



**ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

Tülin Merve Demirtaş

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT, 2022

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren 12 (on iki) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Tülin Merve

Soyadı :Demirtaş

Bölümü: Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

İMZA :

Teslim Tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı :Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Tümevarımsal Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi

İngilizce Adı :Examination Of Inductive Reasoning Process Of Secondary Mathematics Teacher Candidates

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Tülin Merve Demirtaş

İmza:

JÜRİ ONAY SAYFASI

Tülin Merve DEMİRTAŞ tarafından hazırlanan Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Tümevarımsal Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof.Dr.Ayşe UYAR

(Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Başkan: Doç. Dr. Gönül YAZGAN SAĞ

(Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Üye: Dr.Öğr.Üyesi Elçin EMRE AKDOĞAN

(Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, TED Üniversitesi)

Tez Savunma Tarihi: 27/01/2022

Bu tezin Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı’nda yüksek lisans tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof.Dr.Yücel GELİŞLİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü



Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa kabul edildiğim günden bu yana eğitimim ve tez çalışmamın son anına kadar bana inanan, bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren değerli danışmanım Prof. Dr. Ayşe UYAR’a, bana ayıracak vakit bulan ve çalışmam için rehberlik eden saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU’na sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans sürecinin bana en güzel hediyesi olan arkadaşlarım Gaye ÇOLAKOĞLU ve Kübra BİŞGİN’e en içten teşekkürü borç bilirim. Siz olmasaydınız bu süreç benim için çok daha zorlu olurdu. Araştırmam boyunca yardımlarını esirgemeyen Dr. Onur DÖLEK’e, tezi düzenlemede yardımcı olan dostum Hülya MENGÜLLÜOĞLU’na, analizlerimi titizlikle kontrol eden ölçme değerlendirme uzmanı arkadaşım Nesir Deniz TEMEKOĞLU’na ve yardımlarını eksik etmeyen tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tezi bitirebilmem için beni motive eden, hayatım boyunca maddi, manevi desteklerini hiçbir şekilde esirgemeyen ve her zaman yanımda olan canım annem, babama, en büyük şansım olan biricik kardeşime çok teşekkür ederim.

Desteğini hep hissettiğim ve her zaman yanımda olan Süleyman’a kalpten teşekkür ederim.

Tülin Merve DEMİRTAŞ

Şubat, 2021

**ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME SÜREÇLERİNİN
İNCELENMESİ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**Tülin Merve Demirtaş
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat,2021**

ÖZET

Araştırmanın amacı ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçleri incelemektir. Çalışmada farklı sınıf kademelerinin tümevarımsal düşünme süreçleri arasındaki farklar ve problem türlerine göre akıl yürütme durumları incelenmiştir. Çalışmanın katılımcılarını 2021-2022 eğitim öğretim yılının güz döneminde Ankara’da bulunan bir üniversitenin ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 16 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmada nitel çalışma yöntemlerinden durum çalışması esas alınmıştır. Araştırmanın verileri ikisi aritmetik ikisi geometrik olmak üzere 4 problemden oluşan veri toplama aracı yardımı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler, araştırmacının gözlemleri ve yazılı dokümanlar yoluyla toplanmış, yapılan görüşmeler ses kaydı altına alınmıştır. Tümevarımsal akıl yürütme süreçleri sınıf kademeleri değişkeni açısından değerlendirildiğinde en yüksek doğrusu bulunan kademenin üçüncü sınıf kademesi olduğu belirlenmiştir. Ayrıca matematik öğretmeni adayları geometrik problem türlerine göre aritmetik problem türlerinde daha fazla doğru cevap verdikleri gözlemlenmiştir. Bu bulgular doğrultusunda uygulayıcılara ve araştırmacılara yönelik çeşitli öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Tümevarımsal Akıl Yürütme Süreçleri, Tümevarım, Öğretmen Adayı.

Sayfa Adedi: 107

Danışman: Prof.Dr. Ayşe UYAR

**EXAMINATION OF INDUCTIVE REASONING PROCESS OF
SECONDARY MATHEMATICS TEACHER CANDIDATES
(MASTER'S THESIS)**

Tülin Merve Demirtaş

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF EDUCATION SCIENCES

February, 2021

ABSTRACT

In the study, inductive reasoning processes of secondary school mathematics teacher candidates were examined. In the study, the differences between the inductive thinking processes of different grade levels and the success levels according to the problem types were examined. The participants of the study are 16 pre-service teachers studying in the secondary school mathematics teaching program of a university in Ankara in the fall semester of the 2021-2022 academic year. In the research, case study, one of the qualitative study methods, was taken as basis. The data of the research were collected through semi-structured interviews, observations of the researcher and written documents with the help of a data collection tool consisting of 4 questions, two of which are arithmetic and two of which are geometric, and the interviews were audio recorded. When the inductive thinking processes were evaluated in terms of the grade level variable, it was determined that the third grade level had the highest achievement. In addition, pre-service mathematics teachers were found to be more successful in arithmetic problem types compared to geometric problem types. In line with these findings, various suggestions were presented to program designers, practitioners and researchers.

Keywords: Inductive Reasoning Process, Induction, Candidate Mathematics Teacher.

Number of Pages:107

Advisor: Prof. Dr. Ayşe UYAR

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU	i
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI.....	ii
JÜRİ ONAY SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
TABLolar LİSTESİ.....	xii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xiii
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Cümlesi.....	3
1.1.1. Alt Problemler:	3
1.2 Araştırmanın Amacı ve Önemi.....	3
1.3 Sınırlılıklar	4
1.4 Varsayımlar	4
1.5 Tanımlar	4
BÖLÜM II.....	6
2.1.Akıl Yürütme Nedir?	6
2.2. Akıl Yürütme Türleri	8

2.2.1. Tümevarımsal Akıl Yürütme	8
2.2.1.1. İspat Yöntemi olarak Tümevarım.....	8
2.2.2.2. Akıl Yürütme Olarak Tümevarım	10
2.2.3. Tümdengelsel Akıl Yürütme	10
2.2.4. Abdüktif Yollarla Akıl Yürütme.....	11
2.3. Tümevarımsal Akıl Yürütme Süreçleri	11
2.4. İlgili Araştırmalar	15
2.4.1. Ulusal Çalışmalar	15
2.4.1.1. Genelleme İle İlgili Çalışmalar	15
2.4.1.2. Tümevarımsal Akıl Yürütme İle İlgili Çalışmalar	18
2.4.2. Uluslararası Çalışmalar	19
2.4.2.1. Tümevarımsal Akıl Yürütme İle İlgili Çalışmalar	19
YÖNTEM	22
3.1. Araştırma Modeli.....	22
3.2. Çalışma Grubu	22
3.3. Pilot Çalışma.....	24
3.4. Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması.....	24
3.3.1. Araştırmada Kullanılan Problemler.....	26
3.4. Araştırmanın Geçerlilik ve Güvenirliği	27
3.5. Verilerin Analizi.....	27
3.5.1. Sayı Örüntüsü Problemi Kodlama Örneği	30
3.5.2. Kağıt Katlama Problemi Kodlama Örneği	31
3.5.3. Satranç Tahtası Problemi Kodlama Örneği	33
3.5.4. Kağıt Ev Probleminin Kodlama Örneği.....	35
4.1. Sayı Örüntüsü Probleminden Elde Edilen Bulgular	39
4.1.1. Gözlemlene Basamağı	41
4.1.2. Gözlemlerin Organizesi.....	42

4.1.3. Yordama.....	45
4.1.4. Yordamanın Testi.....	47
4.1.5. Genelleme	48
4.1.6.Genellemenin Testi	51
4.2. Kağıt Katlama Probleminden Elde Edilen Bulgular	53
4.2.1.Gözlemlleme	55
4.2.2. Gözlemlerin Organizesi.....	56
4.2.3. Yordama	57
4.2.4. Yordamanın Testi.....	59
4.2.5. Genelleme	60
4.2.6. Genellemenin Testi	64
4.3. Satranç Tahtası Probleminden Elde Edilen Bulgular	65
4.3.1. Gözlemlleme	67
4.3.2. Gözlemlerin Organizesi.....	68
4.3.3. Yordama	70
4.3.4. Yordamanın Testi.....	71
4.3.5. Genelleme	72
4.3.6. Genellemenin Testi	76
4.4. Kağıt Ev Probleminden Elde Edilen Bulgular	77
4.4.1. Gözlemlleme	79
4.4.2. Gözlemlerin Organizesi.....	79
4.4.3. Yordama	81
4.4.4. Yordamanın Testi.....	82
4.4.5. Genelleme	83
4.4.6. Genellemenin Testi	86
BÖLÜM V	88
TARTIŞMA SONUÇ VE ÖNERİLER.....	88

5.1.TARTIşMA VE SONUÇ	88
5.2.ÖNERİLER	95
KAYNAKLAR.....	97
EKLER.....	103



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. <i>Matematiksel Akıl Yürütme Türleri</i>	7
Tablo 2. <i>Katılımcı Listesi</i>	23
Tablo 3. <i>Sayı Örüntüsü Probleminin Kodlama Örneği</i>	29
Tablo 4 <i>Sayı Örüntüsü Probleminin Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları</i>	30
Tablo 5 <i>Kağıt Katlama Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları</i>	32
Tablo 6. <i>Satranç Tahtası Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları</i>	34
Tablo 7. <i>Kağıt Ev Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları</i>	36
Tablo 8. <i>Sayı Örüntüsü Problemi Yazılı Sınav Analiz Tablosu</i>	40
Tablo 9. <i>Kağıt Katlama Problemi Yazılı Sınav Analiz Tablosu</i>	54
Tablo 10. <i>Satranç Tahtası Problemi Yazılı Sınav Analiz Tablosu</i>	66
Tablo 11. <i>Kağıt Ev Problemi Yazılı Sınav Analiz Tablosu</i>	78

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Domino Taşları.....	8
Şekil 2. Reid'in 5 Aşamalı Modeli.....	12
Şekil 3. Sayı örüntüsü problemi.	30
Şekil 4. Kâğıt katlama problemi.....	32
Şekil 5. Satranç Tahtası Problemi.	34
Şekil 6. Kağıt ev Problemi..	36
Şekil 7. Gözlemlleme basamağında doğru bulunan çözüm örneği (Ö2).....	41
Şekil 8. Gözlemlleme basamağında doğru bulunan ikinci çözüm örneği(Ö13).....	42
Şekil 9. Gözlemlerin Organizesi Basamağı doğru bulunan çözüm örneği(Ö5).....	43
Şekil 10. Gözlemlerin organizesi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö3).....	43
Şekil 11. Gözlemlerin organizesi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği (Ö7).....	44
Şekil 12. Sayı örüntüsü problemi yordama basamağı doğru bulunan çözüm örneği(Ö6) ...	45
Şekil 13. Sayı örüntüsü problemi yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö9)	46
Şekil 14. Sayı örüntüsü problemi yanlış yordama örneği (Ö3).....	46
Şekil 15. Sayı örüntüsü problemi yordamanın testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö16).....	47
Şekil 16. Sayı örüntüsü problemi yordamanın testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö8).....	48
Şekil 17. “ n^2+2n-1 formülüne genelleme” kategorisine ait doğru bir çözüm örneği(Ö6) ...	49

Şekil 18. $a_n+1=a_n+(2n+1)$ formülüne genelleme kategorisinde doğru bulunan çözüm örneği	50
Şekil 19. Genelleme basamağında yanlış bulunan çözüm örneği	50
Şekil 20. Genellemenin testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö11)	52
Şekil 21. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö10).....	52
Şekil 22. Gözlemleme basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö12).....	55
Şekil 23. Kağıt katlama problemi gözlemleme basamağı yanlış bulunan çözüm örneği(Ö14)	56
Şekil 24. Gözlemlerin organizesi basamağında doğru bulunan bir çözüm örneği(Ö5)	57
Şekil 25. Yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö16)	58
Şekil 26. Yordama kategorisinde yanlış bulunan çözüm örneği(Ö11)	58
Şekil 27. Yordamanın testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği	59
Şekil 28. Yordama basamağında yanlış bulunan çözüm örnekleri(Ö15 ve Ö9)	60
Şekil 29. Genelleme basamağında doğru bulunan 2^n-1 formülüne genelleme çözüm örneği(Ö13).....	61
Şekil 30. $a_n=2a_{n-1}+1$ formülüne genelleme çözüm örneği(Ö3)	62
Şekil 31. $a_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-2}+a_{n-1}+n$ formülüne genelleme çözüm örneği	63
Şekil 32. Genelleme kategorisinde yanlış bulunan çözüm örneği(Ö7)	63
Şekil 33. Genellemenin testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö5)	64
Şekil 34. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö2).....	65
Şekil 35. Satranç tahtası problemi gözlemleme basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö2).....	67
Şekil 36. Gözlemleme basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö7).....	68
Şekil 37. Gözlemlerin organizesi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö2)	69
Şekil 38. Satranç Tahtası problemi gözlemlerin organizesi basamağı yanlış bulunan çözüm örneği(Ö11).....	69
Şekil 39. Yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö14)	70

Şekil 40. Yordama basamağında yanlış bulunan çözüm örneği.....	70
Şekil 41. Yordamanın testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği	71
Şekil 42. Yordamanın testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği.....	72
Şekil 43. $n \cdot n + 1 \cdot (2n + 1)6$ formülüne genelleme doğru çözüm örneği(Ö13)	73
Şekil 44. $a_n=1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ formülüne genelleme çözüm örneği	74
Şekil 45. Genelleme basamağında yanlış bulunan çözüm örneği	75
Şekil 46. Genellemenin testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö5)	76
Şekil 47. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği	77
Şekil 48. Kağıt ev problemi gözlemlene basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö6).79	
Şekil 49. Gözlemlerin organizesi basamağı doğru çözüm örneği(Ö13)	80
Şekil 50. Gözlemlerin organizesi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö1).....	80
Şekil 51. Yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö16)	81
Şekil 52. Yordama basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö10)	82
Şekil 53. Yordamanın testi basamağı yanlış bulunan çözüm örneği(Ö8)	83
Şekil 54. Genelleme basamağında “ $n(3n + 1)2$ formülüne genelleme çözüm örneği.....	84
Şekil 55. Genelleme basamağı $a_n=a_{n-1}+(3n-1)$ $n \neq 1$ formülüne genelleme çözüm örneği(Ö3)	84
Şekil 56. Genelleme basamağında $2+(n-1) \cdot 3n + 42$ formülüne genelleme çözüm örneği(Ö12).....	84
Şekil 57. Genelleme basamağı $3(1+2+3+\dots+n)-n$ formülüne genelleme çözüm örneği(Ö9)	85
Şekil 58. Genelleme basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö10).....	85
Şekil 59. Genelleme basamağında yanlış bulunan boş çözüm örneği.....	86
Şekil 60. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö11)	86
Şekil 61. Sayı Örüntüsü Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Grafiği	89
Şekil 62. Kâğıt Katlama Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Grafiği.....	90
Şekil 63. Satranç Tahtası Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Grafiği	91

<i>Şekil 64.</i> Kâğıt Ev Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Grafiği.....	92
<i>Şekil 65.</i> Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Genel Analiz Grafiği.....	93



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

TDK: Türk Dil Kurumu



BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematik sadece sayısal işlem becerileri gerektiren bir disiplin değildir aynı zamanda üst düzey düşünme becerilerini de gerektirir (Ersözlü & Çoban, 2012). Fisher (1990) üst düzey düşünme becerilerini, birleştirme, akıl yürütme, problem çözme ve kavrayarak anlamlandırma süreci olarak tanımlamaktadır (Çakır, 2013). Üst düzey düşünme becerilerinden biri olan akıl yürütme, matematiğin ana hedeflerinden biridir. (Yankelewitz, 2009) . Muhakeme, usa vurma ya da başka bir deyişle akıl yürütme bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma işidir (Umay, 2003). Matematikteki tüm kuralların ve işlemlerin temelinde akıl yürütme vardır (Umay ve Kaf, 2005). Akıl yürütme becerilerine sahip olunmasının bireylere hem gündelik hem akademik açıdan katkıları bulunmaktadır. Örneğin; bir depo yakıtla ne kadar uzağa gidebileceğimizi hesaplarken ya da farklı marka bebek bezleri arasında en uygun fiyatlının hangisi olduğunu belirlerken orantısal akıl yürütme, sınırlı bilgi ve gözlemlerimizden bir karara varmada tümevarımsal akıl yürütme, televizyon kumandasının neden çalışmadığını belirlemede ise hipotetik tümdengelimsel akıl yürütme becerilerini kullanırız. Bu beceriler, bireyleri yaşamlarında karşılaşılabilecekleri sosyo-bilimsel problemleri çözmeye ve iyi bir vatandaş olmaya hazırlar (Kocagül Sağlam, Ünal Çoban , 2018; Osborne, 2013).

Bu çalışmada öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçleri, hangi basamaklarda hangi davranışları sergiledikleri ve 6 basamaktan oluşan tümevarımsal akıl yürütme sürecinde sınıf kademeleri arasında nasıl bir farklılık olduğunun incelenmesi amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının akıl yürütme süreçlerini inceleyen çalışmalara rastlanmaktadır. Çelik, Obay ve Özdemir (2020) ilköğretim matematik öğretmenleriyle yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarının akıl yürütme konusunda yeterli bir bilgi birikimine sahip olmadıklarını, akıl yürütme becerileri için eğitime ihtiyaç duyduklarını, akıl yürütmeye karşı olumlu tutumlar sergilediklerini tespit etmişlerdir. Çimen ve Yalman (2019) TIMSS soruları ile fen bilgisi öğretmen adaylarının akıl yürütme becerilerinin belirlenmesi çalışmasında katılımcıların akıl yürütme becerisindeki ortalamaları yüksek olmamakla birlikte, sınıflara göre boyutlar arasında ilişkiisel düşünme boyutunda istatistiksel olarak anlamlı farka ulaşıldığını tespit etmişlerdir. Testin çoğu boyutunda 1. sınıf öğretmen adaylarının akıl yürütme becerilerinin örneklemdeki diğer gruplara göre daha düşük olduğu görülmüştür. Literatürde öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçlerini inceleyen çalışma bulunmamaktadır fakat tümevarımsal akıl yürütme sürecinin basamaklarından biri olan genelleme sürecini inceleyen çalışmalara rastlanmaktadır. Yıldız ve Alaylı (2019), ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sabit değişen şekil örüntüsü genellemesini öğretmek için matematik bilgileri çalışmasında öğretmen adaylarının örüntü genellemesine ilişkin bilgilerinin yetersiz olduğunu ifade etmişlerdir. Benzer şekilde Yeşildere ve Akkoç (2011)'un yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçlerinde zorlandıklarını ortaya konulmuştur. Tümevarımsal akıl yürütme yöntemiyle ilgili literatürde Navruz (2012)'un ortaokul (8.sınıf) öğrencilerine yaptığı çalışma ve Erol (2019)'un lise öğrencilerine yaptığı çalışmalar bulunmaktadır.

1.1. Problem Cümlesi

Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütme sürecindeki davranışları nelerdir? Sınıf kademelerine göre öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütmeleri nasıl etkilenmektedir? Bu bağlamda aşağıda verilen alt problemlere yanıt aranacaktır.

1.1.1. Alt Problemler:

- 1- Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreci basamaklarındaki davranışları nelerdir ve ne derece kullanılmaktadır?
- 2- Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütmeleri sınıf kademelerine (1,2,3 ve 4.sınıf) göre farklılık göstermekte midir?
- 3- Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütme sürecindeki davranışları problemlere göre farklılık göstermekte midir?
- 4- Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütme sürecindeki davranışları akıl yürütme sürecinin basamaklarına göre farklılık göstermekte midir?

1.2 Araştırmanın Amacı ve Önemi

Literatürde tümevarımsal akıl yürütme ile ilgili az sayıda çalışma bulunmaktadır. Ayrıca öğretmen adaylarında tümevarımsal akıl yürütme süreçlerini inceleyen herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu sebeple araştırmadan elde edilecek bulgular, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçlerini incelenmesini amaçlaması açısından oldukça önem taşımaktadır.

Bu araştırmada ortaöğretim matematik öğretmenleri adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçlerini(gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellenmenin testi) detaylı bir şekilde incelemeyi amaçlaması açısından bu konuda elde edilen verilerin literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu araştırma, tümevarımsal akıl yürütmenin ne olduğu ve tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin neler olduğu hakkında bilgi vermesi açısından önemlidir.

1.3 Sınırlılıklar

Bu araştırma, Ankara’da bulunan bir devlet üniversitesinin 2021-2022 güz yarıyılında ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 16 öğretmen adayından ve çalışmada kullanılan dört problemten elde edilen verilerle sınırlıdır. Çalışmanın yapıldığı dönemde pandemi nedeniyle kısıtlamalar olmasından dolayı daha fazla sayıda öğretmen adayına ulaşılammıştır. Bu yüzden araştırma, her sınıf kademesinden dört öğretmen adayıyla sınırlı kalmıştır. Covid-19 tedbirleri kapsamında öğretmen adaylarıyla yüz yüze görüşmeler yapılamamıştır. Araştırma “Zoom” uygulaması üzerinden yapılmış yarı yapılandırılmış görüşmelerle sınırlıdır.

1.4 Varsayımlar

Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının veri toplama aracında bulunan problemlere ve yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelere samimi ve içten cevap vermişlerdir. Uygulama esnasında katılımcıların dış etkenlerden aynı oranda etkilendikleri varsayılmıştır.

1.5 Tanımlar

Tümevarım: Teklik olandan, özel olandan genel olana giden, tek tek olgulardan genel önermelere varan yöntem, istikra, endüksiyon (TDK, 2019).

Akıl Yürütme: Muhakeme, usa vurma ya da başka bir deyişle akıl yürütme bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma işidir (Umay, 2003).

Matematiksel akıl yürütme: Matematiksel nesneleri kullanarak yine bu nesneler hakkında muhakeme yapabilmektir (Brodie, 2010).



BÖLÜM II

LİTERATÜR TARAMASI

1.Akıl Yürütme Nedir?

Muhakeme, usa vurma ya da başka bir deyişle akıl yürütme bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma işidir (Umay, 2003). İnsanların bilgiyi aldığı ve verilere göre bir çıkarımda bulunduğu bilişsel bir süreç olarak da tarif edilebilir (Kurtz, Gentner ve Gunn, 1999). Webster (1986) 'a göre akıl yürütme bir düşünme ve açıklama biçimidir. Düşünme ise TDK'ye göre duyum ve izlenimlerden, tasarımlardan ayrı olarak aklın bağımsız ve kendine özgü olma durumu ile ifade edilir. Nickerson'a göre "Düşünme, içinde bulunulan durumu anlamak amacıyla aktif, amaca yönelik ve düzenli olarak yürütülen zihinsel işlem ve süreçlerdir " (Güneş, 2012, s.130). Düşünme ve akıl yürütme kavramları çoğu zaman eş anlamlı olarak kullanılsa da, akıl yürütme terimi tutarlı bir mantıksal süreç yani bir nedensel ilişkiye dair entelektüel kavrayışa dayanır (Aydın, Pehlivan, 2019).

Akıl yürütme, matematiğin ana hedeflerinden biridir. (Yankelewitz, 2009) . Matematikte gerçeklere deneyle, gözlemle değil, yalnızca akıl yürütmeyle ulaşılır. Matematikteki tüm kuralların ve işlemlerin temelinde akıl yürütme vardır. Akıl yürütme, eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgilere ulaşma süreci olarak tanımlanabilir (MEB, 2013). Matematiksel akıl yürütme, matematiksel nesneleri kullanarak yine bu nesneler hakkında muhakeme yapabilmektir

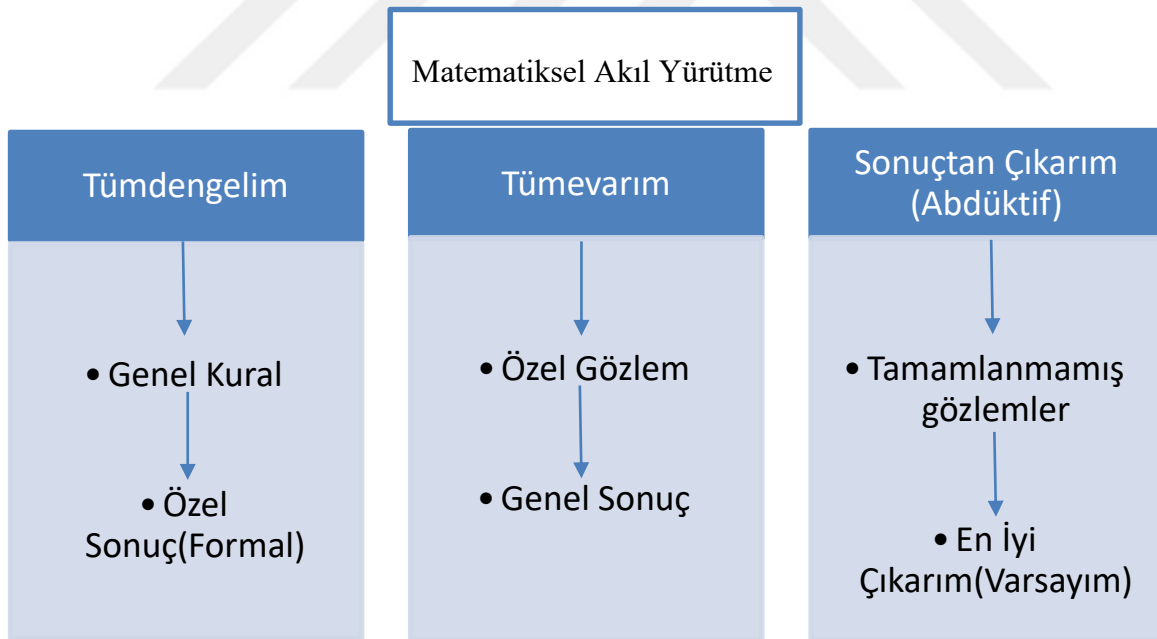
(Brodie, 2010). Matematikte gerçeklere deneyle, gözlemle değil, yalnızca akıl yürütmeye ulaşılır. Matematikteki tüm kuralların ve işlemlerin temelinde akıl yürütme vardır. Akıl yürütme; bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma sürecidir. Bir konuda akıl yürütebilen biri,

- i. yeterli düzeyde bilgi sahibidir,
- ii. yeni karşılaştığı durumu tüm boyutlarıyla inceler, keşfeder, mantıklı tahminlerde, varsayımlarda bulunur,
- iii. düşüncelerini gerekçelendirir, bazı sonuçlara ulaşır, ulaştığı sonucu açıklayabilir ve savunabilir (Umay, 2003).

Matematiksel akıl yürütme başlıca tümevarımsal akıl yürütme, tümdengelimli akıl yürütme ve abdükatif yollarla akıl yürütme olarak üç başlıkta incelenmektedir (Ateş, 2019).

Tablo 1.

Matematiksel Akıl Yürütme Türleri



(Kaynak: Uğurel, I. (2020). Matematiksel İspat Ve Öğretimi. Ankara: Anı)

2.2. Akıl Yürütme Türleri

Matematiksel akıl yürütme türleri üç başlıkta incelenmektedir. Tümevarımsal akıl yürütme, tümdengelimli akıl yürütme ve abdüktif akıl yürütme türleri aşağıda açıklanmıştır.

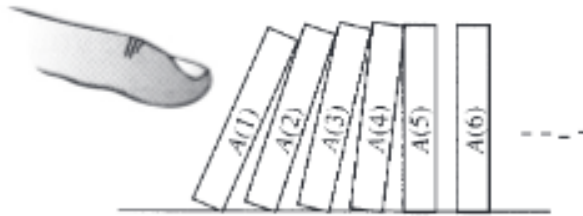
2.2.1. Tümevarımsal Akıl Yürütme

Tümevarımsal akıl yürütme kavramının daha anlaşılır olabilmesi için öncelikle tümevarım kavramını bilmemiz gerekir. Tümevarım tanım olarak “Teklik olandan, özel olandan genel olana giden, tek tek olgulardan genel önermelere varan yöntem, istikra, endüksiyon.” olarak açıklanmıştır (TDK, 2019). Tümevarım, akıl yürütme olarak tümevarım ve ispat yöntemi olarak tümevarım olmak üzere iki kısımda incelenmektedir.

2.2.1.1. İspat Yöntemi olarak Tümevarım

Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir $P(n)$ açık önermesi için aşağıdaki üç adım tamamlanırsa $P(n)$ açık önermesi tüm doğal sayılar için doğru demektir.

- 1.adım: $n=1$ için elde edilen $P(1)$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.
- 2.adım: $n=k$ için elde edilen $P(k)$ önermesinin doğru olduğu kabul edilir.
- 3.adım: $n=k+1$ için elde edilen $P(k+1)$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.



Şekil 1. Domino Taşları. Houston, K. (2015). Matematikçi Gibi Düşünmek: Lisans Matematiği İçin Bir Kılavuz. Palme

.Tümevarım ispat yöntemini yıkılan domino taşlarına benzetmek mümkündür: 1.taş yıkılıyorsa aradaki her bir taşın yıkılması durumunda bir sonraki taş da yıkılıyorsa tüm taşlar yıkılır. Tümevarımın ikinci adımı sadece kabulden ibarettir. İkinci adımda yapılan kabul genellikle üçüncü adımın doğruluğunu gösterirken kullanılır (Çelik, 2018).

