



**BİR ÇERÇEVE SİSTEMİN KLASİK VE DEĞİŞTİRİLMİŞ
GERİLME ÇİFTİ TEORİSİNE GÖRE
STATİK ANALİZİ**

Alihan YİĞİTOĞLU



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR ÇERÇEVE SİSTEMİN KLASİK VE DEĞİŞTİRİLMİŞ GERİLME
ÇİFTİ TEORİSİNE GÖRE
STATİK ANALİZİ**

Alihan YİĞİTOĞLU
0000-0001-5416-6514

Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2021
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans/Doktora Tezi

BİR ÇERÇEVE SİSTEMİN KLASİK VE DEĞİŞTİRİLMİŞ GERİLME ÇİFTİ TEORİSİNE GÖRE STATİK ANALİZİ

Alihan YİĞİTOĞLU

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI

Bu tez çalışmasında, bir çerçeve sistemin, aynı yükleme koşulları altında düğüm noktalarındaki deplasman ve dönme değerleri, klasik ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre incelenmiştir. Çalışmanın ilk kısmında çerçeve sistemindeki düğüm noktalarının klasik gerilme çifti teorisine göre belirli yüklemeler etkisi altında yapmış olduğu deplasman ve dönme değerleri elde edilmiş ve daha sonra elde edilen değerler karşılaştırılmıştır. Çalışmanın ikinci kısmında ise çerçeve sistem aynı yüklemeler altında değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre çözülmüştür. Daha sonra iki teori sonuçları arasındaki farklılıklar incelenmiştir.

Bu incelemeler sonucunda, analize etki edebileceği tahmin edilen bazı parametreler için farklı değerler alınarak, analiz sonuçları ve oluşan etkiler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Klasik gerilme çifti teorisi, değiştirilmiş gerilme çifti teorisi, çerçeve sistem, karbon nanotüp, deplasman, dönme
2021, ix + 64 sayfa.

ABSTRACT

MSc/PhD Thesis

ANALYSIS OF A FRAMING SYSTEM ACCORDING TO CLASSICAL AND MODIFIED COUPLE STRESS THEORY

Alihan YİĞİTOĞLU

Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Civil Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Özgür YAYLI

In this thesis, the displacement and rotation values at the nodes of the frame were investigated under the same loading conditions, according to the classical and modified couple stress theory. In the first part of the study, the displacement and rotation values of the nodes in the frame were obtained according to the classical couple stress theory under certain loads and then the obtained values were compared. In the second part of the study, the frame is analyzed according to the modified couple stress theory under the same loading condition. Then the differences between the results of the two theories are examined.

As a result of these examinations, different values were taken for some parameters that are expected to affect the analysis, and the results of the analysis and the effects were compared.

Key words: Classical couple stress theory, modified couple stress theory, framing system, carbon nanotube, displacement, rotation

2021, ix + 64 pages.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam esnasında tecrübelerini, bilgilerini ve çok kıymetli zamanını esirgemeyerek, yardıma her ihtiyacım olduğunda yardımcı olan ve birlikte çalışmaktan gurur ve övünç duyduğum sayın hocam Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI 'ya ve çalışmam boyunca yardımcı olan Araş. Gör. Büşra UZUN 'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan hayatımın her anında desteklerini esirgemeyen, hayatımı güzelleştiren çok sevdiğim sevgili aileme ve eşime sonsuz şükranlarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Alihan YİĞİTOĞLU

.../.../.....



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Nanoteknoloji.....	1
1.1.1 Nano Malzemeler	1
1.2 Karbon Nanotüpler.....	2
1.2.1 Tek Duvarlı Karbon Nanotüpler	2
1.2.2 Çok Duvarlı Karbon Nanotüpler	3
1.3 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler	3
1.4 Elektro-Mekanik Sistemler	4
1.4.1 Mikro Elektro-Mekanik Sistemler	4
1.4.2 Nano Elektro-Mekanik Sistemler.....	5
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI	7
2.1 Kuramsal Temeller.....	7
2.1.1 Winkler Zemin Modeli.....	7
2.1.2 Pasternak Zemin Modeli	7
2.1.3 Klasik Gerilme Çifti Teorisi.....	8
2.1.4 Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisi	8
2.1.5 Yerel Olmayan Elastisite Teorisi	9
2.2 Kaynak Araştırması.....	10
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	14
3.1 Teorik Formülasyon	14
3.1.1 İki Boyutlu Herhangi Bir Doğrultuda Yönlendirilmiş Kiriş Elemanı.....	16
3.2 Bir Çerçeve Sistemin Klasik Gerilme Çifti Teorisine Göre Statik Analizi	21
3.3 Bir Çerçeve Sistemin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisine Göre Statik Analizi	29
4. BULGULAR	46
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	59
KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	64

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

A	: En Kesit Alanı
E	: Elastisite Modülü
G	: Birim Uzunluk Kütlesi
L	: Çubuk Uzunluğu
I	: Atalet Momenti
F	: Yatay Kuvvet
M	: Moment
T	: Dönüşüm Matrisi
l	: Malzeme Parametresi
k	: Rijitlik Matrisi
nm	: Nanometre
nN	: NanoNewton

Kısaltmalar

Açıklama

KNT	: Karbon Nanotüp
TDKNT	: Tek Duvarlı Karbon Nanotüp
TEM	: Geçirmeli Elektron Mikroskobu
SEM	: Taramalı Elektron Mikroskobu
ÇDKNT	: Çok Duvarlı Karbon Nanotüp
FDM	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler
DGÇT	: Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisi
KGÇT	: Klasik Gerilme Çifti Teorisi
Cos	: Kosinüs
Sin	: Sinüs
$d_{2x}^{(1)}$ deplasmanı	: Klasik gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasının x eksenindeki
$d_{2x}^{(2)}$ deplasmanı	: Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasının x eksenindeki
$d_{2y}^{(1)}$ deplasmanı	: Klasik gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasının y eksenindeki
$d_{2y}^{(2)}$ deplasmanı	: Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasının y eksenindeki
$d_{3x}^{(1)}$ deplasmanı	: Klasik gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasının x eksenindeki
$d_{3x}^{(2)}$ deplasmanı	: Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasının x eksenindeki
$d_{3y}^{(1)}$ deplasmanı	: Klasik gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasının y eksenindeki

$d_{3y}^{(2)}$: Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasının y eksenindeki
 deplasmanı
 $\phi_2^{(1)}$: Klasik gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasındaki dönme
 $\phi_2^{(2)}$: Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasındaki dönme
 $\phi_3^{(1)}$: Klasik gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasındaki dönme
 $\phi_3^{(2)}$: Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasındaki dönme
 α_2 : Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasının x eksenindeki
 deplasmanı / Klasik gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasının x eksenindeki deplasmanı
 β_2 : Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasının y eksenindeki
 deplasmanı / Klasik gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasının y eksenindeki deplasmanı
 γ_2 : Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasındaki dönme /
 Klasik gerilme çifti teorisine göre; 2 noktasındaki dönme
 α_3 : Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasının x eksenindeki
 deplasmanı / Klasik gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasının x eksenindeki deplasmanı
 β_3 : Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasının y eksenindeki
 deplasmanı / Klasik gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasının y eksenindeki deplasmanı
 γ_3 : Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasındaki dönme /
 Klasik gerilme çifti teorisine göre; 3 noktasındaki dönme

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Tek duvarlı karbon nanotüp	2
Şekil 1.2. Çok duvarlı karbon nanotüp	3
Şekil 1.3. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme gösterimi	4
Şekil 2.1. Winkler zemin modeli	7
Şekil 2.2. Pasternak zemin modeli	8
Şekil 3.1. Herhangi bir doğrultuda yönlendirilmiş kiriş elemanı.....	17
Şekil 3.2. Kiriş elemanı üzerine etkiyen lokal kuvvetler	18
Şekil 3.3. Açı değeri $\alpha = 90^\circ$ olan bir çerçeve sistem	21
Şekil 3.4. Açı değeri $\alpha = 90^\circ$ olan bir çerçeve sistem	29
Şekil 4.1. Açı değeri $\alpha = 90^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.....	46
Şekil 4.2. Açı değeri $\alpha = 90^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.....	46
Şekil 4.3. Açı değeri $\alpha = 75^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.....	47
Şekil 4.4. Açı değeri $\alpha = 75^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.....	47
Şekil 4.5. Açı değeri $\alpha = 60^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.....	48
Şekil 4.6. Açı değeri $\alpha = 60^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.....	48
Şekil 4.7. Açı değeri $\alpha = 45^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.....	49
Şekil 4.8. Açı değeri $\alpha = 45^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.....	49
Şekil 4.9. Açı değeri $\alpha = 30^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.....	50
Şekil 4.10. Açı değeri $\alpha = 30^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.....	50
Şekil 4.11. Açı değeri $\alpha = 20^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.....	51
Şekil 4.12. Açı değeri $\alpha = 20^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.....	51
Şekil 4.13. Açı değeri $\alpha = 0^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.....	52
Şekil 4.14. Açı değeri $\alpha = 0^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.....	52
Şekil 4.15. Malzeme parametresi $l=0,1$ olan farklı açı değerleri için 2 noktasının değerleri.....	53
Şekil 4.16. Malzeme parametresi $l=0,1$ olan farklı açı değerleri için 3 noktasının değerleri.....	53
Şekil 4.17. Malzeme parametresi $l=0,3$ olan farklı açı değerleri için 2 noktasının değerleri.....	54
Şekil 4.18. Malzeme parametresi $l=0,3$ olan farklı açı değerleri için 3 noktasının değerleri.....	54

Şekil 4.19. Malzeme parametresi $l=0,5$ olan farklı açı değerleri için 2 noktasının değerleri.....	55
Şekil 4.20. Malzeme parametresi $l=0,5$ olan farklı açı değerleri için 3 noktasının değerleri.....	55
Şekil 4.21. Malzeme parametresi $l=0,7$ olan farklı açı değerleri için 2 noktasının değerleri.....	56
Şekil 4.22. Malzeme parametresi $l=0,7$ olan farklı açı değerleri için 3 noktasının değerleri.....	56
Şekil 4.23. Malzeme parametresi $l=0,9$ olan farklı açı değerleri için 2 noktasının değerleri.....	57
Şekil 4.24. Malzeme parametresi $l=0,9$ olan farklı açı değerleri için 3 noktasının değerleri.....	57
Şekil 4.25. Malzeme parametresi $l=1,1$ olan farklı açı değerleri için 2 noktasının değerleri.....	58
Şekil 4.26. Malzeme parametresi $l=1,1$ olan farklı açı değerleri için 3 noktasının değerleri.....	58

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 3.1. Klasik gerilme çifti teorisine göre çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri	28
Çizelge 3.2. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.1$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri	36
Çizelge 3.3. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.3$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri	37
Çizelge 3.4. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.5$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri	37
Çizelge 3.5. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.7$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri	38
Çizelge 3.6. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.9$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri	38
Çizelge 3.7. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=1.1$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri	39
Çizelge 3.8. Malzeme parametresi $l=0.1$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	39
Çizelge 3.9. Malzeme parametresi $l=0.3$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	40
Çizelge 3.10. Malzeme parametresi $l=0.5$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	40
Çizelge 3.11. Malzeme parametresi $l=0.7$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	41
Çizelge 3.12. Malzeme parametresi $l=0.9$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	41
Çizelge 3.13. Malzeme parametresi $l=1.1$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	42
Çizelge 3.14. Açı değeri $\alpha = 90^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	42
Çizelge 3.15. Açı değeri $\alpha = 75^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	43
Çizelge 3.16. Açı değeri $\alpha = 60^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	43
Çizelge 3.17. Açı değeri $\alpha = 45^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	44
Çizelge 3.18. Açı değeri $\alpha = 30^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	44
Çizelge 3.19. Açı değeri $\alpha = 20^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	45
Çizelge 3.20. Açı değeri $\alpha = 0^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri	45

1. GİRİŞ

1.1 Nanoteknoloji

Nanoteknoloji, maddeleri ve aletleri atomik seviyede kontrol ederek malzemelerin farklılaştırılması ya da yeniden oluşturulmasıdır. Ünlü fizikçi Richard Feynman nanoteknoloji kavramı için uzun yıllar çalışmalarda bulunmuştur. Meşhur konuşmasında "her bir atom ve molekülü ayrı ayrı kontrol edebilecek bir sürecin varlığından" bahsetmiş ve bilim dünyasında yeni bir süreç başlatmıştır. Teknoloji, biz insanların gereksinimlerine karşılık verebilmek için sürekli olarak kendini yenilemekte ve gelişmektedir. Nanoteknoloji, maddelerde moleküler düzeyde değişiklikler yaparak farklı yapı ve özelliklerde yeni maddeler oluşturan bilim dalıdır. Oluşturulan bu yeni maddelerin fiziksel, kimyasal, biyolojik ve malzeme özelliklerinin tanınması gerekir. Nanoteknoloji geçmişi çok eski olmasa da hayatımızın birçok alanını kapsamakta ve gün geçtikçe bu kapsamı genişletmektedir. Fizik, kimya, tekstil, üretim, ziraat, tıp, enerji, elektrik, elektronik, lojistik, havacılık, uzay araştırmaları, malzeme, inşaat ve daha nice bilim dallarını kapsamaktadır.

1.1.1 Nano Malzemeler

Nano malzemeler boyutlarına göre dört gruba ayrılmaktadır.

1. Sıfır Boyutlu Nano Malzemeler

Nanotoz ve Nanodispersiyon tipinde birbirinden bağımsız olarak bulunur.

2. Tek Boyutlu Nano Malzemeler

Nanoçubuklar ve Nanotüplerdir.

3. İki Boyutlu Nano Malzemeler

Grafen, Boron nitrür ve Molibden disülfid'tir.

4. Üç boyutlu Nano Malzemeler

Çok katmanlı olan Elmas ve Grafit'tir.

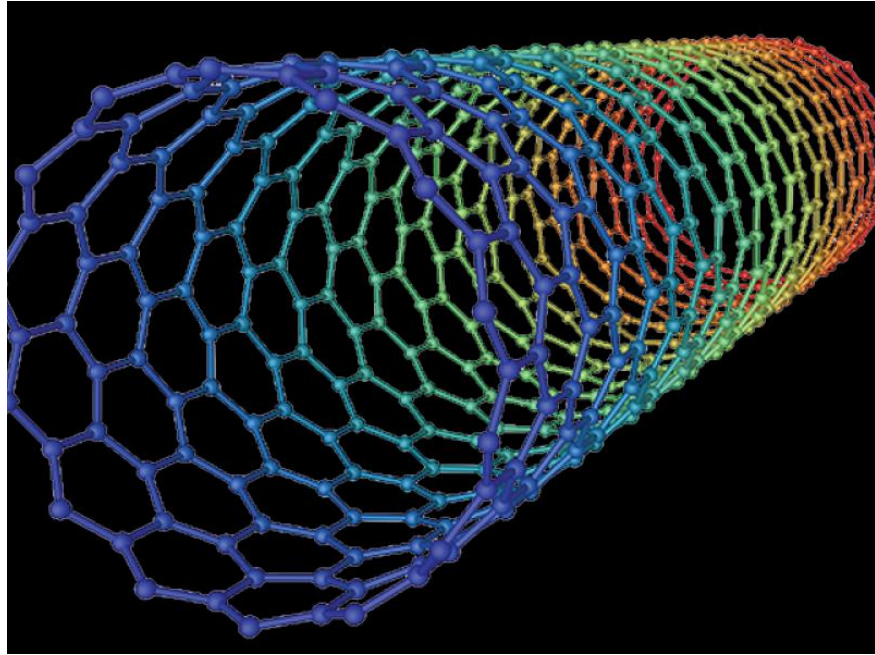
Sıklıkla kullanılan nano malzemeler Grafen ve Karbon Nanotüpler (CNT)'dir. Grafen, hem hafif hem de sağlam bir malzemedir. Elektrik iletkenliği oldukça yüksek, saydam ve esnektir. Karbon nanotüpler, grafeni üst üste ve tüp şekline getirilerek oluşturulurlar.

1.2 Karbon Nanotüpler

Nanotüpler ilk olarak 1991 yılında ortaya çıkmıştır. Çaplarından çok daha fazla (milyonlarca kat) uzunluğa sahip olabilen karbon nanotüpler, sağlamlık, ısı ve elektrik iletkenlik yönünden diğer malzemelere göre oldukça avantajlı durumdadır. Karbon nanotüpler bilinen en sağlam malzemelerdir. Uzay asansörleri, sentetik kas üretimi, okyanus üzerine köprü inşası gibi yapılar nanotüpler ile olası hale gelmiştir. Tek duvarlı ve çok duvarlı olmak üzere iki tip karbon nanotüp bulunmaktadır.

1.2.1 Tek Duvarlı Karbon Nanotüpler (TDKNT)

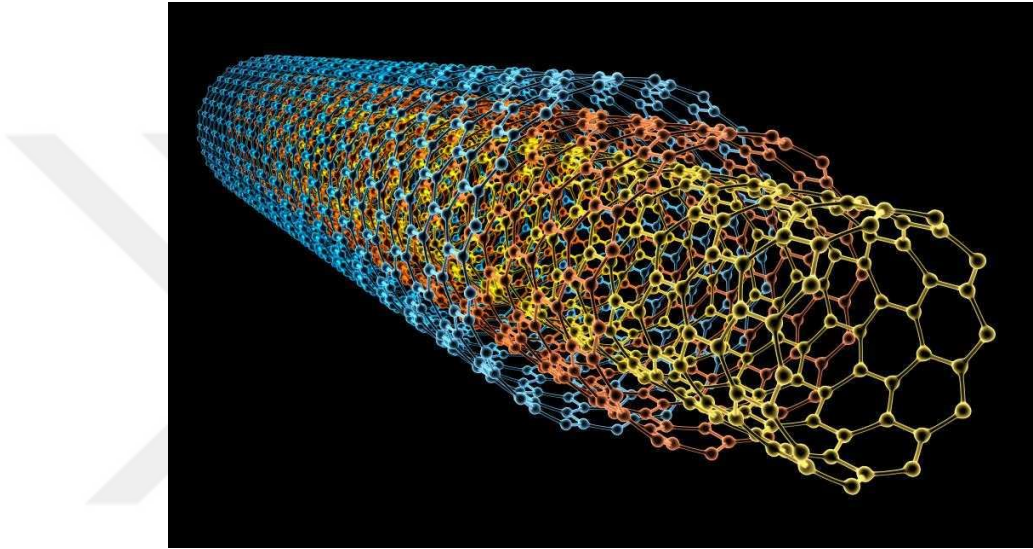
Silindirik olarak yuvarlanmış tek bir grafen tabakanın uç kısmı açık veya kapalı şekilde tasarlandığı karbon nanotüplerdir. Bu tasarımlar değişik çaplarda yapılabilir. Tek duvarlı karbon nanotüpler, çok duvarlı karbon nanotüplerin temel yapısını oluştururlar. Çok ince örnek içerisinde geçen yüksek enerjili elektronların izlenmesi prensibine dayanan Geçirmeli Elektron Mikroskobu(TEM) sayesinde, Tek Duvarlı Karbon Nanotüpler(TDKNT) elde edilmektedir. Taramalı Elektron Mikroskobu(SEM) ile üretilen nanotüpler, hangi yöntemle üretilmiş olursa olsun karbon iplerden oluşmuş bir yaygı gibi görünürler(Seyman,2010).



Şekil 1.1 Tek duvarlı karbon nanotüp (dusge.com adresinden alınmıştır)

1.2.2 Çok Duvarlı Karbon Nanotüpler (ÇDKNT)

Silindirik olarak yuvarlanmış birden fazla grafen tabakalarının iç içe geçmiş, uçları açık veya kapalı biçimde tasarlandığı karbon nanotüplerdir. Çok Duvarlı Karbon Nanotüpler(ÇDKNT) iç ve dış çapları, 5 ile 100 nm arasında değişmektedir. İç içe geçen tek duvarlı karbon nanotüplerin arasındaki mesafe yaklaşık 0,35 nm civarındadır. Bu grafit katmanları arasındaki mesafeye yakın bir değer olmasından dolayı, çok duvarlı karbon nanotüpler grafit ile aynı özellikleri göstermektedir(Tetil,2012).

