

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN SIĞ KÜRESEL KABUKLARIN DÖNEL  
SİMETRİK EĞİLME ANALİZİ

Ali ESER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Mekanik Programı

Danışman

Doç. Dr. Murat ALTEKİN

Ocak, 2022

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN SIĞ KÜRESEL KABUKLARIN DÖNEL  
SİMETRİK EĞİLME ANALİZİ

Ali ESER tarafından hazırlanan tez çalışması 07.01.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat ALTEKİN  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Murat ALTEKİN, Danışman  
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İrfan COŞKUN, Üye  
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Aydın ÖZMUTLU, Üye  
Namık Kemal Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Murat ALTEKİN sorumluluğunda tarafımda hazırlanan Elastik Zemine Oturan Sığ Küresel Kabukların Dönel Simetrik Eğilme Analizi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ali ESER

İmza



Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü'nün FYL-2021-4184 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

## TEŞEKKÜR

---

Bu zorlu ve bir o kadar da keyifli süreçte desteklerini ve anlayışını esirgemeyen, her daim motivasyonumu artıran Sayın Doç. Dr. Murat ALTEKİN hocama teşekkür ederim.

Ali ESER



# İÇİNDEKİLER

<b>SİMGE LİSTESİ</b>	vi
<b>KISALTMA LİSTESİ</b>	vii
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	viii
<b>TABLO LİSTESİ</b>	ix
<b>ÖZET</b>	x
<b>ABSTRACT</b>	xii
<b>1 GİRİŞ</b>	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı .....	4
1.3 Hipotez .....	5
<b>2 BİRİNCİ MERTEBE KAYMA DEFORMASYON TEORİSİ</b>	6
2.1 Mindlin Plak Teorisi .....	6
<b>3 FORMÜLASYON</b>	8
3.1 Kabuk Geometrisi.....	8
3.2 Dönel Simetrik Sığ Küresel Kabuklar için Temel Bağıntılar .....	8
3.3 Sınır Koşulları .....	11
3.4 Parametreler ve Boyutsuz Değişkenler .....	11
<b>4 ÇÖZÜM YÖNTEMİ</b>	13
<b>5 ANALİZ</b>	16
5.1 Yakınsama Çalışması ve Sonuçların Karşılaştırılması.....	16
5.2 Sayısal Örnekler .....	18
<b>6 SONUÇ VE ÖNERİLER</b>	23
<b>KAYNAKÇA</b>	24
<b>A ELASTİK ZEMİN ETKİLERİ</b>	28
A.1 Winkler Zemin Modeli .....	28
A.2 Pasternak Zemin Modeli.....	28
<b>TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR</b>	30

## SİMGE LİSTESİ

$K_3$	Boyutsuz doğrusal olmayan Winkler zemin katsayısı
$W, \mu, \lambda$	Boyutsuz düşey yer değiştirme(sehim)
$M_r, M_\theta$	Boyutsuz eğilme momentleri
$N_r, N_\theta$	Boyutsuz normal kuvvetler
$K_g, K_{gg}$	Boyutsuz Pasternak zemin katsayısı
$U$	Boyutsuz yatay yer değiştirme
$K_w, K_{ww}$	Boyutsuz Winkler zemin katsayısı
$\eta, c$	Derinlik parametresi, kalınlık parametresi
$k_3$	Doğrusal olmayan Winkler zemin katsayısı
$\psi$	Dönme
$\phi$	DTM'de kullanılan terim sayısı
$w, u$	Düşey yer değiştirme(sehim), yatay yer değiştirme
$q, Q$	Düzgün yayılı yük, boyutsuz düzgün yayılı yük
$m_r, m_\theta$	Eğilme momentleri
$D, G$	Eğilme rijitliği, kayma modülü
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{rz}$	Gerilmeler
$R$	Kabuk eğrilik yarıçapı
$h, H$	Kabuk kalınlığı, kabuk yüksekliği
$a$	Kabuk taban yarıçapı
$\kappa$	Kayma düzeltme katsayısı
$q_r$	Kesme kuvveti
$n_r, n_\theta$	Normal kuvvetler
$\varepsilon_z$	Plak düzlemine dik doğrultudaki şekil değiştirme
$\sigma_z$	Plak düzlemine dik doğrultuda meydana gelen normal gerilme
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Plak kalınlığı doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri
$\nu, E$	Poison oranı, elastisite modülü
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{rz}$	Şekil değiştirmeler
$q_f$	Zemin etkisi
$k_w, k_g$	Winkler zemin katsayısı, Pasternak zemin katsayısı

## KISALTMA LİSTESİ

---

(C)	Ankastre mesnet
CPT	Klasik Plak Teorisi
DTM	Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi
FDM	Sonlu Fark Yöntemi
FEM	Sonlu Eleman Yöntemi
FGM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
FSDT	Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi
(S)	Basit mesnet



## ŞEKİL LİSTESİ

---

Şekil 3.1 Kabuk geometrisi .....	8
Şekil 3.2 Silindirik koordinat sistemi ( $r, \theta, z$ ).....	9
Şekil 3.3 Sıg küresel kabuğa ait kesit tesirleri .....	10
Şekil 5.1 SAP2000 görseli: deformasyon öncesi (S) kabuk ( $c = 50, \eta = 0.1, h = 0.02\text{m}$ ) .....	20
Şekil 5.2 SAP2000 görseli: deformasyon sonrası (S) kabuk ( $c = 50, \eta = 0.1, h = 0.02\text{m}$ ) .....	21
Şekil A.1 Winkler zemin modeli.....	28
Şekil A.2 Pasternak zemin modeli.....	29

## TABLO LİSTESİ

<b>Tablo 3.1</b>	Sınır koşulları ve düzenlilik koşulları [47] .....	11
<b>Tablo 5.1</b>	Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme $W$ için yakınsama çalışması ( $K_w = 5, K_g = 1, K_3 = 1, Q_c = 5$ ) .....	16
<b>Tablo 5.2</b>	Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme $W$ ( $K_w = 0, K_g = 0, K_3 = 0, Q_c = 5$ ) .....	17
<b>Tablo 5.3</b>	Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme $W$ ( $K_w = 0, K_g = 0, K_3 = 0$ ).....	17
<b>Tablo 5.4</b>	Plağın orta noktasındaki boyutsuz çökme $\mu_{maks}$ ( $c = 100, (K_{ww}; K_{33}) = (200; 0), Q_c = 12$ ) .....	18
<b>Tablo 5.5</b>	Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme $W$ ( $K_w = 0, K_g = 0, K_3 = 0, Q_c = 5$ ) .....	18
<b>Tablo 5.6</b>	Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme $W$ ( $K_w = 5, K_g = 0, K_3 = 0, Q_c = 5$ ) .....	19
<b>Tablo 5.7</b>	Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme $W$ ( $K_w = 5, K_g = 1, K_3 = 0, Q_c = 5$ ) .....	19
<b>Tablo 5.8</b>	Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme $W$ ( $K_w = 5, K_g = 0, K_3 = 1, Q_c = 5$ ) .....	19
<b>Tablo 5.9</b>	Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme $W$ ( $K_w = 5, K_g = 1, K_3 = 1, Q_c = 5$ ) .....	20

## Elastik Zemine Oturan Sığ Küresel Kabukların Dönel Simetrik Eğilme Analizi

Ali ESER

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Murat ALTEKİN

Bu çalışmada elastik zemine oturan dairesel sığ küresel kabukların statik yükleme altında dönel simetrik eğilme analizi sayısal olarak yapılmaktadır. Birinci mertbe kayma deformasyon teorisine (FSDT) dayalı bir formülasyonun kullanıldığı problemde kabuk denklemleri doğrusaldır. Kabuğun temasta olduğu elastik zemin üç parametreyle tanımlanmaktadır ve doğrusal olmayan yapıdadır. Elastik zemin modeli, Winkler, Pasternak ve doğrusal olmayan Winkler parametrelerinden oluşmaktadır. Problemin çözümünde diferansiyel dönüşüm yöntemi (DTM) kullanılmaktadır. Bilimsel çalışmalarda sonlu fark yöntemi (FDM) ve sonlu eleman yöntemi (FEM) gibi geleneksel yöntemlere kıyasla yeni bir sayısal metot olan DTM seri açılımına dayalı bir yöntemdir. Benzeri sayısal yöntemlerde olduğu gibi göz önüne alınan terim sayısı çözümün gerçekçiliği hususunda büyük önem taşımaktadır. Çökme, yatay radyal yer değiştirme ve dönme formülasyonda kullanılan üç ana değişkendir. Doğrusal olmayan denklemlerin çözümü için Newton-Raphson yöntemi kullanılmaktadır. Tez dairesel sığ küresel kabuğun çevresi boyunca basit mesnetli (S) ve ankastre (C) olduğu iki durumun analizini içermektedir. Kabuk malzemesinin homojen ve izotrop olduğu varsayılmaktadır. Elastik zemin etkisi, kabuk derinliği, kabuk kalınlığı gibi çeşitli faktörlerin kabuğun tepe noktasında oluşan düşey yer

değiştirme üzerindeki bileşik etkisi araştırılmaktadır. Sığ kabukların incelendiği çalışmada hem bu faktörlerin hem de sınır koşullarının sonuçlar üzerinde çok etkin olduğu gözlenmektedir. Yapılan karşılaştırma çalışmalarında tezde elde edilen sayısal sonuçların literatürdeki değerlere oldukça yakın olduğu gösterilmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Dairesel kabuk, diferansiyel dönüşüm yöntemi, eğilme, Winkler, Pasternak