Kabul edelim ki, n doğal sayısına bağlı bir $T(n)$ önermesi vardır. Eğer;

1) $T(1)$ gerçek ise,

2) $T(n)$ in gerçek olmasından

3) $T(n+1)$ in gerçek olması saptanırsa, o zaman $T(n)$ önermesi $\forall n \in \mathbb{N}$ için gerçektir (Nasibov ve Kaçar, 2008).

Örnek: Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1+3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2$ olur önermesini tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayalım.

İspat:

1. Bu önerme, $n = 1$ için $1^2 = 1$ olur. Bunun doğru olduğu açıktır.

2. $n=k$ için $P(k)= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$ doğru olduğunu kabul edelim.

3. $P(k+1)= 1+3+5+7+\dots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$ olduğunu göstermeliyiz.

Bunu doğrudan ispatlayalım. Kabul edelim ki $1+3+5+7+\dots+(2k-1) = k^2$ olsun.

$$= 1+3+5+7+\dots + (2(k+1)-1)$$

$$= 1+3+5+7+\dots + (2k-1) + (2(k+1)-1)$$

$$= 1+3+5+7+\dots + (2k-1) + (2(k+1)-1)$$

$$= k^2 + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1$$

$$= (k+1)^2$$

O hâlde $1+3+5+7+\dots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$ olur. Yani $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ doğrudur.

Tümevarım yöntemine göre $1+3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2$ eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur (Hammack, 2018).

Graham, Knuth ve Patashnik (1998)'in kitabında, "Tümevarımla kanıt merdivenden çıkmayı öğrenmek gibidir." benzetmesi yapılmaktadır. "Merdivene adımını atmayı öğrenmek

gerekir her şeyden önce. Ardından, her basamaktan bir sonraki basamağa nasıl çıkılacağı öğrenilmeli. İşte merdiven çıkmak bu kadar basittir!’’ (Sayar, 2005).

2.2.2.2. Akıl Yürütme Olarak Tümevarım

Özelden genele ya da olaylardan yasalara doğru akıl yürütmedir. Özel olay ya da durumların gözlemlerinden genel bir sonuca ulaşılması hedeflenir (Aksoy, 2003). Bizi tek tek olgulardan çıkararak genel olgulara ulaştıran düşünme biçimidir (Baki, 2020). Sonucun öncüllerde bildirileni aşan bir genelleme niteliği taşıdığı akıl yürütme türüne endüksiyon, tümevarımsal akıl yürütme veya tümevarım denir. Tümevarımsal akıl yürütmede sonuç önermesini bir genelleme kılan yön ise, sonuç önermesinin öncüllerin içeriğini aşan bir kapsama sahip olmasıdır (Özlem, 2004).

Örneğin;

Gözlediğim birinci aslanın yelesi vardı.

Gözlediğim ikinci aslanın yelesi vardı.

Gözlediğim üçüncü aslanın yelesi vardı.

Gözlediğim n'inci aslanın yelesi vardı.

O halde, bütün aslanların yelesi vardır (Özlem, 2004).

Görüldüğü gibi tümevarımsal akıl yürütme, bilimsel manada bir nedensellik fikri oluşturduğu gibi deneyimler doğrultusunda belli yargılar taşımaya sebep olabilir. (Navruz, 2012)

2.2.3. Tümdengelimsel Akıl Yürütme

Tümdengelimde genelden özele, bütünden parçaya gidilir. Tümdengelimli akıl yürütme, genel varsayımları, prosedürleri veya ilkeleri uygulayarak bir sonuca varma sürecidir (Aufmann vd. 2007). Tümdengelim yoluyla akıl yürütme; mantıksal çıkarım adımları

izlenerek genelden özele, geçerli bir önermeden yola çıkılarak geçerli bir sonuca ulaşılabilceği varsayımına dayanır. Örneğin; bütün kuşlar kanatlıdır, güvercinin de kanatları vardır, o halde güvercin bir kuştur. Bu yaklaşımın temel sınırlılıkları; ancak belli bir dizi ifadeyi ele alması, gözlem ve tecrübe ile ilişkili olmayıp zihinsel bir egzersiz niteliğinde olmasıdır. Tümdengelim yoluyla akıl yürütme aslında bir kanıtlama yöntemi olup, öncüllerden yola çıkılarak özel önermeler elde edilir.(Ateş, 2019, s.37)

2.2.4. Abdüktif Yollarla Akıl Yürütme

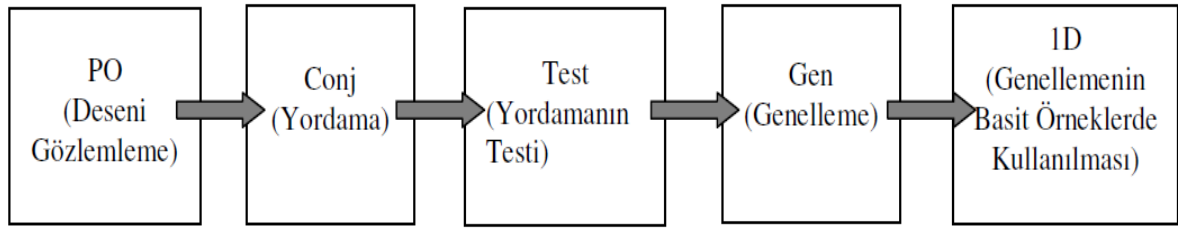
Abdüktif akıl yürütme genel hatlarıyla tümevarımsal akıl yürütmeye benzetilmektedir (Ateş, 2019). İki biçimde olabilir. İlki, iddia ve gerekçe verilerinden sonuç çıkarmaktır. İkincisi, iddianın verilerini ve gerekçelerini ortaya çıkarmaktır. Abdüktif akıl yürütme, iddiaları açıklayabilen unsurlardan sonuç çıkarmaktır. Genel anlamda abdüktif akıl yürütme, bir ifade ile ilgili gerekli bilgiye sahip olamadığımız durumlarda, elde olan verilerden en iyi çıkarımı yapma şeklinde açıklanabilir.(Uğurel, 2020, s.100)

2.3. Tümevarımsal Akıl Yürütme Süreçleri

Tümevarımsal akıl yürütme süreci, belirli matematik problemlerini çözme sürecinde ortaya çıkar. Bu süreç, belirli gözlemler, ardından tahminler yapmak için bazı ayarlamalar ve tahminler en yaygın hale geldikçe devam eden problem çözme sürecine paraleldir (Navruz, 2012). Polya (1967) tümevarımsal akıl yürütme sürecini;

- a) Özel durumları gözlemlemek,
- b) Önceki özel durumlara dayalı olarak formülleri yordamak,
- c) Genellemek
- d)Yordamayı yeni özel durumlarda kullanmak olmak üzere dört aşamada ele almıştır.

Reid (2002) yaptığı çalışmada tümevarımsal akıl yürütme sürecini 5 aşamada toplamıştır.



Şekil 2. Reid'in 5 Aşamalı Modeli. Navruz, V. (2012) İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde sergiledikleri tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

Reid (2002), Polya (1967) 'dan farklı olarak yordamanın testini de tümevarımsal akıl yürütme süreçlerine eklemiştir. Tümevarımsal akıl yürütme süreci bilişsel bir süreç olduğu için basamaklar arasında keskin ayrımlar yapmak mümkün olmamaktadır. Her araştırmacı deneyimleri doğrultusunda basamaklara ayırıp isimlendirmiştir.

Cañadas ve Castro (2007), Polya (1967) ve Reid (2002) çalışmalarından sonra 7 aşamalı tümevarımsal akıl yürütme süreçlerini açıklamışlardır. Cañadas ve Castro (2007) tarafından ele alınan ve deneysel yordama türündeki (Cañadas v.d., 2008) bu yedi aşamalı model;

- (a) Örüntüyü Gözlemek,
- (b) Özel Durumların Düzenlenmesi,
- (c) Örüntüyü Araştırmak ve Tahmin Etmek,
- (d) Formülü Yordamak,
- (e) Yordamayı İspatlama,
- (f) Genellemek,
- (g) Genellemeyi (Genel Yordamayı) ispatlama aşamalarından oluşmaktadır (Navruz, 2012).

Örüntüyü araştırmak ve tahmin etmek basamağı ile formülü yordamak basamaklarını yordama olarak tek basamakta toplamıştır. Araştırma ve örüntüyü tahmin etme, örüntünün bir sonraki veya yakın bir terimini tahmin etmek anlamına gelirken (Cañadas v.d. 2008)

yordama, örüntünün uzaktaki herhangi bir terimi için çıkarımda bulunmak veya örüntünün bütün terimlerine uygulanabilen basit bir formül üretmek anlamına gelmektedir. Bu araştırma kapsamında bu 2 aşama birleştirilerek ‘yordama’ aşaması şeklinde ele alınmıştır. (Navruz, 2012)

Navruz’un (2012) düzenlediği tümevarımsal akıl yürütme modeli şu şekildedir;

1. Gözlemlleme
2. Gözlemlerin organizesi
3. Yordama
4. Yordamanın Testi
5. Genelleme
6. Genellemenin Testi olarak 6 basamakta toplamıştır.

Bu çalışmada kullanılacak olan Navruz (2012)’un 6 basamakta topladığı tümevarımsal akıl yürütme süreçleridir.

İlk basamak olan gözlemlleme basamağı, problem kurgusundaki özel durumlarla ilk deneyimlerin yaşandığı bir başlangıç noktasıdır (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Gözlemlleme basamağı bireyin zihninde gerçekleşen ve açığa çıkması bir o kadar güç olan bir nitelik taşımaktadır. Çünkü problem türüne göre gözlemlerin yansıması da farklılık arz etmektedir (Navruz, 2012).

İkinci basamak gözlemlerin organizesidir. Gözlemlerin organizesi basamağı, gözlemlenen özel durumların düzenlenmesi ve sistematik bir hale getirilmesi için seçilen stratejileri içermektedir (Allen, 2001; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Araştırma kapsamında seçilen bu stratejiler tablo oluşturma, listeleme, grafik çizme, şekille gösterme, aritmetiksel olarak ifade etme, adım sayısı ve terim sayısını eşleştirme şeklinde ele alınmıştır. Kısacası gözlemlenen örüntünün öğrenciler tarafından farklı bir temsille ifade edilmesi bu basamakta gerçekleştirilmiştir (Navruz, 2012).

Sürecin üçüncü basamağı yordama basamağıdır. Bu basamak, Cañadas ve Castro’nun (2007) ve Cañadas v.d.’nin (2008) yorumladığı araştırma ve örüntüyü tahmin etme basamağı ile

birleştirilmiştir. Çünkü araştırma ve örüntüyü tahmin etme, örüntünün bir sonraki veya yakın bir terimini tahmin etmek anlamına gelirken (Cañadas v.d., 2008) yordama, örüntünün uzaktaki herhangi bir terimi için çıkarımda bulunmak veya örüntünün bütün terimlerine uygulanabilen basit bir formül üretmek anlamına gelmektedir. Navruz (2012) bu araştırma kapsamında bu 2 basamağı birleştirerek ‘yordama’ basamağı şeklinde ele almıştır. “Örüntü problemlerinin a şikkında doğrudan örüntünün uzakta bir terimi sorulmuştur ve problemlerin hitap ettiği basamak doğrudan yordama basamağıdır. Bu basamak, araştırma kapsamında bir sonraki adımı yazma, adımları teker teker ileriye taşıma, doğrudan uzaktaki bir adımı bulma, a şikkındaki adıma ulaşmak için 4 işlem yoluyla aritmetiksel sonuçlara ulaşma, tüm adımların gidişatı hakkında genel ancak şüpheli bir fikir söyleme şeklindeki göstergelerle tespit edilmiştir.” (Navruz, 2012).

Dördüncü basamak yordamanın testidir. Bu basamakta genel durumlar hariç sadece yeni özel durumlar için kontroller gerçekleştirilir (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Araştırmada bu basamak, yordama ile oluşan çıkarımın birkaç özel durumda denenmesi, bulunan ilişkinin verilen adımlara uygulanarak doğruluğunun test edilmesi, önce teker teker adımların ilerletilmesiyle ulaşılan adıma bir de kurulan ilişki yoluyla ulaşılarak karşılaştırmaların yapılması şeklinde ele alınmıştır (Navruz, 2012).

Sürecin beşinci basamağı genellemedir. Bu basamak, uygun bir yordamadan özel durumlara bağlı olmayan, genel bir kurala ulaşmak anlamına gelmektedir (Duval, 1990; Akt. Cañadas v.d. 2008; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Araştırma kapsamında bu basamak; cebirsel veya sözel formüller yazma, örüntünün n. adımı hakkında fikir üretme ve örüntünün genel terimine ulaşmaya çalışma şeklinde incelenmiştir (Navruz, 2012).

Sürecin son basamağı ise genellemenin testidir. Bu basamak, matematiksel ispatlarla genellemenin doğru olduğuna karşıdaki kişiyi inandırmaktır (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Bu araştırmada genellemenin testi basamağı, üretilen formülün önceki adımlarda denenerek test edilmesi veya aynı formülün başka yollarla üretilmesi şeklinde ele

alınmıştır. Araştırmada bu basamağın, üretilen formüllerin kontrolü şeklinde gerçekleştiği görülmektedir (Navruz, 2012).

2.4. İlgili Araştırmalar

Tümevarımsal akıl yürütme genel olarak verilen şekil veya sayı örüntülerini formüle genelleme süreci olarak tanımlanmaktadır (Erol, 2019). Tümevarımsal akıl yürütme genellemeyi de içine alan bir düşünme süreci olduğu için ilgili araştırmalar başlığı “genelleme ile ilgili çalışmalar” ve “tümevarımsal akıl yürütme ile ilgili çalışmalar” şeklinde iki kategoride incelenmiştir.

2.4.1.Ulusal Çalışmalar

2.4.1.1. Genelleme İle İlgili Çalışmalar

Yeşildere ve Akkoç (2010) tarafından örüntüler ve örüntülerin genellemesi boyutunda yapılan araştırmada ise sayı örüntülerinin cebirsel genellemesinde aday ilköğretim matematik öğretmenlerinin kullandıkları stratejiler konusu incelenmiştir. Araştırmada sayı örüntülerinin genel terimini buldurmaya yönelik, açık uçlu aritmetik ve aritmetik olmayan örüntülerden oluşan 5 soru kullanılmıştır. Araştırmaya 147 matematik öğretmen adayı katılmıştır. Öğretmen adaylarının genellemelerde kullandıkları yöntemler ve matematiksel modeller şeklinde elde edilen veriler araştırmacılar tarafından nitel bir yöntemle analiz edilmiştir. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının sayı örüntülerindeki kuralları terimler arası farka bağlı olarak oluşturdukları ve görsel örüntüleri amacına uygun olmayan bir şekilde kullandıkları görülmüştür.

Yeşildere ve Akkoç (2011) diğer bir çalışmasında matematik öğretmen adaylarının örüntüleri genelleme süreçlerini incelemek ve bu süreçte model kullanımında tercih ettikleri

görsel kalıpları incelemişlerdir. 145 ilköğretim matematik öğretmen adayına lineer olan ve lineer olmayan şekil örüntülerini genellemeye yönelik dört tane açık uçlu problem yöneltilmiştir. Cebirsel genelleme sürecinin analizinde Radford (2006) tarafından ortaya konulan kuramsal çerçeve kullanılmıştır. Yapılan veri analizi, öğretmen adaylarının genelleme sürecinde doğrusal olmayan modele göre doğrusal şekil modelinden daha fazla yararlandıkları göstermektedir. Ayrıca verilen bir örüntüdeki ortak özelliklerin belirlenmesi bağlamında genellemeye yardımcı olacak seçimler yapmadıkları, sadece bir şekilde sonraki terimi bulmak için ortak özellikleri araştırdıkları gözlemlenmiştir.

Göl ve Duru (2016), lise öğrencilerin genelleme yapma becerileri araştırmışlardır. Araştırmada, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Verileri, araştırmacılar tarafından geliştirilen 3 adet rutin olmayan problem ve öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış mülakat ile toplanmışlardır. Araştırma, 2015-2016 eğitim-öğretim yılında Ege bölgesinde bulunan bir lisenin 12.sınıfında öğrenim gören 9 öğrencisine uygulanmıştır. Araştırmanın sonucunda, çalışmaya katılan öğrencilerin genelleme basamağında başarılı olduklarını, genelleme yapan öğrencilerin neredeyse tamamının Radford ve Peirce (2006) tarafından ortaya konmuş olan genelleme hiyerarşisinde en üst seviye olan Sembolik Genelleme yaptığını ortaya çıkmıştır. Ayrıca soruların zorluk dereceleri arttıkça genelleme basamağını gerçekleştiren öğrenci sayısında azalmanın olduğu görülmüştür.

Yıldız ve Alaylı (2019)'nın yaptığı çalışma, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının örüntü genellemesi hakkındaki konu alan ve pedagojik alan bilgileri incelemiştir. 26 öğretmen adayına sabit değişen şekil örüntüsü problemi ve bu problemle ilişkili olarak açık uçlu sorular yönlendirmişler ve verileri Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından geliştirilen “Öğretmek için Matematiksel Bilgi (ÖMB)” modeli kullanılarak içerik analizi ile incelemişlerdir. Öğretmen adaylarının tümünün örüntüyü cebirsel olarak doğru genellegebildiklerini ve çoğunun da genellemeye ulaşırken sayısal akıl yürütme kullandığını

ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının, öğrencilerin problem çözme konusundaki bilgilerinin, genellikle kendi çözüm yöntemlerine dayandığı tespit edilmiştir.

2.4.1.2. Akıl Yürütme İle İlgili Çalışmalar

Çimen ve Yalmaç (2019) yaptığı çalışmada TIMSS soruları aracılığıyla fen bilgisi öğretmen adaylarının akıl yürütme becerilerinin belirlenmesi amaçlamışlardır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının akıl yürütme becerilerinin alt boyutlarını ve sınıf düzeyine göre incelemişlerdir. Uşak Üniversitesi Fen Bilgisi Öğretmenliği bölümündeki 116 öğretmen adayı ile çalışmışlardır. Çalışma, nicel araştırma yaklaşımlarından tarama modeline göre tasarlanmıştır. TIMSS’de yer alan akıl yürütme sorularından oluşan test, öğretmen adaylarına veri toplama aracı olarak uygulamış ve veriler tek faktörlü varyans analizi (ANOVA) ve Kruskal Wallis testleri ile analiz etmişlerdir. Araştırma bulgularında akıl yürütmenin alt boyutu olan orantısal düşünmede sınıf düzeyi arttıkça orantısal düşünme becerisinin artış gösterdiği görülmüş ve katılımcıların akıl yürütme becerisindeki ortalamaları yüksek olmamakla birlikte, sınıflara göre boyutlar arasında ilişkisel düşünme boyutunda istatistiksel olarak anlamlı farka ulaşıldığını tespit etmişlerdir.

Çelik, Obay ve Özdemir (2020)’in yaptığı çalışma nitel araştırma yöntemlerinden fenomenolojik desende tasarlanmıştır. Araştırma Güneydoğu Anadolu bölgesinde bulunan bir üniversitenin eğitim fakültesi, matematik eğitimi anabilim dalında öğrenim gören ve amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilen 107 öğretmen adayı üzerinde yürütmüşlerdir. Çalışmada veri toplamak amacıyla araştırmacılar tarafından geliştirilmiş öğretmen adaylarının matematiksel akıl yürütme ve problem çözme becerileri konusundaki görüşlerini belirlemek için yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmışlardır. Araştırma sonuçları incelendiğinde; öğretmen adaylarının akıl yürütme konusunda yeterli bir bilgi birikimine sahip olmadıkları, böyle bir eğitime ihtiyaç duydukları, akıl yürütmeye karşı olumlu tutumlar

sergilediklerini tespit etmişlerdir. Diğer yandan öğretmen adayları problemi çözüm bekleyen eylem ve sorun olarak gördüklerini belirtmişlerdir.

2.4.1.3. Tümevarımsal Akıl Yürütme İle İlgili Çalışmalar

Navruz (2012)'un yaptığı çalışmada ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde sergiledikleri tümevarımsal akıl yürütme sürecinin aşamalarını incelemiştir. Araştırma ilköğretim 8.sınıftan 210 tane öğrenciye uygulanmış ve veriler yazılı olarak toplanmıştır. Uygulanan 10 soruluk veri toplama aracından sonra seçilen 9 tane öğrenci ile yarı-yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Verilerin analizinde Canadas (2007)'ın oluşturduğu “7 Aşamalı Düşünce Modeli” temel alınmıştır. Tümevarımsal düşünce süreci aşamaları arasında güçlü bir ilişki olduğu ve öğrenciler tarafından herhangi bir aşamada gösterilen başarının bir sonraki aşamadaki durumu etkilediği tespit edilmiştir. Navruz (2012) 'a göre ulusal anlamda yapılan tümevarımsal düşünce araştırmalarının ilk boyutunu ‘İspat’ ikinci boyutunu ‘Akıl Yürütme ve Muhakeme Süreçleri’ üçüncü boyutunu ise ‘Örüntüler’ konusu oluşturmaktadır.

Erol (2019) ortaöğretim öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme becerilerini incelemiştir. Ortaöğretim öğrencilerinin karşılaştıkları problemlerin çözümünde kullandıkları tümevarımsal muhakeme sürecinin aşamaları incelenmiş ve bu aşamaların birbiri ile olan ilişkisi tespit edilmiştir. Araştırmaya katılan 188 ortaöğretim öğrencisine alan yazını taraması sonucu tümevarımsal düşünce gerektiren, örüntü bulma ve ilişkileri genelleme konusunda geliştirilen 3 soruluk yazılı sınav uygulanmıştır. Yazılı sınav gönüllü öğrencilere üç farklı günde toplam üç aşamada uygulanmıştır. Daha sonra seçilen öğrenciler ile yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Toplanan veriler nitel yöntemler ile analiz edilmiştir. Bu çalışmada, tümevarımsal muhakeme aşamaları Canadas (2007)'ın oluşturduğu, 7 aşamalı model temel alınarak Navruz (2012)'un uyarladığı “6 Aşamalı Model” kullanılmıştır. Aşamaların hangi öğrenme alanında nasıl sergilendiği ve varsa

aşamalar arası ilişkiler, elde edilen nitel veriler yardımıyla yorumlanmıştır. Bulgular, yordamanın testi ve genellemenin testi aşamalarında başarının çok düşük olduğunu göstermiştir. Ayrıca elde edilen bulgular, şekil verilmeyen sorularda başarının daha düşük olduğunu göstermiştir. Bunun yanı sıra tümevarımsal muhakeme süreci aşamaları arasında güçlü bir ilişkinin varlığını ve öğrencilerin herhangi bir aşamadaki başarısının bir sonraki aşamadaki başarısını etkilediği tespit edilmiştir.

2.4.2. Uluslararası Çalışmalar

2.4.2.1. Tümevarımsal Akıl Yürütme İle İlgili Çalışmalar

Canadas ve Castro (2007), tümevarımsal akıl yürütme analizinde oluşturdukları kategori modellemesi çalışmalarını mülakatlar yoluyla 12 öğrenciye uygulamışlardır. Öğrencilere iki tane matematiksel problem yönelterek problem çözme süreçlerini incelemişlerdir. Polya (1967) ve Reid (2002)'in aşamalarını kaynak olarak olan araştırmacılar tümevarımsal akıl yürütme sürecini 7 basamakta toplayarak araştırmalarını tamamlamışlardır. Öğrencilerin, oluşturdukları genellemeleri bazı özel durumlar için deneyerek kontrol ettikleri, bazılarının genel ifadesini kontrolünü sağlama ihtiyacı olduğu görülmüştür. Öğrencilerin genellikle aritmetiksel örüntülerde bir sonraki adımı kolaylıkla bulabildikleri, lineer olmayan artışlar içeren diğer örüntü türlerinde ise sonraki adımı bulmada zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca örüntüde genel terim ifade edilirken öğrencilerin cebirsel dil kullanabilmelerinin sınıf düzeyiyle ilgisi olmadığı tespit edilmiştir.

Klauer ve Phye, (2008) “Tümevarımsal Akıl Yürütme: Bir Eğitim Yaklaşımı” çalışmalarında, tümevarımsal problemlerle uğraşırken farklı bilişsel süreçleri tanımlamak için tümevarımsal akıl yürütmeyi incelemişlerdir. Tümevarımsal akıl yürütme stratejisinin kullanımındaki eğitimin, zekâ performansının artması ve sınıf konusunun daha iyi akademik

öğrenilmesi açısından bilişsel işleyişi geliştireceğini varsaymışlardır. İnceleme ve meta-analiz yaklaşık 3.600 çocukla ve 74 eğitimciyle yapılmıştır. Her iki hipotez de doğrulanmıştır. Ayrıca önerilen stratejinin teorik ve eğitimsel açıdan ümit verici olduğu ve geniş bir yaş aralığına ve entelektüel kapasiteye sahip çocukların bu tür eğitimden faydalandığı sonucuna varılmıştır.

Molnár ve Csapo (2010) yaptıkları çalışmada iki araştırma paradigmasını birbirine bağlamaktadır. Bunlardan biri, tümevarımsal muhakemenin niteliklerini ve mekanizmalarını inceleyen ve bir okul çağını önemli bir yaş aralığı boyunca nasıl tümevarımsal akıl yürütmenin nasıl geliştiğini ve diğer bazı bilişsel işlevlerle ilgilidir. Tümevarımsal akıl yürütmenin altı testi (sayı analogileri, sözel analogiler, sayı serileri, sözel seriler, kodlama, dışlama) 3, 5, 7, 9 ve 11. sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Öğrencilerin okul başarısı ile ilgili verileri toplamışlar ve bilim testi uygulamışlardır. Yapılan çalışmada tümevarımsal akıl yürütmenin en hızlı gelişiminin 5. ve 9. sınıflar arasında gerçekleştiğini ortaya koymuştur.

Molnár (2011) birinci sınıf öğrencileri için tümevarımsal akıl yürütmede bir eğitim programına odaklanmakta ve değerlendirme çalışmasının doğrudan sonuçlarını ve uzunlamasına etkilerini araştırmıştır. Eğitim, Klauer'un tümevarımsal akıl yürütme teorisine ve “Çocuklar İçin Bilişsel Eğitim” kavramına dayanmaktadır (Klauer, 1989). Eğitim programı, tümevarımsal akıl yürütme ile çözülebilecek 120 problemten oluşmaktadır. Eğitim egzersizleri için araçlar, hedeflenen grubun yaşına uygun olacak şekilde seçilmiştir. Çalışmadaki deney grubu 90 öğrenciden oluşurken kontrol grubu 162 kişiden oluşmuştur. Test öncesi ve sonrası ile takip çalışmasında (bir yıl sonra) tümevarımsal bir akıl yürütme testi kullanılmıştır. Deney grubu, eğitimin hedeflediği her beceri alanında önemli ölçüde daha yüksek puan almıştır. Yapılan testlerin öncesinde veya sonrasında cinsiyete göre farklılık tespit edilmemiştir. Araştırma, eğitimin etkisinin öğrencilerin tümevarımsal akıl yürütme düzeyinden bağımsız olarak zaman içinde sabit olduğu kanıtlanmıştır. Bu çalışma, bu erken yaşta tümevarımsal muhakemenin çok etkili bir şekilde geliştirilebileceğine dair kanıtlar sağlamıştır.

Molnár, Greiff, Csapó (2013) yılında yayımladıkları makalede üç farklı türde akıl yürütmeye odaklanmaktadır. Bunlar; ‘‘Alana Özgü Problem Çözme, Karmaşık (Genel) Problem Çözme ve Tümevarımsal Akıl Yürüme’dir. Çalışmanın amacı tümevarımsal akıl yürütmenin gelişimsel düzeylerindeki farklılıkları, alanlara özgü problem çözme ve üç yaş grubu arasındaki karmaşık problem çözmei incelemek ve üç yapı arasındaki ilişkileri açıklamaktır. Örneklem grubunu Macar ilköğretim ve ortaöğretim okullarında 3. ile 11. sınıf arasındaki yaklaşık 1100 öğrenci (9-17 yaş arası) oluşturmaktadır. Becerilerin her biri lojistik bir eğri ile tanımlanabilecek gelişimsel bir eğilim göstermiştir. Her alanda gelişme hızının nispeten yavaş ve 7. sınıfların en yüksek eğilimi gösterdiklerini ifade etmişlerdir. Bu çalışma tümevarımsal muhakeme, alana özgü problem çözme ve karmaşık problem çözmenin birbiriyle ilişkili fakat farklı yapılar olduğuna dair kanıtlar sunmuş ve bu becerilerin 6. ve 8. sınıflar arasında en verimli şekilde geliştirilebilir olduğunu ortaya koymuştur.

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Araştırma Modeli

Tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin ortaya çıkarılması için düzenlenen çalışma ortamının, araştırmacı tarafından oluşturularak veya oluşan ortamın araştırmacı tarafından dikkatle incelenip kaydedilerek bu alana odaklanabilmeyi ve gereksiz verilerden kaçınılarak yalnızca gerekli verilerin elde edilmesini sağlaması gibi sebeplerle eldeki çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (örnek olay yöntemi) tercih edilmiştir (Yıldırım ve Şimsek, 2006; Navruz, 2012). Durum çalışması gerçekte ortamda neler olduğuna bakma, sistematik bir biçimde verileri toplama, analiz etme ve sonuçları ortaya koyma yoludur. Ortaya çıkan ürün ise, olayın niçin o şekilde olduğunun ve gelecek araştırmalar için daha detaylı olarak nelere odaklanmanın gerektiğinin keskin bir biçimde anlaşılmasıdır (Davey, 1991). Bu yöntem, tüm durumlar için geçerli olmayıp belirli durumlar için geçerli olmasından dolayı bu araştırma da durum çalışması yapılacaktır.

