

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYRIK İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

Şeniz Müge YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AYRIK İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

Şeniz Müge YILDIRIM

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Rabia AKTAŞ

Bu tezde, üçgensel bir bölgede ortogonal olan ayrık iki değişkenli ortogonal polinomlar ve bunların özellikleri çalışılmıştır. Bu tip polinomlar, T.H. Koornwinder'in bir bölgede ortogonal olan iki değişkenli polinomlar tanımlamak için ortaya koyduğu metodun ayrık tek değişkenli ortogonal polinomlar için uygulanmasıyla elde edilmiştir. Bu kapsamda, ilk olarak ayrık tek değişkenli ortogonal polinom ailelerinin temel özellikleri incelenmiş ve ayrık değişkenli Hahn, Kravchuk, Meixner ve Charlier polinomlarının çeşitli özellikleri verilmiştir. Daha sonra, Koornwinder metodu yardımıyla iki değişkenli Hahn polinomları, Kravchuk polinomları, Meixner polinomları ve Charlier polinomları tanımlanmıştır. Ortonormal iki değişkenli Hahn, Kravchuk, Meixner ve Charlier polinom aileleri için vektör matris formunda rekürans bağıntıları, fark denklemleri ve birbirleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Ocak 2022, 73 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ayrık değişkenli ortogonal polinom, Jacobi polinomları, Hahn polinomları, Meixner polinomları, Kravchuk polinomları, Charlier polinomları, ileri fark operatörü, geri fark operatörü, fark denklemi, rekürans bağıntısı

ABSTRACT

Master Thesis

ORTHOGONAL POLYNOMIALS OF TWO DISCRETE VARIABLES

Şeniz Müge YILDIRIM

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Rabia AKTAŞ

In this thesis, orthogonal polynomials of two discrete variables that are orthogonal on a triangular region and their properties are studied. Such polynomials are obtained from univariate discrete orthogonal polynomials by applying the method introduced by Koornwinder to define bivariate polynomials that are orthogonal on a region. In this context, firstly, fundamental properties of univariate discrete orthogonal polynomials are discussed and various properties of Hahn, Kravchuk, Meixner and Charlier polynomials, which are univariate discrete orthogonal polynomial families, are given. Then, with the help of Koornwinder's method, bivariate Hahn polynomials, Kravchuk polynomials, Meixner polynomials and Charlier polynomials are defined. For the orthonormal Hahn, Kravchuk, Meixner and Charlier polynomials of two variables, recurrence relations in vector matrix form, difference equations and relations between each other are investigated.

January 2022, 73 pages

Key Words: Discrete orthogonal polynomial, Jacobi polynomials, Hahn polynomials, Meixner polynomials, Kravchuk polynomials, Charlier polynomials, forward difference operator, backward difference operator, difference equation, recurrence relation

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, çalışmamın her konusunda yardımlarını esirgemeyen, desteği ve sabrı için saygıdeğer danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Rabia AKTAŞ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam boyunca benden desteğini esirgemeyen, her zaman yanımda olan sevgili annem Semra YILDIRIM'a, sevgili babam İsmail YILDIRIM'a, Sayın Hakkı KILIÇ'a ve Sayın Mukaddes KILIÇ'a sonsuz teşekkür ederim.

Şeniz Müge YILDIRIM
Ankara, Ocak 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
3. TEK DEĞİŞKENLİ VE İKİ DEĞİŞKENLİ JACOBI POLİNOM- LARI	7
3.1 Tek Değişkenli Jacobi Polinomları.....	10
3.2 Üçgensel Bölgede İki Değişkenli Jacobi Polinomları.....	13
4. AYRIK TEK DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR VE ÖZELLİKLERİ	14
4.1 Hipergeometrik Tipten Fark Denklemi	14
4.2 Ayrık Değişkenli Klasik Ortogonal Polinomlar için Ortogonallik Özelliği.....	16
4.3 Ayrık Değişkenli Klasik Ortogonal Polinomlar için Rekürans Formülü.....	17
4.4 Hahn, Kravchuk, Meixner ve Charlier Polinomları	18
4.4.1 Hahn polinomları.....	18
4.4.2 Meixner polinomları	20
4.4.3 Kravchuk polinomları	21
4.4.4 Charlier polinomları	23
5. ÜÇGENSEL BÖLGEDE AYRIK İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOG- ONAL POLİNOMLAR	25
5.1 İki Değişkenli Hahn Ortogonal Polinomları.....	27
5.2 İki Değişkenli Kravchuk Ortogonal Polinomları	43
5.3 İki Değişkenli Meixner Ortogonal Polinomları	51
5.4 İki Değişkenli Charlier Ortogonal Polinomları	59
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	69
KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$(\eta)_s$	Pochhammer Sembolü
Δ	İleri Fark Operatörü
∇	Geri Fark Operatörü
${}_rF_s \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \end{matrix} \middle x \right)$	Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon
$P_k^{(\gamma, \eta)}(x)$	Jacobi Polinomları
$h_k^{(\gamma, \eta)}(x; N)$	Hahn Polinomları
$m_k^{(\tau, \varrho)}(x)$	Meixner Polinomları
$k_k^{(q)}(x; N)$	Kravchuk Polinomları
$c_k^{(\alpha)}(x)$	Charlier Polinomları
$P_{m,l}^{(\gamma, \eta, \delta)}(x, y)$	İki Değişkenli Jacobi Polinomları
$H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)$	İki Değişkenli Hahn Polinomları
$M_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y)$	İki Değişkenli Meixner Polinomları
$K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N)$	İki Değişkenli Kravchuk Polinomları
$C_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)$	İki Değişkenli Charlier Polinomları

1. GİRİŞ

Ortogonal polinomlar kodlama teorisi, sayılar teorisi, harmonik analiz, nümerik analiz, yaklaşım teorisi gibi matematiğin birçok alanında; olasılık teorisi, stokastik süreçler, kuantum mekaniği, katı hal fiziği, optik gibi diğer birçok alanda da çok sayıda uygulamalara sahiptir.

Bir (a, b) aralığında $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $\{P_k(x)\}$ ($k = 0, 1, \dots$) polinom dizisi

$$\int_a^b P_k(x)P_l(x)\rho(x)dx = 0 \quad (l \neq k) \quad (1.1)$$

ortogonallik bağıntısını gerçekler. Bu polinom dizisinin örnekleri sürekli Laguerre, Jacobi ve Hermite klasik ortogonal polinomlarıdır (Rainville 1960, Chihara 1978, Szegő 1975). Bu polinomların, matematik ve fiziğin birçok dalında çok sayıda uygulamaları bulunmaktadır. Örneğin, Hermite polinomları kuantum mekaniğinde harmonik osilatörün çözümünde görülür. Laguerre polinomları kuantum mekaniğinde tek-elektronlu atomun (Hidrojen atomu) Schrödinger denkleminin radyal kısmında ortaya çıkar (Messiah 1967). Jacobi polinomlarının kökleri fizikte potansiyel enerji teorisinde kullanılmaktadır (Hochstadt 1971). Ayrıca, Jacobi polinomlarının özel bir hali olan Legendre polinomlarının küresel harmoniklerle ilişkisi bilinmektedir.

Sürekli ortogonal polinomların, matematiğin birçok dalında, fizikte ve diğer bilimlerde çok sayıda uygulamaya sahip olması bu alana olan ilgiyi arttırmış ve zaman içerisinde kodlama teorisinde, graf teoride ve sayılar teorisinde (Coleman 2011), genetik modellerde (Karlin ve McGregor 1958, 1960) uygulamalara sahip ayrık değişkenli ortogonal polinom aileleri tanımlanmıştır.

(1.1) eşitliğindeki ortogonallik bağıntısı

$$\sum_i P_k(x_i)P_l(x_i)\rho_i = 0 \quad (l \neq k) \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlandığında (1.2) eşitliğini sağlayan $P_k(x)$ polinomları ayrık değişkenli ortogonal polinomlar olarak adlandırılır. Bu polinomlara örnek olarak Hahn, Meixner,

Kravchuk ve Charlier ayrık değişkenli ortogonal polinomları verilebilir (Nikiforov vd. 1991, Koekoek vd. 2010, Ayata 2012). Bu polinomların da önemli uygulamaları vardır. Kravchuk polinomları kodlama teorisinde, graf teoride ve sayılar teorisinde (Coleman, 2011), Hahn polinomları genetik modellerde (Karlin ve McGregor, 1960) önemli uygulamalara sahiptir.

Tek değişkenli ortogonal polinomlar üzerine çalışmalar devam ederken buna paralel olarak iki ve çok değişkenli ortogonal polinomlar alanında da birçok çalışmalar yapılmış (Krall ve Sheffer 1967; Koornwinder 1975; Tratnik 1989, 1991; Suetin 1988; Rodal vd. 2005; Altın vd. 2009; Aktaş vd. 2011, 2013; Fernández vd. 2012; Aktaş 2014, 2016; Xu 2014, 2015; Marriaga vd. 2017; Marcellán vd. 2018; Güldoęan vd. 2020; Milovanović vd., 2020) ve uygulama alanlarının da ortaya çıkmasıyla son yıllarda araştırmacıların bu alana olan ilgisi yoğun bir şekilde artmıştır. Üçgensel bir bölgede ortogonal polinomlar Proriot (Proriot 1957) tarafından ortaya atılmıştır ve bu polinomlar Helyum atomu için Schrödinger denklemini çözmek için kullanılmıştır (Munsch 1957, Munsch ve Pluviniage 1957). Aynı polinomlar bağımsız olarak genetikteki uygulamalarda Karlin ve McGregor tarafından elde edilmiştir (Karlin ve McGregor 1958, 1960). Koornwinder tek değişkenli ortogonal polinomlardan iki değişkenli ortogonal polinomlar türetmek için genel bir metot vermiştir (Koornwinder 1975). Bu metot ayrıca sürekli durum için Dunkl ve Xu'nun kitabında ele alınmıştır (Dunkl ve Xu 2014). Ayrıca iki değişkenli ortogonal polinomlar detaylı olarak Suetin tarafından incelenmiştir (Suetin 1988).

Tek değişkenli klasik ortogonal polinomlar ikinci basamaktan diferensiyel denklemin özfonksiyonları olarak karşımıza çıkar. Bu durumun iki değişkenli analogu birbirlerinden bağımsız olarak Krall, Sheffer ve ayrıca Engeliş tarafından çalışılmıştır. Onlar ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin çözümleri olan klasik ortogonal polinomların bazı iki değişkenli analoglarını tanımlamışlardır.

Yaklaşım teorisi, nümerik analiz ve olasılık teorisinin çok boyutlu problemlerinde ayrık çok değişkenli ortogonal polinomlara ihtiyaç duyulur. Karlin ve McGregor (1975) çalışmalarında bazı genetik modeller tanımlamış ve bu çalışmalarında çok değişkenli Hahn polinomlarını ortaya atmışlardır. Tratnik (1989), Meixner, Kravchuk ve Meixner-Pollaczek polinomlarının çok değişkenli biortogonal genellemesi üzerine çalışmıştır.

Dahası, 1991 yılında Tratnik, ayrık değişkenli ortogonal polinomların bir genellemesi üzerine çalışmıştır (Tratnik 1991). 2005 yılında, Rodal, Area ve Godoy üçgensel bir bölgede ayrık iki değişkenli ortogonal polinom aileleri oluşturmak için bir metot vermişlerdir. Bu metodun uygulaması olarak iki değişkenli Hahn polinomları, iki değişkenli Kravchuk polinomları, iki değişkenli Meixner polinomları ve iki değişkenli Charlier polinomlarını tanımlamışlardır. Bu polinomlar için kısmi fark denklemleri, rekürans bağıntıları ve bu polinomların birbirleri arasındaki bazı geçiş bağıntılarını elde etmişlerdir.

Bu tezde ilk olarak ayrık tek değişkenli ortogonal polinomların çeşitli özellikleri ve bunların örnekleri verilecektir (Nikiforov vd. 1991, Koekoek vd. 2010). Bu polinomlar yardımıyla Rodal, Area ve Godoy (2005) tarafından tanımlanan iki ayrık değişkenli ortogonal polinomlar, ortonormal polinom aileleri için vektör-matris formunda rekürans bağıntıları, kısmi fark denklemleri, birbirleri arasındaki geçiş bağıntıları incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak bazı temel tanım ve kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1 $\Gamma(z)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu, $\text{Re}(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} h^{z-1} e^{-h} dh$$

birinci çeşit genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır. $u = h^z$, $e^{-h} dh = dv$ denilip kısmi integrasyon uygulanırsa Γ fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} h^z e^{-h} dh = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h^z e^{-h} dh \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-h^z e^{-h}) \Big|_0^t + z \int_0^{\infty} h^{z-1} e^{-h} dh \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

özellikliğini gerçeklediği görülür (Rainville 1960).

Tanım 2.2 η reel ya da kompleks bir sayı, s sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\eta)_s &= \frac{\Gamma(\eta+s)}{\Gamma(\eta)} = \eta(\eta+1)\dots(\eta+s-1) \quad , \quad s = 1, 2, \dots, \\ (\eta)_0 &= 1 \end{aligned}$$

ile tanımlanan $(\eta)_s$ ifadesine ‘*Pochhammer Sembolü*’ denir (Rainville 1960).

Tanım 2.3 ${}_rF_s$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu, α_i ($i = 1, 2, \dots, r$),

β_j ($j = 1, 2, \dots, s$) parametreleri reel ya da kompleks parametreler ve $\beta_j \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_r \\ \beta_1, \dots, \beta_s \end{matrix} ; x \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_l \dots (\alpha_r)_l}{(\beta_1)_l \dots (\beta_s)_l} \frac{x^l}{l!}$$

formunda tanımlanır (Rainville 1960) ve bu seri

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{tüm } x\text{'ler için yakınsaktır} & , r \leq s \text{ için} \\ |x| < 1 \text{ için yakınsaktır} & , r = s + 1 \text{ için} \\ \text{tüm } x \neq 0\text{'ler için ıraksaktır,} & r > s + 1 \text{ için} \end{array} \right.$$

Burada $(\alpha)_l$ Pochhammer sembolünü göstermektedir.

Sonuç 2.1 ${}_rF_s$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu $r = 2$ ve $s = 1$ özel durumunda

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2 \\ \beta_1 \end{matrix}; x \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_l (\alpha_2)_l}{(\beta_1)_l} \frac{x^l}{l!} \quad , \quad |x| < 1$$

${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonuna indirgenir. $r = 3$, $s = 2$ durumunda

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2 \end{matrix}; x \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_l (\alpha_2)_l (\alpha_3)_l}{(\beta_1)_l (\beta_2)_l} \frac{x^l}{l!} \quad , \quad |x| < 1$$

hipergeometrik fonksiyonunu, $r = 2$ ve $s = 0$ özel durumunda ise

$${}_2F_0 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2 \\ - \end{matrix}; x \right) = \sum_{l=0}^{\infty} (\alpha_1)_l (\alpha_2)_l \frac{x^l}{l!}$$

hipergeometrik fonksiyonunu verir.

Tanım 2.4 $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ ‘ileri fark operatörü’

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$$

şeklinde tanımlanır. g fonksiyonu için ∇ ‘geri fark operatörü’ ise

$$\nabla g(x) = g(x) - g(x-1)$$

formunda ifade edilir.

Δ ve ∇ fark operatörleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
i) \quad \Delta g(x) &= g(x+1) - g(x) = \nabla g(x+1) \\
ii) \quad \Delta \nabla g(x) &= \Delta [g(x) - g(x-1)] \\
&= g(x+1) - g(x) - [g(x) - g(x-1)] \\
&= g(x+1) - 2g(x) + g(x-1) = \nabla \Delta g(x) \\
iii) \quad \Delta [g(x)f(x)] &= g(x+1)f(x+1) - g(x)f(x) \\
&= g(x+1)f(x+1) - g(x)f(x+1) + g(x)f(x+1) - g(x)f(x) \\
&= f(x+1)[g(x+1) - g(x)] + g(x)[f(x+1) - f(x)] \\
&= f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).
\end{aligned}$$

Tanım 2.5 İki değişkenli $h(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre birinci ileri farkı ve birinci geri farkı

$$\begin{aligned}
\Delta_1 h(x, y) &= h(x+1, y) - h(x, y) \\
\nabla_1 h(x, y) &= h(x, y) - h(x-1, y)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindedir. y değişkenine göre birinci ileri farkı ve birinci geri farkı ise

$$\begin{aligned}
\Delta_2 h(x, y) &= h(x, y+1) - h(x, y) \\
\nabla_2 h(x, y) &= h(x, y) - h(x, y-1)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

formundadır.

3. TEK DEĞİŞKENLİ VE İKİ DEĞİŞKENLİ JACOBI POLİNOMLARI

Bu bölümde tek değişkenli Jacobi ortogonal polinomları ile üçgensel bölgede ortogonal olan iki değişkenli Jacobi polinomlarının tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Öncelikle tek değişkenli polinomun tanımı ile başlayalım.

Tanım 3.1 $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $b_k \neq 0$ olmak üzere $b_0, b_1, \dots, b_k$ ler sabit sayılar olsun.

$$p_k(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

formunda tanımlanan $p_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir ‘*polinom fonksiyon*’ denir. Buradaki k sayısı polinomun derecesini, $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ sayıları da polinomun katsayılarını gösterir. Eğer $b_k = 1$ ise $p_k(x)$ polinomu ‘*monik polinom*’ olarak adlandırılır.

Tanım 3.2 F cismi reel sayılar cismi, X uzayı reel katsayılı polinomların uzayı olsun. Standart toplama ve çarpma işlemlerine göre $(X, +, \cdot)$ lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım, $\rho(x)$ fonksiyonu $A \subset \mathbb{R}$ aralığında pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$\langle g, h \rangle = \int_A g(x) h(x) \rho(x) dx$$

ile tanımlanır. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow F$ iç çarpım fonksiyonu aşağıdaki özellikleri gerçekler.

- i) $\langle g, h \rangle = \langle h, g \rangle$
- ii) $\langle g + h, f \rangle = \langle g, f \rangle + \langle h, f \rangle$
- iii) $\langle ag, h \rangle = a \langle g, h \rangle$ (a sabit)
- iv) $\langle g, g \rangle \geq 0$ ve $\langle g, g \rangle = 0 \Leftrightarrow g = 0$

Tanım 3.3 $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\rho(x)$, A da tanımlı pozitif integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $k, l \in \mathbb{N}_0$ ve $k \neq l$ için

$$\langle \psi_k, \psi_l \rangle = \int_A \psi_k(x) \psi_l(x) \rho(x) dx = 0 \quad (3.1)$$

gerçekleniyorsa $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ polinom sistemine $A \subset \mathbb{R}$ aralığında $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistemdir denir. $k = l$ durumunda $\psi_k(x)$ polinomlarının normu

$$\|\psi_k\| = \langle \psi_k, \psi_k \rangle^{1/2} = \left(\int_A \psi_k^2(x) \rho(x) dx \right)^{1/2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

ile verilir (Hochstadt 1971). Eğer $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ polinom sistemi için

$$\langle \psi_k, \psi_l \rangle = \int_A \psi_k(x) \psi_l(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

sağlanıyorsa, bu durumda $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ polinom sistemi ortonormal bir sistemdir denir.

Teorem 3.1 $A \subset \mathbb{R}$ aralığında $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ polinom sisteminin $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter şart

$$\int_A \psi_k(x) \rho(x) x^l dx = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k-1 \quad (3.2)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Hochstadt 1971).

İspat. $(\Rightarrow)$ $\psi_k(x)$ ve $\psi_l(x)$ polinomlarının A aralığında $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğunu kabul edelim. Buradan $k \neq l$ için

$$\int_A \psi_k(x) \psi_l(x) \rho(x) dx = 0 \quad (3.3)$$

sağlanır. Diğer yandan, x^l monomiali $\psi_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, l$ polinomlarının lineer birleşimi olarak

$$x^l = c_0 \psi_0(x) + c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \dots + c_l \psi_l(x) = \sum_{m=0}^l c_m \psi_m(x) \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. (3.4) ifadesinin (3.2) de yerine konulmasıyla $0 \leq m \leq l < k$ için

$$\begin{aligned} \int_A \psi_k(x) \rho(x) x^l dx &= \int_A \psi_k(x) \rho(x) \left[\sum_{m=0}^l c_m \psi_m(x) \right] dx \\ &= \sum_{m=0}^l c_m \int_A \psi_k(x) \psi_m(x) \rho(x) dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $0 \leq m < k$ olmak üzere $\psi_k(x)$ ve $\psi_m(x)$ polinomlarının ortogonal olduğu dikkate alınrsa

$$\int_A \psi_k(x) \rho(x) x^l dx = 0 \quad , \quad l = 0, 1, \dots, k-1$$

sağlanır.

