T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV VE İNTEGRALLERİN BAZI EŞİTSİZLİKLERE UYGULANMASI

Mesut KISA

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞUBAT 2022

T.C.
Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrallerin Bazı Eşitsizliklere Uygulanması

Tez Yazarı

Mesut KISA

Danışman

Doç.Dr.Münevver TUZ

Şubat 2022
Elazığ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrallerin Bazı Eşitsizliklere Uygulanması
Yazarı:	Mesut KISA
İlk Teslim Tarihi:	11.01.2022
Savunma Tarihi:	04.02.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman:	Doç.Dr.Münevver TUZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Prof.Dr.Reşat YILMAZER Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr.Öğr.Üyesi Keziban TAŞ Munzur Üniversitesi, Pertek MYO Tıbbi Hizmetler ve Teknikler Bölümü	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ...../...../20.... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

Beyan

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım "Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrallerin Bazı Eşitsizliklere Uygulanması" başlıklı Yüksek Lisans Tezi tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

04/02/2022

Mesut KISA

Önsöz

Kesirli mertebeden türev ve integraller bazı matematiksel eşitlik ve eşitsizliklerin anlaşılmasında teoride ve pratikte oldukça büyük bir öneme sahiptir. Matematik dışında genel olarak fen bilimleri ve mühendislik alanlarında oldukça geniş bir uygulama potansiyeli bulunmaktadır. Bu çalışmada kesirli mertebeli türev ve integrallerin nasıl elde edildiği hakkında bilgiler verilmiştir. Bazı bilim adamların kesirli mertebeden türevlere farklı yaklaşım yolları gösterilmiş olup bu yaklaşımlar arasında ki farklılıklar gösterilmiştir. Sonrasında kesirli mertebeden integrallerin bazı eşitlik ve eşitsizliklerde kullanımı gösterilmiştir.

Tez hazırlama sürecinde bir an olsun desteğini esirgemeyen biricik eşime, neşesi ile beni motive eden canım kızıma ve tez konusunun seçiminde ve araştırmalarımda yardımcı olan yol gösteren sayın hocam Doç.Dr.Münevver TUZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Mesut KISA
Elazığ, 2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Önsöz . . . iv
İçindekiler . . . v
Özet . . . vi
Abstract . . . vii
Şekiller Listesi . . . viii
Simgeler ve Kısaltmalar . . . ix

1. GİRİŞ . . . 1

2. Materyal ve Metot . . . 3
- 2.1. Artan ve Azalan Fonksiyon . . . 3
- 2.2. Çift ve Tek Fonksiyon . . . 3
- 2.3. Konveks Küme . . . 4
- 2.4. Sınırlı Fonksiyon . . . 5
- 2.5. Hölder Eşitsizliği . . . 5
- 2.6. Lebesque İntegralinin Varlık Teoremi . . . 5
- 2.7. Gamma Fonksiyonu . . . 5
- 2.8. Beta Fonksiyonu . . . 9
- 2.9. Gamma ve Beta Fonksiyonları ile ilgili eşitlikler . . . 10
- 2.10. Hata Fonksiyonu . . . 10
- 2.11. Wright Fonksiyonu . . . 10
- 2.12. Mittag Leffler Fonksiyonu . . . 10
- 2.13. Mellin Ross Fonksiyonu . . . 11

3. Kesirli Mertebeden İntegraller ve Türevler . . . 13
- 3.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegral . . . 14
- 3.2. Laplace Kesirli Türevi . . . 15
- 3.3. Riemann-Liouville Kesirli Türev . . . 19
- 3.4. Grünwald Letnikov Kesirli Türevi . . . 22
- 3.5. Caputo Kesirli Türevi . . . 22

4. Kesirli İntegraller Yolu İle Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler . . . 29
- 4.1. J-Konveks Fonksiyon . . . 29
- 4.2. Konveks Fonksiyon . . . 29

5. Bulgular ve Tartışma . . . 34

Kaynaklar . . . 36
Ekler . . . 37
Özgeçmiş . . . 38

Özet

Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrallerin Bazı Eşitsizliklere Uygulanması

Mesut KISA

Yüksek Lisans Tezi

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Şubat 2022, Sayfa: ix +37

Kesirli mertebeli türev ve integraller oldukça popüler bir konudur. Kesirli mertebeli türev ve integral kavramı popüler olsa da bu konudaki ilk çalışmalar 1600'lü yıllarda olduğu bilinmektedir.

Bu çalışmada kesirli mertebeden türev ve integral kavramının nasıl ortaya çıktığı açıklanmıştır. Tarih boyunca kesirli mertebeden türev ve integraller üzerine çalışan bilim adamları tanıtılmıştır. Bilim adamlarının bu konuya farklı bakış açıları ifade edilmiştir. Daha sonra kesirli mertebeden türev ve integralleri daha iyi anlamak için önemli tanım ve teoremler ele alınmıştır. Yine kesirli mertebeden türev ve integrallerden en önemli yere sahip olan, Riemann-Liouville kesirli türev ve integrali, Grünwald Letnikov kesirli türevi ve Caputo kesirli türevi tanımlanmış, özelliklerine yer verilmiş, bazı özel fonksiyonların kesirli türev alma şekilleri incelenmiş, bunlara ait örnekler verilmiştir. Ayrıca bunların kesirli türev değişim grafiği çizilmiştir.

Son olarak kesirli integraller yolu ile konveks fonsiyonlar için bazı eşitsizlikler ele alınmıştır. Bu eşitsizliklerin sağlandığı ıspatlanarak, bunlarla ilgili uygulamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kesirli mertebeden türev ve integraller, Hermite Hadamard-Fejer tipi eşitsizlikler, Riemann-Liouville kesirli türev ve integraller, genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi ve uygulamaları, Grünwald Letnikov kesirli türevi

Abstract

Application of fractional derivatives and integrals to some inequalities

Mesut KISA

Master's Thesis

Firat University
Department of Mathematics

February 2022, Page: ix +37

Fractional derivatives and integrals are a very popular topic. Although the concept of fractional derivative and integral is popular, it is known that the first studies on this subject were in the 1600s.
In this study, it is explained how the concept of fractional derivative and integral emerged. Throughout history, scientists working on fractional derivatives and integrals have been introduced. Scientists have expressed different points of view on this issue. Then, important definitions and theorems are discussed in order to better understand fractional derivatives and integrals. Again, the Riemann-Liouville fractional derivative and integral, Grünwald Letnikov fractional derivative and Caputo fractional derivative, which have the most important place among fractional derivatives and integrals, are defined, their properties are given, fractional derivatives of some special functions are examined and examples of them are given. In addition, their fractional derivative change graph was drawn.
Finally, some inequalities for convex functions are discussed by means of fractional integrals. It has been proven that these inequalities are provided and practices related to them have been made.

Keywords: Riemann Liouville fractional derivative, Hermite -Hadamard -Fejer type ınequalities, Caputo Fractional derivative, Grünwald Letnikov fractional derivative, fractional ıntegrals.

Şekiller Listesi

Sayfa

Şekil 2.1. Çift ve Tek Fonksiyon . . . 3
Şekil 2.2. Konveks Kümeler . . . 4
Şekil 2.3. Konkav Kümeler . . . 4
Şekil 2.4. Gamma Fonksiyonu . . . 8

Şekil 3.1. $f(x) = x$ fonksiyonun kesirli türev değişim grafiği . . . 18
Şekil 3.2. $f(x) = 1$ fonksiyonun kesirli türev değişim grafiği. . . . 21
Şekil 3.3. $f(x) = \cos x$ fonksiyonun kesirli türev değişim grafiği. . . . 21
Şekil 3.4. $f(x) = \sin x$ fonksiyonun kesirli türev değişim grafiği. . . . 21
Şekil 3.5. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Caputo türevi alınarak elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = e^t$ ile elde edilmiş sonuç karşılaştırılmıştır. . . . 24
Şekil 3.6. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Grünwald Letnikov türevi alınarak elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = e^t$ ile elde edilmiş sonuç karşılaştırılmıştır. . . . 24
Şekil 3.7. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Caputo türevi alınarak elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır. . . . 25
Şekil 3.8. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Grünwald Letnikov türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır. . . . 25
Şekil 3.9. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Caputo türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = \cos(t)$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır. . . . 26
Şekil 3.10. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Grünwald Letnikov türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = \cos(t)$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır. . . . 26
Şekil 3.11. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Laplace kesirli türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır. . . . 27
Şekil 3.12. $f(t) = \sin t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Laplace kesirli türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = \cos t$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır. . . . 27

Şekil 4.1. Konveks Fonksiyon . . . 30

Simgeler ve Kısaltmalar

Simgeler

$\Gamma(x)$	: Gamma Fonksiyonu
$\beta(x,y)$	: Beta Fonksiyonu
α	: Parametre
I	: Reel Sayılar Üzerinde Bir Aralık
θ	: Parametre
$L[a,b]$	: [a,b] Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
f'	: f Fonksiyonun 1.Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonun 2.Mertebeden Türevi
$f^{(n)}$	: f Fonksiyonun n.Mertebeden Türevi
σ	: Parametre
$(\jmath^{\alpha}_{a^+} f)(x)$	:f fonksiyonun sağ taraflı α. mertebeden kesirli integrali
$(\jmath^{\alpha}_{b^-} f)(x)$	:f fonksiyonun sol taraflı α. mertebeden kesirli integrali
$D^{\alpha} f(x)$	:f fonksiyonun α . mertebeden kesirli türevi

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve integraller dünyada gerçek olayların anlaşılmasında ve çözümünde oldukça kullanışlı bir yöntemdir.
Öncelikle temel integral ve türevler ile ilgili bazı temel kavramları görelim.
D türev alma operatörünü başka bir deyişle diferensiyel operatörleri göstersin. f, g gibi iki fonksiyonu göz önüne alalım. α_1, α_2 iki sabit olsun. Bu durumda $f\ ve\ g$ lineer olduğundan

$$D\Big(\alpha_1 f(s) + \alpha_2 g(s)\Big) = \alpha_1 Df(s) + \alpha_2 Dg(s)$$

eşitliğini sağlar.

$$D = \frac{d}{ds}$$

türev oparetörünü göstersin.

$$D^{-1} = \frac{1}{D}$$

türev operatörünün ters operatörü olsun. Şimdi şu soruyu soralım; Acaba ne zaman türev operatörü integral operatörünün tersi, ne zaman integral operatörü türev operatörünün tersi olur? Yani,

$$D(D^{-1}f(s)) = D^{-1}(Df(s))$$

eşitliği ne zaman doğrudur?

$$D^{-1}f(s) = \frac{1}{D}f(s) = \int f(s)ds + k$$
$$D(D^{-1}f(s)) = D(\int f(s)ds + k) = f(s)$$
$$D^{-1}(Df(s)) = \int Df(s)ds + k = f(s) + k$$

olur.