3.2. Çalışma Grubu

Bu araştırmanın çalışma grubunu 2021-2022 güz yarıyılında Ankara’da bulunan bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenimlerine devam eden

öğretmen adayları oluşturmaktadır. Programın her bir kademesinde bulunan dörder öğretmen adayının gönüllülük esasına göre araştırmaya dahil edilmiştir. Çalışmanın yapıldığı dönemde pandemi nedeniyle kısıtlamalar olmasından dolayı daha fazla sayıda öğretmen adayına ulaşılamamıştır. Bu yüzden araştırma, her sınıf kademesinden dört öğretmen adayıyla sınırlı kalmıştır. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının isimleri bulguları paylaşırken kullanılmamıştır. Çalışmaya katılmış olan 16 öğretmen adayına sırasıyla Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15, Ö16 isimleri verilmiştir.

Tablo 2.
Katılımcı Listesi

Katılımcılar	Sınıfı	Cinsiyeti
Ö1	1	KADIN
Ö2	1	KADIN
Ö3	1	ERKEK
Ö4	1	KADIN
Ö5	2	KADIN
Ö6	2	KADIN
Ö7	2	KADIN
Ö8	2	ERKEK
Ö9	3	KADIN
Ö10	3	KADIN
Ö11	3	KADIN
Ö12	3	ERKEK
Ö13	4	KADIN
Ö14	4	KADIN
Ö15	4	ERKEK
Ö16	4	ERKEK

(Ö: Öğretmen Adayı)

3.3.Pilot Çalışma

2020-2021 eğitim öğretim yılının bahar döneminde İç Anadolu'da bulunan bir üniversitenin matematik öğretmenliği öğrencilerine (1.,2.,3.,4.sınıf) pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışmanın yapıldığı üniversite araştırmacının bulunduğu konuma yakın olması ve çalışma için daha kolay gönüllü bulunabilmesi açısından asıl uygulamanın yapıldığı üniversiteden farklı olarak seçilmiştir. Yapılan pilot çalışma, asıl uygulama öncesinde araştırmacıya deneyim kazandırmak, araştırmada kullanılması hedeflenen problemlerin öğretmen adayları tarafından anlaşılır olup olmadığını incelemek ve problemlerin hedeflenen amaçların doğrultusunda çalışıp çalışmadığını test etmek amacıyla yapılmıştır.

Yapılan pilot çalışmaya 1.sınıflardan 2, 2.sınıflardan 2, 3.sınıflardan 1, 4.sınıflardan 2 kişi olmak üzere toplam 7 öğretmen adayı katılmıştır. Pilot çalışmada da asıl uygulamada olduğu gibi öğretmen adaylarının gizliliğini korumak için isimlerinin yerine PÖ1,PÖ2,PÖ3,PÖ4,PÖ5,PÖ6,PÖ7 şeklinde kodlamalar kullanılmıştır. Araştırmada öğretmen adaylarına altı adet örüntü problemi verilmiştir ve adaylardan bu problemleri çözmeleri istenmiştir. Elde edilen verilerde problemlerden bir tanesinin anlaşılır bulunmadığı bir diğerrinin ise tümevarımsal akıl yürütme süreçlerini incelemede yetersiz bulunduğu tespit edilmiştir. Bu doğrultuda pure matematik alanında ve matematik eğitimi alanında uzman olan iki uzman görüşü alınarak problemler iptal edilmiş ve çalışmada bu problemler kullanılmamıştır.

3.4. Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması

Tümevarımsal akıl yürütme, genel bir düşünme becerisidir (Pellegrino ve Glaser, 1982; Ropo, 1987). Araştırmada öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi hedeflendiği için bu düşünme süreçlerini açığa çıkarılacağı düşünülen problemlerin yöneltilmesi amaçlanmıştır. Problemler için öncelikle literatür taranmıştır. Tümevarımsal akıl yürütme aşamalarını (gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama,

yordamanın testi, genelleme, genellenmenin testi) inceleyebilmek için matematik alanı ve matematik eğitimi alanlarında uzman olan iki uzmanın görüşleri doğrultusunda dört problem belirlenmiştir. Yönlendirilen problemler iki şıktan oluşmaktadır. İlk seçenekte ulaşılması istenilen bir terim verilmiştir. Problemlerin ikinci seçeneğinde ise yönlendirilen problemde bulunan örüntünün genel terimini buldurmak hedeflenmiştir.

Problemler öğretmen adaylarına mail veya mesaj yoluyla gönderilmiştir.Öğretmen adaylarına “Sayın öğretmen adayları, gönüllü olduğunuz çalışma bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Sizlere yönlendirdiğimiz problemlerin amacı problemleri doğru veya yanlış çözdüğünüzü ölçmek değil nasıl düşündüğünüzü öğrenmektir. Bu yüzden çözümleri yaparken ne düşündüğünüzü de kağıt üzerine sözel olarak yazmanız çalışma için daha faydalı olacaktır. Problemlerde istenilen formüller için internetten yardım almazsanız daha etik bir çalışma olacağını belirtmek isterim. Başarılar dilerim.” şeklinde bir yönerge verilmiştir.Öğretmen adayları cevaplarını pdf dosyası formatında araştırmacıya göndermiştir.

Tümevarımsal akıl yürütme sürecinde basamaşar arasında keskin geçiş ve bağlantılar bulunmamaktadır. Düşünme sürecinde önceki basamaklar sonraki basamağı etkileyebildiği gibi basamak atlayarak sonraki düşünme basamağına da geçilebilir. Yazılı kağıt üzerinde basamakların tamamını görmek mümkün olmadığı için çalışma yarı yapılandırılmış görüşmelerle desteklenmiştir. Bu bölüm yazılı verilerden alınan problem çözümleri ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden yapılan alıntılarla desteklenmiştir.Yapılan çalışmada öğretmen adaylarının kağıt üzerinde yaptıkları işlemlerde tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin tamamı gözlemlenememiştir. Yordamanın testi ve genelleneni testi basamakları yazılı kağıt üzerinde çoğunlukla atlanan basamaklar olduğu için adaylarla zoom uygulaması üzerinden görüşmeler yapılmıştır. Zoom görüşmelerinde öğretmen adaylarının kağıt üzerinde açığa çıkmayan tümevarımsal düşünce basamaklarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Görüşmelerde öğretmen adaylarının rızası alınarak bütün görüşme ses kaydına alınmıştır. Yapılan görüşmeler yaklaşık 20-25 dakika uzunluğundadır. Araştırmaya

katılan 16 öğretmen adayının 13 tanesiyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğretmen adaylarına yazılı kağıt üzerinde gözlemlenemeyen akıl yürütme basamakları hakkında sorular yöneltilmiş ve verdikleri cevaplar doğrultusunda değerlendirilmişlerdir. 3 öğretmen adayının yazılı kağıtları incelendiğinde yönlendirilen problemlerin her bir basamağını detaylı bir şekilde kağıt üzerinde ifade ettikleri görülmüş ve görüşme yapmaya gerek duyulmamıştır. Görüşmeler esnasında öğretmen adaylarına aşağıdaki gibi sorular yönlendirilmiştir.

- Problem için farklı bir formül daha geliştirilebilir miyiz?
- Kuralı oluştururken nasıl bir yol izlediniz?
- Örüntünün (uzaktaki adım için) 50. terimini nasıl bulabilirsin?
- Bulduğunuz genel terimin doğruluğunu kontrol ettiniz mi?

...

3.3.1. Araştırmada Kullanılan Problemler

Çalışmada öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçlerini (gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellenmenin testi) ortaya çıkaracak dört problem seçilmiştir. Veri toplama aracında sayı örüntüsü problemi, kağıt katlama problemi, satranç tahtası problemi ve kağıt ev problemi olmak üzere dört problem kullanılmıştır. Problemlerin iki tanesi aritmetik problem iki tanesi ise geometrik problemdir. Araştırmada kullanılan problemler EK-1’ de verilmiştir.

Problemler farklı düşünce kategorilerine göre seçilmiştir. Örneğin; kağıt katlama ve kağıt ev problemleri öğretmen adaylarının problem çözüm aşamasında deneyerek yapabileceği görsel yoğunluklu problemlerdir. Sayı örüntüsü probleminde görsel bulunmamaktadır. Öğretmen adaylarından sayı örüntüsünün sonraki adımlarını farklı methotlar deneyerek bulunması beklenmektedir. Satranç tahtası probleminde ise görsel verilip görselin içerisindeki örüntünün keşfedilmesi amaçlanmıştır.

Veri toplama sürecinde öğretmen adaylarına probleminde ilgili gerekli bilgiler ve yönergeler verilmiştir. Her problem için bir sayfa ayrılmıştır. Öğretmen adayları zaman kısıtlaması olmaksızın problemleri çözmüşlerdir. Öğretmen adayları yaptıkları çözümleri pdf formatına dönüştürerek araştırmacıya göndermişlerdir.

3.4. Araştırmanın Geçerlilik ve Güvenirliği

Çalışmada kullanılan problemler için öncelikle literatür taraması yapılmıştır. Pilot uygulama yapılmış ve sonuçlar doğrultusunda uzman görüşlerine başvurarak problemler için gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Geçerlik ve güvenirliliği arttırmak için örnek kodlamalar yapılmış ve yazılı kağıtlarının bazı kısımları paylaşılmıştır. Verilerin analizinde ölçme değerlendirme uzmanlarına danışılmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreci boyunca düşünme süreçlerini incelemek amacıyla yürütülecek olan bu çalışmanın temel veri kaynaklarını matematik öğretmen adaylarının yazılı dokümanları, araştırmacının gözlemleri ve öğretmen adayları ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu çalışmada elde edilen verilerin analizinde nitel veri analiz yöntemi olan betimsel analiz kullanılmıştır.

Yapılan tez çalışmasında öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçleri arasındaki bağlantıların nasıl kullanıldığını gözlemek ve bu akıl yürütme süreçleri arasındaki bağlantıların keşfedilmesi amaçlanmıştır. Tümevarımsal akıl yürütme süreçleri aşağıdaki gibidir:

- i. Tümevarımsal akıl yürütme sürecinin ilk basamağı gözlemlene basamağıdır. Eldeki çalışma açısından öğrencilerin örüntülerle ilk defa karşılaştıkları ve örüntü adımlarını ilk defa görüp adımlar arasındaki ilişkileri ilk defa fark ettikleri bir

basamak olarak değerlendirilmiştir (Navruz, 2012). Bu basamakta öğretmen adaylarının adımlar arasındaki ilişkiyi keşfedip adımlar arasındaki ilişkiyi tanımlaması beklenmektedir.

- ii. Tümevarımsal akıl yürütme sürecinin ikinci basamağı gözlemlerin organizesi basamağıdır. Gözlemlerin organizesi basamağı, gözlemlenen özel durumların düzenlenmesi ve sistematik bir hale getirilmesi için seçilen stratejileri içermektedir (Allen, 2001; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008; Navruz, 2012). Bu basamakta öğretmen adaylarından verilen örüntünün matematikselleştirilmesi beklenmektedir.
- iii. Tümevarımsal akıl yürütme sürecinin üçüncü basamağı yordama basamağıdır. Bu basamak için yorumlama basamağı da denilebilir. Bunun sebebi bu basamakta öğretmen adaylarının örüntünün bildiği adımlardan bilmediği adımlar için ileriye dönük tahminde bulunması beklenir. Sonraki adımlar için hipotez oluşturur.
- iv. Tümevarımsal akıl yürütme sürecinin dördüncü basamağı yordamanın testi basamağıdır. Bu basamakta yordama basamağında kurulan hipotez test edilir.
- v. Tümevarımsal akıl yürütme sürecinin beşinci basamağı genelleme basamağıdır. Bu basamakta yordama basamağında kurulan hipotezlerden yeni bir formül veya kural elde edilmesi gerekmektedir. Genel terimin bulunması gereken basamak genelleme basamağıdır.
- vi. Tümevarımsal akıl yürütme sürecinin son basamağı genellemenin testi basamağıdır. Bu basamakta genelleme basamağında yazdığımız genel terimin, formülün veya kuralın ispatlanması beklenmektedir. Yordamanın testi basamağının tam tersidir.

Çalışmada kullanılan veriler öncelikli olarak yazılı halde toplanmıştır. Veriler analiz edilirken öğretmen adaylarının yazılı kağıtları sınıf düzeylerine göre ayrılmış ve numaralandırılmıştır. Veriler tümevarımsal akıl yürütme basamaklarına (gözlemler, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi) göre

incelenmiştir. Çalışmada bulunan her bir problem ayrı ayrı incelenmiştir. Sınava katılan 16 öğretmen adayının her biri için bir kod verilmiştir. Kodlamalar ve akıl yürütme basamakları doğrultusunda bir frekans tablosu oluşturulmuştur.

Yazılı sınavda akıl yürütme basamaklarının tamamı gözlemlenemediği için kağıt üzerinde gelinen tümevarımsal akıl yürütme basamakları belirlenmeye çalışılmıştır. Belirlenen basamaklar “Doğru” ve “Yanlış” olmak üzere iki kategoride toplanmıştır. Belirlenen doğru ve yanlış kategorileri yapılan çözümler doğrultusunda kendi içlerinde farklı kategorilere ayrılmıştır.

Tablo 3.
Sayı Örüntüsü Probleminin Kodlama Örneği

ÖĞRENCİ KODU	GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA	YORDAMANIN TESTİ	GENELLEME	GENELLEMENİN TESTİ
Ö1	G-D	GO-D	YO-D	YT-D	GE-D	GT-D
Ö2	G-D	GO-Y	YO-Y	YT-Y	GE-Y	GT-Y
Ö3	G-D	GO-D	YO-D	YT-D	GE-D	GT-D
Ö4	G-D	GO-Y	YO-D	YT-D	GE-Y	GT-Y
Ö5	G-D	GO-D	YO-Y	YT-D	GE-D	GT-D

(G-Gözlemlenme, GO-Gözlemlerin Organizasyonu, YO-Yordama, YT-Yordamanın Testi, GE-Genelleme, GT- Genellemenin Testi, D- Doğru, Y- Yanlış)

Yukarıda verilen Tablo 3’te gösterildiği gibi Ö2 kodlu öğretmen adayı gözlemlerin organizasyonu kategorisinde GO-Y adımı sergilemiştir. Ö2 kodlu öğretmen adayı gözlemlerin organizasyonu basamağında verdiği cevap yanlış bulunmuştur. Kodlama bütün problemler ve öğretmen adayları için aynı doğrultuda devam ettirilmiştir.

3.5.1. Sayı Örüntüsü Problemi Kodlama Örneği

2,7,14,23...

Yukarıda bir sayı örüntüsünün ilk dört terimi verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 10.terimini bulunuz. Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.

b) Bu örüntünün n.adımı için nasıl bir kural ya da formül oluşturabilirsiniz? Bulduğunuz kural ya da formülü yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız.

Şekil 3. Sayı örüntüsü problemi. El Mouhayar, R.R., Jurdak, M.E. Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. Educ Stud Math 82, 379–396 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9434-6>

Yukarıda Şekil-7'deki problemde örüntünün ilk dört adımı verilmiştir. Öğretmen adaylarından ilk önce örüntünün terimler arasındaki ilişkiyi gözlemlemesi, örüntüyle ilgili yorumda bulunması ve örüntünün genel terimini yazması beklenmektedir. Problem iki basamaklıdır. İlk basamakta belirlenen bir terimin bulunması ikinci basamakta ise örüntünün genel teriminin bulunması istenmektedir.

Tablo 4.

Sayı Örüntüsü Probleminin Tümevarımsal Akıl Yürütme Süreci Basamakları

	GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA	GENELLEME
VERİLEN DURUMLAR İÇİN	2	1+2-1	1 ² +2.1-1	n ² +2n-1
	7	4+4-1	2 ² +2.2-1	
	14	9+6-1	3 ² +2.3-1	
	23	16+8-1	4 ² +8-1	
VERİLMİYEN DURUMLAR İÇİN	34	25+10-1	5 ² +2.5-1	
	47	36+42-1	6 ² +2.6-1	
	62	49+14-1	7 ² +2.7-1	

Gözlemlene basamağında öğretmen adaylarının verilen sayı örüntüsünde adımlar arasındaki ilişkileri keşfetmeleri beklenmektedir.

Gözlemlerin organizesi basamağında öğretmen adaylarının verilen örüntüyü gözlemledikten sonra farklı temsillerle ifade etmesi beklenmektedir. Bu basamakta önemli olan örüntüyü matematiksel dile dönüştürebilmektir. Yukarıdaki tabloda verildiği gibi bu basamakta öğretmen adayı örüntünün ikinci dereceden bir denklemden oluştuğunu ve adım sayısının tam karesiyle orantılı olacak şekilde artması gerektiğini fark etmesi beklenmektedir.

Yordama basamağında öğretmen adayının örüntü için hipotez kurması beklenir. Gözlemlerin organizesi adımıyla anlamlandırdığı kural için bu adımda problemin ilerisi için yorum yapması beklenir. Bu basamak bilinen adımlardan bilinmeyen adımlara ilerleme basamağıdır. Örüntünün bu basamağında öğretmen adaylarının gözlemlerin organizesi adımıyla bulduğu ifadeyi artık kısaltarak yazması gerekmektedir.

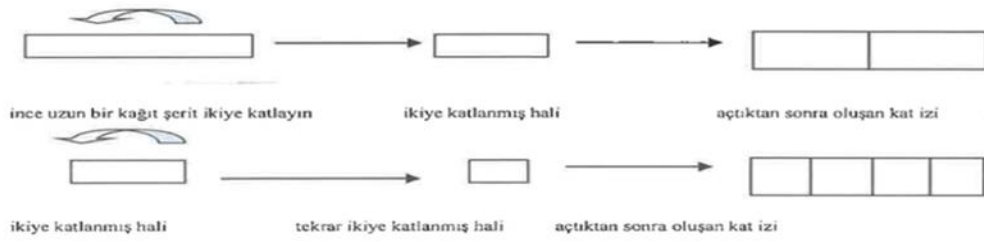
Yordamanın testi basamağında önceki adımda kurduğu hipotezin doğruluğu kontrol edilir. Verilen adımlardan hareketle verilmeyen adımları bulmayı denemesi beklenmektedir. Hipotez doğruysa genelleme basamağında genel terime dönüştürülerek yazılır.

Genelleme basamağı genel terimin bulunduğu basamaktır. Bu basamakta öğretmen adaylarının örüntü hakkında genel bir formül veya kural bulması beklenir.

Genellemenin testi basamağında oluşturulan kuralın doğruluğunun ispatlanması beklenir. Öğretmen adaylarından bu basamakta buldukları kural ya da formülü deneyerek doğruluğunu kanıtlamaları beklenir.

3.5.2. Kağıt Katlama Problemi Kodlama Örneği

Araştırmada kullanılan kâğıt katlama problemi aşağıda Şekil-4'te verilmiştir.



Yukarıda modellendiği gibi uzun bir kağıt şeridi uçlarından tutun ve ikiye katlayın. Bu işlem sonucunda bir tane kat yeri oluşur. Kağıt üzerinde bir kez daha aynı işlemi tekrarladığınızda bu sefer 3 kat yeri oluşur.

- Bu işlemi kaç kez yaparsanız kaç kat yeri oluşur?
- n.adım için nasıl bir kural ya da formül oluşturabilirsiniz? Bulduğunuz kural ya da formülü yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız.

Şekil 4. Kâğıt katlama problemi. Erol, G. (2019). Ortaöğretim öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme becerilerinin incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Sivas.

Verilen problem iki aşamalıdır. İlk aşamada belirli bir kat yeri sayısının bulunması beklenirken ikinci aşamada problemin genel teriminin bulunması beklenmiştir. Problemin tümevarımsal akıl yürütme basamakları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5.

Kâğıt Katlama Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları

	GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA	GENELLEME
VERİLEN DURUMLAR İÇİN	1.Katlama	2 bölge, 1 iz	2^1-1	
	• 1 iz			
	• 2 bölge			
	2.Katlama	2.2 bölge, 3 iz	2^2-1	
VERİLMEYEN DURUMLAR İÇİN	• 3 iz			
	• 4 bölge			
	3.Katlama	2.2.2 bölge, 7 iz	2^3-1	
	• 7 iz			
	• 8 bölge			
	4.Katlama	2.2.2.2 bölge, 15 iz	2^4-1	2^n-1
	• 15 iz			
	• 16 bölge			
	10.Katlama	2.2.2.2.2.2.2.2.2 bölge, 1023 iz	$2^{10}-1$	
	• 1023 iz			
	• 1024 bölge			

Gözlemlene basamağında problemde verilmiş olan katlama ve oluşan bölge sayısı arasındaki bağlantının incelenmesi beklenmektedir.

Gözlemlerin organizesi basamağında kağıdı katladıkça oluşan bölge sayısı ve kat izleri arasında bulunan ilişkinin fark edilmesi beklenir. Bölge sayıları yazılırken iki ve katları ile ilişkili olduğuna dikkat edilmesi ve bir sonraki adımda bunları kısaltarak yazması beklenmektedir. Örüntüdeki yakın aşamaların tahmini bu basamakta yapılmaktadır.

Yordama basamağında ise önceki basamağın aksine uzak adımların tahmini söz konusudur. Bu basamakta yapılan tahminler genel terimin yazımını şekillendirmede önemlidir. Yordama basamağında gözlemlerin organizesi basamağında fark edilen iki ve katlarının olduğu kuralı kısa biçimde yazması beklenir.

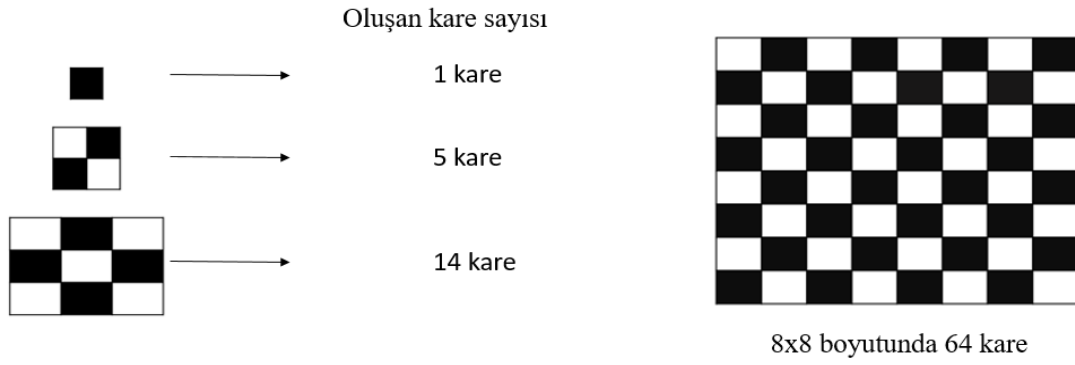
Yordamanın testi basamağında önceki basamakta oluşturulan hipotezin denenmesi ve çıkan sonuç doğrultusunda genel terim yazılması beklenir. Kağıt katlama probleminde önceki basamakta kat izlerinin iki ve kuvvetleriyle ilişkili olduğu belirlenmişti. Bu basamakta kağıt alıp katlayarak veya bilinmeyen terimleri deneyerek hipotezin doğruluğu kanıtlanmaya çalışılmalıdır.

Genelleme basamağında yordamada oluşturulan mantıklı çıkarımların genel bir ifadeye dönüştürülmesi beklenmektedir. Bu basamakta kağıt katlama probleminin genel teriminin 2^n-1 olarak yazılması gerekmektedir.

Genellenenin testi basamağında yazdığımız genel terimin doğruluğunun kanıtlanması istenmektedir. İster verilen terimler üzerinde ister verilmeyen terimler üzerinde matematiksel işlem yaparak formülün doğruluğu ispatlanmalıdır.

3.5.3. Satranç Tahtası Problemi Kodlama Örneği

Çalışmanın üçüncü problemi olan satranç tahtası problemi aşağıda Şekil-5’de verilmiştir.



Yukarıda bulunan satranç tahtası 64 kareden oluşan 8x8 boyutunda bir karedir.

a) Satranç tahtasında toplam kaç kare vardır?

b) n tane kareden oluşan nxn'lik bir tahtada toplam kaç kare vardır? Bulduğunuz kural ya da formülü yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız

Şekil 5. Satranç Tahtası Problemi. Keskin, M. , Dag, S. A. & Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması . Journal of Educational Science,1 (1) , 33-50 .

Satranç tahtası problemi de önceki problemler gibi iki aşamalı olarak sorulmuştur. Aşağıdaki tabloda problemin tümevarımsal akıl yürütme basamaklarına göre incelenmesi verilmiştir.

Tablo 6.

Satranç Tahtası Probleminin Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları

	GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA	GENELLEME
VERİLEN DURUMLAR İÇİN	• 1x1 • 1 kare	=1	=1 ²	
	• 2x2 • 5 kare	=1+4	=1 ² +2 ²	
	• 3x3 • 14 kare	=1+4+9	=1 ² +2 ² +3 ²	
	• 4x4 • 30 kare	=1+4+9+16	=1 ² +2 ² +3 ² +4 ²	=1 ² +2 ² +3 ² +4 ² +... n ²
VERİLMEMEYEN DURUMLAR İÇİN	• 8x8 • 204 kare	=1+4+9+16+25+36+49+64	=1 ² +2 ² +3 ² +4 ² +5 ² +6 ² +7 ² +8 ²	$\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

Problemin gözlemlene basamağında solda verilen kare sayısı ve oluşan karelerin sayısının incelenmesi beklenmektedir.

Gözlemlerin organizesi basamağında oluşan kare sayılarını yazarken önceki adımda bulunan kare sayısı ile ilişkili olduğunun fark edilmesi beklenir. Birinci adımda bir tane bulunan kare sayısı ikinci adımda beşe çıkmıştır ve aslında sistematik bir artış bulunmaktadır. Öğretmen adaylarının artışı $1+4$ şeklinde ifade etmesi beklenir. Sonraki basamaklarda artışı organize ederek $1+4+9+\dots$ şeklinde yazmaları beklenir.,

Yordama basamağında önceki basamakta organize edip matematikselleştirdiği bilgileri daha kısa şekilde yazması istenmektedir. Gözlemlerin organizesi basamağında oluşan kare sayılarını $1+4+9+16+\dots$ şeklinde arttığını fark eden öğretmen adayları bu basamakta artık bulunduğu adım sayısının karesi ve önceki adımlarda bulunan kare sayılarının toplamıyla ilişkili olduğunu ifade etmelidir. $1^2+2^2+3^2+4^2+\dots$ oluşan kare sayısını bulunduğu basamağın ve önceki basamakların kareleri toplamıyla ilişkili olduğunu ifade etmelidir.

Yordamanın testi basamağında bulduğu ilişkinin doğruluğunu test etmesi beklenir. Verilen örnekler üzerinden veya öğretmen adayının kendi vereceği örneklerle bulduğu örüntü formülü denenir. Hatalı bulunan formülün değiştirilmesi beklenir.

Genelleme basamağında yordamada yazılan örüntü formülü bu basamakta genel terim haline dönüştürülmesi gerekir. Yordama basamağında kuralın bulunduğu adımın karesi ve önceki adımların kareleri toplamı olduğunu belirtmiştik. Genelleme basamağında bu ifadeyi “n” gibi bir harfli ifadeye dönüştürmemiz gereklidir. Genel formülümüz $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ olacaktır. İfadenin düzenlenmiş hali $\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$ şeklindedir.

Genellenmenin testi basamağında yukarıda yazdığımız formülün doğruluğunun ispatlanması beklenmektedir.

3.5.4. Kağıt Ev Probleminin Kodlama Örneği

Araştırmanın son problemi olan kağıt ev problemi aşağıda Şekil-6’da verilmiştir.



Yukarıda 3 katlı bir kağıt ev verilmiştir. En üst kat birbirine yaslanmış iki karttan meydana getirilmiştir. İkinci katı oluşturmak için birinci katın tabanına bir kart daha eklenmiş ve 4 kart daha (birbirine yaslanmış ikişer kart kümesi) yerleştirilmiştir. Buna göre,

- 5 katlı bir ev oluşturmak için toplam kaç kart kullanılmalıdır?
- Bu şekilde yapılacak n katlı kağıt ev için nasıl bir formül ya da kural geliştirerek temsil edebiliriz? Bulduğunu kural ya da formülü yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız.

Şekil 6. Kağıt ev problemi. Göl, R., Duru, A. (2016). Lise öğrencilerinin matematiksel genelleme süreçlerinin incelenmesi. Yaşam boyu eğitim dünya kongresi (WCLE-2016), Porto Bello Hotel Resort & SPA, Antalya.

Problem iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada belirlenen bir basamak sorulmakta ikinci aşamada ise problemin genel formülü istenmiştir. Aşağıda kağıt ev probleminin tümevarımsal akıl yürütme basamakları verilmiştir.

Tablo 7.