($\Leftarrow$) Şimdi de $\psi_k(x)$ polinomları için (3.2) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim ve (3.3) ortogonalite bağıntısının gerçekleştiğini gösterelim. $0 \leq l < k$ olsun. $\psi_l(x)$, l yinci dereceden bir polinom olduğundan

$$\psi_l(x) = \sum_{m=0}^l c_m x^m \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) ortogonalite bağıntısında (3.5) eşitliği yerine yazılır ve (3.2) bağıntısı dikkate alınrsa

$$\begin{aligned} \int_A \psi_k(x) \psi_l(x) \rho(x) dx &= \int_A \psi_k(x) \left[\sum_{m=0}^l c_m x^m \right] \rho(x) dx \\ &= \sum_{m=0}^l c_m \int_A \psi_k(x) x^m \rho(x) dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

(3.1) iç çarpımına göre ortogonal olan $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ polinomların sonsuz bir dizisi, ikinci basamaktan

$$\zeta(x) y'' + \xi(x) y' + \varsigma_k y = 0 \quad (3.6)$$

diferensiyel denkleminin ς_k özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonları olarak karşımıza çıkar. Burada

$$\zeta(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad \xi(x) = dx + e \quad , \quad \varsigma_k = -k(d + (k-1)a) \quad (3.7)$$

formundadır. Bochner (1929) göstermiştir ki (3.6) diferensiyel denkleminin ortogonal polinom çözümleri $P_k^{(\gamma, \eta)}(x)$ Jacobi polinomları, $L_k^{(\gamma)}(x)$ Laguerre polinomları ve $H_k(x)$ Hermite polinomlarıdır. Bu tez içerisinde Jacobi polinom ailesi ve özellikleri diğer bölümlerde karşımıza çıkacağından bu kısımda sadece $P_k^{(\gamma, \eta)}(x)$ Jacobi ortogonal polinomlarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

3.1 Tek Değişkenli Jacobi Polinomları

$P_k^{(\gamma, \eta)}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) Jacobi ortogonal polinomları

$$P_k^{(\gamma, \eta)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1-x)^{-\gamma} (1+x)^{-\eta} \frac{d^k}{dx^k} \left\{ (1-x)^{k+\gamma} (1+x)^{k+\eta} \right\} \quad (3.8)$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır. Bu polinomlar ${}_3F_2$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden de aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$P_k^{(\gamma, \eta)}(x) = \frac{(\gamma+1)_k}{k!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, & k+\gamma+\eta+1 \\ & \gamma+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right)$$

Bu polinomlar $[-1, 1]$ aralığında

$$\rho(x) = (1-x)^\gamma (1+x)^\eta, \quad (\gamma, \eta > -1)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani $k, l \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x)^\gamma (1+x)^\eta P_k^{(\gamma, \eta)}(x) P_l^{(\gamma, \eta)}(x) dx \\ &= \frac{2^{\gamma+\eta+1} \Gamma(\gamma+k+1) \Gamma(\eta+k+1)}{k! (\gamma+\eta+2k+1) \Gamma(\gamma+\eta+k+1)} \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

ortogonalite bağıntısı gerçekleşir (Rainville 1960). Burada δ_{kl} Kronecker delta'yı gösterir ve

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

ile tanımlanır. $P_k^{(\gamma, \eta)}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) Jacobi polinomları ikinci basamaktan

$$(1-x^2) y'' + (\eta - \gamma - (\eta + \gamma + 2)x) y' + k(k + \gamma + \eta + 1) y = 0$$

diferensiyel denkleminin özfonksiyonlarıdır.

Şimdi de bir bölgede iki değişkenli ortogonal polinomların tanımını verelim.

Tanım 3.4 x ve y bağımsız değişkenleri için monomiallerin kümesi

$$\{x^{m-l} y^l, \quad m = 0, 1, \dots; \quad l = 0, 1, \dots, m\}$$

olsun. $\{d_{ml}\}$, $m = 0, 1, \dots; \quad l = 0, 1, \dots, m$ reel sabitlerinin $x^{m-l} y^l$ monomialleriyle çarpılıp toplanmasıyla elde edilen m -yinci dereceden iki değişkenli bir polinom

$d_{ml} \neq 0$ olmak üzere

$$Q_{ml}(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^k d_{ks}^{(m,l)} x^{k-s} y^s + \sum_{s=0}^l d_{ms}^{(m,l)} x^{m-s} y^s$$

formunda tanımlanır. Burada m indisi, x ve y değişkenlerine göre polinomun toplam derecesini, l indisi de polinomun y değişkeninin en yüksek kuvvetini gösterir. Bu polinom (m, l) - yinci basamaktan bir polinom olarak adlandırılır ve $d_{ml}^{(m,l)}$ katsayısı bu polinomun başkatsayısıdır (Suetin 1988, Aktaş 2007).

Tanım 3.5 xy -düzleminde basit kapalı bir C eğrisiyle sınırlanan basit irtibath, sonlu bir bölge Ω olsun.

$$0 < \iint_{\Omega} \varpi(x, y) dx dy < \infty$$

koşulunu sağlayan negatif olmayan $\varpi(x, y)$ fonksiyonuna Ω bölgesinde bir ‘ağırlık fonksiyonu’ denir.

Teorem 3.2 (m, l) - yinci basamaktan bir polinom $Q_{ml}(x, y)$ olsun. $Q_{ml}(x, y)$ polinomunun, bir Ω bölgesinde tanımlı $\varpi(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter şart $Q_{ml}(x, y)$ polinomunun düşük basamaktan $Z_{rs}(x, y)$ polinomuna ortogonal olmasıdır. Yani,

$$\iint_{\Omega} \varpi(x, y) Q_{ml}(x, y) Z_{rs}(x, y) dx dy = 0, \quad (r, s) < (m, l)$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada $(r, s) < (m, l)$ gösterimi

$$(r, s) < (m, l) = \begin{cases} r = m, s < l \\ r < m \end{cases}$$

ile ifade edilir (Suetin 1988).

1975 yılında T.H. Koornwinder (1975) tek değişkenli ortogonal polinomlar yardımıyla iki değişkenli ortogonal polinomlar elde etmek için bir metot vermiş ve bu metot yardımıyla çeşitli iki değişkenli ortogonal polinom aileleri tanımlamıştır. Bu metodu aşağıda verelim.

Teorem 3.3 (Koornwinder Metodu) $\rho_1(x)$ ve $\rho_2(y)$ fonksiyonları sırasıyla (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) aralığında tanımlı birer ağırlık fonksiyonu olsunlar. $\sigma(x)$ fonksiyonu

da (a_1, b_1) aralığında r -yinci ($r = 0, 1, \dots$) dereceden bir polinom ya da $2r$ -yinci ($r = 1/2, 1, 3/2, \dots$) dereceden bir polinomun karekökü olsun ve ayrıca aşağıdaki durumlardan birini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. $\sigma(x)$ fonksiyonunun polinom olmadığı durumda $a_2 = -b_2$ olsun ve $\rho_2(y)$ fonksiyonu $(-b_2, b_2)$ simetrik aralığında çift fonksiyon olsun. $l \geq 0$ için $p_m(x; l)$, $m = 0, 1, \dots$ polinomları (a_1, b_1) aralığında $\sigma^{2l+1}(x)\rho_1(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal ve $q_m(y)$ polinomları da (a_2, b_2) aralığında $\rho_2(y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olsunlar. Bu durumda,

$$Q_{m,l}(x, y) = p_{m-l}(x; l)\sigma^l(x)q_l\left(\frac{y}{\sigma(x)}\right), \quad 0 \leq l \leq m \quad (3.10)$$

olarak tanımlanan iki değişkenli polinom ailesi

$$\Omega = \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \quad a_2 \sigma(x) \leq y \leq b_2 \sigma(x)\}$$

bölgesinde

$$\varpi(x, y) = \rho_1(x)\rho_2\left(\frac{y}{\sigma(x)}\right)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani $(r, s) \neq (m, l)$ için

$$\langle Q_{m,l}, Q_{r,s} \rangle = \iint_{\Omega} Q_{m,l}(x, y)Q_{r,s}(x, y)\varpi(x, y)dxdy = 0$$

iç çarpımı sıfırdır (Koornwinder 1975).

İspat. (3.10) ile verilen $Q_{m,l}(x, y)$ polinomlarının tanımı dikkate alınır ve

$\frac{y}{\sigma(x)} = t(x)$ değişken değiştirmesi yapılırsa $(r, s) \neq (m, l)$ için

$$\begin{aligned} \langle Q_{m,l}, Q_{r,s} \rangle &= \iint_{\Omega} Q_{m,l}(x, y)Q_{r,s}(x, y)\varpi(x, y)dxdy \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2 \sigma(x)}^{b_2 \sigma(x)} p_{m-l}(x; l)q_l\left(\frac{y}{\sigma(x)}\right)\sigma^{l+s}(x) \\ &\quad \times p_{r-s}(x; s)q_s\left(\frac{y}{\sigma(x)}\right)\rho_1(x)\rho_2\left(\frac{y}{\sigma(x)}\right)dydx \\ &= \int_{x=a_1}^{b_1} p_{m-l}(x; l)p_{r-s}(x; s)\sigma^{l+s+1}(x)\rho_1(x)dx \\ &\quad \times \int_{t=a_2}^{b_2} q_l(t)q_s(t)\rho_2(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir. ■

3.2 Üçgensel Bölgede İki Değişkenli Jacobi Polinomları

1975 yılında Koornwinder tek değişkenli ortogonal polinomlardan iki değişkenli ortogonal polinomlar elde etmek için genel bir metot vermiş ve üçgensel bölgedeki ortogonal polinomları da içine alan çeşitli iki değişkenli polinom aileleri tanımlamıştır (Koornwinder 1975). Yukarıdaki teoremden $\rho_1(x) = (1-x)^{\eta+\delta-1}x^{\gamma-1/2}$, $\rho_2(y) = (1-y)^{\delta-1/2}y^{\eta-1/2}$, $\sigma(x) = 1-x$, $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = (0, 1)$ seçilirse $\gamma, \eta, \delta > -1/2$ için üçgensel bölgedeki iki değişkenli Jacobi polinomları

$$P_{m,l}^{(\gamma,\eta,\delta)}(x,y) = P_{m-l}^{(\eta+\delta+2l,\gamma-1/2)}(2x-1)(1-x)^l P_l^{(\delta-1/2,\eta-1/2)}\left(\frac{2y}{1-x} - 1\right),$$
$$(0 \leq l \leq m ; m, l \in \mathbb{N}_0)$$

formunda tanımlanır. Bu polinom ailesi,

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$

bölgesinde

$$\varpi(x,y) = x^{\gamma-1/2}y^{\eta-1/2}(1-x-y)^{\delta-1/2}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır (Koornwinder 1975, Dunkl ve Xu 2014).

4. AYRIK TEK DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, tek değişkenli ayrik ortogonal polinomların temel özellikleri incelenecek ve ayrik değişkenli ortogonal polinom aileleri verilecektir.

4.1 Hipergeometrik Tipten Fark Denklemini

$\zeta(x)$ ve $\xi(x)$ polinomları sırasıyla en fazla ikinci dereceden ve birinci dereceden polinomlar ve ς bir sabit olmak üzere

$$\zeta(x)y'' + \xi(x)y' + \varsigma y = 0 \quad (4.1)$$

ikinci basamaktan diferensiyel denklemi hipergeometrik tipten bir denklem olarak adlandırılır. Böylesi bir denklemin çözümleri Jacobi, Laguerre ve Hermite polinomlarıdır. Hipergeometrik tipten bir denklemin çözümleri de hipergeometrik tipten fonksiyonlardır. (4.1) diferensiyel denkleminden fark denklemini elde etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + O(h^2) \\ y'' &= \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + O(h^2) \end{aligned}$$

açılımları (4.1) diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa ve uygun değişken değiştirmeler yapılsa

$$\tilde{\zeta}(x)\Delta\nabla y(x) + \tilde{\xi}(x)\Delta y(x) + \varsigma y(x) = 0 \quad (4.2)$$

fark denklemini elde edilir. Burada $\tilde{\zeta}(x) = \zeta(x) - \frac{\xi(x)}{2}$, $\tilde{\xi}(x) = \xi(x)$ biçimindedir ve bu polinomlar sırasıyla en fazla ikinci ve birinci dereceden polinomlardır. (4.2) eşitliğindeki fark denkleminin her iki tarafına ileri fark operatörü uygulanarak kolaylıkla görülür ki $r_l(x) = \Delta^l y(x)$ ($l = 0, 1, \dots$) fonksiyonu da

$$\tilde{\zeta}(x)\Delta\nabla r_l(x) + \tilde{\xi}_l(x)\Delta r_l(x) + \beta_l r_l(x) = 0 \quad (4.3)$$

formunda bir hipergeometrik tipten fark denkleminin çözümüdür. Burada

$\tilde{\xi}_l(x) = \tilde{\xi}_{l-1}(x+1) + \Delta \tilde{\zeta}(x)$, $\tilde{\xi}_0(x) = \tilde{\xi}(x)$ ve $\beta_l = \varsigma + l\tilde{\xi}' + \frac{1}{2}l(l-1)\tilde{\zeta}''(x)$ ($l = 0, 1, \dots$) şeklindedir. Tersine $\beta_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, l-1$) için (4.3) fark denkleminin her bir çözümü $r_l(x) = \Delta^l y(x)$ formunda yazılabilir. $\rho(x)$ fonksiyonu

$$\Delta \left[\tilde{\zeta}(x) \rho(x) \right] = \tilde{\xi}(x) \rho(x) \quad (4.4)$$

eşitliğini sağlarsa (4.2) denklemi

$$\Delta \left[\tilde{\zeta}(x) \rho(x) \nabla y(x) \right] + \varsigma \rho(x) y(x) = 0 \quad (4.5)$$

self adjoint formda yazılabilir. Benzer şekilde (4.3) denklemi self adjoint formda

$$\Delta \left[\tilde{\zeta}(x) \rho_l(x) \nabla r_l(x) \right] + \beta_l \rho_l(x) r_l(x) = 0 \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. (4.5) ve (4.6) eşitliklerinden

$$\rho_l(x) = \tilde{\xi}(x+1) \rho_{l-1}(x+1) \quad , \quad \rho_0(x) = \rho(x) \quad (4.7)$$

olup bunun ardışık olarak tekrarlanmasıyla $\rho_l(x)$ ve $\rho(x)$ fonksiyonları arasında

$$\rho_l(x) = \rho(x+l) \prod_{m=1}^l \tilde{\xi}(x+m)$$

eşitliği gerçekleşir. (4.6) denklemi ve (4.7) eşitliği kullanılarak

$$\rho_l(x) r_l(x) = -\frac{1}{\beta_l} \nabla \left[\rho_{l+1}(x) r_{l+1}(x) \right]$$

elde edilir. $l < k$ için bu bağıntının tekrarlanmasıyla

$$\rho_l r_l = \frac{D_l}{D_k} \nabla^{k-l} (\rho_k r_k)$$

bulunur. Burada D_l katsayısı

$$D_l = (-1)^l \prod_{m=0}^{l-1} \beta_m \quad , \quad D_0 = 1$$

formundadır. $y = y_k(x)$ için $r_k(x)$ sabit olacağından

$$r_{lk}(x) = \Delta^l y_k(x) = \frac{D_{lk} E_k}{\rho_l(x)} \nabla^{k-l} [\rho_k(x)] \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada

$$D_{lk} = \frac{k!}{(k-l)!} \prod_{m=0}^{l-1} (\tilde{\zeta}' + \frac{k+m-1}{2} \tilde{\zeta}'') \quad , \quad D_{0k} = 1, \quad l \leq k,$$

$$E_k = \frac{\Delta^k y_k(x)}{D_{kk}} = \frac{1}{D_{kk}} y_k^{(k)}(x)$$

şeklindedir. (4.8) eşitliğinde $l = 0$ alınır, (4.2) denkleminin $y_k(x)$ çözümü

$$y_k(x) = \frac{E_k}{\rho(x)} \nabla^k [\rho_k(x)] \quad (4.9)$$

olarak elde edilir. Bu formül ‘Rodrigues formülü’ olarak adlandırılır (Nikiforov vd. 1991, Ayata 2012).

4.2 Ayırık Değişkenli Klasik Ortogonal Polinomlar için Ortogonalite Özelliği

(4.5) denkleminin iki farklı çözümü $y_k(x)$ ve $y_l(x)$ polinomları olsunlar. Bu polinomlar sırasıyla

$$\Delta [\tilde{\zeta}(x) \rho(x) \nabla y_k(x)] + \varsigma_k \rho(x) y_k(x) = 0, \quad (4.10)$$

$$\Delta [\tilde{\zeta}(x) \rho(x) \nabla y_l(x)] + \varsigma_l \rho(x) y_l(x) = 0 \quad (4.11)$$

denklemlerini gerçekler. (4.10) denklemi $y_l(x)$ ile (4.11) denklemi $y_k(x)$ ile çarpılıp bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$\Delta \{ \tilde{\zeta}(x) \rho(x) [y_l(x) \nabla y_k(x) - y_k(x) \nabla y_l(x)] \} = (\varsigma_l - \varsigma_k) \rho(x) y_l(x) y_k(x)$$

elde edilir. Burada $x = x_i$, $x_{i+1} = x_i + 1$ alınıp $a \leq x_i \leq b-1$ için her iki tarafın toplamı alınır ve $y_l(x) \nabla y_k(x) - y_k(x) \nabla y_l(x)$ ifadesinin x 'e bağlı bir polinom olduğu düşünülürse,

$$\tilde{\zeta}(x) \rho(x) x^m \big|_{x=a, b} = 0 \quad , \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.12)$$

sınır koşulları altında (4.5) denkleminin çözümlerinin $[a, b-1]$ üzerinde $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğu görülür. Yani,

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} y_l(x_i) y_k(x_i) \rho(x_i) = \delta_{kl} u_k^2 \quad (4.13)$$

bağıntısı gerçekleşir. Burada δ_{kl} Kronecker deltadır ve

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada genellikle $a \leq x_i \leq b - 1$ için $\rho(x_i) > 0$ ek koşulunun sağlandığı kabul edilir. (4.13) bağıntısını sağlayan $y_k(x)$ polinomları ayrık değişkenli klasik ortogonal polinomlar olarak adlandırılır. $k = l$ durumunda (4.13) eşitliği hesaplanırsa $y_k(x)$ polinomlarının u_k^2 kare normu

$$u_k^2 = (-1)^k D_{kk} E_k^2 \rho_{N-1}(a) \prod_{m=k}^{N-2} \left(\frac{1 - \tilde{\zeta}'' / (2\tilde{\zeta}_m')}{\tilde{\zeta}(x_m^*)} \right),$$

$$N = b - a, \quad \tilde{\zeta}_m' = \tilde{\zeta}' + m\tilde{\zeta}''$$

olarak hesaplanır. Burada, $x_m^*, \tilde{\zeta}_m(x) = 0$ denkleminin bir köküdür (Nikiforov vd. 1991, Ayata 2012).

4.3 Ayrık Değişkenli Klasik Ortogonal Polinomlar için Rekürans Formülü

(4.2) fark denkleminin çözümü olan $y_k(x)$ polinomu

$$y_k(x) = a_k x^k + b_k x^{k-1} + \dots$$

açılımına sahip olsun. Ayrık değişkenli $y_k(x)$ ortogonal polinomu

$$x y_k(x) = \varepsilon_k y_{k+1}(x) + \vartheta_k y_k(x) + \nu_k y_{k-1}(x) \quad (4.14)$$

rekürans formülünü gerçekler. Burada $\varepsilon_k, \vartheta_k$ ve ν_k katsayıları $\varepsilon_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}$,

$$\vartheta_k = \frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \nu_k = \frac{a_{k-1}}{a_k} \frac{u_k^2}{u_{k-1}^2} \text{ formundadır (Nikiforov vd. 1991).}$$

(4.14) bağıntısının her iki yanında $y_k(x)$ polinomunun açık ifadesi yazılıp x^{k+1} in katsayıları karşılaştırılırsa $\varepsilon_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}$ elde edilir. Uygun d_i katsayıları için

$$x y_k(x) - \varepsilon_k y_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^k d_i y_i(x)$$

eşitliği sağlanır. $y_k(x)$ polinomlarının ortogonallik özelliği kullanılırsa

$$d_j = \frac{\sum_{x_i=a}^b x_i y_k(x_i) y_j(x_i) \rho(x_i)}{\sum_{x_i=a}^b y_j^2(x_i) \rho(x_i)} = \frac{\sum_{x_i=a}^b x_i y_k(x_i) y_j(x_i) \rho(x_i)}{u_j^2} \quad , \quad j \leq k$$

elde edilir. $xy_j(x)$ polinomu en fazla $(k-1)$ -inci dereceden polinom olduğundan $d_0 = d_1 = \dots = d_{k-2} = 0$ olduğu görülür. Şimdi de $d_{k-1} = \nu_k$ ve $d_k = \vartheta_k$ olarak alıp bu katsayıları hesaplayalım.

$$\begin{aligned} x_i y_{k-1}(x_i) &= a_{k-1} x_i^k + b_{k-1} x_i^{k-1} + \dots \\ &= \frac{a_{k-1}}{a_k} \left[a_k x_i^k + b_{k-1} \frac{a_k}{a_{k-1}} x_i^{k-1} + \dots \right] \\ &= \frac{a_{k-1}}{a_k} \left[y_k(x_i) + \sum_{j=0}^{k-1} e_j y_j(x_i) \right] \end{aligned}$$

açılımı

$$\nu_k = d_{k-1} = \frac{\sum_{x_i=a}^b x_i y_k(x_i) y_{k-1}(x_i) \rho(x_i)}{u_{k-1}^2}$$

ifadesinin payında dikkate alınır ve ortogonallik özelliği kullanılırsa $\nu_k = \frac{a_{k-1}}{a_k} \frac{u_k^2}{u_{k-1}^2}$ olarak bulunur. ε_k , ν_k açılımları ve polinomların açık ifadeleri (4.14) eşitliğinde yerine yazılıp x^k nın katsayıları eşitlenirse $\vartheta_k = \frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$ elde edilir.