## Axisymmetric Bending Analysis of Shallow Spherical Shells on Elastic Foundation

Ali ESER

Department of Civil Engineering

MSc Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat ALTEKİN

Axisymmetric bending analysis of circular shallow spherical shells under static loading is made numerically in this study. The formulation is based on the first order shear deformation theory (FSDT). The equations of the shell are linear. The shell is in contact with the elastic foundation which is assumed to behave nonlinearly. The mathematical model of the elastic foundation is composed of Winkler, Pasternak, and nonlinear Winkler parameters. The problem is solved by means of differential transform method (DTM). Compared to the conventional methods such as finite difference method (FDM), and finite element method (FEM), DTM is a new numerical method which is based on series expansion. The number of terms considered in DTM is important in obtaining realistic numerical results. Deflection, horizontal radial displacement, and the rotation are the field variables in the formulation. Newton-Raphson method is employed to solve the nonlinear equations. The study involves the analyses of simply supported (S), and clamped (C) shells. It is assumed that the material of the shell is homogeneous and isotropic. The unified effect of several factors such as the elastic foundation, the depth of the shell, and thickness of the shell on the apical

deflection is investigated. It is observed in the study in which moderately shallow shells are examined that these factors and the boundary conditions have dominant effect on the results. Good agreement is obtained in the comparison studies which are presented for verification of the numerical results obtained in the current study.

**Keywords:** Circular shell, differential transform method, bending, Winkler, Pasternak



Sığ küresel kabuklar günümüzde yapı elemanı olarak birçok farklı alanda kullanılmaktadır. Bunlardan en yaygın olanları uçaklar, gemiler, uzay araçları ve inşaat mühendisliği yapılarıdır. Birçok kullanım alanında kabuklar, mekanik ve termal etkilerle karşı karşıya kalırlar. Uzay araçlarında sık kullanıldığı için bu malzemenin dinamik durumu ve termal etkilere karşı davranışı önemli olsa da mekanik açıdan eğilmesi de bir o kadar önemlidir.

Bu çalışmada düzgün yayılı basınç yüküne maruz sabit kalınlıklı sığ küresel kabuğun dönel simetrik eğilmesi analiz edilmiştir. Kabuk malzemesinin homojen ve izotrop olduğu varsayılmıştır. Ele alınan sığ küresel kabukta enine kayma şekil değiştirmesi dikkate alınmış ve birinci mertebe kayma deformasyon teorisi (FSDT) kullanılmıştır. Kabuğun temasta olduğu elastik zemin üç parametreyle modellenmiştir. Analizin silindirik koordinat sisteminde gerçekleştirildiği çalışmada sayısal çözüm diferansiyel dönüşüm yöntemi (“DDY” kısaltması da kullanılabilir) ile yapılmıştır. Doğrusal olmayan analizin de gerektiği durumlarda problemin çözümü Newton-Raphson yöntemi ile elde edilmiştir. Çözüm hem basit mesnet (S), hem de ankastre mesnet (C) için yapılmıştır.

### 1.1 Literatür Özeti

Sığ küresel kabuklar üzerine yapılmış birçok çalışma mevcuttur. Çeşitli yükleme durumlarının ve farklı malzeme özelliklerinin dikkate alındığı bu çalışmalar kabukların burkulma, titreşim ve eğilme analizlerini içermektedir [1-49].

Kaplan ve Fung tarafından yapılan bir çalışmada sığ küresel kabuğun eğilmesi ve burkulması incelenmiştir [1]. Nath ve diğerleri ise kollokasyon yöntemini kullanarak sığ küresel kabukların statik ve dinamik analizini çalışmıştır [2].

Huang ise ince sığ küresel kabukların burkulmasını çalışmıştır [3]. Li ve diğerleri yaptıkları çalışmada enine kayma şekil değiştirmesi yapabilen sığ küresel kabukların burkulmasını incelemiştir [4].

Sıg küresel kabuklar ile ilgili burkulma dışında titreşim analizi ile ilgili de bir çok çalışma yapılmıştır. Sinharay ve Banerjee ince sıg küresel kabukların büyük genlikli serbest titreşimlerini incelemiştir [5]. Kalnins ve Naghdi ince sıg küresel kabukların aksenel simetrik titreşimlerini incelemiştir [6]. Kang değişken kalınlığa sahip sıg küresel kabukların titreşim analizini incelemiştir [7]. Titreşim analizine zemin modelleri de dahil edilerek çalışmalar detaylandırılmıştır. Ying-jie ve Fang-she elastik zemin üzerinde ankastre mesnetli sıg küresel kabuğun serbest titreşimini incelemiştir [8]. Paliwal ve Bhalla Pasternak elastik zemini üzerinde bulunan sıg küresel kabuğun büyük genlikli serbest titreşimlerini incelemiştir [9]. Gan ve diğerleri iki parametrelili elastik zeminde bulunan sıg küresel kabuğun serbest titreşimini incelemiştir [10].

Yokoyama ve diğerleri eğilme probleminin analizinde sınır eleman yöntemini kullanmıştır [11]. Mitra basit mesnetli bir sıg küresel kabuğun eğilmesini çalışmıştır [12]. Li yaptığı çalışmada ankastre mesnetli sıg küresel kabuğun eğilmesini araştırmıştır [13]. Zuohui ise ince sıg küresel kabuğun eğilmesini incelemiştir [14]. Tosaka ve Miyake yaptıkları çalışmada sıg küresel kabuğun doğrusal olmayan analizi için integral denklem yöntemini kullanmıştır [15]. Jianqiao ise sınır eleman yöntemini kullanarak sıg küresel kabuğun eğilmesini incelemiştir [16]. Liu ve Wang oluklu formda bir sıg küresel kabuğun doğrusal olmayan analizini yapmıştır [17]. Paliwal ve Rai ise sıg küresel kabuğun doğrusal olmayan statik analizini Berger yaklaşımı ile incelemiştir [18]. Zhong-rong ise yaptığı çalışmada aksenel simetrik yükler altında değişken kalınlıktaki sıg küresel kabuğun doğrusal olmayan eğilmesini incelemiştir [19]. Ichino ve Takahashi ise sıg küresel kabuğun simetrik olmayan eğilmesini çalışmıştır [20]. Dube, Joshi ve Dumir yaptıkları çalışmada ise kalın sıg küresel kabuğun sehimini birinci dereceden kayma deformasyon teorisini (FSDT) kullanarak yaklaşık bir analitik çözüm ile sunmuştur [21].

Altekin ve Yükseler [22] yaptıkları çalışmada üniform yüklü ve boşluklu yapıdaki sıg küresel kabuğun doğrusal olmayan analizini sonlu fark yöntemi kullanarak yapmıştır [22]. Altekin ve Yükseler yaptıkları bir diğer çalışmada ise dönele simetrik yüke maruz sıg küresel bir kabuğun geometrik açıdan doğrusal olmayan dönele simetrik eğilmesini incelemiş ve çözümü sonlu fark ve Newton-Raphson

yöntemi ile yapmıştır [23]. Xiao-Yan ve diğerleri enine kayma deformasyonlarının dikkate alındığı sığ küresel kabuğun analizini tekil yük etkisi altında yapmıştır [24].

Son yıllarda gelişen teknoloji ile malzeme biliminde de oldukça önemli gelişmeler olmuştur. Özellikle uzay, tıp ve savunma sanayindeki gereksinimlerden dolayı malzemelerin belli özelliklerinde iyileştirmeler yapılmıştır. Yapısında yapılan bu değişiklikler ile malzemeler iyileştirilmiş ve kullanım alanı genişletilmiştir. Kar ve Panda [25] çalışmasında kompozit malzemelere yer vermiştir. Bu çalışmada özel bir karaktere sahip olan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş küresel kabukların eğilme tepkilerini incelemiş ve çözümünde sonlu eleman metodunu kullanmıştır [25]. Woo ve Meguid fonksiyonel derecelendirilmiş sığ küresel kabukların doğrusal olmayan analizini yapmıştır [26]. Altekin ve Gökdağ ise kayma şekil değiştirmesi yapabilen bir dairesel sığ küresel kabuğun geometrik doğrusal olmayan eğilme analizini sonlu fark yöntemini kullanarak yapmıştır [27].