$$D(D^{-1}f(s)) = D^{-1}(Df(s))$$

eşitliğinin var olabilmesi, integrasyon sabitinin sıfır olması ile mümkündür.
Kesirli mertebeden hesaplamalar, üzerinde çokça çalışmalar yapılan oldukça popüler ve dinamik bir konudur. Kesirli mertebeden hesaplama ifadesi keyfi reel mertebeli türev ve integral alma olarak kast edilmektedir. Kesirli hesap işlemleri günümüzde oldukça farklı alanlarda kullanılmaktadır. Bu alanların başlıcaları elektrik ağları, olasılık ve istatistik, reoloji, dinamikteki kontrol teorisi, kimyasal fizik, korozyon elektrokimyası, optik ve sinyal

işleme ve daha birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Kesirli mertebeden hesaplama kavramı güncel olmasına karşın ortaya çıkması oldukça eskiye dayanmaktadır. Bilinen ilk bulgular 1695 yılında Leibniz ile L'Hopital arasında yapılan yazışmalarda görülmüştür. Bu yazışmalardan sonra Euler 1730 yılında, Lagrange 1772'de, Laplace 1812'de, Lacroix 1819'da, Fourier 1822'de, Liouville 1832'de, Riemann 1847'de, Grünwald 1867'de ve Letnikov 1868'de olmak üzere birçok bilim adamı kesirli mertebeli hesaplamalar konusunda çok önemli çalışmalar gerçekleştirmiştir. Nihayet 1999 yılında İgor Podlubny kesirli mertebeden hesaplamaları ve çözüm yollarını gösteren bir kitap yayınlamıştır. Kesirli türevin bir avantajı da maddelerin mekaniğin ve elektrik ile ilgili özellikleri matematik ile alakalı modellemelerde, akışkanlar teorisinde, elektrik devrelerinde, elektroanalitik kimyada olduğu gibi birçok yerde kullanılmaktadır.
Bu çalışmada n-katlı bir integral yardımı ile kesirli integraller elde edilerek bunun Abel integrali ile ilişkisini göreceğiz. Abel integral yardımı ile Riemann Liouville kesirli türevlerini elde edeceğiz.
Daha sonra kesirli mertebeden türev yaklaşımları olan Laplace kesirli mertebeden türevi, Grünwald Letnikov kesirli mertebeden türevi, Caputo kesirli mertebeden türev yaklaşımları tanımlayacağız. Bu kesirli merteben türev yaklaşımları arasındaki bazı farklılıkları göstereceğiz. Bazı örnek uygulamalarla kesirli mertebeden türevler ile tamsayılı mertebeden bilinen türevler arasındaki ilişkiyi göstereceğiz. Bu uygulamalı örneklerin grafiklerini karşılaştıracağız. Görsel olarak türev yaklaşımları arasındaki ilişkiyi göstereceğiz. Bunun için şu sorunun cevabını arayalım, acaba $\frac{1}{2}$. ve $\frac{3}{2}$. mertebeden türev veya diferensiyel varmıdır? Şayet varsa $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ kez uygulanabilen integral varmıdır? Bu tür soruların cevabını araştıracağız. Bunu yaparken türev varsa integral de vardır gerçeğini gözönünde bulunduracağız [**29**].

Son kısımda bazı özel fonksiyon tanımları verilecektir. Bu fonksiyonların özellikleri kullanılarak bazı özel eşitsizlikler gösterilecektir. Bu eşitsizliklerde ayrıca kesirli mertebeli integral tanımları kullanılarak eşitsizliklerin sağlandığı gösterilecektir.

2. Materyal ve Metot

2.1. Artan ve Azalan Fonksiyon

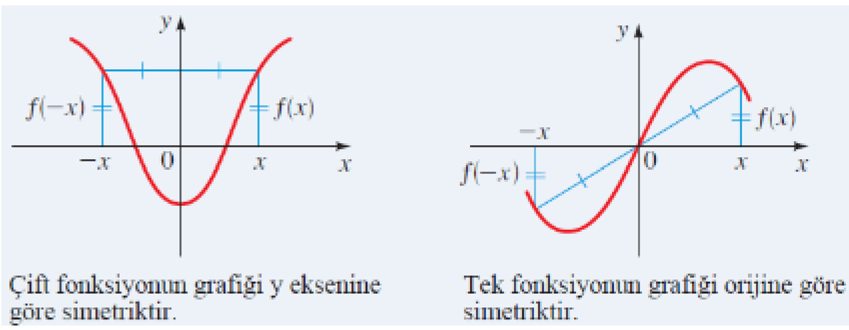
$f, I \in \mathbb{R}$ verilmiş bir aralıkta tanımlanmış bir fonksiyon ve t_1, t_2 verilen aralıkta iki nokta olsun. Verilen bu şartlar altında;

1. $t_2 > t_1$ verilmişken $f(t_2) > f(t_1)$ oluyorsa verilen f fonksiyonu I üzerinde artan fonksiyondur.
2. $t_2 > t_1$ verilmişken $f(t_2) < f(t_1)$ oluyorsa verilen f fonksiyonu I üzerinde azalan fonksiyondur.
3. $t_2 > t_1$ verilmişken $f(t_2) \geq f(t_1)$ oluyorsa verilen f fonksiyonu I kümesi üzerinde azalmayan bir fonksiyondur.
4. $t_2 > t_1$ verilmişken $f(t_2) \leq f(t_1)$ oluyorsa verilen f fonksiyonu I kümesi üzerinde artmayan bir fonksiyondur [**1**].

2.2. Çift ve Tek Fonksiyon

Verilen bir f fonksiyonu başlangıç noktasına göre simetrik bir aralıkta tanımlanmış olsun.Bu aralığa ait her t noktası için :

1. $f(-t) = f(t)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna Çift fonksiyon,
2. $f(-t) = -f(t)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna Tek fonksiyon denir. Çift bir fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetrik, tek bir fonksiyonun grafiği ise orjin noktasına göre simetriktir [**2**]. Çift fonksiyonların $y-$ eksenine göre simetrik oldğu ve tek fonksiyonların başlangıç noktası olan orjine göre simetrik olduğunu Şekil 2.1. de açıkça görünmektedir.



Şekil 2.1. Çift ve Tek Fonksiyon

Örnek 2. 1. *$\mathbb{R}$ de tanımlı x^2 ve $\cos x$ fonksiyonları çift, x ve $\sin x$ fonksiyonları tek fonksiyonlardır. e^x fonksiyonu ne tek ne de çift bir fonksiyondur. Tek ve Çift fonksiyonların tanımından kolayca gösterilebilir.*

Örnek 2. 2. *$[-1, 3]$ aralığında verilmiş $f(x) = x^2$ fonksiyonu ne tek ne de çifttir. Çünkü verilen aralık orjine göre simetrik değildir.*

Bu örneklerde de görüleceği gibi verilen herhangi bir fonksiyon çift ya da tek olma zorunluluğu yoktur. Ancak simetrik bir aralıkta verilen herhangi bir fonksiyon daima çift ve tek iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edilebilir. Simetrik bir aralıkta verilen bir fonksiyon için;

$$f(s) = \frac{1}{2}\big[f(s) + f(-s)\big] + \frac{1}{2}\big[f(s) - f(-s)\big] = f_{Ç}(s) + f_T(s)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

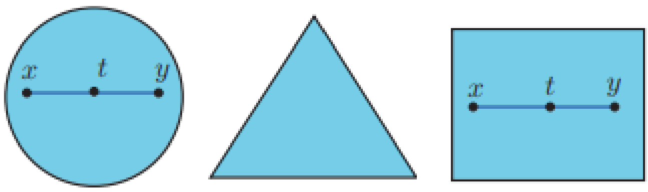
Örnek 2. 3. $f(s) = e^s$ *fonksiyonunu ele alalım;*

$$e^s = \frac{e^s + e^{-s}}{2} + \frac{e^s - e^{-s}}{2} = \cosh s + \sinh s$$

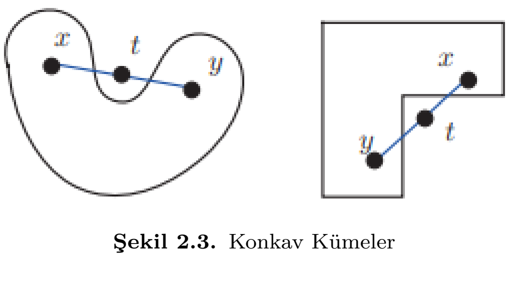
olarak yazılabilir. Yani e^x fonksiyonunu çift, tek olan fonksiyonların toplamı biçiminde yazılabilir [**2**].

2.3. Konveks Küme

Bir lineer uzayı olan K verilsin $A \subseteq K$ ve $x_1, x_2 \in A$ kümesinden alınan elemanlar için; $B = \{x_3 \in K : x_3 = \alpha x_1 + (1-m)x_2, 0 \leq m \leq 1\} \subseteq A$ sağlanıyorsa verilen bu A kümesi lineer uzay içerisinde Konveks Küme denir. Verilen bu lineer uzayda $x_3 \in B$ ise $x_3 = mx_1 + (1-m)x_2$ eşitliğindeki x_1 ve x_2' nin katsayıları olarak verilen $m+(1-m) = 1$ eşitliği her durumda doğrudur. Bu nedenle konveks kümenin tanımında $m + (1-m) = 1$ eşitliği yerine $m + n = 1$ eşitliğini gerçekleyen ve negatif değerler almayan m, n reel sayılar kümesinde seçelim. Şekilsel olarak düşünüldüğünde B kümesinin içerisinde olan x_1 ve x_2 olarak verilmiş bir doğrunun parçasıdır [**1**, **3**, **5**, **14**, **18**].
Yani daha şekilsel olarak düşünürsek konveks olan küme Şekil 2.2. de göründüğü gibi boştan farklı verilen iki noktayı bir araya getiren doğruyu içine alan kümedir. Konkav küme ise Şekil 2.3. de görüldüğü gibi kümede tanımlı elamanlar içinde seçtiğimiz iki noktayı bir araya getiren bütün doğruları kapsamamaktadır.



Şekil 2.2. Konveks Kümeler



Şekil 2.3. Konkav Kümeler

2.4. Sınırlı Fonksiyon

f fonksiyonu $[k_0, k_1]$ gerçel değerli ve kapalı olan bir aralıkta tanımlanmış olsun $\forall x \in [k_0, k_1]$ için $|f(x)| \leq T$ olacak biçimde $T > 0$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonu verilen $[k_0, k_1]$ kapalı aralığında sınırlıdır denir.

2.5. Hölder Eşitsizliği

$\alpha > 0, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olarak verilsin. h_1 ve h_2 fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralıkta tanımlanan gerçel değerli birer fonksiyon olsun, $|h_1|^\alpha$ ve $|h_2|^\beta$ $[a, b]$ kapalı aralıktaki integrallenebilen fonksiyonlar ise;

$$\int_a^b |h_1(s)h_2(s)|ds \leq \left(\int_a^b |h_1(s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |h_2(s)|^\beta ds \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

eşitsizliği her zaman geçerli olan bir eşitsizliktir. Verilen bu eşitsizlik Hölder eşitsizliği denilmektedir [**15-16**, **18**].
Benzer olarak iki katlı integraller için Hölder Eşitsizliği;

$$\int_a^b \int_a^b |h_1(s)h_2(s)|dsdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |h_1(s)|^\alpha dsdy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \int_a^b |h_2(s)|^\beta dsdy \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

2.6. Lebesque İntegralinin Varlık Teoremi

E kümesi sonlu ölçümlü bir küme olmak üzere E kümesinin tümünde verilen sınırlanan ve burada ölçülebilen h fonksiyonu için Lebesque anlamında bu küme üzerinde integrali vardır.
$1 \leq p < \infty$ olarak verilsin;

$$L^p = L_p = \left\{ h : \left(|h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \text{ Lebesque İntegrali ve } \|h\|_\infty = \left(\int_E |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Banach uzayı olarak tanımlanır [**16-19**].