4.4 Hahn, Kravchuk, Meixner ve Charlier Polinomları

Bölüm 4.1, 4.2 ve 4.3' de hipergeometrik tipteki fark denkleminin ayrık değişkenli çözümleri, bu çözümlerin Rodrigues formülü yardımıyla gösterimleri, belirli koşullar altında ortogonallik özellikleri incelenmiş ve üç terimli rekürans formülü verilmiştir. Bu bölümde ise Bölüm 4.1 de elde edilen polinomların özel durumları olan Hahn, Kravchuk, Meixner, Charlier polinomları ve bu polinomların özellikleri incelenecektir (Nikiforov vd. 1991, Koekoek vd. 2010).

4.4.1 Hahn polinomları

(4.2) fark denkleminde $\tilde{\zeta}(x) = x(N + \eta - x)$, $\tilde{\xi}(x) = (\gamma + 1)(N - 1) - (\gamma + \eta + 2)x$,

$\varsigma_k = k (\gamma + \eta + k + 1)$ alınırsa

$$x(N + \eta - x) \Delta \nabla y(x) + ((\gamma + 1)(N - 1) - (\gamma + \eta + 2)x) \Delta y(x) + k(\gamma + \eta + k + 1)y(x) = 0$$

fark denkleminin çözümleri

$$h_k^{(\gamma, \eta)}(x; N) = \frac{(\eta + 1)_k (-1)^k}{(1 - N)_k \rho(x)} \nabla^k [\rho_k(x)]$$

Rodrigues formülü ile tanımlanan Hahn polinomları olarak bulunur. Burada ağırlık fonksiyonu

$$\rho(x) = \binom{\gamma + x}{x} \binom{\eta + N - x - 1}{N - x - 1} = \frac{(\gamma + 1)_x (\eta + 1)_{N-1-x}}{x!(N - 1 - x)!},$$

$(\gamma > -1, \eta > -1)$

formunda olup

$$\rho_k(x) = \frac{(\gamma + k + 1)_x (\eta + k + 1)_{N-1-x-k}}{x!(N - 1 - x - k)!}$$

şeklindedir. Bu polinomlar ${}_3F_2$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden de aşağıdaki şekilde ifade edilebilirler.

$$h_k^{(\gamma, \eta)}(x; N) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, & -x, & k + \gamma + \eta + 1 \\ & \gamma + 1, & 1 - N \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.15)$$

Bu polinomların ilk birkaç terimi aşağıdaki formda verilir.

$$\begin{aligned} h_0^{(\gamma, \eta)}(x; N) &= 1, \\ h_1^{(\gamma, \eta)}(x; N) &= 1 + \frac{(\gamma + \eta + 2)}{(\gamma + 1)(1 - N)} x, \\ h_2^{(\gamma, \eta)}(x; N) &= 1 + \frac{(\gamma + \eta + 3)[(\gamma + 2)(2N - 3) + \eta + 2]}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)(1 - N)(N - 2)} x \\ &\quad + \frac{(\gamma + \eta + 3)(\gamma + \eta + 4)}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)(N - 1)(N - 2)} x^2 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$h_k^{(\gamma, \eta)}(x, N)$ Hahn polinomları $\gamma, \eta > -1$ için $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır ve (4.13) ortogonalite bağıntısına göre

$$\begin{aligned} &\sum_{x_i=0}^{N-1} h_k^{(\gamma, \eta)}(x_i; N) h_l^{(\gamma, \eta)}(x_i; N) \rho(x_i) \\ &= \frac{(k + \gamma + \eta + 1)_N (\eta + 1)_k k!}{(2k + \gamma + \eta + 1) (\gamma + 1)_k (N - k)_k (N - 1)!} \delta_{kl} \end{aligned}$$

19

ortogonalite bağıntısını sağlar (Rodal vd. 2005, Koekoek vd. 2010).

Hahn polinomları için a_k ve b_k katsayıları

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(\gamma + \eta + k + 1)_k}{(\gamma + 1)_k (1 - N)_k}, \\ b_k &= -\frac{k(\gamma + \eta + k + 1)_{k-1}}{(\gamma + 1)_k (1 - N)_k} \left[(\gamma + 1)(N - 1) + \frac{k-1}{2}(\eta - \gamma + 2N - 2) \right] \end{aligned}$$

olmak üzere, Hahn polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı (4.14) bağıntısından

$$\begin{aligned} xh_k^{(\gamma, \eta)}(x; N) &= -\frac{(k + \gamma + 1)(\gamma + \eta + k + 1)(N - k - 1)}{(\gamma + \eta + 2k + 1)(\gamma + \eta + 2k + 2)}h_{k+1}^{(\gamma, \eta)}(x) \\ &+ \left\{ \frac{(k + \gamma + 1)(\gamma + \eta + k + 1)(N - k - 1)}{(\gamma + \eta + 2k + 1)(\gamma + \eta + 2k + 2)} + \frac{k(\gamma + \eta + k + N)(k + \eta)}{(\gamma + \eta + 2k)(\gamma + \eta + 2k + 1)} \right\} h_k^{(\gamma, \eta)}(x) \\ &- \frac{k(\gamma + \eta + k + N)(k + \eta)}{(\gamma + \eta + 2k)(\gamma + \eta + 2k + 1)}h_{k-1}^{(\gamma, \eta)}(x). \end{aligned}$$

formunda elde edilir (Nikiforov vd. 1991, Koekoek vd. 2010).

Teorem 4.1 $P_k^{(\gamma, \eta)}$ Jacobi polinomları ile $h_k^{(\gamma, \eta)}(x; N)$ Hahn polinomları arasında

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_k^{(\gamma, \eta)}(Nx; N) = \frac{P_k^{(\gamma, \eta)}(1 - 2x)}{P_k^{(\gamma, \eta)}(1)} = \frac{k!P_k^{(\gamma, \eta)}(1 - 2x)}{(\gamma + 1)_k}$$

limit bağıntısı gerçekleşir.

İspat. $h_k^{(\gamma, \eta)}(x; N)$ Hahn polinomlarının ve $P_k^{(\gamma, \eta)}$ Jacobi polinomlarının hipergeometrik fonksiyon açılımları dikkate alınarak

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} h_k^{(\gamma, \eta)}(Nx; N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (-Nx)_i (k + \gamma + \eta + 1)_i}{(\gamma + 1)_i (1 - N)_i i!} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (k + \gamma + \eta + 1)_i}{(\gamma + 1)_i i!} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-Nx)_i}{(1 - N)_i} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (k + \gamma + \eta + 1)_i}{(\gamma + 1)_i i!} (x)^i = \frac{P_k^{(\gamma, \eta)}(1 - 2x)}{P_k^{(\gamma, \eta)}(1)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.4.2 Meixner polinomları

(4.2) fark denkleminde $\zeta(x) = x$, $\xi(x) = \tau\varrho - x(1 - \varrho)$, $\varsigma_k = k(1 - \varrho)$ alınır

$$x\Delta\nabla y(x) + (\tau\varrho - x(1 - \varrho))\Delta y(x) + k(1 - \varrho)y(x) = 0$$

fark denkleminin çözümleri

$$m_k^{(\tau, \varrho)}(x) = \frac{1}{\varrho^k \rho(x)} \nabla^k [\rho_k(x)]$$

Rodrigues formülü ile tanımlanan Meixner polinomlarıdır. Burada ağırlık fonksiyonu

$$\rho(x) = \frac{\varrho^x (\tau)_x}{\Gamma(x+1)} \quad , \quad (\tau > 0, 0 < \varrho < 1)$$

olup

$$\rho_k(x) = \frac{\varrho^{x+k} \Gamma(k + \tau + x)}{\Gamma(x+1) \Gamma(\tau)}$$

formundadır. Meixner polinomları aynı zamanda $0 < \varrho < 1$, $\tau > 0$ için ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

$$m_k^{(\tau, \varrho)}(x) = (\tau)_k {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, & -x \\ & \tau \end{matrix} \middle| 1 - \frac{1}{\varrho} \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

$m_k^{(\tau, \varrho)}(x)$ Meixner polinomları $0 < \varrho < 1$, $\tau > 0$ için $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır ve (4.13) ortogonallık bağıntısına göre

$$\sum_{x_i=0}^{\infty} m_k^{(\tau, \varrho)}(x_i) m_l^{(\tau, \varrho)}(x_i) \rho(x_i) = \frac{k! (\tau)_k}{\varrho^k (1 - \varrho)^\tau} \delta_{kl}$$

ortogonallık bağıntısını gerçekler. Bu polinomların ilk birkaç terimi aşağıdaki formda verilir.

$$\begin{aligned} m_0^{(\tau, \varrho)}(x) &= 1, \\ m_1^{(\tau, \varrho)}(x) &= \tau + \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)x, \\ m_2^{(\tau, \varrho)}(x) &= \tau(\tau + 1) + \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)x \left[2(\tau + 1) - \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)\right] + \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)^2 x^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Meixner polinomları için a_k ve b_k katsayıları

$$\begin{aligned} a_k &= \left(\frac{\varrho - 1}{\varrho} \right)^k, \\ b_k &= k \left(\tau + \frac{(k-1)(\varrho+1)}{2\varrho} \right) \left(\frac{\varrho - 1}{\varrho} \right)^{k-1} \end{aligned}$$

olmak üzere, Meixner polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı (4.14) bağıntısından

$$x m_k^{(\tau, \varrho)}(x) = \frac{\varrho}{\varrho - 1} m_{k+1}^{(\tau, \varrho)}(x) + \frac{k + \varrho(k + \tau)}{1 - \varrho} m_k^{(\tau, \varrho)}(x) + \frac{k(k - 1 + \tau)}{\varrho - 1} m_{k-1}^{(\tau, \varrho)}(x)$$

formunda elde edilir (Nikiforov vd. 1991).

4.4.3 Kravchuk polinomları

(4.2) fark denkleminde $\tilde{\zeta}(x) = x$, $\tilde{\xi}(x) = \frac{Nq - x}{1 - q}$, $\varsigma_k = \frac{k}{1 - q}$ alınırsa

$$x \Delta \nabla y(x) + ((Nq - x) / (1 - q)) \Delta y(x) + (k / (1 - q)) y(x) = 0$$

fark denkleminin çözümleri

$$k_k^{(q)}(x; N) = \frac{(-1)^k (1 - q)^k}{q^k \rho(x)} \nabla^k [\rho_k(x)]$$

Rodrigues formülü ile tanımlanan Kravchuk polinomları olarak karşımıza çıkar. Burada ağırlık fonksiyonu

$$\rho(x) = \frac{N! q^x (1 - q)^{N-x}}{\Gamma(x+1) \Gamma(N+1-x)}, \quad 0 < q < 1, \quad N \in \mathbb{N}$$

formunda olup

$$\rho_k(x) = \frac{N! q^{x+k} (1 - q)^{N-x-k}}{\Gamma(x+1) \Gamma(N+1-x-k)}$$

şeklindedir. Kravchuk polinomları aynı zamanda ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$k_k^{(q)}(x; N) = (-N)_k {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, & -x \\ & -N \end{matrix} \middle| \frac{1}{q} \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

Bu polinomların ilk birkaç terimi aşağıdaki formda verilir.

$$\begin{aligned} k_0^{(q)}(x; N) &= 1, \\ k_1^{(q)}(x; N) &= -N + \frac{1}{q}x, \\ k_2^{(q)}(x; N) &= N(N-1) - \frac{1}{q}x \left(2(N-1) + \frac{1}{q} \right) + \frac{1}{q^2}x^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$k_k^{(q)}(x; N)$ Kravchuk polinomları $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır ve (4.13) ortogonalite bağıntısına göre

$$\begin{aligned} &\sum_{x_i=0}^N k_k^{(q)}(x_i; N) k_l^{(q)}(x_i; N) \rho(x_i) \\ &= \frac{N!k!}{(N-k)!} q^{-k} (1-q)^k \delta_{kl} \end{aligned} \quad (4.16)$$

ortogonalite bağıntısını sağlar (Rodal vd. 2005, Nikiforov vd. 1991, Koekoek vd. 2010).

Kravchuk polinomları için a_k ve b_k katsayıları

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{q^k}, \\ b_k &= -\frac{Nkq + k(k-1)(1/2 - q)}{q^k} \end{aligned}$$

olmak üzere, Kravchuk polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı (4.14) bağıntısından

$$\begin{aligned} x k_k^{(q)}(x; N) &= q k_{k+1}^{(q)}(x; N) + (k + q(N - 2k)) k_k^{(q)}(x; N) \\ &\quad + (1 - q) k(N - k + 1) k_{k-1}^{(q)}(x; N) \end{aligned}$$

formunda elde edilir (Nikiforov vd. 1991, Koekoek vd. 2010).

Teorem 4.2 $h_k^{(\gamma, \eta)}(x; N)$ Hahn polinomları ile $k_k^{(q)}(x; N)$ Kravchuk polinomları arasında

$$\lim_{v \rightarrow \infty} h_k^{(qv, (1-q)v)}(x; N+1) = \frac{k_k^{(q)}(x; N)}{(-N)_k}$$

limit bağıntısı gerçekleşir.

İspat. $h_k^{(\gamma, \eta)}(x; N)$ Hahn polinomlarının (4.15) eşitliği ile verilen hipergeometrik fonksiyon açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\lim_{v \rightarrow \infty} h_k^{(qv, (1-q)v)}(x; N+1) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (-x)_i (k+v+1)_i}{(qv+1)_i (-N)_i i!} \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (-x)_i}{(-N)_i i!} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(k+v+1)_i}{(qv+1)_i} \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (-x)_i \left(\frac{1}{q}\right)^i}{(-N)_i i!} = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, & -x \\ & -N \end{matrix} \middle| \frac{1}{q} \right) \\
&= \frac{k_k^{(q)}(x; N)}{(-N)_k}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3 $m_k^{(\tau, \varrho)}(x)$ Meixner polinomları ile $k_k^{(q)}(x; N)$ Kravchuk polinomları arasında

$$m_k^{(-N, q/(q-1))}(x) = k_k^{(q)}(x; N)$$

bağıntısı sağlar.

İspat. $m_k^{(\tau, \varrho)}(x)$ Meixner polinomlarının hipergeometrik açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
m_k^{(-N, q/(q-1))}(x) &= (-N)_k \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (-x)_i}{(-N)_i i!} \left(\frac{1}{q}\right)^i \\
&= (-N)_k {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, & -x \\ & -N \end{matrix} \middle| \frac{1}{q} \right) = k_k^{(q)}(x; N)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.4.4 Charlier polinomları

(4.2) fark denkleminde $\tilde{\zeta}(x) = x$, $\tilde{\xi}(x) = \alpha - x$, $\varsigma_k = k$ alındığında

$$x \Delta \nabla y(x) + (\alpha - x) \Delta y(x) + ky(x) = 0$$

fark denkleminin çözümleri

$$c_k^{(\alpha)}(x) = \frac{\alpha^{-k}}{\rho(x)} \nabla^k [\rho_k(x)]$$

Rodrigues formülü ile tanımlanan Charlier polinomlarıdır. Burada ağırlık fonksiyonu

$$\rho(x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{\Gamma(x+1)} \quad , \quad (\alpha > 0)$$

olmak üzere

$$\rho_k(x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^{x+k}}{\Gamma(x+1)}$$

formundadır. Charlier polinomları aynı zamanda ${}_2F_0$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden

$$c_k^{(\alpha)}(x) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -k, -x \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{1}{\alpha} \right)$$

formunda ifade edilebilir. Bu polinom ailesinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} c_0^{(\alpha)}(x) &= 1 \quad , \\ c_1^{(\alpha)}(x) &= 1 - \frac{1}{\alpha}x \quad , \\ c_2^{(\alpha)}(x) &= 1 - \frac{1}{\alpha}x \left(\frac{1}{\alpha} + 2 \right) + \frac{1}{\alpha^2}x^2 \quad , \\ &\vdots \end{aligned}$$

$c_k^{(\alpha)}(x)$ Charlier polinomları $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır ve (4.13) ortogonallık bağıntısına göre

$$\sum_{x_i=0}^{\infty} c_k^{(\alpha)}(x_i) c_l^{(\alpha)}(x_i) \rho(x_i) = \frac{k!}{\alpha^k} \delta_{kl}$$

ortogonallık özelliği sağlanır.

Charlier polinomları için a_k ve b_k katsayıları

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(-\alpha)^k} \quad , \\ b_k &= -\frac{k[1 + (k-1)/2\alpha]}{(-\alpha)^{k-1}} \end{aligned}$$

olmak üzere, Charlier polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı (4.14) eşitliğinden

$$x c_k^{(\alpha)}(x) = -\alpha c_{k+1}^{(\alpha)}(x) + (k + \alpha) c_k^{(\alpha)}(x) - k c_{k-1}^{(\alpha)}(x)$$

formunda elde edilir (Nikiforov vd. 1991).

5. ÜÇGENSEL BÖLGEDE AYRIK İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

Tek değişkenli ortogonal polinomlar yardımıyla iki değişkenli ortogonal polinomlar elde etmek için Koornwinder' in tanımladığı metot Bölüm 3.1' de verilmişti. Bu bölümde ayrık değişkenli ortogonal polinomlar kullanılarak üçgensel bölgede ayrık iki değişkenli ortogonal polinomlar elde etmek için Koornwinder' in teoreminin bir analogu tanımlanacaktır. Ayrık değişkenli Hahn, Kravchuk, Meixner ve Charlier ortogonal polinomları yardımıyla ayrık iki değişkenli ortogonal polinomlar tanımlanıp bunların özellikleri incelenecektir (Rodal vd. 2005).

Teorem 5.1 $\{s_k(x; \lambda)\}$ polinom ailesi en az bir λ parametresine bağlı Hahn, Kravchuk, Meixner, Charlier ayrık değişkenli klasik ortogonal polinomlarının ailelerinden biri olsun ve polinom ailesi

$$\sum_{z=0}^{\lambda} s_{k_1}(z; \lambda) s_{l_1}(z; \lambda) g_1(z, \lambda) = \Theta_{k_1} g_3(\lambda - k_1) \delta_{k_1, l_1}$$

bağıntısını sağlasın. $\forall k_1 \in \mathbb{N}$ için $\{v_k(\lambda - k_1)\}$ polinom ailesi de

$$\sum_{\lambda=0}^b v_{k_2}(\lambda - k_1) v_{l_2}(\lambda - k_1) g_4(\lambda - k_1) = \Psi_{k_2} \delta_{k_2, l_2}$$

eşitliğini sağlayan ayrık değişkenli klasik ortogonal polinomların başka bir ailesi olarak verilsin. x ve y değişkenlerine göre $(k_1 + k_2)$ -inci dereceden iki değişkenli polinom

$$\Xi_{k_1, k_2}(x, y) = \varphi(x + y; k_1) s_{k_1}(x; x + y) v_{k_2}(x + y - k_1) \quad (5.1)$$

olarak tanımlansın. Burada $\varphi(x + y; k)$, $x + y$ 'ye göre k -inci dereceden bir polinom olmak üzere

$$\varphi(x + y; k_1) s_{k_1}(x; x + y)$$

çarpımı da x ve y değişkenlerine göre k_1 -inci dereceden bir polinomdur. (5.1) polinom ailesi

$$\Lambda(x, y) = g_1(x, x + y) g_2(x + y) = \frac{g_1(x, x + y) g_4(x + y - k_1)}{\varphi^2(x + y; k_1) g_3(x + y - k_1)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$\Omega_c = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq c\}$$

ayrık üçgensel bölgede ortogonaldır. Burada c negatif olmayan bir tamsayıdır. Bu metot $c = \infty$ durumu için de uygulanabilir.