Yapı-zemin etkileşimi yapısal tasarımda dikkat edilmesi gereken bir husustur. Nath ve Jain elastik zemine oturan sığ küresel kabuğun doğrusal olmayan analizini çalışmıştır [28]. Paliwal ve Sinha yaptığı çalışmada Winkler zemini üzerindeki sığ küresel kabukların statik analizini Berger ve Modifiye Berger yöntemlerini kullanarak yapmıştır [29]. Paliwal ve diğerleri yaptıkları çalışmada Pasternak zemini üzerinde sürekli desteklenen sığ küresel kabukların statik ve dinamik analizini Berger ve Modifiye Berger yöntemlerini kullanılarak yapmıştır [30]. Li ve diğerleri elastik zemin üzerinde bulunan sığ küresel kabuğun eğilmesini incelemiştir [31]. Karataş ve Yükseler [45] çembersel yük etkisi altındaki sığ küresel kabuğun burkulmasını araştırmıştır. Sofiyev ve diğerleri [47] doğrusal olmayan elastik zemine oturan silindirik kabukların doğrusal olmayan titreşimini çalışmıştır.

Jia-ji ve diğerleri yaptıkları çalışmada Pasternak zemini üzerindeki sığ küresel kabukların doğrusal olmayan eğilmesini çalışmıştır [32]. Civalek Winkler-Pasternak elastik zemini üzerine oturan sığ küresel kabuğun doğrusal olmayan statik ve dinamik tepkilerini incelemiştir [33]. Duc ve diğerleri fonksiyonel

olarak derecelendirilmiş (FGM) sıg küresel kabukların mekanik ve termal yük altında doğrusal olmayan aksenal simetrik tepkisini araştırmıştır [34]. Anh ve Dinh Duc elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş sıg küresel kabukların doğrusal olmayan analizini yapmıştır [35]. Kanagasabapathy ve diğerleri Pasternak zemini üzerinde bulunan ortotrop sıg küresel kabuğun doğrusal olmayan statik analizini gerçekleştirmiştir [36].

## 1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada elastik zemine oturan sıg küresel kabukların dñnel simetrik eğilme analizi diferansiyel dñnüşüm yöntemi (DTM) kullanılarak yapılmıştır. Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine (FSDT) dayalı bir matematiksel modelden yararlanılmıştır. Kabuğun temas halinde olduğu elastik zemin, Winkler, Pasternak ve doğrusal olmayan Winkler parametreleri kullanılarak üç parametreyle modellenmiştir. Kabuğun homojen ve izotrop olduğu varsayılmıştır. Çok sayıda sayısal simülasyon yapılmak suretiyle hem kabuk geometrisinin hem de elastik zeminin kabuğun tepe noktasında meydana gelecek çökme üzerindeki bileşik etkisi araştırılmıştır. Çalışmada, kabuğun çevresi boyunca ankastre (C) veya basit mesnetli (S) olduğu iki durum incelenmiştir. Çalışmada bulunan sayısal sonuçları doğrulayabilmek için kabuğun tepe noktasındaki düşey yer değiştirme literatürdeki değerlerle karşılaştırılmış ve yakın değerler elde edildiği görölmüşür.

### 1.3 Hipotez

Bu çalışmada düzgün yayılı yük etkisinde sabit kalınlığa sahip sığ küresel kabuğun dönel simetrik eğilme analizi yapılmıştır. Kabuk derinliğinin, kabuk kalınlığının ve elastik zemin etkisinin kabuğun tepe noktasında oluşacak düşey yer değiştirme (sehim) üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Analizde basit mesnetli ve ankastre mesnetli kabuklar incelenmiştir. Çözülen sayısal örnekler kabuk derinliğinin artması ile boyutsuz çökme değerinin ( $W$ ) azaldığını ortaya koymuştur. Winkler ve Pasternak zeminlerinin etkisi ise kabuk sığlaştıkça artmaktadır. Oldukça sığ bir kabuk ile dairesel plak çözümü karşılaştırıldığında plak yerine sığ küresel kabuk kullanımının deformasyonları büyük ölçüde azalttığı görülmüştür. Problemin çözümünde kullanılan diferansiyel dönüşüm yönteminin hem uygulama kolaylığı, hem de yüksek performansı ile gelecek çalışmalarda da tercih edilebilecek bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

## BİRİNCİ MERTEBE KAYMA DEFORMASYON TEORİSİ

---

Temelde Kirchhoff'un klasik plak teorisi (CPT) ile başlayan plak teorileri zamanla bünyesine dahil ettikleri kabuller ile plak teorilerinin kapsamını ve uygulanabilirliğini artırmıştır.

Kirchhoff'un çalışmalarından esinlenerek Reissner ve Mindlin birinci mertebe kayma deformasyon teorisi adına önemli çalışmalar yapmış ve daha sonra geliştirilen plak teorileri için de önemli birer kaynak olmuşlardır.

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisinin klasik plak teorisinden temel farkı ise kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinden kaynaklanmaktadır. Yapılan çalışmalar ile plak kalınlığı doğrultusunda meydana gelen kayma şekil değiştirmelerinin ( $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ), plak kalınlığının artması ile sonuçlarda etkili olduğu görülmüştür [37]. Bu çalışmada kullanılan plak teorisi ise Mindlin'in plak teorisidir.

### 2.1 Mindlin Plak Teorisi

Mindlin kalın plaklar için oluşturduğu teoride bir takım kabuller yapmıştır. Bu kabuller şu şekildedir [38]:

- Plak yapısı homojen ve izotrop olup lineer elastik davranışa sahiptir.
- Sehimler plak kalınlığı ile kıyaslandığında oldukça küçüktür.
- Plak düzlemine dik doğrultudaki normal gerilme ( $\sigma_z$ ) ve şekil değiştirme ( $\epsilon_z$ ) ihmal edilmektedir.
- Şekil değişim öncesinde plak orta düzlemine dik olan normaller şekil değiştirme sonrasında orta düzleme diklik ifade etmez.

Kalınlık doğrultusu boyunca meydana gelen kayma gerilmesi dağılımı parabolik olmasına karşın işlem kolaylığı açısından üniform olarak kabul edilmektedir. Bunun için ise " Kayma düzeltme katsayısı ( $\kappa$ )" kullanılır [38].

Mindlin ve Reissner teorilerinde bu katsayı için farklı değerler kullanmışlardır.

Mindlin [39]:

$$\kappa = \frac{\pi^2}{12} \quad (2.1)$$

Reissner [40]:

$$\kappa = \frac{5}{6} \quad (2.2)$$



### 3.1 Kabuk Geometrisi

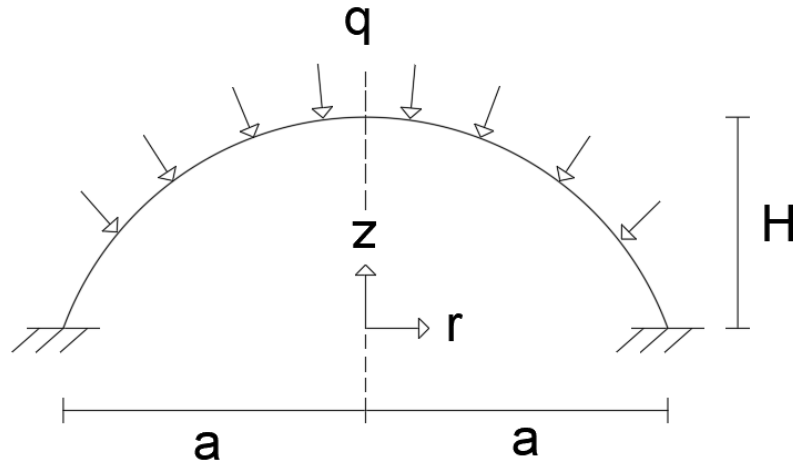
Sığ küresel bir kabuk geometrik bakımdan derinlik parametresi  $\eta$  ve eğrilik yarıçapı  $R$

$$\eta = \frac{H}{2a}, \quad R \cong \frac{a^2}{2H} \quad (3.1)$$

ile tanımlanabilmektedir [3].

Bu eşitliklerde  $H$  ve  $a$ , sırasıyla kabuk yüksekliğini ve kabuk taban yarıçapını ifade etmektedir (Şekil 3.1).