2.7. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu tüm uygulamalı bilimlerin en popüler fonksiyonlarından bir tanesidir. Birçok olayı anlamamızı ve yorumlamamızı kolaylaştıran bir fonksiyondur.
$\forall n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir [**2**, **5**, **9**].

Bu fonksiyonun sağ tarafındaki integral ardışık olarak hesaplandığında;

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt = -t^{n-1}e^{-t}\Big|_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt \\
&=0 + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt \\
&= -\,t^{n-2}e^{-t}\Big|_0^\infty + (n-2).(n-1)\int_0^\infty t^{n-3}e^{-t}dt \\
&\vdots \\
&=(n-1).(n-2)...3.2.1 = (n-1)!
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.2}$$

sonucu elde edilmiş olur. Benzer olarak Gamma fonksiyonu için;

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n)$$

olarak yazılabilir.
Ispat :

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^n dt, \quad \left\{u = t^n \Rightarrow du = n.t^{n-1}, \int dv = \int e^{-t}dt \Rightarrow v = -e^{-t}\right\} \\
&= -\,t^n.e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}.n.t^{n-1}dt \\
&=n.\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt = n.\Gamma(n)
\end{aligned}$$

olur.
$\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan; n=1 için Γ(1)=0! olur. Yani

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1}.e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -e^{-\infty} + e^0 = 1 \\
\Gamma(1) &= 0! = 1
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan daha genel olarak,

$$\Gamma(n+1) = n! = n.(n-1)! = n.\Gamma(n) \Rightarrow \Gamma(n+1) = n.\Gamma(n)$$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n \tag{2.3}$$

olur. Bu özelliklerden hareketle şunu yazabiliriz,

$$\Gamma(n+k) =(n+k-1)! = (n+k-1).(n+k-2)...n.(n-1)! \qquad \Big((n-1)! = \Gamma(n)\Big)$$

buradan;

$$\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)} = (n+k-1).(n+k-2)...(n+1).n \tag{2.4}$$

genel olarak yazabiliriz.
$\forall x \in \mathbb{N}$ için Gamma Fonksiyonu ,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}.e^{-t}dt$$

şeklinde belirlenir. Sağ taraftaki integrale **Euler in 2. Tip İntegrali** denir.
Açıkça görülüyor ki Gamma Fonksiyonu kesirli sayılar için de geçerlidir. Özel olarak $x = \frac{1}{2}$ için;

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \qquad \Big(t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu\Big)\\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du \;, \qquad \int_0^\infty e^{-u^2}du = I\end{aligned}$$

olsun. O halde,

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy \Big(x = r.cos\theta, y = r.sin\theta \Rightarrow dxdy = rdrd\theta \;\;, x^2+y^2 = r^2\Big)\\ &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty r.e^{-r^2}dr = \frac{\pi}{2}\Big(-\int_0^1 -u\frac{du}{2}\Big) = \frac{\pi}{4}\\ I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad buradan; \;\; \Gamma(\frac{1}{2}) = 2.I \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

buradan şu sonuçları çıkarabiliriz,

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) =& n.\Gamma(n) \Rightarrow \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\\ \Gamma(\frac{5}{2}) =& \frac{3}{2}.\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\\ \Gamma(\frac{7}{2}) =& \frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\end{aligned}$$

olur. Şimdi Hölder Eşitsizliğini Gamma fonksiyonun integraline uygulayalım.
$1 < \alpha < \infty \;\; ve \;\; 0 < x, y < \infty$ olsun.

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}) =& \int_0^\infty t^{\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1}e^{-t}dt\\ =& \int_0^\infty t^{\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}e^{-\frac{t}{\alpha}-\frac{t}{\beta}}dt\\ =& \Big(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\Big)^{\frac{1}{\beta}}dt\\ \leq& \Big(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}dt\Big(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\Big)^{\frac{1}{\beta}}dt\\ \leq& \Gamma(x)^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(y)^{\frac{1}{\beta}}\end{aligned}$$

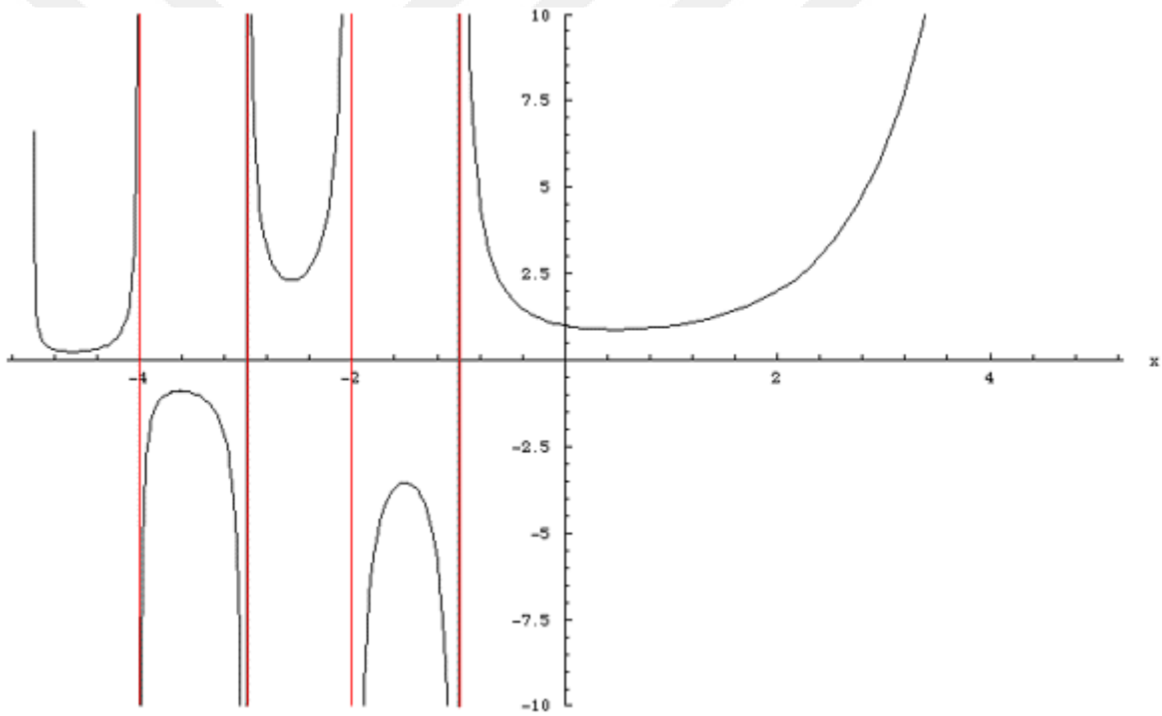
burada eşitsizliğin her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\ln(\Gamma(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta})) \leq \ln(\Gamma(x)^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(y)^{\frac{1}{\beta}}) \Rightarrow \Gamma(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}) \leq \frac{1}{\alpha}\Gamma(x)\frac{1}{\beta}\Gamma(y)$$

olur[**1**, **5**].
Şimdi de Gamma fonksiyonunun limit gösterimini verelim,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!.n^x}{x.(x+1)...(x+n)}$$

şeklinde limit yardımı ile gösterilebilir.
Ispat : Gamma ve Beta fonksiyonlarının tanımı göz önüne alınarak ıspatı gösterilebilir.
Burada Gamma fonksiyonu için şunu söyleyebiliriz; Şekil 2.4. de verilen grafikte de görüldüğü gibi $\Gamma(x)$ fonksiyonu 0 ve negatif tamsayılar için tanımsızdır. Gamma fonksiyonunun grafiği Şekil 2.4. gösterildiği gibidir [**23**, **26-29**].



Şekil 2.4. Gamma Fonksiyonu

2.8. Beta Fonksiyonu

Gamma fonksiyonunda olduğu gibi Beta fonksiyonu da oldukça önemli ve popüler bir fonksiyondur. Aynı zamanda Gamma fonksiyonu ile ilişkili bir fonksiyondur.

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{2.5}$$

olarak belirlenen bu özel fonksiyona **Beta Fonksiyonu** denir[**2-3**, **6-11**].

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.6}$$

bağıntısı vardır. Beta fonksiyonunu aşağıdaki eşitliklerle ifade etmek mümkündür;

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta \tag{2.7}$$

$$\beta(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du \tag{2.8}$$

Verilen bu eşitlikleri Beta fonksiyonun tanımından kolayca elde etmek mümkündür. (2.5) eşitliğinde $t = \sin^2\theta$ dönüşümü yapılırsa (2.7) eşitliği ve $t = \dfrac{u}{1+u}$ dönüşümü uygulanırsa (2.8) eşitliği elde edilmiş olur.
(2.6) eşitliğini göstermek için Gamma fonksiyonu tanımında $t = s^2$ dönüşümü yaparsak

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = 2\int_0^{\infty} s^{2x-1}e^{-s^2}ds$$

olur. Buradan benzer şekilde;

$$\Gamma(y) = 2\int_0^{\infty} t^{2y-1}e^{-t^2}dt$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^{2x-1}t^{2y-1}e^{-(s^2+t^2)}dtds$$

olur. $s = r\cos\theta, t = r\sin\theta$ kutupsal dönüşümünü yaparsak,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) =& 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} r^{2(x+y)-2}e^{-r^2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}rdrd\theta \\
=& \left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta\right]\left[2\int_0^{\infty} r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr\right] \\
=& \beta(x,y)\Gamma(x+y)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan Beta fonksiyonun simetri özelliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz.

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

sonucuna ulaşmış oluruz[**6**, **7**].

2.9. Gamma ve Beta Fonksiyonları ile ilgili eşitlikler

$$\mathbf{1)}\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

$$\mathbf{2)} \int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{-x} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

$$\mathbf{3)}\ \ 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2x-1}(\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \ \ ;\ 0 < x < 1$$

$$\mathbf{4)}\ \ \Gamma(\frac{1}{2}+n) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

$$\mathbf{5)}\ \ \Gamma(\frac{1}{2}-n) = \frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!}$$

$$\mathbf{6)}\ \ \binom{-x}{r} = \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(r+1)\Gamma(1-x-r)}$$

$$\mathbf{7)}\ \ \beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\alpha)^{2x-1}(cos\alpha)^{2y-1} d\alpha$$

oldukları gösterilebilir [**5**, **6**, **7**].