İspat. $\Xi_{k_1, k_2}(x, y)$ polinomlarının tanımı dikkate alınarak

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^c \sum_{y=0}^{c-x} \Xi_{k_1, k_2}(x, y) \Xi_{l_1, l_2}(x, y) \Lambda(x, y) \\ &= \sum_{x=0}^c \sum_{y=0}^{c-x} \varphi(x+y; k_1) s_{k_1}(x; x+y) v_{k_2}(x+y-k_1) \\ & \quad \times \varphi(x+y; l_1) s_{l_1}(x; x+y) v_{l_2}(x+y-l_1) \Lambda(x, y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $z = x$ ve $\lambda = x + y$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^c \sum_{y=0}^{c-x} \Xi_{k_1, k_2}(x, y) \Xi_{l_1, l_2}(x, y) \Lambda(x, y) \\ &= \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda}}^c v_{k_2}(\lambda - k_1) v_{l_2}(\lambda - l_1) \varphi(\lambda; k_1) \varphi(\lambda; k_1) g_2(\lambda) \\ & \quad \times \sum_{z=0}^{\lambda} s_{k_1}(z; \lambda) s_{l_1}(z; \lambda) g_1(z, \lambda) \\ &= \Theta_{k_1} \delta_{k_1, l_1} \sum_{\lambda=0}^c v_{k_2}(\lambda - k_1) v_{l_2}(\lambda - k_1) \varphi^2(\lambda; k_1) g_2(\lambda) g_3(\lambda - k_1) \\ &= \Theta_{k_1} \Psi_{k_2} \delta_{k_1, l_1} \delta_{k_2, l_2} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $\Xi_{k_1, k_2}(x, y)$ polinom ailesinin Ω_c üzerinde $\Lambda(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğunu gösterir. Burada iç çarpımı tanımlayan toplam, Ω_c ayrık simplekstekli negatif olmayan tamsayıların sonlu kümesi üzerindedir. ■

Yukarıda verilen teoremin uygulamaları olarak alt bölümlerde iki değişkenli Hahn, Kravchuk, Meixner ve Charlier polinomları tanımlanacaktır. Ayrıca bu polinomların sağladıkları fark denklemleri, üç terimli rekürans formülleri ve birbirleri arasındaki geçiş bağıntıları elde edilecektir.

5.1 İki Değişkenli Hahn Ortogonal Polinomları

Teorem 5.1' de tanımlanan ifadelerde

$$s_k(z; \lambda) = h_k^{(\gamma, \eta)}(z; \lambda + 1)$$

$$v_k(\lambda - n) = h_k^{(\gamma + \eta + 2n + 1, \delta)}(\lambda - n; N - n)$$

$$g_1(z; \lambda) = \binom{z + \gamma}{z} \binom{\lambda - z + \eta}{\lambda - z}$$

$$g_3(\lambda - n) = \binom{\gamma + \eta + \lambda + n + 1}{\lambda - n}$$

$$g_4(\lambda - n) = \binom{\delta + N - 1 - \lambda}{N - 1 - \lambda} \binom{\gamma + \eta + \lambda + n + 1}{\lambda - n}$$

$$\varphi(\lambda, n) = \frac{\binom{\lambda}{n}}{\binom{N - 1}{n}}$$

seçimleri yapıldığında $k_1 + k_2 \leq N - 1$ için

$$H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) = \frac{\binom{x + y}{k_1}}{\binom{N - 1}{k_1}} h_{k_2}^{(\gamma + \eta + 2k_1 + 1, \delta)}(x + y - k_1; N - k_1) h_{k_1}^{(\gamma, \eta)}(x; x + y + 1) \quad (5.2)$$

iki değişkenli Hahn polinomları tanımlanır. Ayrıca bu polinomlar daha öncesinde Karlin ve McGregor tarafından verilmiştir (Karlin, McGregor 1975). Burada $h_k^{(\gamma, \eta)}(x; N)$ polinomları tek değişkenli Hahn polinomlarını ifade eder. İki değişkenli Hahn polinomları x ve y ye göre toplam $(k_1 + k_2)$ -inci derecesinde olup $\gamma, \eta, \delta > -1$; x, y, k, n negatif olmayan tamsayılardır. Bu polinom ailesinin ilk birkaç terimi aşağıdaki

gibidir.

$$H_{0,0}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) = 1 ,$$

$$H_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) = \frac{\gamma + \eta + 2}{(\gamma + 1)(1 - N)}x + \frac{x + y}{N - 1},$$

$$H_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) = 1 + \frac{(x + y)(\gamma + \eta + \delta + 3)}{(\gamma + \eta + 2)(1 - N)},$$

$$H_{2,0}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) = \frac{\binom{x+y}{2}}{\binom{N-1}{2}} \left\{ 1 - \frac{(\gamma + \eta + 3)[(\gamma + 2)(2x + 2y - 1) + \eta + 2]}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)(x + y)(x + y - 1)}x \right. \\ \left. + \frac{(\gamma + \eta + 3)(\gamma + \eta + 4)}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)(x + y)(x + y - 1)}x^2 \right\},$$

$$H_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) = \frac{1}{N - 1} \left(\frac{(\gamma + \eta + \delta + 5)}{(\gamma + \eta + 4)(2 - N)}(x + y - 1) + 1 \right) \\ \times \left(-\frac{(\gamma + \eta + 2)x}{(\gamma + 1)} + x + y \right),$$

$$H_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) = 1 + \frac{(\gamma + \eta + \delta + 4)[(\gamma + \eta + 3)(2N - 3) + \delta + 2]}{(\gamma + \eta + 2)(\gamma + \eta + 3)(1 - N)(N - 2)}x \\ + \frac{(\gamma + \eta + \delta + 4)(\gamma + \eta + \delta + 5)}{(\gamma + \eta + 2)(\gamma + \eta + 3)(N - 1)(N - 2)}x^2 \\ \vdots$$

Teorem 5.2 İki değişkenli $H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)$ Hahn polinomları

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-x-1} \Lambda^{(\gamma,\eta,\delta)}(x,y;N) H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) H_{l_1,l_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) = \Theta_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta} \delta_{k_1,l_1} \delta_{k_2,l_2}$$

ortogonalite bağıntısını sağlar (Rodal vd. 2005). Burada $\Lambda^{(\gamma,\eta,\delta)}(x,y;N)$ ağırlık fonksiyonu

$$\Lambda^{(\gamma,\eta,\delta)}(x,y;N) = \frac{\binom{x+\gamma}{x} \binom{y+\eta}{y} \binom{\delta+N-x-y-1}{N-x-y-1}}{\binom{\gamma+\eta+\delta+N+1}{N-1}}$$

ile verilir ve $\Theta_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}$ kare normu

$$\begin{aligned} \Theta_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta} &= \frac{(1 + \gamma + \eta)(2 + \gamma + \eta + \delta + 2k_1)}{(1 + \gamma + \eta + 2k_1)(\gamma + \eta + \delta + 2(1 + k_1 + k_2))} \\ &\times \frac{\binom{\delta + k_2}{k_2} \binom{\eta + k_1}{k_1} \binom{1 + \gamma + \eta + \delta + N + k_1 + k_2}{k_1 + k_2} \binom{1 + \gamma + \eta + 2k_1}{2k_1}}{\binom{N - 1}{k_1 + k_2} \binom{\gamma + k_1}{k_1} \binom{\gamma + \eta + k_1}{k_1} \binom{2 + \gamma + \eta + \delta + 2k_1}{2k_1}} \\ &\times \binom{1 + \gamma + \eta + k_2 + 2k_1}{k_2} \binom{1 + \gamma + \eta + \delta + k_2 + 2k_1}{k_2} \end{aligned}$$

formunda elde edilir.

İspat. (5.2) eşitliği ile tanımlanan $H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)$ iki değişkenli Hahn polinomlarının açık ifadesi dikkate alınır

$$\begin{aligned} &\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-x-1} \Lambda^{(\gamma, \eta, \delta)}(x, y; N) H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) H_{l_1, l_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-x-1} \frac{\binom{x + \gamma}{x} \binom{y + \eta}{y} \binom{\delta + N - x - y - 1}{N - x - y - 1}}{\binom{\gamma + \eta + \delta + N + 1}{N - 1}} \frac{\binom{x + y}{k_1}}{\binom{N - 1}{k_1}} \frac{\binom{x + y}{l_1}}{\binom{N - 1}{l_1}} \\ &\times h_{k_2}^{(\gamma + \eta + 2k_1 + 1, \delta)}(x + y - k_1; N - k_1) h_{k_1}^{(\gamma, \eta)}(x; x + y + 1) \\ &\times h_{l_2}^{(\gamma + \eta + 2l_1 + 1, \delta)}(x + y - l_1; N - l_1) h_{l_1}^{(\gamma, \eta)}(x; x + y + 1) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $z = x$ ve $\lambda = x + y$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-x-1} \Lambda^{(\gamma, \eta, \delta)}(x, y; N) H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) H_{l_1, l_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{\lambda} \frac{\binom{z+\gamma}{z} \binom{\lambda-z+\eta}{\lambda-z} \binom{\delta+N-\lambda-1}{N-\lambda-1}}{\binom{\gamma+\eta+\delta+N+1}{N-1}} \frac{\binom{\lambda}{k_1} \binom{\lambda}{l_1}}{\binom{N-1}{k_1} \binom{N-1}{l_1}} \\
&\quad \times h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(z; \lambda+1) h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1,\delta)}(\lambda-k_1; N-k_1) h_{l_1}^{(\gamma,\eta)}(z; \lambda+1) \\
&\quad \times h_{l_2}^{(\gamma+\eta+2l_1+1,\delta)}(\lambda-l_1; N-l_1) \\
&= \frac{1}{\binom{\gamma+\eta+\delta+N+1}{N-1} \binom{N-1}{k_1} \binom{N-1}{l_1}} \\
&\quad \times \sum_{z=0}^{\lambda} \binom{z+\gamma}{z} \binom{\lambda-z+\eta}{\lambda-z} h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(z; \lambda+1) h_{l_1}^{(\gamma,\eta)}(z; \lambda+1) \\
&\quad \times \sum_{\lambda=0}^{N-1} \binom{\delta+N-\lambda-1}{N-\lambda-1} \binom{\lambda}{k_1} \binom{\lambda}{l_1} h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1,\delta)}(\lambda-k_1; N-k_1) \\
&\quad \times h_{l_2}^{(\gamma+\eta+2l_1+1,\delta)}(\lambda-l_1; N-l_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Tek değişkenli Hahn polinomlarının sağladığı

$$\begin{aligned}
&\sum_{z=0}^{\lambda} \binom{z+\gamma}{z} \binom{\lambda-z+\eta}{\lambda-z} h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(z; \lambda+1) h_{l_1}^{(\gamma,\eta)}(z; \lambda+1) \\
&= \frac{(-1)^{k_1} (k_1 + \gamma + \eta + 1)_{\lambda+1} (\eta + 1)_{k_1} k_1!}{(2k_1 + \gamma + \eta + 1) (\gamma + 1)_{k_1} (-\lambda)_{k_1} \lambda!} \delta_{k_1, l_1}
\end{aligned}$$

ortogonalite bağıntısından ve

$$\begin{aligned}
&\binom{\lambda}{k_1}^2 \frac{(k_1 + \gamma + \eta + 1)_{\lambda+1}}{(-\lambda)_{k_1} \lambda!} \\
&= \binom{\gamma + \eta + \lambda + k_1 + 1}{\lambda - k_1} \binom{\gamma + \eta + 2k_1}{k_1} \frac{(-1)^{k_1} (\gamma + \eta + 2k_1 + 1)}{k_1!}
\end{aligned}$$

eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-x-1} \Lambda^{(\gamma, \eta, \delta)}(x, y; N) H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) H_{l_1, l_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) \\
&= \frac{(\eta+1)_{k_1} k_1!}{\binom{\gamma+\eta+\delta+N+1}{N-1} \binom{N-1}{k_1} \binom{N-1}{l_1}} \frac{\delta_{k_1, l_1}}{(\gamma+\eta+2k_1+1)(\gamma+1)_{k_1}} \\
&\times \sum_{\lambda=0}^{N-1} \binom{\delta+N-\lambda-1}{N-\lambda-1} \binom{\lambda}{k_1}^2 \frac{(k_1+\gamma+\eta+1)_{\lambda+1}}{(-\lambda)_{k_1} \lambda!} h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1, \delta)}(\lambda-k_1; N-k_1) \\
&\times h_{l_2}^{(\gamma+\eta+2l_1+1, \delta)}(\lambda-l_1; N-l_1) \\
&= \frac{\binom{\gamma+\eta+2k_1}{k_1}}{\binom{N-1}{k_1}^2 \binom{\gamma+\eta+\delta+N+1}{N-1}} \frac{(\eta+1)_{k_1} \delta_{k_1, l_1}}{(\gamma+1)_{k_1}} \\
&\times \sum_{\lambda=0}^{N-1} \binom{\delta+N-\lambda-1}{N-\lambda-1} \binom{\gamma+\eta+\lambda+k_1+1}{\lambda-k_1} \\
&\times h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1, \delta)}(\lambda-k_1; N-k_1) h_{l_2}^{(\gamma+\eta+2l_1+1, \delta)}(\lambda-l_1; N-l_1)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda=0}^{N-1} \binom{\delta+N-\lambda-1}{N-\lambda-1} \binom{\gamma+\eta+\lambda+k_1+1}{\lambda-k_1} h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1, \delta)}(\lambda-k_1; N-k_1) \\
&\times h_{l_2}^{(\gamma+\eta+2l_1+1, \delta)}(\lambda-l_1; N-l_1) \\
&= \frac{\binom{\gamma+\eta+\delta+N+1}{N-1} \binom{N-1}{k_1}^2 \binom{1+\gamma+\eta+\delta+N+k_1+k_2}{k_1+k_2}}{\binom{N-1}{k_1+k_2} \binom{1+\gamma+\eta+\delta+2k_1}{2k_1} \binom{1+\gamma+\eta+\delta+2k_1+k_2}{k_2}} \\
&\times \frac{(\delta+1)_{k_2} (2+\gamma+\eta+\delta+2k_1) (k_1!)^2}{(2k_1)! (\gamma+\eta+2k_1+2)_{k_2} (\gamma+\eta+\delta+2+2k_1+2k_2)} \delta_{k_2, l_2}
\end{aligned}$$

eşitliği yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-x-1} \Lambda^{(\gamma, \eta, \delta)}(x, y; N) H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) H_{l_1, l_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) = \Theta_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta} \delta_{k_1, l_1} \delta_{k_2, l_2}$$

ayrık iki değişkenli Hahn polinomları için ortogonalite bağıntısı elde edilir. ■

İki değişkenli ortonormal Hahn polinomları

$$\hat{H}_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) = \frac{H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)}{\sqrt{\Theta_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}}}$$

şeklinde ifade edilir ve ortonormal polinom vektörü

$$\mathbb{H}_k = \left(\hat{H}_{k,0}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N), \dots, \hat{H}_{k-j,j}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N), \dots, \hat{H}_{0,k}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) \right)^T$$

olarak verilir.

Teorem 5.3 İki değişkenli ortonormal Hahn polinomları için

$$x_j \mathbb{H}_k = \tilde{A}_{k,j} \mathbb{H}_{k+1} + \tilde{B}_{k,j} \mathbb{H}_k + \tilde{A}_{k-1,j}^T \mathbb{H}_{k-1} \quad , \quad j = 1, 2, \quad k \leq N-1$$

formunda üç terimli rekürans bağıntısı gerçekleşir. Burada $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\mathbb{H}_{-1} = 0$, $\tilde{A}_{-1,j} = 0$ dır ve katsayı matrisleri aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$\tilde{A}_{k,1} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} & u_{0,2} & \circ \\ & a_{1,1} & r_{1,2} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & u_{k-1,k+1} \\ \circ & & & a_{k,k} & r_{k,k+1} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

ve

$$\tilde{A}_{k,2} = \begin{pmatrix} v_{0,0} & c_{0,1} & t_{0,2} & \circ \\ & v_{1,1} & c_{1,2} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & t_{k-1,k+1} \\ \circ & & & v_{k,k} & c_{k,k+1} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

formunda olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{j,j} &= -\sqrt{(\gamma + k - j + 1)(\eta + k - j + 1)(N - k - 1)(\gamma + \eta + \delta + N + k + 2)} \\ &\times \frac{\sqrt{(k - j + 1)(\gamma + \eta + \delta + 2(k + 1) - j)(\gamma + \eta + \delta + 2k + 3 - j)}}{\sqrt{(\gamma + \eta + \delta + 2(k + 1))(\gamma + \eta + \delta + 2(k + 2))(\gamma + \eta + 2(k - j) + 1)}} \\ &\times \frac{\sqrt{(\gamma + \eta + k - j + 1)(\gamma + \eta + 2(k + 1) - j)(\gamma + \eta + 2k - j + 3)}}{\sqrt{(\gamma + \eta + 2(k - j) + 3)(\gamma + \eta + \delta + 2k + 3)(\gamma + \eta + 2(k - j + 1))}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{j,j+1} &= -\sqrt{\frac{(j+1)(\delta+j+1)(N-k-1)(\gamma+\eta+\delta+N+k+2)}{(\gamma+\eta+\delta+2k+2)(\gamma+\eta+\delta+2k+4)}} \\
&\times \frac{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+2(k+1)-j)(\gamma+\eta+2(k+1)-j)}}{(\gamma+\eta+\delta+2k+3)(\gamma+\eta+2(k-j+1))} \\
&\times \frac{2(k-j)(k-j+1)+\eta(2(k-j)+1)+\gamma(2(k-j)+1+\gamma+\eta)}{\gamma+\eta+2(k-j)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{j,j+2} &= -\frac{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+N+k+2)(N-k-1)(\gamma+k-j)(\eta+k-j)}}{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+2k+2)(\gamma+\eta+\delta+2k+4)(\gamma+\eta+\delta+2k+3)}} \\
&\times \frac{\sqrt{(\delta+j+1)(\delta+j+2)2(k+j)(\gamma+\eta+k-j)}}{\sqrt{(\gamma+\eta+2(k-j)-1)(\gamma+\eta+2(k-j)+1)(\gamma+\eta+2(k-j))}}
\end{aligned}$$

$$v_{j,j} = -a_{j,j},$$

$$\begin{aligned}
c_{j,j+1} &= -\sqrt{\frac{(j+1)(\delta+j+1)(N-k-1)(\gamma+\eta+\delta+N+k+2)}{(\gamma+\eta+\delta+2k+2)(\gamma+\eta+\delta+2k+4)}} \\
&\times \frac{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+2(k+1)-j)(\gamma+\eta+2(k+1)-j)}}{(\gamma+\eta+\delta+2k+3)(\gamma+\eta+2(k-j+1))} \\
&\times \frac{2(k-j)(k-j+1)+\gamma(2(k-j)+1)+\eta(2(k-j)+1+\gamma+\eta)}{\gamma+\eta+2(k-j)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{j,j+2} &= \frac{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+N+k+2)(N-k-1)(\gamma+k-j)(\eta+k-j)}}{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+2k+2)(\gamma+\eta+\delta+2k+4)(\gamma+\eta+\delta+2k+3)}} \\
&\times \frac{\sqrt{(\delta+j+1)(\delta+j+2)2(k+j)(\gamma+\eta+k-j)}}{\sqrt{(\gamma+\eta+2(k-j)-1)(\gamma+\eta+2(k-j)+1)(\gamma+\eta+2(k-j))}}
\end{aligned}$$

olarak verilir. Ayrıca, simetrik matrisler olan $\tilde{B}_{k,1}$ ve $\tilde{B}_{k,2}$ matrisleri şu şekilde tanımlanır.

$$\tilde{B}_{k,1} = \begin{pmatrix} b_{0,0} & f_{0,1} & & & \circ \\ f_{1,0} & b_{1,1} & f_{1,2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & f_{k-1,k-2} & b_{k-1,k-1} & f_{k-1,k} \\ \circ & & & f_{k,k-1} & b_{k,k} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\tilde{B}_{k,2} = \begin{pmatrix} e_{0,0} & s_{0,1} & & & \bigcirc \\ s_{1,0} & e_{1,1} & s_{1,2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & s_{k-1,k-2} & e_{k-1,k-1} & s_{k-1,k} \\ \bigcirc & & & s_{k,k-1} & e_{k,k} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

İspat. İlk olarak $x_1 = x$ alarak

$$x\mathbb{H}_k = \tilde{A}_{k,1}\mathbb{H}_{k+1} + \tilde{B}_{k,1}\mathbb{H}_k + \tilde{A}_{k-1,1}^T\mathbb{H}_{k-1} \quad , \quad k \leq N-1$$

bağıntısının sağlandığını görelim. Bunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım. $k=0$ için

$$x\mathbb{H}_0 = \tilde{A}_{0,1}\mathbb{H}_1 + \tilde{B}_{0,1}\mathbb{H}_0 \quad (5.7)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0 &= \hat{H}_{0,0}^{\gamma,\eta,\delta}, \quad \mathbb{H}_1 = \begin{pmatrix} \hat{H}_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta} \\ \hat{H}_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta} \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_{0,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{0,1} = (b_{0,0}) \end{aligned}$$

formundadır. $\hat{H}_{0,0}^{\gamma,\eta,\delta}$, $\hat{H}_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta}$ ve $\hat{H}_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}$ polinomları

$$\begin{aligned} \hat{H}_{0,0}^{\gamma,\eta,\delta} &= \frac{H_{0,0}^{\gamma,\eta,\delta}(x, y; N)}{\sqrt{\Theta_{0,0}^{\gamma,\eta,\delta}}} = 1, \\ \hat{H}_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta} &= \frac{H_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta}(x, y; N)}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta}}} = \frac{1}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta}}} \left(\frac{\gamma + \eta + 2}{(\gamma + 1)(1 - N)}x + \frac{x + y}{N - 1} \right), \\ \hat{H}_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta} &= \frac{H_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}(x, y; N)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}}} = \frac{1}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}}} \left(1 + \frac{(x + y)(\gamma + \eta + \delta + 3)}{(\gamma + \eta + 2)(1 - N)} \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bunlar (5.7)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x &= a_{0,0} \hat{H}_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta} + r_{0,1} \hat{H}_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta} + b_{0,0} \\ x &= \frac{a_{0,0}}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta}}} \left(\frac{\gamma + \eta + 2}{(\gamma + 1)(1 - N)}x + \frac{x + y}{N - 1} \right) \\ &\quad + \frac{r_{0,1}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}}} \left(1 + \frac{(x + y)(\gamma + \eta + \delta + 3)}{(\gamma + \eta + 2)(1 - N)} \right) + b_{0,0} \end{aligned}$$

elde edilir. Polinom eşitliğinden katsayılar kıyaslanırsa

$$\begin{aligned}
a_{0,0} &= -\frac{\sqrt{(\gamma+1)(\eta+1)(N-1)(\gamma+\eta+\delta+N+2)}}{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+4)(\gamma+\eta+2)(\gamma+\eta+\delta+3)}}, \\
r_{0,1} &= -\sqrt{\frac{(\delta+1)(N-1)(\gamma+\eta+\delta+N+2)}{(\gamma+\eta+\delta+2)(\gamma+\eta+\delta+4)}} \\
&\quad \times \frac{(\eta+\gamma(\gamma+\eta+1))\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+2)(\gamma+\eta+2)}}{(\gamma+\eta)(\gamma+\eta+\delta+3)(\gamma+\eta+2)}, \\
b_{0,0} &= -\frac{r_{0,1}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $k=1$ için katsayı matrislerini elde etmeye çalışalım.