Kâğıt Ev Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları

	GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA	GENELLEME
VERİLEN DURUMLAR İÇİN	1.Kat • 2 kart	$=1 \times 2$	$=1 \times 2 + \frac{1.0}{2}$	
	2.Kat • 7 kart	$=2 \times 3 + 1$	$=2 \times 3 + \frac{2.1}{2}$	
	3.Kat • 15 kart	$=3 \times 4 + 3$	$=3 \times 4 + \frac{3.2}{2}$	$=\frac{n.(n+1).2}{2} + \frac{n.(n-1)}{2}$
VERİLMİYEN DURUMLAR İÇİN	4.Kat • 26 kart	$=4 \times 5 + 6$	$=4 \times 5 + \frac{4.3}{2}$	$=\frac{n.(3n+1)}{2}$
	5.Kat • 40 kart	$=5 \times 6 + 10$	$=5 \times 6 + \frac{5.4}{2}$	

Gözlemlleme basamağında verilen adımlar üzerinde araştırma yapmak ve adımlar arasındaki ilişkilerin keşfinin yapılması beklenmektedir. Bu problemin gözlemlleme basamağında her bir katta kaç tane kart bulunduğunu incelenmesi beklenmektedir.

Gözlemlerin organizesi basamağında ise önceki basamakta bulunan kart sayısı ile örüntü basamağı arasında bağlantı kurulması gerekmektedir. Birinci katı oluşturabilmek için iki tane kart gerekmektedir. İkinci katın oluşturmak için öncelikle birinci katın tabanına bir tane kart eklenmiş ve onun altına birbirine yaslanmış iki tane ikişerli kart kümesi yerleştirilmiştir. İkinci katı oluşturabilmek için toplamda yedi tane kart kullanılması gerekmiştir. Örüntüyü çözerken tabana eklenen ve katı oluşturmak için yan yana eklenen kartları ayrı ayrı hesaplamak gerekir. Adım sayısının bir fazlasıyla çarpımı katları oluşturmak için gereken kart sayısını vermektedir. Tabanda bulunan kartlar da aritmetiksel biçimde artmaktadır. Öğretmen adaylarının kartların aralarında bulunan ilişkiyi yordama basamağında sistemli hale getirebilmesi gerekmektedir.

Yordama basamağında bir önceki basamakta keşfedilen bilgi ile ilişki kurup kural biçiminde yazması beklenmektedir. Adım sayısı ile adım sayısının bir fazlasının çarpımı katları oluşturmak için gereken kart sayısını vermektedir. Tabanlarda bulunan kartlar ise 1,2,3,4... şeklinde artarak ilerlemektedir. Bu bilgiyi kural halinde bu basamakta yazılması gerekmektedir. Örüntünün bulunduğu adım ile adım sayısının bir eksiğinin çarpımının yarısı tabanda oluşan kart sayısını vermektedir.

Yordamanın testi basamağında örüntünün bilinmeyen bir adımında yordama basamağında bulunan örüntü formülünün denenmesi beklenmektedir.

Genelleme basamağında yordamada kurduğumuz hipotezi genel bir terim haline getirmemiz beklenmektedir. Katları oluşturmak için gereken kart sayısı örüntünün bulunduğu basamak ve bulunduğu basamağın bir fazlasının çarpımına eşittir. Bunu genel bir ifade ile $n \cdot (n + 1)$ olarak yazabiliriz. Tabanları oluşturmak için gereken kart sayısı örüntünün bulunduğu basamak ve bulunduğu basamağın bir eksiğinin çarpımının ikiye bölünmesiyle bulunur. Genel bir terimle ifade edersek $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ şeklinde yazılabilir. Taban sayısı ve katları oluşturan

ifadeleri toplarsak genel terimi $n.(n + 1) + \frac{n.(n-1)}{2}$ şeklinde oluşur. İfadeyi düzenlersek $\frac{n.(3n+1)}{2}$ olarak yazılabilir.



BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM

Araştırma kapsamında bir önceki bölümde detaylıca açıklanan dört farklı problem kullanılmıştır. Problemlerin tümevarımsal akıl yürütme sürecinin basamakları tablolarla gösterilmiştir. Bu bölümde, öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi amacıyla toplanan verilerden elde edilen bulgular ve bu veriler hakkında yorumlar yapılacaktır.

4.1. Sayı Örüntüsü Probleminden Elde Edilen Bulgular

Aritmetik problem türü olan sayı örüntüsü problemine ait analiz tablosu Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo 8.

Sayı Örüntüsü Problemi Yazılı Sınav Analiz Tablosu

TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME BASAMAKLARI	AKIL YÜRÜTME DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	SINIFLARA GÖRE YÜZDE(%)				
			1.SINIF (4)	2.SINIF (4)	3.SINIF (4)	4.SINIF (4)	TOPLAM (16)
GÖZLEMLEME	DOĞRU	Verilen örüntüyü tanımlama, şeklin üzerine sayarak ilerleme	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	16 (%100)
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	DOĞRU	Terimleri organize edebilme	2 (%50)	3 (%75)	4 (%100)	4 (%100)	13 (81,25)
	YANLIŞ	Terimleri hatalı organize etme	2 (%50)	1 (%25)	0 (%0)	0 (%0)	3 (%18,75)
YORDAMA	DOĞRU	İstenilen terimi sözel veya aritmetiksel olarak ifade edebilme	2 (%50)	3 (%75)	4 (%100)	4 (%100)	13 (81,25)
	YANLIŞ	İstenilen terime ulaşamama	2 (%50)	1 (%25)	0 (%0)	0 (%0)	3 (%18,75)
YORDAMANIN TESTİ	DOĞRU	Aritmetiksel veya sözel kontrol	2 (%50)	2 (%75)	2 (%50)	2 (%50)	8 (%50)
	YANLIŞ	Belirlenen kuralı test etmeme	2 (%50)	2 (%25)	2 (%50)	2 (%50)	8 (%50)
GENELLEME	DOĞRU	n^2+2n-1 formülüne genelleme	2 (%50)	2 (%50)	2 (%50)	3 (%75)	9 (%56,25)
		$a_{n+1}=a_n+(2n+1)$ formülüne genelleme	1 (%0)	0 (%0)	1 (%25)	0 (%0)	2 (%12,5)
	YANLIŞ	Anlamsız formül ve açıklama	1 (%50)	2 (%25)	1 (%25)	1 (%50)	6 (%31,25)
GENELLEMENİN TESTİ	DOĞRU	Aritmetiksel veya sözel kontrol	1 (%50)	2 (%50)	1 (%50)	1 (%50)	5 (%31,25)
	YANLIŞ		3 (%50)	2 (%50)	3 (%50)	3 (%50)	8 (%68,75)
BOŞ	ÇÖZÜM YOK		0 (%0)				

Sayı örüntüsü problemi iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada örüntünün belirli bir terimi istenmiştir. İkinci aşamada ise verilen örüntünün genel teriminin bulunması istenmiştir. Tablo 7’de görüldüğü gibi gözlemlene basamağında öğretmen adaylarının her birinin cevabı doğru bulunmuştur. Gözlemlerin organizesi basamağında gelindiğinde öğretmen adaylarının 3 tanesi (%18,75) yanlış cevaplamış ve sonraki akıl yürütme süreçlerini sergileyememişlerdir.

Yordama basamağında öğretmen adaylarından 3 tanesinin (%18,75) cevabı yanlış olup genel bir terim oluşturamamışlardır. Katılımcıların 8 tanesi doğru bir genel denklem elde ederken 8 tanesi anlamsız formüller ve açıklamalar yapmışlardır. Katılımcıların 5 tanesi yazdıkları genel formülü test ederek genellemenin testi basamağında cevapları doğru bulunmuştur.

4.1.1.Gözlemlene Basamağı

Gözlemlene basamağında verilen örüntünün tanımlanması ve örüntünün terimleri arasındaki ilişkinin incelenmesi beklenmektedir. Araştırmaya katılan 16 öğretmen adayının tamamı gözlemlene basamağına doğru cevap vermişlerdir. Aşağıda gözlemlene basamağına ait doğru bir çözüm örneği verilmiştir.

a) 2, 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79, 98, 119
+5 +7 +9 +11 +13 +15 +17 +19 +21
Aritmetik bir dizi buldum

Şekil 7. Gözlemlene basamağında doğru bulunan çözüm örneği (Ö2)

a) 2, 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79, 98, 119
5 7 9 11 13 15 17 19 21
Aritmetik bir dizi buldum

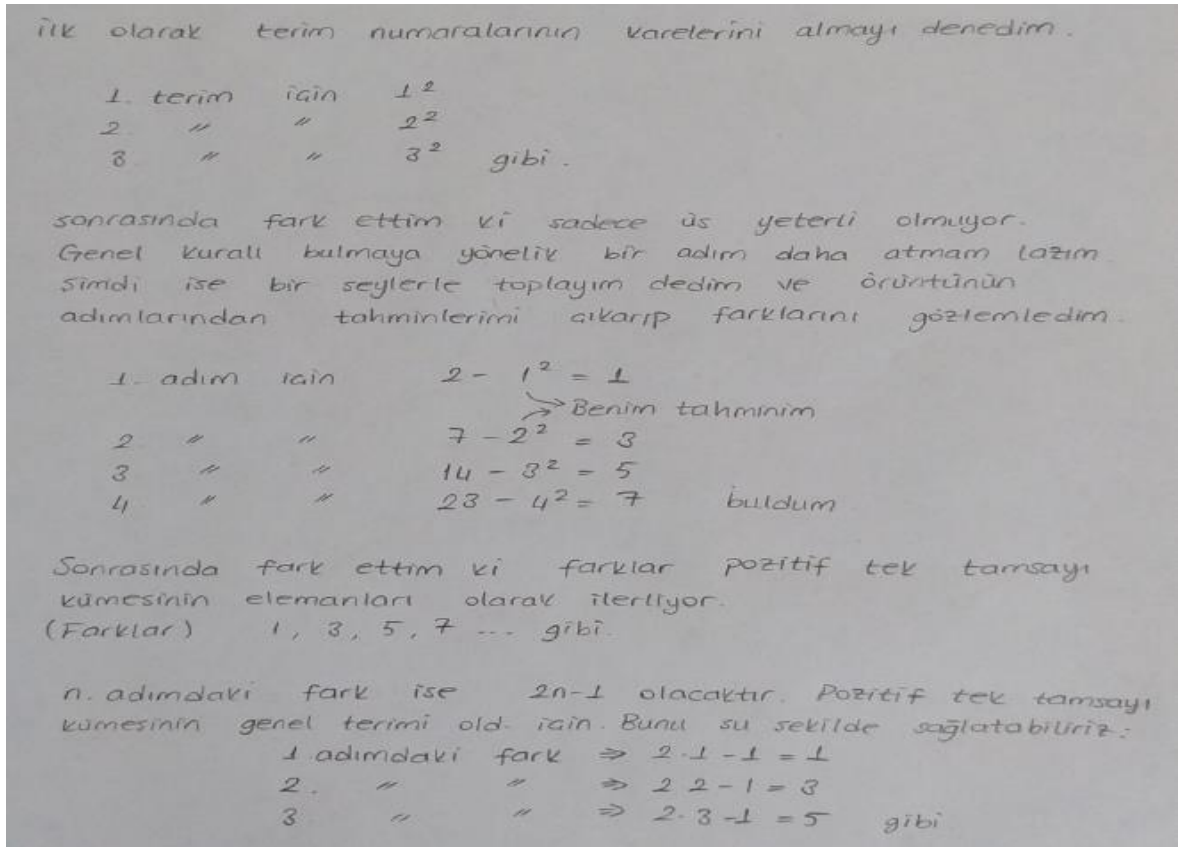
Şekil 8. Gözlemlene basamağında doğru bulunan ikinci çözüm örneği(Ö13)

Yukarıdaki şekillerde öğretmen adayları örüntüyü tanımlamak için terimler arasındaki ilişkiyi incelemiş ve terimlerin artış miktarlarını bulmaya çalışmışlardır.

Bu basamakta katılan bütün katılımcıların cevapları doğru bulunduğu için öğretmen adaylarının sınıf kademeleri arasında herhangi bir farklılık bulunamamıştır.

4.1.2. Gözlemlerin Organizesi

Gözlemlerin organizesi basamağında öğretmen adaylarının 13 tanesi (%81,25) doğru cevaplarırken 3 tanesi (%18,75) yanlış cevap vermiştir. Gözlemlerin organizesi basamağı ‘doğru’ ve ‘yanlış’ olmak üzere iki bölüme ayrılmıştır. Öğretmen adayları terimleri doğru organize ederlerse ‘doğru’, terimleri hatalı organize ederlerse yanlış cevaplamış sayılmışlardır. Aşağıda gözlemlerin organizesi basamağında doğru ve yanlış bulunan yazılı sınav örnekleri verilmiştir.



Şekil 9. Gözlemlerin organizesi basamağı doğru bulunan çözüm örneği(Ö5)

Yanlış bulunan bir çözüm örneği Şekil-10'da verilmiştir.

$a_1 = 2$	$a_2 = a_1 + 5$	
$a_2 = 7$	$a_3 = a_2 + 7$	
$a_3 = 14$	$a_4 = a_3 + 9$	şeklinde ilerlemektedir.
$a_4 = 23$	$\vdots$	

Şekil 10. Gözlemlerin organizesi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö3)

Gözlemlerin organizesi basamağında bir önceki basamakta gözlemlenen ve örüntü ilişkisi incelenen problemin bu basamakta matematiksel olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Şekil 10' da görüldüğü gibi Ö3 gözlemlediği terimleri bu basamakta matematiksel olarak ifade etmiştir.

$$a_{10} = 2 + n + (n+2) + (n+4) + \dots (n+16)$$

$$2 + 5 + 7 + 9 + \dots 21$$

$$n^2 = 5 + 7 + \dots 21 = 121$$

Şekil 11. Gözlemlerin organizesi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği (Ö7)

Öğretmen adayı gözlemlene basamağında terimler arasındaki artış miktarını belirlemiş fakat örüntünün terimler toplamını tek sayılar toplamı olarak yazmıştır. Öğretmen adayı bu basamakta örüntüyü sistematik bir hale getiremediği için sonraki tümevarımsal akıl yürütme basamakları da bu durumdan etkilenecektir. Ö7'nin yarı yapılandırılmış görüşmede problem hakkındaki düşünceleri şu şekildedir (Diyalog 1).

...[Sayı örüntüsü problemini okuyan Ö7 problemi nasıl çözdüğünü anlatmaya başlar.]

Ö7: Öncelikle terimler arasındaki ilişkiye baktım. Önce 5 artmış sonra 7 ve 9 olarak artmaya devam etmiş, yani hep ardışık tek sayılar şeklinde artmış. İlk önce 'n' yazdım sonra 'n+2', 'n+4' şeklinde devam ettim. Sonra n yerine başka bir şey yazmam gerektiğini düşündüm. Sonra n=5 yazdım. Denklemi yazdığımda 2+5+7...+21 şeklinde ilerlediğini gördüm. Ardışık tek sayılar şeklinde ilerlediği için 5+7+...+21 olan ifadeyi topladım ve ardışık tek sayıların toplamı olan n^2 formülüne eşitledim. Buradan n sayısını 11 buldum...

Yukarıda verilen diyalogda Ö7 gözlemleri organize ederken tek sayıların toplamı şeklinde yazılabileceğini düşünmüş ve 5+7+...+21 sayılarını toplayarak ardışık tek sayıların toplamı olan n^2 formülüne eşitlemiştir. Öğretmen adayı işlem sonucunda toplamı 117 çıkması gereken ifadenin toplamını 121 bulmuş ve bu sayıyı n^2 formülüne eşitleyerek cevabı 11 bulmuştur. Anlamsız ve hatalı işlemler yaptığı için öğretmen adayının bu basamakta cevabı yanlış olarak değerlendirilmiştir.

Gözlemlerin organizesi basamağında en doğru cevapları veren gruplar 3. ve 4. sınıflar olmuşlardır. Bütün öğretmen adayları gözlemlerin organize basamağında doğru cevap vermişlerdir. En az doğru cevabı olan kademe 1.sınıflar olmuştur. Birinci sınıfların yarısı problemleri doğru cevaplarken diğer yarısı yanlış cevaplamıştır.

4.1.3. Yordama

Bu basamakta gözlemlerin organizesi basamağında sistematikleştirilen bilgiyi genel bir kural haline getirmeleri ve ileriye dönük basamaklar için bir hipotez oluşturulması beklenmiştir. Sayı örüntüsü probleminde istenilen onuncu terimi sözel veya cebirsel olarak ifade edilebilen öğretmen adaylarının cevapları doğru olarak değerlendirilmiştir. Yordama basamağında doğru ve yanlış bulunan çözüm örnekleri aşağıda verilmiştir.

Dış ilk terime önce 5 ekleyip daha sonraki her terim için bir önceki terimle 5'den sonra gelen (7,9,...) ter sayıyı ekleyerek devam eder diye düşündüm. Bu yolla 10. terime ulaştım da (b) de istenen genel formülü yazmakta zorlandım. Bu sebeple aritmetik dizi olarak düşünmeyi bıraktım. Sayılar arasında farklı bir ilişki aradım. Sayılar arasında belli bir kat, oran aştırdıktan sonra şunu fark ettim;

$$\begin{aligned}a_1 &= (1+1)^2 - 2 = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \\a_2 &= (2+1)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7 \\a_3 &= (3+1)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14 \\a_4 &= (4+1)^2 - 2 = 5^2 - 2 = 25 - 2 = 23\end{aligned}$$

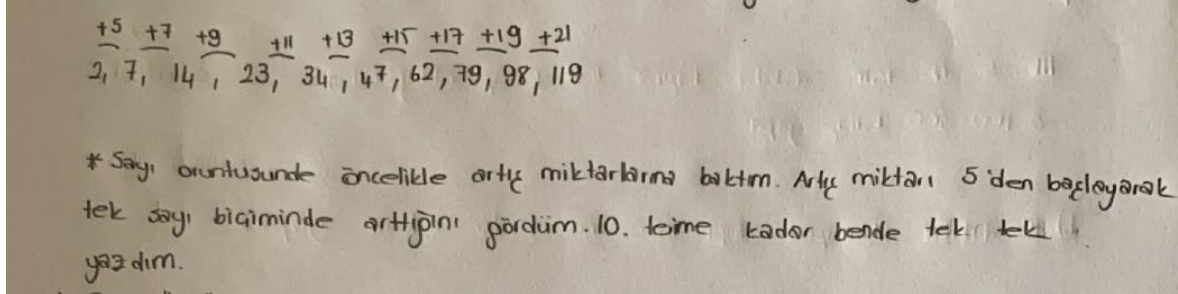
Böylece dizinin 10. terimi

$$a_{10} = (10+1)^2 - 2 = 11^2 - 2 = 121 - 2 = \underline{\underline{119}} \text{ dir.}$$

Şekil 12. Sayı örüntüsü problemi yordama basamağı doğru bulunan çözüm örneği(Ö6)

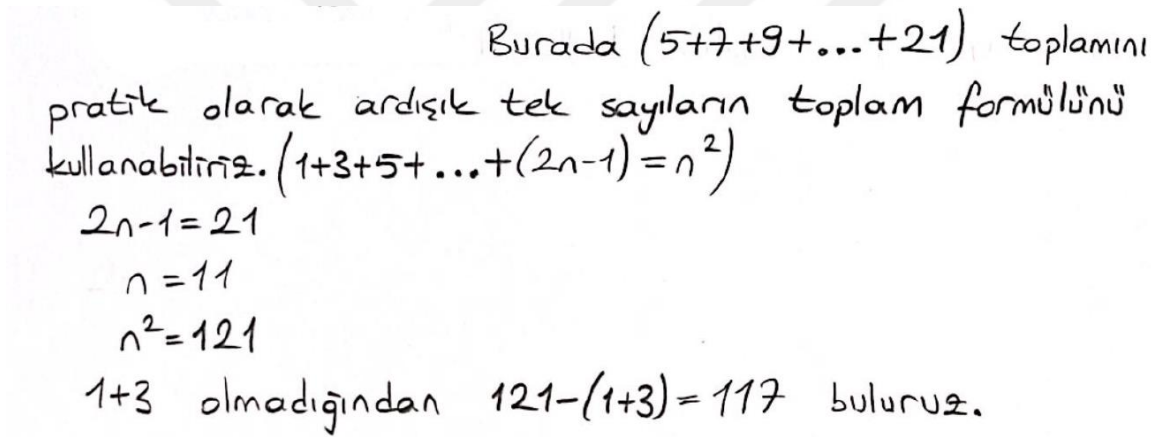
Yukarıda verilen çözüm örneğinde Ö7 örüntüyü tanımlama, organize etme ve yorumlama konusunda düşündüklerini yazılı kağıda aktararak problemi çözmüştür. Örüntünün terimleri arasındaki artış miktarını belirledikten sonra istenilen terime kadar örüntüyü devam ettirerek bulduğunu fakat örüntü ile ilgili bir kural geliştiremediğini ifade etmiştir. Örüntü kuralını

terim sayısının karesinin iki eksiği olarak bulmuş ve istenilen adımı bulduğu kurala yazdığında terimi bulmuştur.



Şekil 13. Sayı örüntüsü problemi yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö9)

Yukarıda verilen örüntüde öğretmen adayı sayı örüntüsündeki artış miktarını bulmuş ve örüntüyü devam ettirerek istenilen terime ulaşmıştır.



Şekil 14. Sayı örüntüsü problemi yanlış yordama örneği (Ö3)

Yukarıda verilen çözümde öğretmen adayı örüntüyü sistematikleştirirken hatalı düşünmüş ve yordama basamağında da hata yapmıştır. Artış miktarını tek sayıların toplamı formülüne eşitlemiş ve bulduğu sonuçtan ilk iki terim eksik olduğu için çıkarmıştır. Öğretmen adayı ilk terim olan 2'yi eklemediği için istenilen terimi yanlış bulmuştur.

Yordama basamağında 3. ve 4. Sınıf kademesinde bulunan bütün öğretmen adayları doğru cevap vermişlerdir. Bu basamakta en çok yanlış bulunan kademeler 1.ve 2.sınıf kademeleri olmuştur. Her iki kademedeki öğretmen adaylarının yarısı problemi doğru cevaplarırken yarısı yanlış cevap vermiştir.

4.1.4. Yordamanın Testi

Bu basamakta yordanan formülün denenmesi gerekmektedir. Önceki basamakta 10.terimi bulmak için yapılan yordamanın doğruluğunu kontrol eden ve diğer öğretmen adaylarından farklı yöntemle sonuca ulaşan katılımcının cevabı doğru olarak değerlendirilmiştir.

"Dizinin artış miktarını inceledim.
"Artışın ~~aritmetik~~ sabit olarak artmadığını gördüm"
"Artış miktarı 5, 7, 9, ... diye aritmetik idiymiş"
"Artış miktarı ile ilgili denklem kurmaya çalıştım"
"Artış miktarı $2n+3$ şeklinde ~~oldu~~"
"Aritmetik olarak ilerleyen sayıların toplam formülü
$$\left(\frac{\text{Son T.} - \text{ilk T.}}{\text{Artış mik.}} + 1 \right) \cdot \left(\frac{\text{Son T.} + \text{ilk T.}}{2} \right)$$

→ diiz: ilk terimden sonra topladığı için $(n-1)$
"
$$2 + \left(\frac{2(n-1)+3-5}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{2(n-1)+3+5}{2} \right)$$

Şekil 15. Sayı örüntüsü problemi yordamanın testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö16)

Şekil-15’de verilen çözümde öğretmen adayı yordamayı yaparken bütün basamakları değerlendirerek gelmiştir. Yordama basamağında istenilen terimi doğru bulmuştur ve yordamanın testi basamağında bulduğu sonucu kontrol ederek formülü denemiştir.

1. adım
2

2. adım
2+5

3. adım
2+5+7

4. adım
2+5+7+9

5. adım
2+5+7+9+11

2
2
2
2
2

+5
+7
+9
+11

(2n+3)

2.1+3
2.2+3
2.3+3
2.4+3

2(1+1)+3.1
2(1+1+2)+3.2
2(1+1+2+3)+3.3
2(1+1+2+3+4)+3.4

n. adım
2(1+1+2+3+...+(n-1)) + 3(n-1)

Örnekle artık miktarının (2n+3) biçiminde arttığını gördüm daha sonra
adımın toplamı biçiminde yazdığım yukarıdaki örneği fark ettim ve
3'ü de hesaba katarak bir örüntü oluşturdum.

Şekil 16. Sayı örüntüsü problemi yordamanın testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö8)

Şekil-16'da verilen çözümde öğretmen adayı yordama adımında doğru cevap vermiştir fakat yazdığı formülü kontrol etmediği için yordamanın testi basamağında cevabı yanlış bulunmuştur.

Bu basamakta her sınıf kademesinde %50'lik oranında doğru yanıt vermişlerdir. Öğretmen adaylarının 8 tanesi yaptıkları yordamayı kontrol ederek yordamanın testi basamağına doğru cevap vermişlerdir.

4.1.5. Genelleme

Genelleme basamağında yordamada oluşturulan formüllerin genel bir ifadeye dönüştürülmesi beklenir. Bu basamak analiz edilirken doğru ve yanlış olmak üzere iki bölüme ayrılmıştır. Doğru kategorisi de kendi içerisinde " n^2+2n-1 formülüne genelleme" ve " $a_{n+1}=a_n+(2n+1)$ formülüne genelleme" olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Anlamsız formül üreten ve açıklama yapan öğretmen adaylarının cevapları yanlış kategorisinde

değerlendirilmiştir. “ n^2+2n-1 formülüne genelleme” kategorisine ait doğru bir çözüm örneği aşağıda verilmiştir.

b)

$$2, 7, 14, 23, 34, \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ & +5 & +7 & +9 & +11 & & \end{array}$$

Bu soru için bir kural oluşturulacak n. terimi bulmada ilk terim ve

$$5 + 7 + 9 + 11 + \dots = m$$

Sayıları toplama fikrinden yararlandım.

$$5 + 7 + 9 + 11 + \dots + (2k+3) \quad (2k+3 \text{ bu örüntü için belirlediğim genel terimdir}).$$

Eklenen sayıların sayısı ile n. adımıdaki sayı arasında bir fark olduğundan (Örneğin 4. adım için $2 + \underbrace{5+7+9}_{(3)}$) $k = n-1$ olarak belirledim. Buradan bu terimlerin toplamı

$$(\text{Terim sayısı}) \times \left(\frac{\text{son terim} + \text{ilk terim}}{2} \right)$$

formülünden

$$\left(\frac{2k+3-5+1}{2} + 1 \right) \times \left(\frac{2k+3+5}{2} \right)$$

$$= k \times (k+4)$$

bulunur, $k = n-1$ için

$$(n-1) \times (n+3)$$

ve

$$(n-1) \times (n+3) + 2$$

$$= n^2 + 2n - 3 + 2$$

$$= n^2 + 2n - 1$$

genel formülüne ulaşılır.

Şekil 17. “ n^2+2n-1 formülüne genelleme” kategorisine ait doğru bir çözüm örneği(Ö6)

Şekil-17’de görüldüğü gibi doğru yordama yapan öğretmen adayı yordamayı genelleştirerek genel bir terim bulmuştur.

$a_n+1=a_n+(2n+1)$ formülüne genelleme kategorisinde doğru bulunan çözüm örneği Şekil-18’de verilmiştir.

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = 2 & a_2 = a_1 + 5 \\
 a_2 = 7 & a_3 = a_2 + 7 \\
 a_3 = 14 & a_4 = a_3 + 9 \\
 a_4 = 23 & \vdots
 \end{array}
 \quad \text{şeklinde ilerlemektedir.}$$

0 halde genel bir kural yazarsak $a_{n-1} + (2n+1) = a_n$ ($n \neq 1$ ve $a_1 = 2$) olur. Çünkü ikinci terim ile birinci terim arasında 5, üçüncü terim ile ikinci terim arasında 7 fark vardır, bu böyle devam etmektedir. Fark kısmını adım sayısı cinsinden yazdığımızda;

$$n=2 \text{ için } 5$$

$$n=3 \text{ için } 7$$

$$n=4 \text{ için } 9 \text{ olmalıdır. Bu eşitlikleri de } (2n+1) \text{ sağlar.}$$

Bu örüntüde n . adım için $a_{n-1} + (2n+1) = a_n$ ($n \neq 1$ ve $a_1 = 2$) kuralını kullanabiliriz.

Şekil 18. $a_{n+1} = a_n + (2n+1)$ formülüne genelleme kategorisinde doğru bulunan çözüm örneği

Şekil-18'de görüldüğü gibi öğretmen adayı örüntüyü dizi olarak düşünmüştür. İstenilen terime kendinden bir önceki terimin istenilen terimin iki katının bir fazlasıyla toplayınca ulaşabileceğini fark etmiştir.