2.10. Hata Fonksiyonu

$$(erf)(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2} dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Hata fonksiyonu denir. $erf(0) = 0$ $erf(\infty) = 1$ olur.
Ayrıca $erfc$ ile tanımlanan tamamlayıcı Hata fonksiyonu
$erfc(s) = 1 - erf(s)$ eşitliği ile tanımlanır [**22**, **23**].

2.11. Wright Fonksiyonu

$$W(z;\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

şeklinde tanımlanır [**22**, **23**].

2.12. Mittag Leffler Fonksiyonu

Üstel fonksiyonlarda önemli bir yere sahip olan e^z fonksiyonun tamsayılı mertebeden türevli denklemlerde de önemli bir yere sahiptir.Bu fonksiyonun bir parametreye bağlı olarak tanımlanmış hali aşağıda gösterildiği gibi tanımlanır.

$$E_\alpha(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{\Gamma(\alpha m+1)}$$

Bu şekilde gösterilen eşitliğe Mittag Leffler fonksiyonu denir. İki parametreli Mittag Leffler fonksiyonu ise ;

$$E_{\alpha,\beta}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{\Gamma(\alpha m+\beta)}$$

seri açılımı ile verilir. İki parametreye bağlı olartak tanımlanan Mittag Leffler fonksiyonunda $\alpha=\beta=1$ alınırsa ;

$$E_{1,1}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{\Gamma(m+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{m!}=e^s$$

Yine benzer olarak Mittag Leffler fonksiyonunda parametreleri değişirip $\alpha=1,\beta=2$ olarak alırsak;

$$E_{1,2}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{\Gamma(m+2)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{(m+1)!}=\frac{1}{s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^{m+1}}{(m+1)!}=\frac{e^s-1}{s}$$

$\alpha=1\ ve\ \beta=3$ olarak alırsak ;

$$E_{1,3}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{\Gamma(m+3)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{(m+2)!}=\frac{1}{s^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^{m+2}}{(m+2)!}=\frac{e^s-1-s}{s^2}$$

$\vdots$

$\vdots$

$\alpha=1\ \beta=n$ olarak alırsak;

$$E_{1,n}(s)=\frac{1}{s^{n-1}}\left\{e^s-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{s^m}{m!}\right\}$$

olur. sinh ve cosh fonksiyonları Mittag Leffler fonksiyonun özel durumlarıdır. Aşağıda gösterildiği gibi elde edilir.

$$E_{2,1}(s^2)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^{2m}}{\Gamma(2m+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^{2m}}{2m!}=\cosh s\quad ve;$$
$$E_{2,2}(s^2)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^{2m}}{\Gamma(2m+2)}=\frac{1}{s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^{2m+1}}{(2m+1)!}=\frac{1}{s}\sinh s$$

olur.

2.13. Mellin Ross Fonksiyonu

$E_t(v,a)$ ile gösterilen Mellin Ross fonksiyonu e^{at} üstel fonksiyonun kesirli türevini alırken kullanırız. Bu fonksiyonun özelliği hem Gamma fonksiyonunun hemde Mittag Leffler fonksiyonunun cinsinden yazılmasıdır.

$$E_t(v,a) = t^v e^{at}\Gamma^*(v,at)$$

$$E_t(v,a) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+v+1)} = t^v E_{1,v+t}(at)$$

$$\Gamma^*(v,t) = \frac{1}{\Gamma(v)t^v}\int_0^t e^{-x}x^{v-1}dx \quad ,v>0$$

$\Gamma^*(v,t)$ ifadesine tamamlanmış Gamma Fonksiyonu denir.

3. Kesirli Mertebeden İntegraller ve Türevler

Kesirli mertebeden integrali ifade etmek için öncelikli olarak

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 \sigma_1 \tag{3.1}$$

olan n katlı integralini göz önüne alalım. Verilen bu integralin integrasyon sırasını ve bu integrasyona bağlı sınırları değiştirelim. Bu integrasyonda,

$$\begin{array}{ll}
a < \sigma_1 < x & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\
a < \sigma_2 < \sigma_1 & \sigma_3 < \sigma_2 < x \\
\dots & \dots \\
a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\
a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & a < \sigma_n < x
\end{array}$$

sınır değişimi uygulandığında (3.1) ifadesi

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 \sigma_1 \\
&= \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x \dots \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 \dots \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n
\end{aligned}$$

İntegrasyonuna dönüşür. Yukarıdaki integral terim terim hesaplarsak,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 \sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{3.2}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. (3.2) eşitliğninde $\Gamma(n) = (n-1)!$ özelliğini kullanılırsak,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 \sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{3.3}$$

elde edilir. Verilen bu eşitlikte sağ taraftaki $\frac{1}{\Gamma(n)}$ ifadesindeki n pozitif bir tamsayıdır. Biliyoruz ki Gamma fonksiyonu yalnızca tamsayılarda tanımlı olmayıp kesirli olarakta ifade edilebildiğinden, n sayısı tamsayı olmaması durumunda (3.3) eşitliğin sağ tarafındaki ifade için aşağıdaki verilen kesirli integral operatörü tanımı olarak verilebilir [**2**, **9**].

3.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegral

$\forall x \in L_1(a,b)$ olarak verilsin. Bu durumda;

$$(J^{\alpha}_{a^+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \ x > a \tag{3.4}$$
$$(J^{\alpha}_{b^-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \ x < b$$

integraline $\alpha > 0$ için α. dereceden kesirli integral olarak tanımlanır. Bu integral Riemann-Liouville kesirli integrali olarak bilinir [**4-7**].

$$(J^{0}_{a^+}f)(x) = f(x) \ \ ve \ \ (J^{0}_{b^-}f)(x) = f(x)$$

eşitlikleri geçerlidir. Örneğin,

$$f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}} \ \ ve \ \ \alpha = \frac{1}{2}$$

olarak alırsak kesirli integral tanımını kullanarak;

$$(J^{\alpha}_{a^+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \ x > a$$

integralimiz yukarıdaki kabuller altında,

$$(J^{\frac{1}{2}}_{a^+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt, \ x > a$$

biçiminmde yazılır. Burada $t = a + (x-a)\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa yukarıdaki integral,

$$\int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}d\tau = \beta(p,q)$$

olur. Burada Beta fonksiyonun özelliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
(J^{\frac{1}{2}}_{a^+}f)(x) =& \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt, \ x > a \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (x-a)^{\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{1}{2}+1}\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}dt \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}dt \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\beta(\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})} \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 3. 1. *$f(x) = 3(x-k)^2$ Fonksiyonun $\frac{1}{2}$.dereceden kesirli integralini hesaplayınız.*

$$\jmath_{a^+}^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x 3(t-a)^2(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_a^x 3(t-a)^2(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

olacak biçimde yazabiliriz. $t = a + (x-a)s$ dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned}
\jmath_{a^+}^{\frac{1}{2}} f(x) =& \frac{3}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (x-a)^{\frac{5}{2}} s^2(1-s)^{-\frac{1}{2}}ds \\
=& \frac{3}{\sqrt{\pi}}(x-a)^{\frac{5}{2}}\int_0^1 s^2(1-s)^{-\frac{1}{2}}ds \\
=& \frac{3}{\sqrt{\pi}}(x-a)^{\frac{5}{2}}\beta(3,\frac{1}{2}) \\
=& \frac{3}{\sqrt{\pi}}(x-a)^{\frac{5}{2}}\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}}(x-a)^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3. 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4}dx \textit{ integralini hesaplayınız.}$$

$$\textbf{Çözüm}: \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^4}dx = 2\int_0^{\infty}\frac{1}{4}e^{-u}u^{-\frac{3}{4}}du = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{1-\frac{3}{4}-1}du = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{4})$$

olur.

3.2. Laplace Kesirli Türevi

n. mertebeden türevlerin

$$f(s),\ \frac{df(s)}{ds},\ \frac{d^2f(s)}{ds^2},\ \frac{d^3f(s)}{ds^3},\ \cdots,\ \frac{d^nf(s)}{ds^n}\ ,\cdots$$

olarak verilen sonsuz türev dizisini ele alalım. Verilen dizi isteğe bağlı dereceden diferensiyelini düşünecek olursak bu tekrarlanan diferensiyelin bir genelleşmiş halidir. Burda ki temel amacımız n.dereceden herhangi bir tamsayılı türevin n.dereceden tamsayı olmayan türevlerinin var olmasıdır. Kesirli türevlere geçmeden önce yarım türevin ne olduğunu gösteren bir kuralı verelim. Bunun için $f(s) = s^t$ biçimindeki polinom fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada ki t pozitif bir tamsayıdır. Bu fonksiyonun α. dereceden türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
f(s) =& s^t \\
f^{'}(s) =& ts^{t-1} \\
f^{''}(s) =& t(t-1)s^{t-2} \\
f^{'''}(s) =& t(t-1)(t-2)s^{t-3} \\
&\vdots \\
f^{(\alpha)}(s) =& t(t-1)(t-2)\ldots.(t-\alpha+1)s^{t-\alpha} \\
=& \frac{t!}{(t-\alpha)!}s^{t-\alpha} \\
=& \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)}s^{t-\alpha}
\end{aligned}$$

eşitliğini yazarız. Yani,

$$f^{(\alpha)}(s) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)} s^{t-\alpha}$$

eşitliği yazılır. Bu ifade Laplace kuvvet fonksiyonun türeve genelleştirmesi olarak bilinir [**1**, **9**, **21**, **27**, **28**]. Burada α sayısı tamsayı olmak zorunda değildir. α'yı keyfi bir pozitif sayı seçebilir ve bu fonksiyonun kesirli türevlerini hesaplayabiliriz. Burada $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ve $t = 2$ olsun. Bu durumda $f(x) = x^2$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ için yukarıdaki eşitlikten faydalanırsak,

$$\begin{aligned} f^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2!}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

olur. Şimdi elde ettiğimiz bu yarım türevin tekrar yarım türevini alırsak Yani;

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 \right) &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)} x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} x = 2x \end{aligned}$$

olur.