$$x\mathbb{H}_1 = \tilde{A}_{1,1}\mathbb{H}_2 + \tilde{B}_{1,1}\mathbb{H}_1 + \tilde{A}_{0,1}^T\mathbb{H}_0 \quad (5.8)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_0 &= \hat{H}_{0,0}^{\gamma,\eta,\delta}, \quad \mathbb{H}_1 = \begin{pmatrix} \hat{H}_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta} \\ \hat{H}_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{H}_2 = \begin{pmatrix} \hat{H}_{2,0}^{\gamma,\eta,\delta} \\ \hat{H}_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta} \\ \hat{H}_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta} \end{pmatrix} \\
\tilde{A}_{0,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{0,1}^T = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ r_{0,1} \end{pmatrix}, \\
\tilde{A}_{1,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & a_{1,1} & r_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{1,1} = \begin{pmatrix} b_{0,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & b_{1,1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (5.9)$$

formundadır. Öncelikle $\hat{H}_{2,0}^{\gamma,\eta,\delta}$, $\hat{H}_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta}$, $\hat{H}_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta}$ polinomlarını açık formda yazalım.

$$\begin{aligned}\hat{H}_{2,0}^{\gamma,\eta,\delta} &= \frac{H_{2,0}^{\gamma,\eta,\delta}(x, y; N)}{\sqrt{\Theta_{2,0}^{\gamma,\eta,\delta}}} \\ &= \frac{\binom{x+y}{2}}{\binom{N-1}{2} \sqrt{\Theta_{2,0}^{\gamma,\eta,\delta}}} \left\{ 1 - \frac{(\gamma + \eta + 3) [(\gamma + 2)(2x + 2y - 1) + \eta + 2]}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)(x + y)(x + y - 1)} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\gamma + \eta + 3)(\gamma + \eta + 4)}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)(x + y)(x + y - 1)} x^2 \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta} &= \frac{H_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta}(x, y; N)}{\sqrt{\Theta_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Theta_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta}}} \left(\frac{(\gamma + \eta + \delta + 5)(x + y - 1)}{(\gamma + \eta + 4)(2 - N)(N - 1)} + 1 \right) \left(-\frac{(\gamma + \eta + 2)x}{(\gamma + 1)(N - 1)} + x + y \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta} &= \frac{H_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta}(x, y; N)}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta}}} \left\{ 1 + \frac{(\gamma + \eta + \delta + 4) [(\gamma + \eta + 3)(2N - 3) + \delta + 2]}{(\gamma + \eta + 2)(\gamma + \eta + 3)(1 - N)(N - 2)} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\gamma + \eta + \delta + 4)(\gamma + \eta + \delta + 5)}{(\gamma + \eta + 2)(\gamma + \eta + 3)(N - 1)(N - 2)} x^2 \right\}.\end{aligned}$$

(5.9) da verilen matrisler ve polinomlar (5.8) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}x\hat{H}_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta} &= a_{0,0} \hat{H}_{2,0}^{\gamma,\eta,\delta} + r_{0,1} \hat{H}_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta} + u_{0,2} \hat{H}_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta} \\ &\quad + b_{0,0} \hat{H}_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta} + f_{0,1} \hat{H}_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta} + a_{0,0}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}x\hat{H}_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta} &= a_{1,1} \hat{H}_{1,1}^{\gamma,\eta,\delta} + r_{1,2} \hat{H}_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta} + f_{1,0} \hat{H}_{1,0}^{\gamma,\eta,\delta} \\ &\quad + b_{1,1} \hat{H}_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta} + r_{0,1}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada polinomların katsayıları kıyaslanarak

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= -\sqrt{(\gamma+1)(\eta+1)(N-2)(\gamma+\eta+\delta+N+3)} \\
&\quad \times \frac{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+3)(\gamma+\eta+4)}}{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+6)(\gamma+\eta+\delta+5)(\gamma+\eta+2)}}, \\
r_{1,2} &= -\sqrt{\frac{2(\delta+2)(N-2)(\gamma+\eta+\delta+N+3)}{(\gamma+\eta+\delta+4)(\gamma+\eta+\delta+6)}} \\
&\quad \times \frac{(\eta+\gamma(\gamma+\eta+1))\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+3)(\gamma+\eta+3)}}{(\gamma+\eta)(\gamma+\eta+\delta+5)(\gamma+\eta+2)}, \\
u_{0,2} &= -\frac{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+N+3)(N-2)(\gamma+1)(\eta+1)}}{\sqrt{(\gamma+\eta+\delta+4)(\gamma+\eta+\delta+6)(\gamma+\eta+\delta+5)}} \\
&\quad \times \frac{\sqrt{(\delta+1)(\delta+2)2(\gamma+\eta+1)}}{\sqrt{(\gamma+\eta+1)(\gamma+\eta+3)(\gamma+\eta+2)}}, \\
b_{0,0} &= -\frac{r_{0,1}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}}}, \\
b_{1,1} &= -\sqrt{\Theta_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}} \left(r_{0,1} + \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta}}} \right), \\
f_{0,1} &= f_{1,0} = -\sqrt{\Theta_{0,1}^{\gamma,\eta,\delta}} \left(a_{00} + \frac{u_{0,2}}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{\gamma,\eta,\delta}}} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan genelleme yapılırsa iki değişkenli ortonormal Hahn polinomları, $\tilde{A}_{k,1}$ ve $\tilde{B}_{k,1}$ katsayı matrisleri (5.3) ve (5.5) formunda olmak üzere

$$x\mathbb{H}_k = \tilde{A}_{k,1}\mathbb{H}_{k+1} + \tilde{B}_{k,1}\mathbb{H}_k + \tilde{A}_{k-1,1}^T \mathbb{H}_{k-1}$$

rekürans formülünü gerçekler. Genel durumda matris katsayılarının sağlandığı Mathematica programı yardımıyla gösterilmiştir. Benzer şekilde, iki değişkenli ortonormal Hahn polinomları için $\tilde{A}_{k,2}$ ve $\tilde{B}_{k,2}$ katsayı matrisleri (5.4) ve (5.6) formunda olmak üzere

$$y\mathbb{H}_k = \tilde{A}_{k,2}\mathbb{H}_{k+1} + \tilde{B}_{k,2}\mathbb{H}_k + \tilde{A}_{k-1,2}^T \mathbb{H}_{k-1}$$

rekürans formülü sağlanır. ■

Teorem 5.4 $H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)$ iki değişkenli Hahn polinomları aşağıdaki bağıntıları gerçekler.

i)

$$\begin{aligned} & x(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x-1, y; N-1)) \\ & + y(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y-1; N-1)) \\ & = (N-x-y-1)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N-1) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Bu duruma eő değer olarak, (2.1) ve (2.2) ile verilen geri fark operatörünün tanımını kullanılırsa

$$\begin{aligned} & x\nabla_1(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) + y\nabla_2(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) = (N-x-y-1) \\ & \times (H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N-1) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \\ & - x(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x-1, y; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x-1, y; N-1)) \\ & - y(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y-1; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y-1; N-1)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

elde edilir.

ii)

$$\begin{aligned} & N(x+\gamma+1)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x+1, y; N+1) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) + N(y+\eta+1) \\ & \times (H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y+1; N+1) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) + N(N-x-y+\delta) \\ & \times (H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N+1) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \\ & = -(k_1+k_2)(2+\gamma+\eta+\delta+k_1+k_2)H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Bu duruma eő değer olarak, (2.1) ve (2.2) ile verilen ileri fark operatörünün tanımından yararlanılırsa

$$\begin{aligned} & N(x+\gamma+1)\Delta_1(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N+1)) + N(y+\eta+1)\Delta_2(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N+1)) \\ & + N(\gamma+\eta+\delta+N+2)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N+1) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \\ & = -(k_1+k_2)(2+\gamma+\eta+\delta+k_1+k_2)H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) \end{aligned} \quad (5.13)$$

bulunur.

İspat. i) (5.10) eşitliğinin sağlandığını göstermek iin

$$\begin{aligned} & x \left(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x-1, y; N-1) \right) + y \left(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y-1; N-1) \right) \\ & + (N-x-y-1)H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N-1) = (N-1)H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Bunun için, $H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)$ Hahn polinomlarının tanımı dikkate alınarak eşitliğin sol yanından hareket edersek

$$\begin{aligned}
& x \left(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x-1, y; N-1) \right) + y \left(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y-1; N-1) \right) \\
& + (N-x-y-1) H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N-1) \\
& = \frac{\binom{x+y-1}{k_1}}{\binom{N-2}{k_1}} h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1, \delta)}(x+y-k_1-1; N-k_1-1) \\
& \quad \times \left(x h_{k_1}^{(\gamma, \eta)}(x-1; x+y) + y h_{k_1}^{(\gamma, \eta)}(x; x+y) \right) \\
& \quad + (N-x-y-1) \frac{\binom{x+y}{k_1}}{\binom{N-2}{k_1}} h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1, \delta)}(x+y-k_1; N-k_1-1) \\
& \quad \times h_{k_1}^{(\gamma, \eta)}(x; x+y+1) \\
& = \frac{\binom{x+y-1}{k_1}}{\binom{N-2}{k_1}} h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1, \delta)}(x+y-k_1-1; N-k_1-1) \\
& \quad \times \left\{ x \sum_{n=0}^{k_1} \frac{(-k_1)_n (-x+1)_n (k_1+\gamma+\eta+1)_n}{(\gamma+1)_n (1-x-y)_n n!} \right. \\
& \quad \left. + y \sum_{n=0}^{k_1} \frac{(-k_1)_n (-x)_n (k_1+\gamma+\eta+1)_n}{(\gamma+1)_n (1-x-y)_n n!} \right\} \\
& \quad + (N-x-y-1) \frac{\binom{x+y}{k_1}}{\binom{N-2}{k_1}} h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1, \delta)}(x+y-k_1; N-k_1-1) \\
& \quad \times h_{k_1}^{(\gamma, \eta)}(x; x+y+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\binom{N-2}{k_1}} \left\{ \binom{x+y-1}{k_1} h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1,\delta)}(x+y-k_1-1; N-k_1-1)(x+y) \right. \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{k_1} \frac{(-k_1)_n (-x)_n (k_1+\gamma+\eta+1)_n}{(\gamma+1)_n (-x-y)_n n!} \\
&\quad + (N-x-y-1) \binom{x+y}{k_1} h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(x; x+y+1) \\
&\quad \left. \times h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1,\delta)}(x+y-k_1; N-k_1-1) \right\} \\
&= \frac{1}{\binom{N-2}{k_1}} \left\{ (x+y-k_1) \binom{x+y}{k_1} h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(x; x+y+1) \right. \\
&\quad \times h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1,\delta)}(x+y-k_1-1; N-k_1-1) \\
&\quad + (N-x-y-1) \binom{x+y}{k_1} h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(x; x+y+1) \\
&\quad \left. \times h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1,\delta)}(x+y-k_1; N-k_1-1) \right\} \\
&= \frac{\binom{x+y}{k_1}}{\binom{N-2}{k_1}} h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(x; x+y+1)(N-k_1-1) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{k_2} \frac{(-k_2)_n (-x-y+k_1)_n (k_2+\gamma+\eta+\delta+2k_1+2)_n}{(\gamma+\eta+2k_1+2)_n (1-N+k_1)_n n!} \\
&= \frac{(N-k_1-1)}{\binom{N-2}{k_1}} \binom{x+y}{k_1} h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(x; x+y+1) h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1,\delta)}(x+y-k_1; N-k_1) \\
&= (N-1) \frac{\binom{x+y}{k_1}}{\binom{N-1}{k_1}} h_{k_1}^{(\gamma,\eta)}(x; x+y+1) h_{k_2}^{(\gamma+\eta+2k_1+1,\delta)}(x+y-k_1; N-k_1) \\
&= (N-1) H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin dikkate alınmasıyla

$$\begin{aligned}
&x(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x-1, y; N-1)) \\
&+ y(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y-1; N-1)) \\
&= (N-x-y-1)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N-1) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N))
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Burada (2.1) ve (2.2)' deki özelliklerden geri fark operatörünün tanımı kullanılırsa bu eşitlik geri fark operatörü cinsinden

$$\begin{aligned} & x\nabla_1(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)) + y\nabla_2(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)) = \\ & (N-x-y-1)(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N-1) - H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)) \\ & -x(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x-1,y;N) - H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x-1,y;N-1)) \\ & -y(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y-1;N) - H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y-1;N-1)) \end{aligned}$$

formunda ifade edilebilir.

ii) Benzer şekilde, $H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)$ iki değişkenli Hahn polinomlarının tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} & N(x+\gamma+1)(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x+1,y;N+1) - H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)) + N(y+\eta+1) \\ & \times (H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y+1;N+1) - H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)) + N(N-x-y+\delta) \\ & \times (H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N+1) - H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)) \\ & = -(k_1+k_2)(2+\gamma+\eta+\delta+k_1+k_2)H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada da (2.1) ve (2.2)' deki ileri fark operatörünün tanımından yararlanılırsa bu eşitlik

$$\begin{aligned} & N(x+\gamma+1)\Delta_1(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N+1)) + N(y+\eta+1)\Delta_2(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N+1)) \\ & + N(\gamma+\eta+\delta+N+2)(H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N+1) - H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N)) \\ & = -(k_1+k_2)(2+\gamma+\eta+\delta+k_1+k_2)H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) \end{aligned}$$

formunda yazılır. ■

(5.11) ve (5.13) ile verilen bağıntılardan görülür ki iki değişkenli Hahn polinomları

$$H_{k_1,k_2}^{\gamma,\eta,\delta}(x,y;N) = u(x,y)$$

$$\begin{aligned} & x(1+\eta+\delta+N-x)\Delta_1\nabla_1u(x,y) + y(1+\gamma+\delta+N-y)\Delta_2\nabla_2u(x,y) \\ & -y(1+\gamma+x)\Delta_1\nabla_2u(x,y) - x(1+\eta+y)\Delta_2\nabla_1u(x,y) \\ & +((1+\gamma)(N-1) - x(3+\gamma+\eta+\delta))\Delta_1u(x,y) \\ & +((1+\eta)(N-1) - (3+\gamma+\eta+\delta)y)\Delta_2u(x,y) \\ & +(k_1+k_2)(k_1+k_2+\gamma+\eta+\delta+2)u(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

fark denklemini sağlar. Burada (2.1) ve (2.2)' deki özelliklerden ileri ve geri fark operatörlerinin tanımları fark denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& (k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + \gamma + \eta + \delta + 2)H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N) \\
& + x(y + \eta + 1)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x - 1, y + 1; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \\
& + y(x + \gamma + 1)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x + 1, y - 1; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \\
& + x(N - x - y + \delta)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x - 1, y; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \\
& + (N - x - y - 1)(x + \gamma + 1)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x + 1, y; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \\
& + y(N - x - y + \delta)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y - 1; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) \\
& + (N - x - y - 1)(y + \eta + 1)(H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y + 1; N) - H_{k_1, k_2}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y; N)) = 0
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur.

Teorem 5.5 Üçgensel bölgedeki iki değişkenli Jacobi ortogonal polinomları ile iki değişkenli Hahn ortogonal polinomları arasında

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_{l, k-l}^{\delta-1/2, \eta-1/2, \gamma-1/2}(N(1-x-y), Ny; N) = \frac{(k-l)! l! P_{k,l}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y)}{(\delta+1/2)_l (2l+\eta+\delta+1)_{k-l}}$$

limit bağıntısı gerçekleşir (Rodal vd. 2005).

İspat. İki değişkenli Hahn polinomlarının tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} H_{l, k-l}^{\delta-1/2, \eta-1/2, \gamma-1/2}(N(1-x-y), Ny; N) \\
& = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(N-Nx)!}{(N-Nx-l)!} \sum_{i=0}^{k-l} \frac{(-k+l)_i (-N+Nx+l)_i (\gamma+\eta+\delta+k+l+\frac{1}{2})_i}{(\eta+\delta+2l+1)_i (1-N+l)_i i!} \right. \\
& \quad \times \left. \frac{(N-1-l)!}{(N-1)!} \sum_{j=0}^l \frac{(-l)_j (-N+Nx+Ny)_j (l+\eta+\delta)_j 1^j}{(\delta+1/2)_j (Nx-N)_j j!} \right\} \\
& = (1-x)^l \sum_{i=0}^{k-l} \frac{(-k+l)_i (\gamma+\eta+\delta+k+l+\frac{1}{2})_i}{(\eta+\delta+2l+1)_i i!} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-N+Nx+l)_i}{(1-N+l)_i} \\
& \quad \times \sum_{j=0}^l \frac{(-l)_j (l+\eta+\delta)_j}{(\delta+1/2)_j j!} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-N+Nx+Ny)_j}{(Nx-N)_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2l + \eta + \delta + 1)_{k-l}}{(k-l)!} \sum_{i=0}^{k-l} \frac{(-k+l)_i (\gamma + \eta + \delta + k + l + \frac{1}{2})_i (1-x)^i}{(\eta + \delta + 2l + 1)_i i!} \\
&\quad \times (1-x)^l \frac{(\delta + 1/2)_l}{l!} \sum_{j=0}^l \frac{(-l)_j (l + \eta + \delta)_j \left(\frac{1-x-y}{1-x} \right)^j}{(\delta + 1/2)_j j!} \\
&\quad \times \frac{(k-l)! l!}{(\delta + 1/2)_l (2l + \eta + \delta + 1)_{k-l}} \\
&= \frac{(k-l)! l!}{(\delta + 1/2)_l (2l + \eta + \delta + 1)_{k-l}} P_{k,l}^{\gamma, \eta, \delta}(x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

5.2 İki Değişkenli Kravchuk Ortogonal Polinomları

Teorem 5.1' in bir uygulaması olarak ayrık iki değişkenli Kravchuk polinomları, q_1, q_2 reel parametreler ve N negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $k_1 + k_2 \leq N$ için

$$\begin{aligned}
K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N) &= \frac{(N - k_1)!}{N! (k_1 - N)_{k_2}} k_{k_1}^{(q_1/(q_1+q_2))}(x; x+y) k_{k_2}^{(q_1+q_2)}(x+y - k_1; N - k_1), \\
&\quad (q_1 > 0, q_2 > 0, 0 < q_1 + q_2 < 1)
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Bu polinomların ilk birkaç terimi aşağıdaki formda verilir.

$$\begin{aligned}
K_{0,0}^{q_1, q_2}(x, y; N) &= 1, \\
K_{1,0}^{q_1, q_2}(x, y; N) &= \frac{1}{N} \left(-x - y + \frac{q_1 + q_2}{q_1} x \right), \\
K_{0,1}^{q_1, q_2}(x, y; N) &= 1 - \frac{x + y}{N(q_1 + q_2)}, \\
K_{2,0}^{q_1, q_2}(x, y; N) &= \frac{1}{N(N-1)} \left\{ (x+y)(x+y-1) + \frac{(q_1 + q_2)^2}{q_1^2} x^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{q_1 + q_2}{q_1} x \left(2(x+y-1) + \frac{q_1 + q_2}{q_1} \right) \right\}, \\
K_{1,1}^{q_1, q_2}(x, y; N) &= \frac{1}{N(1-N)} \left(-x - y + \frac{q_1 + q_2}{q_1} x \right) \left(-N + 1 + \frac{x + y - 1}{q_1 + q_2} \right), \\
K_{0,2}^{q_1, q_2}(x, y; N) &= \left\{ 1 - \frac{x + y}{(q_1 + q_2) N(N-1)} \left(2(N-1) + \frac{1}{q_1 + q_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x+y)^2}{(q_1 + q_2)^2 N(N-1)} \right\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Teorem 5.6 İki değişkenli Kravchuk polinomları aşağıdaki ortogonalite bağıntısını sağlar.

$$\sum_{x=0}^N \sum_{y=0}^{N-x} K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N) K_{l_1, l_2}^{q_1, q_2}(x, y; N) \frac{q_1^x (1 - q_1 - q_2)^{N-x-y} q_2^y N!}{x! (N - x - y)! y!} \quad (5.15)$$

$$= \Theta_{k_1, k_2}^{q_1, q_2, N} \delta_{k_1, l_1} \delta_{k_2, l_2}.$$

İspat. Tek değişkenli Kravchuk polinomları için (4.16) eşitliğinde verilen ortogonalite bağıntısından yararlanarak

$$\sum_{z=0}^{\lambda} k_{k_1}^{(q_1/(q_1+q_2))}(z; \lambda) k_{l_1}^{(q_1/(q_1+q_2))}(z; \lambda) \binom{\lambda}{z} \left(\frac{q_1}{q_1+q_2} \right)^z \left(\frac{q_2}{q_1+q_2} \right)^{\lambda-z}$$

$$= \frac{\lambda! k_1! q_2^{k_1}}{(\lambda - k_1)! q_1^{k_1}} \delta_{k_1, l_1}$$

ve

$$\sum_{\lambda=0}^N k_{k_2}^{(q_1+q_2)}(\lambda - k_1; N - k_1) k_{l_2}^{(q_1+q_2)}(\lambda - k_1; N - k_1)$$

$$\times \frac{(q_1 + q_2)^\lambda (1 - q_1 - q_2)^{N-\lambda}}{(N - \lambda)! (\lambda - k_1)!}$$

$$= \frac{(1 - q_1 - q_2)^{k_2} (q_1 + q_2)^{k_1 - k_2} k_2!}{(N - k_1 - k_2)!} \delta_{k_2, l_2}$$

eşitlikleri yazılabilir. (5.15) eşitliğinin sol yanında $K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N)$ iki değişkenli Kravchuk polinomlarının açık hali yerine yazılıp yukarıdaki eşitlikler kullanılırsa ortogonalite bağıntısı elde edilir ve $\Theta_{k_1, k_2}^{q_1, q_2, N}$ kare normu

$$\Theta_{k_1, k_2}^{q_1, q_2, N} = \frac{q_2^{k_1} (1 - q_1 - q_2)^{k_2} k_1! k_2! (N - k_1 - k_2)!}{N! q_1^{k_1} (q_1 + q_2)^{k_2 - k_1}}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 5.7 İki değişkenli Hahn polinomları ile iki değişkenli Kravchuk polinomları arasında

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{k_1, k_2}^{q_1 t, q_2 t, (1 - q_1 - q_2)t}(x, y; N + 1) = (-1)^{k_1} K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N) \quad (5.16)$$

limit bağıntısı sağlanır.