Genelleme basamağında yanlış bulunan çözüm örneği Şekil-19'da verilmiştir.

$$\begin{array}{l}
 \text{a) 10. Terimi bulmak için kendimden bir formül yaptım} \\
 \text{ve } a_{10} = a_1 + 5.9 + 2.8.9 = 2 + 45 + 72 = 119, \\
 \text{b) Bu durumun n. Terimi için } a_n = a_1 + 5(n-1) + 2(0+1+\dots+(n-2)) \\
 \text{formülünü ürettim ve kullandım}
 \end{array}$$

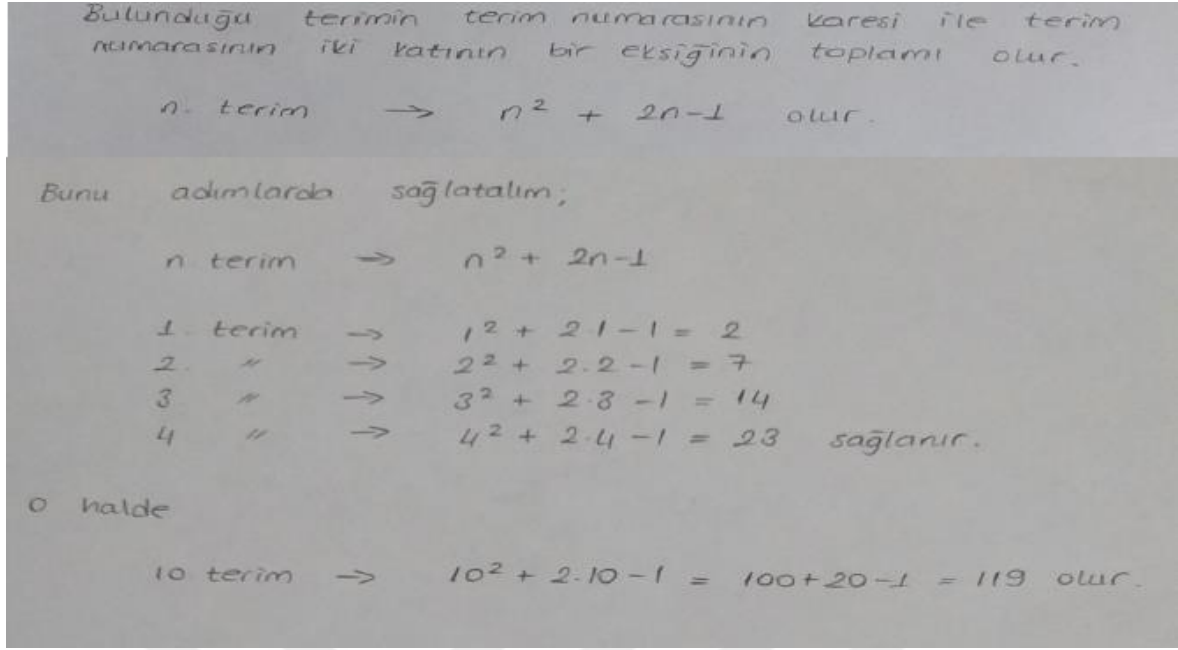
Şekil 19. Genelleme basamağında yanlış bulunan çözüm örneği

Öğretmen adayı açıklamanın başında kendinin bir formül geliştirdiğini yazmıştır. Yazılan formül incelendiğinde örütüdeki hiçbir terime ulaşamadığı fark edilmiştir. Öğretmen adayının geliştirdiği formülde istenilen terimi işlem hatası yaparak bulduğu gözlemlenmektedir.

Bu basamakta sınıf kademelerine bakıldığında en çok yanlış cevabı bulunan kademe 3.sınıf kademesidir. Üçüncü sınıf kademesindeki öğretmen adaylarından 2 tanesi (%50) doğru bir genel denklem oluştururken iki tanesi (%50) anlamsız bir takım açıklamalarda bulunmuştur. Diğer kademelerdeki bütün öğretmen adaylarının %75'i doğru genel denklem oluştururken %25'i anlamsız formül ve açıklamalarda bulunarak cevapları yanlış olarak değerlendirilmiştir.

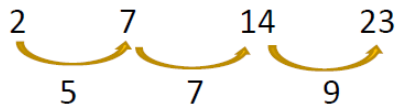
4.1.6.Genellemenin Testi

Bu basamakta öğretmen adaylarının yazdıkları genel denklemleri kontrol etmeleri ve açıklamaları beklenmektedir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarından yalnızca 5 tanesi bu basamakta doğru cevap vermiştir. Genellemenin testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği Şekil-20'de verilmiştir.



Şekil 20. Genellemenin testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö11)

Öğretmen adayı bulduğu genel terimin doğruluğunu ispatlamak için genel terimde 'n' yerine farklı değerler yazarak bulduğu sonuçları incelemiştir. Örüntünün her bir adımında genel denklemin sağlandığı görülmüştür.Şekil-21'de yanlış bulunan bir çözüm örneği verilmiştir.



her bir terim sayısı arasındaki ardışık tek sayıdır.

$$a_1 = 2 \text{ olmak üzere } a_{n+1} = a_n + (2n + 1), n \in N$$

Şekil 21. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö10)

Şekil 21'de öğretmen adayı doğru bir genel terim bulmuştur fakat genel terimin doğruluğunu kontrol edecek işlem yapmamıştır.

Öğretmen adaylarından 8 tanesi (%68,75) genellemenin testi basamağında cevapları yanlış bulunmuştur. Yazdıkları genel terimleri ispatlayacak veya doğruluğunu kontrol edecek hiçbir yazılı veya sözel ifade bulunmamaktadır.

Genellemenin testi basamağında en çok doğru cevabı bulunan kademe 2.sınıf kademesi olmuştur. İkinci sınıf kademesinde bulunan öğretmen adaylarından 2 tanesi (%50) yazdıkları genel denklemin bütün adımları sağladığını kontrol etmişlerdir. Diğer kademelerinde aynı oranda cevapları doğru bulunmuştur. Birinci, üçüncü ve dördüncü sınıf kademelerinde bulunan öğretmen adaylarından her bir kademede yalnızca bir kişi genel terimi kontrol etmiştir. Geriye kalan %75'lik kısımdaki öğretmen adayları genel terimlerinin doğruluğunu kontrol etmeden problem çözümünü tamamlamışlardır.

4.2. Kağıt Katlama Probleminden Elde Edilen Bulgular

Tablo 9'da kağıt katlama problemine ait bulgular verilmiştir. Kağıt katlama problemi yazılı sınav analiz tablosu aşağıdaki gibidir.

Tablo 9.

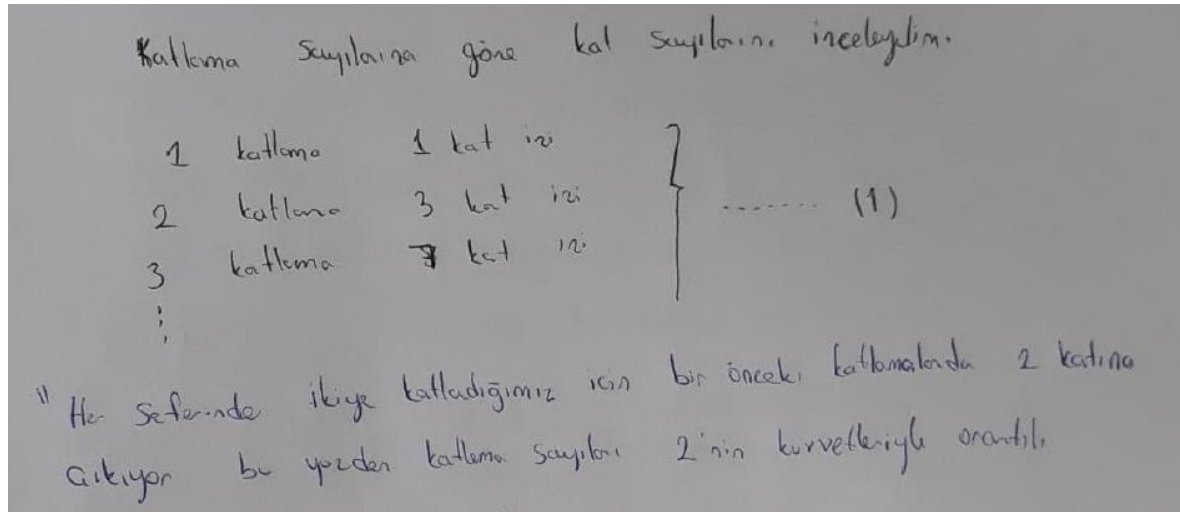
Kâğıt Katlama Problemi Yazılı Sınav Analiz Tablosu

TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME BASAMAKLARI	AKIL YÜRÜT ME DURUM U	SERGİLENEN DÜŞÜNCELE R VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	SINIFLARA GÖRE YÜZDE(%)				
			1.SINI F (4)	2.SINI F (4)	3.SINI F (4)	4.SINI F (4)	TOPLA M (16)
GÖZLEMLEME	DOĞRU	Verilen ifadeyi tanıma, gözlemleme	4 (%100)	4 (%100)	3 (%75)	3 (%75)	14 (%87,5)
	YANLIŞ	Örüntünün terimleri arasındaki ilişkiyi keşfedememe	0 (%0)	0 (%0)	1 (%25)	1 (%25)	2 (%12,5)
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	DOĞRU	Terimleri cebirsel olarak ifade edebilme	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	16 (%100)
YORDAMA	DOĞRU	İstenilen terimi bulabilme	3 (%75)	2 (%50)	3 (%75)	2 (%50)	10 (%62,5)
	YANLIŞ	İstenilen terime ulaşamama	1 (%25)	2 (%50)	1 (%25)	2 (%50)	6 (%37,5)
YORDAMANIN TESTİ	DOĞRU	Cebirsel veya sözel kontrol	2 (%50)	2 (%50)	3 (%75)	2 (%50)	9 (%56,25)
	YANLIŞ	Yazılan formülü kontrol etmeme	2 (%50)	2 (%50)	1 (%25)	2 (%50)	7 (%43,75)
GENELLEME	DOĞRU	2^n-1 formülüne genelleme	3 (%75)	2 (%50)	3 (%75)	2 (%50)	10 (%62,5)
		$a_n=2a_{n-1}+1$ formülüne genelleme	0 (%0)	1 (%25)	1 (%25)	1 (%25)	3 (%18,75)
	YANLIŞ	$a_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}+n$	0 (%0)	1 (%25)	0 (%0)	0 (%0)	1 (%6,25)
		Anlamsız formül ve açıklama	1 (%25)	1 (%25)	0 (%0)	1 (%25)	2 (%12,5)
		Cebirsel veya sözel kontrol	2 (%50)	1 (%25)	3 (%75)	2 (%50)	8 (%50)
GENELLEMENİN TESTİ	DOĞRU	Cebirsel veya sözel kontrol	2 (%50)	1 (%25)	3 (%75)	2 (%50)	8 (%50)
	YANLIŞ	Anlamsız formül ve açıklama	2 (%50)	3 (%75)	1 (%25)	2 (%50)	8 (%50)
BOŞ	ÇÖZÜM YOK		0 (%0)				

Kağıt katlama problemi araştırmada kullanılan diğer problemler gibi iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada belirlenen bir terimin bulunması istenirken ikinci aşamada problemin genel teriminin bulunması istenmiştir. Tablo8’de görüldüğü gibi gözlemlene basamağında öğretmen adaylarının %87,5’i doğru yanıt vermiştir. Gözlemlerin organizesi basamağında oran biraz daha düşerek %81,25 olmuştur. Yordama basamağında öğretmen adaylarının %62,5’i doğru cevaplar verirken yordamanın testi basamağında bu oran biraz daha düşerek %56,25 olmuştur. Genelleme basamağında öğretmen adaylarının %62,5’i doğru yanıt vermiştir. Genellemenin testi basamağında ise katılımcıların %50’si doğru cevaplamıştır.

4.2.1.Gözlemlene

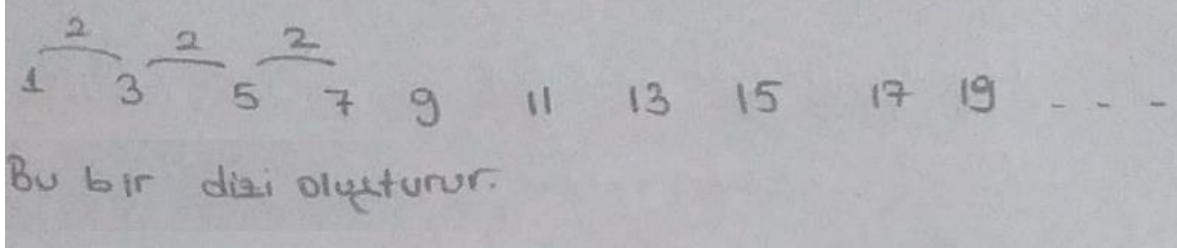
Gözlemlene basamağı doğru ve yanlış olmak üzere iki kategoride değerlendirilmiştir. Örüntüler arasındaki ilişkileri keşfeden öğretmen adayları doğru bulunurken, aralarındaki ilişkiyi keşfedemeyen öğretmen adaylarının cevapları yanlış sayılmıştır. Şekil 22’de gözlemlene basamağında doğru bulunan çözüm örneği verilmiştir.



Şekil 22. Gözlemlene basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö12)

Şekil 22’de görüldüğü gibi katlama ve kat izi arasındaki ilişkiyi fark eden öğretmen adayları bu kategoride değerlendirilmiştir.1.ve 2.sınıf kademesinde bulunan öğretmen adaylarının

hepsi bu basamakta doğru cevap vermişlerdir. 3.ve 4.sınıf kategorisinde bulunan öğretmen adaylarından 2 tanesi bu basamakta yanlış cevap vermiştir. Yanlış bulunan bir çözüm örneği Şekil 23’de verilmiştir.



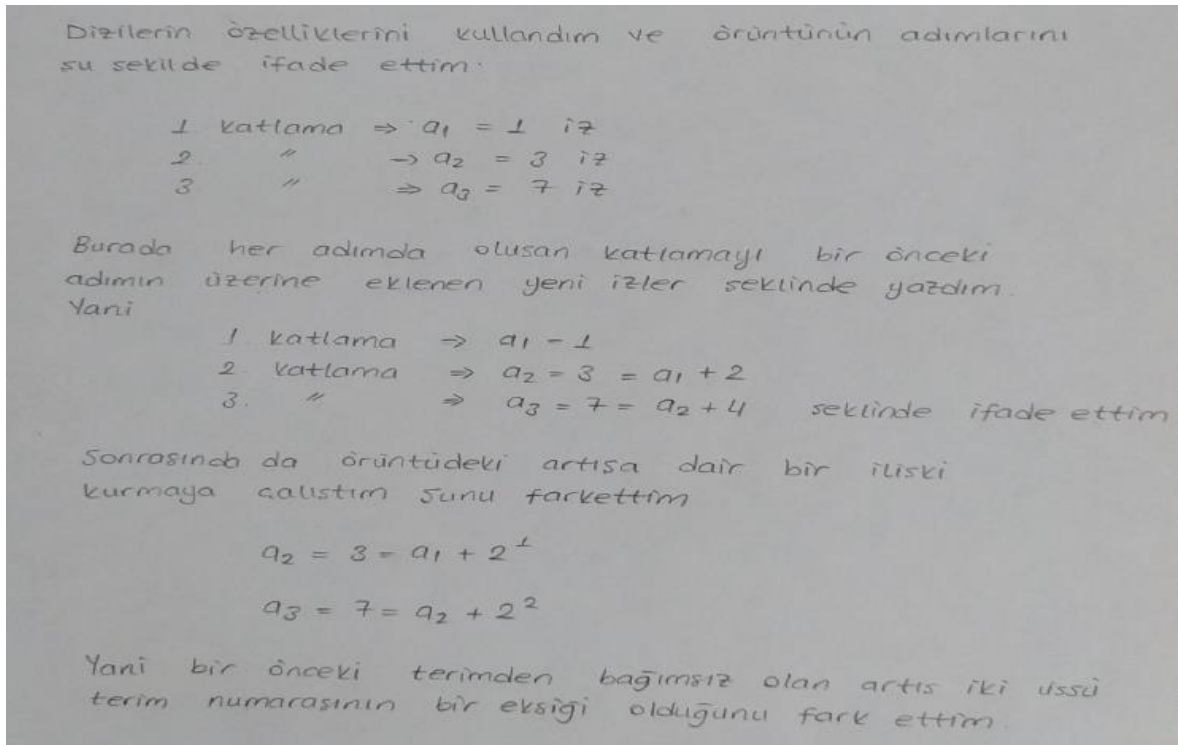
Şekil 23. Kağıt katlama problemi gözlemleme basamağı yanlış bulunan çözüm örneği(Ö14)

Şekil 23’de verilen çözüm örneğine bakıldığında öğretmen adayı katlama sayısı ile oluşan kat yeri arasındaki ilişkiyi keşfedememiştir. Gözlemleme basamağında bu ilişkiyi fark edemediği için sonraki basamaklar da hatalı şekilde devam etmiştir.

Toplamda öğretmen adaylarının 14 tanesi(%87,5) bu basamakta doğru cevap verirken 2 tanesi (%12,5) yanlış cevaplamıştır. Gözlemleme basamağında en çok doğru cevabı veren sınıf kademeleri 1.ve 2.sınıflar olmuştur.

4.2.2. Gözlemlerin Organizesi

Bu basamak doğru ve yanlış olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Öğretmen adaylarından örüntüyü cebirsel ifadeye dönüştürebilenlerin cevabı doğru olarak değerlendirilirken, herhangi bir cebirsel ifade oluşturamayanların cevapları yanlış sayılmıştır. Şekil 24’de doğru bulunan bir çözüm örneği verilmiştir.



Şekil 24. Gözlemlerin organizesi basamağında doğru bulunan bir çözüm örneği(Ö5)

Öğretmen adayı Şekil 24’de verilen çözüm örneğinde örüntünün adımlarını teker teker yazarak artış miktarlarını göstermiştir. Örüntüyü cebirsel olarak ifade etmiştir. Bu basamakta bütün kademelerdeki adaylar problemi cebirsel olarak ifade ettikleri için hepsinin cevabı doğru bulunmuştur. Oluşturulan cebirsel ifadenin hatalı veya hatasız olması önemsenmemiştir.

4.2.3. Yordama

Yordama basamağı doğru ve yanlış olarak ikiye ayrılmıştır. Bu basamakta istenilen terimi bulabilen katılımcıların cevabı doğru olarak değerlendirilirken istenilen terime ulaşamayan ve anlamsız formül geliştiren öğretmen adaylarının cevabı yanlış olarak değerlendirilmiştir. Şekil 25’de yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği verilmiştir.

kağıdı ikiye katlamak onu 2'ye parçaya ayırmakla aynı şeydir. tekni ki 2'ye ikiye katlamak 4'e parçaya ayırmaya benzer o halde ben bunu bir kesme durumu olarak düşünebilirim kağıdı 10'ke ikiye katlamak 2^{10} e parçaya ayırmak demektir, ve bunu yapmanın $2^{10}-1$ defa kesme işlemi gerekir dolayısıyla $2^{10}-1$ adet kat yeri oluşur.

Şekil 25. Yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö16)

Öğretmen adayı problem hakkındaki düşüncelerini yazılı olarak ifade etmiştir. Problemi çözen katılımcıların 10 tanesi (%62,5) bu yöntemi kullanmıştır.

a)

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 3 & 7 & 15 & \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 \frac{2}{2^1} & \frac{4}{2^2} & \frac{8}{2^3} & \frac{16}{2^4} & \dots
 \end{array}$$

Şeklinde bir artış gösterdiğinden 4. terime

$$\begin{aligned}
 & 2^3 + 2^3 + 2^3 + \dots + 2^4 \\
 & = 2^4 (2^0 + 2^0 + 2^0 + \dots + 2^0) \\
 & = 2^4 \cdot \underbrace{(2^0 + 2^0 + 2^0 + \dots + 2^0)}_{63} \\
 & = 2^4 \cdot (2^6 - 1) \\
 & = 2^{10} - 16
 \end{aligned}$$

Şekil 26. Yordama kategorisinde yanlış bulunan çözüm örneği(Ö11)

Şekil 26' da gösterilen çözüm örneğinde öğretmen adayının cevabı gözlemlene ve gözlemlerin organizesi basamağında doğru bulunmuştur fakat yordama basamağında istenilen terimi hatalı bulmuştur. Öğretmen adayı örüntünün terimler arasındaki artış miktarını doğru bulmuş fakat bunu formüle dönüştürürken hata yapmıştır.

Öğretmen adaylarından 10 tanesi (%62,5) istenilen terimi doğru bulmuştur. 1. ve 3. sınıf kademesinde bulunan öğretmen adaylarının %75'i doğru cevaplamışlardır. 2. ve 4. sınıf

kademesinde bulunan öğretmen adaylarının yarısı istenilen terimi bulabilirken diğer yarısı istenilen terimi bulamamıştır.

4.2.4. Yordamanın Testi

Yordamanın testi basamağı doğru ve yanlış olmak üzere iki kategoride değerlendirilmiştir. Yordama basamağında oluşturulan formülün doğruluğunu kontrol eden adayların cevabı doğru, yazılan formülü kontrol etmeyen adayların cevabı yanlış olarak değerlendirilmiştir.

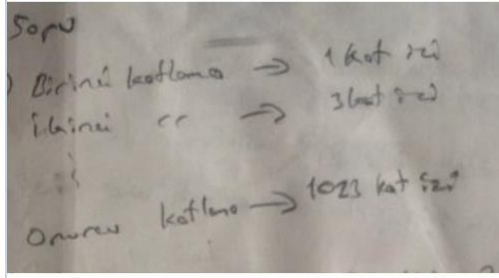
$$\begin{array}{lcl} a_1 = 1 & \rightarrow & a_1 = 1 \\ a_2 = 3 & \rightarrow & a_2 = a_1 + 2 \\ a_3 = 7 & \rightarrow & a_3 = a_1 + a_2 + 3 \\ a_4 = 15 & \rightarrow & a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 7 \\ a_4 = 15 \end{array}} \right\} \text{olduğunu gösteriyor.}$$

Yani her katlamada aslında kaçınca katlama ise (2.,3..) kadar yeni yer okuzur. Önceden oluzanlar halen var olduğu için de toplamı kadar kat vardır. Bu durumda,

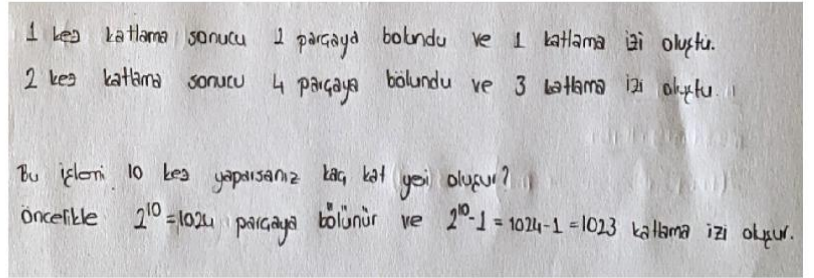
$$\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 + 2 = 3 \\ a_3 = 1 + 3 + 3 = 7 \\ a_4 = 1 + 3 + 7 + 4 = 15 \\ a_5 = 1 + 3 + 7 + 15 + 5 = 31 \\ a_6 = 1 + 3 + 7 + 15 + 31 + 6 = 63 \\ a_7 = 1 + 3 + 7 + 15 + 31 + 63 + 7 = 127 \\ a_8 = 1 + 3 + 7 + 15 + 31 + 63 + 127 + 8 = 255 \\ a_9 = 1 + 3 + 7 + 15 + 31 + 63 + 127 + 255 + 9 = 511 \\ a_{10} = 1 + 3 + 7 + 15 + 31 + 63 + 127 + 255 + 511 + 10 = \underline{1023} \end{array}$$

Şekil 27. Yordamanın testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği

Öğretmen adayı oluşturduğu formülde terim sayısı ile önceki terimlerin toplamının sonuca ulaştırdığını fark etmiştir. Bunu test etmek için oluşturduğu formülü istenilen terime kadar yazarak denemiştir ve yordama basamağında cevabı doğru olarak değerlendirilmiştir.



Ö15



Ö9

Şekil 28. Yordama basamağında yanlış bulunan çözüm örnekleri(Ö15 ve Ö9)

Öğretmen adayları terimler arası ilişkileri inceleyip istenilen terimi doğru olarak bulmuşlardır fakat yazıkları formülü kontrol etmemişlerdir. Bu yüzden bu basamakta cevapları yanlış bulunmuştur.

Yordamanın testi basamağında öğretmen adaylarının 9 tanesinin cevabı (%56,75) doğru bulunurken 7 tanesinin cevabı (%43,25) yanlış olmuştur. Bu basamakta en fazla doğru yanıtı bulunan kademe 3.sınıf kademesi olmuştur. Diğer sınıf kademeleri bu basamakta %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

4.2.5. Genelleme

Genelleme kategorisi doğru ve yanlış olarak ikiye ayrılmıştır. Doğru kategorisinde kendi içerisinde “ $2^n - 1$ formülüne genelleme, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ formülüne genelleme ve $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + n$ ” olarak üç ayrı kısma ayrılmıştır. Yanlış formül bulan veya anlamsız açıklamalar yapan öğretmen adayları bu kategoride değerlendirilmiştir. Şekil 29’da doğru kategorisinde bulunan $2^n - 1$ formülüne genelleme çözüm örneği verilmiştir.

1. kez katlamak	1	) 2 = 2 ¹	= 2 ¹ - 1
2. kez "	3	) 4 = 2 ²	= 2 ² - 1
3. "	7	) 8 = 2 ³	= 2 ³ - 1
4. "	15	) 16 = 2 ⁴	= 2 ⁴ - 1
5. "	31	) 32 = 2 ⁵	= 2 ⁵ - 1
6. "	63		

yanıt $2^n - 1$

a) $n=10$ tüm $2^{10} - 1$.

b) $2^n - 1$.

Şekil 29. Genelleme basamağında doğru bulunan 2^n-1 formülüne genelleme çözüm örneği(Ö13)

Öğretmen adayı yordamayı yaptıktan sonra bulduğu formülü genel bir denklem haline getirmiştir. Öğretmen adaylarının 10 tanesi (%62,5) problemin genel terimini bu şekilde bulmuştur. Şekil 30'da doğru kategorisinde değerlendirilen $a_n=2a_{n-1}+1$ formülüne genellemeye ait bir çözüm örneği verilmiştir.

$$\begin{array}{l}
 a_1 = 1 \\
 a_2 = 3 \\
 a_3 = 7 \\
 a_4 = 15 \\
 \vdots
 \end{array}
 \begin{array}{l}
) + 2 \\
) + 4 \\
) + 8 \\
) + 16 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Her adımda bir öncekinden $2^{(n-1)}$ artarak gitmektedir. O halde genel bir kural olarak $a_{(n-1)} + 2^{(n-1)} = a_n$ ($n \neq 1$ ve $a_1 = 1$) yazabiliriz. Ya da $a_n = 2^n - 1$ olur.

α. $a_{10} = ?$

$$a_{(n-1)} + 2^{(n-1)} = a_n \quad (n \neq 1 \text{ ve } a_1 = 1) \text{ kuralındansa}$$

$$a_n = 2^n - 1 \text{ kuralı ile hesaplamak daha kolaydır.}$$

Şekil 30. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ formülüne genelleme çözüm örneği(Ö3)

Öğretmen adayı iki farklı formülle denklemini ifade etmiştir. Şekil-30'da bulunan açıklamada $a_n = 2a_{n-1} + 1$ formülü kullanmak yerine $2^n - 1$ formülüyle hesaplamasının daha kolay olduğunu belirtmiştir. Birinci sınıf kademesinde hiçbir öğretmen adayı bu formülü kullanmamıştır. İkinci, üçüncü ve dördüncü sınıf kademelerinin her birinde 1 öğretmen adayı bu kuralı genel terim olarak belirtmiştir. 16 katılımcının 3 tanesi (18,75) genel terimi bu kuralla ifade etmiştir. Şekil 27'de $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + n$ formülüne genelleterek yapılan çözüm örneği verilmiştir.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1+2 = 3 \\
a_3 &= 1+3+3 = 7 \\
a_4 &= 1+3+7+4 = 15 \\
a_5 &= 1+3+7+15+5 = 31 \\
a_6 &= 1+3+7+15+31+6 = 63 \\
a_7 &= 1+3+7+15+31+63+7 = 127 \\
a_8 &= 1+3+7+15+31+63+127+8 = 255 \\
a_9 &= 1+3+7+15+31+63+127+255+9 = 511 \\
a_{10} &= 1+3+7+15+31+63+127+255+511+10 = 1023
\end{aligned}$$

1023 tane kat çıkar.

b) n. adım için bir kural ya da formül yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız.
Kat sayısının birikimli olarak ilerlemesi mantığı aynıdır geçerlidir. Bu durumda n. katlamadaki kat sayısı,

$$a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + n \text{ olarak bulunur.}$$

Şekil 31. $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + n$ formülüne genelleme çözüm örneği

Verilen çözüm örneğinde terimin bulunduğu adım ve önceki terimlerin toplamının istenilen terimi verdiği belirtilmiştir. Yazılan kuralın bütün adımları sağladığı Şekil 31’de görülmektedir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarından yalnızca bir tanesi (%6,25) problemin genel terimini bu şekilde ifade etmiştir. Aşağıda genelleme kategorisinde yanlış bulunan çözüm örneği verilmiştir.

b) ben şöyle bir formül
çıktı dem. n. terim için 1 farkları,
2 üzeri 0 olarak yazıp 1 githiyeniz
yeri $2^{n+1} - 1 \rightarrow n. a. d. n. d. e. k. i. k. e. t$

Şekil 32. Genelleme kategorisinde yanlış bulunan çözüm örneği(Ö7)

Yukarıda verilen çözümde öğretmen adayı genel terimi hatalı bulmuştur. Formülde n yerine 1 yazarsak 3 sonucuna ulaşacağız. Formül bize istenilen terim yerine bir sonraki terimin cevabını vermektedir. Bu yüzden öğretmen adayının genel terimi hatalı bulunmuştur.

Genelleme basamağında öğretmen adaylarının 14 tanesi (%87,5) doğru cevaplarırken 2 tanesi (%12,5) bu basamakta yanlış cevap vermiştir. İkinci ve üçüncü sınıf kademelerinde verilen doğru cevapların oranı %100 bulunurken birinci ve üçüncü sınıf kademesinde doğru cevapların oranı %75 olarak bulunmuştur.