Yukarıda yaptığımız uygulamaya benzer olarak $f(x) = \dfrac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonu için $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin $f(x) = x^2$ olduğunu gösterelim,

$$\begin{aligned} (\jmath^{\frac{1}{2}} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt, \ x > 0 \ \ , \left(t = ux \ dön\ddot{u}ş\ddot{u}m\ddot{u} \ \ uygularsak \right) \\ &= \frac{8}{3\pi} \int_0^1 (ux)^{\frac{3}{2}} (x-ux)^{-\frac{1}{2}} x du \\ &= \frac{8}{3\pi} x^2 \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{8}{3\pi} x^2 \beta(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} \\ &= \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2!} = x^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Örnek 3. 3.

$$f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 5$$

fonksiyonun $\dfrac{1}{2}$. mertebeden kesirli türevini bulunuz.
$g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$, $k(x) = x$, $p(x) = 5$ olsun.

$$\begin{aligned} g^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^3 &= \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{1}{2}+1)} x^{3-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{6}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} x^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$k^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} p^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 &= \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)} x^{0-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \end{aligned}$$

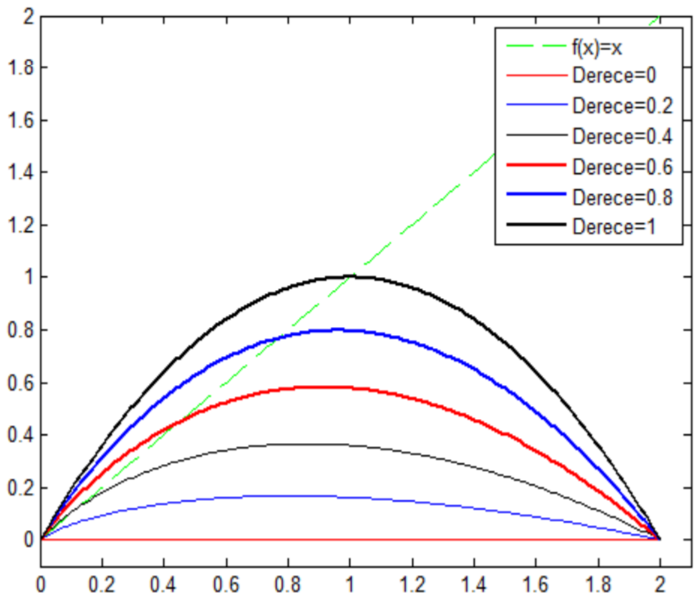
$$\begin{aligned} f^{(\frac{1}{2})}(x) &= g^{(\frac{1}{2})}(x) + h^{(\frac{1}{2})}(x) + k^{(\frac{1}{2})}(x) + p^{(\frac{1}{2})}(x) \\ &= \frac{16}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{\pi x}} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 3. 4. *$f(x) = x$ fonksiyonu için $\alpha = \dfrac{1}{2}$ mertebeden kesirli türevini bulup grafiğini inceleyiniz.*

$$
\begin{aligned}
f^{(\frac{1}{2})}(x) =& \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x \\
=& \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}x^{1-\frac{1}{2}} \\
=& \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\dfrac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} \\
=& \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}x^{\frac{1}{2}} \\
=& \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

burada x'in alacağı değerlere göre Şekil 3.1. de görüleceği üzere $f(x)$'in kesirli mertebeden bazı türevlerinin değişim grafiği gösterilmiştir.



Şekil 3.1. $f(x) = x$ fonksiyonun kesirli türev değişim grafiği

3.3. Riemann-Liouville Kesirli Türev

Şimdi kesirli türevi ifade etmek için $0 < \alpha < 1$ seçelim.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \quad x > a \tag{3.5}$$

Abel integralini ele alalım. Bu integralin her iki yanında x olarak verilen kısımlara t, t olarak belirtilen kısmı s olarak alıp denklemdeki eşitliğin sağ ve sol kısmını $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarpıp verilen integrale uygularsak,

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_a^x \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \tag{3.6}$$

olur. Burada Dirichlet formülü olarak bilinen

$$\int_a^b \Big(\int_a^x f(x,y)dy \Big) dx = \int_a^b \Big(\int_y^b f(x,y)dx \Big) dy$$

sınır değişim frmülünü uygularsak,

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(s)ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} &= \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\ &= \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} \\ &= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha} d\tau = \beta(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha, 1-\alpha) \end{aligned}$$

olur.
Bu ifadeleri (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(s)ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \int_a^x \varphi(s)ds \\ &= \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada son eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alırsak

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.7}$$

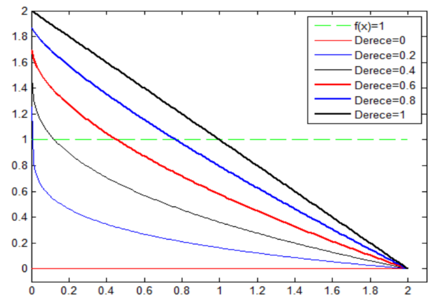
elde edilir. Elde etmiş olduğumuz (3.7) ifadesine α. dereceden kesirli türev denir. Bu türeve Riemann-Liouville kesirli türevi de denilmektedir [**1**, **8-10**].

Örnek 3. 5. $f(x) = c, \alpha = \dfrac{1}{2}$ *için* $D^{\frac{1}{2}} f(x)$ *ifadesinin değerini hesaplayınız.*
Çözüm :

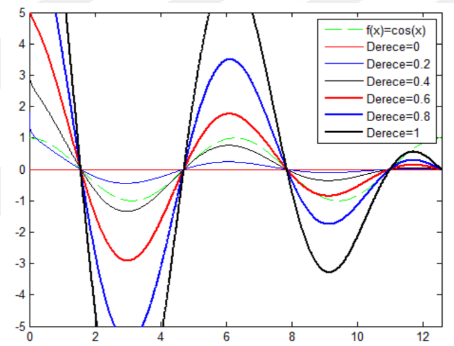
$$
\begin{aligned}
D^{\frac{1}{2}} f(x) =& \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} c dt \\
=& \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} (x-t)^{1-\frac{1}{2}} \Big|_a^x \right) \\
=& \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} (x-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{\pi}} (x-a)^{-\frac{1}{2}} \text{ \textit{olur.}} \\
D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}) =& D^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{\sqrt{\pi}} (x-a)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{c}{\sqrt{\pi}} (t-a)^{-\frac{1}{2}} (x-a)^{-\frac{1}{2}} dt \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^1 \tau^{-\frac{1}{2}} (x-a)^{-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} (x-a)^{-\frac{1}{2}} (x-a) d\tau \\
=& \frac{c}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^1 \tau^{-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\
=& \frac{c}{\pi} \frac{d}{dx} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2})}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2})} \\
=& \frac{c}{\pi} \frac{d}{dx} \pi = 0
\end{aligned}
$$

$\Big(t = a + \tau(x-a) \Rightarrow dt = (x-a)d\tau\Big)$ *dönüşümü uyguladık.*

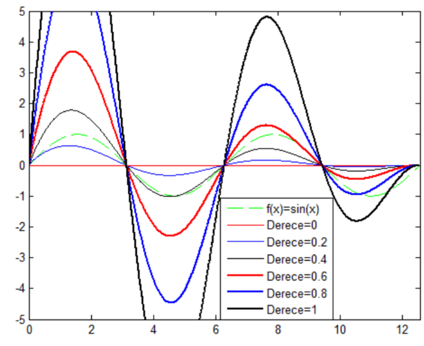
$c = 1$ için $f(x) = 1$ fonksiyonun $\alpha = \dfrac{1}{2}$. dereceli Riemann-Liouville kesirli türevi $D^{\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} (x-a)^{-\frac{1}{2}}$ olacaktır.
$f(x) = 1$ fonksiyonunun Şekil 3.2.'de kesirli mertebeden bazı türevlerinin nasıl değiştiğini gösteren grafiği verilmiştir. Yine $f(x) = \cos x$ fonksiyonu için Şekil 3.3.'te kesirli mertebeden bazı türevlerinin nasıl değiştiğini gösteren grafiği verilmiştir. Son olarak $f(x) = \sin x$ fonksiyonun Şekil 3.4.'te kesirli mertebeden bazı türevlerinin nasıl değiştiğini gösteren grafiği verilmiştir [**25**, **26**].



Şekil 3.2. $f(x) = 1$ fonksiyonun kesirli türev değişim grafiği.



Şekil 3.3. $f(x) = \cos x$ fonksiyonun kesirli türev değişim grafiği.



Şekil 3.4. $f(x) = \sin x$ fonksiyonun kesirli türev değişim grafiği.

3.4. Grünwald Letnikov Kesirli Türevi

$f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $p > 0$ olarak verilsin a, t noktaları limit noktaları olmak üzere,

$$
{}_a\mathrm{D}_t^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \left\{ nh = t - a \right\} \tag{3.8}
$$

eşitliği Grünwald Letnikov kesirli türevi olarak ifade edilmektedir. Daha genel olarak aşağıdaki gibi de ifade etmek mümkündür,

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^p f(t) &= \lim_{h\to 0} \mathrm{f}_h^{(p)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

olarak tanımlanır.

3.5. Caputo Kesirli Türevi

Bazı uygulama problemlerinde kesirli türev tanımı yardımı ile başlangıç koşulları fiziksel olarak yorumlanabilmesi gerekmektedir. Ancak Riemann-Liouville tarzının verilen soruların yorumlanmasında yetersiz veya tam olarak isteneni vermediği görülmüştür. Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevinin yorumlaması olarak
$t = a$ verilen noktasında Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevinin limitinin alacağı değerleri ile tanımlanacak başlangıç koşullarını içerir. $m_1, m_2, ..., m_n$ verilen keyfi sabitler olarak verilsin.

$$
\begin{array}{ll}
\lim_{t\to a} & {}_a\mathrm{D}_t^{\alpha-1} f(z) = m_1 \\
\lim_{t\to a} & {}_a\mathrm{D}_t^{\alpha-2} f(z) = m_2 \\
\lim_{t\to a} & {}_a\mathrm{D}_t^{\alpha-2} f(z) = m_2 \\
\vdots & \vdots \\
\lim_{t\to a} & {}_a\mathrm{D}_t^{\alpha-n} f(z) = m_n
\end{array}
$$

tanımlanmış başlangıç koşulları oluşacaktır. Oluşan bu şekildeki başlangıç koşullarını içeren başlangıç-değer problemleri matematiksel biçimde uygun çözümlenmesine karşın,sonuçları itibari ile kullanımı verimli değildir. Çünkü bu başlangıç koşullarına sahip denklemlerin fiziksel olarak yorumlamak pek mümkün değildir. Verilen bu kesirli diferensiyel uygulamanın başlangıç koşullarını en güzel biçimde fiziksel olarak anlamlandıran yol Caputo kesirli mertebeden türev tanımı olmuştur. Şimdi Caputo kesirli mertebeden türev tanımını verelim, n pozitif değerli tamsayılar $n - 1 < \alpha < n$ için

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \tag{3.10}
$$

olarak tanımlanır. Caputo kesirli türevi yaklaşımının diğer yaklaşımlardan avantajı tamsayılı dereceden diferensiyel denklemlerde ki aynı tarzda ifade edilen başlangıç koşularına sahip olmasıdır. Yani $t = a$ değeri için alt limitinde verilen fonksiyonun tamsayı dereceden türevinin limit değerini içermesidir. Dolayısı ile Caputo kesirli türevini aşağıda ki gibi ifade etmek mümkündür [**22**, **23**, **27**].

$$
{}_a\mathrm{D}_t^\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \dfrac{f^{(n)}\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau & ;\ n-1<\alpha<n \text{ ise} \\ \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) & ;\alpha=n \ \text{ ise} \end{cases} \tag{3.11}
$$

Burada $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *ve* $f(x)\in\mathbb{R}$ dir [**27**, **28**].
Görüldüğü gibi kesirli mertebeden türevler ile ilgili birçok tanım ve yaklaşım bulunmaktadır. Bu yaklaşımlar ve elde edilen sonuçlar birbirine yakın olsalar da gerçek sonuca olan yakınlıkları ile birbirinden ayrılmaktadır. Şimdi bazı örneklerle bu kesirli mertebeden verilen türevlerin birbirleri ile aralarında ki farkı ve gerçek sonuca olan yakınlıklarını görelim.