İspat. İki değişkenli Hahn polinomlarının tanımında $\gamma = q_1 t$, $\eta = q_2 t$,

$\delta = (1 - q_1 - q_2)t$ ve $N \rightarrow N + 1$ alınıp hipergeometrik fonksiyonun açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(x+y)!}{(x+y-k_1)!} \frac{(N-k_1)!}{N!} \sum_{i=0}^{k_2} \frac{(-k_2)_i (-x-y+k_1)_i (k_2+2k_1+t+2)_i}{(q_1 t + q_2 t + 2k_1 + 2)_i (k_1 - N)_i i!} \\
& \times \sum_{j=0}^{k_1} \frac{(-k_1)_j (-x)_j (k_1 + q_1 t + q_2 t + 1)_j}{(q_1 t + 1)_j (-x-y)_j j!} \\
& = (-1)^{k_1} \frac{(N-k_1)!}{N!} (-x-y)_{k_1} \sum_{i=0}^{k_2} \frac{(-k_2)_i (-x-y+k_1)_i}{(k_1 - N)_i i!} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(k_2+2k_1+t+2)_i}{(q_1 t + q_2 t + 2k_1 + 2)_i} \\
& \times \sum_{j=0}^{k_1} \frac{(-k_1)_j (-x)_j}{(-x-y)_j j!} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(k_1 + q_1 t + q_2 t + 1)_j}{(q_1 t + 1)_j} \\
& = (-1)^{k_1} \frac{(N-k_1)!}{N! (k_1 - N)_{k_2}} (k_1 - N)_{k_2} (-x-y)_{k_1} \sum_{i=0}^{k_2} \frac{(-k_2)_i (-x-y+k_1)_i \left(\frac{1}{q_1+q_2}\right)^i}{(k_1 - N)_i i!} \\
& \times \sum_{j=0}^{k_1} \frac{(-k_1)_j (-x)_j \left(\frac{q_1+q_2}{q_1}\right)^j}{(-x-y)_j j!} = (-1)^{k_1} K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 5.8 İki değişkenli Hahn polinomlarının ağırlık fonksiyonu ile iki değişkenli Kravchuk polinomlarının ağırlık fonksiyonu arasında

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda^{q_1 t, q_2 t, (1-q_1-q_2)t}(x, y; N+1) = \Lambda^{q_1, q_2}(x, y; N)$$

limit bağıntısı sağlanır. Burada

$$\Lambda^{q_1, q_2}(x, y; N) = \frac{q_1^x (1 - q_1 - q_2)^{N-x-y} q_2^y N!}{x! (N-x-y)! y!}$$

ile verilir.

İspat. İki değişkenli Hahn ortogonal polinomlarının ağırlık fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda^{q_1 t, q_2 t, (1-q_1-q_2)t}(x, y; N+1) \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\binom{x+q_1 t}{x} \binom{y+q_2 t}{y} \binom{(1-q_1-q_2)t+N-x-y}{N-x-y}}{\binom{t+N+2}{N}} \\
& = \frac{q_1^x (1 - q_1 - q_2)^{N-x-y} q_2^y N!}{x! (N-x-y)! y!} \\
& = \Lambda^{q_1, q_2}(x, y; N)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

İki değişkenli ortonormal Kravchuk polinomları

$$\hat{K}_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N) = \frac{K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N)}{\sqrt{\Theta_{k_1, k_2}^{q_1, q_2, N}}}$$

biçimde tanımlanır. Ortonormal polinom vektörü

$$\mathbb{K}_k = \left(\hat{K}_{k,0}^{q_1, q_2}(x, y; N), \dots, \hat{K}_{k-j,j}^{q_1, q_2}(x, y; N), \dots, \hat{K}_{0,k}^{q_1, q_2}(x, y; N) \right)^T$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.9 İki değişkenli ortonormal Kravchuk polinomları aşağıdaki üç terimli rekürans bağıntısını sağlar.

$$x_j \mathbb{K}_k = \tilde{A}_{k,j} \mathbb{K}_{k+1} + \tilde{B}_{k,j} \mathbb{K}_k + \tilde{A}_{k-1,j}^T \mathbb{K}_{k-1} \quad , \quad j = 1, 2$$

Burada $x_1 = x$, $x_2 = y$, $K_{-1} = 0$, $\tilde{A}_{-1,j} = 0$ dır. $\tilde{A}_{k,1}$, $\tilde{A}_{k,2}$, $\tilde{B}_{k,1}$, $\tilde{B}_{k,2}$ katsayı matrisleri (5.3), (5.4), (5.5) ve (5.6) eşitlikleriyle verilen formlarda olup bu matrislerin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a_{j,j} = \sqrt{\frac{(1-j+k)(-k+N)q_1q_2}{q_1+q_2}},$$

$$r_{j,j+1} = -q_1 \sqrt{\frac{(1+j)(-k+N)(1-q_1-q_2)}{q_1+q_2}},$$

$$u_{j,j+2} = 0,$$

$$f_{j,j+1} = -\frac{\sqrt{(1+j)(-j+k)q_1(1-q_1-q_2)q_2}}{q_1+q_2},$$

$$b_{j,j} = (-j-k+N)q_1 + \frac{jq_1 + (-j+k)q_2}{q_1+q_2},$$

$$v_{j,j} = -\sqrt{\frac{(1-j+k)(-k+N)q_1q_2}{q_1+q_2}},$$

$$c_{j,j+1} = -q_2 \sqrt{\frac{(1+j)(-k+N)(1-q_1-q_2)}{q_1+q_2}},$$

$$t_{j,j+2} = 0,$$

$$e_{j,j} = (-j-k+N)q_2 + \frac{(-j+k)q_1 + jq_2}{q_1+q_2},$$

$$s_{j,j+1} = \frac{\sqrt{(1+j)(-j+k)q_1(1-q_1-q_2)q_2}}{q_1+q_2}.$$

İspat. İlk olarak $x_1 = x$ alarak

$$x\mathbb{K}_k = \tilde{A}_{k,1}\mathbb{K}_{k+1} + \tilde{B}_{k,1}\mathbb{K}_k + \tilde{A}_{k-1,1}^T\mathbb{K}_{k-1} \quad , \quad j = 1, 2$$

bağıntısının sağlandığını görelim. Bunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım. $k = 0$ için

$$x\mathbb{K}_0 = \tilde{A}_{0,1}\mathbb{K}_1 + \tilde{B}_{0,1}\mathbb{K}_0 \tag{5.17}$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_0 &= \hat{K}_{0,0}^{q_1,q_2}, \quad \mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} \hat{K}_{1,0}^{q_1,q_2} \\ \hat{K}_{0,1}^{q_1,q_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_{0,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{0,1} = (b_{0,0})\end{aligned}\tag{5.18}$$

formundadır. $\hat{K}_{0,0}^{q_1,q_2}$, $\hat{K}_{1,0}^{q_1,q_2}$ ve $\hat{K}_{0,1}^{q_1,q_2}$ polinomları

$$\begin{aligned}\hat{K}_{0,0}^{q_1,q_2} &= \frac{K_{0,0}^{q_1,q_2}(x,y;N)}{\sqrt{\Theta_{0,0}^{q_1,q_2,N}}} = 1, \\ \hat{K}_{1,0}^{q_1,q_2} &= \frac{K_{1,0}^{q_1,q_2}(x,y;N)}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{q_1,q_2,N}}} = \frac{1}{N} \left(-x - y + \frac{q_1 + q_2}{q_1} x \right) \\ \hat{K}_{0,1}^{q_1,q_2} &= \frac{K_{0,1}^{q_1,q_2}(x,y;N)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{q_1,q_2,N}}} = \frac{1 - \frac{x+y}{N(q_1+q_2)}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{q_1,q_2,N}}}\end{aligned}\tag{5.19}$$

formundadır. Bunlar (5.17)'de yerine yazılırsa

$$x = a_{0,0} \hat{K}_{1,0}^{q_1,q_2} + r_{0,1} \hat{K}_{0,1}^{q_1,q_2} + b_{0,0}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{a_{0,0}}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{q_1,q_2,N}}} \frac{1}{N} \left(-x - y + \frac{q_1 + q_2}{q_1} x \right) \\ &\quad + \frac{r_{0,1}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{q_1,q_2,N}}} \left(1 - \frac{x+y}{N(q_1+q_2)} \right) + b_{0,0}\end{aligned}$$

bulunur. Polinom eşitliğinden katsayılar karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}a_{0,0} &= \sqrt{\frac{Nq_1q_2}{q_1+q_2}}, \\ r_{0,1} &= -q_1 \sqrt{\frac{N(1-q_1-q_2)}{q_1+q_2}} \\ b_{0,0} &= Nq_1\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $k = 1$ için katsayı matrislerini elde etmeye çalışalım.

$$x\mathbb{K}_1 = \tilde{A}_{1,1}\mathbb{K}_2 + \tilde{B}_{1,1}\mathbb{K}_1 + \tilde{A}_{0,1}^T\mathbb{K}_0\tag{5.20}$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_0 &= \hat{K}_{0,0}^{q_1,q_2}, \quad \mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} \hat{K}_{1,0}^{q_1,q_2} \\ \hat{K}_{0,1}^{q_1,q_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} \hat{K}_{2,0}^{q_1,q_2} \\ \hat{K}_{1,1}^{q_1,q_2} \\ \hat{K}_{0,2}^{q_1,q_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_{0,1} &= (a_{0,0} \ r_{0,1}), \quad \tilde{A}_{0,1}^T = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ r_{0,1} \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_{1,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & a_{1,1} & r_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{1,1} = \begin{pmatrix} b_{0,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & b_{1,1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

formundadır. (5.19) eşitliği ile verilen polinomlar ve

$$\hat{K}_{2,0}^{q_1,q_2} = \frac{K_{2,0}^{q_1,q_2}(x,y;N)}{\sqrt{\Theta_{2,0}^{q_1,q_2,N}}}, \quad \hat{K}_{1,1}^{q_1,q_2} = \frac{K_{1,1}^{q_1,q_2}(x,y;N)}{\sqrt{\Theta_{1,1}^{q_1,q_2,N}}}, \quad \hat{K}_{0,2}^{q_1,q_2} = \frac{K_{0,2}^{q_1,q_2}(x,y;N)}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{q_1,q_2,N}}}$$

polinomları (5.20) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}x \hat{K}_{1,0}^{q_1,q_2} &= a_{0,0} \hat{K}_{2,0}^{q_1,q_2} + r_{0,1} \hat{K}_{1,1}^{q_1,q_2} + u_{0,2} \hat{K}_{0,2}^{q_1,q_2} \\ &\quad + b_{0,0} \hat{K}_{1,0}^{q_1,q_2} + f_{0,1} \hat{K}_{0,1}^{q_1,q_2} + a_{0,0}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}x \hat{K}_{0,1}^{q_1,q_2} &= a_{1,1} \hat{K}_{1,1}^{q_1,q_2} + r_{1,2} \hat{K}_{0,2}^{q_1,q_2} + f_{1,0} \hat{K}_{1,0}^{q_1,q_2} \\ &\quad + b_{1,1} \hat{K}_{0,1}^{q_1,q_2} + r_{0,1}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada polinomların katsayıları kıyaslanırsa

$$\begin{aligned}a_{1,1} &= \sqrt{\frac{(N-1)q_1q_2}{q_1+q_2}}, \\ r_{1,2} &= -q_1 \sqrt{\frac{2(N-1)(1-q_1-q_2)}{q_1+q_2}}, \\ u_{0,2} &= 0, \\ b_{1,1} &= (N-2)q_1 + \frac{q_1}{q_1+q_2}, \\ f_{0,1} &= f_{1,0} = -\frac{\sqrt{q_1q_2(1-q_1-q_2)}}{q_1+q_2}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan genelleme yapılırsa iki değişkenli ortonormal Kravchuk polinomları, $\tilde{A}_{k,1}$ ve $\tilde{B}_{k,1}$ katsayı matrisleri (5.3) ve (5.5) formunda olmak üzere

$$x\mathbb{K}_k = \tilde{A}_{k,1}\mathbb{K}_{k+1} + \tilde{B}_{k,1}\mathbb{K}_k + \tilde{A}_{k-1,1}^T \mathbb{K}_{k-1}$$

rekürans formülünü gerçekler. Genel durumda matris katsayılarının sağlandığı Mathematica programı yardımıyla gösterilmiştir. Benzer şekilde, iki değişkenli ortonormal Kravchuk polinomları $\tilde{A}_{k,2}$ ve $\tilde{B}_{k,2}$ katsayı matrisleri (5.4) ve (5.6) formunda olmak üzere

$$y\mathbb{K}_k = \tilde{A}_{k,2}\mathbb{K}_{k+1} + \tilde{B}_{k,2}\mathbb{K}_k + \tilde{A}_{k-1,2}^T \mathbb{K}_{k-1}$$

rekürans formülünü de sağlar. ■

Sonuç 5.1 İki değişkenli Kravchuk polinomları için yukarıda verilen üç terimli rekürans formüllerindeki katsayı matrisleri, iki değişkenli Hahn polinomları için Teorem 5.3 de verilen rekürans formüllerinde, (5.16) eşitliği ile verilen iki değişkenli Hahn polinomları ve iki değişkenli Kravchuk polinomları arasındaki limit bağıntısının kullanılmasıyla da elde edilebilir.

Teorem 5.10 İki değişkenli Kravchuk polinomları $K_{k_1,k_2}^{q_1,q_2}(x,y;N) = u(x,y)$

$$(q_1 - 1)x\Delta_1\nabla_1u(x,y) + (q_2 - 1)y\Delta_2\nabla_2u(x,y) + q_1y\Delta_1\nabla_2u(x,y) + q_2x\Delta_2\nabla_1u(x,y) \\ + (x - Nq_1)\Delta_1u(x,y) + (y - Nq_2)\Delta_2u(x,y) - (k_1 + k_2)u(x,y) = 0$$

fark denklemini sağlar.

İspat. İki değişkenli Hahn polinomları için elde edilen (5.14) fark denkleminde $\gamma = p_1t$, $\eta = p_2t$, $\delta = (1 - q_1 - q_2)t$ ve $N \rightarrow N + 1$ alınıp denklemin her iki yanı $\frac{1}{t}$ ile çarpıldıktan sonra $t \rightarrow \infty$ için limit alınır ve iki değişkenli Hahn polinomları ve Kravchuk polinomları arasındaki bilinen (5.16) limit bağıntısı kullanılırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [x(1 + q_2t + (1 - q_1 - q_2)t + N + 1 - x)\Delta_1\nabla_1u(x,y) \\ + y(1 + q_1t + (1 - q_1 - q_2)t + N + 1 - y)\Delta_2\nabla_2u(x,y) \\ - y(1 + q_1t + x)\Delta_1\nabla_2u(x,y) - x(1 + q_2t + y)\Delta_2\nabla_1u(x,y) \\ + ((1 + q_1t)N - x(3 + q_1t + q_2t + (1 - q_1 - q_2)t)\Delta_1u(x,y) \\ + ((1 + q_2t)N - y(3 + q_1t + q_2t + (1 - q_1 - q_2)t)\Delta_2u(x,y) \\ + (k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + q_1t + q_2t + (1 - q_1 - q_2)t + 2)u(x,y)] \\ = 0$$

eşitliğinden

$$(q_1 - 1)x\Delta_1\nabla_1u(x, y) + (q_2 - 1)y\Delta_2\nabla_2u(x, y) + q_1y\Delta_1\nabla_2u(x, y) + q_2x\Delta_2\nabla_1u(x, y) \\ + (x - Nq_1)\Delta_1u(x, y) + (y - Nq_2)\Delta_2u(x, y) - (k_1 + k_2)u(x, y) = 0$$

fark denklemi elde edilir. ■

5.3 İki Değişkenli Meixner Ortogonal Polinomları

Teorem 5.1' in bir uygulaması olarak ayrık iki değişkenli Meixner polinomları $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ve ϱ_1, ϱ_2 sıfır olmayan reel parametreler olmak üzere

$$M_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) = m_{k_1}^{(-x-y, -\varrho_1/\varrho_2)}(x) m_{k_2}^{(\tau+k_1, \varrho_1+\varrho_2)}(x+y-k_1)$$

formunda tanımlanır. Bu polinom ailesinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$$M_{0,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) = 1,$$

$$M_{1,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}x - y,$$

$$M_{0,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) = \tau + \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2}\right)(x + y),$$

$$M_{2,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) = \left\{ \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1} \right) x \left[2(-x - y + 1) - \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1} \right) \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1} \right)^2 x^2 + (x + y)(x + y - 1) \right\},$$

$$M_{1,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) = \left(-x - y + \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1} \right) x \right) \left((\tau + 1) + \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2} \right) (x + y - 1) \right),$$

$$M_{0,2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) = \left\{ \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2} \right) (x + y) \left[2(\tau + 1) - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2} \right) \right] \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2} \right)^2 (x + y)^2 + \tau(\tau + 1) \right\}$$

⋮

Teorem 5.11 İki değişkenli Meixner polinomları

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} M_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) M_{l_1, l_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) \frac{\varrho_1^x \varrho_2^y (\tau)_{x+y}}{x! y!} (1 - \varrho_1 - \varrho_2)^\tau \\ = \Theta_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} \delta_{k_1, l_1} \delta_{k_2, l_2}$$

ortogonalite bağıntısını gerçekler. Burada $\Theta_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}$ kare normu

$$\Theta_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} = k_1! k_2! (\tau)_{k_1+k_2} (\varrho_1 + \varrho_2)^{k_1-k_2} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1(1-\varrho_1-\varrho_2)} \right)^{k_1}$$

şeklindedir.