4.2.6. Genellemenin Testi

Bu basamak doğru ve yanlış olmak üzere iki kategoride değerlendirilmiştir. Genel terimin doğruluğunu kontrol edenler doğru olarak değerlendirilirken genel terimin doğruluğunu kontrol etmeyen öğretmen adayları yanlış olarak değerlendirilmiştir. Doğru olarak değerlendirilen çözüm örneği Şekil-33’de verilmiştir.

Yani bir önceki terimden bağımsız olan artış iki üssü terim numarasının bir eksiği olduğunu fark ettim.

Sonrasında n -katlamada oluşan iz

$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} \text{ olacağını düşündüm}$$

4. katlama için kâğıt kullandım ve oluşan izin 15 olduğunu gördüm.

Genel formülün sağlanıp sağlanmadığını kontrol ettim.

$n=4$ için

$$a_4 = a_3 + 2^3 = 7 + 8 = 15 \text{ sağlanır.}$$

Simdi ise n -katlamada oluşan izi bulalım.

Bunun için $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ den a_{n-1} bulmam gerekiyor. Ancak a_{n-1} için de a_{n-2} yi bulmam lazım. O halde diziler konusunda gördüğümü özelliklerden yola çıkarak,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2^{n-1} \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2^{n-2} \\ &\vdots \\ a_3 &= a_2 + 2^2 \\ a_2 &= a_1 + 2^1 \\ &+ a_1 = 1 \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsam,

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2^1 + 1 \text{ olur.}$$

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \text{ olur.}$$

Bu toplam $\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ olacaktır.

(Geometrik seri kuralından)

O halde n katlamada oluşan iz;

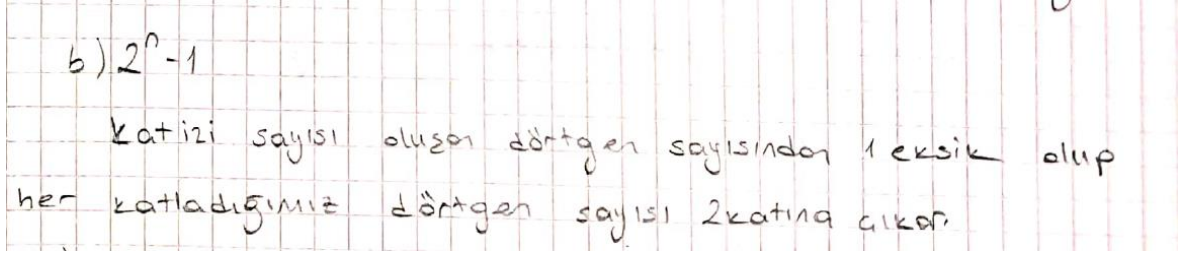
$$\frac{1-2^n}{1-2} = 2^{n-1} \text{ olur.}$$

Buradan yola çıkarak 10. katlamada oluşan iz

$$2^{10-1} = 512 \text{ olacaktır.}$$

Şekil 33. Genellemenin testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö5)

Tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin basamakları arasında net bir ayrım yoktur. Daha anlaşılır olması için çözümün tamamı bir arada verilmiştir. Öğretmen adaylarının yarısı genellemenin testi basamağında doğru yanıt verirken yarısı yanlış yanıt vermiştir. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan bir çözüm örneği aşağıda verilmiştir.



Şekil 34. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö2)

Öğretmen adayı genel terimi doğru bulmuştur fakat bunu ispatlayacak hiçbir açıklamada bulunmamıştır. Bu yüzden genellemenin testi basamağında yanlış olarak değerlendirilmiştir.

Genellemenin testi basamağında en çok doğru yanıtı olan kademe üçüncü sınıf kademesi olmuştur. Üçüncü sınıfların %75'i yazdıkları genel terimi destekleyici işlemler yapmışlardır. Bu basamakta en çok hatası olan kademe birinci sınıf kademesi olmuştur. Birinci sınıf öğretmen adaylarından yalnızca 1 tanesi(%25) genel terimi kontrol etmiştir. İkinci ve dördüncü sınıf kademeleri %50 oranında doğru yanıt vermişlerdir.

4.3. Satranç Tahtası Problemi

Satranç tahtası problemi iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada belirli bir terim istenirken ikinci aşamada verilen problemin genel teriminin bulunması istenmiştir. Satranç tahtası problemine ait yazılı sınav analiz tablosu aşağıda verilmiştir.

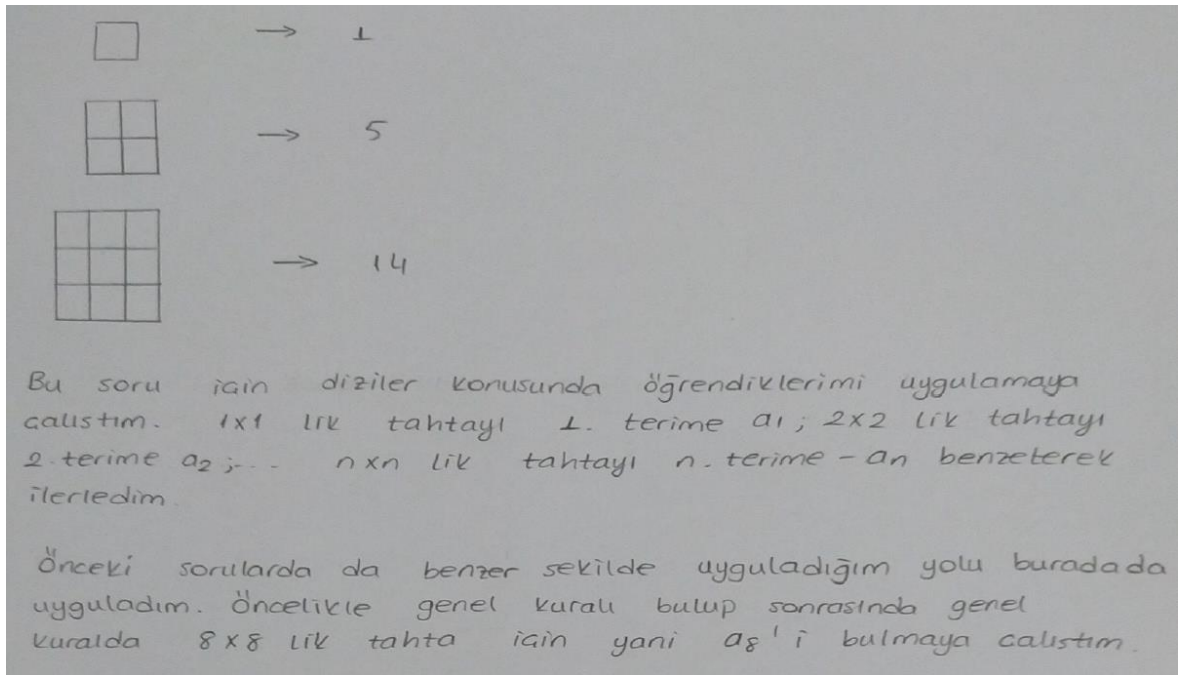
Tablo 10.

Satranç Tahtası Problemi Yazılı Sınav Analiz Tablosu

TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME BASAMAKLARI	AKIL YÜRÜTME DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	SINIFLARA GÖRE YÜZDE(%)				
			1.SINIF (4)	2.SINIF (4)	3.SINIF (4)	4.SINIF (4)	TOPLAM (16)
GÖZLEMLEME	DOĞRU	Verilen örnek kareler arasındaki farka bakma	4 (%100)	2 (%50)	4 (%100)	4 (%100)	14 (%87,5)
	YANLIŞ	Boş	0 (%0)	2 (%50)	0 (%0)	0 (%0)	2 (%12,5)
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	DOĞRU	Kareleri düzenli olarak ettirme	4 (%100)	2 (%50)	3 (%75)	4 (%100)	13 (81,25)
	YANLIŞ	Adımları hatalı yazma	0 (%0)	2 (%50)	1 (%25)	0 (%0)	3 (%18,75)
YORDAMA	DOĞRU	İstenilen terimi sözel veya cebirsel olarak ifade edebilme	3 (%75)	2 (%50)	3 (%75)	3 (%75)	11 (%68,75)
	YANLIŞ	İstenilen terime ulaşamama	1 (%25)	2 (%50)	1 (%25)	1 (%25)	5 (%31,25)
YORDAMANIN TESTİ	DOĞRU	Cebirsel veya sözel kontrol	0 (%0)	2 (%50)	2 (%50)	2 (%50)	6 (%37,5)
	YANLIŞ	Yordamayı test etmeme	4 (%100)	2 (%50)	2 (%50)	2 (%50)	10 (%62,5)
GENELLEME	DOĞRU	$\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ formülüne genelleme	4 (%100)	1 (%25)	1 (%25)	1 (%25)	7 (43,75)
		$a_n=1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ formülüne genelleme	0 (%0)	1 (%25)	2 (%50)	2 (%50)	5 (31,25)
	YANLIŞ	Anlamsız formül ve açıklama	0 (%0)	2 (%50)	1 (%25)	1 (%25)	4 (%25)
GENELLEMENİN TESTİ	DOĞRU	Aritmetiksel veya sözel kontrol	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	1 (%25)	1 (6,25)
	YANLIŞ	Genel terimi kontrol etmeme	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	3 (%75)	15 (%93,75)
BOŞ	ÇÖZÜM YOK		2 (%12,5)				

4.3.1. Gözlemlleme

Gözlemlleme basamağı doğru ve yanlış olarak iki kategoriye ayrılmıştır. Problemde verilen örnek kareleri ve aralarındaki ilişkiyi inceleyip bağlantı kuran öğretmen adaylarının cevapları doğru, ilişkilere dikkat etmeyen veya problemi boş bırakan öğretmen adaylarının cevapları yanlış olarak değerlendirilmiştir. Şekil 35’de satranç tahtası problemi gözlemlleme basamağında doğru bulunan çözüm örneği verilmiştir.



Şekil 35. Satranç tahtası problemi gözlemlleme basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö2)

Öğretmen adayı örüntüyü incelemiş ve istenilen terim için nasıl bir yol izleyeceğini yazılı olarak ifade etmiştir. Katılımcıların 14 tanesi (%87,5) bu kategoride değerlendirilmiştir. Yalnızca boş bırakanlar yanlış olarak değerlendirilmiştir. Şekil 36’da yanlış kategorisinde değerlendirilen çözüm örneği verilmiştir.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = 14$$

$$a_8 = ?$$

$$a_n = ?$$

Şekil 36. Gözlemlene basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö7)

Yukarıda verilen şekilde öğretmen adayı problem hakkında bir düşünce geliştirememiştir ve problemi boş bırakmıştır. Bu yüzden bu kategoride cevabı yanlış sayılmıştır.

Satranç tahtası probleminin gözlemlene basamağında ikinci sınıf kademesi hariç diğer kademeler %100 oranında doğru cevap verirlerken ikinci sınıf kademesinde doğru cevap %50 oranına düşmüştür. İkinci sınıf kademesinde bulunan iki öğretmen adayı problemi boş bırakmıştır.

4.3.2. Gözlemlerin Organizesi

Gözlemlerin organizesi basamağı doğru ve yanlış olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Kareleri düzenli olarak devam ettiren öğretmen adaylarının cevapları doğru sayılırken düzenli devam ettiremeyenlerin cevapları yanlış sayılmıştır. Şekil 37’de Ö2’nin gözlemlerin organizesi basamağında yaptığı doğru çözüm örneği verilmiştir.

Handwritten solution for the sequence problem. It shows the sequence 1, 5, 14, 30, 55, ... with arrows indicating the differences: $+2^2$, $+3^2$, $+4^2$, $+5^2$, and then $+n^2$. The sequence is labeled 'modim' and 'A'.

Şekil 37. Gözlemlerin organizesi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö2)

Öğretmen adayı terimler arasındaki artış miktarını bulmuş ve bu şekilde kareleri sürdürmeye devam etmiştir. 16 katılımcının 13 tanesi (%81,25) örüntüyü doğru bir şekilde devam ettirebildikleri için bu basamakta cevapları doğru olarak değerlendirilmiştir.

Soru Gözlem.	Büyük kare içerisindeki kare sayısı	Sonradan oluşturulan kare sayısı	Toplam Kare Sayısı
a)			
	1	0	1
+3	4	1	5
+5	9	5	14
+7	16	12	28
+9	25	22	37
+11	36	35	71
+13	49	51	100
+15	64	70	134

Şekil 38. Satranç Tahtası problemi gözlemlerin organizesi basamağı yanlış bulunan çözüm örneği(Ö11)

Şekil 38’de verilen çözümde öğretmen adayı örüntünün artış miktarını bulurken hata yapmıştır. Bu yüzden örüntünün bütün adımları hatalı sonuç oluşturmaktadır. Öğretmen adayının cevabı bu kategoride yanlış olarak değerlendirilmiştir. 16 katılımcının 3 tanesi (%18,75) bu basamakta yanlış cevap vermiştir.

Gözlemlerin organizesi basamağında %100 doğru cevap oranıyla en fazla doğru cevabı olan kademeler birinci ve dördüncü sınıf kademeleridir. Üçüncü sınıf kademesinden yalnızca bir öğretmen adayının cevabı gözlemlerin organizesi basamağında yanlış bulunmuştur. Üçüncü sınıf kademesi %75 oranında doğru cevap vermişlerdir. En çok yanlış yanıtı bulunan kademe ikinci sınıf kademesi olmuştur. Öğretmen adaylarının yalnızca iki tanesi verilen kareleri doğru bir şekilde devam ettirebilmiştir.

4.3.3. Yordama

Yordama basamağı doğru ve yanlış olmak üzere ikiye ayrılmıştır. İstenilen terime sözel veya cebirsel olarak ulaşabilen öğretmen adaylarının cevapları doğru olarak değerlendirilirken istenilen terimi hatalı bulan veya bulamayan öğretmen adaylarının cevapları yanlış olarak değerlendirilmiştir. Şekil 39’da doğru bir yordama örneği verilmiştir.

$$a) \binom{8}{1}\binom{8}{1} + \binom{7}{1}\binom{7}{1} + \dots + \binom{1}{1}\binom{1}{1}$$
$$8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots + 1^2 = 204$$

Şekil 39. Yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö14)

Öğretmen adayı kombinasyon kullanarak doğru bir yordamada bulunmuştur. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının 11 tanesi (%68,75) yordama basamağında doğru yanıt verirken, 5 tanesi (%31,25) yordama basamağında yanlış yanıt vermiştir. Yanlış bulunan bir çözüm örneği Şekil 40’da verilmiştir.

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 36 \\ + 49 \\ + 64 \\ + 81 \\ + 100 \\ + 121 \\ + 144 \\ + 169 \\ + 196 \\ + 225 \\ \hline 134 \end{array}$$

Sonuç olarak 8x8 lik satranç tahtasında 134 tane doğru sonuca ulaşılır.

Şekil 40. Yordama basamağında yanlış bulunan çözüm örneği

Öğretmen adayı gözlemleri organize ederken terim artışı hesabında hata yapmıştır. Bu yüzden yordaması da hatalı bulunmuştur.

Satranç tahtası probleminin yordama basamağında birinci, üçüncü ve dördüncü sınıf kademeleri %75 oranında doğru yanıt verirken en çok yanlış cevap veren sınıf kademesi %50 oranı ile ikinci sınıflar olmuştur.

4.3.4. Yordamanın Testi

Yordamanın testi basamağı doğru ve yanlış olarak iyi kategoriye ayrılmıştır. Önceki adımda yapılan yordamaları kontrol eden öğretmen adaylarını cevapları doğru sayılırken kontrol etmeyen öğretmen adaylarının cevapları yanlış sayılmıştır. Şekil 41’de bu basamakta doğru bulunan bir çözüm örneği verilmiştir.

tahtadaki toplam kare sayısı;

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \frac{8 \cdot (8+1) \cdot (17)}{6} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 12 \cdot 17 = \underline{204} \text{ tane dir.}$$

1x1'lik kareler; Söndürge tahtasının yatay kısmında 1 birimlik toplam 8 kare, dikey kısmında 1 birimlik toplam 8 kare vardır.

Bu durumda 1x1'lik; $8 \times 8 = 64$ tane kare vardır.

2x2'lik kareler; Söndürge tahtasının yatay kısmında 2 birimlik kenara elde etmeye çalışırsak toplamda 7 tane uzunluk elde ederiz. Aynı şekilde dikey kısmında da 7 tane uzunluk elde edilir.

Bu durumda 2x2'lik; $7 \times 7 = 49$ tane kare vardır.

3x3'lük kareler; Söndürge tahtasının yatay kısmında 3 birimlik kenara elde etmeye çalışırsak toplamda 6 tane uzunluk elde ederiz. Aynı şekilde dikey kısmında da 6 tane uzunluk vardır.

Böylece 3x3'lük; $6 \times 6 = 36$ tane kare vardır.

Burada bir ilizki fark ettim o da; 1x1'lik kareler 8^2 tane, 2x2'lik kareler 7^2 tane, 3x3'lük kareler 6^2 tane yani 8'den başlayarak ve birer birer azalarak kareleri alınmış.

Son olarak; 8x8'lik karelerin sayısını bakarsak, tahtanın hem yatay hem de dikey kısmında boyutu 8 birim olan 1 uzunluk bulunur. O zaman, 8x8'lik; $1 \cdot 1 = 1$ tane kare vardır ki o da tahtanın tamamı (buranı)'dır.

Şekil 41. Yordamanın testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği

Öğretmen adayı istenilen terimi bulduktan sonra teker teker yazarak işlemin doğruluğunu kontrol etmiştir ve yordamanın testi basamağında cevabı doğru olarak değerlendirilmiştir.

Katılımcıların yalnızca 6 tanesi bu kategoride doğru cevap vermişlerdir. Yanlış bulunan yordamanın testi basamağı çözüm örneği aşağıda verilmiştir.

$$a) \ a_1 = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$a_2 = 1 + 4$$

$$a_3 = 1 + 4 + 9$$

.

.

.

$$a_8 = 204$$

Şekil 42. Yordamanın testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği

Öğretmen adayı yalnızca örüntüyü devam ettirerek istenilen adımı bulmuştur. Fakat bulduğu formülü ve sonucu kontrol edecek hiçbir işlem gözlenmemektedir. Bu yüzden öğretmen adayının cevabı yordamanın testi basamağında yanlış olarak değerlendirilmiştir.

Satranç Tahtası probleminin yordamanın testi basamağında birinci sınıf kademesi hariç diğer kademelerde %50 oranında doğru cevap verdikleri görülmektedir. Birinci sınıf kademesinde bulunan hiçbir öğretmen adayı yaptıkları yordamayı test etmedikleri için bu basamakta cevapları yanlış olarak değerlendirilmiştir.

4.3.5. Genelleme

Genelleme basamağı doğru ve yanlış olmak üzere iki kategoriye ayrılmıştır. Doğru kategorisi kendi içerisinde $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ formülüne genelleme ve $a_n=1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ formülüne genelleme olarak iki kategoriye ayrılmıştır. Problem için genel bir formül oluşturamayan veya hatalı formül oluşturan öğretmen adayları yanlış kategorisinde

değerlendirilmiştir. $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ formülüne genelleme kategorisinde bulunan çözüm örneği Şekil 43'de verilmiştir.

Handwritten solution on grid paper:

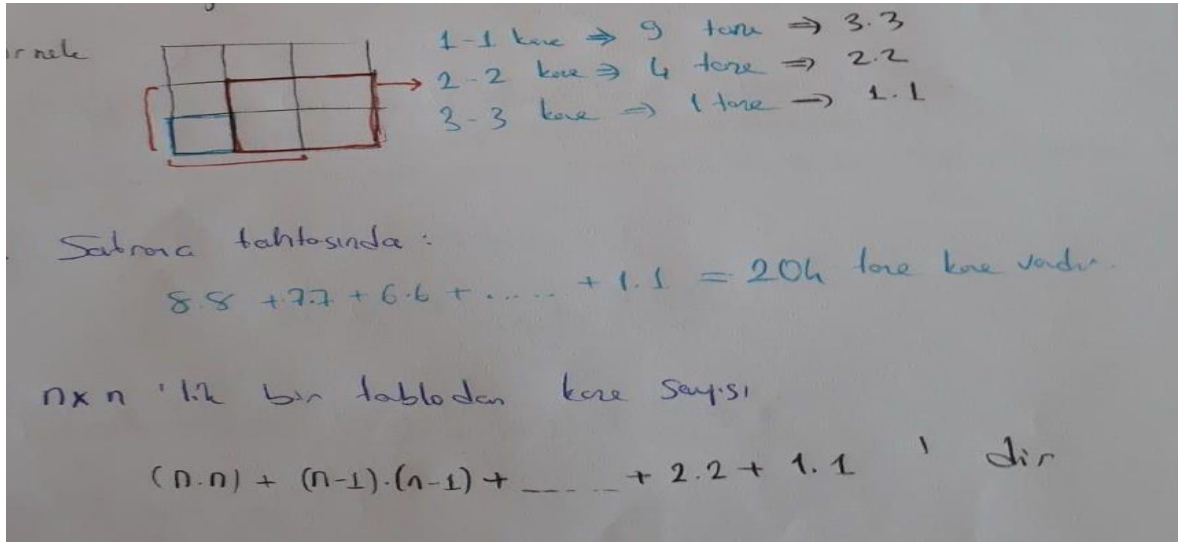
1) $8 \times 8 \rightarrow 1$ tane
 $7 \times 7 \rightarrow 4$ tane
 $6 \times 6 \rightarrow 9$ tane
 toplamda 204 tane

2) $5 \times 5 \rightarrow 16$ tane
 $4 \times 4 \rightarrow 25$ tane
 $3 \times 3 \rightarrow 36$ tane
 $2 \times 2 \rightarrow 49$ tane
 $1 \times 1 \rightarrow 64$ tane

3) $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Şekil 43. $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ formülüne genelleme doğru çözüm örneği(Ö13)

Öğretmen adayı öncelikle hangi büyüklükte kaçar tane kare olduğunu yazmıştır. Yazılan sayılar arasında belli bir ilişki olduğunu bulmuştur ve genel bir terim haline getirerek bu basamakta cevabı doğru bulunmuştur. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının 7 tanesi (%43,75) problemin genel terimini bu şekilde ifade etmiştir. Şekil 44'de $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ formülüne genelleme kategorisinde bulunan çözüm örneği verilmiştir.



Şekil 44. $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ formülüne genelleme çözüm örneği

Öğretmen adayı kareleri tek tek sayarak belli bir kural oluştuğunu fark etmiştir. Oluşan kuralı genel bir formül haline dönüştürmüştür. Araştırmaya katılan katılımcıların 5 tanesi (%31,25) genel terimi bu şekilde ifade etmiştir. Genelleme kategorisinde yanlış bulunan bir çözüm örneği aşağıda verilmiştir.

Sonuç olarak 2×8 lik satranç tahtasının 14 kare vardır.

b) Kural oluştururken T_1 büyük kare içerisindeki kare sayısı + T_2 tarafından oluşturulan kare sayısı fikrinden yararlandım.

$$3+5+7+9+\dots+2k+1; k=n-1 \text{ için}$$

$$= \left(\frac{2k+1-3}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{2k+1+3}{2} \right)$$

$$= k(k+2); k=n-1 \text{ için}$$

$$= (n-1)(n+1)$$

$$= n^2 - 1$$

ve

$$T_1 = n^2 - 1 + 1$$

$$= n^2$$

olarak bulunur. Diğer taraftan T_2

$$1+4+7+10+\dots+3k-2; k=n-1 \text{ için}$$

$$= \left(\frac{3k-2-1}{3} + 1 \right) \left(\frac{3k-2+1}{2} \right)$$

$$= k \cdot \left(\frac{3k-1}{2} \right); k=n-1 \text{ için}$$

$$= (n-1) \left(\frac{3n-4}{2} \right)$$

$$= \frac{3n^2 - 7n + 4}{2}$$

ve

$$T_2 = \frac{3n^2 - 7n + 4}{2} + 0 = \frac{3n^2 - 7n + 4}{2}$$

olarak bulunur. Böylece kural

$$T_1 + T_2 = n^2 + \frac{3n^2 - 7n + 4}{2}$$

$$= \frac{5n^2 - 7n + 4}{2}$$

dir.

Şekil 45. Genelleme basamağında yanlış bulunan çözüm örneği

Öğretmen adayının yazdığı formül ilk üç terimi doğru şekilde vermiştir fakat dördüncü terimden itibaren yanlış ifade etmiştir. Öğretmen adayının cevabı bu basamakta yanlış olarak değerlendirilmiştir. Araştırmaya katılan katılımcılardan 4 tanesi (%25) bu basamakta yanlış cevap vermişlerdir.

Satranç tahtası probleminin genelleme basamağında en çok doğru cevabı bulunan kademe birinci sınıflar olmuştur. Üçüncü ve dördüncü sınıf kademeleri %75 oranında doğru cevap verirken en çok yanlış yapan kademe ikinci sınıf kademesi olmuştur.

4.3.6. Genellemenin Testi

Genellemenin testi basamağı doğru ve yanlış olmak üzere iki kategoriye ayrılmıştır. Önceki basamakta yazılan genel terimi kontrol eden öğretmen adaylarının cevapları doğru sayılırken kontrol etmeyen öğretmen adaylarının cevapları yanlış sayılmıştır. Genellemenin testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği Şekil 46’da verilmiştir.

The image shows a handwritten mathematical derivation for the sum of squares formula. It starts with a general term $a_n = a_{n-1} + n \cdot n$ and a specific example $a_3 = a_2 + 3 \cdot 3$. The derivation then shows the sum of the first n terms, $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$, and finally calculates the sum for $n=8$, resulting in $a_8 = 204$.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n \cdot n \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-1)(n-1) \\ &\vdots \\ a_3 &= a_2 + 3 \cdot 3 \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 2 \\ a_1 &= 0 + 1 \cdot 1 \\ + & \\ \hline \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa topladım ve sonucunda,

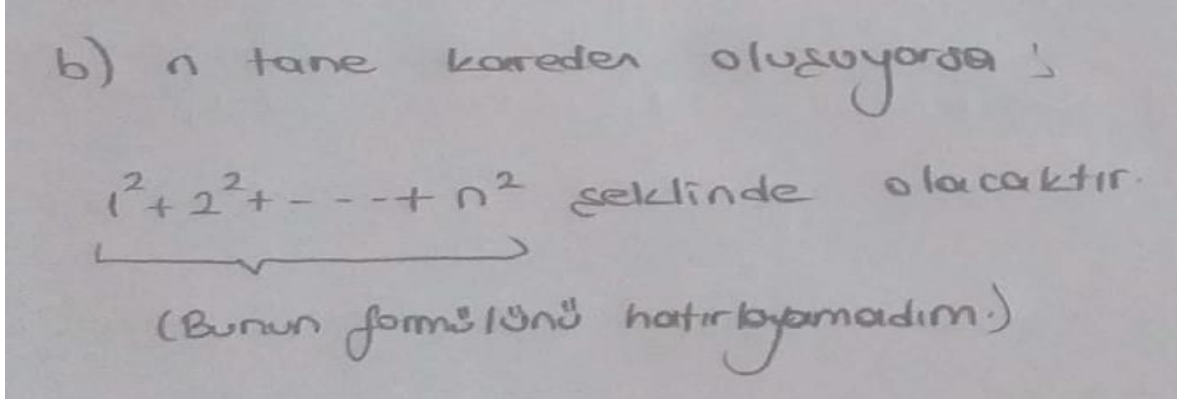
$$a_n = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$
$$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 \text{ buldum.}$$

Buradan 8. adımda

$$\begin{aligned} a_8 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 \\ &= 204 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Şekil 46. Genellemenin testi basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö5)

Öğretmen adayı problem için belli bir formül geliştirmiştir ve bu formülü istenilen terimi kullanarak kontrol etmiştir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarından yalnızca Ö5 genel terimi kontrol ederek bu basamakta cevabı doğru olarak değerlendirilmiştir. Şekil 47’de yanlış bulunan çözüm örneği verilmiştir.



Şekil 47. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği

Öğretmen adayı yalnızca formülü yazıp problemi çözmüştür. Öğretmen adayının cevap kağıdında formülü kontrol edecek hiçbir ifade bulunmamaktadır.

Satranç tahtası problemi genellemenin testi basamağında en çok doğru cevabı olan kademe 4.sınıf kademesi olmuştur. Diğer kademeler bu basamakta doğru cevap verememiştir.

4.4. Kağıt Ev Problemi

Çalışmanın son problemi kağıt ev problemidir ve iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada belirlenen bir terimin bulunması istenmiştir. İkinci aşamada ise yazılan problemin genel terimin bulunması istenmektedir. Tablo 10'da kağıt ev problemine ait tümevarımsal akıl yürütme süreçleri yazılı sınav analiz tablosu verilmiştir.

Tablo 11.