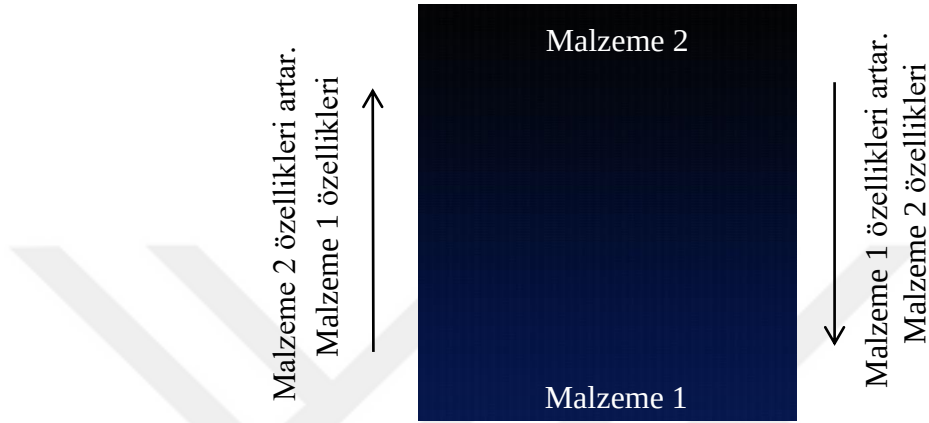


Şekil 1.2 Çok duvarlı karbon nanotüp (dusge.com adresinden alınmıştır)

1.3 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM)

Bilim dünyasında yüksek mukavemetli ve ısı direnç özelliğini sağlayan malzemelere gereksinim olduğundan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler ortaya çıkmıştır. FDM 'ler yapısal olarak kimyasal ve fiziksel anlamda farklı özelliklere sahip iki maddenin bir araya gelmesiyle oluşur. Bir araya gelen bu iki maddenin malzeme özellikleri tanımlanmış bir fonksiyona bağlı olarak en az bir doğrultu boyunca farklılık gösteren kompozitlerdir. Tabakalı kompozit malzemelerde aniden özellik değişimi nedeniyle gerilme yığılmaları ve çeşitli sorunlar ortaya çıkmaktadır. FDM 'lerde özellik değişimi sürekli olduğundan bu sorunlar azalmaktadır. FDM 'ler çoğunlukla seramik ve metal karışımından oluşurlar. Böylece seramik termal ortamlarda yüksek sıcaklığa karşı koyarken metalde soğutmanın ilk aşamalarında seramik yüzeyde meydana gelecek

gerilmelerin azalmasını sağlar. Birçok disiplinde uygulama alanı bulan FDM 'ler mekanik, elektronik, optik, kimya, mikro elektronik, biyomedikal, otomotiv endüstrisi, havacılık, nükleer ve inşaat mühendisliğinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Alshorbagy ve ark. 2011, Thai ve Vo 2012, Pradhan ve Chakraverty 2013, Akgöz ve Civalek 2015, Ebrahimi ve ark. 2015).



Şekil 1.3 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme gösterimi

1.4 Elektro-mekanik Sistemler

Elektro-mekanik, mekanik olan sistemlerin elektronik olan sistemler ile yönetilmesine dayanan sistemlerdir. Bilindiği üzere elektro-mekanik sistemler; otomotiv alanında (hava yastığı, araç güvenlik, otomatik kapı kilit ve süspansiyon sistemlerinde), endüstriyel alanda (deprem algılama, makine denetimi ve eğim algılama sistemlerinde), askeri alanda (her türlü askeri ekipmanda), biyolojik alanda (DNA mikro iyileştirme, mikro işlenmiş taramalı tünel mikroskopunda, biyo çiplerde ve implantlarda), yapı alanında (demiryolları ve metro vb. sistemlerde) ve ticari alanda (yazıcılar, medya oynatıcı cep telefonu ve kamera vb.) kullanılmaktadır.

1.4.1 Mikro Elektro-mekanik Sistemler

Mikro elektro-mekanik sistemler (MEMS) küçük ölçekli elektro-mekanik sistemlerin araştırıldığı bilim dalıdır. Mikro-elektro-mekanik sistemlerin karakteristik olarak boyutu genellikle birkaç mikrondan, birkaç santimetreye kadar değişebilmektedir.

Ünlü fizikçi Richard Feynman genellikle MEMS 'in kurucusu olarak anılmaktadır. 1959 yılında Feynman oldukça küçük sistemlerin üretilebileceği fikrini ortaya atmıştır.

Mikro elektro-mekanik sistemlerin üretiminde çok sayıda teknik kullanılmaktadır. Bunlar; Yüzey mikro-işleme, Gövde mikro-işleme, Geliştirilmiş LIGA işlemi, Elektro-erozyonla mikro-işleme, Laserler mikro-işleme'dir.

1.4.2 Nano Elektro-mekanik Sistemler

Nano elektro-mekanik sistemler (NEMS) nano ölçekli elektro-mekanik sistemlerin incelendiği bilim dalıdır. Nano elektro-mekanik sistemler, mikro elektro-mekanik sistemlerin gelişmiş halidir. Ancak, nano elektro-mekanik sistemler gelişmekte olan sistemlerdir. Yaygın olarak kullanılan nano elektro-mekanik cihazlar ivme ölçer, sensör ve kırılganlardır. Nano elektro-mekanik sistemler hızlıca gelişmekte, mekaniksel hesaplama, veri depolama ve iletişim sistemleri gibi alanlarda büyük bir potansiyele sahiptir.

Nano elektro-mekanik sistemler ile mikro elektro-mekanik sistemlerin alt dalları, mekanik, elektronik, sensörler ve uyarıcılar olarak ayrılmaktadır. Anahtar üretiminde hatırı sayılır bir yere sahip "MEMS'ler mevcut mekanik ve elektrik sistemlerin bütünleşmiş ve minyatürize halidir. Mikron boyutlarında olan bu sistemleri nano elektro-mekanik sistemler vasıtası ile nanoteknoloji uygulamaları için de kullanmak da mümkündür".

Nano elektro-mekanik ve mikro elektro-mekanik sistemlerin özellikleri;

Boyutları ve hacimleri çok küçüktür.

Entegrasyon kolaylığı sağlamaktadır.

Üretim teknikleri kolaydır.

Toplu üretim mümkündür.

Termal genleşme olanağına sahiptir.

Güç tüketimi azdır.

Radyasyon ve titreşime dayanıklıdır.

NEMS ve MEMS teknolojileri sayesinde mikron boyutlarında mekanik aygıtların yapılması ve kontrolü olanaklı olmuştur.

Çağımız teknolojisinde, aygıt özellikleri hızla artarken boyutları da aynı gelişme hızıyla küçülmektedir. Küçülen boyutlar neticesinde, nanometre mertebelerine inildiği ve bu incelemeler sayesinde malzemeler hakkında yeni fiziksel özellikler keşfedilmiştir. Atomların ve moleküllerin dizilişleri değiştirilip yeniden tasarlanarak çok farklı

malzemeler elde edilmiştir. Bu malzemelerle, nano boyutlarda yeni cihazlar ve sistemler tasarlanmaktadır. Nanoteknolojinin yapı taşlarından biride nanomekaniktir. Nanomekaniğin konusu, nano ölçekteki sistemlerin kuvvet, yer değiştirme ve titreşim gibi özelliklerinin analizi ile fonksiyonel ve elastik karakteristiklerinin incelenmesidir. Karbon nanotüplerin yaygınlaşması ile nanomekanik alanına ilgi artmıştır. NEMS 'lerin de ortaya çıkmasıyla bu ilgi daha da artarak devam etmektedir.

Mikro ve nano teknolojisinin bu kadar fazla rağbet görmesinin sebepleri arasında makro boyuttaki mekanik sistemlerin mikro ve nano boyutta küçültülerek üretilmesinde hacimsel kuvvetlerin (ağırlık/atalet) önemini kaybetmesinden dolayı mekanik açıdan oldukça hızlı sistemlerin gerçekleştirilebilmesi, yüksek ivmeli hareketlerin mümkün olması, daha az yer teşkil etmesi, enerji tasarrufu sağlamaları, seri üretim olanağının bulunması gibi birçok yarardan bahsedilebilir. Bahsedilen bu nedenlerden dolayı, nano ve mikro mekanik sistemler günümüzde kendilerine oldukça yaygın bir kullanım alanı bulmaktadırlar.

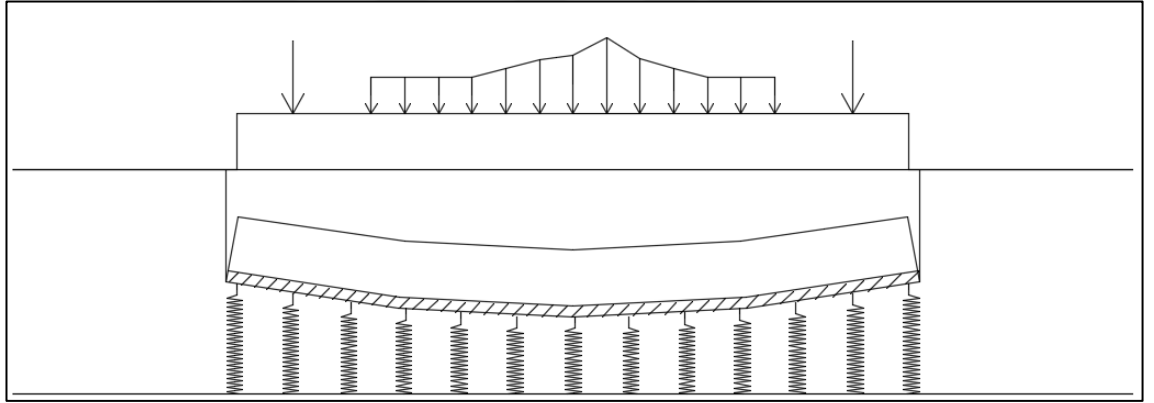
Son yıllarda hatırı sayılır sayıda araştırmacı tarafından üzerinde çalışılan diğer bir konuda kavramsal ve uygulamalı mekanik titreşim ve rezonanstır. Bu alandaki çalışmalar, mikro ve nano ölçekteki MEMS/NEMS 'leri mümkün hale getirmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1 Kuramsal Temeller

2.1.1 Winkler Zemin Modeli

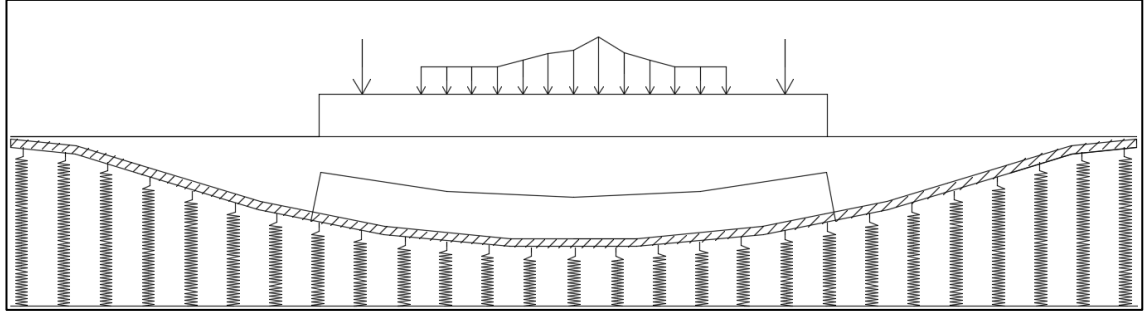
Emil Winkler 1867 yılında zeminlerin karmaşık bir yapıya sahip olması nedeniyle birçok araştırmalarda bulunmuştur. Winkler yapmış olduğu bu araştırmalar neticesinde tek parametrelili ve birbirinden bağımsız yaylardan oluşan Winkler zemin modelini oluşturmuştur. Winkler zemin modelinde elastik zeminin bir noktasındaki düşey yer değiştirmenin sadece o noktada uygulanan basınç kuvvetiyle orantılı olduğu ve komşu noktalarda uygulanan basınç kuvvetlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Bu nedenle, zeminin düşey yer değiştirme özellikleri, birbirinden bağımsız doğrusal sürekli yaylarla tanımlanır.(Winkler,1867; Filonenko-Borodich,1940; Teodoru ve Musat,2008).



Şekil 2.1 Winkler zemin modeli

2.1.2 Pasternak Zemin Modeli

Winkler modeli bağımsız ve doğrusal yaylardan oluştuğu için yük etkisinde olan ve yük etkisinde olmayan zemin bölümleri içinde yer değiştirme süreksizliği oluşmaktadır. Zemin tabakası normalde süreksizlik göstermediği için bu durum ciddi problemler ortaya çıkartmaktadır. Yukarıda anlatılan sorunlar nedeniyle Winkler zemin modelinden daha hassas ve basit model olan Pasternak iki parametrelili zemin modeli oluşturulmuştur. Birinci parametre Winkler modeliyle aynı olup, ikinci parametre kayma tabakası rijitliğidir.



Şekil 2.2 Pasternak zemin modeli

2.1.3 Klasik Gerilme Çifti Teorisi

Klasik çift gerilme teorisi, Mindlin tarafından geliştirilmiştir. Gerinim tensörü ve eğrilik tensörü sırasıyla şu şekilde tanımlanabilir;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}), \chi_{ij} = \omega_{i,j}, i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Burada U_i yer değiştirme vektörünün bileşenleridir. ω_i dönme vektörlerinin bileşenleridir.

$$\omega_i = \left(\frac{1}{2}\right)(e_{ijk}U_{k,j}) \varepsilon_{ij}, (1.2) \text{ simetrik bir tensör ve } \chi_{ij}, \text{ asimetrik bir tensördür.}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (2.2)$$

$$m_{ij} = 4\mu l^2 \chi_{ij} \quad (2.3)$$

Burada μ ve λ Lamé parametreleridir. l ise malzeme uzunluk ölçeği parametresidir.

2.1.4 Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisi

Yang ve diğerleri (2002) tarafından önerilen modifiye edilmiş çift stres teorisi, mevcut formülasyonda kullanılmaktadır. Bu teori, iyi kurulmuş olan klasik çift stres teorisinden gelişmektedir (Mindlin ve Tiersten, 1962; Mindlin, 1963; Toupin, 1964; Koiter, 1964). Modifiye edilmiş çift stres teorisinin klasik çift stres teorisine göre iki ana avantajı, asimetrik çift gerilim tensörünün dahil edilmesi ve sadece bir uzunluk ölçeği parametresinin dahil olmasıdır (Park ve Gao, 2008). Modifiye edilmiş çift gerilme teorisinde, doğrusal elastik izotropik malzeme için sonsuz küçüklikte gerinim enerjisi yoğunluğu $\bar{U}$ deformasyon olarak yazılır.

$$\bar{U} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}), i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}((\nabla U)_{ij} + (\nabla U)_{ij}^T), \quad (2.6)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (2.7)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}((\nabla \theta)_{ij} + (\nabla \theta)_{ij}^T) \quad (2.8)$$

σ_{ij} , ε_{ij} , m_{ij} ve χ_{ij} gerilme tensörünün simetrik kısmının bileşenlerini belirten σ , gerinim tensörü ε , çift gerilme tensörünün deviatorik kısmı m ve eğrilik tensörünün simetrik kısmı χ 'dir. Ayrıca U ve θ yer değiştirme vektörü ve döndürme vektörüdür. İki Lamé sabiti ve malzeme uzunluk ölçeği parametresini sırasıyla λ, μ ve l temsil eder. Sonsuz küçük dönme vektörü θ_i 'nin bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$\theta_i = \frac{1}{2}(\text{curl}(u))_i \quad (2.9)$$

2.1.5. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi

Klasik elastisite teorisinde belirli noktadaki gerilmeler hesaplanırken, komşu noktalardaki şekil değişikliğinden oluşan gerilmeler ve çubuğun boyutu hesaba katılmamaktadır. Malzeme için gerilme büyüklükleri sadece o nokta için hesaplanmaktadır. Sadece yerel etkileri incelemektedir. Fakat yerel olmayan elastisite teorisinde, belirli noktadaki gerilmeler hesaplanırken, komşu noktalardaki şekil değişikliğinden oluşan gerilmeler ve çubuğun boyutu dikkate alınarak hesaplanmaktadır. Bu sebeple, karbon nanotüplerin incelenmesinde, yerel olmayan elastisite teorisi kullanılmaktadır.

Yerel olmayan elastisite teorisi, klasik elastisite teorisinin yetersiz kaldığı durumları ortadan kaldırmak için geliştirilmiş bir teoridir. Cisimler yer değiştirdiğinde geometrik düzensizlik oluşur ve bu düzensizliklerden dolayı gerilmeler meydana gelmektedir. Bu gerilmelerin hesabı klasik elastisite teorisine göre bazı eksiklikler meydana gelmektedir ve yerel olmayan elastisite teorisine göre bu eksiklikler ortadan kalkmaktadır.

Cisimlerin iç yapısında oluşan gerilmeler arasındaki mesafenin çok küçük boyutlarda olması durumunda iç yapının önemi daha da az olacağından, gerilme hesabı klasik elastisite teorisine göre yapılabilir. Ancak cisimlere uygulanan dış etkilerin büyük olması durumunda cismin iç yapısı önem kazanacağından, gerilme hesabı yerel olmayan elastisite teorisine göre yapılmalıdır.

2.2 Kaynak Araştırması

E.Winkler(1867), zeminlerin karmaşık olan yapılarını sadeleştirmek için birçok araştırmalarda bulunmuştur. Winkler yapmış olduğu bu araştırmalar sonucunda tek parametrelili ve birbirinden bağımsız yaylardan oluşan Winkler zemin modelini oluşturmuştur. Winkler zemin modelinde yer değiştirme süreksizliği gibi sorunlarla karşılaşılması üzerine Pasternak, Winkler modelinden daha hassas olan iki parametrelili modeli oluşturmuştur.

Hetenyi(1946), elastik zemine oturan kiriş teorisi üzerine araştırmalar yapmıştır. Elastik bir zemin üzerine oturan kısıtlanmış dairesel bir kirişin eğilmesini, Chung(1953) incelemiştir. Frederick(1954), elastik bir zemin üzerine oturan kirişlerin üzerindeki ikincil etkileri ve kirişlerin titreşimlerini araştırmıştır.

Elastisite teorisiyle alakalı bazı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; Elastik düzleme oturan kirişlerin rijitlik katsayılarını hesaplamak için Berg(1958) bir yöntem üzerinde çalışmıştır. Tanyi(1962), elastik bir zemin tarafından belirli ölçekte kısıtlanmış olan kirişleri araştırmıştır. Elastik bir zemin üzerine oturan kirişler teorisine giriş konusunda, Bald(1964) bazı çalışmalar gerçekleştirmiştir.

Chang(1965), elastik düzlemde sonsuz uzunluktaki bir kirişin davranışlarını incelemiştir. Aynı konu üzerinde Ray(1966), Carrol(1969) ve Meshgin(1974) çalışmaları bulunmaktadır. Alberti ve Tuma(1970), elastik zemin üzerine oturan kirişlerin davranışları incelemişlerdir.

Lin(1970), elastik zemine oturan kısıtlı dairesel kirişin eğilmesini araştırmıştır. Lin ve Hsu(1970), tek yönlü elastik zemine oturan kirişleri incelemişlerdir. Elastik zemine oturan kirişlerin matris analizini Graza(1970) incelemiştir. Smith ve Herrmann(1972), elastik zemin üzerine oturan kirişin ard arda etkiyen kuvvetlerin etkisi altındaki stabilitesini araştırmışlardır. Broekhuizen(1972), elastik bir zemin üzerine oturan bir kiriş elemanı için rijitlik katsayılarını araştırmıştır.

Elastik bir zemin üzerine oturan kiriş modeli için temas sorunlarını, Chez(1974) araştırmıştır. Nugent(1975), elastik bir zemin üzerine oturan kirişleri ve dairesel plakaları incelemiştir. Nakamoto(1976), elastik zemin üzerine oturan kirişin yer değiştirme değerlerini araştırmıştır. Elastik bir zemin üzerine oturan düzgün olmayan kesitli kirişleri Doshi(1976), incelemiştir. Nakamoto(1976), elastik düzlemdeki kirişlerin yer değiştirme değerlerini ve hangi durumlar altında değer değişimleri

olduğunu gözlemlemiştir. Benoit(1996), mikro ve nano kirişlerin analizlerini yapmıştır. Karbon nanotüpler ile ilgili bazı fiziksel özellikleri, Saito(1998), araştırmıştır. Sujith(1997), bazı farklı özelliklerdeki kirişlerin eksenel titreşim analiz hesaplarını yapmış ve çözümleri incelemiştir.

Melerski(2000), elastik bir zemin üzerine oturan kirişlerin, dairesel plakaların tasarımını ve analizini araştırmıştır. Gerilimsiz Winkler zemin üzerine oturan bir kirişin doğrusal olmayan titreşimlerini Coşkun(2000), incelemiştir.

Koç(2003), nanotüpler ile alakalı çalışmalarda bulunmuştur. Jr.Poole ve Owens(2003), nanoteknolojiye giriş hakkında bazı araştırmalar yapmışlardır. Meyyappan(2004), karbon nanotüplerin bilimi ve uygulama alanlarını gözlemlemiştir. Tepe(2007), nanoteknolojide nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite teorisi çerçevesinde incelenmeler yapmıştır.

King(2007), nanoteknolojiyle ilgili araştırmalar yapmış ve bu alandaki gelişmeleri gözlemlemiştir. Nanoteknolojinin, esaslarını ve uygulama alanlarını, Karkare(2008) incelemiştir. Uluslararası rekabet stratejilerini, nanoteknoloji ve Türkiye'yi Menceloğlu ve Kırca(2008), araştırmışlardır. Tchoul(2008), karbon nanotüpleri ve kompozitlerini gözlemlemiştir. Fullerenleri, nanotüpleri ve karbon nanoyapıları, D'Souza(2008) araştırmıştır.

Elastik zemin üzerine oturan bazı plakların sonlu ızgara yöntemi ile yaklaşık çözümünü Karaşin ve Gülkan(2008), incelemişlerdir. Elastik bir zemin üzerine yerleştirilmiş kirişlerin hesaplamalarını ayrık tekil konvolüsyon ve harmonik diferansiyel quadrature yöntemlerini kullanarak Civalek ve Demir(2009), yapmışlardır.