Teorem 5.12 İki değişkenli Meixner ortogonal polinomları ve iki değişkenli Kravchuk ortogonal polinomları arasında

$$\frac{N! K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N)}{(N - k_1)!} = \frac{M_{k_1, k_2}^{-N, q_1/(q_1+q_2-1), q_2/(q_1+q_2-1)}(x, y)}{(k_1 - N)_{k_2}} \quad (5.21)$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. İki değişkenli Kravchuk polinomlarının tanımını ve hipergeometrik fonksiyon cinsinden açılımını kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{N! K_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y; N)}{(N - k_1)!} &= \frac{1}{(k_1 - N)_{k_2}} k_{k_1}^{(q_1/(q_1+q_2))}(x; x+y) k_{k_2}^{(q_1+q_2)}(x+y-k_1; N-k_1) \\ &= \frac{(-x-y)_{k_1} (k_1 - N)_{k_2}}{(k_1 - N)_{k_2}} \sum_{i=0}^{k_2} \frac{(-k_2)_i (-x-y+k_1)_i \left(\frac{1}{q_1+q_2} \right)^i}{(k_1 - N)_i i!} \sum_{j=0}^{k_1} \frac{(-k_1)_j (-x)_j \left(\frac{q_1+q_2}{q_1} \right)^j}{(-x-y)_j j!} \\ &= \frac{M_{k_1, k_2}^{-N, q_1/(q_1+q_2-1), q_2/(q_1+q_2-1)}(x, y)}{(k_1 - N)_{k_2}} \end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. ■

İki değişkenli ortonormal Meixner polinomları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\hat{M}_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) = \frac{M_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}}}$$

Ortonormal polinom vektörü

$$\mathbb{M}_k = \left(\hat{M}_{k,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y), \dots, \hat{M}_{k-j,j}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y), \dots, \hat{M}_{0,k}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y) \right)^T$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.13 Meixner polinomları aşağıdaki üç terimli rekürans ilişkisini gerçekler.

$$x_j \mathbb{M}_k = \tilde{A}_{k,j} \mathbb{M}_{k+1} + \tilde{B}_{k,j} \mathbb{M}_k + \tilde{A}_{k-1,j}^T \mathbb{M}_{k-1} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (5.22)$$

Burada $x_1 = x$, $x_2 = y$, $M_{-1} = 0$, $\tilde{A}_{-1,j} = 0$ dır ve $\tilde{A}_{k,1}$, $\tilde{A}_{k,2}$, $\tilde{B}_{k,1}$, $\tilde{B}_{k,2}$ katsayı matrisleri (5.3), (5.4),(5.5) ve (5.6) eşitlikleriyle verilen formlarda olup elde edilen katsayılar aşağıdaki gibi bulunur.

$$a_{j,j} = \sqrt{\frac{(\tau + k)(1 - j + k)\varrho_1\varrho_2}{(1 - \varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)}},$$

$$r_{j,j+1} = -\frac{\varrho_1\sqrt{(1+j)(k+\tau)}}{(1 - \varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{\varrho_1 + \varrho_2}},$$

$$u_{j,j+2} = 0,$$

$$f_{j,j+1} = -\frac{\sqrt{(1+j)(-j+k)\varrho_1\varrho_2}}{\sqrt{1 - \varrho_1 - \varrho_2}(\varrho_1 + \varrho_2)},$$

$$b_{j,j} = \frac{-(j\varrho_1) - (\tau + k)\varrho_1^2 - (-j + k)\varrho_2 - (\tau + j)\varrho_1\varrho_2 + (-j + k)\varrho_2^2}{(-1 + \varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)}$$

$$v_{j,j} = -\sqrt{\frac{(\tau + k)(1 - j + k)\varrho_1\varrho_2}{(1 - \varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)}},$$

$$c_{j,j+1} = -\frac{\varrho_2\sqrt{(1+j)(k+\tau)}}{(1 - \varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{\varrho_1 + \varrho_2}},$$

$$t_{j,j+2} = 0,$$

$$e_{j,j} = \frac{-((-j + k)\varrho_1) + (-j + k)\varrho_1^2 - j\varrho_2 - (\tau + j)\varrho_1\varrho_2 - (\tau + k)\varrho_2^2}{(-1 + \varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)},$$

$$s_{j,j+1} = \frac{\sqrt{(1+j)(-j+k)\varrho_1\varrho_2}}{\sqrt{1 - \varrho_1 - \varrho_2}(\varrho_1 + \varrho_2)}$$

İspat. İlk olarak $x_1 = x$ alarak

$$x\mathbb{M}_k = \tilde{A}_{k,1}\mathbb{M}_{k+1} + \tilde{B}_{k,1}\mathbb{M}_k + \tilde{A}_{k-1,1}^T\mathbb{M}_{k-1}$$

bağıntısının sağlandığını görelim. Bunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım. $k = 0$ için

$$x\mathbb{M}_0 = \tilde{A}_{0,1}\mathbb{M}_1 + \tilde{B}_{0,1}\mathbb{M}_0 \quad (5.23)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_0 &= \hat{M}_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}, \quad \mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} \hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \\ \hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{B}_{0,1} &= (b_{0,0}), \quad \tilde{A}_{0,1} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

formundadır. $\hat{M}_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}$, $\hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}$ ve $\hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}$ polinomları

$$\begin{aligned}\hat{M}_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} &= \frac{M_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} = 1, \\ \hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} &= \frac{M_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} = \frac{-x - y + \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1}\right)x}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}}, \\ \hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} &= \frac{M_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} = \frac{\tau + \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2}\right)(x+y)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}}\end{aligned} \tag{5.24}$$

açılımlarına sahiptir. Bunlar (5.23) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x = a_{0,0} M_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + r_{0,1} M_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + b_{0,0}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{a_{0,0}}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} \left(-x - y + \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1}\right)x \right) \\ &+ \frac{r_{0,1}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} \left(\tau + \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2}\right)(x+y) \right) + b_{0,0}\end{aligned}$$

elde edilir. Polinom eşitliğinden katsayılar kıyaslanırsa

$$\begin{aligned}a_{0,0} &= \sqrt{\frac{\tau \varrho_1 \varrho_2}{(1 - \varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)}}, \\ r_{0,1} &= -\frac{\sqrt{\tau} \varrho_1}{(1 - \varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{\varrho_1 + \varrho_2}}, \\ b_{0,0} &= \frac{\tau \varrho_1}{1 - \varrho_1 - \varrho_2}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $k = 1$ için katsayı matrislerini elde etmeye çalışalım.

$$x\mathbb{M}_1 = \tilde{A}_{1,1}\mathbb{M}_2 + \tilde{B}_{1,1}\mathbb{M}_1 + \tilde{A}_{0,1}^T\mathbb{M}_0 \tag{5.25}$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_0 &= \hat{M}_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}, \quad \mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} \hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \\ \hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_2 = \begin{pmatrix} \hat{M}_{2,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \\ \hat{M}_{1,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \\ \hat{M}_{0,2}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \end{pmatrix} \\
\tilde{A}_{0,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{0,1}^T = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ r_{0,1} \end{pmatrix}, \\
\tilde{A}_{1,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & a_{1,1} & r_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{1,1} = \begin{pmatrix} b_{0,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & b_{1,1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

formundadır. (5.24) eşitliği ile verilen polinomlar ve

$$\hat{M}_{2,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} = \frac{M_{2,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{2,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}}, \quad \hat{M}_{1,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} = \frac{M_{1,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{1,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}}, \quad \hat{M}_{0,2}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} = \frac{M_{0,2}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}}$$

polinomları (5.25) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
x\hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} &= a_{0,0} \hat{M}_{2,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + r_{0,1} \hat{M}_{1,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + u_{0,2} \hat{M}_{0,2}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \\
&\quad + b_{0,0} \hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + f_{0,1} \hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + a_{0,0}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
x\hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} &= a_{1,1} \hat{M}_{1,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + r_{1,2} \hat{M}_{0,2}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + f_{1,0} \hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \\
&\quad + b_{1,1} \hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + r_{0,1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Burada polinomların katsayıları karşılaştırıldığında

$$a_{1,1} = \sqrt{\frac{(\tau+1)\varrho_1\varrho_2}{(1-\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_2)}},$$

$$r_{1,2} = -\frac{\varrho_1\sqrt{2(\tau+1)}}{(1-\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{\varrho_1+\varrho_2}},$$

$$u_{0,2} = 0,$$

$$b_{1,1} = \frac{\varrho_1 + (\tau+1)\varrho_1(\varrho_1+\varrho_2)}{(1-\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_2)},$$

$$f_{0,1} = f_{1,0} = -\frac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2}}{\sqrt{1-\varrho_1-\varrho_2}(\varrho_1+\varrho_2)},$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlanırsa iki değişkenli ortonormal Meixner polinomlarının, $\tilde{A}_{k,1}$ ve $\tilde{B}_{k,1}$ katsayı matrisleri (5.3) ve (5.5) formunda olmak üzere

$$x\mathbb{M}_k = \tilde{A}_{k,1}\mathbb{M}_{k+1} + \tilde{B}_{k,1}\mathbb{M}_k + \tilde{A}_{k-1,1}^T \mathbb{M}_{k-1}$$

rekürans formülünü sağladığı görülür. Benzer şekilde, (5.22) eşitliğinde $x_2 = y$ alınarak iki değişkenli ortonormal Meixner polinomları

$$y\mathbb{M}_k = \tilde{A}_{k,2}\mathbb{M}_{k+1} + \tilde{B}_{k,2}\mathbb{M}_k + \tilde{A}_{k-1,2}^T \mathbb{M}_{k-1}$$

rekürans formülü gerçekler. $k = 0$ için

$$y\mathbb{M}_0 = \tilde{A}_{0,2}\mathbb{M}_1 + \tilde{B}_{0,2}\mathbb{M}_0 \quad (5.27)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0 &= \hat{M}_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}, \quad \mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} \hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \\ \hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{B}_{0,2} &= (e_{0,0}), \quad \tilde{A}_{0,2} = \begin{pmatrix} v_{0,0} & c_{0,1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

formundadır. $\hat{M}_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}$, $\hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}$ ve $\hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}$ polinomları

$$\begin{aligned} \hat{M}_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} &= \frac{M_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{0,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} = 1, \\ \hat{M}_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} &= \frac{M_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} = \frac{-x - y + \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1}\right)x}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}}, \\ \hat{M}_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} &= \frac{M_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} = \frac{\tau + \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2}\right)(x+y)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} \end{aligned} \quad (5.28)$$

açılımlarına sahiptir. Bunlar (5.27) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y &= v_{0,0} M_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + c_{0,1} M_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2} + e_{0,0} \\ y &= \frac{v_{0,0}}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} \left(-x - y + \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1}\right)x \right) \\ &\quad + \frac{c_{0,1}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}}} \left(\tau + \left(1 - \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2}\right)(x+y) \right) + e_{0,0} \end{aligned}$$

elde edilir. Polinom eşitliğinden katsayılar kıyaslanırsa

$$\begin{aligned} v_{0,0} &= -\sqrt{\frac{\tau \varrho_1 \varrho_2}{(1 - \varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)}} = -a_{0,0}, \\ c_{0,1} &= -\frac{\sqrt{\tau} \varrho_2}{(1 - \varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{\varrho_1 + \varrho_2}}, \\ e_{0,0} &= -\frac{\tau \varrho_2}{(-1 + \varrho_1 + \varrho_2)} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $k = 1$ için katsayı matrislerini elde etmeye çalışalım.

$$y\mathbb{M}_1 = \tilde{A}_{1,2}\mathbb{M}_2 + \tilde{B}_{1,2}\mathbb{M}_1 + \tilde{A}_{0,2}^T\mathbb{M}_0 \quad (5.29)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0 &= \hat{M}_{0,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}, \quad \mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} \hat{M}_{1,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} \\ \hat{M}_{0,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_2 = \begin{pmatrix} \hat{M}_{2,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} \\ \hat{M}_{1,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} \\ \hat{M}_{0,2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_{0,2} &= \begin{pmatrix} v_{0,0} & c_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{0,2}^T = \begin{pmatrix} v_{0,0} \\ c_{0,1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_{1,2} &= \begin{pmatrix} v_{0,0} & c_{0,1} & t_{0,2} \\ 0 & v_{1,1} & c_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{1,2} = \begin{pmatrix} e_{0,0} & s_{0,1} \\ s_{1,0} & e_{1,1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

formundadır. (5.28) eşitliği ile verilen polinomlar ve

$$\hat{M}_{2,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} = \frac{M_{2,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{2,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}}}, \quad \hat{M}_{1,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} = \frac{M_{1,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{1,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}}}, \quad \hat{M}_{0,2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} = \frac{M_{0,2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2}}}$$

polinomları (5.29) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y\hat{M}_{1,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} &= v_{0,0} \hat{M}_{2,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} + c_{0,1} \hat{M}_{1,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} + t_{0,2} \hat{M}_{0,2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} \\ &\quad + e_{0,0} \hat{M}_{1,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} + s_{0,1} \hat{M}_{0,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} + v_{0,0} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y\hat{M}_{0,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} &= v_{1,1} \hat{M}_{1,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} + c_{1,2} \hat{M}_{0,2}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} + s_{1,0} \hat{M}_{1,0}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} \\ &\quad + e_{1,1} \hat{M}_{0,1}^{\tau, \varrho_1, \varrho_2} + c_{0,1} \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Burada polinomların katsayıları karşılaştırıldığında

$$v_{1,1} = -\sqrt{\frac{(\tau+1)\varrho_1\varrho_2}{(1-\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_2)}} = -a_{1,1},$$

$$c_{1,2} = -\frac{\varrho_2\sqrt{2(\tau+1)}}{(1-\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{\varrho_1+\varrho_2}},$$

$$t_{0,2} = 0,$$

$$e_{1,1} = \frac{-\varrho_2 - (\tau+1)\varrho_2(\varrho_1+\varrho_2)}{(-1+\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_2)},$$

$$s_{0,1} = s_{1,0} = \frac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2}}{\sqrt{1-\varrho_1-\varrho_2}(\varrho_1+\varrho_2)},$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlanırsa iki değişkenli ortonormal Meixner polinomlarının, $\tilde{A}_{k,2}$ ve $\tilde{B}_{k,2}$ katsayı matrisleri (5.4) ve (5.6) formunda olmak üzere

$$y\mathbb{M}_k = \tilde{A}_{k,2}\mathbb{M}_{k+1} + \tilde{B}_{k,2}\mathbb{M}_k + \tilde{A}_{k-1,2}^T \mathbb{M}_{k-1}$$

rekürans formülünü sağladığı görülür. Genel durumda matris katsayılarının sağlandığı Mathematica programı yardımıyla gösterilmiştir. ■

Sonuç 5.2 İki değişkenli Meixner polinomları için yukarıda verilen üç terimli rekürans formüllerindeki katsayı matrisleri, iki değişkenli Kravchuk polinomları için Teorem 5.9 da verilen rekürans formülünde, (5.21) eşitliği ile verilen iki değişkenli Kravchuk polinomları ve iki değişkenli Meixner polinomları arasındaki bağıntısının kullanılmasıyla da ayrıca elde edilebilir.

Teorem 5.14 $M_{k_1,k_2}^{\tau,\varrho_1,\varrho_2}(x,y)$ iki değişkenli Meixner polinomları

$$\begin{aligned} & (1-\varrho_2)x\Delta_1\nabla_1u(x,y) + (1-\varrho_1)y\Delta_2\nabla_2u(x,y) + \varrho_1y\Delta_1\nabla_2u(x,y) \\ & + \varrho_2x\Delta_2\nabla_1u(x,y) + ((\varrho_1+\varrho_2-1)x + \tau\varrho_1)\Delta_1u(x,y) \\ & + ((\varrho_1+\varrho_2-1)y + \tau\varrho_2)\Delta_2u(x,y) - (k_1+k_2)(\varrho_1+\varrho_2-1)u(x,y) = 0 \end{aligned}$$

fark denklemini sağlar.

İspat. İki değişkenli Kravchuk polinomları için elde edilen fark denkleminde $N = -\tau$, $q_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2 - 1}$, $q_2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2 - 1}$ alınarak iki değişkenli Meixner ve Kravchuk polinomları arasındaki (5.21) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\varrho_1}{(\varrho_1 + \varrho_2 - 1)} - 1 \right) x \Delta_1 \nabla_1 u(x, y) + \left(\frac{\varrho_2}{(\varrho_1 + \varrho_2 - 1)} - 1 \right) y \Delta_2 \nabla_2 u(x, y) \\
& \frac{\varrho_1}{(\varrho_1 + \varrho_2 - 1)} y \Delta_1 \nabla_2 u(x, y) + \frac{\varrho_2}{(\varrho_1 + \varrho_2 - 1)} x \Delta_2 \nabla_1 u(x, y) \\
& + \left(x + \tau \frac{\varrho_1}{(\varrho_1 + \varrho_2 - 1)} \right) \Delta_1 u(x, y) + \left(y + \tau \frac{\varrho_2}{(\varrho_1 + \varrho_2 - 1)} \right) \Delta_2 u(x, y) \\
& = (k_1 + k_2) u(x, y)
\end{aligned}$$

eşitliğin düzenlenmesi ile istenilen fark denklemi elde edilir. ■

Benzer şekilde, eğer iki değişkenli Meixner polinomları ile Kravchuk polinomları arasındaki ilişki kullanılarak iki değişkenli Meixner polinomlarının parametrelerinde $\tau = -N$, $\varrho_1 = \frac{q_1}{q_1 + q_2 - 1}$, $\varrho_2 = \frac{q_2}{q_1 + q_2 - 1}$ alınıp iki değişkenli Meixner polinomunun fark denkleminde yerine yazılırsa iki değişkenli Kravchuk polinomlarının fark denklemi elde edilir.

5.4 İki Değişkenli Charlier Ortogonal Polinomları

Teorem 5.1' in bir uygulaması olarak ayrık iki değişkenli Charlier polinomları

$$C_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = m_{k_1}^{(-x-y, -\alpha_1/\alpha_2)}(x) c_{k_2}^{(\alpha_1+\alpha_2)}(x+y-k_1), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır. Burada $m_k^{(\tau, \varrho)}(x)$ polinomları, Meixner ortogonal polinomlarıdır. Bu polinom ailesinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$$C_{0,0}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = 1,$$

$$C_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) x - y,$$

$$C_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = 1 - \left(\frac{x + y}{\alpha_1 + \alpha_2} \right),$$

$$C_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} \right) x \left[2(-x - y + 1) - \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} \right) \right] + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 x^2 + (x + y)(x + y - 1)$$

$$C_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = \left(-x - y + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} \right) x \right) \left(1 - \frac{x + y - 1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)$$

$$C_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = 1 - \frac{x + y}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} + 2 \right) + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} (x + y)^2$$

$\vdots$

Teorem 5.1 den $C_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)$ iki değişkenli Charlier polinomları aşağıdaki ortogonalite bağıntısını sağlar.

Teorem 5.15 İki değişkenli Charlier polinomları

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} C_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) C_{l_1, l_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) \frac{\alpha_1^x \alpha_2^y}{x! y!} e^{-\alpha_1 - \alpha_2} = \Theta_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2} \delta_{k_1, l_1} \delta_{k_2, l_2}$$

ortogonalite ilişkisini sağlar. Burada

$$\Theta_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2} = k_1! k_2! \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{k_1} (\alpha_1 + \alpha_2)^{k_1 - k_2}$$

olarak bulunur.

Teorem 5.16 İki değişkenli Charlier ortogonal polinomları ve iki değişkenli Kravchuk ortogonal polinomları arasında

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N - k_1)!} K_{k_1, k_2}^{q_1/N, q_2/N}(x, y; N) = C_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y) \quad (5.31)$$

limit bağıntısı sağlanır.

İspat. İki değişkenli Kravchuk polinomlarının tanımından yararlanarak

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N - k_1)!} K_{k_1, k_2}^{q_1/N, q_2/N}(x, y; N) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_{k_1}^{(q_1/(q_1+q_2))}(x; x+y) k_{k_2}^{((q_1+q_2)/N)}(x+y-k_1; N-k_1)}{(k_1 - N)_{k_2}} \\
&= k_{k_1}^{(q_1/(q_1+q_2))}(x; x+y) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_{k_2}^{((q_1+q_2)/N)}(x+y-k_1; N-k_1)}{(k_1 - N)_{k_2}} \\
&= m_{k_1}^{(-x-y, -q_1/q_2)}(x) \lim_{N \rightarrow \infty} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k_2, & k_1 - x - y \\ & k_1 - N \end{matrix} \middle| \frac{N}{q_1 + q_2} \right) \\
&= m_{k_1}^{(-x-y, -q_1/q_2)}(x) c_{k_2}^{(q_1+q_2)}(x+y-k_1) = C_{k_1, k_2}^{q_1, q_2}(x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 5.17 İki değişkenli Charlier ortogonal polinomları ve iki değişkenli Meixner ortogonal polinomları arasında

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{M_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1/\tau, \varrho_2/\tau}(x, y)}{(\tau + k_1)_{k_2}} = C_{k_1, k_2}^{\varrho_1, \varrho_2}(x, y) \quad (5.32)$$

limit ilişkisi vardır.

İspat. İki değişkenli Meixner polinomlarının açık ifadesi yerine yazıldıktan sonra Meixner polinomlarının hipergeometrik açılımı dikkate alınıp limit alınır

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{M_{k_1, k_2}^{\tau, \varrho_1/\tau, \varrho_2/\tau}(x, y)}{(\tau + k_1)_{k_2}} &= m_{k_1}^{(-x-y, -\varrho_1/\varrho_2)}(x) \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{m_{k_2}^{(\tau+k_1, (\varrho_1+\varrho_2)/\tau)}(x+y-k_1)}{(\tau + k_1)_{k_2}} \\
&= m_{k_1}^{(-x-y, -\varrho_1/\varrho_2)}(x) \sum_{i=0}^{k_2} \frac{(-k_2)_i (k_1 - x - y)_i}{i!} \left(-\frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2} \right)^i \\
&= m_{k_1}^{(-x-y, -\varrho_1/\varrho_2)}(x) c_{k_2}^{(\varrho_1+\varrho_2)}(x+y-k_1) = C_{k_1, k_2}^{\varrho_1, \varrho_2}(x, y)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

İki değişkenli ortonormal Charlier polinomları

$$\hat{C}_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = \frac{C_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2}}}$$

eşitliği ile tanımlanır. Ortonormal polinom vektörü

$$\mathbb{C}_k = \left(\hat{C}_{k,0}^{\alpha_1,\alpha_2}(x,y), \dots, \hat{C}_{k-j,j}^{\alpha_1,\alpha_2}(x,y), \dots, \hat{C}_{0,k}^{\alpha_1,\alpha_2}(x,y) \right)^T$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.18 İki değişkenli ortonormal Charlier polinomları aşağıdaki üç terimli rekürans bağıntısını gerçekler.

$$x_j \mathbb{C}_k = \tilde{A}_{k,j} \mathbb{C}_{k+1} + \tilde{B}_{k,j} \mathbb{C}_k + \tilde{A}_{k-1,j}^T \mathbb{C}_{k-1} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (5.33)$$

Burada $x_1 = x$, $x_2 = y$, $C_{-1} = 0$, $\tilde{A}_{-1,j} = 0$ dır ve $\tilde{A}_{k,1}$, $\tilde{A}_{k,2}$, $\tilde{B}_{k,1}$, $\tilde{B}_{k,2}$ katsayı matrisleri (5.3), (5.4), (5.5) ve (5.6) eşitlikleriyle verilen formlarda olup elde edilen katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$a_{j,j} = \sqrt{\frac{(1-j+k)\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}},$$

$$r_{j,j+1} = -\alpha_1 \sqrt{\frac{1+j}{\alpha_1 + \alpha_2}},$$

$$u_{j,j+2} = 0,$$

$$f_{j,j+1} = -\frac{\sqrt{(1+j)(-j+k)\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$b_{j,j} = \frac{\alpha_1^2 + (-j+k)\alpha_2 + \alpha_1(j+\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$v_{j,j} = -\sqrt{\frac{(1-j+k)\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}},$$

$$c_{j,j+1} = -\alpha_2 \sqrt{\frac{1+j}{\alpha_1 + \alpha_2}},$$

$$t_{j,j+2} = 0,$$

$$e_{j,j} = \frac{\alpha_2(j + \alpha_2) + \alpha_1(-j + k + \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$s_{j,j+1} = \frac{\sqrt{(1+j)(-j+k)\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

İspat. İlk olarak $x_1 = x$ alarak

$$x\mathbb{C}_k = \tilde{A}_{k,1}\mathbb{C}_{k+1} + \tilde{B}_{k,1}\mathbb{C}_k + \tilde{A}_{k-1,1}^T\mathbb{C}_{k-1}$$

bağıntısının sağlandığını görelim. $k = 0$ için

$$x\mathbb{C}_0 = \tilde{A}_{0,1}\mathbb{C}_1 + \tilde{B}_{0,1}\mathbb{C}_0 \quad (5.34)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_0 &= \hat{C}_{0,0}^{\alpha_1,\alpha_2}, \quad \mathbb{C}_1 = \begin{pmatrix} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2} \\ \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{B}_{0,1} &= (b_{0,0}), \quad \tilde{A}_{0,1} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

formundadır. Burada $\hat{C}_{0,0}^{\alpha_1,\alpha_2}$, $\hat{C}_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2}$ ve $\hat{C}_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2}$ polinomları

$$\begin{aligned} \hat{C}_{0,0}^{\alpha_1,\alpha_2} &= \frac{C_{0,0}^{\alpha_1,\alpha_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{0,0}^{\alpha_1,\alpha_2}}} = 1, \\ \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2} &= \frac{C_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2}}} = \frac{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x - y}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2}}}, \\ \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2} &= \frac{C_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2}(x,y)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2}}} = \frac{1 - \left(\frac{x+y}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2}}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

açılımların sahiptir. Bunlar (5.34)'de yerine yazılırsa

$$x = a_{0,0} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2} + r_{0,1} \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2} + b_{0,0}$$

elde edilir, buradan

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_{0,0}}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2}}} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x - y \right) \\ &+ \frac{r_{0,1}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2}}} \left(1 - \frac{x+y}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) + b_{0,0} \end{aligned}$$

sağlanır ve

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ r_{0,1} &= -\alpha_1 \sqrt{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ b_{0,0} &= \alpha_1 \end{aligned}$$

katsayıları elde edilir. Şimdi de $k = 1$ için katsayı matrislerini elde etmeye çalışalım.

$$x\mathbb{C}_1 = \tilde{A}_{1,1}\mathbb{C}_2 + \tilde{B}_{1,1}\mathbb{C}_1 + \tilde{A}_{0,1}^T\mathbb{C}_0 \quad (5.36)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_0 &= \hat{C}_{0,0}^{\alpha_1, \alpha_2}, \quad \mathbb{C}_1 = \begin{pmatrix} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_2 = \begin{pmatrix} \hat{C}_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ \hat{C}_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ \hat{C}_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_{0,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{0,1}^T = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ r_{0,1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_{1,1} &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & r_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & a_{1,1} & r_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{1,1} = \begin{pmatrix} b_{0,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & b_{1,1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.37)$$

formundadır. (5.35) eşitliği ile verilen polinomlar ve

$$\hat{C}_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{C_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2}}}, \quad \hat{C}_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{C_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2}}}, \quad \hat{C}_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{C_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2}}}$$

polinomları (5.36) bağıntısında yerine konulursa

$$\begin{aligned} x\hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} &= a_{0,0} \hat{C}_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2} + r_{0,1} \hat{C}_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2} + u_{0,2} \hat{C}_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ &\quad + b_{0,0} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} + f_{0,1} \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} + a_{0,0} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x\hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} &= a_{1,1} \hat{C}_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2} + r_{1,2} \hat{C}_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2} + f_{1,0} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ &\quad + b_{1,1} \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} + r_{0,1} \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Burada polinomların katsayıları karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ r_{1,2} &= -\alpha_1 \sqrt{\frac{2}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ u_{0,2} &= 0, \\ b_{1,1} &= \frac{\alpha_1^2 + \alpha_1(\alpha_2 + 1)}{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ f_{0,1} &= f_{1,0} = -\frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlandığında genel durumda iki değişkenli ortonormal Charlier polinomları

$$x\mathbb{C}_k = \tilde{A}_{k,1}\mathbb{C}_{k+1} + \tilde{B}_{k,1}\mathbb{C}_k + \tilde{A}_{k-1,1}^T \mathbb{C}_{k-1}$$

rekürans bağıntısını gerçekler. Benzer şekilde, (5.33) eşitliğinde $x_2 = y$ alınarak iki değişkenli ortonormal Charlier polinomları

$$y\mathbb{C}_k = \tilde{A}_{k,2}\mathbb{C}_{k+1} + \tilde{B}_{k,2}\mathbb{C}_k + \tilde{A}_{k-1,2}^T \mathbb{C}_{k-1}$$

rekürans formülü de sağlanır. $k = 0$ alalım. Buradan

$$y\mathbb{C}_0 = \tilde{A}_{0,2}\mathbb{C}_1 + \tilde{B}_{0,2}\mathbb{C}_0 \quad (5.38)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_0 &= \hat{C}_{0,0}^{\alpha_1, \alpha_2}, \quad \mathbb{C}_1 = \begin{pmatrix} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{B}_{0,2} &= (e_{0,0}), \quad \tilde{A}_{0,2} = \begin{pmatrix} v_{0,0} & c_{0,1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

formundadır. Burada $\hat{C}_{0,0}^{\alpha_1, \alpha_2}$, $\hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2}$ ve $\hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2}$ polinomları

$$\begin{aligned} \hat{C}_{0,0}^{\alpha_1, \alpha_2} &= \frac{C_{0,0}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{0,0}^{\alpha_1, \alpha_2}}} = 1, \\ \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} &= \frac{C_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2}}} = \frac{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x - y}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2}}}, \\ \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} &= \frac{C_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2}}} = \frac{1 - \left(\frac{x + y}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2}}} \end{aligned} \quad (5.39)$$

açılımların sahiptir. Bunlar (5.38)'de yerine yazılırsa

$$y = v_{0,0} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} + c_{0,1} \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} + e_{0,0}$$

elde edilir, buradan

$$\begin{aligned} y &= \frac{v_{0,0}}{\sqrt{\Theta_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2}}} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x - y \right) \\ &+ \frac{c_{0,1}}{\sqrt{\Theta_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2}}} \left(1 - \frac{x+y}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) + e_{0,0} \end{aligned}$$

sağlanır ve

$$\begin{aligned} v_{0,0} &= -\sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ c_{0,1} &= -\alpha_2 \sqrt{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ e_{0,0} &= \alpha_2 \end{aligned}$$

katsayıları elde edilir. Şimdi de $k = 1$ için katsayı matrislerini elde etmeye çalışalım.

$$y\mathbb{C}_1 = \tilde{A}_{1,2}\mathbb{C}_2 + \tilde{B}_{1,2}\mathbb{C}_1 + \tilde{A}_{0,2}^T\mathbb{C}_0 \quad (5.40)$$

bağıntısı gerçekleşmelidir. Burada ortonormal polinomlar ve katsayı matrisleri

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_0 &= \hat{C}_{0,0}^{\alpha_1, \alpha_2}, \quad \mathbb{C}_1 = \begin{pmatrix} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_2 = \begin{pmatrix} \hat{C}_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ \hat{C}_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ \hat{C}_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_{0,2} &= \begin{pmatrix} v_{0,0} & c_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{0,2}^T = \begin{pmatrix} v_{0,0} \\ c_{0,1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_{1,2} &= \begin{pmatrix} v_{0,0} & c_{0,1} & t_{0,2} \\ 0 & v_{1,1} & c_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{1,2} = \begin{pmatrix} e_{0,0} & s_{0,1} \\ s_{1,0} & e_{1,1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.41)$$

formundadır. (5.39) eşitliği ile verilen polinomlar ve

$$\hat{C}_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{C_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2}}}, \quad \hat{C}_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{C_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2}}}, \quad \hat{C}_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{C_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)}{\sqrt{\Theta_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2}}}$$

polinomları (5.40) bağıntısında yerine konulursa

$$\begin{aligned} y\hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} &= v_{0,0} \hat{C}_{2,0}^{\alpha_1, \alpha_2} + c_{0,1} \hat{C}_{1,1}^{\alpha_1, \alpha_2} + t_{0,2} \hat{C}_{0,2}^{\alpha_1, \alpha_2} \\ &+ e_{0,0} \hat{C}_{1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} + s_{0,1} \hat{C}_{0,1}^{\alpha_1, \alpha_2} + v_{0,0} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y\hat{C}_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2} &= v_{1,1}\hat{C}_{1,1}^{\alpha_1,\alpha_2} + c_{1,2}\hat{C}_{0,2}^{\alpha_1,\alpha_2} + s_{1,0}\hat{C}_{1,0}^{\alpha_1,\alpha_2} \\ &\quad + e_{1,1}\hat{C}_{0,1}^{\alpha_1,\alpha_2} + c_{0,1} \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Burada polinomların katsayıları karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= -\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ c_{1,2} &= -\alpha_2 \sqrt{\frac{2}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ t_{0,2} &= 0, \\ e_{1,1} &= \frac{\alpha_2(\alpha_2 + \alpha_1 + 1)}{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ s_{0,1} &= s_{1,0} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlandığında genel durumda iki değişkenli ortonormal Charlier polinomları

$$y\mathbb{C}_k = \tilde{A}_{k,2}\mathbb{C}_{k+1} + \tilde{B}_{k,2}\mathbb{C}_k + \tilde{A}_{k-1,2}^T \mathbb{C}_{k-1}$$

rekürans bağıntısını gerçekler. Genel durumda matris katsayıları Mathematica programı yardımıyla elde edilmiştir. ■

Sonuç 5.3 İki değişkenli Charlier polinomları için yukarıda verilen üç terimli rekürans formüllerindeki katsayı matrisleri, iki değişkenli Meixner polinomları için Teorem 5.13 de verilen rekürans formüllerinde, (5.32) eşitliği ile verilen iki değişkenli Meixner ve Charlier polinomları arasındaki bağıntısının kullanılmasıyla da elde edilebilir. Aynı durum iki değişkenli Kravchuk polinomları ve iki değişkenli Charlier polinomları arasındaki bağıntının kullanılmasıyla da verilebilir.

Teorem 5.19 $C_{k_1,k_2}^{\alpha_1,\alpha_2}(x,y)$ iki değişkenli Charlier polinomları

$$\begin{aligned} x\Delta_1\nabla_1u(x,y) + y\Delta_2\nabla_2u(x,y) + (\alpha_1 - x)\Delta_1u(x,y) \\ + (\alpha_2 - y)\Delta_2u(x,y) + (k_1 + k_2)u(x,y) = 0 \end{aligned}$$

fark denklemini sağlar.

İspat. İki değişkenli Kravchuk polinomları için elde edilen fark denkleminde $q_1 = \alpha_1/N$, $q_2 = \alpha_2/N$ alınarak iki değişkenli Kravchuk polinomları ve iki değişkenli Charlier polinomları arasındaki bilinen (5.31) ile verilen limit ilişkisi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N - k_1)!} \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{N} - 1 \right) x \Delta_1 \nabla_1 K_{k_1, k_2}^{\alpha_1/N, \alpha_2/N}(x, y; N) \right. \\
& + \left(\frac{\alpha_2}{N} - 1 \right) y \Delta_2 \nabla_2 K_{k_1, k_2}^{\alpha_1/N, \alpha_2/N}(x, y; N) + \frac{\alpha_1}{N} y \Delta_1 \nabla_2 K_{k_1, k_2}^{\alpha_1/N, \alpha_2/N}(x, y; N) \\
& + \frac{\alpha_2}{N} x \Delta_2 \nabla_1 K_{k_1, k_2}^{\alpha_1/N, \alpha_2/N}(x, y; N) + (x - \alpha_1) \Delta_1 K_{k_1, k_2}^{\alpha_1/N, \alpha_2/N}(x, y; N) \\
& \left. + (y - \alpha_2) \Delta_2 K_{k_1, k_2}^{\alpha_1/N, \alpha_2/N}(x, y; N) - (k_1 + k_2) K_{k_1, k_2}^{\alpha_1/N, \alpha_2/N}(x, y; N) \right\} = 0
\end{aligned}$$

eşitliğinden istenilen denkleme ulaşılır. ■

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, ayrık iki değişkenli ortogonal polinomlar ve bu polinomların özellikleri, kaynaklar bölümünde verilen birçok makale ve kitap yardımıyla incelenmiştir. İlk olarak bir değişkenli ve iki değişkenli sürekli ortogonal polinom ailelerinden bahsedilmiştir. Daha sonra ayrık tek değişkenli ortogonal polinomların genel özellikleri incelenmiş ve bu polinomlara örnek olarak Hahn, Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomları verilmiştir. Tezin diğer kısmında, T.H. Koornwinder'in tek değişkenli ortogonal polinomlar yardımıyla iki değişkenli ortogonal polinomlar elde etmek için ortaya koyduğu metot, ayrık ortogonal polinomlar için ele alınmıştır. $\{s_{k_1}(x; \lambda)\}$ ve $\{v_{k_2}(\lambda - k_1)\}$ polinom aileleri tek değişkenli Hahn, Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomlarından biri olmak üzere Koornwinder'in metodunun ayrık ortogonal polinomlar için uygulanmasıyla

$$\Xi_{k_1, k_2}(x, y) = \varphi(x + y; k_1) s_{k_1}(x; x + y) v_{k_2}(x + y - k_1)$$

formunda elde edilen ayrık iki değişkenli Hahn, Kravchuk, Meixner ve Charlier polinomları incelenmiştir. Ayrık iki değişkenli ortogonal polinomların birbirleri arasındaki ilişkilerine dikkat çekilmiştir. Ayrıca, ayrık iki değişkenli ortogonal polinomlar arasındaki ileri fark, geri fark operatör ilişkileri, vektör matris formunda rekürans bağıntıları ve fark denklemleri ele alınmıştır.

KAYNAKLAR

- Aktaş, R. 2007. Çok Değişkenli Ortogonal Polinomlar. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 196 sayfa, Ankara.
- Aktaş, R., Altın, A. and Taşdelen, F. 2011. A note on a family of two-variable polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 4825-4833.
- Aktaş, R., Taşdelen, F. and Yavuz, N. 2013. Bilateral and Bilinear generating functions for the Generalized Zernike or disc polynomials. *Ars Combinatoria*, 108, 389-400.
- Aktaş, R. 2014. A note on parameter derivatives of the Jacobi polynomials on the triangle. *Applied Mathematics and Computation*, 247, 368-372.
- Aktaş, R. 2016. Representations for parameter derivatives of some Koornwinder polynomials in two variables. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24(4), 555-561.
- Altın, A., Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E. 2009. On a multivariable extension for the extended Jacobi polynomials. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 353, 121-133.
- Ayata, B. 2012. Diskret Değişkenli Klasik Ortogonal Polinomlar. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 65 sayfa, Ankara.
- Bochner, S. 1929. Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. *Mathematische Zeitschrift*, 29, 730-736.
- Chihara, T.S. 1978. *An Introduction to Orthogonal Polynomials* (1. Baskı), Gordon and Breach, New York.
- Coleman, R. 2011. On Krawtchouk polynomials. *CoRR*, abs/1101.1798.
- Dunkl, C.F. and Xu, Y. 2014. *Orthogonal Polynomials of Several Variables*. 2nd edn. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, 155, Cambridge University Press, Cambridge.
- Fernandez, L., Perez, T.E. and Pinar, M.A. 2012. On Koornwinder classical orthogonal polynomials in two variables. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236, 3817-3826.
- Güldoğan, E., Aktaş, R. and Masjed-Jamei, M. 2020. On finite classes of two-variables orthogonal polynomials. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 46(4), 1163-1194.
- Hochstadt, H. 1971. *The Functions of Mathematical Physics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto.

- Karlin, S. and McGregor, J. 1958. Linear growth, birth and death processes, *Journal of Mathematical Mechanics*, 7, 643-662.
- Karlin, S. and McGregor, J. 1960. The Hahn Polynomials, Formulas and an Application *Applied Mathematics and Statistics laboratories Tech. Report*, 2, 1-24.
- Karlin, S. and McGregor, J. 1975. Linear growth models with many types and multi-dimensional Hahn polynomials. *Theory and Application of Special Functions*, Proc. adv. Semin. (Madison), 261-288.
- Koekoek, R., Lesky, P. A. and Swarttouw, R. 2010. *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues* (1. Baskı), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Koornwinder, T.H. 1975. Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials. In: Askey, R. (ed.) *Theory and Application of Special Functions*, 435-495, Academic Press, New York.
- Krall, H.L., Sheffer and I.M. 1967. Orthogonal polynomials in two variables. *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata*, 4(76), 325-376.
- Marcellán, F., Marriaga, M., Pérez, T.E. and Piñar, M. A. 2018. On bivariate classical orthogonal polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 325, 340-357.
- Marriaga, M., Perez, T.E. and Pinar, M.A. 2017. Three term relations for a class of bivariate orthogonal polynomials. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(54), 26.
- Messiah, A. 1967. *Quantum Mechanics Vol I* (4. Baskı), North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Milovanovic, G., Öztürk, G. and Aktaş, R. 2020. Properties of Some of Two-variable Orthogonal Polynomials. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(2), 1403-1431.
- Munsch, G. 1957. Résolution de l'équation de Schrödinger des atomes à deux électrons III. *Journal of Physics Radium*, 8(18), 552-558.
- Munsch, G. and Pluviniage, P. 1957. Résolution de l'équation de Schrödinger des atomes à deux électrons II. *Journal of Physics Radium*, 8(18), 157-160.
- Nikiforov, A.F., Suslov, S.K. and Uvarov, V.B. 1991. *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. Springer Series in Computational Physics, Springer, Berlin.
- Proriol, J. 1957. Sur une famille de polynomes à deux variables orthogonaux dans un triangle. *Comptes Rendus Academic des Sciences Paris*, 245 (5), 2459-2461.
- Rainville, E.D. 1960. *Special Functions*. 1st ed., The Macmillan Company, New York.

- Rodal, J., Area, I. and Godoy, E. 2005. Orthogonal polynomials of two discrete variables on the simplex. *Integral Trans. Spec. Func.*, 16 (3), 263-280.
- Suetin, P.K. 1988. *Orthogonal Polynomials in Two Variables*. Gordon and Breach Science Publishers, Moscow.
- Szegő, G. 1975. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 23, 4th ed. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Tratnik, M.V. 1989. Multivariable Meixner, Krawtchouk, and Meixner–Pollaczek polynomials. *Journal of Mathematical Physics*, 30(12), 2740–2749.
- Tratnik, M.V. 1991. Some multivariable orthogonal polynomials of the Askey tableau–discrete families. *Journal of Mathematical Physics*, 32(9), 2337–2342.
- Xu, Y. 2014. Tight frame with Hahn and Krawtchouk polynomials of several variables. *SIGMA*, 10, 019.
- Xu, Y. 2015. Hahn, Jacobi, and Krawtchouk polynomials of several variables. *J. Approx. Theory*, 195, 19-42.