Örnek 3. 6. *$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun*
$f(t)=C$, $t\in\mathbb{R}$ fonksiyonun $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli türevlerini hesaplayalım. Öncelikle Grünwald Letnikov kesirli mertebeden türevine bakalım,
$m<p<m+1$ olduğundan $m=0$ olacaktır. Yani $0<p<1$ dir.

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(t) =& \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} 0 d\tau \\
=& \frac{f^{(0)}(0)(t-0)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\
=& \frac{C}{\sqrt{\pi t}} \ \textit{olur.}
\end{aligned}
$$

Şimdi de $p=\frac{1}{2}$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevine bakalım. $m-1\le p<m$, $m=1$ olacaktır.

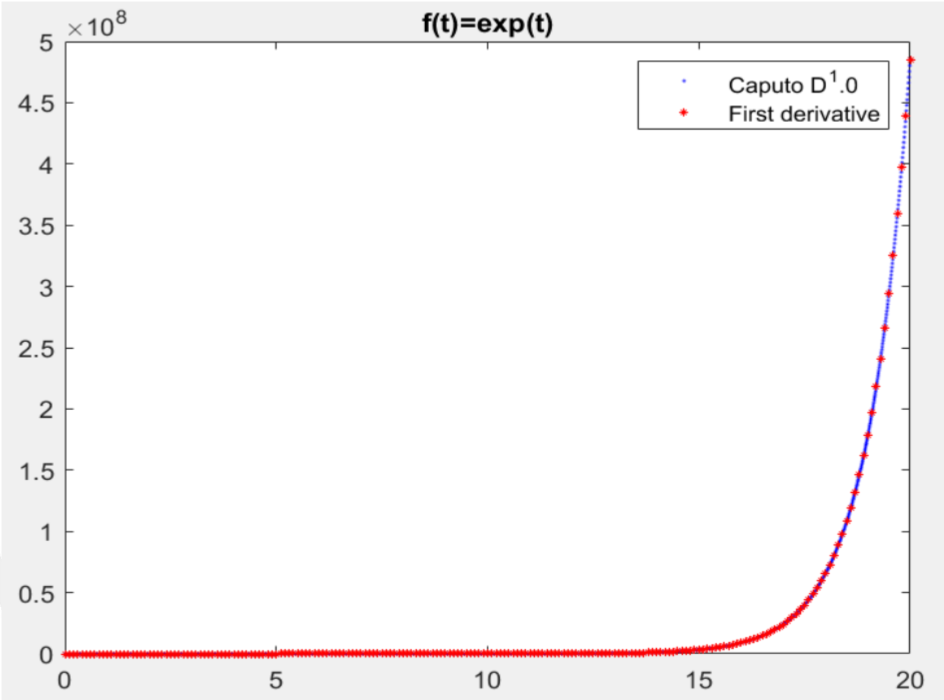
$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(t) =& \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1} C d\tau \\
=& \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t u^{\frac{-1}{2}} du \\
=& \frac{2.C}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} (u^{\frac{1}{2}} \Big|_0^t) \\
=& \frac{C}{\sqrt{\pi t}} \quad \textit{olur.}
\end{aligned}
$$

Son olarak $p=\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevini ele alalım. $m-1\le p<m$ olduğndan $0\le p<1$ olur.

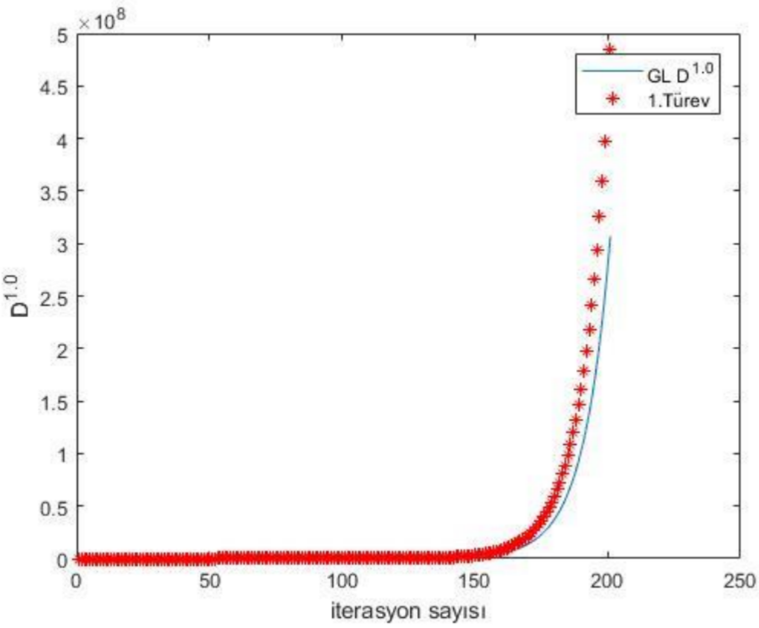
$$
{}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1} . f'(t) . d\tau = 0
$$

olur.

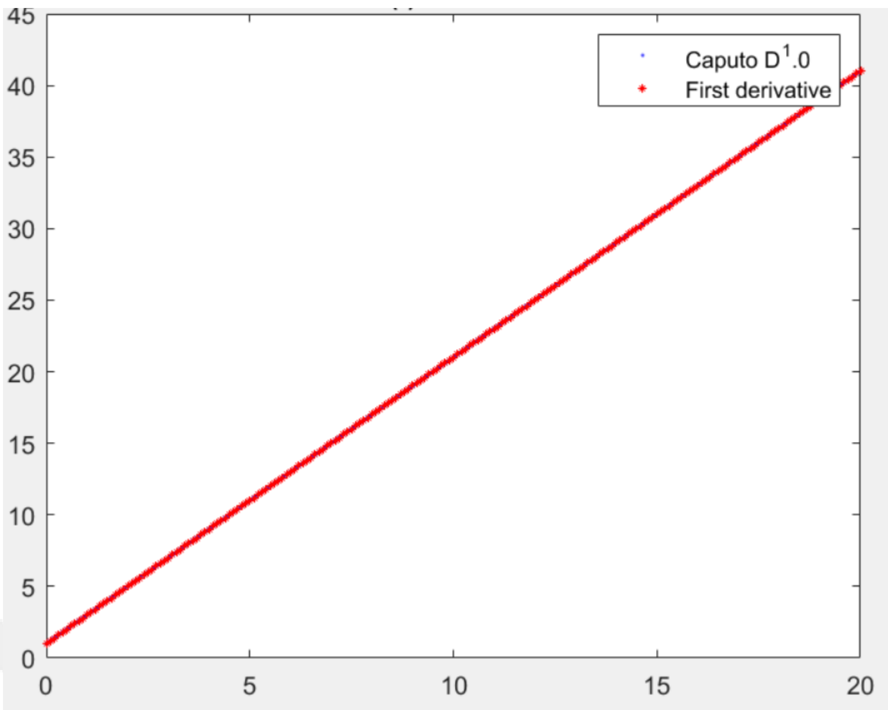
Bu örnekte de görüldüğü gibi Caputo kesirli türev metodu ile verilen sabit bir fonksiyonun kesirli türevi 0 (sıfır) olmaktadır. Ancak Grünwald Letnikov ve Riemann Liouville kesirli türevleri 0 (sıfır)'dan farklı çıkmaktadır [**25**, **26**, **28**].
Şimdi de Caputo, Grünwald Letnikov ve Laplace kesirli mertebeden türev yaklaşımlarının tamsayı mertebeli türevleri ile bilinen türev arasındaki ilişkiyi grefikler ile gösterelim, ,



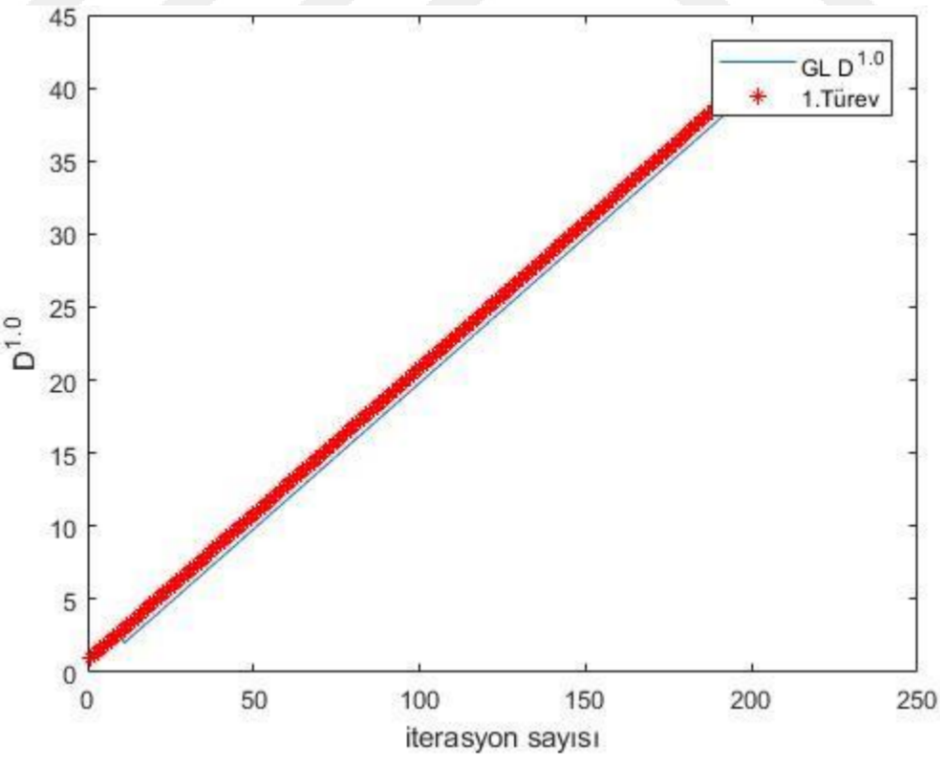
Şekil 3.5. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Caputo türevi alınarak elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = e^t$ ile elde edilmiş sonuç karşılaştırılmıştır.



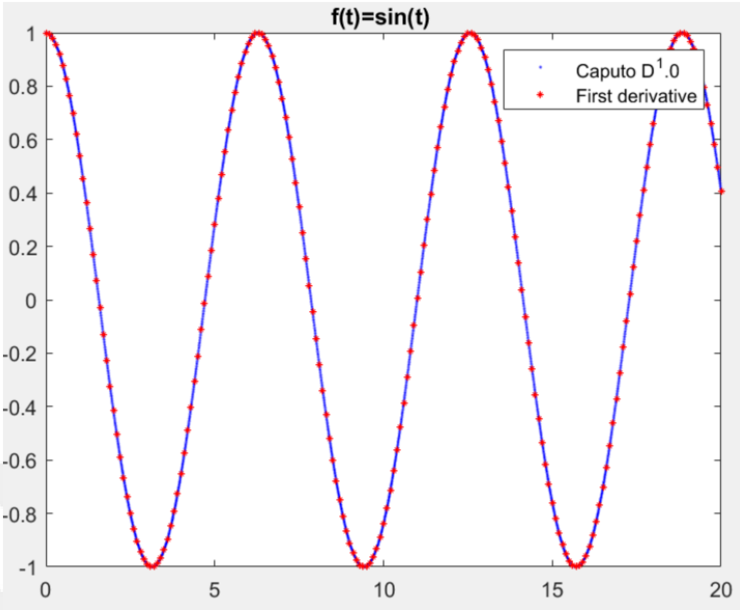
Şekil 3.6. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Grünwald Letnikov türevi alınarak elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = e^t$ ile elde edilmiş sonuç karşılaştırılmıştır.



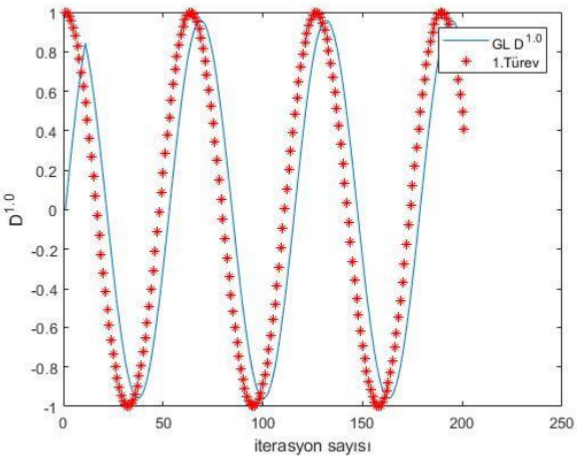
Şekil 3.7. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Caputo türevi alınarak elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır.



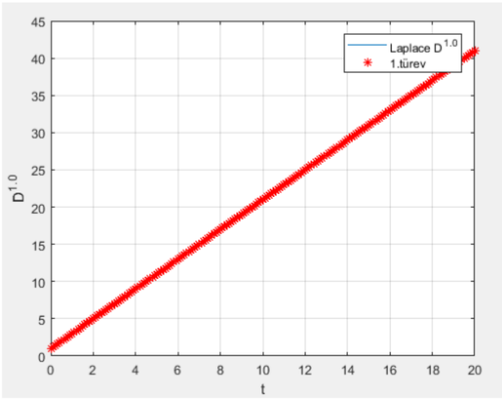
Şekil 3.8. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Grünwald Letnikov türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır.



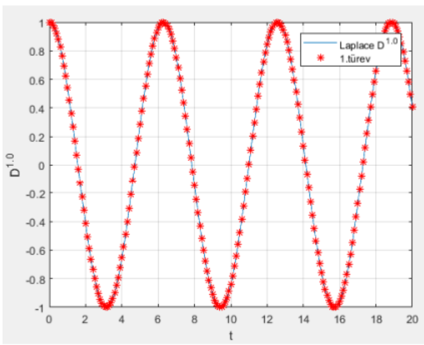
Şekil 3.9. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0} f(t)$ Caputo türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = \cos(t)$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.10. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0} f(t)$ Grünwald Letnikov türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = \cos(t)$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.11. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0} f(t)$ Laplace kesirli türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.12. $f(t) = \sin t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0} f(t)$ Laplace kesirli türevinin alınması ile elde edilen sonuç ile $f^{'}(t) = \cos t$ ile elde edilen sonuç karşılaştırılmıştır.

Yukarıda grafikleri verilen Şekil 3.5. de $f(t) = e^t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Caputo kesirli mertebeden türevi alınarak elde edilen veriler ile $f^{'}(t) = e^t$ ile elde edilmiş veriler karşılaştırılmıştır. Şekil 3.6. de $f(t) = e^t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Grünwald Letnikov kesirli mertebeden türevi alınarak elde edilen veriler ile $f^{'}(t) = e^t$ ile elde edilmiş veriler karşılaştırılmıştır. Şekil 3.7. de $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Caputo kesirli mertebeden türevi alınarak elde edilen veriler ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen veriler karşılaştırılmıştır. Şekil 3.8. de $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Grünwald Letnikov kesirli mertebeden türevi alınarak ile elde edilen veriler ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen veriler karşılaştırılmıştır. Şekil 3.9. de $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Caputo kesirli mertebedn türevleri alınarak elde edilen veriler ile $f^{'}(t) = \cos(t)$ ile elde edilen veri karşılaştırılmıştır. Şekil 3.10. de $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Grünwald Letnikov kesirli mertebeden türevleri alınarak elde edilen veriler ile $f^{'}(t) = \cos(t)$ ile elde edilen veriler karşılaştırılmıştır. Şekil 3.11. de $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Laplace kesirli mertebeden türevleri alınarak elde edilen veriler ile $f^{'}(t) = 2t + 1$ ile elde edilen veriler karşılaştırılmıştır. Şekil 3.12. de $f(t) = \sin t$ fonksiyonun $\mathrm{D}_t^{1.0}f(t)$ Laplace kesirli mertebei türevleri alınarak elde edilen veriler ile $f^{'}(t) = \cos t$ ile elde edilen veriler karşılaştırılmıştır. Bu örneklerden hareketle kesirli mertebeden türev yaklaşımlardan elde edilen sonuçlar ile bilinen tamsayılı dereceli türevlerden elde edilen sonuçlar bir birine yeterince yakındır. Tamsayı dereceli türevlerden elde edilen sonuçlara en yakın sonuçları Caputo kesirli türevi vermektedir. Buradan şunu söyleyebiliriz; kesirli mertbeden fonksiyonların türevi için Caputo kesirli türevi gerçek sonuçlara daha yakın sonuçlar vermektedir. Dolayısıyla Caputo kesirli türevlerden elde edilen sonuçlar güvenirlik ve geçerliliği daha yüksek olan bir yaklaşımdır.

4. Kesirli İntegraller Yolu İle Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler

4.1. J-Konveks Fonksiyon

$K \subseteq \mathbb{R}$ 'kümesi üzerinde tanımlanmış olan aralık olsun. $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlansın. Bu koşullar altında; K kümesinden aldığımız bütün m, n elemanları için,

$$f(\frac{m+n}{2}) \leq \frac{f(m)+f(n)}{2} \tag{4.1}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonu K kümesi üzerinde Konveks veya J-Konveks fonksiyonu olarak tanımlanır [**1**].

4.2. Konveks Fonksiyon

Boş kümeden farklı olarak verilen $K \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanan bir fonksiyon olsun. $\forall t_1, t_2 \in K$ ve $x_0 \in [0,1]$ olsun. Bu koşullar altında,

$$f(x_0 t_1 + (1-x_0)t_2) \leq x_0 f(t_1) + (1-x_0) f(t_2) \tag{4.2}$$

olarak verilen eşitsizliğini gerçekleyen f fonksiyonu Reel sayılar üzerinde tanımlı Konveks Fonksiyon denir.
Eğer bu eşitsizlik için $t \in [0,1]$ kapalı aralığının uç noktaları alınmazsa o zaman eşitsizlikteki $\leq$ ifadesinin yerini $<$ ifadesi alır. Bunu da

$$f(x_0 t_1 + (1-x_0)t_2) < x_0 f(t_1) + (1-x_0) f(t_2)$$

şeklinde yazarız. Verilen fonksiyon bu koşulları yerine getiriyorsa Kesin Konveks Fonksiyon adını alır. Eğer $(-f)$ fonksiyonu konveks(dış bükey) ise f ye konkav(iç bükey) fonksiyon denir. Verilen f fonksiyonu tanımlanan bu aralıkta konveks (dış bükey) bir fonksiyon ve de konkav(iç bükey) ise f afin dönüşümlüdür denir. Verilen bu dönüşüm seçecek uygun c_1 ve c_2 sabit sayıları için $c_1 x + c_2$ biçimindedir. Geometrik düşünüldüğünde $x_0 t_1 + (1-x_0)t_2$ noktasında f 'nin alacağı değer $(t_1, f(t_1))$ ve $(t_2, f(t_2))$ olarak verilen iki noktayı birleştiren doğru parçasının üzerinde ki değerlerden daima daha küçüktür, yani verilen noktaları bir araya getiren kiriş daima eğrinin $[t_1, t_2]$ aralığında ki kısmın üzerinde veya üstündedir[**9-11**, **15**].
Gerçekten $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi,

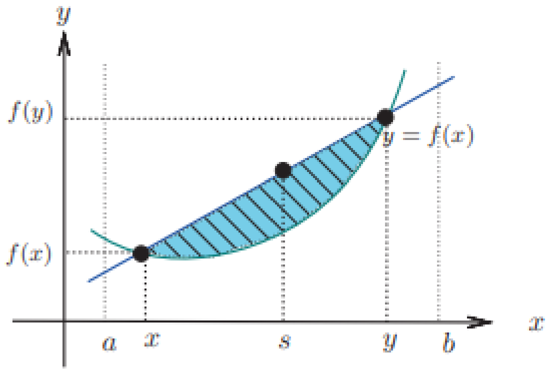
$$L(s) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(s - x_1)$$

dir. Burada $s = tx_2 + (1-t)x_1$ dersek,

$$\begin{aligned} L(tx_2 + (1-t)x_1) =& f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(t(x_2 - x_1)) \\ =& f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)) \\ =& t f(x_2) + (1-t) f(x_1) \quad \textit{olur.} \end{aligned}$$

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq L(tx_2 + (1-t)x_1) = tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$$

elde edilmiş olur. Konveks fonksiyonları geometrik olarak Şekil 4.1. de gösterildiği gibi ifade edebiliriz [**1**, **3**, **5**, **15**, **18**].



Şekil 4.1. Konveks Fonksiyon

Teorem 4. 1. $f : [k_1, k_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *olarak kapalı herhangi bir aralıktan Reel sayılara tanımlanan bu fonksiyon konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul*
$\forall k_0 \in [k_1, k_2]$ *ve* $t \neq k_0$ *değeri için*

$P(t) = \dfrac{f(k) - f(k_0)}{k - k_0}$ *olarak verilen fonksiyonun azalmayan bir fonksiyon olmasıdır.*

Ispat :. Kabul edelim ki verilen f fonksiyonumuz bu aralıkta konveks olsun. $P(k)$ 'in azalmayan bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz.
Yani $r < s$ iken $P(r) \leq P(s)$ olacağını göstememiz gerekecektir. Burada verilen r, s için 3 durum söz konusudur;
$I)$ $: k_0 < r < s$
$II)$ $: r < k_0 < s$
$III) : r < s < k_0$
bu üç durumu incelemeliyiz. f fonksiyonunun konveksliği ve bu üç durum kullanılarak verilen,
$P(t) = \dfrac{f(k) - f(k_0)}{k - k_0}$ fonksiyonun azalmayan bir fonksiyon olduğunu göstermek yeterli olacaktır. f fonksiyonun konveks özelliği kullanılarak $r < s$ için $P(r) \leq P(s)$ göstermek yeterli olacaktır[**24**]. □

Teorem 4. 2. $a, b \in \mathbb{R}$ *ve* $I = [a, b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *tanımlı konveks fonksiyon olmak üzere,*

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.3}$$

Yukarıda ifade edilen eşitsizlik $Hermite - Hadamard$ eşitsizliği olarak bilinmektedir [**8**, **11**].