Kâğıt Ev Problemi Yazılı Sınav Analiz Tablosu

TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME BASAMAKLARI	AKIL YÜRÜTME DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	SINIFLARA GÖRE YÜZDE(%)				
			1.SINIF (4)	2.SINIF (4)	3.SINIF (4)	4.SINIF (4)	TOPLAM (16)
GÖZLEMLEME	DOĞRU	Ev oluşturabilmek için çatı ve taban kartlarının ayrı hesaplamamız gerektiğini fark etme	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	16 (%100)
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	DOĞRU	Kartlar arasındaki bağıntıyı fark etme	2 (%50)	4 (%100)	2 (%50)	3 (%75)	11 (%68,75)
	YANLIŞ	Kartlar arasındaki bağıntıyı yanlış ifade etme	2 (%50)	0 (%0)	2 (%50)	1 (%25)	5 (%31,25)
YORDAMA	DOĞRU	İstenilen terimi sözel veya cebirsel olarak ifade edebilme	2 (%50)	4 (%100)	2 (%50)	3 (%75)	11 (%68,75)
	YANLIŞ	İstenilen terime ulaşamama	2 (%50)	0 (%0)	2 (%50)	1 (%25)	5 (%31,25)
YORDAMANIN TESTİ	YANLIŞ	Cebirsel veya sözel kontrol yapmama	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	16 (%100)
GENELLEME	DOĞRU	$\frac{n(3n+1)}{2}$ formülüne genelleme	1 (%25)	2 (%50)	0 (%0)	1 (%25)	4 (%25)
		$a_n = a_{n-1} + (3n-1)$ $n \neq 1$ formülüne genelleme	1 (%25)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	1 (6,25)
		$2 + (n-1) \cdot \frac{3n+4}{2}$ formülüne genelleme	0 (%0)	0 (%0)	1 (%25)	0 (%0)	1 (6,25)
		$3(1+2+3+\dots+n) - n$ formülüne genelleme	0 (%0)	0 (%0)	1 (%25)	1 (%25)	2 (%13,5)
	YANLIŞ	Anlamsız formül ve açıklama	2 (%50)	2 (%50)	2 (%50)	1 (%25)	7 (%43,75)
		Boş	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	1 (%25)	1 (6,25)
GENELLEMENİN TESTİ	YANLIŞ	Cebirsel veya sözel kontrol yapmama	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	4 (%100)	16 (%100)
BOŞ	ÇÖZÜM YOK		0 (%0)				

4.4.1. Gözlemlleme

Gözlemlleme basamağında yanlış cevabı olan hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır. Öğretmen adaylarının tamamı ev oluşturmak için çatıyı ve tabanları ayrı hesaplamaları gerektiğine dikkat etmişlerdir. Gözlemlleme basamağında doğru bulunan çözüm örneği aşağıda verilmiştir.

(Kartları yukarıdan aşağıya doğru saydım. 1. kat en üst
Şekilde verilen evin 1. katında 1 tane üçgenel kat)
şekil, 2. katında 2 tane üçgenel şekil bulunmaktadır.
Yani n. katında n tane üçgenel şekil bulunduğunu
söyleyebiliriz.

Her bir üçgenel şekil için tabanı da dahil olmak
üzere 3 tane kart kullanılmıztır. Fakat en alt
katta taban bulunmadığı için en alt kat için
2'şer kart kullanılmıztır. Bu durumda;
(Resimdeki şekil için (3 katlı))

1. kat için;	$1 \cdot 3 = 3$	tane kart	} kullanılmıztır diyebiliriz.
2. kat için;	$2 \cdot 3 = 6$	tane kart	
3. kat için;	$3 \cdot 2 = 6$	tane kart	

Şekil 48. Kağıt ev problemi gözlemlleme basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö6)

Ö5 Şekil 48'de adım adım problemi nasıl çözdüğünü yazılı olarak ifade etmiştir. Taban ve çatı kartlarının farklı olduğunu kağıt evin en sonundaki çatıların taban kartlarının bulunmadığını belirtmiştir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının tamamı bu basamakta doğru cevap vermişlerdir.

4.4.2. Gözlemlerin Organizesi

Gözlemlerin organizesi basamağı doğru ve yanlış olmak üzere iki kategoriye ayrılmıştır. Kartlar arasındaki ilişkiyi fark eden ve artış miktarlarını doğru şekilde yazabilen öğretmen adaylarının cevapları doğru sayılmıştır. Terimler arasındaki ilişkiyi fark edemeyen öğretmen adaylarının cevapları yanlış olarak değerlendirilmiştir. Gözlemlerin organizesi basamağında doğru olarak belirlenen bir çözüm örneği Şekil 49'da verilmiştir.

1. kat	$1 \cdot 2$	$= 2$	) $5 = 2 \cdot 2 + 1$
2. kat	$2 \cdot 2 + 1 + 2$	$= 7$	
3. kat	$3 \cdot 2 + 2 + (2 \cdot 2 + 1) + 2$	$= 15$	) $8 = 3 \cdot 2 + 2$
4. kat	$4 \cdot 2 + 3 + 15$	$= 26$	) $11 = 4 \cdot 2 + 3$
5. kat	$5 \cdot 2 + 4 + 26$	$= 40$	) $14 = 5 \cdot 2 + 4$

Şekil 49. Gözlemlerin organizesi basamağı doğru çözüm örneği(Ö13)

Yukarıdaki çözümde öğretmen adayı adım adım terimleri yazmıştır. Terimler arasındaki artış miktarını fark etmiş ve organize etmiştir. Öğretmen adaylarının 11 tanesi (68,75) terimleri organize etmede doğru cevap verirken 5 tanesi (%31,25) bu basamakta yanlış cevap vermiştir. Şekil 50’de yanlış bulunan çözüm örneği verilmiştir.

a) Örnek olarak verilen kâğıt eve baktığımızda katlardaki kart sayılarının olduğunu görüyoruz. Buradan 5 katlı kâğıt evin katlarındaki kart sayıları

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & - & 4 & - & 6 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ +2 & & +2 & & +2 \end{array}$$

olur. Ayrıca her bir kat arasına 1 kart konulduğundan 4 kart da buradan gelir. Buradan

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & - & 4 & - & 6 & - & 8 & - & 10 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ +2 & & +2 & & +2 & & +2 \end{array}$$

$30 + 4 = 34$

kart kullanıldığı sonucuna ulaşılır.

Şekil 50. Gözlemlerin organizesi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö1)

Öğretmen adayı örüntünün artış miktarını ikişer ikişer olduğunu yazmıştır. Yalnızca ilk terim 5 diğer terimler üçer üçer artmaktadır. Öğretmen adayı terimler arası artış miktarını yanlış bulduğu için çözümünde hatalı bulmuştur.

Kağıt katlama probleminin gözlemlerin organizesi basamağında %100 doğru cevap oranı ile en çok doğru cevabı olan kademe ikinci sınıf kademesi olmuştur. Dördüncü sınıflar %75 oranında doğru cevap vermişlerdir. Birinci ve üçüncü sınıflar %50 oranında cevap vermişlerdir.

4.4.3. Yordama

Yordama basamağı doğru ve yanlış olmak üzere iki kategoriden oluşmaktadır. İstenilen terimi sözel veya cebirsel olarak ifade edebilen öğretmen adaylarının cevapları doğru olarak değerlendirilirken istenilen terime ulaşamayan öğretmen adayının cevabı yanlış olarak değerlendirilmiştir. Şekil 51’de yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği verilmiştir.

1) A) 5 katlı bir ev oluşturmak için öncelikle $(1+2+3+4+5) \cdot 2$ tane kağıt kullanılacak kağıtlar için gerekir. daha sonra Arolara koymak için $1+2+3+4$ kağıt gerekir, Toplam 30 tane kullanmak için 10 tane de arolara koymak için kağıt gerekir Yani toplam 40 kağıt lazımdır.

Şekil 51. Yordama basamağında doğru bulunan çözüm örneği(Ö16)

Öğretmen adayı problem çözme sürecini yazılı olarak ifade etmiştir. Çatı oluşturmak için gereken kart sayısını ve taban oluşturmak için gereken kart sayısını yazılı olarak ifade etmiştir. İstenilen terimi doğru bulmuş ve öğretmen adayının cevabı bu basamakta doğru olarak değerlendirilmiştir. Araştırmaya katılan katılımcıların 11 tanesi (%68,75) bu basamakta doğru olarak değerlendirilirken 5 tanesi (%31,25) istenilen terime ulaşamamış ve cevapları yanlış olarak değerlendirilmiştir. Şekil 52’de yordama basamağında yanlış bulunan çözüm örneği verilmiştir.

a) Evin birinci katı için taban ile birlikte kart sayısı : 3

İkinci kat için: 5

Üçüncü kat için: 7

Dördüncü kat için: 9

Beşinci kat için: 11

Bulunur. 5 katlı bir ev için toplam kart sayısı: $3+5+7+9+11=35$ bulunur.

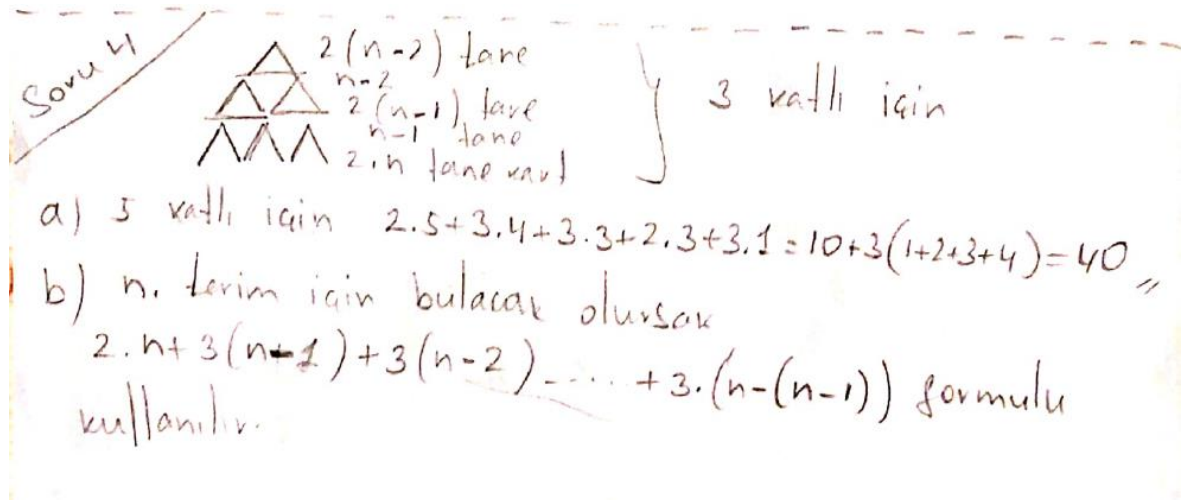
Şekil 52. Yordama basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö10)

Öğretmen adayı terimler arasındaki artışı yanlış hesapladığı için istenilen terimi hatalı bulmuştur.

Kağıt katlama problemi yordama basamağında %100 doğru cevap oranı ile en çok doğru cevabı olan kademe ikinci sınıf kademesi olmuştur. Dördüncü sınıflar %75 oranında doğru cevap vermiştir. Birinci ve üçüncü sınıflar %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

4.4.4. Yordamanın Testi

Araştırmaya katılan katılımcıların tamamının cevapları bu basamakta yanlış olarak değerlendirilmiştir. Hiçbir öğretmen adayı yapılan yordamayı kontrol etmemiştir. Şekil 53'de yanlış bir çözüm örneği verilmiştir.



Şekil 53. Yordamanın testi basamağı yanlış bulunan çözüm örneği(Ö8)

Şekil 53’de verilen çözümde öğretmen adayı istenilen terimi bulduktan sonra kontrol edecek hiçbir işlem yapmamıştır. Genel formülü yazmış ve kontrol edecek işlemler yapmamıştır. Öğretmen adayının cevabı yordamanın testi ve genellenenin testi basamağında yanlış bulunmuştur.

4.4.5. Genelleme

Genelleme basamağı doğru ve yanlış olmak üzere iki kategoriye ayrılmıştır. Doğru kategorisi “ $\frac{n(3n+1)}{2}$ formülüne genelleme, $a_n = a_{n-1} + (3n-1)$ $n \neq 1$ formülüne genelleme, $2 + (n-1) \cdot \frac{3n+4}{2}$ formülüne genelleme, $3(1+2+3+\dots+n) - n$ formülüne genelleme” olarak dörde ayrılmıştır. Anlamsız formül yazan veya boş bırakan katılımcılar yanlış olarak değerlendirilmişlerdir. Şekil 54’de genelleme basamağında “ $\frac{n(3n+1)}{2}$ formülüne genelleme” çözüm örneği verilmiştir.

b-) Bu zekilde yapılacak n katlı kağıt ev için nasıl bir formül ya da kural geliştirerek temsil edebiliriz? Bulduğunuz kural ya da formülü açıklayınız.

Yukarıda da yazdığım gibi 1. katta 1 üçgen, 2. katta 2 üçgen, n. katta n tane üçgen bulunur.

Taban kat yani bu evin için n. kat hariç bir üçgen 3 tane kattan oluşur. Taban kattaki her bir üçgen ise 2 tane kattan oluşur. Bu durumda;

1. kat için; $1 \cdot 3 = 3$ kat
2. kat için; $2 \cdot 3 = 6$ kat
...

(n-1). kat için; $(n-1) \cdot 3 = 3n-3$ kat

Yani toplamda; $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot 3$ kat
 $3 \cdot (1+2+\dots+(n-1))$ kat
 $3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}$ kat bulunur.

n. kat için; $n \cdot 2 = 2n$ kat olur.

Boylece n katlı bir ev için $\frac{3n^2-3n}{2} + 2n = \frac{3n^2+n}{2}$ kat kullanılır.

Şekil 54. Genelleme basamağında “ $\frac{n(3n+1)}{2}$ ” formülüne genelleme çözüm örneği

Öğretmen adayı doğru bir yordamadan sonra doğru bir genel formül elde etmiştir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının 4 tanesi (%25) problemin genel terimini bu şekilde bulmuşlardır. Şekil 55’de genelleme basamağı $a_n = a_{n-1} + (3n-1)$ $n \neq 1$ formülüne genelleme çözüm örneği verilmiştir.

b. $a_1 = 2$
 $a_2 = 7$
 $a_3 = 15$
 $a_4 = 26$

Görüldüğü üzere her adımda bir önceki adımdan $(3n-1)$ artarak gitmektedir. O halde genel kural olarak $a_{n-1} + (3n-1) = a_n$ ($n \neq 1$ ve $a_1 = 2$) yazabiliriz.

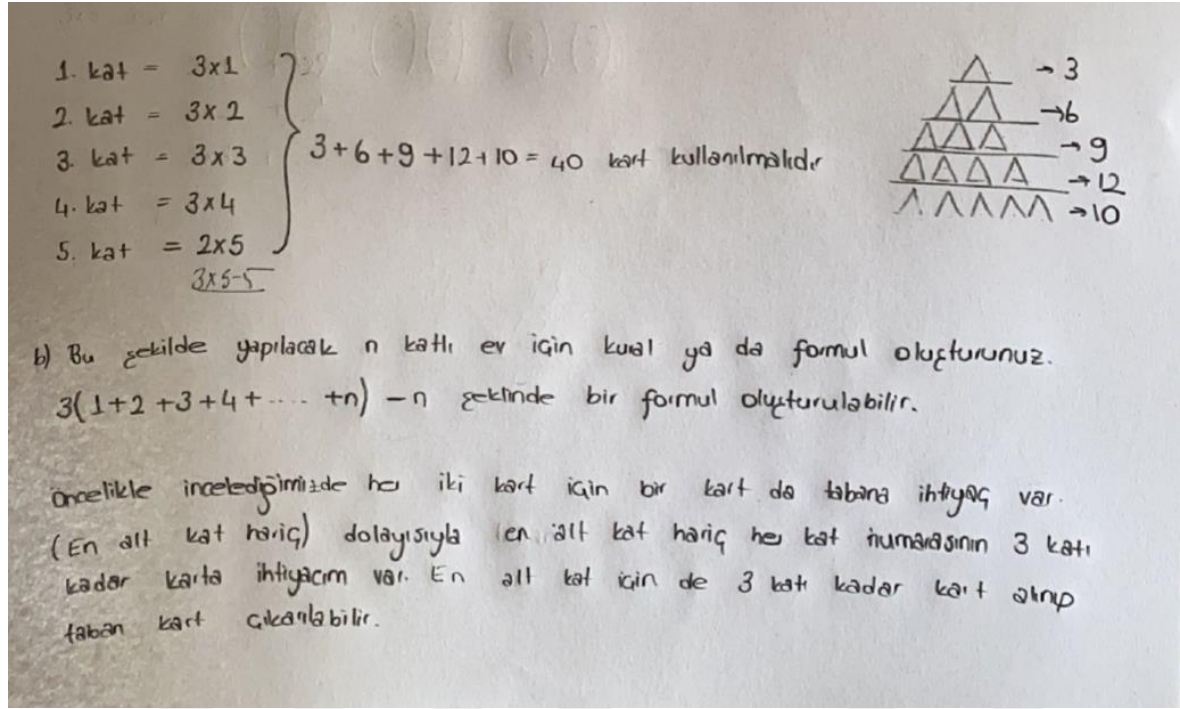
Şekil 55. Genelleme basamağı $a_n = a_{n-1} + (3n-1)$ $n \neq 1$ formülüne genelleme çözüm örneği(Ö3)

Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının yalnızca bir tanesi (%6,25) genel terimi bu şekilde yazmıştır. Şekil-56’ da genelleme basamağında $2 + (n-1) \cdot \frac{3n+4}{2}$ formülüne genelleme çözüm örneği verilmiştir.

" Arış miktarında sabit olarak artım söz konusu
" Genel Terim: $3n+2$ (Arış miktarına)
" Genel terim bulmak için aritmetik dizide toplam bulma uygulaması
(Terim sayısı) . Ortaça
" $2 + \left(\frac{3(n-1) - 5}{3} + 1 \right) \cdot \left(\frac{3(n-1) + 5}{2} \right)$
" Dizi başlangıcında : $2 + (n-1) \cdot \left(\frac{3n+4}{2} \right)$
a. 5 kull. ev
= $2 + (5-1) \cdot \frac{19}{2}$
= 40
b. Genel Terim :
 $2 + (n-1) \cdot \left(\frac{3n+4}{2} \right)$

Şekil 56. Genelleme basamağında $2 + (n-1) \cdot \frac{3n+4}{2}$ formülüne genelleme çözüm örneği(Ö12)

Araştırmaya katılan öğretmen adaylarından yalnızca bir tanesi (%6,25) bu şekilde genel bir terim oluşturmuştur. $3(1+2+3+\dots+n)-n$ formülüne genelleme çözümüne ait şekil aşağıda verilmiştir.



Şekil 57. Genelleme basamağı $3(1+2+3+\dots+n)-n$ formülüne genelleme çözüm örneği(Ö9)

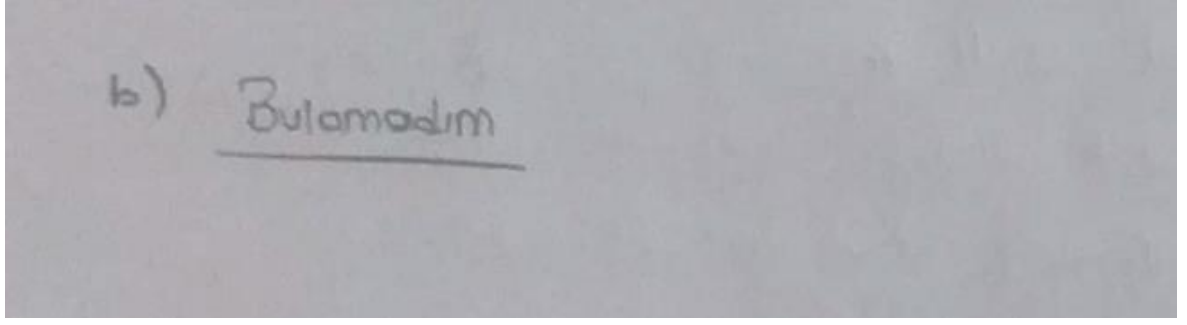
Araştırmaya katılan öğretmen adaylarından iki tanesi (12,5) problemi bu şekilde çözmüştür. Öğretmen adaylarının 8 tanesi (%50) genelleme basamağında doğru cevap vermişlerdir. Yanlış kategorisinde değerlendiren çözüm örnekleri Şekil-58 ve Şekil-59'da verilmiştir.

b) N katlı ev için toplam gereken kart sayısı fomülü:

$$a_n = n(n + 2), n \geq 1$$

Şekil 58. Genelleme basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö10)

Öğretmen adayının geliştirdiğı formül hiçbir terimi doğru olarak vermemektedir. Anlamsız bulunduğı için yanlış olarak değerlendirilmiştir. Şekil 59'da boş kategorisine ait çözüm örneğı verilmiştir.



Şekil 59. Genelleme basamağında yanlış bulunan boş çözüm örneği

Öğretmen adayı genel terim için hiçbir fikir geliştirememiştir. Bu yüzden yanlış olarak değerlendirilmiştir.

Kağıt ev probleminin genelleme basamağında araştırmaya katılan öğretmen adaylarının %50'si doğru cevap vermişlerdir. Her sınıf kademesinden 2 öğretmen adayı doğru bir genel terim oluşturabilmişlerdir. Bu basamakta bütün kademeler eşit oranda doğru cevap vermişlerdir.

4.4.6. Genellemenin Testi

Kağıt katlama probleminin genellemenin testi basamağında doğru cevap oranı %0 olarak bulunmuştur. Katılımcıların hiçbiri yazdıkları genel terimi kontrol edecek cebirsel veya sözel ifadelerde bulunmamışlardır. Şekil-60'da yanlış olan bir çözüm örneği verilmiştir.

b) Bir kural oluşturmak için (kârlardaki kart sayısı) + (kârların tabanına eklenen kart sayısı) ile ilgili olarak araştırdım. Kârlardaki kart sayısı

$$2, 4, 6, 8, \dots, n$$

şeklinde dir. Buradan kârlardaki toplam kart sayısı

$$\left(\frac{n-2}{2} + 1\right) \left(\frac{n+2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n+2}{2}\right)$$

olarak bulunur. Ayrıca kârların tabanına eklenen kart sayısı ile kart sayısı arasında $n-1$ şeklinde bir ilişki vardır. Yani n katlı kağıt ev için kârların tabanına eklenen kart sayısı $n-1$ dir. Buradan geliştirilen kural

$$\frac{n}{2} \left(\frac{n+2}{2}\right) + n-1$$

$$= \frac{n^2 + 2n + n-1}{4}$$

$$= \frac{n^2 + 3n - 1}{4}$$

dür.

Şekil 60. Genellemenin testi basamağında yanlış bulunan çözüm örneği(Ö11)

Öğretmen adayı yukarıda verilen çözümde belli bir kural geliştirmiştir ama kuralı kontrol etmemiştir. Yazılmış olan genel terim denklemini kontrol ettiğimizde hiçbir basamak için sağlamadığı görülmektedir.

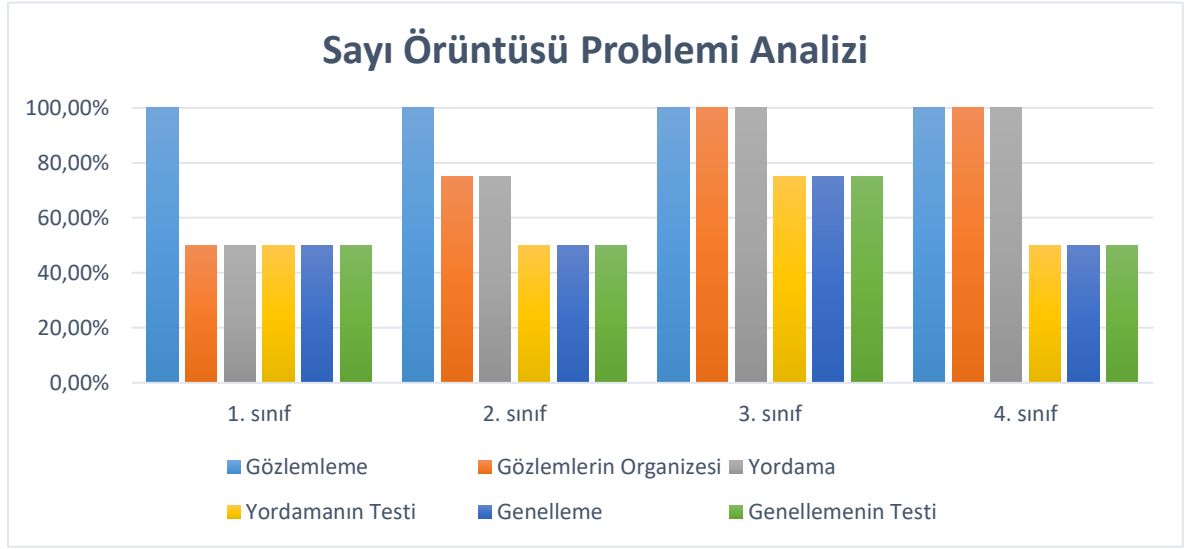
BÖLÜM V

TARTIŞMA SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1.Tartışma ve Sonuç

Yapılan çalışmada ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçleri incelenmiştir. Araştırmada öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin sınıf kademelerine ya da yönlendirilen problemlere göre değişkenlik gösterip göstermemesine ve ayrıca tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinde basamakların nasıl sergilendiğine dair açıklama getirilmeye çalışılmıştır.

Aşağıda sayı örüntüsü probleminin tümevarımsal akıl yürütme basamakları ve sınıf kademelerine göre basamaklardaki doğru cevap oranları verilmiştir.



Şekil 61. Sayı Örüntüsü Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Grafiği

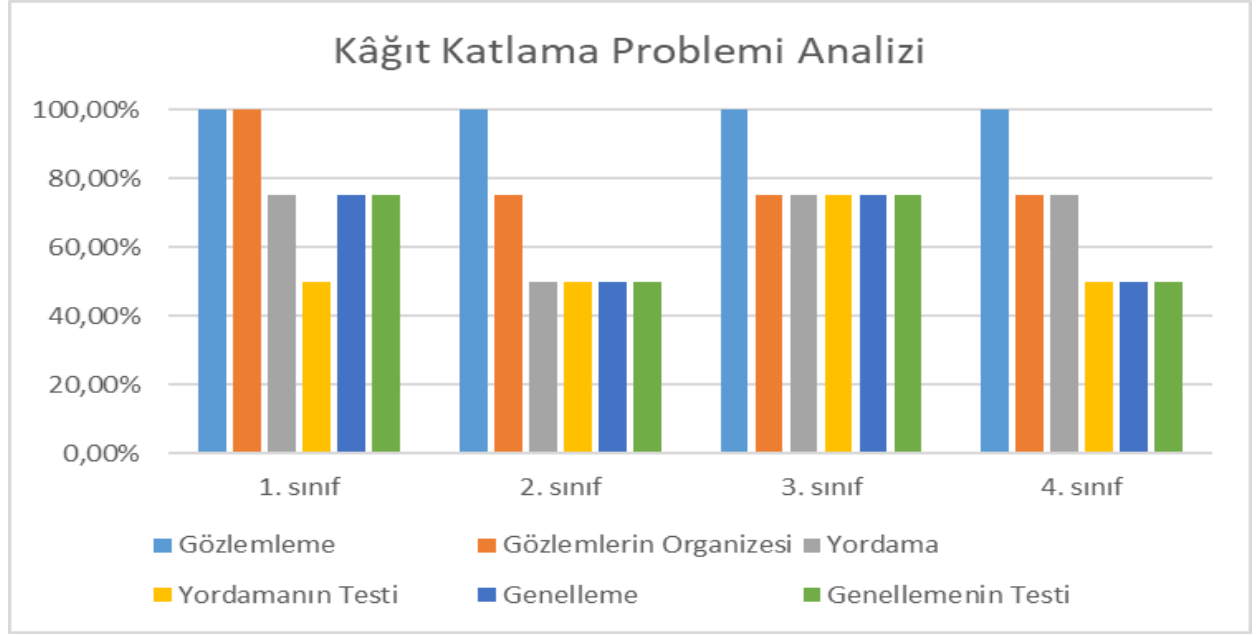
Yukarıdaki Şekil-61'i incelediğimizde 1.sınıf kademesindeki öğretmen adaylarının gözlemlene basamağında problemlerin tamamına doğru yanıt verdikleri gözlemlenmiştir. Gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi basamağında eşit oranda doğru yanıt verdiği gözlemlenmektedir.

İkinci sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene basamağında %100 oranında doğru cevap elde etmişlerdir. Gözlemlerin organizesi ve yordama basamağında %75 oranında doğru cevap elde edilmiştir. En az doğru cevap verdikleri basamaklar ise yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi basamaklarıdır.

Üçüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene, gözlemlerin organizesi ve yordama basamağında %100 oranında doğru cevap vermişlerdir. Yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi basamaklarında %75 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Dördüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene, gözlemlerin organizesi ve yordama basamağında %100 oranında doğru cevap vermişlerdir. Yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi basamaklarında %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Sayı örüntüsü problemi için genel durum incelendiğinde en fazla doğru yanıt veren sınıf kademesi %87,5 doğru cevap oranı ile üçüncü sınıflar olmuştur. 4.sınıfların doğru cevap oranı %75, 2.sınıfların doğru cevap oranı %66,6 ve 1.sınıfların doğru cevap oranı %58,33'tür. Sayı örüntüsü probleminde en fazla yanlış cevabı bulunan sınıf kademesi 1.sınıf kademesi olmuştur.