Mühendislik ve mimarlık alanları için nanomalzemelere, nanoteknolojiye ve tasarımına giriş konularını Schodek ve Ferreira(2009), araştırmışlardır. Yerel olmayan sürekli çubuk modeli ile nanotüplerin eksenel titreşimini ve yerel olmayan elastisite teorisine göre elastik bir zemine gömülü karbon nanotüplerin eksenel titreşim analizini Aydoğdu(2009), (2012), gözlemlemiştir.

Winkler elastik zemini, üzerine yerleştirilmiş sonlu uzunluktaki bir kirişin dinamik tekil yük tesiri altında sonlu titreşimini Özdemir(2009), incelemiştir. Winkler zemin üzerine homojen olmayan kesik konik kabukların serbest titreşimini, Sofiyev ve vd.(2009) incelemişlerdir.

Elastik bir zemin üzerine oturan kirişlerin iki parametrelili farklı uygulama dönüşümü ile Timošenko'nun serbest titreşim analizini, Attarnejad ve vd.(2010) gerçekleştirmişlerdir. Aksencer(2010), nano plaklar için statik ve dinamik analizi yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak teorik açıdan araştırmıştır. Yüksek mertebeden elastisite teorilerinden değiştirilmiş gerilme çifti ve değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi, elastisite teorileri kullanılarak bir mikro kirişin burkulma ve eğilme analizlerini, Akgöz(2010), yapmıştır. Yerel olmayan elastisite teorisine göre ikinci mertebe teorisini, yerel olmayan kirişler için ek sınır koşulları kullanılarak sonlu elemanlar metodu zayıf formülasyonu, gradyan elastik kirişin sonlu elemanlar yöntemi ile stabilite analizini, farklı sınır şartları ile karbon nanotüpler eksenel titreşimini, değişen kesitli bir gradyan elastik kirişin serbest titreşim davranışını ve ölçülü sınır şartları ile tek duvarlı karbon nanotüplerin titreşim analizi için kompakt analitik yöntemini, Yaylı(2010;2011;2014) incelemiştir.

Ramsden(2009;2011), nanoteknolojinin esaslarını ve nanoteknolojiye giriş ve bu konuda araştırmalarda bulunmuştur. Kutucu(2010), özellikle nanoteknoloji alanında ve çift duvarlı karbon nanotüplerle ilgili çalışmalar yapmıştır.

Varadan(2010), nanobilim ve nanoteknoloji mühendisliği alanında bazı çalışmalarda bulunmuştur. Karbon nanotüpler ile ilgili olarak burkulma yüklerinin hesabını yapabilmek için yaklaşık yöntemini, Şahin(2010) incelemiştir.

Sirmen(2010), tek duvarlı karbon nanotüpte ve çift duvarlı karbon nanotüpte eğilmeyle ilgili çalışmalar yapmıştır.

Mahler ve Seiler(2011), karbon nanotüpler ve nanokompozitler ile ilgili araştırmalarda bulunmuşlardır. Zhang(2012), karbon nanotüpler alanında ve karbon nanotüplerin uygulamalarını araştırmıştır. Molekülleri ve nano-tüpleri, Kurt ve vd.(2012) incelemişlerdir.

Karbon nanotüpleri ve nanosensorlerin titreşimini, burkulması ve balistik etkisini, Elishakoff(2012) araştırmıştır.

Grafeni, karbon nanotüpleri, nanoyapıların tekniğini, uygulama alanlarını ve uygulamalarını, Morris ve Iniewski(2013) incelemişlerdir. Tserpes ve vd.(2014), grafenin, karbon nanotüplerin ve kompozitlerin modellenmesini incelemişlerdir. Grafen ve karbon nanotüpleri, Tanaka(2014) incelemiştir. Çift gerilme teorisi yöntemi ile çatlak durumda olan nano kirişin serbest enine titreşiminin boyuta etkisini, Beni ve vd.(2015) incelemişlerdir.

Elastik bir zemin üzerine oturan sonsuz kirişin dinamik analizini hareketli yük altında analitik olarak Turan(2012), araştırmıştır. Rijit olmayan sınır koşullarında elastik bir zemin üzerine oturan bir çubuğun eksenel titreşim analizini, Yanık ve Yaylı(2015) yapmışlardır.

Malzeme özellikleri kalınlığı doğrultusunda değişen FD nanokirişlerin statik burkulma analizini boyut etkisine bağlı olarak Eltaher ve ark. (2013),incelemişlerdir. Winkler zeminine oturan nanokirişlerin yerel olmayan titreşim analizini Demir (2016), incelemiştir. Togun ve Bağdatlı (2016) Pasternak zeminine oturan nanokirişin lineer olmayan titreşim analizini yapmışlardır.

Winkler - Pasternak zeminine oturan, malzeme özellikleri kalınlığı doğrultusunda değişen FD kirişin serbest titreşimini Avcar ve Mohammed (2018) incelemişlerdir.

Winkler zemini üzerindeki çeşitli bazı nanotellerin titreşim davranışlarını Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ve Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile Uzun ve Civalek(2019), gözlemlemişlerdir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Teorik Formülasyon

Binalar, köprüler gibi birçok yapı çerçevelerden ve/veya ızgaralardan oluşur. Burada düzlem çerçevelerin ve ızgaraların çözümü için gerekli olan eşitliklerden ve yöntemlerden bahsedilecektir. İlk olarak, bir düzlemde herhangi bir doğrultuda yönlendirilmiş kiriş elemanı için rijitlik matrisi geliştirilecek. Daha sonra herhangi bir doğrultuda yönlendirilmiş kirişin rijitlik matrisini çıkartmak için, eksenel deformasyon etkisini de dahil ederek sonuçlar bir araya getirilecek. Böylelikle düzlem çerçeveleri analiz edilmiş olacaktır.

Deformasyonu temsil edecek matematiksel işlev önceden seçilecektir.

$$\hat{u} = a_1 + a_2 \hat{x} \quad (3.1)$$

Genel olarak, a katsayılarının toplam sayısı, serbestlik derecesine eşittir. Denklem (3.1) 'in matris formu aşağıda gösterildiği gibi olacaktır.

$$\hat{u} = [1 \quad \hat{x}] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$\hat{u}$, d_{1x} ve d_{2x} 'in yer değiştirme fonksiyonları olarak ifade edilecektir. Denklem (3.2) 'deki a_1 ve a_2 aşağıdaki gibi ilişkilendirilecektir.

$$\hat{u}(0) = \hat{d}_{1x} = a_1 \quad (3.3)$$

$$\hat{u}(L) = \hat{d}_{2x} = a_2 L + \hat{d}_{1x} \quad (3.4)$$

$$a_2 = \frac{\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}}{L} \quad (3.5)$$

$$\hat{u} = \left(\frac{\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}}{L} \right) \hat{x} + \hat{d}_{1x} \quad (3.6)$$

$\hat{u}$ fonksiyonunun matris formu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\hat{x}}{L} & \frac{\hat{x}}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\hat{u} = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Burada;

$$N_1 = 1 - \frac{\hat{x}}{L} \quad \text{ve} \quad N_2 = \frac{\hat{x}}{L} \quad (3.9)$$

N_1 ve N_2 değerleri şekil değiştirme fonksiyonları olarak adlandırılır ve lineer fonksiyonlardır. (Daryl L. Logan A First Course In The Finite Element Method)

Eleman uzunluğu boyunca enine yer değiştirildiği varsayılacaktır.

$$\hat{v}(\hat{x}) = a_1 \hat{x}^3 + a_2 \hat{x}^2 + a_3 \hat{x} + a_4 \quad (3.10)$$

$\hat{v}$, bir fonksiyon olarak ifade edilecektir. $\hat{d}_{1y}$, $\hat{d}_{2y}$, $\hat{\phi}_1$ ve $\hat{\phi}_2$ serbestlik dereceleri aşağıdaki gibi ilişkilendirilecektir.

$$\hat{v}(0) = \hat{d}_{1y} = a_4 \quad (3.11)$$

$$\frac{d\hat{v}(0)}{d\hat{x}} = \hat{\phi}_1 = a_3 \quad (3.12)$$

$$\hat{v}(L) = \hat{d}_{2y} = a_1 L^3 + a_2 L^2 + a_3 L + a_4 \quad (3.13)$$

$$\frac{d\hat{v}(L)}{d\hat{x}} = \hat{\phi}_2 = 3a_1 L^2 + 2a_2 L + a_3 \quad (3.14)$$

$$\hat{v} = \left[\frac{2}{L^3} (\hat{d}_{1y} - \hat{d}_{2y}) + \frac{1}{L^2} (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) \right] \hat{x}^3 + \left[-\frac{3}{L^2} (\hat{d}_{1y} - \hat{d}_{2y}) - \frac{1}{L} (2\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) \right] \hat{x}^2 + \hat{\phi}_1 \hat{x} + \hat{d}_{1y} \quad (3.15)$$

$\hat{v}$ fonksiyonunun matris formu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{v} = [N]\{\hat{d}\} \quad (3.16)$$

$$\{\hat{d}\} = \begin{bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (3.18)$$

$$N_1 = \frac{1}{L^3} (2\hat{x}^3 - 3\hat{x}^2L + L^3) \quad (3.19)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^3} (\hat{x}^3L - 2\hat{x}^2L^2 + \hat{x}L^3) \quad (3.20)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3} (-2\hat{x}^3 + 3\hat{x}^2L) \quad (3.21)$$

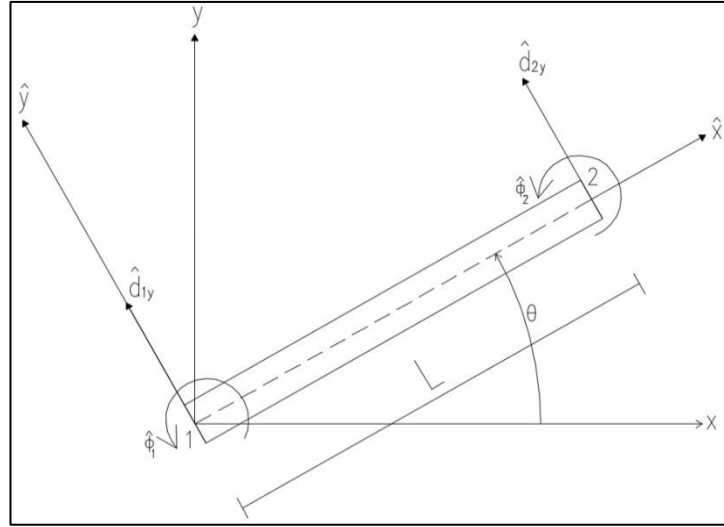
$$N_4 = \frac{1}{L^3} (\hat{x}^3L - \hat{x}^2L^2) \quad (3.22)$$

N_1, N_2, N_3 ve N_4 şekil değiştirme fonksiyonları olarak adlandırılacaktır. (Daryl L. Logan A First Course In The Finite Element Method)

3.1.1 İki boyutlu herhangi bir doğrultuda yönlendirilmiş kiriş elemanı

Şekil 3.1 de gösterildiği gibi herhangi bir doğrultuda yönlendirilmiş bir kiriş elemanı için rijitlik matrisi oluşturulacak. Lokal eksenler $\hat{x}$ ve $\hat{y}$, kiriş elemanı boyunca ve kiriş elemanının enine doğrultuda yer almaktadır. x ve y global eksenleri ise kirişe uygun olacak şekilde yerleştirilmiştir. Lokal yer değiştirmeler ile global yer değiştirmeler ilişkilendirilecektir.

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_x \\ \hat{d}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$



Şekil 3.1 Herhangi bir doğrultuda yönlendirilmiş kiriş elemanı

Kiriş elemanı için, lokal düğüm serbestlik dereceleri ile global serbestlik dereceleri aşağıdaki gibi ilişkilendirilecektir.

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Dönüşüm matrisi ise şu şekilde tanımlanacaktır.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Eksenel etkiler henüz probleme dahil edilmemiştir. Denklem (3.24) 'de dönmenin herhangi bir koordinat sistemine göre değişmediği varsayılıyor, yani elemanın x ve y düzleminde yön değiştirmesinin momentin etkilemediği kabul edilmektedir.

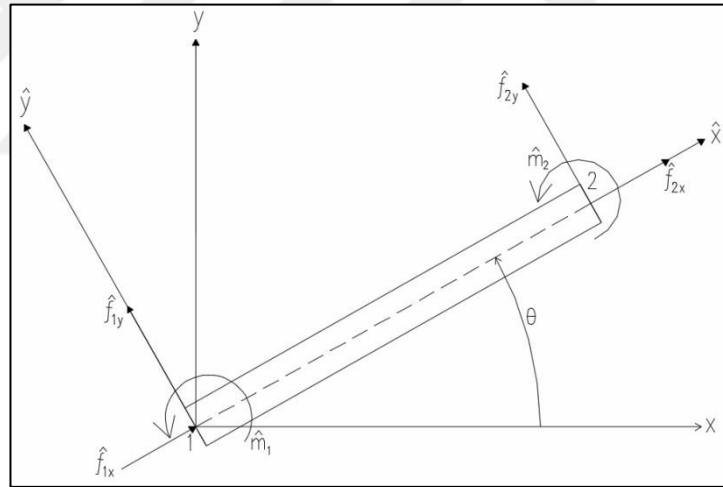
$$\underline{k} = \underline{T}^T \hat{\underline{k}} \underline{T} \quad (3.26)$$

Gerekli matematiksel işlemler yapıldığında global eleman rijitlik matrisi Denklem (3.27) 'deki gibi olacaktır.

$$\underline{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12S^2 & -12SC & -6LS & -12S^2 & 12SC & -6LS \\ -12SC & 12C^2 & 6LC & 12SC & -12C^2 & 6LC \\ -6LS & 6LC & 4L^2 & 6LS & -6LC & 2L^2 \\ -12S^2 & 12SC & 6LS & 12S^2 & -12SC & 6LS \\ 12SC & -12C^2 & -6LC & -12SC & 12C^2 & -6LC \\ -6LS & 6LC & 2L^2 & 6LS & -6LC & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Bu durumda $C = \cos \theta$ ve $S = \sin \theta$, olur.

Denklem (3.27), kesme ve eğilme etkilerini içeren bir kiriş elemanı için global eleman rijitlik matrisidir. Lokal aksenal etkiler henüz probleme dahil edilmemiştir. Şekil 3.2 de gösterildiği gibi elemandaki aksenal etkiler dahil edilecek ve bir elemanın düğüm noktasında üç serbestlik derecesi olacaktır.



Şekil 3.2 Kiriş elemanı üzerine etkiyen lokal kuvvetler

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Denklem (3.28) 'deki aksenal etkiler kesme ve eğilme momenti ile bir araya getirildiğinde;

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2x} \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Denklem (3.29) elde edilmiştir.

Burada;

$$C_1 = \frac{AE}{L} \text{ ve } C_2 = \frac{EI}{L^3} \quad (3.30)$$

$$\underline{\hat{k}} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Denklem (3.31) 'deki $\underline{\hat{k}}$ matrisi her düğüm noktası için üç serbestlik derecesine sahiptir. Kesme kuvveti etkileri (y yönünde), eğilme momenti etkisi ($\hat{z} = z$ eksen) gibi eksenel etkileri içermektedir. Denklem (3.23) ve denklem (3.24) kullanılarak lokal yer değiştirme ve global yer değiştirme ilişkilendirilir.

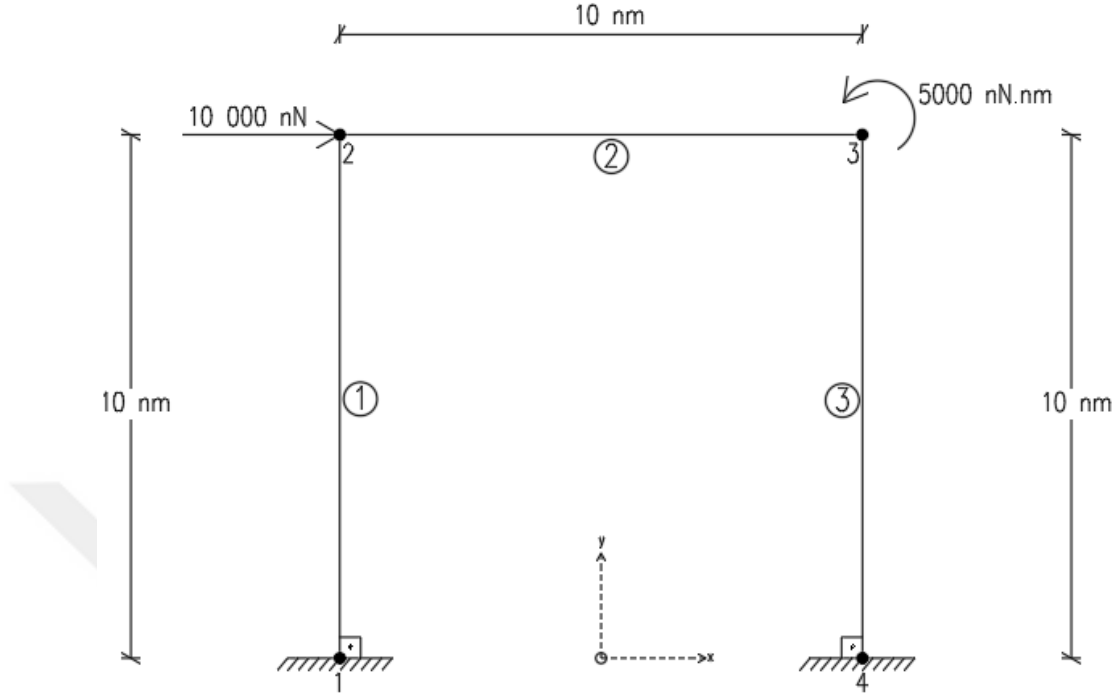
$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2x} \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$k = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S & -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S \\ \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & \frac{6I}{L} C & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\left(AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2\right) & \frac{6I}{L} C \\ -\frac{6I}{L} S & \frac{6I}{L} C & 4I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 2I \\ -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & \frac{6I}{L} S & AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & \frac{6I}{L} S \\ -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\left(AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2\right) & -\frac{6I}{L} C & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & -\frac{6I}{L} C \\ -\frac{6I}{L} S & \frac{6I}{L} C & 2I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 4I \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Bir rijit düzlem çerçevenin analizi, rijitlik matrisi denklemi uygulanarak gerçekleştirilir. Denklem (3.34). Burada rijit düzlem çerçeve, birbirine rijit bir şekilde bağlanmış bir dizi kiriş elemanı olarak tanımlanmaktadır. Uygulanan yükler veya yer değiştirmeler nedeniyle oluşan deformasyondan sonra, elemanların birleşim yerlerindeki açılar değişmeden kalmaktadır. Ayrıca, momentler mafsallarda bir elemandan diğerine iletilir. Bu nedenle, rijit mafsallarda moment sürekliliği vardır. Ek olarak, eleman merkezleri ve uygulanan yükler ortak bir düzlemde ($x - y$ düzlemi) bulunur. Denklem (3.34) den, bir çerçevenin eleman rijitliklerinin, global koordinat eksenlerine göre E, A, L, I ve elemanın oryantasyon açısının y fonksiyonları olduğu gözlemlenmektedir. (Daryl L. Logan A First Course In The Finite Element Method)

3.2 Bir Çerçeve Sistemin Klasik Gerilme Çifti Teorisine Göre Statik Analizi



Şekil 3.3 Açılı değeri $\alpha = 90^\circ$ olan bir çerçeve sistem

Yukarıda verilmiş olan çerçeve sistemde, 1 ve 4 noktaları ankastre olarak mesnetlendirilmiştir. 2 noktasından 10 000 nN ‘luk yatay yönde tekil kuvvet ve 3 noktasından 5000 nN.nm ‘lik tekil moment etki etmektedir. Koordinat sistemi şekilde görüldüğü gibidir. Bu yüklemeler altında 2 ve 3 noktası için klasik gerilme çifti teorisine göre matematiksel işlemler yapılacaktır. ($L=10$ nm, $A=0,7854$ nm², $I=0,04909$ nm⁴, $E=1000$ nN)

İlk olarak eleman 1 için yapılan matematiksel işlemler aşağıda verilmiştir:

$$C = \cos 90^\circ = \frac{x_2 - x_1}{L^{(1)}} = \frac{(-5) - (-5)}{10} = 0 \quad (3.35)$$

$$S = \sin 90^\circ = \frac{y_2 - y_1}{L^{(1)}} = \frac{(10) - (0)}{10} = 1 \quad (3.36)$$

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10^2} = 5,8905 \times 10^{-3} \quad (3.37)$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10} = 0,02945 \quad (3.38)$$

$$\frac{E}{L} = \frac{1000}{10} = 100 \quad (3.39)$$

Eleman rijitlik matrisi denklem (3.34) 'de elde edildiği gibi, her eleman için aşağıda verildiği şekilde kullanılmaktadır.

$$k = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S & -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S \\ \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & \frac{6I}{L} C & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\left(AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2\right) & \frac{6I}{L} C \\ -\frac{6I}{L} S & \frac{6I}{L} C & 4I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 2I \\ -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & \frac{6I}{L} S & AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & \frac{6I}{L} S \\ -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\left(AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2\right) & -\frac{6I}{L} C & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & -\frac{6I}{L} C \\ -\frac{6I}{L} S & \frac{6I}{L} C & 2I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 4I \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Gerekli matematiksel işlemler yapılarak eleman 1 için rijitlik matrisi elde edilmiştir.

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,58908 & 0 & -2,9454 & -0,58908 & 0 & -2,9454 \\ 0 & 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 \\ -2,9454 & 0 & 19,636 & 2,9454 & 0 & 9,818 \\ -0,58908 & 0 & 2,9454 & 0,58908 & 0 & 2,9454 \\ 0 & -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 \\ -2,9454 & 0 & 9,818 & 2,9454 & 0 & 19,636 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

İkinci olarak, eleman 2 için yapılan matematiksel işlemler aşağıda verilmiştir:

$$C = \cos 90^\circ = \frac{x_3 - x_2}{L^{(2)}} = \frac{(5) - (-5)}{10} = 1 \quad (3.42)$$

$$S = \sin 90^\circ = \frac{y_3 - y_2}{L^{(2)}} = \frac{(10) - (10)}{10} = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10^2} = 5,8905 \times 10^{-3} \quad (3.44)$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10} = 0,02945 \quad (3.45)$$

$$\frac{E}{L} = \frac{1000}{10} = 100 \quad (3.46)$$

Eleman rijitlik matrisi denklem (3.34) 'de elde edildiği şekilde kullanılarak, gerekli matematiksel işlemler uygulanarak, eleman 2 için rijitlik matrisi denklem (3.47) 'deki gibi elde edilmiştir.

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0,58908 & 2,9454 & 0 & -0,58908 & 2,9454 \\ 0 & 2,9454 & 19,636 & 0 & -2,9454 & 9,818 \\ -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 & 0 \\ 0 & -0,58908 & -2,9454 & 0 & 0,58908 & -2,9454 \\ 0 & 2,9454 & 9,818 & 0 & -2,9454 & 19,636 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Son olarak, eleman 3 için yapılan matematiksel işlemler aşağıda verilmiştir:

$$C = \cos 90^\circ = \frac{x_4 - x_3}{L^{(3)}} = \frac{(5) - (5)}{10} = 0 \quad (3.48)$$

$$S = \sin 90^\circ = \frac{y_4 - y_3}{L^{(3)}} = \frac{(0) - (10)}{10} = -1 \quad (3.49)$$

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10^2} = 5,8905 \times 10^{-3} \quad (3.50)$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10} = 0,02945 \quad (3.51)$$

$$\frac{E}{L} = \frac{1000}{10} = 100 \quad (3.52)$$

Eleman rijitlik matrisi denklem (3.34) 'de elde edildiği şekilde kullanılarak, gerekli matematiksel işlemler uygulanarak, eleman 3 için rijitlik matrisi denklem (3.53) 'deki gibi elde edilmiştir.

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,58908 & 0 & 2,9454 & -0,58908 & 0 & 2,9454 \\ 0 & 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 \\ 2,9454 & 0 & 19,636 & -2,9454 & 0 & 9,818 \\ -0,58908 & 0 & -2,9454 & 0,58908 & 0 & -2,9454 \\ 0 & -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 \\ 2,9454 & 0 & 9,818 & -2,9454 & 0 & 19,636 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Çerçeve sistemin 1 ve 4 noktalarında ankastre mesnet bulunduğu için x ve y yönündeki yer değiştirme değerleri ve dönme değerleri sıfırdır.

$$d_{1x} = d_{1y} = d_{4x} = d_{4y} = \phi_1 = \phi_4 = 0 \quad (3.54)$$

Denklem (3.41), (3.47) ve (3.53) 'de elde edilen eleman rijitlik matrislerinin birleştirilmesiyle aşağıda bulunan çerçeve rijitlik matrisi denklem (3.55) 'deki gibi elde edilmektedir.

$$K = \begin{bmatrix} 79,12908 & 0 & 2,9454 & -78,54 & 0 & 0 \\ 0 & 79,12908 & 2,9454 & 0 & -0,58908 & 2,9454 \\ 2,9454 & 2,9454 & 39,272 & 0 & -2,9454 & 9,818 \\ -78,54 & 0 & 0 & 79,12908 & 0 & 2,9454 \\ 0 & -0,58908 & -2,9454 & 0 & 79,12908 & -2,9454 \\ 0 & 2,9454 & 9,818 & 2,9454 & -2,9454 & 39,272 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Gerekli matematiksel işlemler uygulanarak, 2 ve 3 noktalarındaki yer değiştirme ve dönme değerleri elde edilmektedir.

$$\begin{bmatrix} 10\,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79,12908 & 0 & 2,9454 & -78,54 & 0 & 0 \\ 0 & 79,12908 & 2,9454 & 0 & -0,58908 & 2,9454 \\ 2,9454 & 2,9454 & 39,272 & 0 & -2,9454 & 9,818 \\ -78,54 & 0 & 0 & 79,12908 & 0 & 2,9454 \\ 0 & -0,58908 & -2,9454 & 0 & 79,12908 & -2,9454 \\ 0 & 2,9454 & 9,818 & 2,9454 & -2,9454 & 39,272 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\,837 \\ 49,0055 \\ -751,389 \\ 11\,770,3 \\ -49,0055 \\ -574,961 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Çerçeve rijitlik matrisinin, tersi alınıp kuvvetler matrisi ile çarpıldığında 2 ve 3 noktalarında meydana gelen yer değiştirme ve dönme değerleri denklem (3.57) 'deki gibi elde edilmektedir.

Her bir eleman için denklem (3.58) kullanılarak eleman uç kuvvetleri elde edilmektedir.

$$f = k \times T \times d \quad (3.58)$$

k : Eleman Rijitlik Matrisi.

T : Dönüşüm Matrisi.

d : Düğüm noktalarındaki yer değiştirme ve dönme değerleri.

İlk olarak eleman 1 'in uç kuvvetleri için gereken matematiksel işlemler uygulanmaktadır. Öncelikle denklem (3.59) 'da verilmiş olan dönüşüm matrisi, denklem (3.60) 'daki gibi elde edilmiştir.

$$T = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

1. ve 2. düğüm noktalarındaki yer değiştirme ve dönme değerleri denklem (3.61) 'de yerlerine yazılmaktadır. 1 noktasında ankastre mesnet olduğu için, denklem (3.54) 'de verilen değerler alınmıştır.

$$d = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11\,837 \\ 49,0055 \\ -751,389 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Denklem (3.41) 'de elde edilen eleman rijitlik matrisi, denklem (3.60) 'da elde edilen dönüşüm matrisi ve denklem (3.61) 'de elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri çarpılarak eleman uç kuvvetleri denklem (3.63) 'deki gibi elde edilmektedir.

$$f = \begin{bmatrix} 0,58908 & 0 & -2,9454 & -0,58908 & 0 & -2,9454 \\ 0 & 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 \\ -2,9454 & 0 & 19,636 & 2,9454 & 0 & 9,818 \\ -0,58908 & 0 & 2,9454 & 0,58908 & 0 & 2,9454 \\ 0 & -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 \\ -2,9454 & 0 & 9,818 & 2,9454 & 0 & 19,636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11\,837 \\ 49,0055 \\ -751,389 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2184,27 \\ 929\,678 \\ -7232,8 \\ -2184,27 \\ -929\,678 \\ -14\,609,9 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

İkinci olarak eleman 2 'nin uç kuvvetleri için gereken matematiksel işlemler uygulanmaktadır. Öncelikle denklem (3.59) 'da verilmiş olan dönüşüm matrisi, denklem (3.64) 'deki gibi elde edilmiştir.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

2. ve 3. düğüm noktaları için denklem (3.57) 'de elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri denklem (3.65) 'de yerlerine yazılmaktadır.

$$d = \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 11\,837 \\ 49,0055 \\ -751,389 \\ 11\,770,3 \\ -49,0055 \\ -574,961 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Denklem (3.47) 'de elde edilen eleman rijitlik matrisi, denklem (3.64) 'de elde edilen dönüşüm matrisi ve denklem (3.65) 'de elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri çarpılarak eleman uç kuvvetleri denklem (3.67) 'deki gibi elde edilmektedir.

$$f = \begin{bmatrix} 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0,58908 & 2,9454 & 0 & -0,58908 & 2,9454 \\ 0 & 2,9454 & 19,636 & 0 & -2,9454 & 9,818 \\ -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 & 0 \\ 0 & -0,58908 & -2,9454 & 0 & 0,58908 & -2,9454 \\ 0 & 2,9454 & 9,818 & 0 & -2,9454 & 19,636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11\,837 \\ 49,0055 \\ -751,389 \\ 11\,770,3 \\ -49,0055 \\ -574,961 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5238,62 \\ -3848,89 \\ -20\,110,6 \\ -5238,62 \\ 3848,89 \\ -18\,378,4 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Son olarak eleman 3 'ün uç kuvvetleri için gereken matematiksel işlemler uygulanmaktadır. Öncelikle denklem (3.59) 'da verilmiş olan dönüşüm matrisi, denklem (3.68) 'deki gibi elde edilmiştir.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

3. ve 4. düğüm noktalarındaki yer değiştirme ve dönme değerleri denklem (3.69) 'da yerlerine yazılmaktadır. 4 noktasında ankastre mesnet olduğu için, denklem (3.54) 'de verilen değerler kullanılmıştır.

$$d = \begin{bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ \phi_3 \\ d_{4x} \\ d_{4y} \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 11\,770,3 \\ -49,0055 \\ -574,961 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Denklem (3.53) ‘de elde edilen eleman rijitlik matrisi, denklem (3.68) ‘de elde edilen dönüşüm matrisi ve denklem (3.69) ‘da elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri çarpılarak eleman uç kuvvetleri denklem (3.71) ‘deki gibi elde edilmektedir.

$$f = \begin{bmatrix} 0,58908 & 0 & 2,9454 & -0,58908 & 0 & 2,9454 \\ 0 & 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 \\ 2,9454 & 0 & 19,636 & -2,9454 & 0 & 9,818 \\ -0,58908 & 0 & -2,9454 & 0,58908 & 0 & -2,9454 \\ 0 & -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 \\ 2,9454 & 0 & 9,818 & -2,9454 & 0 & 19,636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11\,770,3 \\ -49,0055 \\ -574,961 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

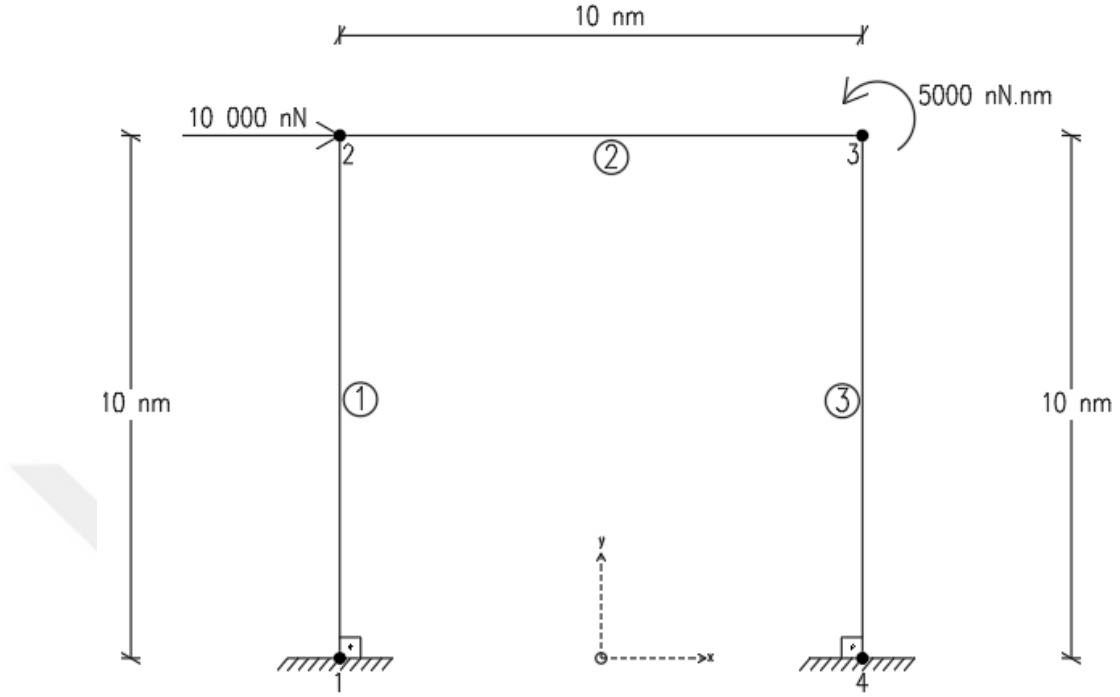
$$\begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1664,62 \\ 924\,439 \\ -11\,145,6 \\ 1664,62 \\ -924\,439 \\ -5500,63 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Denklem (3.57) ‘de 2 ve 3 noktası için elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri Çizelge 3.1 ‘de farklı açı değerleri için de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. Klasik gerilme çifti teorisine göre çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
$d_{2x}^{(1)}$	11 837	7418,76	4337,77	2312,240	1044,320	520,773	84,8824
$d_{2y}^{(1)}$	49,0055	-1929,60	-2436,78	-2229,26	-1694,05	-1269,02	-943,09
$\phi_2^{(1)}$	-751,389	-264,893	-44,1996	34,2584	38,4366	16,6704	-113,171
$d_{3x}^{(1)}$	11 770,3	7351,94	4270,610	2244,35	974,877	449,176	42,4412
$d_{3y}^{(1)}$	-49,0055	1910,00	2393,960	2152,90	1553,75	1028,71	-754,472
$\phi_3^{(1)}$	-574,961	-88,1747	133,5140	214,215	223,815	211,457	226,342

3.3 Bir Çerçeve Sistemin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisine Göre Statik Analizi



Şekil 3.4 Açılı değeri $\alpha = 90^\circ$ olan bir çerçeve sistem

Yukarıda verilmiş olan çerçeve sistemde, 1 ve 4 noktaları ankastre olarak mesnetlendirilmiştir. 2 noktasından 10 000 nN ‘luk yatay yönde tekil kuvvet ve 3 noktasından 5000 nN.nm ‘lik tekil moment etki etmektedir. Koordinat sistemi şekilde görüldüğü gibidir. Bu yüklemeler altında 2 ve 3 noktası için değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre matematiksel işlemler yapılacaktır. ($L=10$ nm, $A=0,7854$ nm², $I=0,04909$ nm⁴, $E=1000$ nN, $l=0,1$ nm)

İlk olarak eleman 1 için yapılan matematiksel işlemler aşağıda verilmiştir:

$$C = \cos 90^\circ = \frac{x_2 - x_1}{L^{(1)}} = \frac{(-5) - (-5)}{10} = 0 \quad (3.72)$$

$$S = \sin 90^\circ = \frac{y_2 - y_1}{L^{(1)}} = \frac{(10) - (0)}{10} = 1 \quad (3.73)$$

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10^2} = 5,8905 \times 10^{-3} \quad (3.74)$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10} = 0,02945 \quad (3.75)$$

$$\frac{E}{L} = \frac{1000}{10} = 100 \quad (3.76)$$

Eleman rijitlik matrisi denklem (3.77) 'de elde edildiği gibi, her eleman için aşağıda verildiği şekilde kullanılmaktadır.

$$k = \begin{bmatrix} \frac{AEC^2}{L} + \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S^2 & -C\left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S + \frac{AECs}{L} & -\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right)S & -\frac{AEC^2}{L} + \left(-\frac{12EI}{L^3} - \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S^2 & -C\left(-\frac{12EI}{L^3} - \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S - \frac{AECs}{L} & -\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right)S \\ -C\left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S + \frac{AECs}{L} & C^2\left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{12GAI^2}{L^3}\right) + \frac{AES^2}{L} & C\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right) & -C\left(-\frac{12EI}{L^3} - \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S - \frac{AECs}{L} & C^2\left(-\frac{12EI}{L^3} - \frac{12GAI^2}{L^3}\right) - \frac{AES^2}{L} & C\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right) \\ -\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right)S & C\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right) & \left(\frac{4EI}{L} + \frac{4GAI^2}{L}\right) & -\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right)S & C\left(-\frac{6EI}{L^2} - \frac{6GAI^2}{L^2}\right) & \left(\frac{2EI}{L} + \frac{2GAI^2}{L}\right) \\ -\frac{AEC^2}{L} + \left(-\frac{12EI}{L^3} - \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S^2 & -C\left(-\frac{12EI}{L^3} - \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S - \frac{AECs}{L} & -\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right)S & \frac{AEC^2}{L} + \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S^2 & -C\left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S + \frac{AECs}{L} & -\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right)S \\ -C\left(-\frac{12EI}{L^3} - \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S - \frac{AECs}{L} & C^2\left(-\frac{12EI}{L^3} - \frac{12GAI^2}{L^3}\right) - \frac{AES^2}{L} & C\left(-\frac{6EI}{L^2} - \frac{6GAI^2}{L^2}\right) & -C\left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{12GAI^2}{L^3}\right)S + \frac{AECs}{L} & C^2\left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{12GAI^2}{L^3}\right) + \frac{AES^2}{L} & C\left(-\frac{6EI}{L^2} - \frac{6GAI^2}{L^2}\right) \\ -\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right)S & C\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right) & \left(\frac{2EI}{L} + \frac{2GAI^2}{L}\right) & -\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6GAI^2}{L^2}\right)S & C\left(-\frac{6EI}{L^2} - \frac{6GAI^2}{L^2}\right) & \left(\frac{4EI}{L} + \frac{4GAI^2}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Gerekli matematiksel işlemler yapılarak eleman 1 için rijitlik matrisi denklem (3.78) 'deki gibi elde edilmiştir.

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,624247 & 0 & -3,12124 & -0,624247 & 0 & -3,12124 \\ 0 & 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 \\ -3,12124 & 0 & 20,8082 & 3,12124 & 0 & 10,4041 \\ -0,624247 & 0 & 3,12124 & 0,624247 & 0 & 3,12124 \\ 0 & -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 \\ -3,12124 & 0 & 10,4041 & 3,12124 & 0 & 20,8082 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

İkinci olarak, eleman 2 için yapılan matematiksel işlemler aşağıda verilmiştir:

$$C = \cos 90^\circ = \frac{x_3 - x_2}{L^{(2)}} = \frac{(5) - (-5)}{10} = 1 \quad (3.79)$$

$$S = \sin 90^\circ = \frac{y_3 - y_2}{L^{(2)}} = \frac{(10) - (10)}{10} = 0 \quad (3.80)$$

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10^2} = 5,8905 \times 10^{-3} \quad (3.81)$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10} = 0,02945 \quad (3.82)$$

$$\frac{E}{L} = \frac{1000}{10} = 100 \quad (3.83)$$

Eleman rijitlik matrisi denklem (3.77) 'de elde edildiği şekilde kullanılarak, gerekli matematiksel işlemler uygulanarak, eleman 2 için rijitlik matrisi denklem (3.84) 'deki gibi elde edilmiştir.

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0,624247 & 3,12124 & 0 & -0,624247 & 3,12124 \\ 0 & 3,12124 & 20,8082 & 0 & -3,12124 & 10,4041 \\ -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 & 0 \\ 0 & -0,624247 & -3,12124 & 0 & 0,624247 & -3,12124 \\ 0 & 3,12124 & 10,4041 & 0 & -3,12124 & 20,8082 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Son olarak, eleman 3 için yapılan matematiksel işlemler aşağıda verilmiştir:

$$C = \cos 90^\circ = \frac{x_4 - x_3}{L^{(3)}} = \frac{(5) - (5)}{10} = 0 \quad (3.85)$$

$$S = \sin 90^\circ = \frac{y_4 - y_3}{L^{(3)}} = \frac{(0) - (10)}{10} = -1 \quad (3.86)$$

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10^2} = 5,8905 \times 10^{-3} \quad (3.87)$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6\left(\frac{\pi}{64}\right)}{10} = 0,02945 \quad (3.88)$$

$$\frac{E}{L} = \frac{1000}{10} = 100 \quad (3.89)$$

Eleman rijitlik matrisi denklem (3.77) 'de elde edildiği şekilde kullanılarak, gerekli matematiksel işlemler uygulanarak, eleman 3 için rijitlik matrisi denklem (3.90) 'daki gibi elde edilmiştir.

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,624247 & 0 & 3,12124 & -0,624247 & 0 & 3,12124 \\ 0 & 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 \\ 3,12124 & 0 & 20,8082 & -3,12124 & 0 & 10,4041 \\ -0,624247 & 0 & -3,12124 & 0,624247 & 0 & -3,12124 \\ 0 & -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 \\ 3,12124 & 0 & 10,4041 & -3,12124 & 0 & 20,8082 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Çerçeve sistemin 1 ve 4 noktalarında ankastre mesnet bulunduğu için x ve y yönündeki yer değiştirme değerleri ve dönme değerleri denklem (3.54) 'de de verildiği gibi sıfırdır.

$$d_{1x} = d_{1y} = d_{4x} = d_{4y} = \phi_1 = \phi_4 = 0 \quad (3.91)$$

Denklem (3.78), (3.84) ve (3.90) 'da elde edilen eleman rijitlik matrislerinin birleştirilmesiyle aşağıda bulunan çerçeve rijitlik matrisi denklem (3.92) 'deki gibi elde edilmektedir.

$$K = \begin{bmatrix} 79,16425 & 0 & 3,12124 & -78,54 & 0 & 0 \\ 0 & 79,16425 & 3,12124 & 0 & -0,62425 & 3,12124 \\ 3,12124 & 3,12124 & 41,6164 & 0 & -3,12124 & 10,4041 \\ -78,54 & 0 & 0 & 79,16425 & 0 & 3,12124 \\ 0 & -0,62425 & -3,12124 & 0 & 79,16425 & -3,12124 \\ 0 & 3,12124 & 10,4041 & 3,12124 & -3,12124 & 41,6164 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Gerekli matematiksel işlemler uygulanarak, 2 ve 3 noktalarındaki yer değiştirme ve dönme değerleri elde edilmektedir.

$$\begin{bmatrix} 10\ 000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79,16425 & 0 & 3,12124 & -78,54 & 0 & 0 \\ 0 & 79,16425 & 3,12124 & 0 & -0,62425 & 3,12124 \\ 3,12124 & 3,12124 & 41,6164 & 0 & -3,12124 & 10,4041 \\ -78,54 & 0 & 0 & 79,16425 & 0 & 3,12124 \\ 0 & -0,62425 & -3,12124 & 0 & 79,16425 & -3,12124 \\ 0 & 3,12124 & 10,4041 & 3,12124 & -3,12124 & 41,6164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$\begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\ 174,4 \\ 48,9993 \\ -709,718 \\ 11\ 107,7 \\ -48,9993 \\ -542,854 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Çerçeve rijitlik matrisinin, tersi alınıp kuvvetler matrisi ile çarpıldığında 2 ve 3 noktalarında meydana gelen yer değiştirme ve dönme değerleri denklem (3.94) ‘deki gibi elde edilmektedir.

Her bir eleman için denklem (3.95) kullanılarak eleman uç kuvvetleri elde edilmektedir.

$$f = k \times T \times d \quad (3.95)$$

İlk olarak eleman 1 ‘in uç kuvvetleri için gereken matematiksel işlemler uygulanmaktadır. Öncelikle denklem (3.59) ‘da verilmiş olan dönüşüm matrisi, denklem (3.96) ‘daki gibi elde edilmiştir.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

1. ve 2. düğüm noktalarındaki yer değiştirme ve dönme değerleri denklem (3.97) ‘de yerlerine yazılmaktadır. 1 noktasında ankastre mesnet olduğu için, denklem (3.91) ‘de verilen değerler alınmıştır.

$$d = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11\,174,4 \\ 48,9993 \\ -709,718 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Denklem (3.78) ‘de elde edilen eleman rijitlik matrisi, denklem (3.96) ‘da elde edilen dönüşüm matrisi ve denklem (3.97) ‘de elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri çarpılarak eleman uç kuvvetleri denklem (3.98) ‘deki gibi elde edilmektedir.

$$f = \begin{bmatrix} 0,624247 & 0 & -3,12124 & -0,624247 & 0 & -3,12124 \\ 0 & 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 \\ -3,12124 & 0 & 20,8082 & 3,12124 & 0 & 10,4041 \\ -0,624247 & 0 & 3,12124 & 0,624247 & 0 & 3,12124 \\ 0 & -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 \\ -3,12124 & 0 & 10,4041 & 3,12124 & 0 & 20,8082 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11\,174,4 \\ 48,9993 \\ -709,718 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2184,61 \\ 877\,637 \\ -7231,05 \\ -2184,61 \\ -877\,637 \\ -14\,615 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

İkinci olarak eleman 2 'nin uç kuvvetleri için gereken matematiksel işlemler uygulanmaktadır. Öncelikle denklem (3.59) 'da verilmiş olan dönüşüm matrisi, denklem (3.100) 'deki gibi elde edilmiştir.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

2. ve 3. düğüm noktaları için denklem (3.57) 'de elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri denklem (3.101) 'de yerlerine yazılmaktadır.

$$d = \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 11\,174,4 \\ 48,9993 \\ -709,718 \\ 11\,107,7 \\ -48,9993 \\ -542,854 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Denklem (3.84) 'de elde edilen eleman rijitlik matrisi, denklem (3.100) 'de elde edilen dönüşüm matrisi ve denklem (3.101) 'de elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri çarpılarak eleman uç kuvvetleri denklem (3.102) 'de ki gibi elde edilmektedir.

$$f = \begin{bmatrix} 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0,624247 & 3,12124 & 0 & -0,624247 & 3,12124 \\ 0 & 3,12124 & 20,8082 & 0 & -3,12124 & 10,4041 \\ -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 & 0 \\ 0 & -0,624247 & -3,12124 & 0 & 0,624247 & -3,12124 \\ 0 & 3,12124 & 10,4041 & 0 & -3,12124 & 20,8082 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11\,174,4 \\ 48,9993 \\ -709,718 \\ 11\,107,7 \\ -48,9993 \\ -542,854 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$\begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5238,62 \\ -3848,4 \\ -20\,110 \\ -5238,62 \\ 3848,4 \\ -18\,373,9 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Son olarak eleman 3 'ün uç kuvvetleri için gereken matematiksel işlemler uygulanmaktadır. Öncelikle denklem (3.59) 'da verilmiş olan dönüşüm matrisi, denklem (3.104) 'deki gibi elde edilmiştir.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

3. ve 4. düğüm noktalarındaki yer değiştirme ve dönme değerleri denklem (3.105) 'de yerlerine yazılmaktadır. 4 noktasında ankastre mesnet olduğu için, denklem (3.91) 'de verilen değerler alınmıştır.

$$d = \begin{bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ \phi_3 \\ d_{4x} \\ d_{4y} \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 11\,107,7 \\ -48,9993 \\ -542,854 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Denklem (3.90) 'da elde edilen eleman rijitlik matrisi, denklem (3.104) 'de elde edilen dönüşüm matrisi ve denklem (3.105) 'de elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri çarpılarak eleman uç kuvvetleri denklem (3.106) 'daki gibi elde edilmektedir.

$$f = \begin{bmatrix} 0,624247 & 0 & 3,12124 & -0,624247 & 0 & 3,12124 \\ 0 & 78,54 & 0 & 0 & -78,54 & 0 \\ 3,12124 & 0 & 20,8082 & -3,12124 & 0 & 10,4041 \\ -0,624247 & 0 & -3,12124 & 0,624247 & 0 & -3,12124 \\ 0 & -78,54 & 0 & 0 & 78,54 & 0 \\ 3,12124 & 0 & 10,4041 & -3,12124 & 0 & 20,8082 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11\,107,7 \\ -48,9993 \\ -542,854 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

$$\begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1663,79 \\ 872\,399 \\ -11\,142,9 \\ 1663,79 \\ -872\,399 \\ -5494,98 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Denklem (3.97) 'de 2 ve 3 noktası için elde edilen yer değiştirme ve dönme değerleri Çizelge 3.2 'de farklı açı değerleri için de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.1$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
$d_{2x}^{(2)}$	11 174,4	7005,74	4098,69	2187,32	990,957	496,955	84,8824
$d_{2y}^{(2)}$	48,9993	-1818,93	-2298,75	-2104,32	-1601,56	-1203,37	-889,975
$\phi_2^{(2)}$	-709,718	-250,605	-42,2854	31,7832	35,6719	14,9467	-106,797
$d_{3x}^{(2)}$	11 107,7	6938,93	4031,54	2119,44	921,549	425,437	42,4412
$d_{3y}^{(2)}$	-48,9993	1799,34	2255,95	2028,02	1461,44	963,701	-711,983
$\phi_3^{(2)}$	-542,854	-83,451	125,864	202,172	211,471	200,107	213,593

Denklem (3.77) de bulunan malzeme parametresi $l=0.3$ olarak değiştirilerek işlemler tekrar edilmiş ve Çizelge 3.3 de farklı açılar için gösterilen yer değiştirme ve dönme değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 3.3. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.3$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
$d_{2x}^{(2)}$	7726,28	4856,85	2854,53	1537,59	713,217	372,909	84,8824
$d_{2y}^{(2)}$	48,9497	-1243,16	-1580,42	-1454,48	-1120,04	-860,879	-613,475
$\phi_2^{(2)}$	-492,869	-176,257	-32,3226	18,9218	21,3067	6,05856	-73,6173
$d_{3x}^{(2)}$	7659,62	4790,1	2787,46	1469,84	644,081	302,003	42,4412
$d_{3y}^{(2)}$	-48,9497	1223,62	1537,75	1378,56	981,324	626,26	-490,78
$\phi_3^{(2)}$	-375,778	-59,8771	86,0452	139,507	147,203	140,957	147,235

Denklem (3.77) de bulunan malzeme parametresi $l=0.5$ olarak değiştirilerek işlemler tekrar edilmiş ve Çizelge 3.4 de farklı açılar için gösterilen yer değiştirme ve dönme değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 3.4. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.5$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
$d_{2x}^{(2)}$	4794,04	3029,3	1796,38	984,933	476,867	267,121	84,8824
$d_{2y}^{(2)}$	48,8495	-753,51	-969,451	-901,606	-709,767	-567,071	-378,377
$\phi_2^{(2)}$	-308,456	-113,021	-23,8399	8,00428	9,16495	-1,24129	-45,4054
$d_{3x}^{(2)}$	4727,5	2962,68	1729,47	917,436	408,26	197,369	42,4412
$d_{3y}^{(2)}$	-48,8495	734,073	927,069	826,44	573,806	341,963	-302,702
$\phi_3^{(2)}$	-233,695	-37,9749	52,1818	86,2001	92,478	90,4056	90,8107

Denklem (3.77) de bulunan malzeme parametresi $l=0.7$ olarak değiştirilerek işlemler tekrar edilmiş ve Çizelge 3.5 de farklı açılar için gösterilen yer değiştirme ve dönme değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 3.5. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.7$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
$d_{2x}^{(2)}$	3071,35	1955,62	1174,72	660,162	337,799	204,518	84,8824
$d_{2y}^{(2)}$	48,7002	-465,879	-610,47	-576,511	-467,603	-390,762	-240,261
$\phi_2^{(2)}$	-200,101	-75,8594	-18,8402	1,62443	2,14581	-5,16744	-28,8313
$d_{3x}^{(2)}$	3004,99	1889,19	1108,05	593,037	269,953	136,341	42,4412
$d_{3y}^{(2)}$	-48,7002	446,596	568,507	502,462	335,596	178,636	-192,208
$\phi_3^{(2)}$	-150,217	-25,696	32,2791	54,8544	60,2179	60,3451	57,6629

Denklem (3.77) de bulunan malzeme parametresi $l=0.9$ olarak değiştirilerek işlemler tekrar edilmiş ve Çizelge 3.6 de farklı açılar için gösterilen yer değiştirme ve dönme değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 3.6. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=0.9$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
$d_{2x}^{(2)}$	2090,15	1344,01	820,524	475,04	258,325	168,387	84,8824
$d_{2y}^{(2)}$	48,5042	-302,077	-405,892	-390,969	-328,33	-286,427	-161,612
$\phi_2^{(2)}$	-138,37	-54,6753	-15,9715	-1,96845	-1,7199	-7,01633	-19,3934
$d_{3x}^{(2)}$	2024,03	1277,84	754,174	408,4	191,437	102,062	42,4412
$d_{3y}^{(2)}$	-48,5042	282,997	364,482	318,373	201,297	89,5689	-129,289
$\phi_3^{(2)}$	-102,668	-18,6992	20,9351	36,9671	41,716	42,8407	38,7868

Denklem (3.77) de bulunan malzeme parametresi $l=1.1$ olarak değiştirilerek işlemler tekrar edilmiş ve Çizelge 3.7 de farklı açılar için gösterilen yer değiştirme ve dönme değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 3.7. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre malzeme parametresi $l=1.1$ için çerçeve sistemin farklı açılardaki yer değiştirme ve dönme değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
$d_{2x}^{(2)}$	1504,53	978,945	609,027	364,412	210,622	146,379	84,8824
$d_{2y}^{(2)}$	48,2599	-204,356	-283,683	-279,833	-243,825	-220,518	-114,682
$\phi_2^{(2)}$	-101,508	-42,0144	-14,2369	-4,06771	-3,89061	-7,76068	-13,7618
$d_{3x}^{(2)}$	1438,7	913,081	543,07	298,359	144,847	82,0466	42,4412
$d_{3y}^{(2)}$	-48,2599	185,528	242,952	208,998	122,577	40,0817	-91,7454
$\phi_3^{(2)}$	-74,2823	-14,5223	14,1545	26,2545	30,5414	32,0377	27,5236

$\alpha = 90^\circ$ ve $l=0.1$ için denklem (3.57) ve denklem (3.94) de elde edilen değerler oranı Çizelge 3.8 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.8. Malzeme parametresi $l=0.1$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,944023	0,944328	0,944884	0,945974	0,948902	0,954264	1,000000
β_2	0,999873	0,942646	0,943356	0,943954	0,945403	0,948267	0,943680
γ_2	0,944541	0,946061	0,956692	0,927749	0,928071	0,896601	0,943678
α_3	0,943706	0,943823	0,944020	0,944345	0,945298	0,947150	1,000000
β_3	0,999873	0,942063	0,942351	0,941995	0,940589	0,936805	0,943684
γ_3	0,944158	0,946428	0,942703	0,943781	0,944847	0,946325	0,943674

Farklı açı değerleri ve $l=0.3$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.9 da gösterilmiştir.

Çizelge 3.9. Malzeme parametresi $l=0.3$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,652723	0,654671	0,658064	0,664979	0,682949	0,716068	1,000000
β_2	0,998861	0,644258	0,648569	0,652450	0,661161	0,678381	0,650495
γ_2	0,655944	0,665389	0,731287	0,552326	0,554334	0,363432	0,650496
α_3	0,650758	0,651542	0,652708	0,654907	0,660679	0,672349	1,000000
β_3	0,998861	0,640639	0,642346	0,640327	0,631584	0,608782	0,650495
γ_3	0,653571	0,667732	0,644466	0,651248	0,657699	0,666599	0,650498

Farklı açı değerleri ve $l=0.5$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.10 da gösterilmiştir.

Çizelge 3.10. Malzeme parametresi $l=0.5$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,405005	0,408330	0,414125	0,425965	0,456629	0,512923	1,000000
β_2	0,996817	0,390501	0,397841	0,404442	0,418976	0,446857	0,401210
γ_2	0,410514	0,426667	0,539369	0,233644	0,238443	-0,07446	0,401211
α_3	0,401647	0,102979	0,404970	0,408776	0,418781	0,439402	1,000000
β_3	0,996817	0,384331	0,387253	0,383873	0,369304	0,332419	0,401210
γ_3	0,406454	0,430678	0,390834	0,402400	0,413189	0,427537	0,401210

Farklı açı değerleri ve $l=0.7$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.11 da gösterilmiştir.

Çizelge 3.11. Malzeme parametresi $l=0.7$ için; $DG\dot{C}T / KG\dot{C}T$ değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$
α_2	0,259470	0,263605	0,270812	0,285508	0,323463	0,392720	1,000000
β_2	0,993770	0,241438	0,250523	0,258611	0,276027	0,307924	0,254759
γ_2	0,266308	0,286378	0,426253	0,047417	0,055827	-0,30997	0,254759
α_3	0,255303	0,256965	0,259459	0,264236	0,276910	0,303536	1,000000
β_3	0,993770	0,233820	0,237476	0,233388	0,215991	0,173650	0,254758
γ_3	0,261265	0,291421	0,241766	0,256072	0,269052	0,285378	0,254760

Farklı açı değerleri ve $l=0.9$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.12 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.12. Malzeme parametresi $l=0.9$ için; $DG\dot{C}T / KG\dot{C}T$ değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$	$\frac{DG\dot{C}T}{KG\dot{C}T}$
α_2	0,176578	0,181164	0,189158	0,205446	0,247362	0,323340	1,000000
β_2	0,989771	0,156549	0,166569	0,175381	0,193814	0,225707	0,171364
γ_2	0,184152	0,206405	0,361349	-0,05746	-0,04475	-0,42089	0,141364
α_3	0,171961	0,173810	0,176596	0,181968	0,196370	0,227221	1,000000
β_3	0,989771	0,148166	0,152251	0,147881	0,129556	0,087069	0,171364
γ_3	0,178565	0,212070	0,156801	0,172570	0,186386	0,202598	0,171364

Farklı açı değerleri ve $l=1.1$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.13 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.13. Malzeme parametresi $l=1.1$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Açı	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,127104	0,131955	0,140401	0,157601	0,201683	0,281080	1,000000
β_2	0,984785	0,105906	0,116417	0,125527	0,143930	0,173770	0,121602
γ_2	0,135094	0,158609	0,322105	-0,11874	-0,10122	-0,46554	0,121602
α_3	0,122231	0,124196	0,127165	0,132938	0,148580	0,182660	1,000000
β_3	0,984785	0,097135	0,101485	0,097077	0,078891	0,038963	0,121602
γ_3	0,129195	0,164699	0,106015	0,122561	0,136458	0,151509	0,121602

Farklı malzeme parametre değerleri ve $\alpha = 90^\circ$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.14 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.14. Açı değeri $\alpha = 90^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Malzeme Parametresi	$l = 0.1$	$l = 0.3$	$l = 0.5$	$l = 0.7$	$l = 0.9$	$l = 1.1$
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,944023	0,652723	0,405005	0,259470	0,176578	0,127104
β_2	0,999873	0,998861	0,996817	0,993770	0,989771	0,984785
γ_2	0,944541	0,655944	0,410514	0,266308	0,184152	0,135094
α_3	0,943706	0,650758	0,401647	0,255303	0,171961	0,122231
β_3	0,999873	0,998861	0,996817	0,993770	0,989771	0,984785
γ_3	0,944158	0,653571	0,406454	0,261265	0,178565	0,129195

Farklı malzeme parametre değerleri ve $\alpha = 75^\circ$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.15 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.15. Açı değeri $\alpha = 75^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Malzeme Parametresi	$l = 0.1$	$l = 0.3$	$l = 0.5$	$l = 0.7$	$l = 0.9$	$l = 1.1$
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,944328	0,654671	0,408330	0,263605	0,181164	0,131955
β_2	0,942646	0,644258	0,390501	0,241438	0,156549	0,105906
γ_2	0,946061	0,665389	0,426667	0,286378	0,206405	0,158609
α_3	0,943823	0,651542	0,402979	0,256965	0,173810	0,124196
β_3	0,942063	0,640639	0,384331	0,233820	0,148166	0,097135
γ_3	0,946428	0,667732	0,430678	0,291421	0,212070	0,164699

Farklı malzeme parametre değerleri ve $\alpha = 60^\circ$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.16 da gösterilmiştir.

Çizelge 3.16. Açı değeri $\alpha = 60^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Malzeme Parametresi	$l = 0.1$	$l = 0.3$	$l = 0.5$	$l = 0.7$	$l = 0.9$	$l = 1.1$
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,944884	0,658064	0,414125	0,270812	0,189158	0,140401
β_2	0,943356	0,648569	0,397841	0,250523	0,166569	0,116417
γ_2	0,956692	0,731287	0,539369	0,426253	0,361349	0,322105
α_3	0,944020	0,652708	0,404970	0,259459	0,176596	0,127165
β_3	0,942351	0,642346	0,387253	0,237476	0,152251	0,101485
γ_3	0,942703	0,644466	0,390834	0,241766	0,156801	0,106015

Farklı malzeme parametre değerleri ve $\alpha = 45^\circ$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.17 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.17. Açı değeri $\alpha = 45^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Malzeme Parametresi	$l = 0.1$	$l = 0.3$	$l = 0.5$	$l = 0.7$	$l = 0.9$	$l = 1.1$
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,945974	0,664979	0,425965	0,285508	0,205446	0,157601
β_2	0,943954	0,652450	0,404442	0,258611	0,175381	0,125527
γ_2	0,927749	0,552326	0,233644	0,047417	-0,05746	-0,11874
α_3	0,944345	0,654907	0,408776	0,264236	0,181968	0,132938
β_3	0,941995	0,640327	0,383873	0,233388	0,147881	0,097077
γ_3	0,943781	0,651248	0,402400	0,256072	0,172570	0,122561

Farklı malzeme parametre değerleri ve $\alpha = 30^\circ$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.18 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.18. Açı değeri $\alpha = 30^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Malzeme Parametresi	$l = 0.1$	$l = 0.3$	$l = 0.5$	$l = 0.7$	$l = 0.9$	$l = 1.1$
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,948902	0,682949	0,456629	0,323463	0,247362	0,201683
β_2	0,945403	0,661161	0,418976	0,276027	0,193814	0,143930
γ_2	0,928071	0,554334	0,238443	0,055827	-0,04475	-0,10122
α_3	0,945298	0,660679	0,418781	0,276910	0,196370	0,148580
β_3	0,940589	0,631584	0,369304	0,215991	0,129556	0,078891
γ_3	0,944847	0,657699	0,413189	0,269052	0,186386	0,136458

Farklı malzeme parametre değerleri ve $\alpha = 20^\circ$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.19 da gösterilmiştir.

Çizelge 3.19. Açı değeri $\alpha = 20^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

Malzeme Parametresi	$l = 0.1$	$l = 0.3$	$l = 0.5$	$l = 0.7$	$l = 0.9$	$l = 1.1$
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	0,954264	0,716068	0,512932	0,392720	0,323340	0,281080
β_2	0,948267	0,678381	0,446857	0,307924	0,225707	0,173770
γ_2	0,896601	0,363432	-0,07446	-0,30998	-0,42089	-0,46554
α_3	0,947150	0,672349	0,439402	0,303536	0,227221	0,182660
β_3	0,936805	0,608782	0,332419	0,173650	0,087069	0,038963
γ_3	0,946325	0,666599	0,427537	0,285378	0,202598	0,151509

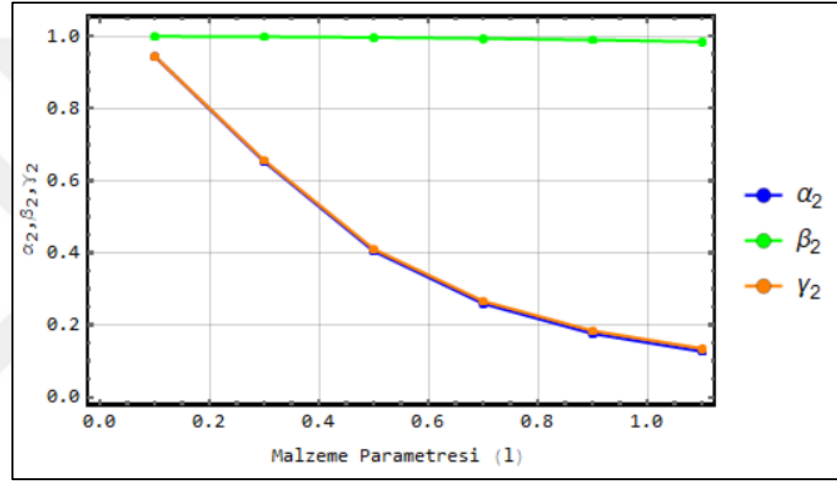
Farklı malzeme parametre değerleri ve $\alpha = 0^\circ$ için yer değiştirme ve dönme değerleri oranı Çizelge 3.20 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.20. Açı değeri $\alpha = 0^\circ$ için; DGÇT / KGÇT değerleri

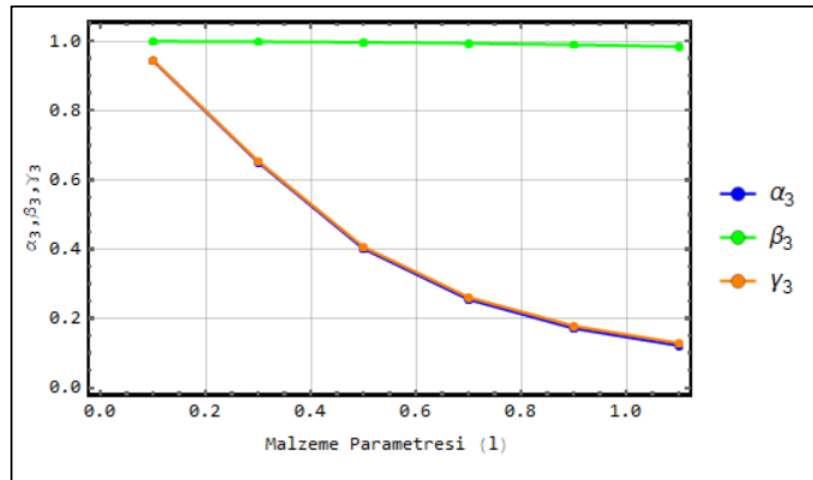
Malzeme Parametresi	$l = 0.1$	$l = 0.3$	$l = 0.5$	$l = 0.7$	$l = 0.9$	$l = 1.1$
	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$	$\frac{DGÇT}{KGÇT}$
α_2	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
β_2	0,943680	0,650495	0,401210	0,254759	0,171364	0,121602
γ_2	0,943678	0,650496	0,401211	0,254759	0,141364	0,121602
α_3	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
β_3	0,943684	0,650495	0,401210	0,254758	0,171364	0,121602
γ_3	0,943674	0,650498	0,401210	0,254760	0,171364	0,121602

4. BULGULAR

Bir çerçeve sistem, klasik ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre çözümlenmiştir. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisi sonucunda elde edilen değerler, klasik gerilme çifti teorisi sonucunda elde edilen değerlere bölünerek, α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri elde edilmiştir. Elde edilen bu değerler, öncelikle malzeme parametreleri sabit alınarak farklı açı durumlarındaki değişimleri incelenmiş, daha sonra açı değerleri sabit alınarak farklı malzeme parametreleri arasındaki değişim incelenmiştir. Bu değişimler aşağıdaki şekillerde incelenmektedir.

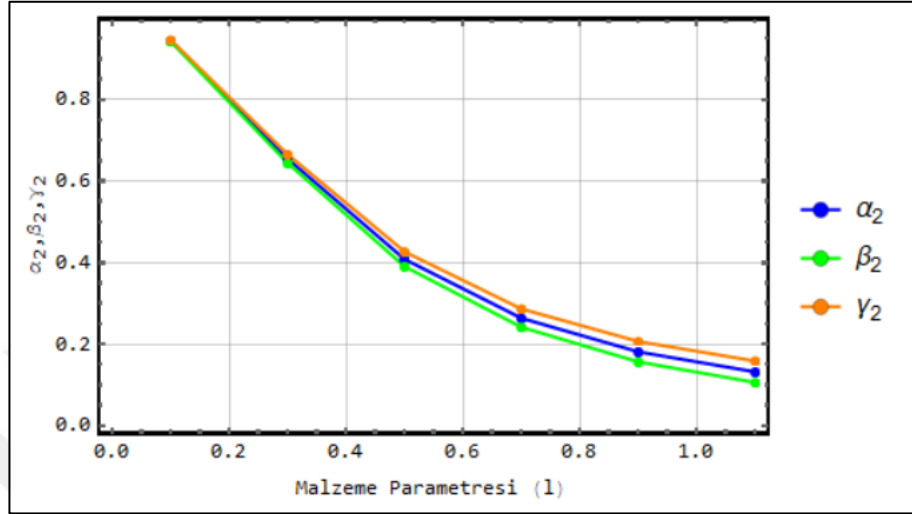


Şekil 4.1. Açı değeri $\alpha=90^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.

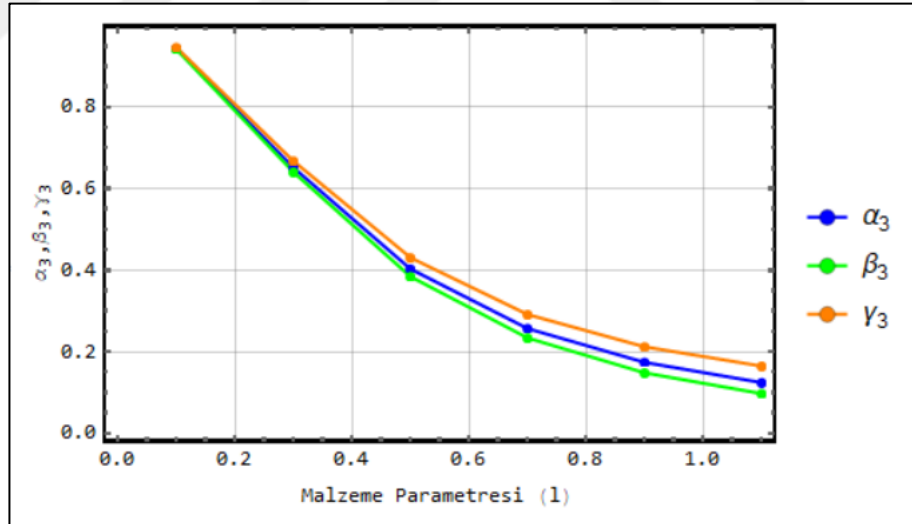


Şekil 4.2. Açı değeri $\alpha=90^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.14 te elde edilen değerler Şekil 4.1 ve 4.2 de görülmektedir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de de görüldüğü üzere malzeme parametresi arttıkça α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri azalmaktadır.

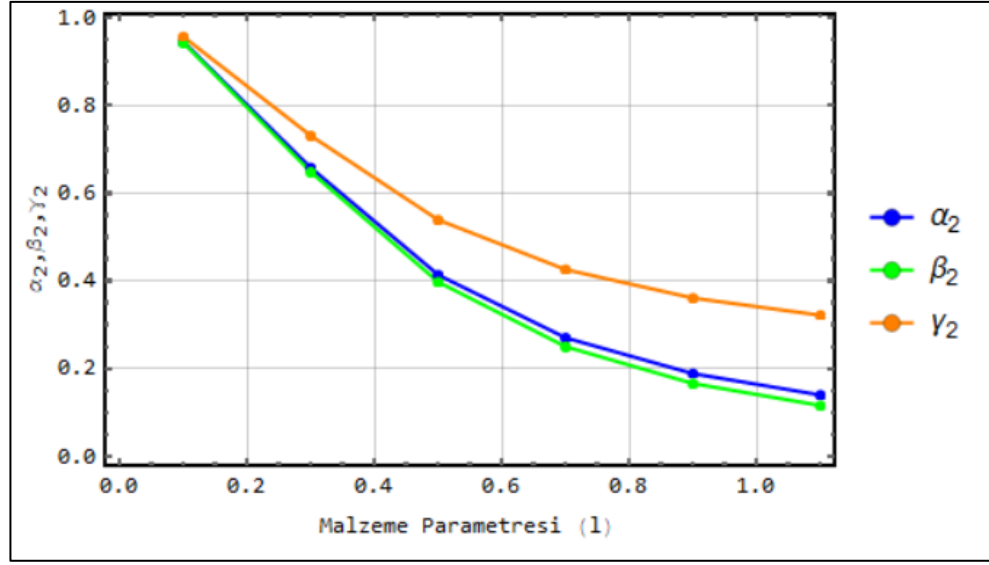


Şekil 4.3. Açı değeri $\alpha=75^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.

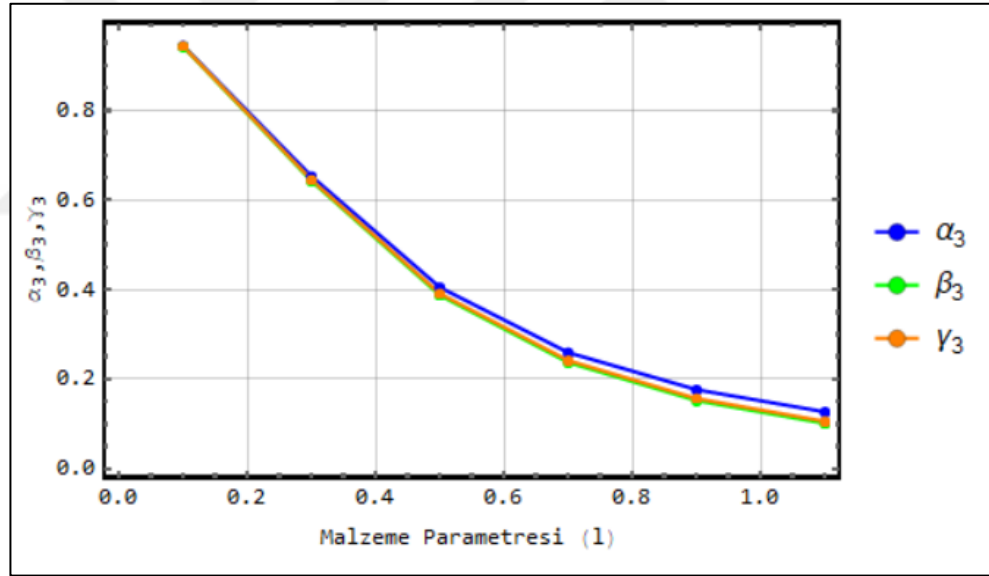


Şekil 4.4. Açı değeri $\alpha=75^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.15 te elde edilen değerler Şekil 4.3 ve 4.4 de görülmektedir. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de de görüldüğü üzere malzeme parametresi arttıkça α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri azalmaktadır.

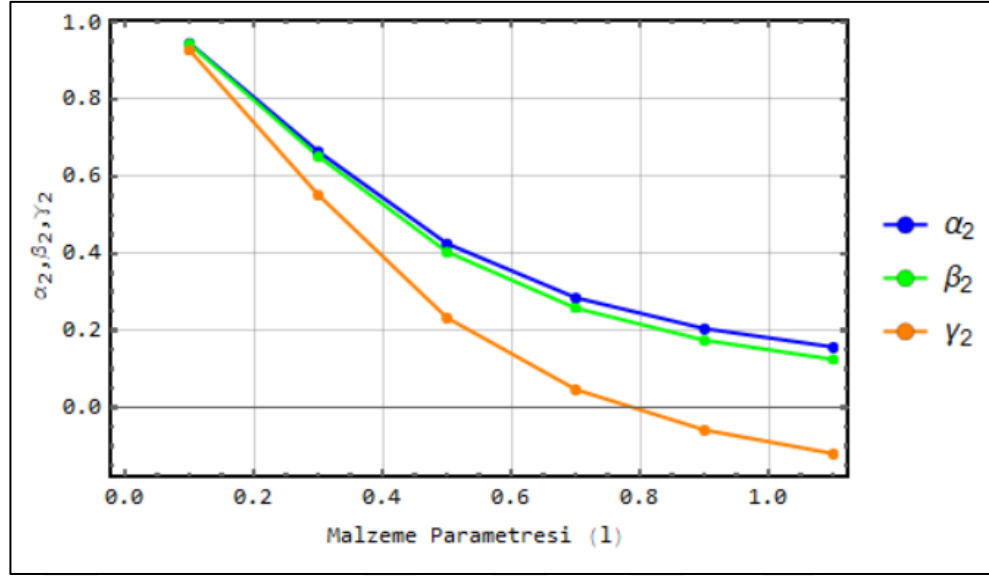


Şekil 4.5. Açı değeri $\alpha=60^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.

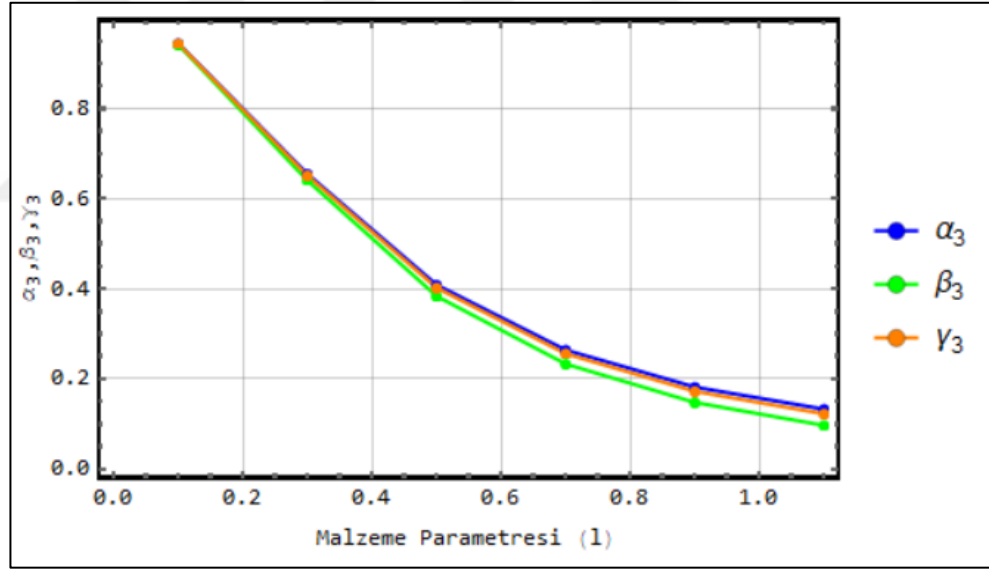


Şekil 4.6. Açı değeri $\alpha=60^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.16 da elde edilen değerler Şekil 4.5 ve 4.6 da görülmektedir. Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 da da görüldüğü üzere malzeme parametresi arttıkça α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri azalmaktadır. 3 noktası için çıkan sonuçlar birbirine çok yakındır.

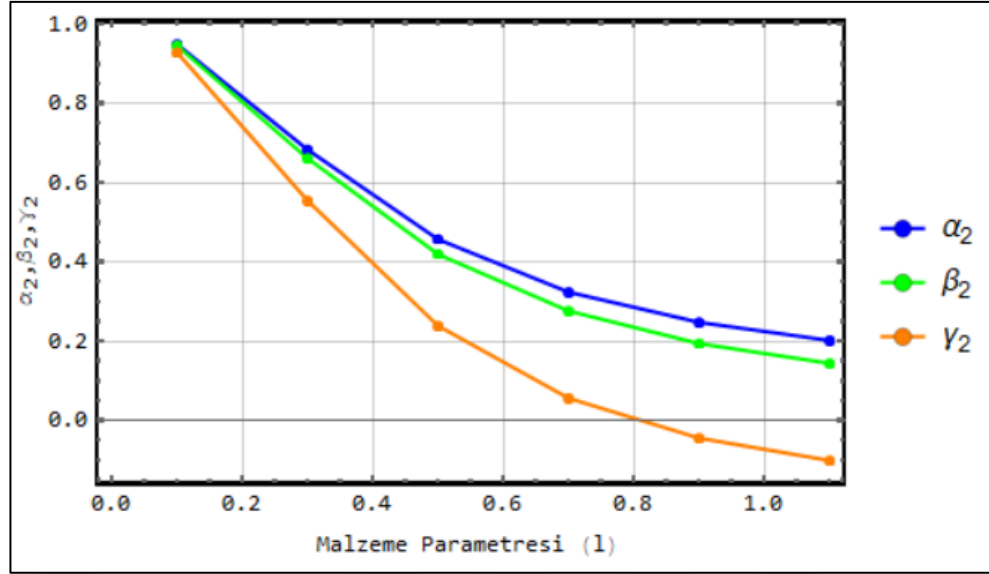


Şekil 4.7. Açı değeri $\alpha=45^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.

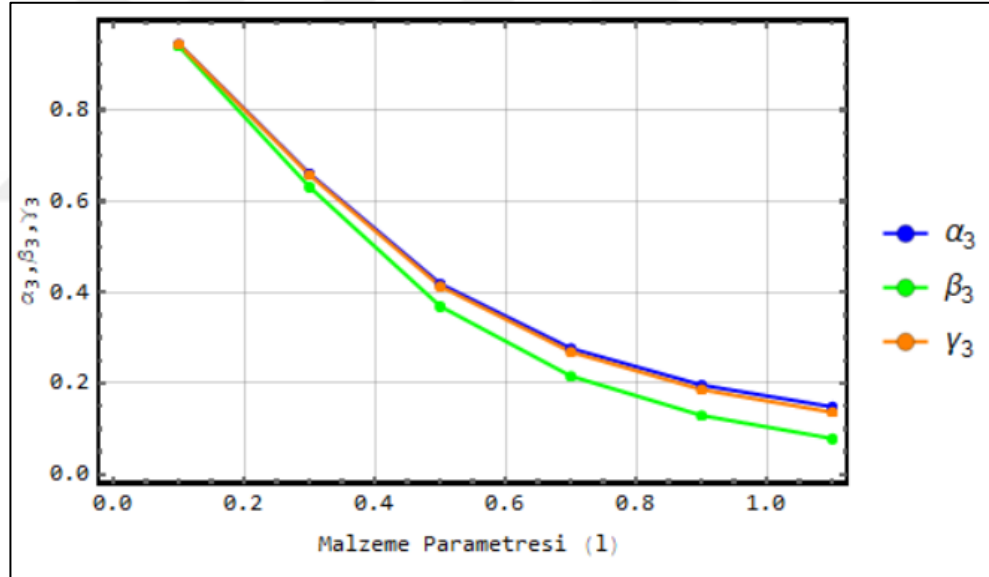


Şekil 4.8. Açı değeri $\alpha=45^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.17 de elde edilen değerler Şekil 4.7 ve 4.8 de görülmektedir. Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 de de görüldüğü üzere malzeme parametresi arttıkça α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri azalmaktadır. 3 noktası için çıkan sonuçlar birbirine çok yakındır.

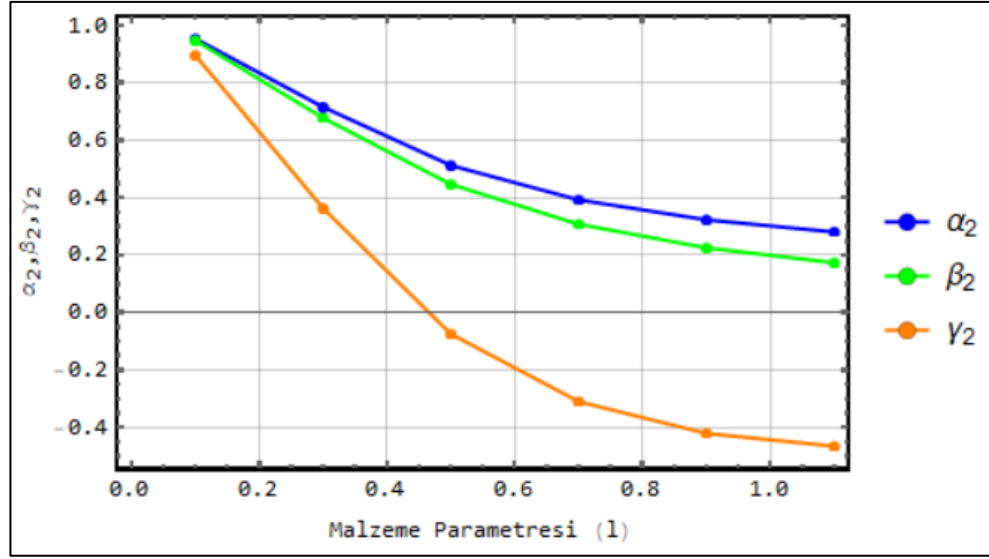


Şekil 4.9. Açı değeri $\alpha=30^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.

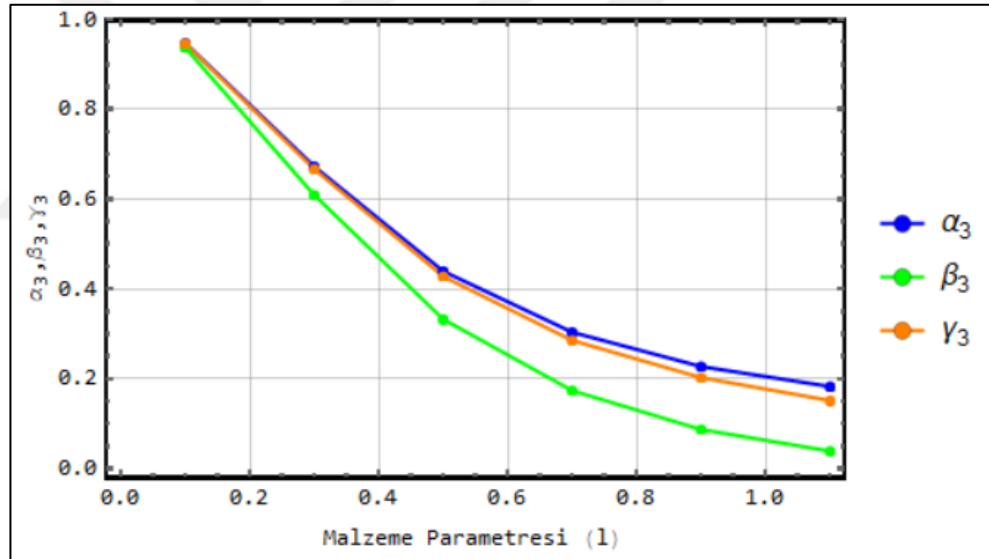


Şekil 4.10. Açı değeri $\alpha=30^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.18 de elde edilen değerler Şekil 4.9 ve 4.10 da görülmektedir. Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 da da görüldüğü üzere malzeme parametresi arttıkça α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri azalmaktadır.

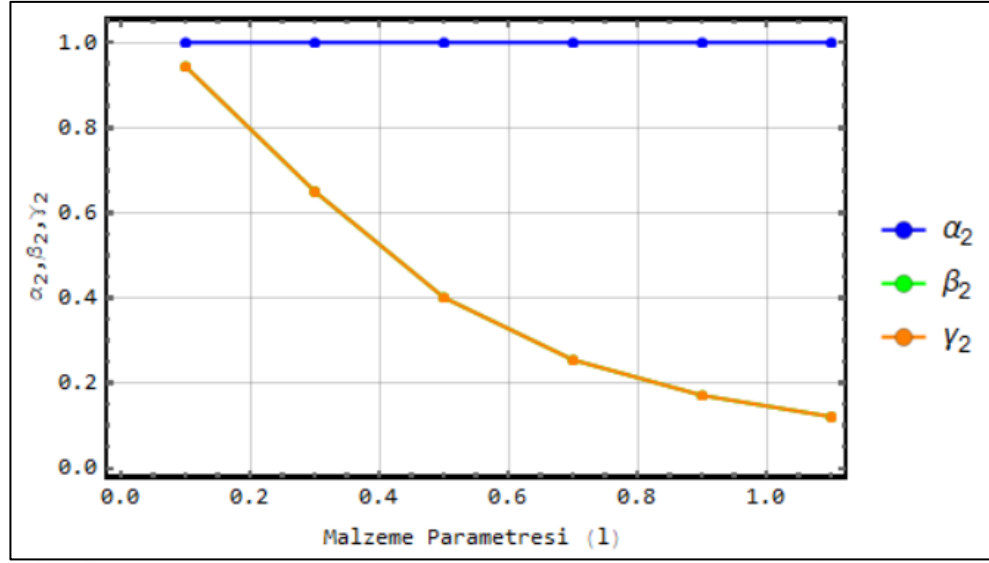


Şekil 4.11. Açı değeri $\alpha=20^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.

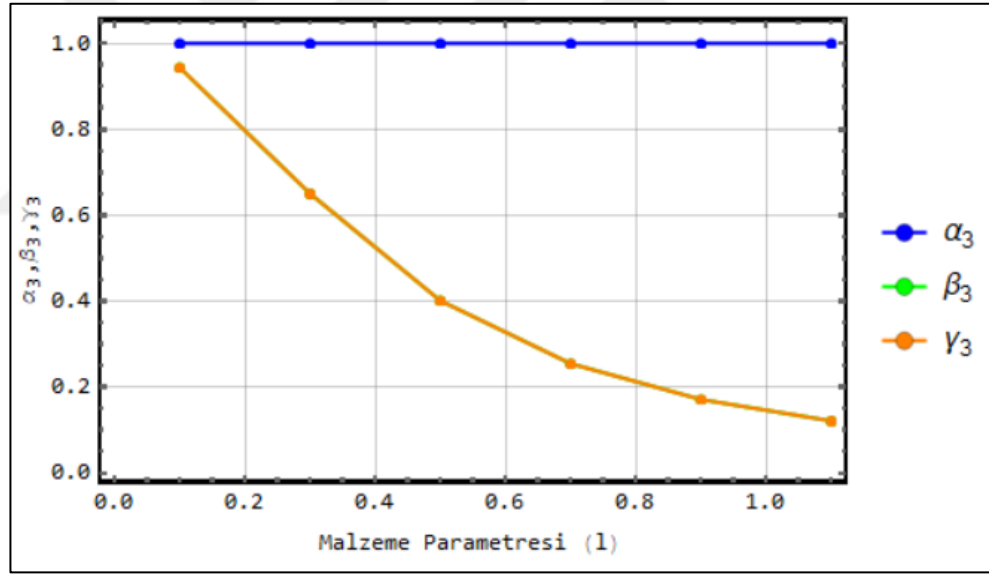


Şekil 4.12. Açı değeri $\alpha=20^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.19 da elde edilen değerler Şekil 4.11 ve 4.12 de görülmektedir. Şekil 4.11 ve Şekil 4.12 de de görüldüğü üzere malzeme parametresi arttıkça α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri azalmaktadır.

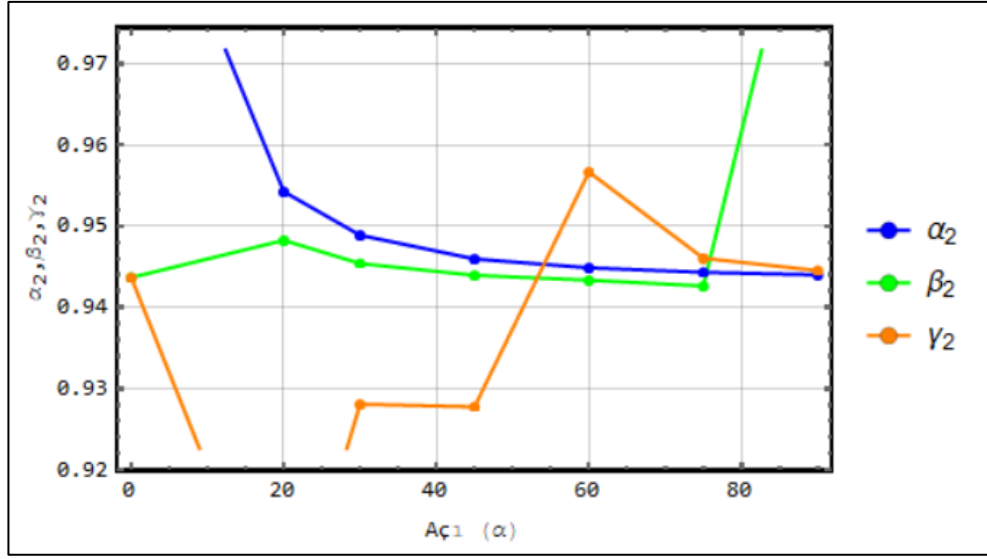


Şekil 4.13. Açı değeri $\alpha=0^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 2 noktasının değerleri.

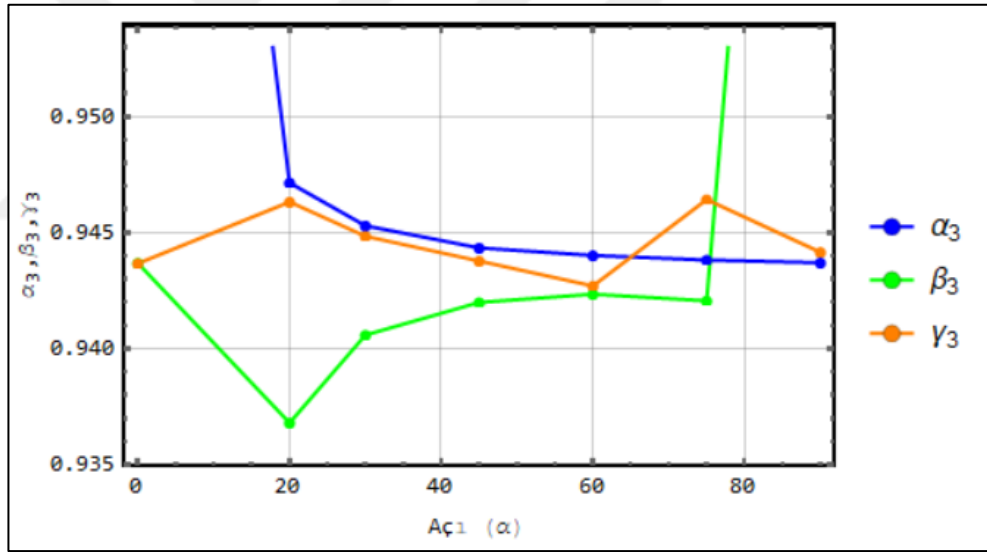


Şekil 4.14. Açı değeri $\alpha=0^\circ$ olan farklı malzeme parametreleri için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.20 de elde edilen değerler Şekil 4.13 ve 4.14 de görülmektedir. Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 de de görüldüğü üzere malzeme parametresi arttıkça β_2 , γ_2 , β_3 ve γ_3 değerleri azalmaktadır. α_2 ve α_3 , değerleri sabit kalmaktadır.

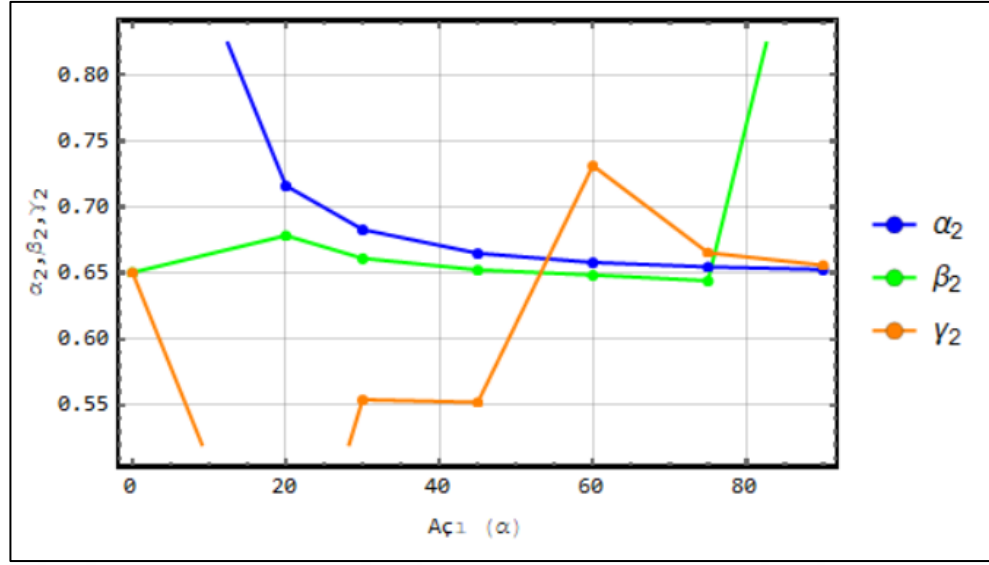


Şekil 4.15. Malzeme parametresi $l=0,1$ olan farklı açılar için 2 noktasının değerleri.

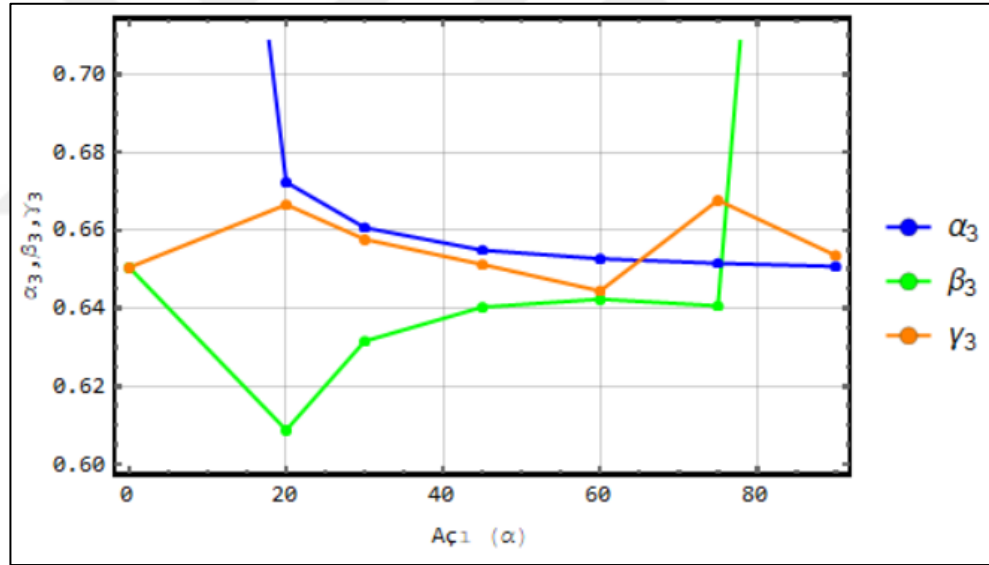


Şekil 4.16. Malzeme parametresi $l=0,1$ olan farklı açılar için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.8 de elde edilen değerler Şekil 4.15 ve 4.16 da görülmektedir. Şekil 4.15 ve Şekil 4.16 da görüldüğü üzere açı değeri arttıkça α_2 ve α_3 değerleri düzenli olarak azalmaktadır. β_2 , γ_2 , β_3 ve γ_3 değerleri düzensiz olarak değişmektedir.

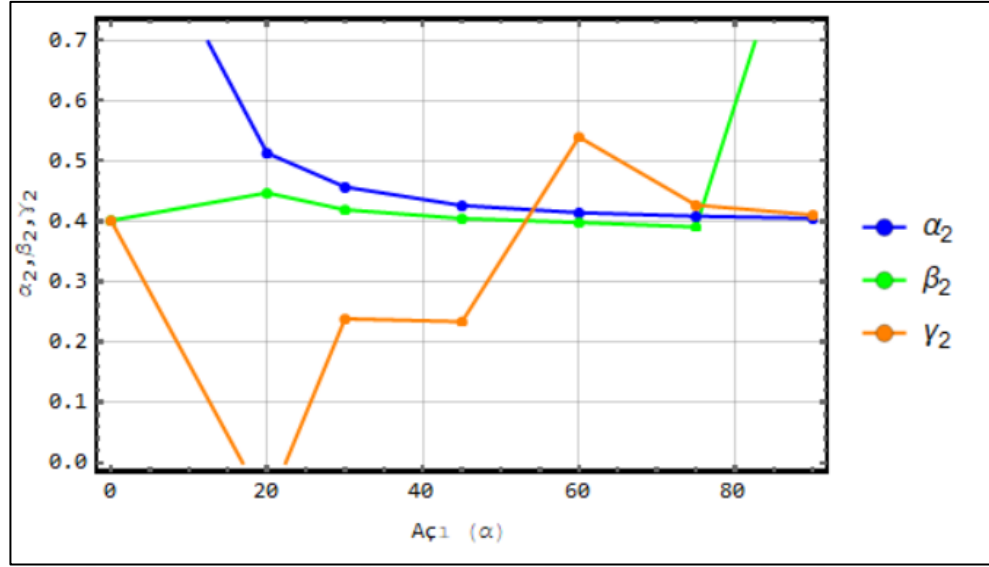


Şekil 4.17. Malzeme parametresi $l=0,3$ olan farklı açılar için 2 noktasının değerleri.

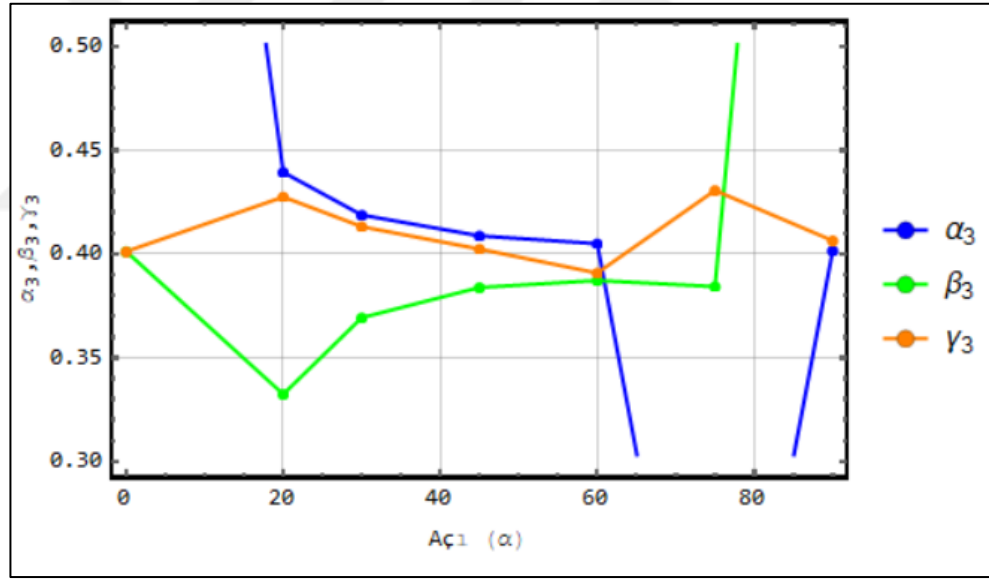


Şekil 4.18. Malzeme parametresi $l=0,3$ olan farklı açılar için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.9 da elde edilen değerler Şekil 4.17 ve 4.18 de görülmektedir. Şekil 4.17 ve Şekil 4.18 de görüldüğü üzere açı değeri arttıkça α_2 ve α_3 değerleri düzenli olarak azalmaktadır. β_2 , γ_2 , β_3 ve γ_3 değerleri düzensiz olarak değişmektedir.

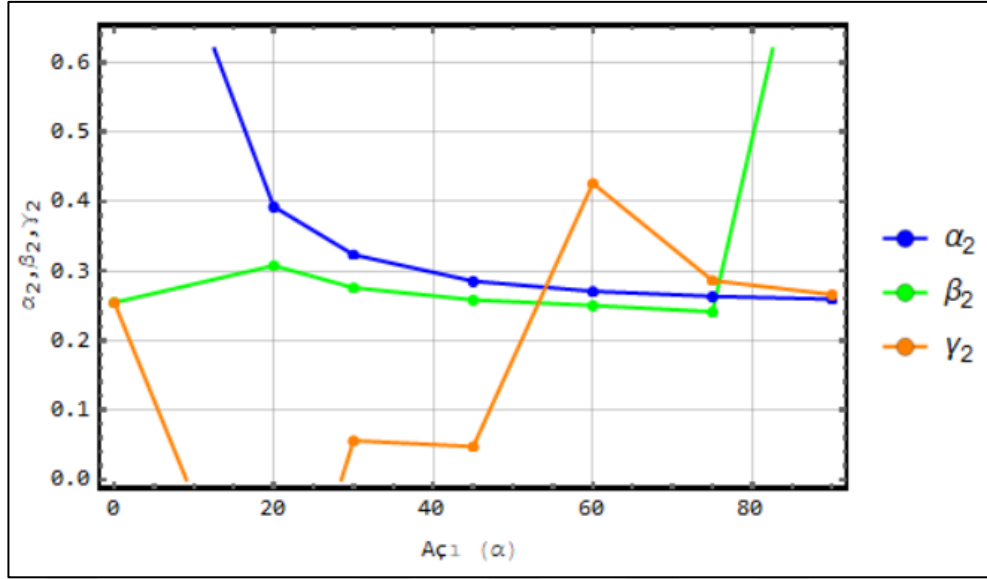


Şekil 4.19. Malzeme parametresi $l=0,5$ olan farklı açılar için 2 noktasının değerleri.

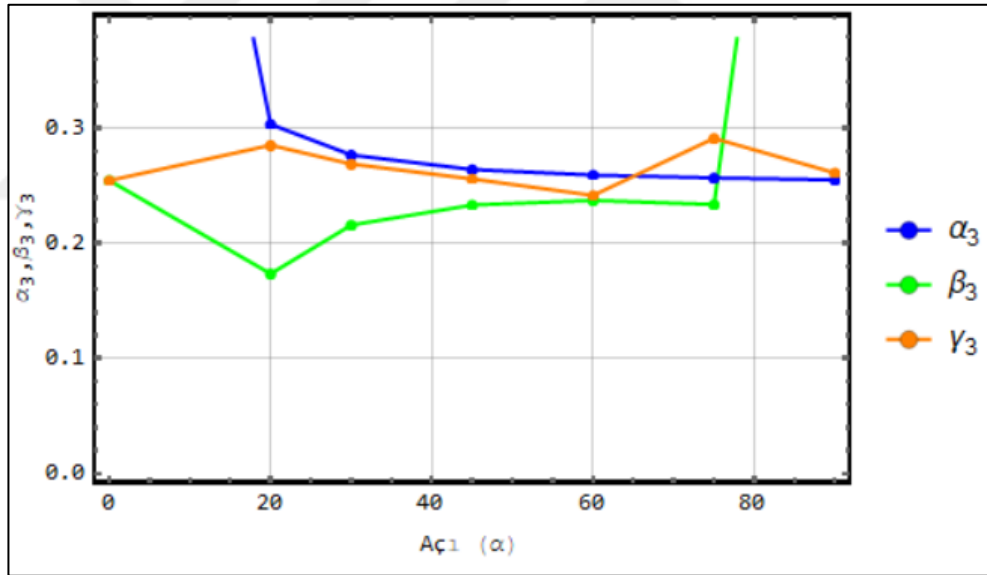


Şekil 4.20. Malzeme parametresi $l=0,5$ olan farklı açılar için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.10 da elde edilen değerler Şekil 4.19 ve 4.20 de görülmektedir. Şekil 4.19 ve Şekil 4.20 de görüldüğü üzere açı değeri arttıkça α_2 ve α_3 değerleri düzenli olarak azalmaktadır. β_2 , γ_2 , β_3 ve γ_3 değerleri düzensiz olarak değişmektedir.

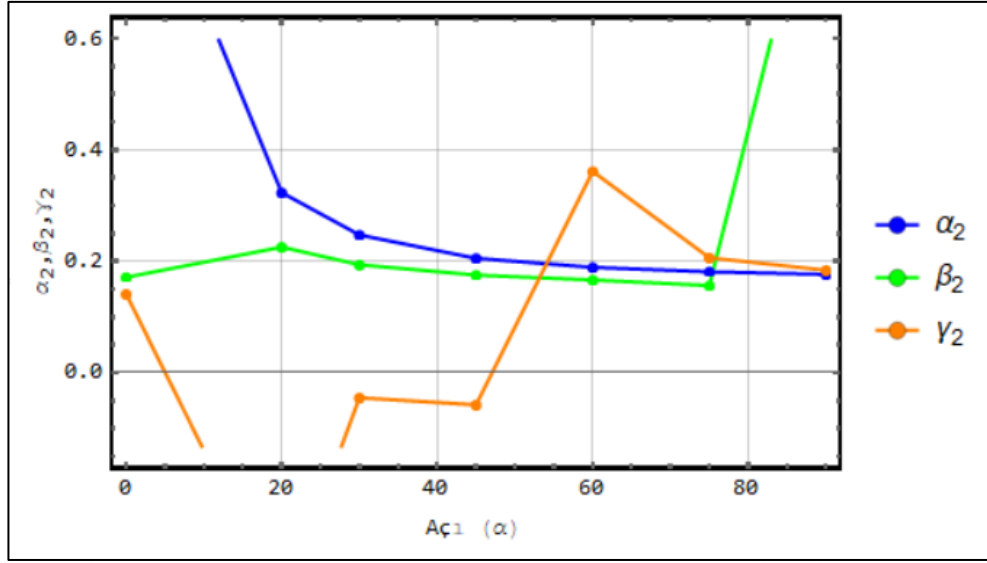


Şekil 4.21. Malzeme parametresi $l=0,7$ olan farklı açılar için 2 noktasının değerleri.

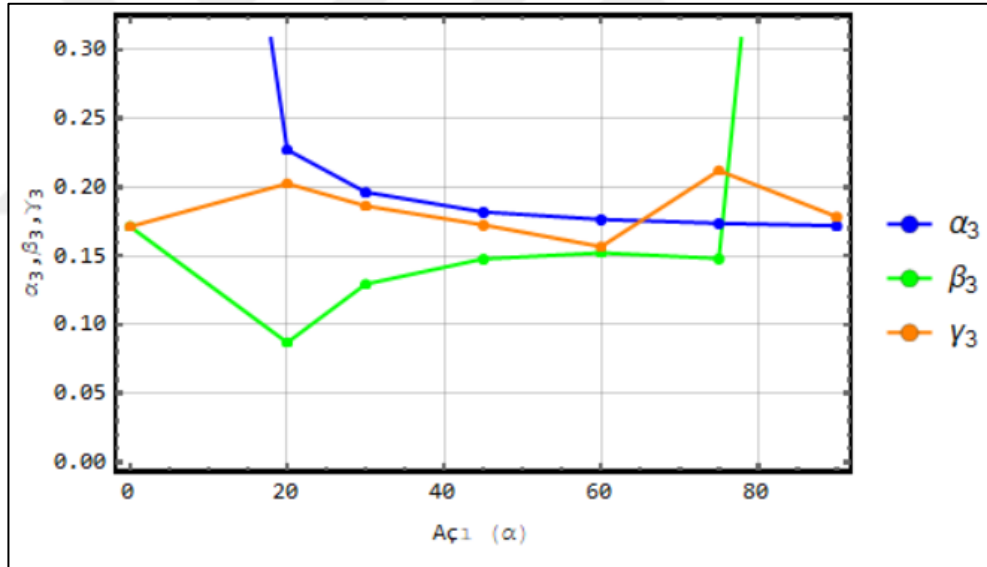


Şekil 4.22. Malzeme parametresi $l=0,7$ olan farklı açılar için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.11 de elde edilen değerler Şekil 4.21 ve 4.22 de görülmektedir. Şekil 4.21 ve Şekil 4.22 de görüldüğü üzere açı değeri arttıkça α_2 ve α_3 değerleri düzenli olarak azalmaktadır. β_2 , γ_2 , β_3 ve γ_3 değerleri düzensiz olarak değişmektedir.

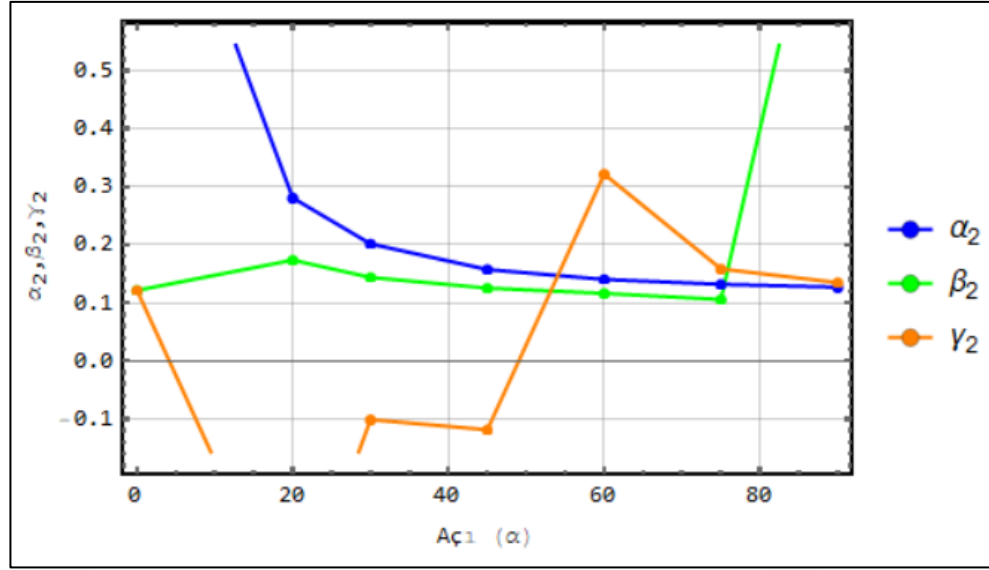


Şekil 4.23. Malzeme parametresi $l=0,9$ olan farklı açılar için 2 noktasının değerleri.

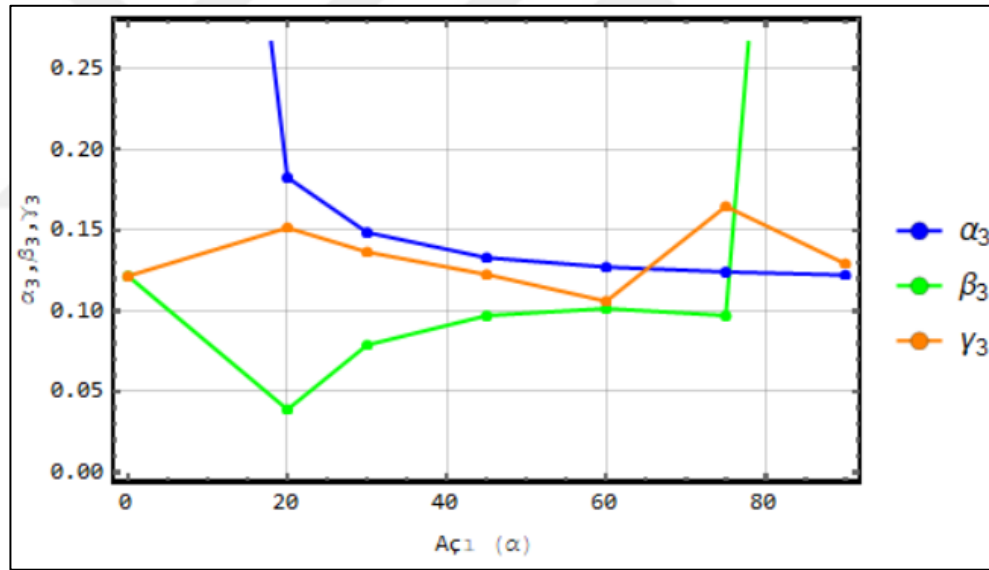


Şekil 4.24. Malzeme parametresi $l=0,9$ olan farklı açılar için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.12 de elde edilen değerler Şekil 4.23 ve 4.24 de görülmektedir. Şekil 4.23 ve Şekil 4.24 de görüldüğü üzere açı değeri arttıkça α_2 ve α_3 değerleri düzenli olarak azalmaktadır. β_2 , γ_2 , β_3 ve γ_3 değerleri düzensiz olarak değişmektedir.



Şekil 4.25. Malzeme parametresi $l=1,1$ olan farklı açı değerleri için 2 noktasının değerleri.



Şekil 4.26. Malzeme parametresi $l=1,1$ olan farklı açı değerleri için 3 noktasının değerleri.

Çizelge 3.13 de elde edilen değerler Şekil 4.25 ve 4.26 da görülmektedir. Şekil 4.25 ve Şekil 4.26 da görüldüğü üzere açı değeri arttıkça α_2 ve α_3 değerleri düzenli olarak azalmaktadır. β_2 , γ_2 , β_3 ve γ_3 değerleri düzensiz olarak değişmektedir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışması kapsamında, bir çerçeve sistemin, aynı yükleme koşulları altında düğüm noktalarındaki deplasman ve dönem değerleri, klasik ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre incelenmiştir. Çalışmanın ilk kısmında, çerçeve sistem, klasik gerilme çifti teorisine göre yedi farklı (90° , 75° , 60° , 45° , 30° , 20° , 0°) açı değeri için çözümü gerçekleştirilmiştir. İkinci kısımda ise çerçeve sistem değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre altı farklı malzeme parametresi (0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1) ile yedi farklı (90° , 75° , 60° , 45° , 30° , 20° , 0°) açı değeri için çözümlenmiştir.

Bu çözümler neticesinde; değiştirilmiş gerilme çifti teorisi sonucunda elde edilen değerler, klasik gerilme çifti teorisi sonucunda elde edilen değerlere bölünerek, α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri elde edilmiştir. Elde edilen bu değerler, öncelikle malzeme parametreleri sabit alınarak farklı açı durumlarındaki değişimleri incelenmiş, daha sonra açı değerleri sabit alınarak farklı malzeme parametreleri arasındaki değişim incelenmiştir.

Bu tez çalışması kapsamında elde edilen sonuçlar şu şekildedir:

Malzeme parametresinin sabit tutulup, çerçeve sistemin zemin ile yaptığı açı değişken olarak alındığında, açı değeri küçüldükçe; α_2 ve α_3 değerleri artmakta, β_2 ve β_3 değerleri azalmaktadır. γ_2 ve γ_3 değerleri ise değişkenlik göstererek artıp azalmaktadır. Bu durum teze konu olan bütün malzeme parametreleri için geçerlidir.

Çerçeve sistemin zemin ile yaptığı açı sabit tutulup, malzeme parametresi değişken olarak alındığında, malzeme parametreleri büyüdüğü; α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 ve γ_3 değerleri küçülmektedir. Bu durum teze konu olan 90° , 75° , 60° , 45° , 30° ve 20° açılar için geçerlidir. Ancak açı değeri 0° olduğu durumda α_2 , α_3 değerleri sabit kalmakta, β_2 , γ_2 , β_3 ve γ_3 değerleri diğer açılarda olduğu gibi küçülmektedir.

KAYNAKLAR

- Akdoğan, A. ve Küçükyıldırım, B.O. 2006. “*Nanomalzemeler ve Uygulamaları,*” MakinaTek., sayı 99, s.114-117.
- Atmane, H. A., A. Tounsi, I. Mechab, El Abbas A. B. 2010. *FreeVibration Analysis of Functionally Graded Plates Resting on Winkler-Pasternak Elastic Foundations Usinga New Shear Deformation Theory*. International Journal of Mechanics and Materials in Design 6 (2): 113–21.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2011. Buckling analysis of cantilever carbon nanotubes using the strain gradient elasticity and modified couple stress theories. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 8(9): 1821-1827.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2015. Bending analysis of FG microbeams resting on Winkler elastic foundation via strain gradient elasticity. *Composite Structures*, 134: 294-301.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2016. Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory. *Acta Astronautica*, 119: 1-12.
- Avcı, M., Mohammed, W.K.M. 2017. Winkler zemin ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin kirişin frekans parametrelerine etkilerinin incelenmesi.. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 5(3): 573-580.
- Avcı, M., Mohammed, W.K.M. 2018. Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation. *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10): 232.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2010a. Analysis of microtubules based on strain gradient elasticity and modified couple stress theories. *Advances in Vibration Engineering*, in press.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2010b. Buckling analysis of Cantilever Carbon Nanotubes Using the Strain Gradient Elasticity and Modified Couple Stress Theories. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Accept for Publication.
- Anthoine, A. 2000. Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams. *International Journal of Solids and Structures*, 37: 1003-1018.
- Chemi, A., Heireche, H., Zidour, M., Rakrak, K., Bousahla, A.A. 2015. Critical buckling load of chiral double-walled carbon nanotube using non-local theory elasticity. *Advances in nano research*, 3(4): 193-206.
- Civalek, Ö., Demir, C. 2011. Buckling and bending analyses of cantilever carbon nanotubes using the euler-bernoulli beam theory based on non-local continuum model. *Asian Journal of Civil Engineering*, 12(5): 651-661.

Civalek, Ö. 2007. *Nonlinear analysis of thin rectangular plates on Winkler–Pasternak Elastic foundations by DSC–HDQ methods*. *Applied Mathematical Modelling*, 31(3),606-624.

Civalek, Ö., B. Öztürk. 2010. *Free Vibration Analysis of Tapered Beam-Column with Pinned Ends Embedded in Winkler-Pasternak Elastic Foundation*. *Geomechanics and Engineering-2*(1):45–56.

Daryl, L. Logan. 2007. *A First Course in the Finite Element Method*, Fourth Edition.

Demir, Ç. 2016. Nonlocal Vibration Analysis for Micro/Nano Beam on Winkler Foundation via DTM. *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, 8(4): 108-118.

Filonenko-Borodich, M.M., 1940. *Some Approximate Theories of the Elastic Foundation*. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 46, 3-18.

F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong 2002. *Couple stres based straing radient theoryf or elasticity*, *International Journal of Solids and Structures* 39(10) 2731–2743.

Fu, Y., Zhang, J. 2010. Modeling and analysis of microtubules based on a modified couple stress theory. *Physica E*, 42: 1741-1745.

Gogotsi, Y. 2006. *Nanotubes and Nanofibers*, ISBN 0849393876, CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton.

Hao, M.J., Guo, X.M., Wang, Q. 2010. Small-scale effect on torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29 (1): 49-55.

Hosseini, M., Gorgani, H.H., Shishesaz, M., Hadi, A. 2017. Size-dependent stress analysis of single-wall carbon nanotube based on strain gradient theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 9(06): 1750087.

Hu, Y.G., Liew, K.M., Wang, Q., He, X.Q., Yakobson, B.İ. 2008. Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56: 3475-3485.

Iijima, S.,Ichihashi, T. 1993. *Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter*. *Nature*, 363, 603-605.

Işık, Ç. 2011. Nano ve mikro yapıların yerel olmayan elastisite teorisi ile eğilme ve titreşim hesabı, *Yüksek Lisans Tezi*, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.

Kapoor, M. 2012. *Advances in nanotechnology*, *Oxford Book Company*, Hindistan.

King, V.B. 2007. *Nanotechnology Research Advances*, *Nova Science Publishers*, New York.

Kutucu, B. 2010. Nanoteknoloji ve çift duvarlı karbon nanotüplerin incelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Mühendisliği Bilim Dalı, İstanbul.

Kong Shengli, ZhouShenjie, NieZhifeng, WangKai, 2008. *The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams*, Journal of Engineering Science 46, 427–437.

Luo, H., Shi, Z., Li, N., Gu, Z. And Zhuang, Q. 2001. *Investigation of the electrochemical and electro catalytic behavior of single-wall carbon nanotube film on a glassy carbon electrode*. Analytical Chemistry, 73(5): p. 915- 920.

Mahler, E., Seiler, D. 2011. Carbon nanotube and nanocomposite research, *Nova Science Publishers*, New York.

Mani, G., Fan, Q., Ugbolue, S. C. and Yang, Y. 2005. *Morphological studies of polypropylene-nanoclay composites*. Journal of Applied Polymer Science, 97: p. 218-226.

Mindlin R.D. 1964. *Micro structure in linear elasticity*. Arch Ration Mech Anal; 16:51–78.

Morris, J.E., Iniewski, K. 2013. Graphene, carbon nanotubes and nano structures: techniques and applications, *CRC Press*, London.

Murmu, T., Pradhan, S.C. 2009. Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory. *Computational Materials Science*, 46(4): 854-859.

Pasternak, P.L. 1964. “*On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants*”, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturipo Stroitelstvu Arkhitekture, Moscow.

Reddy J.N. 2004. *An introduction to continuum mechanics*. New York: Cambridge University Press.

Reddy, J.N., Pang, S.D. 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2): 023511.

Robinson, M. T. A., Adali, S. 2018. *Buckling of nonuniform and axially functionally Graded nonlocal Timoshenko nanobeams on Winkler-Pasternak foundation*. Composite Structures, 206, 95-103.

Teodoru, I. B., Musat, V., 2008. *Beam elements on linear variable two-parameter elastic foundation*. Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. Sectia Constructii, Arhitectura, 5, 69-78.

Tepe, A. 2007. “*Nanoteknolojide nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelenmesi*”, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Tounsi, A., Heireche, H., Berrabah, H.M., Benzair, A., Boumia, L. 2008. Effect of small size on wave propagation in double-walled carbon nanotubes under temperature field. *Journal of Applied Physics*, 104(10): 104301.

Uzun, B., Civalek, Ö. 2019a. *Nonlocal FEM Formulation for Vibration Analysis of Nanowires on Elastic Matrix with Different Materials*. *Mathematical and Computational Applications*, 24(2): 38.

Uzun, B., Civalek, O. 2019b. *Free vibration analysis Silicon nanowire surrounded by elastic matrix by nonlocal finite element method*. *Advances in NanoResearch*, 7(2): 99-108.

Uzun, B., Numanoglu, H., Civalek, O. 2018. *Free vibration analysis of BNNT with different cross-sections via nonlocal FEM*. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49(2): 252-260.

Yaylı, M.Ö. 2015. Buckling analysis of a rotationally restrained single walled carbon nanotube. *Acta Physica Polonica A*, 127(3): 678-683.

Yaylı, M.Ö. 2016. Buckling Analysis of a Rotationally Restrained Single Walled Carbon Nanotube Embedded In An Elastic Medium Using Nonlocal Elasticity. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 8(2): 40-50.

Yaylı, M.Ö. 2017. Buckling analysis of a cantilever single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium with an attached spring. *Micro & Nano Letters*, 12(4): 255-259.

Yaylı, M.Ö. 2018. On the torsional vibrations of restrained nanotubes embedded in an elastic medium. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40(9): 419.

Yıldırım, B. ve Dimitoka, K. 2003. *"Katmalı ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerden Yapılmış Termal Bariyer Kaplamalardaki Termal Gerilimlerin Sonlu Elemanlar Metodu ile Hesaplanması"*, *Mühendis ve Makina*, Sayı 525, st. 34-42.

Zhang, Y.Q., Liu, G. R., Xie, X.Y. 2005. Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity. *Physical Review B*, 71(19): 195404.

Wang, T.M., L.W. Gagnon. 1978. *Vibrations of Continuous Timoshenko Beams on Winkler-Pasternak Foundations*. *Journal of Sound and Vibration* 59 (2): 211–20.

Winkler, E. 1867. *Die Lehre von Elastizität Und Festigkeit (on Elasticity and Fixity)*.