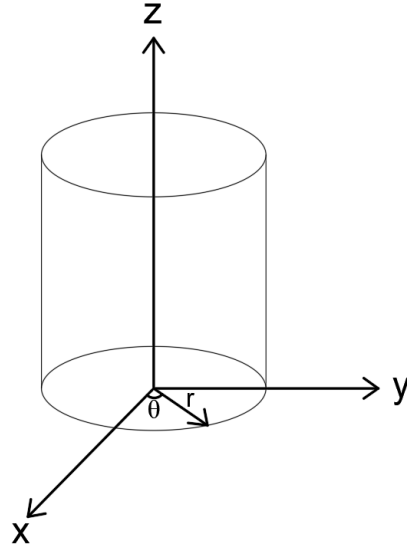
Derinlik parametresinin alabileceği değerler  $0 \leq \eta \leq \frac{1}{8}$  ile sınırlandırılmış olup [3], özel bir durum olan  $\eta = 0$  için kabuk, dairesel plağa dönüşmektedir.



Şekil 3.1 Kabuk geometrisi

### 3.2 Dönel Simetrik Sığ Küresel Kabuklar için Temel Bağlıntılar

Bu çalışmadaki formülasyonda silindirik koordinat takımı kullanılmaktadır (Şekil 3.2). Problemin dönel simetrik olması sebebiyle tüm bağıntılar  $\theta$ 'dan bağımsızdır.



**Şekil 3.2** Silindirik koordinat sistemi  $(r, \theta, z)$

Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} - \frac{w}{R} + z \frac{d\psi}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} - \frac{w}{R} + z \frac{\psi}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \psi + \frac{dw}{dr} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanmaktadır [35].

Gerilme-Şekil değiştirme bağıntıları

$$\sigma_r = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \quad (3.3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\nu \varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \quad (3.4)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \varepsilon_{rz} \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilmektedir [35].

Kesit tesirleri

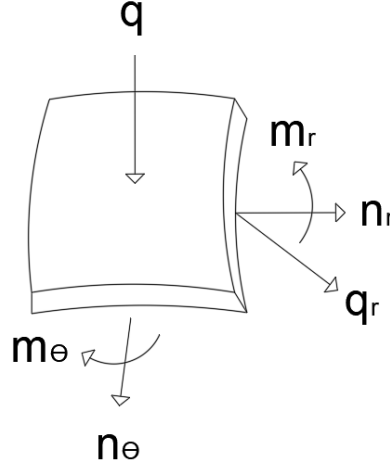
$$(n_r, n_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r, \sigma_\theta) dz \quad (3.6)$$

$$(m_r, m_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r, \sigma_\theta) z dz \quad (3.7)$$

$$q_r = \kappa \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz \quad (3.8)$$

bağıntılarıyla tariflenmektedir [35].

Sığ küresel kabuğa ait kesit tesirleri Şekil 3.3'te gösterilmiştir.



**Şekil 3.3** Sığ küresel kabuğa ait kesit tesirleri

Bağıntılarda geçen  $\psi$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\epsilon_{rz}$  ve  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{rz}$  sırasıyla dönme, yatay radyal yer değiştirme, çökme, şekil değiştirme ve gerilmeleri ifade etmektedir.

Burada  $D$ ,  $G$ ,  $E$ ,  $h$  ve  $\nu$  sırasıyla eğilme rijitliğini, kayma modülünü, elastisite modülünü, kabuk kalınlığını ve Poisson oranını ifade etmektedir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.9)$$

Elastik zemine oturan sığ küresel kabuğun dönele simetrik analizi için kullanılacak denge denklemleri

$$(rn_r)' - n_\theta = 0 \quad (3.10)$$

$$(rm_r)' - m_\theta - rq_r = 0 \quad (3.11)$$

$$(rq_r)' + \frac{r}{R}(n_r + n_\theta) + r(q - q_f) = 0 \quad (3.12)$$

şeklindedir [34, 35]. Burada,  $q_f$  elastik zeminden kabuğa uygulanan etkiyi temsil etmektedir. Doğrusal olmadığı varsayılan bu etki çalışmada

$$q_f = k_w w + k_3 w^3 - k_g w'' - k_g \frac{w'}{r} \quad (3.13)$$

olarak tanımlanmaktadır [47]. Denklem (3.10-3.13)'de  $(\ )' = d(\ )/dr$  olmaktadır.

Bu bağıntıda  $k_w$ ,  $k_3$  ve  $k_g$  sırasıyla Winkler zemin katsayısını, doğrusal olmayan Winkler zemin katsayısını ve Pasternak zemin katsayısını göstermektedir.

Analizde dikkate alınan Winkler ve Pasternak elastik zemin modelleri hakkında ayrıntılı bilgi "Ekler" bölümünde verilmektedir.

### 3.3 Sınır Koşulları

Çalışmada kabuğun çevresi boyunca sürekli basit mesnetli (S) veya ankastre (C) olduğu iki durum incelenmektedir. Üç sınır koşulu mesnette ve üç düzenlilik koşulu kabuğun tepe noktasında tam olarak sağlanmaktadır (Tablo 3.1).

**Tablo 3.1** Sınır koşulları ve düzenlilik koşulları [47]

	$r = a$	$r = 0$
Mesnet	Sınır koşulları	Düzenlilik koşulları
(S)	$w = 0, \quad u = 0, \quad m_r = 0$	$u = 0, \quad \psi = 0, \quad q_r = 0$
(C)	$w = 0, \quad u = 0, \quad \psi = 0$	$u = 0, \quad \psi = 0, \quad q_r = 0$

### 3.4 Parametreler ve Boyutsuz Değişkenler

Çalışmada kullanılan boyutsuz değişkenler ve parametreler

$$c = \frac{a}{h}, \quad \eta = \frac{H}{2a}, \quad r = a\xi, \quad q = EQ, \quad Q_c = Qc^4 \quad (3.14)$$

$$w = hW, \quad u = hU, \quad w = \frac{qa^4}{D}\lambda, \quad \frac{\mu}{\lambda} = 10^3 \quad (3.15)$$

$$k_w = \frac{Eh^3}{a^4} K_w, \quad k_3 = \frac{Eh}{a^4} K_3, \quad k_g = \frac{Eh^3}{a^2} K_g \quad (3.16)$$

$$n_r = EhN_r, \quad n_\theta = EhN_\theta, \quad q_r = EhQ_r \quad (3.17)$$

$$m_r = Eh^2M_r \quad m_\theta = Eh^2M_\theta \quad (3.18)$$

$$k_w = \frac{D}{a^4} K_{ww} \quad k_g = \frac{D}{a^2} K_{gg} \quad (3.19)$$

şeklindedir [22, 23, 27, 43, 47].

Denklem (3.10-3.12)'de görülen ifadeler ana değişken olarak seçilen  $w$ ,  $u$ ,  $\psi$  cinsinden yazılıp, Denklem (3.14-3.19)'da gösterildiği gibi boyutsuzlaştırılırsa

$$U' - \frac{U}{\xi} + \xi U'' - 4\eta(1+\nu)\xi W' = 0 \quad (3.20)$$

$$\psi' - \frac{\psi}{\xi} + \xi \psi'' - 6\kappa(1-\nu)c^2\xi\psi - 6\kappa(1-\nu)c\xi W' = 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \kappa(1-\nu)\psi + \kappa\frac{(1-\nu)}{c}W' + \kappa(1-\nu)\xi\psi' + \kappa\frac{(1-\nu)}{c}\xi W'' \\ & + 8\eta\frac{(1+\nu)}{c}\xi U' - 64\eta^2\frac{(1+\nu)}{c}\xi W + 8\eta\frac{(1+\nu)}{c}U \\ & + 2(1-\nu^2)c\xi Q - 2(1-\nu^2)\frac{K_w}{c^3}\xi W - 2(1-\nu^2)\frac{K_3}{c^3}\xi W^3 + \\ & 2(1-\nu^2)\frac{K_g}{c^3}\xi W'' + 2(1-\nu^2)\frac{K_g}{c^3}W' = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

ifadeleri elde edilmektedir. Boyutsuz denklemlerde  $( )' = \frac{d( )}{d\xi}$  olmaktadır.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek amacıyla kullanılmaktadır. İlk olarak Zhou tarafından 1986 yılında kullanılmıştır. Zhou yaptığı çalışmada bu yöntemi elektrik devreleri için kullanmıştır [41]. Yapılan çalışmalar ile bu yöntem geliştirilmiştir. Başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde oldukça sık kullanılan bu yöntem diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürmek için bir takım teoremlere sahiptir. Bu teoremler sayesinde çözüme gitmek oldukça basittir.

Diferansiyel dönüşüm yönteminde  $u(x)$  fonksiyonuna ait diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (4.1)$$

şeklindedir [42].

$U(k)$  fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu ise

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k U(k) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır [42].

Yukarıda verilen (4.1) ve (4.2) denklemlerinden çıkarılacak teoremler aşağıda verilmiştir [42]:

1. Teorem  $u(x) = y(x) \pm z(x)$  ise  $U(k) = Y(k) \pm Z(k)$
2. Teorem  $u(x) = ay(x)$  ise  $U(k) = aY(k)$ ,  $a$ =sabit sayı
3. Teorem  $u(x) = \frac{d^m y(x)}{dx^m}$  ise  $U(k) = \frac{(k+m)!}{k!} Y(k+m)$
4. Teorem  $u(x) = y(x)z(x)$  ise  $U(k) = \sum_{k_1=0}^k Y(k_1)Z(k-k_1)$

5. Teorem  $u(x) = x^n$  ise  $U(k) = \delta(k-n)$  burada  $\delta(k-n) = \begin{cases} 1 \Rightarrow k = n \\ 0 \Rightarrow k \neq n \end{cases}$

şeklindedir.

6. Teorem  $u(x) = e^{\beta x}$  ise  $U(k) = \frac{\beta^k}{k!}$ ,  $\beta =$  sabit sayı

7. Teorem  $u(x) = \sin(\omega x + \alpha)$  ise  $U(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$

8. Teorem  $u(x) = \cos(\omega x + \alpha)$  ise  $U(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$

9. Teorem  $u(x) = y_1(x)y_2(x)...y_n(x)$  ise

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} Y_1(k_1)Y_2(k_2 - k_1) \dots Y_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})Y_n(k - k_{n-1})$$

şeklindedir.

Denklem (3.20-3.22)'ye DTM uygulanması durumunda, sırasıyla

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \frac{(k-k_1+1)!}{(k-k_1)!} \bar{U}(k-k_1+1) - \bar{U}(k) \\ & + \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-2) \frac{(k-k_1+2)!}{(k-k_1)!} \bar{U}(k-k_1+2) \\ & - 4\eta(1+\nu) \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-2) \frac{(k-k_1+1)!}{(k-k_1)!} \bar{W}(k-k_1+1) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \frac{(k-k_1+1)!}{(k-k_1)!} \bar{\Psi}(k-k_1+1) - \bar{\Psi}(k) \\ & + \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-2) \frac{(k-k_1+2)!}{(k-k_1)!} \bar{\Psi}(k-k_1+2) \\ & - 6\kappa(1-\nu)c^2 \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-2) \bar{\Psi}(k-k_1) \\ & - 6\kappa(1-\nu)c \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-2) \frac{(k-k_1+1)!}{(k-k_1)!} \bar{W}(k-k_1+1) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
& \kappa(1-\nu)\psi(k) + \kappa \frac{(1-\nu)(k+1)!}{c(k)!} \bar{W}(k+1) \\
& + \kappa(1-\nu) \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \frac{(k-k_1+1)!}{(k-k_1)!} \bar{\psi}(k-k_1+1) \\
& + \kappa \frac{(1-\nu)}{c} \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \frac{(k-k_1+2)!}{(k-k_1)!} \bar{W}(k-k_1+2) \\
& + 8\eta \frac{(1+\nu)}{c} \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \frac{(k-k_1+1)!}{(k-k_1)!} \bar{U}(k-k_1+1) \\
& - 64\eta^2 \frac{(1+\nu)}{c} \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \bar{W}(k-k_1) + 8\eta \frac{(1+\nu)}{c} \bar{U}(k) \\
& + 2(1-\nu^2)cQ\delta(k-1) - 2(1-\nu^2) \frac{K_w}{c^3} \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \bar{W}(k-k_1) \\
& - 2(1-\nu^2) \frac{K_3}{c^3} \sum_{k_3=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \delta(k_1-1) \bar{W}(k_2-k_1) \bar{W}(k_3-k_2) \bar{W}(k-k_3) \\
& + 2(1-\nu^2) \frac{K_g}{c^3} \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \frac{(k-k_1+2)!}{(k-k_1)!} \bar{W}(k-k_1+2) \\
& + 2(1-\nu^2) \frac{K_g}{c^3} \frac{(k+1)!}{(k)!} \bar{W}(k+1) = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ifadeleri elde edilmektedir. Denklem (4.3-4.5) ve Tablo 3.1 kullanılarak  $\bar{W}(k)$ ,  $\bar{U}(k)$ ,  $\bar{\psi}(k)$  değerleri  $k \leq k^*$  için hesaplanmaktadır.

Kullanılan terim sayısı  $\Phi = 1 + k^*$  bağıntısıyla belirlenmektedir. Son olarak ters dönüşüm yapılarak.  $W$ ,  $U$ ,  $\psi$  değişkenleri

$$W = W(\xi) = \sum_{k=0}^{k^*} \bar{W}(k) \xi^k \tag{4.6}$$

$$U = U(\xi) = \sum_{k=0}^{k^*} \bar{U}(k) \xi^k \tag{4.7}$$

$$\psi = \psi(\xi) = \sum_{k=0}^{k^*} \bar{\psi}(k) \xi^k \tag{4.8}$$

şeklinde elde edilmektedir.

Kabuk malzemesinin homojen ve izotrop olduğu varsayılmaktadır. Aksi belirtilmediği sürece çözülen örneklerde;  $a=1$  m,  $\nu=0.3$  ve  $\kappa=5/6$  olarak alınmaktadır.

## 5.1 Yakınsama Çalışması ve Sonuçların Karşılaştırılması

Yeterli terim sayısını belirleyebilmek için yapılan yakınsama çalışması Tablo 5.1'de gösterilmektedir. İlgili tabloda sunulan değerlere göre  $k^* = 18$  için elde edilen analiz sonuçları yeterli derecede yakınsaklık içermektedir. Dolayısıyla, çalışma kapsamındaki örnekler için izleyen bölümlerde DTM çözümünde  $k^* = 18$  alınmaktadır. Elde edilen sonuçlar Tablo 5.2'de SAP2000 çözümleriyle karşılaştırılmaktadır. Tablo 5.3 ve Tablo 5.4'te ise sonuçlar literatürde yapılan çalışmalar ile kıyaslanmış ve yakın sonuçlar elde edildiği tespit edilmiştir.

**Tablo 5.1** Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme  $W$  için yakınsama çalışması ( $K_w = 5$ ,  $K_g = 1$ ,  $K_3 = 1$ ,  $Q_c = 5$ )

$\eta$	$c$	W: (S)	W: (C)	Çözüm Yöntemi
1/50	50	0.1365	0.1360	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	50	0.1365	0.1360	DTM ( $k^*=14$ )
1/50	50	0.1366	0.1360	DTM ( $k^*=10$ )
1/20	20	0.1364	0.1357	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	20	0.1364	0.1357	DTM ( $k^*=14$ )
1/20	20	0.1365	0.1357	DTM ( $k^*=10$ )

**Tablo 5.2** Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme W  
( $K_w = 0, K_g = 0, K_3 = 0, Q_c = 5$ )

$\eta$	c	W: (S)	W: (C)	Yöntem
0.06	100	0.003687	0.004056	SAP2000
0.06	100	0.0033	0.0037	DTM ( $k^*=18$ )
0.04	100	0.008084	0.009466	SAP2000
0.04	100	0.0077	0.0092	DTM ( $k^*=18$ )
0.02	100	0.04	0.05	SAP2000
0.02	100	0.0375	0.0459	DTM ( $k^*=18$ )
0	100	3.46	0.86	SAP2000
0	100	3.4785	0.8535	DTM ( $k^*=18$ )
0.06	50	0.014	0.02	SAP2000
0.06	50	0.0146	0.0180	DTM ( $k^*=18$ )
0.04	50	0.04	0.045	SAP2000
0.04	50	0.0375	0.0458	DTM ( $k^*=18$ )
0.02	50	0.175	0.18	SAP2000
0.02	50	0.1758	0.1809	DTM ( $k^*=18$ )
0	50	3.465	0.86	SAP2000
0	50	3.4797	0.8547	DTM ( $k^*=18$ )
0.06	20	0.124	0.136	SAP2000
0.06	20	0.1191	0.1304	DTM ( $k^*=18$ )
0.04	20	0.28	0.262	SAP2000
0.04	20	0.2760	0.2573	DTM ( $k^*=18$ )
0.02	20	0.932	0.554	SAP2000
0.02	20	0.9302	0.5511	DTM ( $k^*=18$ )
0	20	3.472	0.868	SAP2000
0	20	3.4879	0.8629	DTM ( $k^*=18$ )

**Tablo 5.3** Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme W  
( $K_w = 0, K_g = 0, K_3 = 0$ )

$\eta$	c	$Q_c$	W: (S)	W: (C)	Yöntem	Kaynak
0.07	100	600	0.2929	0.3224	SAP2000	[27]
0.07	100	600	0.2922	0.3224	FDM (N=101)	[27]
0.07	100	600	0.29526	0.326532	DTM ( $k^*=18$ )	
0.05	100	1	0.0009659	0.001104	SAP2000	[27]
0.05	100	1	0.00096577	0.00110645	FDM (N=101)	[27]
0.05	100	1	0.000968	0.001108	DTM ( $k^*=18$ )	
0.07	20	0.96	0.0162	0.01862	SAP2000	[27]
0.07	20	0.96	0.0163	0.0186	FDM (N=101)	[27]
0.07	20	0.96	0.016275	0.0186	DTM ( $k^*=18$ )	

**Tablo 5.4** Plağın orta noktasındaki boyutsuz çökme  $\mu_{maks}$   
( $c = 100$ , ( $K_{ww}$ ;  $K_{33}$ ) = (200; 0),  $Q_c = 12$ )

$\eta = 0$	(C)	$K_{gg} = 3$	$K_{gg} = 28.9$	$K_{gg} = 300$
[43]	$\mu_{maks}$	4.65	2.97	0.65
DTM ( $k^*=18$ )	$\mu_{maks}$	4.64825	2.972264	0.651041

## 5.2 Sayısal Örnekler

Tezde kullanılan çeşitli parametrelerin kabuğun tepe noktasında oluşacak boyutsuz düşey yer değiştirme üzerindeki etkisini belirleyebilmek için çözülen sayısal örnekler iki farklı mesnet koşulu için Tablo 5.5-5.9'da sunulmaktadır. Elastik zeminin olmadığı durum Tablo 5.5'de gösterilmektedir. Winkler zeminine oturan kabuk Tablo 5.6'da incelenmektedir. Pasternak zeminin araştırıldığı sonuçlar Tablo 5.7'de verilmektedir. Doğrusal olmayan Winkler zeminine oturan kabuğa ait çözümler Tablo 5.8'de sunulmaktadır. Üç parametrelili elastik zemine oturan kabukların analizine ilişkin sonuçlar Tablo 5.9'da gösterilmektedir. Tablo 5.8-5.9'daki elastik zemin doğrusal olmayan yapıdadır.

**Tablo 5.5** Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme  $W$   
( $K_w = 0$ ,  $K_g = 0$ ,  $K_3 = 0$ ,  $Q_c = 5$ )

$\eta$	$c$	W: (S)	W: (C)	Yöntem
1/10	100	0.0012	0.0013	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	100	0.0048	0.0055	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	100	0.0375	0.0459	DTM ( $k^*=18$ )
0	100	3.4785	0.8535	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	50	0.0048	0.0055	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	50	0.0223	0.0275	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	50	0.1758	0.1809	DTM ( $k^*=18$ )
0	50	3.4797	0.8547	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	20	0.0374	0.0455	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	20	0.1755	0.1805	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	20	0.9302	0.5511	DTM ( $k^*=18$ )
0	20	3.4879	0.8629	DTM ( $k^*=18$ )

**Tablo 5.6** Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme W  
( $K_w = 5, K_g = 0, K_3 = 0, Q_c = 5$ )

$\eta$	c	W: (S)	W: (C)	Yöntem
1/10	100	0.0012	0.0013	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	100	0.0048	0.0055	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	100	0.0359	0.0437	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	50	0.0048	0.0055	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	50	0.0217	0.0267	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	50	0.1518	0.1584	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	20	0.0358	0.0434	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	20	0.1516	0.1579	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	20	0.5576	0.4013	DTM ( $k^*=18$ )

**Tablo 5.7** Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme W  
( $K_w = 5, K_g = 1, K_3 = 0, Q_c = 5$ )

$\eta$	c	W: (S)	W: (C)	Yöntem
1/10	100	0.0012	0.0013	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	100	0.0049	0.0056	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	100	0.0363	0.0422	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	50	0.0049	0.0056	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	50	0.0223	0.0264	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	50	0.1366	0.1361	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	20	0.0363	0.0418	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	20	0.1364	0.1358	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	20	0.3854	0.2913	DTM ( $k^*=18$ )

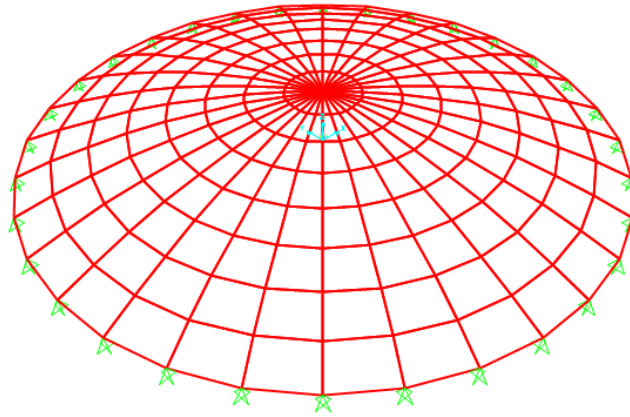
**Tablo 5.8** Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme W  
( $K_w = 5, K_g = 0, K_3 = 1, Q_c = 5$ )

$\eta$	c	W: (S)	W: (C)	Yöntem
1/10	100	0.0012	0.0013	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	100	0.0048	0.0055	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	100	0.0359	0.0437	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	50	0.0048	0.0055	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	50	0.0217	0.0267	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	50	0.1518	0.1583	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	20	0.0358	0.0434	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	20	0.1515	0.1579	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	20	0.5484	0.3991	DTM ( $k^*=18$ )

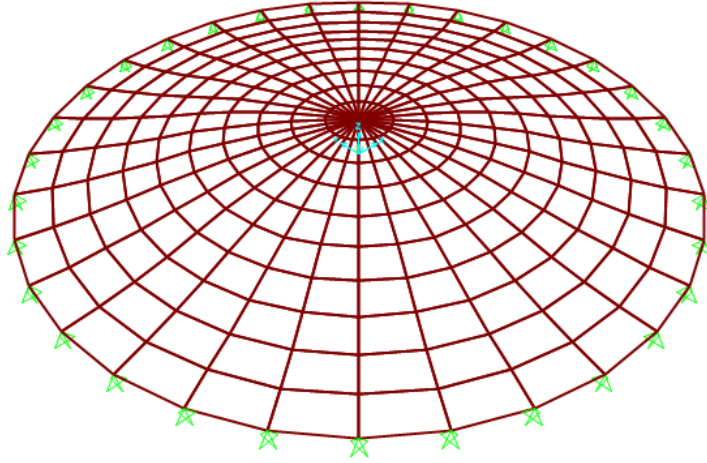
**Tablo 5.9** Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme  $W$   
( $K_w = 5, K_g = 1, K_3 = 1, Q_c = 5$ )

$\eta$	$c$	W: (S)	W: (C)	Yöntem
1/10	100	0.0012	0.0013	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	100	0.0049	0.0056	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	100	0.0363	0.0422	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	50	0.0049	0.0056	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	50	0.0223	0.0264	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	50	0.1365	0.1360	DTM ( $k^*=18$ )
1/10	20	0.0363	0.0418	DTM ( $k^*=18$ )
1/20	20	0.1364	0.1357	DTM ( $k^*=18$ )
1/50	20	0.3831	0.2906	DTM ( $k^*=18$ )

Şekil değişimi öncesinde ve sonrasında basit mesnetli kabuğun SAP2000'de oluşturulan görseli gösterilmektedir (Şekil 5.1-5.2).



**Şekil 5.1** SAP2000 görseli: deformasyon öncesi (S) kabuk  
( $c = 50, \eta = 0.1, h = 0.02m$ )



**Şekil 5.2** SAP2000 görseli: deformasyon sonrası (S) kabuk  
( $c = 50, \eta = 0.1, h = 0.02\text{m}$ )

Tablo 5.5-5.9'da yapılan sayısal simülasyonlar çerçevesinde çalışmada kullanılan parametrelerin kabuğun tepe noktasında oluşacak boyutsuz çökme ( $W$ ) üzerindeki etkisi aşağıda yorumlanmaktadır:

- Kabuk derinliği arttıkça,  $W$  azalmaktadır.
- Oldukça sığ kabuk ( $\eta = 1/50$ ) ile plak ( $\eta = 0$ ) çözümleri arasındaki karşılaştırma, taşıyıcı eleman olarak plak yerine sığ bir kabuk kullanmanın deformasyonu çok büyük oranda azalttığını göstermektedir (Tablo 5.5).
- $c = 100$  ve  $c = 50$  için (C) kabuğun (S) kabuğa kıyasla tepe noktasında daha fazla deforme olduğu,  $c = 20$  için ise  $\eta = 1/50$  iken (C) kabuğun (S) kabuğa kıyasla tepe noktasında daha az deforme olduğu görülmektedir (Tablo 5.5).  $c = 20$  ve  $\eta = 1/20$  için ise (S) ve (C) kabukların tepe noktasında meydana gelecek düşey yer değiştirmeler birbirine oldukça yakındır (Tablo 5.5).
- Elastik zeminin olduğu durumda, elastik zemin parametrelerinin, kalınlık parametresinin ve derinlik parametresinin bileşik etkisi değerlendirilmek durumundadır (Tablo 5.6-5.9).
- Winkler ve Pasternak zeminlerinin etkisi, kabuk sığlaştıkça artmaktadır (Tablo 5.6-5.7). Winkler ve doğrusal olmayan Winkler zeminleri ise kabuğun tepe noktasındaki çökme değeri üzerinde neredeyse eşdeğer etki göstermektedir (Tablo 5.6, 5.8). Üç parametrelilik elastik zeminin

deformasyon üzerindeki etkisi ise doğrusal olmayan Winkler zeminine kıyasla karmaşıktır. Bu karmaşıklık hem kabuğun derinliği hem de elastik zeminin bileşik etkisinden kaynaklanmaktadır (Tablo 5.8-5.9).



Çevresi boyunca basit mesnetli (S) veya ankastre (C) olan dönel simetrik sığ küresel kabuğun düzgün yayılı statik basınç yükü etkisi altında eğilmesi incelenmiştir. Kabuk malzemesinin homojen ve izotrop, kabuk kalınlığının sabit olduğu varsayılmıştır. Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine (FSDT) dayalı bir formülasyonu içeren çalışmada doğrusal kabuk denklemleri kullanılmıştır.

Kabuğun etkileşimde olduğu varsayılan elastik zemin modelinde üç parametre kullanılmıştır. Tezde genel itibariyle doğrusal analiz yapılmış olup, doğrusal olmayan Winkler tipi elastik zeminin göz önüne alındığı durumlarda doğrusal olmayan analiz de gerçekleştirilmiştir. Doğrusal olmayan analizin gerektiği durumlarda çözüm için Newton-Raphson yönteminden yararlanılmıştır.

Kabuğun geometrik parametrelerinin (kalınlık ve derinlik parametreleri) ve elastik zemin parametrelerinin (Winkler ve Pasternak gibi) statik yük altındaki kabuğun tepe noktasında meydana gelecek düşey yer değiştirme üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Problemin çözümünde diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Çözümde kullanılan terim sayısı ile elde edilen sayısal değerlerin yakınsaklığı baz alınarak yapılan karşılaştırmada, DTM'nin benzeri sayısal yöntemlere kıyasla oldukça yüksek performans gösterdiği tespit edilmiştir. Gerçekleştirilen sayısal simülasyonlar, sınır koşulları ile birlikte kabuk derinliğinin sonuçlar üzerinde çok etkin olduğunu ortaya koymuştur.

Tez kapsamında çözülen sayısal örnekler, elastik zemin kaynaklı doğrusal olmayan davranışın, kabuk denklemlerinin doğrusal olması sebebiyle deformasyonlar üzerinde göreceli olarak düşük seviyede etkili olduğu yönünde izlenim oluşturmuştur. Gelecek çalışmalarda kabuk denklemlerinin de doğrusal olmadığı bir analizle daha hassas sonuçlar elde edilebileceği öngörülmektedir.

- [1] A. Kaplan ve Y. C. Fung, “A nonlinear theory of bending and buckling of thin elastic shallow spherical shells”, NACA-TN-3212, 1954.
- [2] Y. Nath, P. C. Dumir ve R. S. Bhatiaf, “Nonlinear static and dynamic analysis of circular plates and shallow spherical shells using the collocation method”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, c. 21, sy 3, ss. 565-578, 1985.
- [3] N. C. Huang, “Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells”, *Journal of Applied Mechanics*, c. 31, sy 3, ss. 447-457, 1964.
- [4] Q. S. Li, J. Liu ve J. Tang, “Buckling of shallow spherical shells including the effects of transverse shear deformation”, *Int. J. Mech. Sci.*, c. 45, sy 9, ss. 1519-1529, 2003.
- [5] G. C. Sinharay ve B. Banerjee, “Large amplitude free vibrations of shallow spherical shell and cylindrical shell a new approach”, *Int. J. Non-Linear Mech.*, c. 20, sy 2, ss. 69-78, 1985.
- [6] A. Kalnins ve P. M. Naghdi, “Axisymmetric vibrations of shallow elastic spherical shells”, *J. Acoust. Soc. Am.*, c. 32, sy 3, ss. 342-347, 1960.
- [7] J.-H. Kang, “Vibration analysis of shallow spherical domes with non-uniform thickness”, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, c. 17, sy 02, s. 1750016, 2017.
- [8] H. A. O. Yingjie ve H. E. Fangshe, “Free vibration of shallow spherical shells on elastic foundations”, *J. Shandong Univ. Technol. Nat. Sci. Ed.*, c. 24, sy 6, ss. 101-103, 2010.
- [9] D. N. Paliwal ve V. Bhalla, “Large amplitude free vibration of shallow spherical shell on a Pasternak foundation”, *Journal of Vibration and Acoustics*, c. 115, sy 1, ss. 70-74, 1993.
- [10] J. Gan, H. Yuan, S. Li, Q. Peng ve H. Zhang, “An analytical method for shallow spherical shell free vibration on two-parameter foundation”, *Heliyon*, c. 7, sy 1, s. e05876, 2021.
- [11] K. Yokoyama, N. Tosaka ve S. Miyake, “Boundary element analysis for shallow spherical shell bending problem by the displacement method”, *Boundary Element Methods*, Elsevier, ss. 269-278, 1990.
- [12] D. N. Mitra, “Bending of a simply-supported shallow spherical shell under a uniform line load on a part of a parallel circle”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, c. 63, sy 1, ss. 239-246, 1967.
- [13] S. Li, “A numerical method for bending problem of slip clamped shallow spherical shell”, *6th International Conference on Measurement, Instrumentation and Automation*, China, ss. 266-269, 2017.
- [14] W. Y. W. Zuohui, “The method of thin plate analogy for shallow spherical shell bending problems”, *J. Hefei Univ. Technol. (Nat. Sci.)*, c. 1, 1986.

- [15] N. Tosaka ve S. Miyake, "Large deflection analysis of shallow spherical shell using an integral equation method", *Boundary Elements*, Elsevier, ss. 59-66, 1986.
- [16] Y. Jianqiao, "A new approach for the bending problem of shallow shell by the boundary element method", *Appl. Math. Model.*, c. 12, sy 5, ss. 467-470, 1988.
- [17] R. H. Liu ve F. Wang, "Nonlinear stability of corrugated shallow spherical shell", *Int. J. Appl. Mech. Eng.*, c. 10, sy 2, ss. 295-309, 2005.
- [18] D. N. Paliwal ve R. N. Rai, "Shallow spherical shell on Pasternak foundation subjected to elevated temperature", *Thin-Walled Struct.*, c. 5, sy 5, ss. 343-349, 1987.
- [19] N. Zhong-rong, "Nonlinear bending of the shallow spherical shells with variable thickness under axisymmetrical loads", *Appl. Math. Mech.*, c. 14, sy 11, ss. 1023-1031, 1993.
- [20] I. Ichino ve H. Takahashi, "Theory of Nonsymmetrical Bending State for Spherical Shell", *Bull. JSME*, c. 7, sy 25, ss. 28-35, 1964.
- [21] G. P. Dube, S. Joshi ve P. C. Dumir, "Nonlinear analysis of thick shallow spherical and conical orthotropic caps using Galerkin's method", *Appl. Math. Model.*, c. 25, sy 9, ss. 755-773, 2001.
- [22] M. Altekin ve R. F. Yükseler, "Boşluklu Ankastre Sığ Küresel Kabukların Geometrik Doğrusal Olmayan Analizi", XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, Kayseri, 2010.
- [23] M. Altekin ve R. F. Yükseler, "Axisymmetric large deflection analysis of fully and partially loaded shallow spherical shells", *Struct. Eng. Mech. Int. J.*, c. 47, sy 4, ss. 559-573, 2013.
- [24] L. Xiao-Yan, H. Mao-Kuang ve W. Xiuxi, "Analysis of the explicit fundamental solution of a shallow spherical shell involving shear deformation", *Appl. Math. Model.*, c. 19, sy 4, ss. 194-200, 1995.
- [25] V. R. Kar ve S. K. Panda, "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Struct. Eng. Mech. Int. J.*, c. 53, sy 4, ss. 661-679, 2015.
- [26] J. Woo ve S. A. Meguid, "Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells", *Int. J. Solids Struct.*, c. 38, sy 42-43, ss. 7409-7421, 2001.
- [27] M. Altekin ve S. Gökdağ, "Sığ Küresel Kabukların Doğrusal Olmayan Analizi", XX. Ulusal Mekanik Kongresi, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 2017.
- [28] Y. Nath ve R. K. Jain, "Non-linear dynamic analysis of shallow spherical shells on elastic foundations", *Int. J. Mech. Sci.*, c. 25, sy 6, ss. 409-419, 1983.
- [29] D. N. Paliwal ve S. N. Sinha, "Static and dynamic behaviour of shallow spherical shells on Winkler foundation", *Thin-Walled Struct.*, c. 4, sy 6, ss. 411-422, 1986.

- [30] D. N. Paliwal, S. N. Sinha ve B. K. Choudhary Jr, "Shallow spherical shells on Pasternak foundation", *J. Eng. Mech.*, c. 112, sy 2, ss. 175-182, 1986.
- [31] S. Li, C. Yang, F. Xia, H. Yuan, "A mathematical analysis method for bending problem of clamped shallow spherical shell on elastic foundation", *Int. J. Computational Methods*, 2021.
- [32] L. Jia-ji, X. Xing-zhong ve C. Ai-qun, "Nonlinear bending of shallow spherical shells on the Pasternak foundations", *Appl. Math. Mech.*, c. 12, sy 5, ss. 455-460, 1991.
- [33] Ö. Civalek, "Geometrically nonlinear dynamic and static analysis of shallow spherical shell resting on two-parameters elastic foundations", *Int. J. Press. Vessels Pip.*, c. 113, ss. 1-9, 2014.
- [34] N. D. Duc, V. T. T. Anh ve P. H. Cong, "Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells on elastic foundations under uniform external pressure and temperature", *Eur. J. Mech.-ASolids*, c. 45, ss. 80-89, 2014.
- [35] V. T. T. Anh ve N. Dinh Duc, "Nonlinear response of a shear deformable S-FGM shallow spherical shell with ceramic-metal-ceramic layers resting on an elastic foundation in a thermal environment", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, c. 23, sy 8, ss. 926-934, 2016.
- [36] H. Kanagasabapathy, D. N. Paliwal ve K. M. Gupta, "Large deflection of an orthotropic shallow spherical shell on a Pasternak foundation", *Int. J. Press. Vessels Pip.*, c. 62, sy 2, ss. 117-122, 1995.
- [37] S. S. Akavci, H. R. Yerli ve A. Doğan, "The first order shear deformation theory for symmetrically laminated composite plates on elastic foundation", *Arab. J. Sci. Eng.*, c. 32, sy 2, s. 341, 2007.
- [38] Y. Aygörmöz, "Kalın Sayılabilecek Plaklarda Kayma Kilitlenmesi Problemi", Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2015.
- [39] R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", *J. Appl. Mech.*, c. 18, sy 1, ss. 31-38, 1951.
- [40] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.*, c. 12, sy 2, ss. A69-A77, 1945.
- [41] J. K. Zhou, "Differential transformation and its applications for electrical circuits". Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
- [42] F. Mirzaee, "Differential transform method for solving linear and nonlinear systems of ordinary differential equations", *Appl. Math. Sci.*, c. 5, sy 70, ss. 3465-3472, 2011.
- [43] A. Kutlu, Ü. Arıbaş, H. Karayiğit, M. Omurtag, "Ortotrop Pasternak Zeminine Oturan Eliptik Mindlin Plağının Karışık Sonlu Elemanlarla Statik Analizi", XVII. Ulusal Mekanik Kongresi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, 5-9 Eylül 2011
- [44] E. E. Karataş ve R. F. Yükseler, "Snap-through buckling of shallow spherical shells under ring loads", *Teknik Dergi*, c. 32, sy 2, ss. 10695-10716, 2021.

- [45] B. N. Singh, A. Lal ve R. Kumar, “Nonlinear bending response of laminated composite plates on nonlinear elastic foundation with uncertain system properties”, *Eng. Struct.*, c. 30, sy4, ss.1101-1112, 2008 <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.07.007>.
- [46] A. H. Sofiyev, Z. Karaca ve Z. Zerín, “Non-linear vibration of composite orthotropic cylindrical shells on the non-linear elastic foundations within the shear deformation theory”, *Compos. Struct.*, c. 159, ss. 53-62, 2017. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.09.048>.
- [47] M. Altekin, “Combined Effects of Material Properties and Boundary Conditions on the Large Deflection Bending Analysis of Circular Plates on a Nonlinear Elastic Foundation”, *Computers and Concrete*, c. 25, sy. 6, ss. 537–549, 2020, doi: 10.12989/cac.2020.25.6.537.
- [48] İ. Bozkurt, “Yayıllı temel boyutlandırma da yatak katsayısı kavramının uygulanabilirliği”, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2017.
- [49] Ç. Hızal, “Elastik zemin üzerine oturan kirişlerin zorlanmış titreşimi”, Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2012.

# A

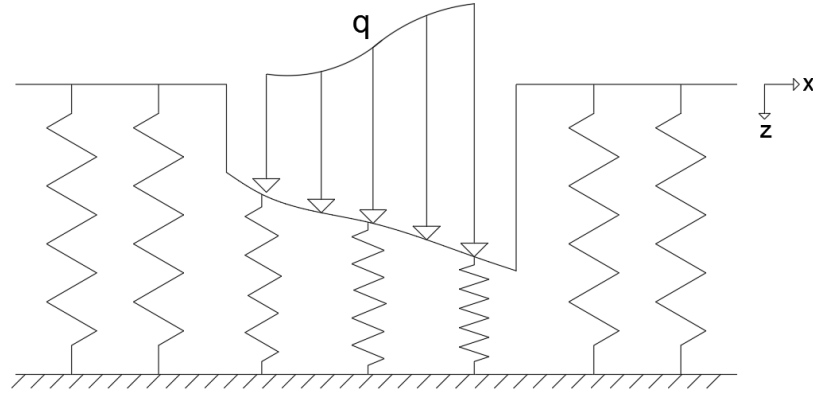
## ELASTİK ZEMİN ETKİLERİ

Yapılarda zemin etkileşimi her daim dikkat edilmesi gereken bir husus olduğundan zeminler ile ilgili birçok zemin modeli bulunmaktadır. Bu çalışmada elastik zemin modeli olarak Winkler zemin modeli ile Pasternak zemin modeli kullanılmıştır.

### A.1 Winkler Zemin Modeli

Winkler zemin modeli uygulama ve hesap kolaylığı nedeniyle oldukça sık tercih edilen bir zemin modelidir. Winkler modeline göre zemin, tamamen birbirinden bağımsız yaylarla modellenmektedir.

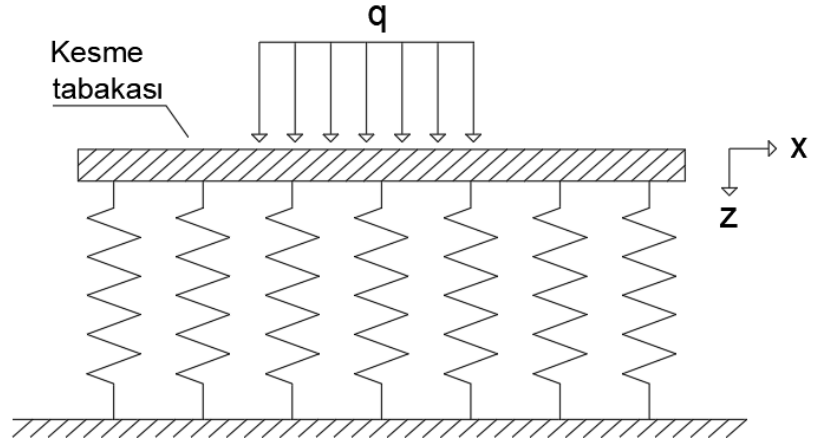
Şekil A.1'de görüldüğü gibi her bir yay kendi üzerine gelen yükü temsil etmekte ve etrafındaki yayların yüklemelerinden etkilenmemektedir [48].



Şekil A.1 Winkler zemin modeli

### A.2 Pasternak Zemin Modeli

Pasternak zemin modelinde Winkler zemin modelinin aksine elastik yayların birbirinden bağımsız çalışması durumunu ortadan kaldıran bir kesme tabakası tanımlanmıştır. Böylelikle elastik yaylar Şekil A.2'de gösterildiği üzere hem yükten hem de komşu yaylarda oluşan sıkışmalardan etkilenmektedir [49].



**Şekil A.2** Pasternak zemin modeli

## TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

---

### **Konferans Bildirileri**

1. M. Altekin, A. Eser, “Elastik Zemine Oturan Dairesel Sığ Küresel Kabukların Eğilme Analizi”, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Konferansı, Gümüşhane, 5-7 Temmuz, 2021.

### **Projeler**

1. Elastik Zemine Oturan Sığ Küresel Kabukların Dönel Simetrik Eğilme Analizi

**Proje yürütücüsü:** Doç. Dr. Murat Altekin

**Proje kodu:** FYL-2021-4184

**Proje geçerlilik tarihi:** 12.03.2021 – 12.03.2022

**Öğrencinin projedeki görevi:** Araştırmacı