Şekil 62. Kâğıt Katlama Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Grafiği

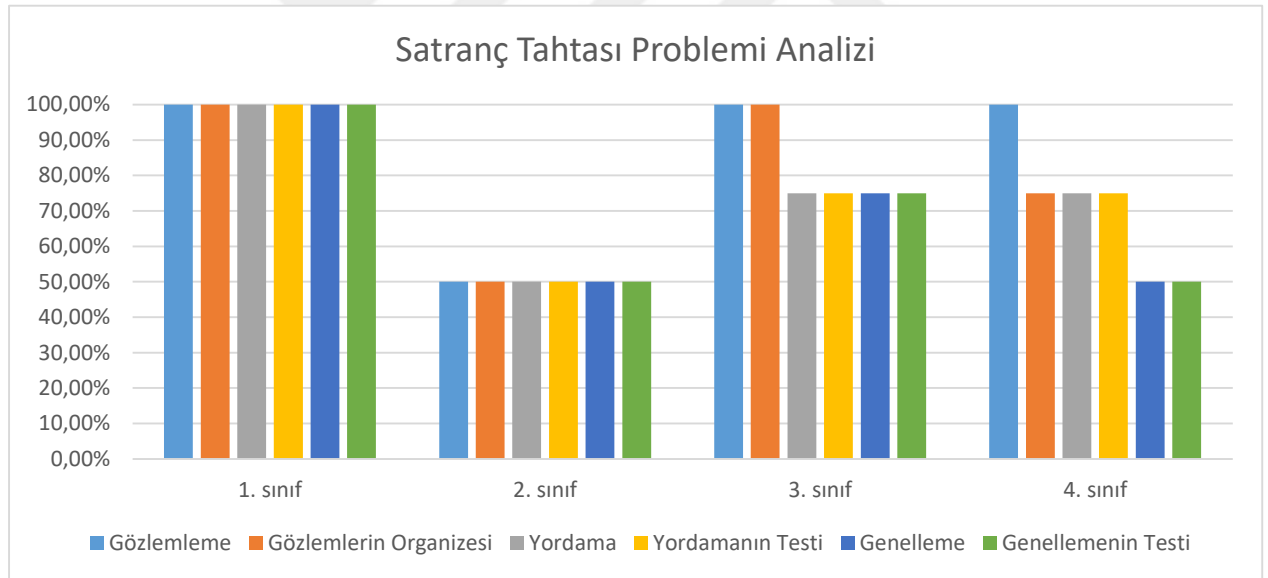
Kâğıt katlama probleminde birinci sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene ve gözlemlerin organizesi basamağında %100 oranında doğru cevap vermişlerdir. Yordama basamağında %50 oranında yanlış cevap vererek en fazla yanlış cevabın bulunduğu basamak yordama basamağı olmuştur. Genelleme ve genellemenin testi basamağında %75 oranında doğru cevap vermişlerdir.

İkinci sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene basamağında %100 doğru cevap vermişlerdir ve en fazla doğru cevap verdikleri basamak gözlemlene basamağıdır. Gözlemlerin organizesi basamağında %75 oranında doğru yanıt vermişlerdir. Yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi basamaklarında %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Üçüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene basamağında %100 doğru cevap vermişlerdir. Diğer bütün kademelerde %75 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Dördüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene basamağında %100 doğru cevap vermişlerdir. Gözlemlerin organizesi ve yordama basamağında %75 oranında doğru cevap vermişlerdir. Yordamanın testi, genelleme, genellenmenin testi basamağında %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Kağıt katlama problemi için genel duruma bakıldığında birinci sınıf ve üçüncü sınıf kademeleri %79,1'lik doğru cevap oranı ile en fazla doğru yanıtı olan sınıf kademeleri olmuşlardır. 4.sınıflar %66,6 oranında doğru cevap verirken 2.sınıflar %62,5 oranında doğru cevap vermişlerdir. En fazla yanlışı bulunan kademe ikinci sınıf kademesi olarak belirlenmiştir.



Şekil 63. Satranç Tahtası Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Grafiği

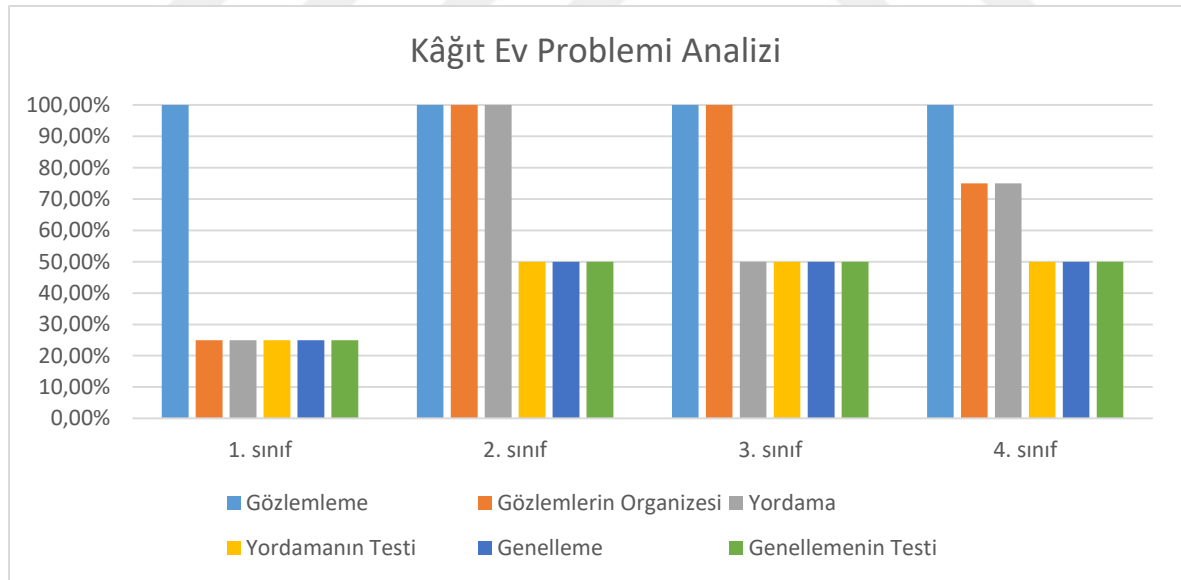
Satranç tahtası problemi için bakıldığında birinci sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları bütün basamaklarda %100 oranında doğru cevap vermişlerdir.

İkinci sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları bütün basamaklarda %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Üçüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene ve gözlemlerin organizesi basamaklarında %100 doğru cevap verirken, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellenenin testi basamaklarında %75 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Dördüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene basamağında %100 doğru cevap vermişlerdir. Gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi basamaklarında %75 oranında doğru cevap vermişlerdir. Genelleme ve genellenenin testi basamaklarında %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Satranç tahtası problemi için genel duruma bakıldığında %100 doğru cevap oranı ile en fazla doğru cevabı olan grup birinci sınıf kademesi olmuştur. Üçüncü sınıf kademesi %83,3 oranında, dördüncü sınıf kademesi %70,8 oranında cevap vermişlerdir. İkinci sınıflar %50 oranında doğru cevap vererek bu problemde en fazla yanlış cevabı olan kademe olarak belirlenmişlerdir.



Şekil 64. Kâğıt Ev Problemi Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Grafiği

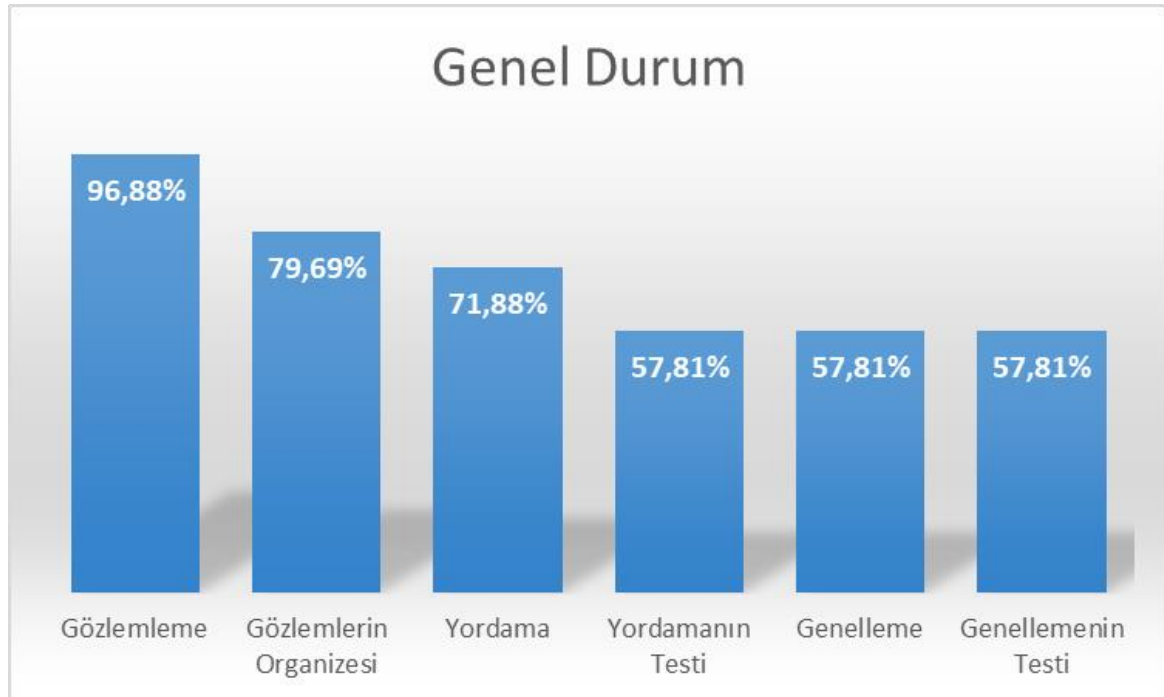
Kâğıt ev problemi için bakıldığında birinci sınıf kademesi gözlemlene basamağında %100 oranında doğru cevap vermişlerdir. Gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellenenin testi basamaklarında %25 oranında doğru cevap vermişlerdir.

İkinci sınıf kademesi gözlemlene, gözlemlerin organizesi, yordama basamaklarında %100 oranında doğru cevap verirken yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi basamaklarında %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Üçüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene ve gözlemlerin organizesi basamağında %100 oranında doğru cevap vermişlerdir. Yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi basamaklarında %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Dördüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları gözlemlene basamağında %100 oranında doğru cevap vermişlerdir. Gözlemlerin organizesi ve yordama basamaklarında %75 oranında doğru cevap vermişlerdir. Yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi basamaklarında %50 oranında doğru cevap vermişlerdir.

Kağıt ev problemi için genel duruma bakıldığında birinci sınıf kademesi %37,5 ile en fazla yanlış bulunan kademe olmuştur. Üçüncü ve dördüncü sınıf kademeleri %66,6 doğru cevap oranı ile eşit derecede doğru cevap vermişlerdir. İkinci sınıf kademesi %75 doğru cevap oranı ile bu problem için en çok doğru cevap veren sınıf kademesi olmuştur.



Şekil 65. Tümevarımsal Akıl Yürütme Basamakları Genel Analiz Grafiği

Yukarıda Şekil-65’de verilen grafiğe bakıldığında öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme süreçleri içerisinde en fazla doğru cevabın olduğu basamak gözlemlene basamağı olmuştur. Yordamanın testi, genelleme ve genellenmenin testi basamakları %57,81’lik oranla en fazla yanlış cevap verdikleri basamaklar olmuştur.

Yöneltelen problemlerin sonuçları analiz edildiğinde birinci sınıf kademesinde bulunan öğretmen adaylarının en fazla doğru cevaplarının bulunduğu problem %100 doğru cevap oranı ile satranç tahtası problemi olmuştur. İkinci sınıf kademesi için bakıldığında en fazla doğru cevaplarının bulunduğu problem %75 oranı ile kağıt ev problemi olmuştur. Üçüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları %87,5 oranı ile sayı örüntüsü probleminde en fazla doğru cevap vermişlerdir. Dördüncü sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları %75 doğru cevap oranı ile en fazla doğru cevaplarının bulunduğu problem sayı örüntüsü problemi olmuştur.

Genel duruma bakıldığında birinci sınıf kademesinde bulunan öğretmen adayları bütün problemlerde %67,7 oranında doğru cevap, ikinci sınıf kademesi 63,52 oranında doğru cevap, üçüncü sınıf kademesi 79,12 oranında doğru cevap, dördüncü sınıf kademesi 69,75 oranında doğru cevap vermişlerdir. En yüksek doğru cevap oranı bulunan kademe üçüncü sınıf kademesi olmuştur.

Araştırmada verilen problemler incelendiğinde öğretmen adaylarının aritmetik problem türlerinde geometrik problem türlerine göre daha fazla doğru cevap verdikleri belirlenmiştir. Elde edilen bulgu Navruz (2012)’un çalışmasıyla paralellik gösterirken Erol (2019)’un çalışmasıyla çakışmaktadır. Aritmetik problemlerde en fazla doğru cevabın bulunduğu basamaklar gözlemlene ve gözlemlerin organizesi basamaklarıdır. Navruz (2012)’un yaptığı çalışmada aritmetik problemlerde en fazla doğru yapılan basamaklar genelleme ve genellenmenin testi olarak belirtilmiştir Erol (2019)’un yaptığı çalışmada aritmetik problem türlerinde en fazla doğrunun bulunduğu basamaklar gözlemlene ve gözlemlerin organizesi basamakları olmuştur. Yapılan araştırma Erol (2019)’un çalışmasıyla paralellik gösterirken

Navruz (2012)'un çalışmasıyla çakışmıştır. Elde edilen veriler incelendiğinde Yeşildere ve Akkoç (2011)'un yaptığı çalışmalarla paralellik gösterdiği tespit edilmiştir. Her iki çalışmada da öğretmen adayları genelleme süreçlerinde yetersiz bulunmuşlardır. Çimen ve Yalmaç (2019) 'ın yaptığı çalışmada sınıflara göre düşünme düzeylerine bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı farka ulaşılmıştır. Bu araştırmada elde edilen bilgiler doğrultusunda en fazla yanlış cevap veren kademe ikinci sınıf kademesi olurken en fazla doğru cevabı olan kademe üçüncü sınıf kademesi olmuştur. İstatiksel olarak bakıldığında kademeler arası olması beklenen anlamlı bir fark ortaya çıkmamıştır. Bu durumun sebebi olarak birinci sınıfların hazır bulunuşluk düzeylerinin düşük olması dördüncü sınıfların ise KPSS sürecinde bulundukları için sonuç odaklı oldukları düşünülmektedir. Erol (2019)'un yaptığı çalışmada ise en fazla doğrunun bulunduğu kademe 11.sınıflar olmuştur. Her iki çalışmada da üçüncü sınıf kademesinin en fazla doğru cevabı veren kademe olduğu tespit edilmiştir.

5.2.Öneriler

Araştırmanın bu kısmında elde edilen bulgular doğrultusunda uygulayıcılara ve araştırmacılara yönelik çeşitli öneriler sunulmuştur.

- Çalışma için alanyazı taraması yapılırken tümevarımsal akıl yürütme ile ilgili sınırlı çalışma olduğu gözlemlenmiştir. Tümevarımsal akıl yürütme konusunda daha fazla çalışma yapılarak kuramsal bir temel oluşturulması faydalı olacaktır.
- Bu çalışma dört problem ve on altı öğretmen adayı ile yapılmıştır. İleride yapılacak olan çalışmalarda problem sayısı, katılımcı sayısı arttırılıp daha geniş kapsamlı bir araştırma yapılabilir.

- Tümevarımsal akıl yürütme süreci bilişsel bir süreçtir. Detaylı bir inceleme için daha küçük bir örneklemele çalışılıp farklı problemler yönlendirilebilir.
- Literatür taramasında ortaokul ve lise düzeyindeki katılımcılarla tümevarımsal akıl yürütme çalışmalarının yapıldığı görülmüştür. Tümevarımsal akıl yürütmenin farklı sınıf düzeylerinde nasıl bir gelişim sergilediğini gözlemleyebilmek için tüm sınıf düzeylerini içine alacak şekilde daha kapsamlı bir araştırma yapılabilir.
- Bireyde tümevarımsal akıl yürütme sürecinin nasıl ilerlediğini gözlemleyebilmek için belirli bir grupta boylamsal bir çalışma yapılabilir.
- Covid-19 koşulları gereği yüz yüze görüşmeler yapılamadığından, sesli düşünme tekniği kullanılarak yüz yüze görüşmeler ile çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Aksoy, B. (2003). Problem çözme yönteminin çevre eğitiminde uygulanması. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi. S.14*, s.83-98
- Allen, L. G. (2001). “Teaching mathematical induction: an alternative approach”. mathematics teacher,
- Ateş, S. (2019). *Bilimsel muhakeme(Akıl yürütme)*. Ankara: Palme.
- Aufmann, R. (2007). “*Mathematical Thinking and Quantitative Reasoning*”. BrooksCole, Hardcover
- Bakırcıoğlu R. (2016). *Ansiklopedik eğitim ve psikoloji sözlüğü*. Ankara: Anı.
- Barkl, S., Porter, A., & Ginns, P. (2012). Cognitive training for children: Effects on inductive reasoning, deductive reasoning, and mathematics achievement in an Australian school setting. *Psychology in the Schools*, 49(9), 828–842. <https://doi.org/10.1002/pits.21638> adresinden erişilmiştir.
- Bigge, M. L. ve Shermis, S. S. (1999). *Learning theories for teachers*. New York.
- Brown, A. L. (1978). Knowing when, where and how to remember: A problem of metacognition. *Advances in Instructional Psychology (Vol.1)*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 4

- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. [description and characterization of inductive reasoning used by secondary students in solving tasks related to linear quadratic sequences]*. Doktora Tezi. Universidad de Granada, Granada.
- Cañadas, M. C. ve E. Castro. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.
- Cañadas, M. C., E. Castro ve E. Castro. (2009). Using a model to describe students' inductive reasoning in problem solving. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7 (1), 261-278.
- Çakır, N (2013). *Üniversite Eğitiminin Üst Düzey Düşünme Becerilerinin Gelişimine Etkisi*. Doktora Tezi. Hacettepe Üniversitesi. Ankara
- Çelik, H. C., Obay, M., & Özdemir, F. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel akıl yürütme ve problem çözme becerilerine ilişkin görüşleri. *Turkish Studies Education*, 15(3), 1651-1673. <https://dx.doi.org/10.29228/TurkishStudies> adresinden erişilmiştir.
- Çimen R, Yalman F.E (2019). TIMSS Soruları ile Fen Bilgisi Öğretmen Adaylarının Akıl Yürütme Becerilerinin Belirlenmesi. *Fen Bilimleri Öğretimi Dergisi*, 7(1), 27-50
- Çüçen, A. K. (1997). *Mantık*. Bursa: Asya.
- Davey, L. (2009). The application of case study evaluations. *Elementary Education Online*, 8(2), 1-3
- Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston: MA: Heath.
- Doğanay, A. ve Kara, Z. (1995). Düşünmenin boyutları. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 1(11), 25-38.

- Doyle, R. ve Nunez, R. (2020) . Characterizing students' conceptual difficulties with mathematical induction using visual proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*.
<https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs40753-020-00119-4> adresinden erişildi.
- El Mouhayar, R.R., Jurdak, M.E. Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educ Stud Math* 82, 379–396 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9434-6> adresinden erişilmiştir.
- Erol, G. (2019). *Ortaöğretim öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme becerilerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi. Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Sivas.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. *The Nature of Intelligence*, .232. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Gedikoğlu, E., ve Semerci, Ç. (2016). Yansıtıcı düşünme etkinlikleri destekli modüler öğretimin 5. sınıf bilişim teknolojileri ve yazılım dersinde öğrencilerin akademik başarılarına etkisi. *Fırat Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 26 (2) , 151-162 .
- Gerald S. F. (2002). Düşünme becerileri: Genellik sorunu, *Journal of Curriculum Studies*, 34: 6, 659-678, <https://doi.org/10.1080/00220270110119905> adresinden erişildi.
- Gökalp, M. (2016). *Öğretim ilke ve yöntemleri*. Ankara: Pegem.
- Göl, R., Duru, A. (2016). *Lise öğrencilerinin matematiksel genelleme süreçlerinin incelenmesi*. *Yaşam boyu eğitim dünya kongresi (WCLE-2016)*, Porto Bello Hotel Resort & SPA, Antalya.
- Güneş, F. (2012). Öğrencilerin düşünme becerilerini geliştirme. *TÜBAR-XXXII*, Güz, 127-146

- Graham, R., Knuth D. and Patashnik O. (1989). *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, Reading, MA.
- Haverty, A., Koedinger, R., Klahr, D. ve Alibali, W. (2010). Solving inductive reasoning problems in mathematics: not-so-trivial pursuit. *In Cognitive Science*, 24 (2) , 249-298
- Houston, K. (2015). *Matematikçi gibi düşünmek: lisans matematiği için bir kılavuz*. Palme.
- Karadağ, M. (2010) *Sosyal bilgiler öğretmenlerinin yansıtıcı düşünme düzeylerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Adana.
- Keskin, M. , Dag, S. A. & Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması . *Journal of Educational Science*,1 (1) , 33-50 .
- Klauer, K., Pyhe. G. (2008). Inductive reasoning: a training approach. *Review of Educational Research*, 85-123.
- Klauer, K. Carroll, J.D. (1989). A mathematical programming approach to fitting general graphs. *Journal of Classification*, 6, 247-270.
- Kurnaz, A. (2013). *Eleştirel düşünme öğretimi etkinlikleri* (2 b.). Konya: Eğitim.
- Kurtz, K., Gentner, D., Gunn, V. (1999). Reasoning. In B. M. Bly & D. E. Rumelhart (Eds), *Cognitive science*, pp. 145-200. California:
- Kocagül Sağlam, M. ve Ünal Çoban, G. (2018). Fen Bilimleri Öğretmenleri ve Öğretmen Adaylarına Yönelik Akıl Yürütme Becerileri Testinin geliştirilmesi. *İlköğretim Online*, 17 (3), 1496-1510.
- Koning, E., Hamers, J. H. M., Sijtsma, K. ve Vermeer, A. (2002). Teaching inductive reasoning in primary education. *Developmental Review*, 22(2), 211–241.

- MEB (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı*. T.C. Milli Eğitim Bakanlığı. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2016). *Düşünme eğitimi dersi öğretim programı (7-8)*. Ankara: MEB.
- Molnár, Gy. ve Csapó, B. (2010): The development of inductive reasoning between the ages of 6 and 17. *Paper presented at the 10th National Conference on Education*. 4-6, november, Budapest, Hungary.
- Molnár, G. (2011). *Playful fostering of 6- to 8-year-old students' inductive reasoning*.
- Molnár, G., Greiff, S., & Csapó, B. (2013). Inductive reasoning, domain specific and complex problem solving: Relations and development. *Thinking Skills and Creativity*, 9, 35–45.
- Navruz, V.(2012) *İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde sergiledikleri tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi. Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.
- Osborne, J. (2013). The 21st century challenge for science education: Assessing scientific reasoning. *Thinking Skills and Creativity*, 10, 265–279. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2013.07.006> adresinden erişildi.
- Pellegrino, J.W., Glaser, R. (1982). Analyzing aptitudes for learning: Inductive reasoning. In R, Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*. (Vol.2, pp 269-345). Hillsdale, NJ:Erlbaum.
- Reid, D. (2002). “Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics”. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5-29.
- Reyes, M. L. ve Amarnani, R. K. (2015). Categories of illustrated problems for training children in inductive reasoning. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 25(2), 239–250.

- Türk Dil Kurumu, (2019). *Güncellenmiş Türkçe sözlük*. <https://sozluk.gov.tr/> adresinden erişilmiştir.
- Uğurel, I. (2020). *Matematiksel ispat ve öğretimi*. Ankara: Anı.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Webster, (1986). *Webster's third new international dictionary of the English language*. Chicago: Encyclopaedia Britannica,
- Yankelewitz, D. (2009). *The development of mathematical reasoning in elementary school students' exploration of fraction ideas (Doctoral dissertation)*. The State University of New Jersey, Rutgers).”
- Yaman, H. (2010). *İlköğretim öğrencilerinin matematiksel örüntülerdeki ilişkileri algılayışları üzerine bir inceleme*. Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı. Yayımlanmış Doktora Tezi. Ankara.
- Yeşildere, S. ve H. Akkoç. (2010). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, Sayı 30 (Temmuz 2011/II), ss. 141-153
- Yıldız D. G, Alaylı F. G (2019). Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Sabit Değişen Şekil Örüntüsü Genellemesini Öğretmek İçin Matematik Bilgileri. *Trakya Eğitim Dergisi*, 9(3), 396 - 414.
- Yılmaz, K. (2013) . *Eleştirel ve analitik düşünme*. Ankara: Pegem.
- Yıldırım, A.& Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*, (5. Baskı), Ankara: Seçkin.

EKLER



EK-1

Aritmetik Problemler

Aritmetik problemleri, sayı örüntüsü problemi ve kâğıt katlama problemi oluşturmaktadır.

Sayı örüntüsü problemi aşağıda verilmiştir.

Sayı Örüntüsü Problemi.

2,7,14,23...

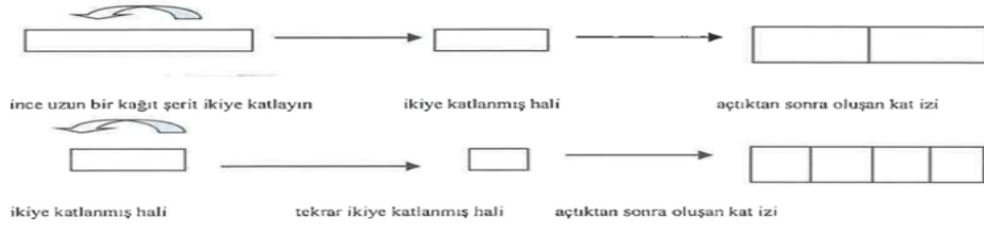
Yukarıda bir sayı örüntüsünün ilk dört terimi verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 10.terimini bulunuz. Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.

b) Bu örüntünün n.adımı için nasıl bir kural ya da formül oluşturabilirsiniz? Bulduğunuz kural ya da formülü yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız.

Sayı örüntüsü problemi. El Mouhayar, R.R., Jurdak, M.E. Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. Educ Stud Math 82, 379–396 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9434-6>

Kağıt Katlama Problemi



Yukarıda modellendiği gibi uzun bir kağıt şeridi uçlarından tutun ve ikiye katlayın. Bu işlem sonucunda bir tane kat yeri oluşur. Kağıt üzerinde bir kez daha aynı işlemi tekrarladığınızda bu sefer 3 kat yeri oluşur.

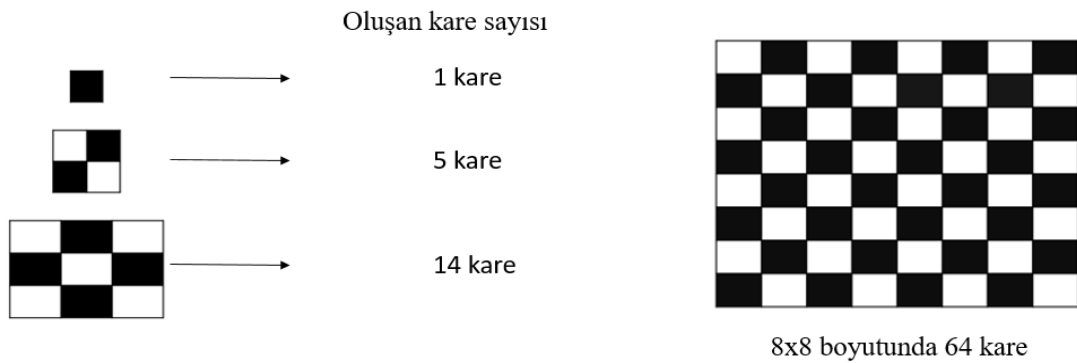
- Bu işlemi kaç kez yaparsanız kaç kat yeri oluşur?
- n.adım için nasıl bir kural ya da formül oluşturabilirsiniz? Bulduğunuz kural ya da formülü yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız.

Kâğıt katlama problemi. Erol, G. (2019). Ortaöğretim öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme becerilerinin incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Sivas.

Geometrik Problemler

Geometrik problemler, satranç tahtası problemi ve kâğıt ev problemi oluşturmaktadır. Satranç tahtası problemi aşağıda verilmiştir.

Satranç Tahtası Problemi



Yukarıda bulunan satranç tahtası 64 kareden oluşan 8x8 boyutunda bir karedir.

- Satranç tahtasında toplam kaç kare vardır?
- n tane kareden oluşan nxn'lik bir tahtada toplam kaç kare vardır? Bulduğunuz kural ya da formülü yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız

Satranç Tahtası Problemi. Keskin, M. , Dag, S. A. & Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması . Journal of Educational Science,1 (1) , 33-50 .

Kağıt Ev Problemi



Yukarıda 3 katlı bir kağıt ev verilmiştir. En üst kat birbirine yaslanmış iki karttan meydana getirilmiştir. İkinci katı oluşturmak için birinci katın tabanına bir kart daha eklenmiş ve 4 kart daha (birbirine yaslanmış ikişer kart kümesi) yerleştirilmiştir. Buna göre,

- a) 5 katlı bir ev oluşturmak için toplam kaç kart kullanılmalıdır?
- b) Bu şekilde yapılacak n katlı kağıt ev için nasıl bir formül ya da kural geliştirerek temsil edebiliriz? Bulduğunuz kural ya da formülü yazınız ve nasıl yazdığınızı açıklayınız.

Kâğıt ev problemi. Göl, R., Duru, A. (2016). Lise öğrencilerinin matematiksel genelleme süreçlerinin incelenmesi. Yaşam boyu eğitim dünya kongresi (WCLE-2016), Porto Bello Hotel Resort & SPA, Antalya.



GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR.