,57
0,54	3,43	2,72	2,41	2,25	2,12	2,04	1,97	1,94	1,90	1,76	1,69	1,63
0,56	3,58	2,83	2,49	2,38	2,26	2,18	2,11	2,09	2,05	1,88	1,80	1,75
0,58	3,79	2,96	2,67	2,52	2,38	2,30	2,23	2,19	2,16	2,00	1,94	1,88
0,60	4,06	3,23	2,87	2,70	2,56	2,48	2,41	2,37	2,33	2,15	2,12	2,06
0,62	4,30	3,48	3,14	2,93	2,79	2,69	2,62	2,58	2,52	2,39	2,33	2,25
0,64	4,72	3,76	3,43	3,18	3,03	2,92	2,84	2,80	2,77	2,65	2,52	2,43
0,66	5,23	4,16	3,80	3,52	3,39	3,28	3,19	3,15	3,12	2,90	2,73	2,67
0,68	5,71	4,64	4,27	4,02	3,99	3,62	3,56	3,42	3,39	3,17	3,02	2,91
0,70	6,10	5,41	4,94	4,66	4,21	4,01	3,97	3,81	3,71	3,44	3,32	3,18

Çizelge 4.11. Ağırlıklı varyans yöntemi için R kontrol grafiği sabiti V_L

P_x	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
0,30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,32	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,34	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,36	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
0,42	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,06	0,12
0,44	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,12	0,20	0,25
0,46	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,03	0,10	0,24	0,31	0,37
0,48	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,10	0,13	0,18	0,30	0,38	0,43
0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,14	0,18	0,22	0,35	0,42	0,46
0,52	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,14	0,17	0,21	0,33	0,41	0,45
0,54	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,10	0,12	0,17	0,30	0,37	0,41
0,56	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,03	0,07	0,22	0,29	0,34
0,58	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,15	0,20	0,25
0,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,08	0,13
0,62	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,03
0,64	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,66	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,68	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,70	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

4.1.4. Ağırlıklı Standart Sapma Yöntemiyle Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması

Ağırlıklı standart sapma yöntemi ağırlıklı varyans yöntemine benzer. Çarpık dağılımın ortalaması iki parçaya bölünerek çözüm elde edilir ve her bir parça çarpıklık derecesine uygun olarak düzenlenmiş yeni bir simetrik dağılım oluşturur.

4.1.4.1. Ağırlıklı Standart Sapma Yöntemiyle Çizilen $\bar{X}$ Kontrol Grafiği

4.1.4.1.1. Kitle Dağılımı ve Parametreli Biliniyorken

$\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned}\dot{ÜKL}_{\bar{X}} &= \mu_x + 3 \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} (2P_x) \\ OÇ_{\bar{X}} &= \mu_x \\ AKL_{\bar{X}} &= \mu_x - 3 \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} [2(1 - P_x)]\end{aligned}\tag{4.34}$$

olarak hesaplanır.

4.1.4.1.2. Kitle Dağılımı ve Parametreleri Bilinmiyorken

$\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned}\dot{ÜKL}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2^{ASS} \sqrt{n}} (2\hat{P}_x) \\ OÇ_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} \\ AKL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2^{ASS} \sqrt{n}} [2(1 - \hat{P}_x)]\end{aligned}\tag{4.35}$$

olarak hesaplanır.

d_2^{ASS} , ağırlıklı standart sapma yöntemi için ağırlıklı standart sapma yöntemi ile çizilen kontrol grafiği sabitidir ve Çizelge 4.11’de farklı n ve P değerlerine göre gösterilmiştir.

Çizelge 4.12. Ağırlıklı standart sapma yöntemi için kontrol grafiği sabiti d_2^{ASS}

$\hat{P}_x$	d_2^{ASS}				
	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=10$
0,50	1,128	1,693	2,326	2,704	3,078
0,52	1,126	1,679	2,318	2,698	3,074
0,54	1,121	1,660	2,307	2,689	3,066
0,56	1,112	1,637	2,291	2,677	3,053
0,58	1,099	1,609	2,272	2,657	3,304
0,60	1,083	1,577	2,249	2,629	3,011
0,62	1,063	1,541	2,207	2,597	2,908
0,64	1,039	1,500	2,161	2,561	2,944
0,66	1,012	1,454	2,110	2,511	2,901
0,68	0,982	1,402	2,055	2,456	2,851
0,70	0,947	1,344	1,996	2,396	2,796

Kontrol grafiği sabiti d_2^{ASS} (4.36) formülünde gösterildiği gibi elde edilir.

$$d_2^{ASS} = \hat{P}_x d_2 (2n(1 - \hat{P}_x)) + (1 - \hat{P}_x) d_2 (2n\hat{P}_x) \quad (4.36)$$

Örneklem boyutu n olduğunda $d_2 = d_2(n)$ olur[18]. Temel dağılım simetrik olduğunda $d_2^{ASS} = d_2$ olur.

4.2. Basık Dağılıma Sahip Veriler İçin Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması

Basıklık ölçüsü herhangi bir olasılık fonksiyonun şekli ile ilgili bir parametredir. Bu ölçü veri setindeki gözlemlerin sivri, basık veya normal olup olmadığının saptanmasında kullanılır. Gözlemlerin ortalama etrafından toplanma yoğunluğunun bir göstergesidir. Sivri dağılımlarda ortalama etrafında belirgin bir yığılma görülürken, basık dağılımlarda ortalama etrafında belirgin bir yığılma görülmez.

4.2.1. Basıklık Katsayısının Ölçülmesi

k_4 basıklık katsayısı verilerin basıklık açısından karşılaştırmalarında kullanılır. k_4 istatistiğinden yararlanarak veri setlerinin basıklık durumu aşağıdaki gibi değerlendirilir.

$k_4=3$ ise normal dağılıma uygundur.

$k_4<3$ ise normal dağılıma göre daha basıktır.

$k_4>3$ ise normal dağılıma göre daha sivridir.

4.2.1.1. Momentlere Dayalı Basıklık Katsayısı

Bir veri setinin dağılımının basıklığı dördüncü moment yardımıyla hesaplanabilir. Verilerin hesaplanan dördüncü dereceden momenti, aynı verilerin standart sapmasının dördüncü kuvvetine bölünürse standart bir basıklık ölçüsü birimi elde edilmiş olur. Momentler yardımıyla basıklık katsayısı k_4 (4.37) formülü ile elde edilebilir ve yorumlanabilir [15].

$$k_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (4.37)$$

İstatistik paket programlarında momentlere dayanan ve sıfıra göre yorumlanan basıklık ölçüsü örneklem verilerinden hareketle (4.38) formülünde gösterildiği gibi hesaplanır.

$$k_4 = \left[\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{S} \right)^4 \right] - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \quad (4.38)$$

4.2.1.2. Moors'un Basıklık Katsayısı

Yüzdeliklere dayanarak hesaplanan Moors'un basıklık katsayısı formülü (4.39)'de gösterilmiştir.

$$k_{4(M)} = \frac{Q(3/8) - Q(1/8) + Q(7/8) - Q(5/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)} \quad (4.39)$$

4.2.2. Basıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması

Basıklık düzeltmesi yönteminde herhangi bir dağılımın ya da normal dağılımın α kartilini dağılımın kümülanları cinsinden ifade etmek için çarpıklık düzeltmesi yönteminde olduğu gibi Ek.1'de anlatılan Cornish-Fisher açılımı kullanılır. Kitle dağılımı normal olmadığında normal dağılımın α kartilini kullanmak uygun değildir.

Çarpıklık düzeltmesine benzer şekilde Cornish-Fisher açılımına dayalı olarak basıklık düzeltmesi yapılmıştır[10]. X ortalaması 0, standart sapması 1 olan bir dağılıma sahip olsun. k_r ise $r \geq 3$ için dağılımın kümülanları olsun. Simetrik dağılımlar için çarpıklık katsayısı k_3 'ün sıfır olduğu bölüm 4.1.1.'de belirtildi. Eğer k_4 basıklık ise basıklık düzeltmesi yöntemine dayalı olarak bireysel gözlemler için standartlaştırılmış kontrol grafiği limitleri,

$$\bar{U}KL = 3 + \frac{k_4}{1 + 0,33k_4}$$

$$OÇ = 0 \quad (4.40)$$

$$\bar{U}KL = -3 - \frac{k_4}{1 + 0,33k_4}$$

olarak hesaplanır.

Teorik gerekçeler ve ilgili hesaplamalar Ek.1’de verilmiştir. Bu kontrol limitleri formatının Shewhart kontrol limitlerine çok benzer olduğu görülmektedir. Eğer basıklık katsayısı sıfır ise basıklık düzeltmesi yöntemiyle oluşturulan kontrol grafikleri normal dağılımda olduğu gibi Shewhart kontrol grafikleri gibi oluşturulur.

4.2.2.1. Basıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Çizilen $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

4.2.2.1.1. Kitlenin Dağılımı ve Parametreleri Biliniyorken

Kalite karakteristiği X ’in ortalaması μ_X , standart sapması σ_X ve basıklığı k_4 olan simetrik leptokurtatik bir dağılıma sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda çarpıklık düzeltmesi yöntemine benzer şekilde benzer şekilde (4.41) ve (4.42)’de gösterilen basıklık düzeltmeli kontrol grafiği limitleri hesaplanmıştır[18].

$\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\bar{U}KL_{\bar{X}} = \mu_X + \left(3 + \frac{k_4 \left(\frac{\bar{X}}{\sigma_X} \right)}{1 + 0,33k_4 \left(\frac{\bar{X}}{\sigma_X} \right)} \right) \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$OÇ = \mu_X \quad (4.41)$$

$$AKL_{\bar{X}} = \mu_X - \left(3 + \frac{k_4 \left(\frac{\bar{X}}{\sigma_X} \right)}{1 + 0,33k_4 \left(\frac{\bar{X}}{\sigma_X} \right)} \right) \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

olarak hesaplanır.

R kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= \mu_R + \left(3 + \frac{k_4(R)}{1 + 0,33k_4(R)} \right) \sigma_R \\ O\check{C} &= \mu_R \\ \bar{A}KL_R &= \mu_R - \left(3 + \frac{k_4(R)}{1 + 0,33k_4(R)} \right) \sigma_R \end{aligned} \quad (4.42)$$

olarak hesaplanır.

Burada $k_4(\bar{X})$, $k_4(R)$ sırasıyla örneklem ortalaması $\bar{X}$ ve örneklem genişliği R 'nin basıklık katsayılarıdır [10].

Örneklem genişliği R 'nin teorik dağılımı hem normal dağılım durumunda hem de leptokurtik dağılımın mevcut durumunda simetrik değildir. Bu yüzden R kontrol grafikleri için hem Shewhart hem de basıklık düzeltmesi yöntemiyle çizilen kontrol grafiği limitleri birbirine yakındır. Shewhart yönteminde 6'dan küçük örneklem için R kontrol grafiğinin alt kontrol limiti 0'dır. Dağılımın leptokurtik olduğu durumda R kontrol grafiğinin alt kontrol limiti bütün durumlar için 0 olur[10].

4.2.2.1.2. Kitlenin Dağılımı ve Parametreleri Bilinmiyorken

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ $i=1,2,\dots, r$ ortalaması μ , standart sapması σ , çarpıklığı 0, basıklığı k_4 olan kitle dağılımının n hacimli r tane örneklem grubu olsun. Eğer dağılımın parametreleri bilinmiyorsa kontrol grafiklerinin oluşturulabilmesi için bu parametrelerin tahmin edilmesi gerekmektedir. Parametrelerin tahmin edilmesi bölüm 4.1.2.1.2'de yer alan Çarpıklık düzeltmesi yöntemiyle parametrelerin

bilinmediği durumda kalite kontrol grafiklerinin oluşturulması başlığı altında anlatılmıştır.

Basıklık katsayısı k_4 'ün tahmin edicisi olan k_4^* formül (4.43)'te gösterildiği gibi hesaplanır.

$$k_4^* = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{X_{ij} - \bar{X}}{S_R} \right)^4 - 3 \quad (4.43)$$

k_4^* 'ın önemli ölçüde pozitif olduğunu doğrulamak için formül (4.44)'te gösterildiği gibi hipotez testi yapılır.

$$\begin{aligned} H_0 : k_4^* &= 0 \\ H_1 : k_4^* &> 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Burada eğer $\frac{k_4^*}{\sqrt{\frac{24nr(nr-1)^2}{(nr-3)(nr-2)(nr+3)(nr+5)}} > Z_\alpha$ ise H_1 hipotezi $(1-\alpha)$ güven

düzeyinde kabul edilir[10].

Eğer Y , X dağılımından gelen n tane bağımsız, aynı dağılımına sahip rasgele değişkenin ortalaması ise, Y 'nin Basıklığı= X 'in Basıklığı/ n olarak hesaplanır.

Eğer kitle dağılımı ve parametreleri bilinmiyorsa kontrol grafiği limitleri Shewhart kontrol grafiği limitlerine benzer şekilde (4.45) ve (4.46) 'da gösterildiği gibi olur.

$\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned}
\bar{U}KL_X &= \bar{\bar{X}} + \left(3 + \frac{k(\bar{X})}{1+0,33k(\bar{X})} \right) \frac{R}{d^* \sqrt{n}} \equiv \bar{\bar{X}} + A_2^* \bar{R} \\
OC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} \\
AKL_X &= \bar{\bar{X}} - \left(3 + \frac{k(\bar{X})}{1+0,33k(\bar{X})} \right) \frac{R}{d^* \sqrt{n}} \equiv \bar{\bar{X}} - A_2^* \bar{R}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

olarak hesaplanır.

R kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned}
\bar{U}KL_R &= R + \left(3 + \frac{d_4^*}{1+0,33d_4^*} \right) \frac{Rd_3^*}{d^*} = R \left(1 + \left(3 + \frac{d_4^*}{1+0,33d_4^*} \right) \frac{d_3^*}{d^*} \right) = RD_4^* \\
OC_R &= \bar{R} \\
AKL_R &= R - \left(3 + \frac{d_4^*}{1+0,33d_4^*} \right) \frac{Rd_3^*}{d^*} = R \left(1 - \left(3 + \frac{d_4^*}{1+0,33d_4^*} \right) \frac{d_3^*}{d^*} \right) = RD_3^*
\end{aligned} \tag{4.46}$$

olarak hesaplanır.

d_2^* , d_3^* , d_4^* , A_2^* , D_3^* , D_4^* sabit değerlerinin nasıl hesaplandığı ve farklı n değerlerine göre tablo hali Tadıkamalla ve Popescu'nun makalelerinde gösterilmiştir[12].

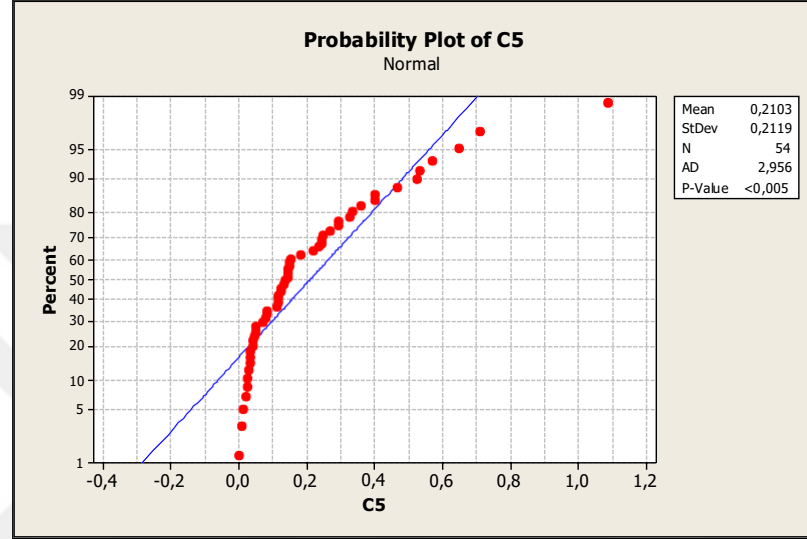
5.1. Üstel Dağılıma Sahip Verilerle Yapılan Bir Uygulama Çalışması

Olaylar arasındaki sürenin üstel dağılımla modellenebileceği varsayıldığında kalite kontrol grafiklerinde sürecin kontrolden çıkıp çıkmadığını gözlemlemek ve tamamlayıcı çalışma kurallarının nasıl uygulanacağını göstermek için hastane kaynaklı sonradan kazanılan enfeksiyon oranının çok yüksek olduğu büyük bir hastane sisteminden temin edilen veriler kullanılmıştır. Hastane özellikle hastaların taburcu olma sıklığını izlemek, enfeksiyon oranındaki bir artışı hızlı bir şekilde tanımlayıp süreç ve materyal değişikliklerinin daha az sayıda enfeksiyona yol açıp açmayacağını tespit etmek istemektedir. Bu ölçütlerin bir sağlık hizmeti sektöründe izlenmesinin önemi enfeksiyon oranlarındaki artışın hızlı bir şekilde belirlenmesidir. Çünkü hastanın sağlık maliyeti hastane için önemlidir ve hastaneye yatan enfeksiyonlu hastaların ölüm oranları diğer hastalara göre daha yüksektir[22].

Çizelge 5.1. Üstel Dağılıma Ait Veriler

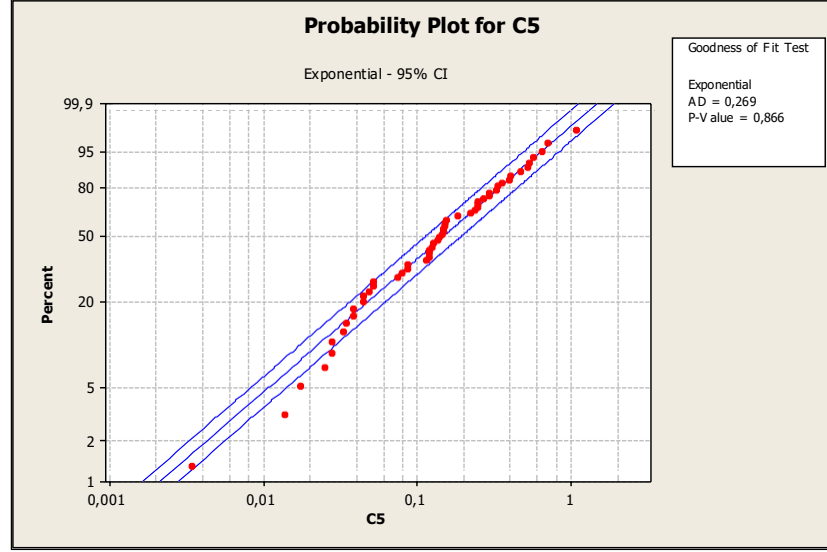
x_1	x_2	x_3
0,57014	0,12014	0,27083
0,07431	0,11458	0,04514
0,15278	0,00347	0,13542
0,14583	0,12014	0,08681
0,13889	0,04861	0,40347
0,14931	0,02778	0,12639
0,03333	0,32639	0,18403
0,08681	0,64931	0,70833
0,33681	0,14931	0,15625
0,03819	0,01389	0,24653
0,24653	0,03819	0,04514
0,29514	0,46806	0,01736
0,11944	0,22222	1,08889
0,05208	0,29514	0,05208
0,12500	0,53472	0,02778
0,25000	0,15139	0,03472
0,40069	0,52569	0,23611
0,02500	0,07986	0,35972

Minitab programı kullanılarak veri setine uyum iyiliği testi yapılmıştır. İlk olarak normal dağılıma uygunluğu Anderson-Darling uyum iyiliği testi ile test edilmiştir. Test sonucunda, $AD=0,2119$, $p<0,05$ olduğu gözlenmiş ve verilerin normal dağılıma uymadığı anlaşılmıştır. Normal dağılım için Minitab programında oluşturulan grafik Şekil 5.1.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. Normal dağılım için uyum iyiliği grafiği

Bu çalışma kapsamında değerlendirmek için veri setinin üstel dağılıma uygunluğu test edilmiştir. Yine Minitab programı yardımıyla yapılan Anderson-Darling uyum iyiliği testi sonucunda $p=0,866$ olduğu gözlenmiştir. $p=0,866>p=0,05$ olduğundan veri setinin üstel dağılıma uyduğu görülmüştür. Yani “ H_0 =Veri seti üstel dağılıma uygunluk göstermektedir.” hipotezi %95 güven düzeyinde kabul edilmiştir. Üstel dağılım için Minitab programında oluşturulan grafik Şekil 5.2.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. Üstel Dağılım için uyum iyiliği grafiği

$\alpha = 0,21026$, $\beta = 1$ olan üstel dağılım yoluyla Shewhart, çarpıklık düzeltmesi, ağırlıklı varyans ve ağırlıklı standart sapma yöntemleri ile kontrol grafiği limitleri oluşturulmuştur. Her bir yöntemin 1. tip hatalarına göre ortalama çalışma uzunlukları hesaplanarak karşılaştırma yapılmıştır.

$n=3$, $r=18$ ölçümden elde edilen veri setinin ortalaması ve değişim aralığı sırasıyla; $\bar{\bar{X}} = 0,210262$, $\bar{R} = 0,319831$ olarak bulunmuştur. Çarpıklık katsayısı ise üç farklı yöntemle hesaplanmıştır ve her bir çarpıklık katsayısı ile çarpıklık düzeltmeli kontrol grafiği limitleri oluşturulmuştur.

5.1.1. Shewhart Yöntemiyle Oluşturulan $\bar{\bar{X}}$ ve R Kontrol Grafikleri

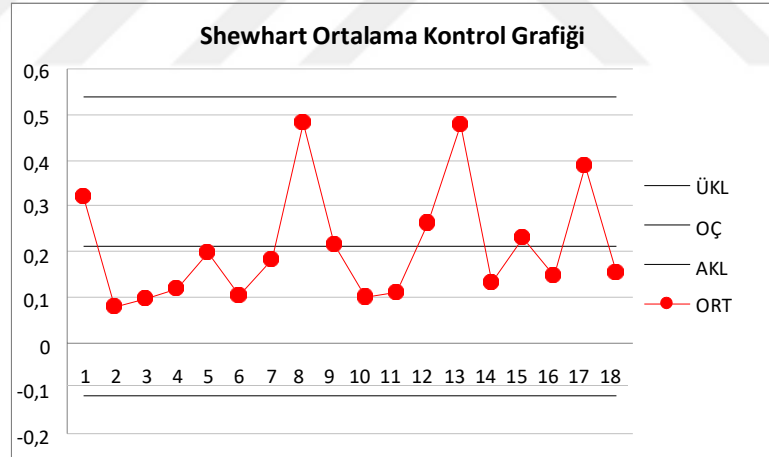
Shewhart yöntemi ile $n=3$ için oluşturulan $\bar{\bar{X}}$ ve R kontrol grafiği limitleri Çizelge 5.2'de gösterildiği gibi hesaplanmıştır. Hesaplama kullanılan katsayı değerleri

$A_2=1,023$, $D_3=0$ ve $D_4=2,575$ Çizelge 3.1 yardımıyla bulunmuştur.

Çizelge 5.2. Shewhart yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri

$\bar{X}$ Kontrol Grafiği Limitleri	R Kontrol Grafiği Limitleri
$\begin{aligned} \bar{ÜKL}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ &= 0,210262 + 1,023 * 0,319831 \\ &= 0,54 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{ÜKL}_R &= D_4 \bar{R} \\ &= 2,575 * 0,319831 \\ &= 0,823564 \end{aligned}$
$\begin{aligned} O\check{C}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} = 0,210262 \end{aligned}$	$\begin{aligned} O\check{C}_R &= \bar{R} = 0,319831 \end{aligned}$
$\begin{aligned} \bar{AKL}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \\ &= 0,210262 - 1,023 * 0,319831 \\ &= -0,12 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{AKL}_R &= D_3 \bar{R} \\ &= 0 * 0,319831 \\ &= 0 \end{aligned}$

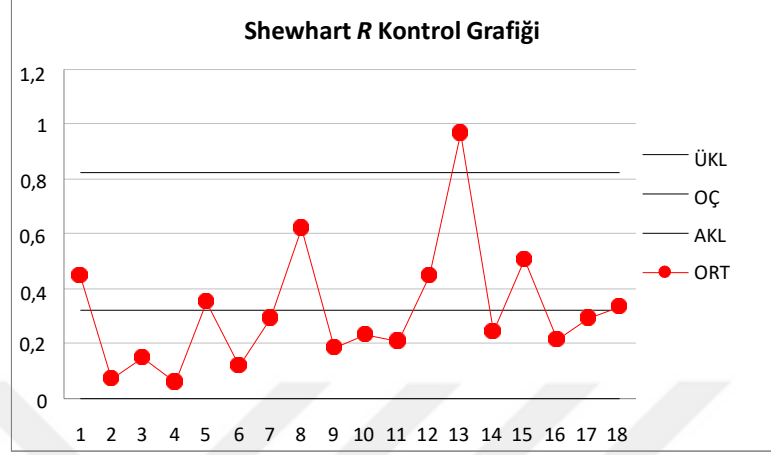
Shewhart $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitlerine göre oluşturulan grafikler sırasıyla Şekil 5.3. ve Şekil 5.4.'te gösterilmiştir.



Şekil 5.3. Shewhart yöntemi ile çizilen $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri

Klasik Shewhart yöntemiyle elde edilen $\bar{X}$ kontrol grafiğinde hesaplanan ortalamaların hepsinin alt kontrol limiti üstünde ve üst kontrol limiti altında olduğu,

kontrol limitleri dışında nokta bulunmadığı yani sürecin kontrol altında olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.4. Shewhart yöntemi ile çizilen R kontrol grafiği limitleri

Klasik Shewhart yöntemiyle elde edilen R kontrol grafiğinde, 13. gözleme ait genişlik değerinin üst kontrol limiti üstünde, diğer gözlemlere ait genişlik değerlerinin ise üst kontrol limiti altında ve alt kontrol limiti üstünde olduğu yani sürecin kontrol altında olmadığı gözlenmektedir.

5.1.2. Çarpıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Oluşturulan $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

Çarpıklık düzeltmesi yönteminde üç farklı şekilde hesaplanan çarpıklık katsayıları ile kontrol grafiği limitleri oluşturulmuştur.

5.1.2.1. Bowley'in Çarpıklık Katsayısı Kullanılarak Oluşturulan Çarpıklık

Düzeltilmeli $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

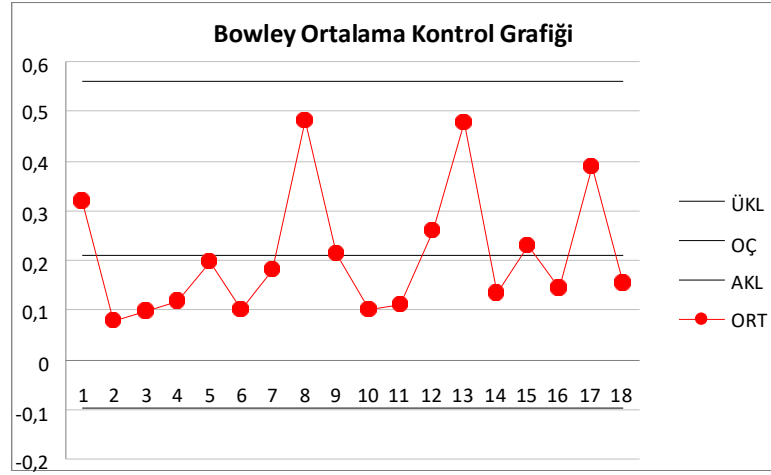
Formül (4.3)'e göre hesaplanan Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}=0,238087$ olarak bulunmuştur. (4.22)'deki interpolasyon formülü ile $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri için Çizelge 4.5'ten yararlanarak A_U^* değeri 1,089522, A_L^* değeri 0,964526, R kontrol grafiği limitleri için ise Çizelge 4.7.'den yararlanarak D_4^* değeri 3,007378, D_3^* değeri 0 olarak hesaplanmıştır.

Bowley'in çarpıklık katsayısı kullanılarak çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile $n=3$ için oluşturulan $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitleri Çizelge 5.3.'te gösterildiği gibi hesaplanmıştır.

Çizelge 5.3. $\text{ÇD}(k_{3(B)})$ yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri

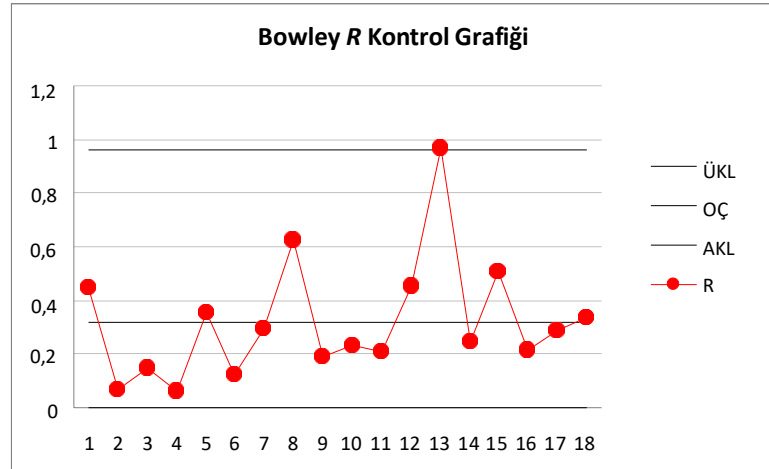
Bowley'in çarpıklık katsayısı	
$k_{3(B)} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = 0,238087$	
$\bar{X}$ Kontrol Grafiği Limitleri	R Kontrol Grafiği Limitleri
$\bar{U}KL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_U^* \bar{R}$ $= 0,210262 + 1,089522 * 0,319831$ $= 0,555725$	$\bar{U}KL_R = D_4^* \bar{R}$ $= 3,007378 * 0,319831$ $= 0,961851$
$OÇ_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 0,210262$	$OÇ_R = \bar{R} = 0,319831$
$\bar{AKL}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_L^* \bar{R}$ $= 0,210262 - 0,964526 * 0,319831$ $= -0,09822$	$\bar{AKL}_R = D_3^* \bar{R}$ $= 0 * 0,319831$ $= 0$

$k_{3(B)}$ kullanılarak çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitlerine göre oluşturulan grafikler sırasıyla Şekil 5.5. ve Şekil 5.6.'da gösterilmiştir.



Şekil 5.5. $\bar{X}$ kontrol grafiği

Bowley'in çarpıklık katsayısı kullanılarak oluşturulan çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ kontrol grafiğinde hesaplanan ortalamaların hepsinin alt kontrol limiti üstünde ve üst kontrol limiti altında olduğu, kontrol limitleri dışında nokta bulunmadığı yani sürecin kontrol altında olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.6. R kontrol grafiği

Bowley'in çarpıklık katsayısı kullanılarak oluşturulan çarpıklık düzeltmeli R kontrol grafiğinde, 13. gözleme ait genişlik değerinin üst kontrol limiti üstünde ancak üst kontrol limiti çizgisine Shewhart yönteminden daha yakın olduğu, diğer gözlemlere ait genişlik değerlerinin ise üst kontrol limiti altında ve alt kontrol limiti üstünde bulunduğu yani sürecin kontrol altında olmadığı gözlenmektedir.

5.1.2.2. Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı Kullanılarak Oluşturulan Çarpıklık Düzeltmeli $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

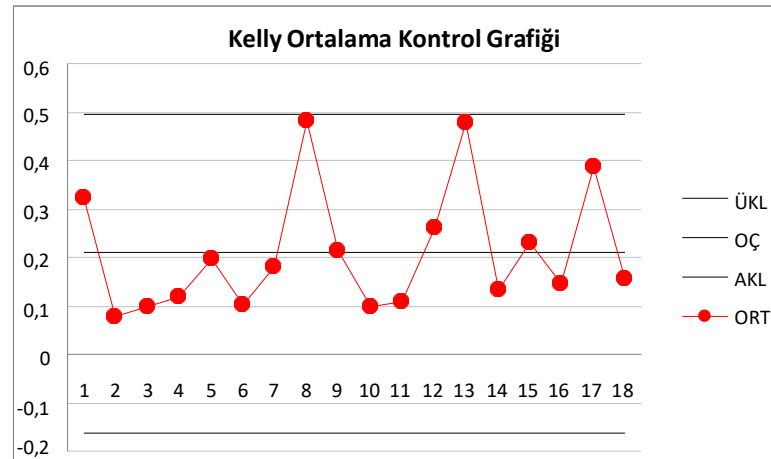
Formül (4.4)'e göre hesaplanan Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}=0,528495$ olarak bulunmuştur. (4.22)'deki interpolasyon formülü ile $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri için Çizelge 4.5'ten yararlanarak A_U^* değeri 1,168549, A_L^* değeri 0,894301, R kontrol grafiği limitleri için ise Çizelge 4.7.'den yararlanarak D_4^* değeri 3,130672, D_3^* değeri 0 olarak hesaplanmıştır.

Kelly'nin çarpıklık katsayısı kullanılarak çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile $n=3$ için oluşturulan $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitleri Çizelge 5.4'te gösterildiği gibi hesaplanmıştır.

Çizelge 5.4. ÇD($k_{3(K)}$) yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri

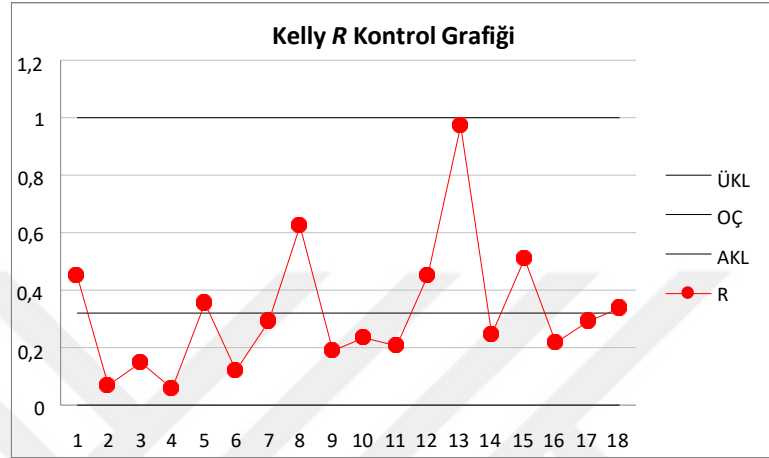
Kelly'nin çarpıklık katsayısı	
$k_{3(K)} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = 0,528495$	
$\bar{X}$ Kontrol Grafiği Limitleri	R Kontrol Grafiği Limitleri
$\begin{aligned} \bar{ÜKL}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + A_U^* \bar{R} \\ &= 0,210262 + 1,168549 * 0,319831 \\ &= 0,496287 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{ÜKL}_R &= D_4^* \bar{R} \\ &= 3,130672 * 0,319831 \\ &= 1,001285 \end{aligned}$
$OÇ_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 0,210262$	$OÇ_R = \bar{R} = 0,319831$
$\begin{aligned} \bar{AKL}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - A_L^* \bar{R} \\ &= 0,210262 - 0,894301 * 0,319831 \\ &= -0,16348 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{AKL}_R &= D_3^* \bar{R} \\ &= 0 * 0,319831 \\ &= 0 \end{aligned}$

$k_{3(K)}$ kullanılarak çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitlerine göre oluşturulan grafikler sırasıyla Şekil 5.7. ve Şekil 5.8.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.7. ÇD- $k_{3(K)}$ $\bar{X}$ kontrol grafiği

Kelly'nin çarpıklık katsayısı kullanılarak oluşturulan çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ kontrol grafiğinde hesaplanan ortalamaların hepsinin alt kontrol limiti üstünde ve üst kontrol limiti altında bulunduğu ancak 8. ve 14. ortalamanın üst kontrol limiti değerine çok yakın olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.8. ÇD- $k_{3(K)}$ R kontrol grafiği

Kelly'nin çarpıklık katsayısı kullanılarak oluşturulan çarpıklık düzeltmeli R kontrol grafiğinde, genişlik değerlerinin hepsinin üst kontrol limiti altında ve alt kontrol limiti üstünde bulunduğu yani sürecin kontrol altında olduğu gözlenmektedir.

5.1.2.3. Momentlere dayalı hesaplanan Çarpıklık Katsayısıyla Oluşturulan Çarpıklık Düzeltmeli $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

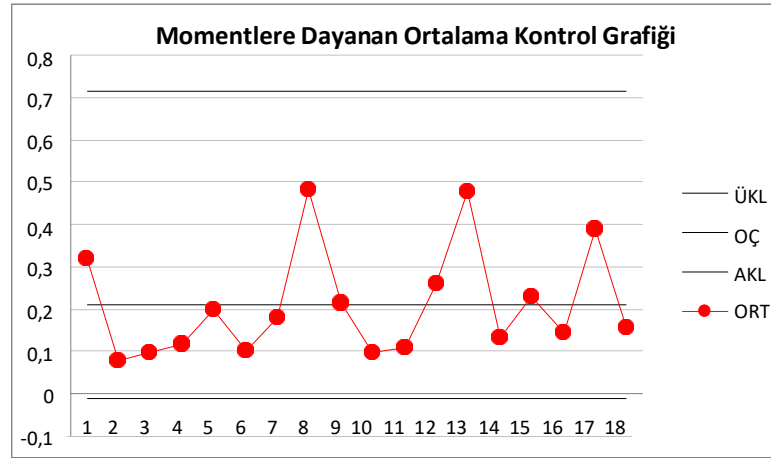
Formül (4.6)'ya göre hesaplanan momentlere dayalı çarpıklık katsayısı $k_3^* = 1,939595$ olarak bulunmuştur. Formül (4.22)'deki interpolasyon formülü ile $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri için Çizelge 4.5'ten yararlanarak A_U^* değeri 1,581739, A_L^* değeri 0,68664, R kontrol grafiği limitleri için ise Çizelge 4.7.'den yararlanarak D_4^* değeri 4,150197, D_3^* değeri 0 olarak hesaplanmıştır.

Momentlere dayalı hesaplanan çarpıklık katsayısı kullanılarak çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile $n=3$ için oluşturulan $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitleri Çizelge 5.5.'te gösterildiği gibi hesaplanmıştır.

Çizelge 5.5. ÇD (k_3^*) yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri

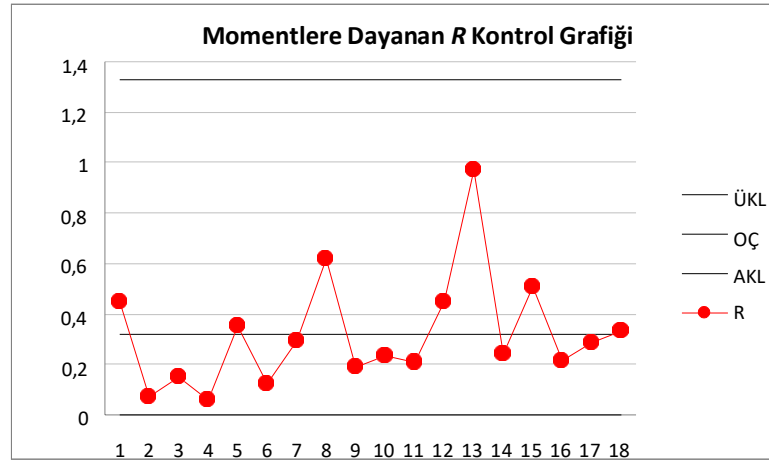
Momentlere dayalı hesaplanan çarpıklık katsayısı	
$k_3^* = \frac{1}{nr-3} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{ij} - \bar{\bar{X}}}{s_{nr}} \right)^3 = 1,939595$	
$\bar{X}$ Kontrol Grafiği Limitleri	R Kontrol Grafiği Limitleri
$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + A_U^* \bar{R} \\ &= 0,210262 + 1,581739 * 0,319831 \\ &= 0,716151 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= D_4^* \bar{R} \\ &= 4,150197 * 0,319831 \\ &= 1,32736 \end{aligned}$
$OÇ_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 0,210262$	$OÇ_R = \bar{R} = 0,319831$
$\begin{aligned} \bar{A}KL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - A_L^* \bar{R} \\ &= 0,210262 - 0,68664 * 0,319831 \\ &= -0,00935 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{A}KL_R &= D_3^* \bar{R} \\ &= 0 * 0,319831 \\ &= 0 \end{aligned}$

k_3^* kullanılarak çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitlerine göre oluşturulan grafikler sırasıyla Şekil 5.9. ve Şekil 5.10.'da gösterilmiştir.



Şekil 5.9. $\bar{X}$ kontrol grafiği

Momentlere dayanan çarpıklık katsayısı kullanılarak oluşturulan çarpıklık düzeltmeli $\bar{X}$ kontrol grafiğinde hesaplanan ortalamaların hepsinin alt kontrol limiti üstünde ve üst kontrol limiti altında bulunduğu ve sürecin kontrol altında olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.10. R kontrol grafiği

Momentlere dayanan çarpıklık katsayısı kullanılarak oluşturulan çarpıklık düzeltmeli R kontrol grafiğinde, genişlik değerlerinin hepsinin üst kontrol limiti altında ve alt kontrol limiti üstünde bulunduğu yani sürecin kontrol altında olduğu gözlenmektedir.

5.1.3. Ağırlıklı Varyans Yöntemiyle Oluşturulan $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

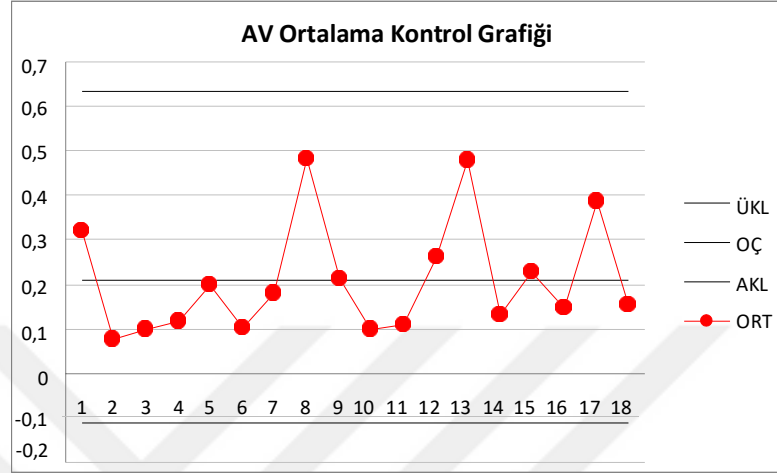
Formül (4.30)'a göre hesaplanan $\hat{P}_x$ değeri 0,6296296 olarak bulunmuştur. (4.22)'deki interpolasyon formülü ile $\bar{X}$ kontrol grafiği limitleri için Çizelge 4.8.'den yararlanarak W_U değeri 1,318519, Çizelge 4.9.'dan yararlanarak W_L değeri 1,00963, R kontrol grafiği limitleri için ise Çizelge 4.10.'dan yararlanarak V_U değeri 3,614815, Çizelge 4.11'den yararlanarak V_L değeri 0 olarak hesaplanmıştır.

Ağırlıklı varyans yöntemi ile $n=3$ için oluşturulan $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitleri Çizelge 5.6.'te gösterildiği gibi hesaplanmıştır.

Çizelge 5.6. Ağırlıklı varyans yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri

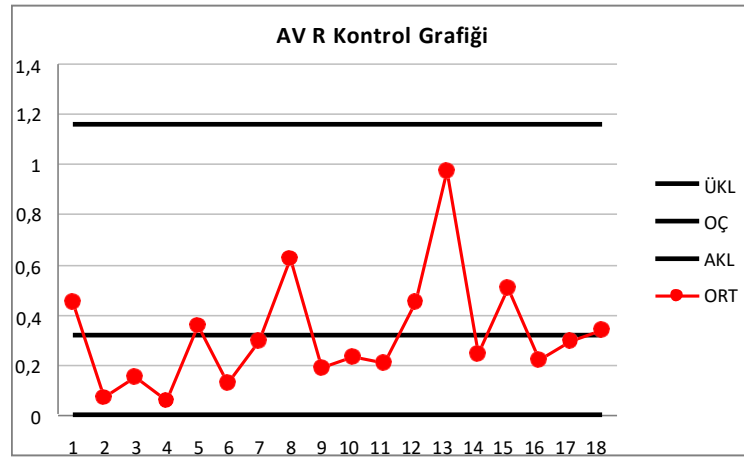
$P(X \leq \mu_x), \hat{P}_x = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \delta(\bar{X} - X_{ij})}{nk}, \delta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, a^+ = \max\{a, 0\}$	
$\bar{X}$ Kontrol Grafiği Limitleri	R Kontrol Grafiği Limitleri
$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \bar{X} + \frac{3\bar{R}}{\sigma_2 \sqrt{n}} \sqrt{2\hat{P}_x} = \bar{X} + W_U R \\ &= 0,210262 + 1,318519 * 0,31983 \\ &= 0,631965 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= R \left[1 + 3 \frac{d_3'}{d_2} \sqrt{2\hat{P}_x} \right] = V_U R \\ &= 3,614815 * 0,319831 \\ &= 1,156128 \end{aligned}$
$OC_{\bar{X}} = \bar{F} = 0,210262$	$OC_R = R = 0,319831$
$\begin{aligned} AKL_{\bar{X}} &= \bar{X} - \frac{3\bar{R}}{\sigma_2 \sqrt{n}} \sqrt{2(1-\hat{P}_x)} = \bar{X} - W_L R \\ &= 0,210262 - 1,00963 * 0,31983 \\ &= -0,112648 \end{aligned}$	$\begin{aligned} AKL_R &= R \left[1 - 3 \frac{d_3'}{d_2} \sqrt{2(1-\hat{P}_x)} \right]^+ = V_L R \\ &= 0 * 0,319831 \\ &= 0 \end{aligned}$

Ağırlıklı varyans yöntemi ile $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitlerine göre oluşturulan grafikler sırasıyla Şekil 5.11. ve Şekil 5.12.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.11. Ağırlıklı varyans yöntemi ile $\bar{X}$ kontrol grafiği

Ağırlıklı varyans yöntemiyle oluşturulan $\bar{X}$ kontrol grafiğinde ortalamaların hepsinin alt kontrol limiti üstünde ve üst kontrol limiti altında bulunduğu ve sürecin kontrol altında olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.12. Ağırlıklı varyans yöntemi ile R kontrol grafiği

Ağırlıklı varyans yöntemiyle oluşturulan R kontrol grafiğinde genişlik değerlerinin hepsinin alt kontrol limiti üstünde ve üst kontrol limiti altında bulunduğu ve sürecin kontrol altında olduğu gözlenmektedir.

5.1.4. Ağırlıklı Standart Sapma Yöntemiyle Oluşturulan $\bar{X}$ ve R Kontrol Grafikleri

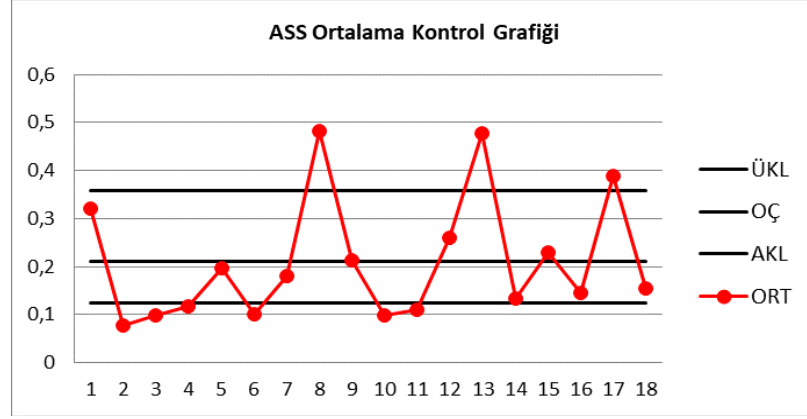
Formül (4.29)'a göre hesaplanan $\hat{P}_x$ değeri 0,6296296 olarak bulunmuştur. (4.22)'deki interpolasyon formülü ile d_2^{ASS} değeri 4,7376 olarak hesaplanmıştır.

Ağırlıklı varyans yöntemi ile $n=3$ için oluşturulan $\bar{X}$ ve R kontrol grafiği limitleri Çizelge 5.7'de gösterildiği gibi hesaplanmıştır.

Çizelge 5.7. Ağırlıklı standart sapma yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiği limitleri

$P(X \leq \mu_x), \hat{P}_x = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \delta(\bar{X} - X_{ij})}{nk}, \delta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	
$d_2^{ASS} \equiv \hat{P}_x d_2(2n(1 - \hat{P}_x)) + (1 - \hat{P}_x) d_2(2n\hat{P}_x)$	
$\bar{X}$ Kontrol Grafiği Limitleri	
$\bar{ÜKL} = \bar{X} + \frac{3R}{d_2^{ASS} \sqrt{n}} 2\hat{P}_x = 0,3575$	
$OÇ_{\bar{X}} = \bar{X} = 0,210262$	
$\bar{AKL} = \bar{X} - \frac{3R}{d_2^{ASS} \sqrt{n}} 2(1 - \hat{P}_x) = 0,123$	

Ağırlıklı Standart Sapma yöntemi ile $\bar{X}$ kontrol grafiği limitlerine göre oluşturulan grafik Şekil 5.13'de gösterilmiştir.



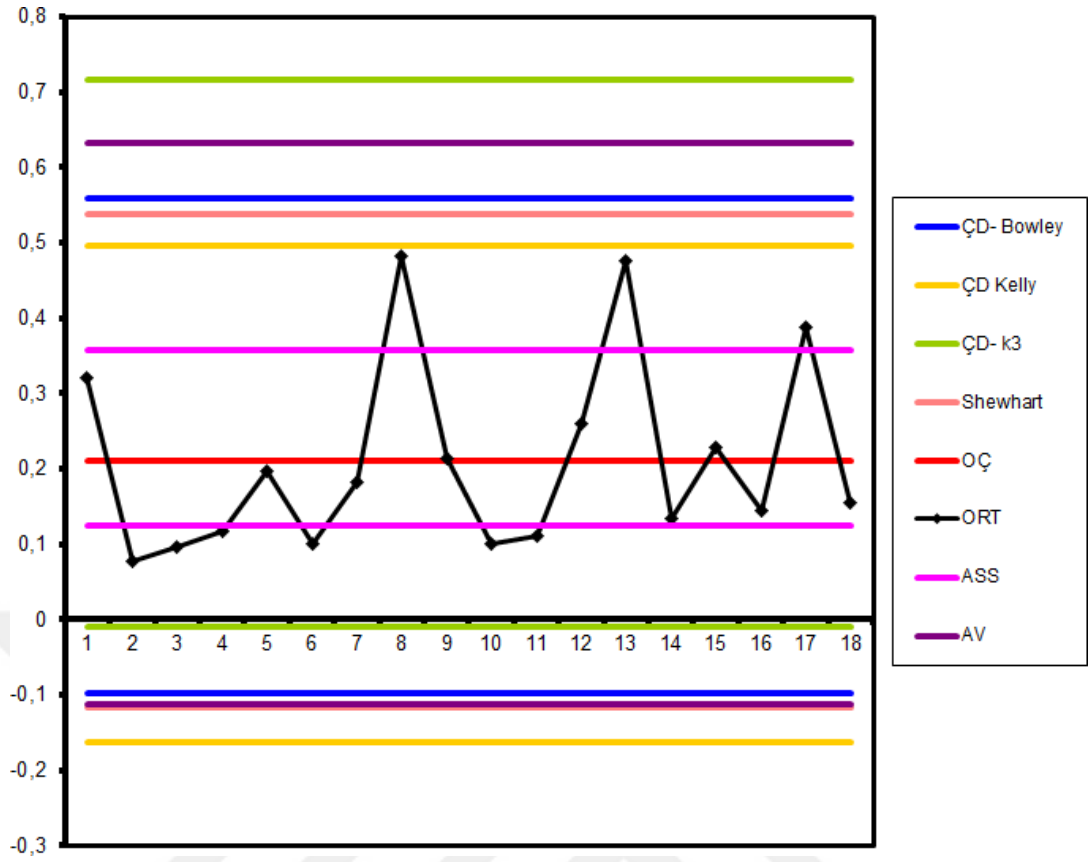
Şekil 5.13. Ağırlıklı standart sapma yöntemi ile $\bar{X}$ kontrol grafiği

Ağırlıklı Standart Sapma yöntemi ile oluşturulan $\bar{X}$ kontrol grafiğinde, üst kontrol limiti üstünde üç nokta, alt kontrol limiti altında altı nokta bulunduğu ve sürecin kontrol dışında olduğu gözlenmektedir.

5.1.5. Sonuç

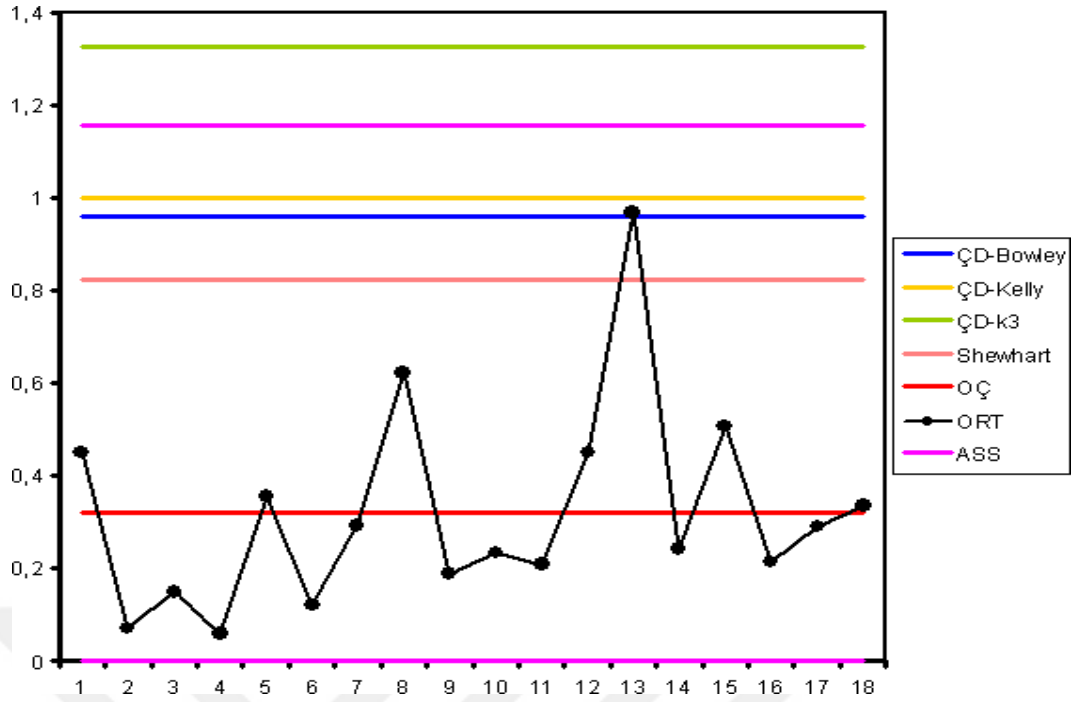
Kontrol limitleri dışında ilk kez işaretlenen noktaların sayısı ortalama çalışma uzunluğu ($OÇU$) olarak ifade edilir. Süreç kontrol dışında olduğunda kontrol grafiklerinin bunu yakalama hızı performanslarının bir işareti olarak kabul edilir. Küçük I. tip hata sahip kontrol grafiği daha iyi performansa sahip olur. I. tip hata yanlış alarm olasılığıdır. (2.5) denkleminde yer alan formül gibi hesaplanır.

Shewhart, çarpıklık düzeltmesi, ağırlıklı varyans ve ağırlıklı standart sapma yöntemleriyle oluşturulan $\bar{X}$ ve R kontrol grafikleri tek çizelge üzerinde Şekil 5.14. ve Şekil 5.15.'te gösterilmiştir.



Şekil 5.14. Shewhart, ÇD, AV, ASS yöntemleriyle oluşturulan $\bar{X}$ kontrol grafiği

Shewhart, çarpıklık düzeltmesi ($k_{3(B)}$, $k_{3(K)}$, k_3^*), ağırlıklı varyans ve ağırlıklı standart sapma yöntemleriyle oluşturulan $\bar{X}$ kontrol grafiğinde ağırlıklı standart sapma yönteminin bant genişliğinin dar olduğu bu yüzden kontrol dışında bulunan nokta sayısının en fazla bu yöntemde bulunduğu gözlenmektedir. Momentlere dayanarak tahmin edilen k_3^* çarpıklık katsayısı ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin bant genişliğinin büyük olduğu ve sürecin en iyi bu yöntemde izleneceği anlaşılmaktadır.



Şekil 5.15. Shewhart, ÇD, AV, ASS yöntemleriyle oluşturulan R kontrol grafiği

Shewhart, çarpıklık düzeltmesi ($k_{3(B)}$, $k_{3(K)}$, k_3^*), ağırlıklı varyans ve ağırlıklı standart sapma yöntemleriyle oluşturulan R kontrol grafiğinde klasik Shewhart kontrol grafiği yönteminin en küçük bant genişliğine sahip olduğu ve Bowley'in çarpıklık katsayısıyla oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile Shewhart yönteminde 13. gözlemin kontrol dışına gözlenmektedir. Momentlere dayanarak tahmin edilen k_3^* çarpıklık katsayısı ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin bant genişliğinin büyük olduğu ve sürecin en iyi bu yöntemde izleneceği anlaşılmaktadır.

Kalite kontrol grafikleri için $AKL \leq 0$ ise $AKL=0$ olarak kabul edilir. Bununla birlikte, elde edilen AKL değerleri, bu çalışmadaki yöntemler arasındaki farkı göstermek için grafiksel olarak gösterilmiştir. Ancak, $OÇU$ hesaplamasında negatif olan alt kontrol limiti sıfıra ayarlanır.

Çizelge 5.8. Yöntemlerin I. tip hata ve OÇU değerlerinin karşılaştırılması

Yöntem	AKL	ÜKL	1. Tip Hata	OÇU
Shewhart	0	0,540000	0,0171729	58,23
Ağırlıklı Varyans	0	0,631965	0,0060934	164,11
Ağırlıklı Standart Sapma	0,123	0,3575	0,626234	2,67547
Çarpıklık Düzeltmesi ($k_{3(B)}$)	0	0,558720	0,0139516	71,68
Çarpıklık Düzeltmesi ($k_{3(K)}$)	0	0,496290	0,0276918	36,11
Çarpıklık Düzeltmesi (k_3^*)	0	0,716150	0,0022912	436,44

$$\alpha = 0,21026, \beta = 1$$

Süreç parametrelerinin bilinmediği durumda çarpıklık düzeltmesi yöntemlerinden momentlere dayalı çarpıklık katsayısı k_3^* ile hesaplanan yöntemin I. tip hata olasılığının 0,0022912 ve ortalama çalışma uzunluğunun ise 436,44 olduğu Çizelge 5.8.'de gösterilmiştir. Diğer yöntemler arasında en küçük I. tip hata olasılığına sahip bu yöntemin 0,0027 değerine daha yakın bir sonuç verdiği ve en iyi performansa sahip olduğu gözlenmektedir.

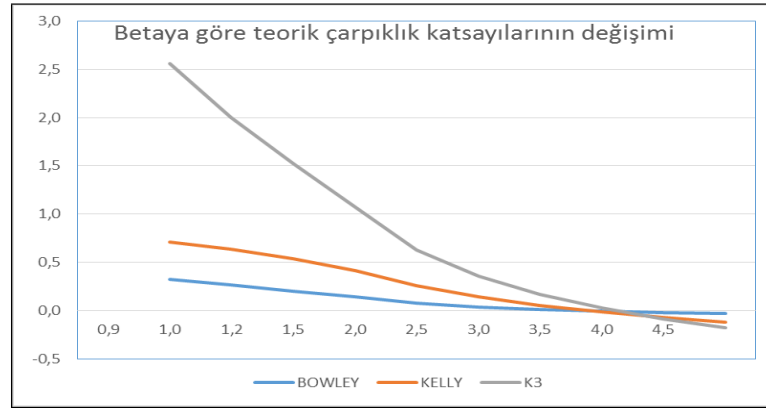
5.2. Weibull Dağılımı ve I. Tip Hataların Karşılaştırılması

Weibull dağılımına ait rasgele sayı üretilmiş ve simülasyon yapıp sonuçlar yorumlanmıştır. İlk olarak Weibull dağılımı için Çizelge 4.2'de verilen Bowley'in çarpıklık katsayısı, Çizelge 4.3.'de verilen Kelly'in çarpıklık katsayısı ve Çizelge 4.4.'te verilen momentler çarpıklık katsayısı formülleri ile farklı β parametresi kullanılarak hesaplanan çarpıklık katsayıları Çizelge 5.9. ve Şekil 5.16.'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.9. β değerlerine göre çarpıklık katsayıları

β	Bowley'in çarpıklık katsayısı	Kelly'nin çarpıklık katsayısı	Momentlere dayanan çarpıklık katsayısı
0,85000	0,32318	0,71312	2,56009
1,00000	0,26186	0,63479	2,00000
1,20000	0,20161	0,53945	1,52113
1,50000	0,13948	0,41682	1,07199
2,00000	0,07591	0,25831	0,63111
2,50000	0,03727	0,14134	0,35863
3,00000	0,01138	0,05239	0,16810
3,50000	-0,00716	-0,01721	0,02511
4,00000	-0,02109	-0,07301	-0,08724
4,50000	-0,03192	-0,11869	-0,17838

Weibull dağılımında farklı β değerlerine göre çarpıklık katsayılarına bakıldığında, β değeri arttıkça her üç çarpıklık katsayısının da azaldığı görülmektedir. β parametresi 3 ile 3,5 arasında değerler aldığı anda Weibull dağılımının çarpıklık katsayısı da sıfıra yakın değerler almaktadır ve Normal dağılıma yaklaşmaktadır.



Şekil 5.16. β parametresine göre çarpıklık katsayısı değişimi

Weibull dağılımı için çarpıklık sadece β şekil parametresine bağlı olduğundan, konum parametresi $\lambda = 1$ ve ölçek parametresi $\alpha = 1$ olarak seçilmiştir. Yukarıdaki grafiğe göre $\beta = 0,85, 1,2, 3,5$ değerleri için dağılım fonksiyonu tekniği kullanılarak $n=3, 4, 5, 7$ boyutlu 18 örneklemden sayı üretilmiştir. $\bar{X}$ ve R kontrol sınırları hesaplanmıştır. Üst kontrol limiti üstünde ve alt kontrol limiti altında kalan noktalar sayılmıştır. Bu işlem 1000 kez tekrar edilmiştir. Her bir yöntemin farklı n ve β değerleri için I. tip hata olasılıkları, ortalama çalışma uzunlukları ve Standart hata= $\sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{1000}}$ formülüne göre standart hataları hesaplanmıştır. $\bar{X}$ kontrol grafiği için yapılan simülasyon çalışması sonuçları Çizelge 5.10.'da R kontrol grafiği için yapılan simülasyon çalışması sonuçları ise Çizelge 5.11.'de gösterilmiştir.

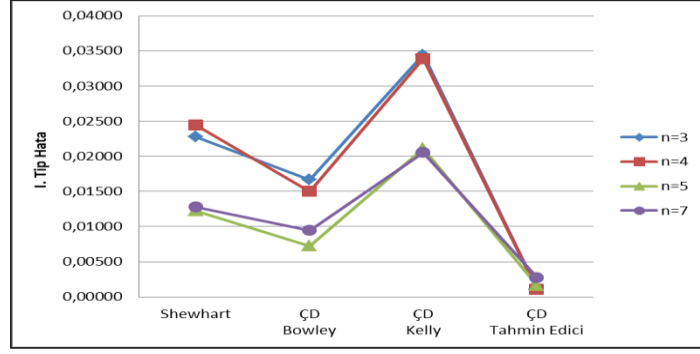
5.2.1. $\bar{X}$ Kontrol Grafiği için Karşılaştırma

$\beta = 0,85, 1,2, 3,5$ parametrelili Weibull dağılımından dağılım fonksiyonunun tersi kullanılarak sayılar üretilmiştir. $\bar{X}$ kontrol grafiği için Bowley'in çarpıklık katsayısı, Kelly'nin çarpıklık katsayısı, ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı kullanılarak hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemleri ile Shewhart yönteminin kontrol limitleri hesaplanmıştır ve simülasyon çalışması yapılarak I. tip hata olasılıkları, ortalama çalışma uzunlukları ve standart hataları Çizelge 5.10.'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.10. β parametrelili Weibull dağılımı için dört yönteme dayalı X kontrol grafiklerinin I. tip hataları

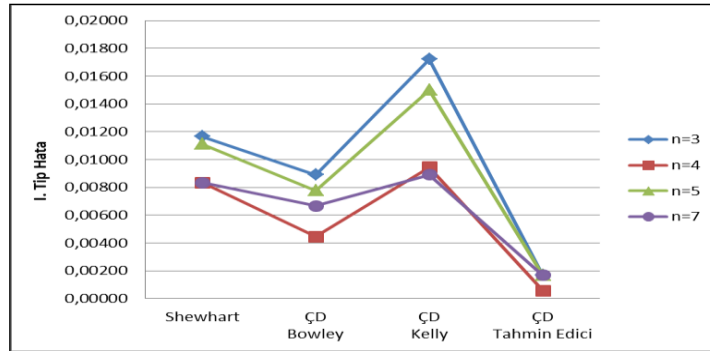
		Çarpıklık Düzeltmesi Yöntemi								Shewhart Yöntemi		
n	Bowley 'in Çarpıklık Katsayısı			Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı			Momentlere dayalı hesaplanan Çarpıklık Katsayısı					
	I. Tip Hata	OÇU	Standart Hata	I. Tip Hata	OÇU	Standart Hata	I. Tip Hata	OÇU	Standart Hata	I. Tip Hata	OÇU	Standart Hata
β =0,85												
3	0,01667	60,00	0,01280	0,03444	29,03	0,01824	0,00111	900,00	0,00333	0,02278	43,90	0,01492
4	0,01500	66,67	0,01216	0,03389	29,51	0,01809	0,00111	900,00	0,00333	0,02444	40,91	0,01544
5	0,00722	138,46	0,00847	0,02111	47,37	0,01438	0,00167	600,00	0,00408	0,01222	81,82	0,01099
7	0,00944	105,88	0,00967	0,02056	48,65	0,01419	0,00278	360,00	0,00526	0,01278	78,26	0,01123
β =1,2												
3	0,00889	112,50	0,00939	0,01722	58,06	0,00000	0,00167	600,00	0,00408	0,01167	85,71	0,01074
4	0,00444	225,00	0,00665	0,00944	105,88	0,00967	0,00056	1800,00	0,00236	0,00833	120,00	0,00909
5	0,00778	128,57	0,00878	0,01500	66,67	0,01216	0,00167	600,00	0,00408	0,01111	90,00	0,01048
7	0,00667	150,00	0,00814	0,00889	112,50	0,00939	0,00167	600,00	0,00408	0,00833	120,00	0,00909
β =3,5												
3	0,01444	69,23	0,01193	0,01778	56,25	0,01321	0,01556	64,29	0,01237	0,01778	56,25	0,01321
4	0,01056	94,74	0,01022	0,01278	78,26	0,01123	0,00833	120,00	0,00909	0,01333	75,00	0,01147
5	0,00889	112,50	0,00939	0,01000	100,00	0,00995	0,00889	112,50	0,00939	0,01000	100,00	0,00995
7	0,00833	120,00	0,00909	0,01167	85,71	0,01074	0,00667	150,00	0,00814	0,11722	8,53	0,03217

Momentlere dayalı hesaplanan çarpıklık katsayısı ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesinin I. tip hata olasılıklarının daha düşük olduğu görülmektedir. $\beta = 0,85$, 1,2, 3,5 parametrelerinin her biri için farklı n değerlerine göre hesaplanıp Çizelge 5.10.'da belirtilen I. tip hata olasılıkları Şekil 5.17., Şekil 5.18. ve Şekil 5.19.'da grafik üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 5.17. $\beta = 0,85$ Weibull dağılımı $\bar{X}$ kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları

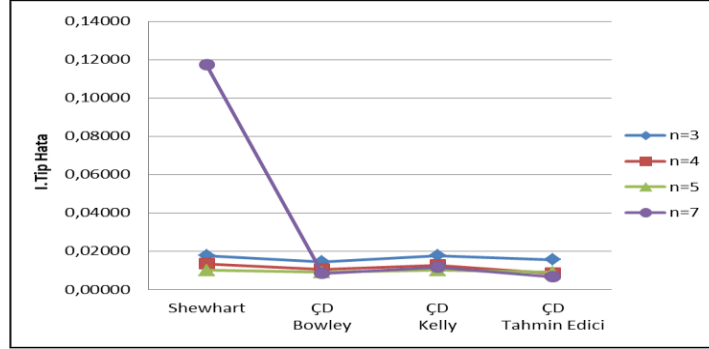
Şekil 5.17.'de, $n=3,4,5,7$ olduğunda $\beta = 0,85$ parametrelili Weibull dağılımının $\bar{X}$ kontrol grafiklerinde Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu ve yine aynı koşullarda momentlere dayanan çarpıklık katsayısı k_3^* ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise en küçük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.18. $\beta = 1,2$ Weibull dağılımı $\bar{X}$ kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları

Şekil 5.18.'de, $n=3,4,5,7$ olduğunda $\beta = 1,2$ parametrelili Weibull dağılımının $\bar{X}$ kontrol grafiklerinde Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu ve yine aynı koşullarda

momentlere dayanan çarpıklık katsayısı k_3^* ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise en küçük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.19. $\beta = 3,55$ Weibull Dağılımı $\bar{X}$ kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları

Şekil 5.19.'da, $n=3,4,5,7$ olduğunda $\beta = 3,55$ parametrelili Weibull dağılımının $\bar{X}$ kontrol grafiklerinde klasik Shewhart yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu ve yine aynı koşullarda Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}$, Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı k_3^* ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yöntemlerinin ise birbirlerine yakın ve Shewhart yönteminden daha küçük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir.

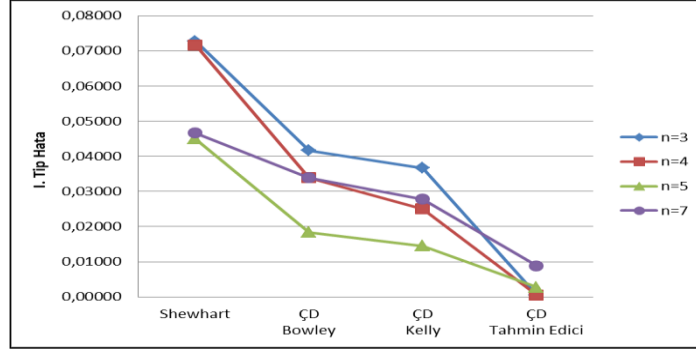
5.2.2.R Kontrol Grafiği İçin Karşılaştırma

Yöntemlerin I. tip hataları arasındaki fark R kontrol grafiklerinde $\bar{X}$ kontrol grafiklerine göre daha belirgin olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.11. β Parametrelili Weibull dağılımı için dört yöntemle dayalı kontrol R grafiklerinin I. tip hataları

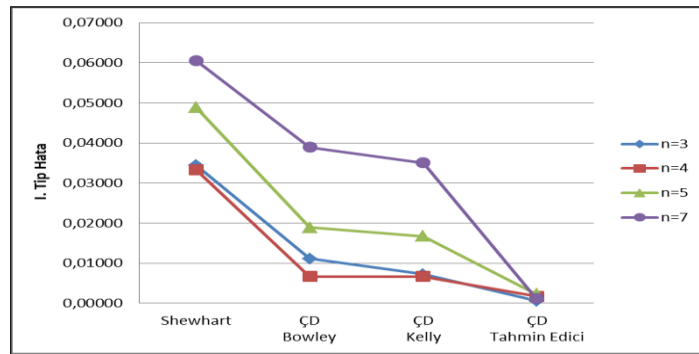
		Çarpıklık Düzeltmesi Yöntemi								Shewhart Yöntemi		
n	Bowley 'in Çarpıklık Katsayısı			Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı			Momentlere dayalı hesaplanan Çarpıklık Katsayısı					
	I. Tip Hata	OÇU	Standart Hata	I. Tip Hata	OÇU	Standart Hata	I. Tip Hata	OÇU	Standart Hata	I. Tip Hata	OÇU	Standart Hata
β = 0,85												
3	0,04167	24	0,01998	0,03667	27,27	0,01879	0,00056	1800	0,00236	0,07278	13,74	0,02598
4	0,03389	29,51	0,01809	0,02500	40	0,01561	0,00056	1800	0,00236	0,07167	13,95	0,02579
5	0,01833	54,55	0,01342	0,01444	69,23	0,01193	0,00278	360	0,00526	0,04500	22,22	0,02073
7	0,03389	29,51	0,01809	0,02778	36	0,01643	0,00889	112,5	0,00939	0,04667	21,43	0,02109
β = 1,2												
3	0,01111	90	0,01048	0,00722	138,46	0,00000	0,00056	1800	0,00236	0,03444	29,03	0,01824
4	0,00667	150	0,00814	0,00667	150	0,00814	0,00167	600	0,00408	0,03333	30	0,01795
5	0,01889	52,94	0,01361	0,01667	60	0,01280	0,00222	450	0,00471	0,04889	20,45	0,02156
7	0,03889	25,71	0,01933	0,03500	28,57	0,01838	0,00111	900	0,00333	0,06056	16,51	0,02385
β = 3,5												
3	0,00278	450	0,00471	0,00222	360	0,00526	0,00167	600	0,00408	0,01000	100	0,00995
4	0,00056	1800	0,00236	0,00056	1800	0,00236	0,00056	1800	0,00236	0,01111	90	0,01048
5	0,00111	900	0,00333	0,00111	900	0,00333	0,00111	900	0,00333	0,00667	150	0,00814
7	0,00111	900	0,00333	0,00111	900	0,00333	0,00056	1800	0,00236	0,00611	163,64	0,00779

$\beta = 0,85, 1,2, 3,5$ parametrelerinin her biri için farklı n değerlerine göre hesaplanıp Çizelge 5.11.'de belirtilen I. tip hata olasılıkları Şekil 5.20., Şekil 5.21. ve Şekil 5.22.'de grafik üzerinde gösterilmiştir.



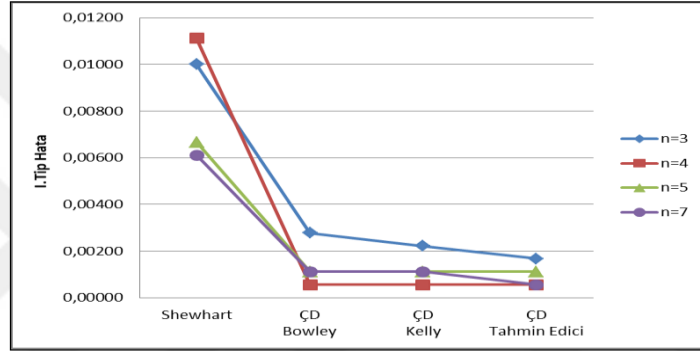
Şekil 5.20. $\beta = 0,85$ Weibull dağılımı R kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları

Şekil 5.20.'de, $n=3,4,5,7$ olduğunda $\beta = 0,85$ parametrelili Weibull dağılımının R kontrol grafiklerinde klasik Shewhart yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu, Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}$ ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin Shewhart yönteminden, Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise Bowley'in yönteminden daha düşük I.tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir. Yine aynı koşullarda momentlere dayanan çarpıklık katsayısı k_3^* ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise I. tip hata olasılığı çok düşüktür.



Şekil 5.21. $\beta = 1,2$ Weibull dağılımı R kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları

Şekil 5.21.'de, $n=3,4,5,7$ olduğunda $\beta = 1,2$ parametrelili Weibull dağılımının R kontrol grafiklerinde klasik Shewhart yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu, Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}$ ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin Shewhart yönteminden, Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise Bowley'in yönteminden daha düşük I.tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir. Yine aynı koşullarda momentlere dayanan çarpıklık katsayısı k_3^* ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise I. tip hata olasılığı çok düşüktür.



Şekil 5.22. $\beta = 3,5$ Weibull dağılımı R kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları

Şekil 5.22.'de, $n=3,4,5,7$ olduğunda $\beta = 3,55$ parametrelili Weibull dağılımının R kontrol grafiklerinde klasik Shewhart yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu ve yine aynı koşullarda Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}$, Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı k_3^* ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yöntemlerinin ise birbirlerine yakın ve Shewhart yönteminden daha küçük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir.

Klasik Shewhart yöntemi kullanıldığında kontrol sınırları dışına çıkan gözlem sayısı çarpıklık düzeltmesi yöntemine göre çok daha fazladır.

Dağılım çarpık olduğunda Shewhart kontrol grafiğinin I. tip hata olasılığı oldukça yüksektir ve diğer yöntemlerle oluşturulan grafiklere göre kötü bir performansa sahiptir.

I. tip hata olasılıkları örneklem büyüklüklerine göre farklılık göstermemektedir. Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}$, Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı k_3^* ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemlerinden k_3^* ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemi en iyi performansa sahiptir. k_3^* , verilerin hepsi kullanılarak hesaplandığından uç değerlerden etkilenen bir çarpıklık katsayısıdır. Uç değerler çarpıklık katsayısı değerini artırmaktadır. $k_{3(B)}$ ve $k_{3(K)}$ çarpıklık katsayıları uç değerlerden etkilenmediğinden çarpıklık katsayısı gerçek çarpıklığı yansıtmamaktadır ve çarpıklık düzeltmesi yöntemi bu katsayılar ile hesaplandığında düşük bir performansa sahip olmaktadır. Uç değerlere duyarlı çarpıklık katsayısı ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hata olasılığının daha düşük olduğu yani daha iyi sonuç verdiği gözlenmektedir. Shewhart yöntemine en yakın sonuçları Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}$ ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemi vermiştir. Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}$ ve Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemleri yakın sonuçlar vermiş olsa da Kelly'nin çarpıklık katsayısı $k_{3(K)}$ ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hatasının Bowley'in çarpıklık katsayısı $k_{3(B)}$ ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemine göre daha düşük olduğu görülmektedir. Priya ve Kantam çalışmalarında Linear Failure Rate dağılımına sahip veriler için çizilecek olan $\bar{X}$ kontrol grafiğinde çarpıklık katsayısının hesaplanmasında Kelly'nin formülünün kullanılmasını önermişlerdir[16].

Buradan gör÷lmektedir ki kalite kontrol grafikleri çizilerken, örneklemin geldiği kitlenin dağılımı, örneklem hacmi, çarpıklık katsayısının hangi yöntemle hesaplanacağı kritik kararlardır. Kalite kontrol grafikleri çizilirken genelde örneklem hacmi büyük tutulmakta, merkezi limit teoreminden faydalanılmakta ve normal dağılım varsayımı yapılmaktadır. Halbuki maliyeti yüksek olan ve tahribatlı muayene edilen ürünlerin kalite kontrolünde bu varsayımlar sağlamamaz. Dolayısıyla normal dağılıma sahip olmayan hatta ciddi derecede çarpıklığı olan dağılıma sahip kalite değişkenleri için bu tez çalışmasında önerilen yöntemlerin işletmelerde uygulanması çok önemlidir.



KAYNAKLAR

- [1] Şenol, Ş., İstatistiksel Kalite Kontrol, Noel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2012.
- [2] Dereli, T., Baykasoğlu, A., Kalite ve Hayata İzdüşümleri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2003.
- [3] Akkurt, M., Kalite Kontrol Excel Destekli, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2002.
- [4] Birgören, B., İstatistiksel Kalite Kontrolü, Nobel Yayınevi, Ankara, 2.Baskı, 2017.
- [5] Özdamar, K., Modern Bilimsel Araştırma Yöntemleri, Kaan Kitabevi, Eskişehir, 2003.
- [6] Uzgören, N., Bilimsel Araştırmalarda Kullanılan Temel İstatistiksel Yöntemler ve SPSS Uygulamaları, Ekin Basın Yayın Dağıtım, Bursa, 2012.
- [7] Munoz-Rosas, J., F., Alvarez-Verdejo, E., Perez-Arostegui, M., N., Gutierrez-Gutierrez, L., Empirical Comparisons of X-bar Charts when Control Limits are Estimated, Quality and Reliability Engineering International, 32(2), 453-464, 2016.
- [8] Özdamar K., Paket Programlar ile İstatistiksel Veri Analizi, Kaan Kitabevi, Eskişehir, 2004.
- [9] Muraleedharan, G., Characteristic and Moment Generating Functions of Three Parameter Weibull Distribution-an Independent Approach, Research Journal of Mathematical and Statistical Sciences, 1(8), 25-27, 2013.

- [10] Tadikamalla, P. R., Popescu, D. G., Kurtosis Correction Metod for $\bar{X}$ and R Control Charts for Long-Tailed Symmetrical Distributions, Naval Research Logistics, Wiley Periodicals, 54(4), 371-383, 2007.
- [11] Montgomery, Introduction to Statistical Quality Control, New York, John Wiley & Sons, 1996.
- [12] Yazıcı, B., Kan, B., Asymmetric control limits for small samples, Qual Quant, 43, 865-874, 2009.
- [13] Kan, B., Yazıcı, B., The Individuals Control Charts For Burr Distributed Data, Proceedings of the 9th WSEAS Interntional Conference on Applied Mathematics, 645-649, 2006.
- [14] Apadın, A., Kutsal, A., Atakan, C., Uygulamalı İstatistik, Kılavuz Yayınevi, Ankara, 2002.
- [15] Akal, M. Asimetri (Çarpıklık) ve Basıklık Ölçüleri , Sakarya Üniversitesi, http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/48396/27630/7_asimetri_ve_basiklik_3.3.2014.pdf (Erişim Tarihi:03.05.2018)
- [16] Priya, M., Ch., Kantam, R., R., L., Variable Control Charts-Linear Failure Rate Distribution, 13(4), 715-726, 2017.
- [17] Karagöz, D., Hamurkaroğlu, C., Control Charts For Skewed Distributions: Weibull, Gamma, and Lognormal, Metodoloski Zvezki, 9(2), 95-106, 2012.
- [18] Chan, L., K., Cui, H., J., Skewness Correction $\bar{X}$ ve R Charts for Skewed Distributions, Wilwy Periodicals, Inc., Naval Research Logistics, 50, 1-19, 2003.
- [19] Bai D., S., Choi, I., S., X and R Control Charts For Skewed Population, Journal of Quality Tecnology, 27(2), 305-701, 1995.

- [20] Kao, S., C., Monitoring Turnaround Time Using An Average Control Chart In The Laboratory, International Journal of Industrial Engineering, 19(12), 476-487, 2012.
- [21] Chang, Y., S., Bai, D., S., Control Charts For Positively- Skewed Populations with Weighted Standard Deviations, Quality and Reliability Engineering International, 17(5), 397-406, 2001.
- [22] Santiago, E., Smith, J., Control Charts Based on the Exponential Distribution: Adapting Runs for the t Chart, Quality Engineering, 25(2), 85-96, 2013.
- [23] Norman, L., J., Samuel, K., Balakrishnan, N., Continuous Univariate Distributions, 2nd ed, 63-67, John Wiley and Sons, New York, Chichester Brisbane, Toronto, Singapore, 1994.
- [24] Öztürk, F., Polinom İnterpolasyonu, Ankara Üniversitesi, <http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/Dersler/ist310/Ders3/interpolasyon.pdf> (Erişim Tarihi:20.04.2015)

EKLER

Ek 1.Cornish Fisher Açılımı

Çarpıklık düzeltmesi metodu Cornish Fisher açılımına dayanır. X ortalaması 0, standart sapması 1 olan standartlaştırılmış rasgele değişken olsun. $X(U_\alpha)$ X rasgele değişkeninin dağılımının α yüzdeliği olsun. U_α standart normal dağılıma sahip rasgele değişken olsun. k_r X 'in r . kümülanı olsun ($r \geq 3$). O zaman aşağıdaki $X(U_\alpha)$ aşağıdaki Cornish-Fisher açılımına sahiptir[19].

$$\begin{aligned}
 X(U_\alpha) = & U_\alpha + \frac{1}{6} (U_\alpha^2 - 1) k_3 \\
 & + \frac{1}{24} (U_\alpha^3 - 3U_\alpha) k_4 - \frac{1}{36} (2U_\alpha^3 - 5U_\alpha) k_3^2 \\
 & + \frac{1}{120} (U_\alpha^4 - 6U_\alpha^2 + 3) k_5 - \frac{1}{24} (U_\alpha^4 - 5U_\alpha^2 + 2) k_3 k_4 \\
 & + \frac{1}{324} (12U_\alpha^4 - 53U_\alpha^2 + 17) k_3^3 \\
 & + \frac{1}{720} (U_\alpha^5 - 10U_\alpha^3 + 15U_\alpha) k_6 \\
 & - \frac{1}{180} (2U_\alpha^5 - 17U_\alpha^3 + 21U_\alpha) k_3 k_5 \\
 & - \frac{1}{384} (3U_\alpha^5 - 24U_\alpha^3 + 29U_\alpha) k_4^2 \\
 & + \frac{1}{288} (14U_\alpha^5 - 103U_\alpha^3 + 107U_\alpha) k_3^2 k_4 \\
 & - \frac{1}{7776} (252U_\alpha^5 - 1688U_\alpha^3 + 1511U_\alpha) k_3^4 + \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

3σ sınırları için,

$$\alpha_1 = 1 - 0,00135 = 0,99865$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = 1 - 0,99865 = 0,00135 \tag{2}$$

olarak alınır ve buradan

$$\begin{aligned} U_{\alpha_1} &= 3 \\ U_{\alpha_2} &= -3 \end{aligned} \quad (3)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} P(U_{\alpha_1} \leq 3) &= 0,99865 = \alpha_1 \\ P(U_{\alpha_2} \leq -3) &= 0,00135 = \alpha_2 \end{aligned} \quad (4)$$

olarak bulunur. $U_{\alpha_1} = 3$, $U_{\alpha_2} = -3$ olarak yerine koyulduğunda $X(U_{\alpha_1})$ ve $X(U_{\alpha_2})$ 'nin Cornish-Fisher açılımı,

$$X(U_{\alpha_1}) = 3 + \frac{4}{3}k - \frac{3}{4}k^2 + \frac{13}{12}k^3 + \frac{1}{4}k^4 - \frac{19}{12}k^5 + \dots \quad (5)$$

$$X(U_{\alpha_2}) = -3 + \frac{4}{3}k - \frac{3}{4}k^2 + \frac{13}{12}k^3 + \frac{1}{4}k^4 - \frac{19}{12}k^5 + \dots \quad (6)$$

olarak elde edilir. (5) ve (6) eşitlikleri X 'in birçok kümülanını içeren karmaşık forma sahiptir. Çarpıklık k_3 'ün grafikler üzerindeki etkisi ile ilgilendiğimizde (7) ve (8) formülleri hesaplanır.

$$X(U_{\alpha_1}) = 3 + \frac{4}{3}k - \frac{13}{12}k^2 + Y_1 \quad (7)$$

$$X(U_{\alpha_2}) = -3 + \frac{4}{3}k + \frac{13}{12}k^2 + Y_2 \quad (8)$$

Y_1 ve Y_2 terimlerinin pratikte hesaplanması ve kullanılması zordur. Burada (7) ve (8) eşitlikleri kullanarak kontrol limitlerini yaklaşık olarak aşağıdaki formül gibi hesaplanır.

$$X(U_{\alpha_1}) = 3 + \frac{4}{3}k_3 - \frac{13}{12}k_3^2 + Y_1 \approx 3 + \frac{4}{3}k_3 h(k_3) = \ddot{U}KL \quad (9)$$

$$X(U_{\alpha_2}) = -3 + \frac{4}{3}k_3 + \frac{13}{12}k_3^2 + Y_2 \approx -3 + \frac{4}{3}k_3 h(k_3) = AKL \quad (10)$$

(9) ve (10) eşitliklerinde yer alan $h(\cdot)$ fonksiyonunun özellikleri;

$$* \quad h(k_3) = -h(-k_3)$$

$$* \quad \lim_{|k_3| \rightarrow \infty} k_3 h(k_3) = 0$$

$$* \quad h(0) = 1$$

dır. Chan ve Cui (2003) çalışmalarında basitlik sağlaması için h fonksiyonunu $h(k_3) = \frac{1}{1 + \delta k_3^2}$ biçiminde seçmiştir ve pek çok çarpık dağılım (Weibull, Log-normal,

Burr ... gibi) için yapılan simülasyon çalışmalarında δ parametresini 0,2'ye çok yakın

bulduklarından $h(k_3) = \frac{1}{1 + 0,2k_3^2}$ olarak almıştır.

Dolayısıyla alt kontrol limiti ve üst kontrol limiti (11) ve (12) formüllerindeki gibi oluşturulur.

$$\ddot{U}KL = 3 + \frac{\frac{4}{3}k_3}{1 + 0,2k_3^2} \quad (11)$$

$$AKL = -3 + \frac{\frac{4}{3}k_3}{1 + 0,2k_3^2} \quad (12)$$

Chan ve Cui 'ye benzer şekilde Tadikamalla ve Popescu da Cornish-Fisher açılımına dayalı basıklık düzeltmesi yapmıştır. X rasgele değişkeninin dağılımının simetrik bir dağılım olduğunu varsayalım. Bu durumda k_3 çarpıklık katsayısı sıfıra eşit olur ve $X(U_{\alpha_1})$ ve $X(U_{\alpha_2})$ k_4 basıklık katsayısının ve bazı hata terimlerinin bir fonksiyonu olabilir.

$$X(U_{\alpha_1}) = 3 + \frac{4}{3}k - \frac{13}{12}k^2 + \frac{3}{4}k^3 + \dots = 3 + \frac{3}{4}k^4 + E_1 \quad (13)$$

$$X(U_{\alpha_2}) = -3 + \frac{4}{3}k + \frac{13}{12}k^2 - \frac{3}{4}k^3 + \dots = -3 - \frac{3}{4}k^4 + E_2 \quad (14)$$

Burada kontrol limitleri yaklaşık olarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$X(U_{\alpha_1}) = 3 + \frac{3}{4}k^4 + E_1 \approx 3 + g(k_4) = \ddot{ÜKL} \quad (15)$$

$$X(U_{\alpha_2}) = -3 - \frac{3}{4}k^4 + E_2 \approx -3 - g(k_4) = AKL \quad (16)$$

İki simetrik dağılım leptokurtik dağılım için α_1 ve α_2 grafikler hesaplandı. Tadikalla ve Popescu'nun makalesinde uygun en iyi model aşağıda verilen formül gibi belirlendi.

$$g(k) = \frac{bk_4}{1 + ck_4} \quad (17)$$

Lineer olmayan regresyon yöntemleri kullanılarak $b \approx 1$, $c \approx 0,33$ olarak elde edildi. Böylece alt kontrol ve üst kontrol limitleri aşağıdaki gibi oluşturuldu.

$$\ddot{ÜKL} = 3 + \frac{k_4}{1 + 0,33k_4} \quad (18)$$

$$\ddot{ÜKL} = -3 - \frac{k_4}{1 + 0,33k_4} \quad (19)$$

EK 2.Polinom İnterpolasyonu

Bir fonksiyonun sonlu sayıdaki $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ noktalarında aldığı $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ değerleri bilinsin. Bu noktalardan geçen n . dereceden bir tek,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (1)$$

polinomu vardır ($i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $P_n(x_i) = f(x_i)$). $P_n(x)$ polinomu elde edilip bir x noktasındaki $f(x)$ değerinin yerine $P_n(x)$ alınırsa, bilinmeyen $f(x)$ değeri yaklaşık $f(x) \cong P_n(x)$ olarak hesaplanmış olur. Bu yaklaşıma polinom interpolasyonu (polinom kullanarak ara değer bulma) denir.

$$\begin{aligned} &(x_0, f(x_0)) \\ &(x_1, f(x_1)) \\ &\dots \\ &(x_n, f(x_n)) \end{aligned} \quad (2)$$

noktalarından geçen n . dereceden

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (3)$$

polinomunu belirlemek için

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

yani,

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases} \quad (5)$$

denklem sisteminden $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ katsayılarının belirlenmesi gerekir. Bu lineer denklem sistemi çözülerek bu katsayılar belirlenebilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

denklem sistemindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \quad (7)$$

katsayılar matrisi Vandermonde matrisi olarak bilinir ve singüler değildir. Ancak zayıf koşullu olduğunda sayısal hesaplamalardaki yuvarlatma hatalarından dolayı problemler çıkabilir. İnterpolasyon polinomunu belirlemek için değişik yöntemler geliştirilmiştir.

Birinci Dereceden Polinom İnterpolasyonu (Doğrusal İnterpolasyon)

Bir fonksiyonun $x_0, x_1 \in R$ noktalarındaki $f(x_0), f(x_1)$ değerleri bilinsin (ya da kolay hesaplanabilsin). $x_0 < x < x_1$ olmak üzere, x bir ara değer olsun ve $f(x)$ bilinmesin (kolay hesaplanamasın). $f(x)$ değerini birinci derecen polinom interpolasyonu ile hesaplamaya çalışalım.

$$\begin{aligned} &(x_0, f(x_0)) \\ &(x_1, f(x_1)) \end{aligned} \quad (8)$$

noktalarından geçen doğru denklemi,

$$y - y_0 = m(x - x_0) , \quad m = \text{eğim} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (9)$$

olmak üzere, birinci dereceden interpolasyon polinomu

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad (10)$$

olacaktır. Bu interpolasyon polinomunu,

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} * f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} * f(x_1) \quad (11)$$

biçiminde yazılsın. Dikkat edilirse $P_1(x)$ polinomu

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -\frac{x_1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_0 - x_1} x \quad (12)$$

ve

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = -\frac{x_0}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_1 - x_0} x \quad (13)$$

polinomları cinsinden,

$$P_1(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) \quad (14)$$

olarak yazılabilir. $L_0(x), L_1(x)$ polinomları için

$$\begin{aligned} L_0(x_0) &= 1, L_0(x_1) = 0 \\ L_1(x_0) &= 0, L_1(x_1) = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

dır.

n. Dereceden Polinom İnterpolasyonu

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ için fonksiyon değerleri $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ olsun. $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n))$ noktalarından geçen n. dereceden bir $P_n(x)$ polinomu bulunmak isteniyor. $P_n(x)$ polinomu, herbiri n. dereceden bir polinom olan $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ polinomları cinsinden,

$$P_n(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + \dots + L_n(x) \cdot f(x_n) \quad (16)$$

olarak yazılsın. $P_n(x)$ polinomunun,

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n)) \quad (17)$$

noktalarından geçmesi için,

$$P_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow L_0(x_0) = 1, L_1(x_0) = 0, L_2(x_0) = 0, \dots, L_n(x_0) = 0$$

$$P_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow L_0(x_1) = 0, L_1(x_1) = 1, L_2(x_1) = 0, \dots, L_n(x_1) = 0$$

$$P_n(x_2) = f(x_2) \Rightarrow L_0(x_2) = 0, L_1(x_2) = 0, L_2(x_2) = 1, L_3(x_2) = 0, \dots, L_n(x_2) = 0$$

...

$$P_n(x_n) = f(x_n) \Rightarrow L_0(x_n) = 0, L_1(x_n) = 0, L_2(x_n) = 0, \dots, L_{n-1}(x_n) = 0, L_n(x_n) = 1 \quad (18)$$

yani,

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i=j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

olmalı. Buna göre, $L_0(x) = ?$, $L_1(x) = ?$, ..., $L_n(x) = ?$

$L_0(x)$ polinomunu göz önüne alalım. Kendi kökleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ cinsinden $L_0(x)$ polinomu,

$$L_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (20)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $L_0(x_0) = 1$ olması gerektiğinden,

$$c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \quad (21)$$

ve

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \quad (22)$$

dır.

$L_1(x)$ polinomu, kendi kökleri $x_0, x_2, \dots, x_n$ cinsinden

$$L_1(x) = c_1(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (23)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $L_1(x_1) = 1$ olması gerektiğinden,

$$c_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \quad (24)$$

ve

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \quad (25)$$

dır.

Benzer düşüncelerle, $L_i(x)$ polinomları

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)}, \quad i=0,1,\dots,n$$

olmak üzere,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)} \right) f(x_i) \quad (26)$$

elde edilir. Bu formül Lagrange formülü olarak bilinir[24].