Ispat: Verilen f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı reel değerli aralıkta konveks ise
a) f fonksiyonu (a, b) reel değeli açık aralığında süreklidir.
b) f fonksiyonu $[a, b]$ reel değerli kapalı aralıkta sınırlıdır.
c) $I, \mathbb{R}$ de kapalı aralığı belirtmek üzere $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $x, y \in I, \alpha \in [0, 1]$ için f fonksiyonu konveks olduğundan

$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$
olarak yazabiliriz. O halde f fonksiyonu bu aralıkta integrallenebilir. Bu bilgiler ışığında gerekli dönüşümler yapılarak her iki eşitsizliği de göstermek kolay olacaktır [**8**, **11**]. □

Örnek 4. 1. *$f(t)=t^2$ konveks fonksiyonu için $b>a>0$ olarak verilen $[a,b]$ kapalı aralığında (4.3) eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.*

Ispat:

$$f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\ \int_a^b x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3},\ \frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}$$

olur.Bu verileri eşitsizlikte yerine yazarsak ;
$(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{b^3-a^3}{3}\Rightarrow(b-a)\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\leq\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3}$ olur.
O halde $3a^2+6ab+3b^2\leq 4a^2+4ab+4b^2\Rightarrow 0\leq(a-b)^2$ olur. Böylece eşitsizliğin ilk kısmı ıspat edilmiş olur.Benzer olarak
$\frac{b^3-a^3}{3}\leq(b-a)\frac{a^2+b^2}{2}$ eşitsizliğini düzenlersek $0\leq(a-b)^2$ olur. Böylece verilen fonksiyonun eşitsizliği sağladığı ıspat edilmiş olur. □

Örnek 4. 2. *$f(t)=e^t$ fonksiyonun bu eşitsizliği sağladığını gösterelim.*

$$f(\frac{a+b}{2})=e^{\frac{a+b}{2}}<\frac{e^a-e^b}{b-a}<\frac{e^a+e^b}{2}\ \textit{olur.}$$

Bu eşitsizlikte $e^a=m, e^b=n$ için

$$\sqrt{mn}<\frac{m-n}{\log(m)-\log(n)}<\frac{m+n}{2}$$

olacaktır. Bu da bize aritmetik ortalama, geometrik ortalama ve logaritmik ortalama arasındaki ilişkiyi açıklar.

Örnek 4. 3. *$f(t)=\sin t$ fonksiyonun eşitsizliği sapğladığını gösterelim.*

$$f(\frac{a+b}{2})=\sin(\frac{a+b}{2})<\frac{\cos a-\cos b}{b-a}<\frac{\sin a+\sin b}{2}$$

eşitsizliğini sağladığını görürüz . Bu eşitsizlik $f(t)=\sin(t)$ fonksiyonun $[0,\frac{\pi}{2}]$ kapalı aralığında $\sin t<t<\tan t$ olduğunu gösterir.
Şimdi de Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleşmiş hali olan Hermite-Hadamard Fejer eşitsizliğini verelim;

Teorem 4. 3. *$a,b\in\mathbb{R}$ ve $I=[a,b]$, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyon olsun, $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ negatif olmayan integrallenebilir bir fonksiyon ve $\frac{a+b}{2}$ de simetrik ise;*

$$f(\frac{a+b}{2})\int_a^b g(x)dx\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx \tag{4.4}$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard - Fejer eşitsizliği olarak bilinir [**8**, **11-13**, **24**].

Teorem 4. 4. *$a, b \in \mathbb{R}$ ve $I = [a, b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ f pozitif değerli bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$ ve f $[a, b]$ de konveks bir fonksiyon ise,*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad \alpha > 0 \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4. 5. *$a, b \in \mathbb{R}$ ve $I = [a, b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferesiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise,*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] = \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta + (1-t)b)dt \tag{4.6}$$

Teorem 4. 6. *$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere eğer; $|f'|$ $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \tag{4.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4. 7. *$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $\frac{a+b}{2}$ de simetrik olmak üzere*

$$J_{a^+}^{\alpha} f(b) = J_{b^-}^{\alpha} f(a) = \frac{1}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right], \ \alpha \geq 0 \tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ispat: f fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ de simetrik olduğundan $f(a+b-x) = f(x)$ sağlanır. $\left[x = tb + (1-t)a \Rightarrow dx = (b-a)dt\right]$ dönüşümü uygularsak,

$$\begin{aligned} J_{a^+}^{\alpha} f(b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1} g(x)dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b - tb - (1-t)a) f(a+b-x)dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx = J_{b^-}^{\alpha} f(a) \end{aligned}$$

olur. □

Teorem 4. 8. *$f_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks özelliğine sahip olsun $f_1 \in L[a, b]$ $f_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan integrallenebilir bir fonksiyon ve $\frac{a+b}{2}$ noktasında simetriklik özelliği var olsun. Verilen bu koşullar altında,*

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} f_2(b) + J_{b^-}^{\alpha} f_2(a)\right] &\leq \left[J_{a^+}^{\alpha} (f_1 f_2)(b) + J_{b^-}^{\alpha} (f_1 f_2)(a)\right] \\ &\leq \frac{f_1(a)+f_1(b)}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha} f_2(b) + J_{b^-}^{\alpha} f_2(a)\right], \alpha > 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitsizliği sağlanır [**8**, **11**].

Ispat: f_1 fonksiyonu konveksliği kullanılarak eşitsizlik sağlandığı görülecektir. □

Uyarı 1. *Eğer teorem 4.8. de* $\alpha = 1$ *alınırsa eşitsizlik Harmite -Hadamart Fejer eşitsizliğine yani (4.3) döner.*

Uyarı 2. *Eğer teorem 4.8. de* $g(x) = 1$ *alınırsa bu teorem 4.2. 'ye dönüşür.*

Teorem 4. 9. $f_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferensiyellenebilir olsun ve* $f_1' \in L[a,b]$, $f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrallenebilir bir fonksiyon ve* f_2 *fonksiyonu* $\dfrac{a+b}{2}$ *de simetrik olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{f_1(a)+f_1(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} f_2(b) + J_{b^-}^{\alpha} f_2(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(f_1 f_2)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(f_1 f_2)(a)\right] \qquad (4.10) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left[\int_a^t (b-l)^{\alpha-1} f_2(l) dl - \int_t^b (l-a)^{\alpha-1} f_2(l) dl\right] f_1'(t) dt, \ \alpha > 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır [**8**, **11**].

Uyarı 3. *Teorem 4.9.'da* $g(x) = 1$ *alınırsa Teorem 4.9. eşitliği (4.5) eşitliğine dönüşür.*

Teorem 4. 10. $f_1 : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferensiyeli var olan bir fonksiyon,* $f_1' \in L[a,b]$ *de tanımlanmış olarak verilsin. Aynı zamanda* $|f_1'|$ $[a,b]$ *üzerinde konveks,* $f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tanımlı ve* $\dfrac{a+b}{2}$ *de simetrik ise,*

$$\begin{aligned} I =& \left(\frac{f_1(a)+f_1(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} f_2(b) + J_{b^-}^{\alpha} f_2(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(f_1 f_2)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(f_1 f_2)(a)\right] \qquad (4.11) \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|f_2\|_\infty}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\left[|f_1'(a)||f_1'(b)|\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Uyarı 4. *Eğer Teorem 4.9. da* $f_2(x) = 1$ *alınırsa (4.10) ifadesi Teorem 4.5. dönüşür.*

Teorem 4. 11. $f_1 : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferensiyellenebilir bir fonksiyon* $|f_1'|^n, q > 1$ *konveks olmak üzere* $f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de sürekli* $\dfrac{a+b}{2}$ *simetrik ise*

$$\begin{aligned} I &= \left|\left(\frac{f_1(a)+f_1(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} f_2(b) + J_{b^-}^{\alpha} f_2(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(f_1 f_2)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(f_1 f_2)(a)\right]\right| \qquad (4.12) \\ &\leq \frac{2(b-a)^{\alpha+1}\|f_2\|_\infty}{(b-a)^{\frac{1}{n}}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\left(\frac{|f_1'(a)|^n|f_1'(b)|^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, \alpha > 0, \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ispat: Teorem 4.8., Höder eşitsizliği ve $|f'|^q$ konveks oluşu gözönüne alındığında ıspatı aşikardır [**8**, **11**].

5. Bulgular ve Tartışma

Kesirli olarak ifade edilen Riemann-Liouville türevlerin en genel formül hali olarak şu şekilde ifade ederiz: f sonlu olan her (a, x) aralıklarında sürekli ve integrallenebilen fonksiyon ve $x \in \mathbb{N}$, $m-1 \leq \alpha < m$ olacak biçimde $x > a$ olsun. Bu durumda gerçel bir f fonksiyonun α. dereceden kesirli türevi,

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \tag{5.1}$$

şeklindedir. Riemann Liouville kesirli integral formülünü de

$$(\jmath_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \ x > a \tag{5.2}$$

$$(\jmath_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \ x < b \tag{5.3}$$

şeklinde ifade ediyoruz.
$f(x) = x^t$ fonksiyonu için Laplace kesirli türevi,

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)} x^{t-\alpha} \tag{5.4}$$

şeklindedir.
$f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $p > 0$ olarak verilsin a, t noktaları limit noktaları olmak üzere, Grünwald Letnikov kesirli türevi

$${}_a\mathrm{D}_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \tag{5.5}$$

şeklinde ifade edilir.
Caputo kesirli türevini de aşağıdaki gibi ifade edebiliriz,

$${}_a\mathrm{D}_t^{\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \dfrac{f^{(n)}\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau & ; \ n-1 < \alpha < n \text{ ise} \\ \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) & ; \alpha = n \ \text{ ise} \end{cases} \tag{5.6}$$

Burada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f(x) \in \mathbb{R}$ dir.

Kesirli mertebeden hesaplamalar ile çalışırken karşımıza çıkan sıkıntı genel olarak tanımlanan bölgenin elde edilme zorluğudur. Bu tür hesaplamaların analitik olarak gösterimi oldukça zordur. Bir diğer zorluk ise, kesirli mertebeden türev ve integrallerden elde edilecek yaklaşımların bütün sisteme genişletme zorluğudur. Kesirli mertebeden yaklaşımlardan Grünwald Letnikov ve Riemann-Liouville tanımları linner özelliğini sağladığından ve Leibniz kuralını gerçeklediğinden çok sık kullanılırlar. Birçok problemin çözümünde önemli rol alırlar. Kesirli mertebeden hesaplamalar ile elde edilen sonuçlar, tamsayılı mertebeden elde edilen sonuçlarla kıyaslandığında daha verimli sonuçlar verdiği görülmüştür. Riemann-Liouville ve Grünwald Letnikov gibi bazı kesirli mertebeden türev yaklaşımlarında sabit fonksiyonların tamsayı olmayan kesirli türevleri sıfırdan farklıdır. Riemann-Liouville kesirli mertebeden hesaplamada, ele alınan fonksiyonun kesirli türevleri için başlangıç değerlerinin bilinmesi ve hesaplanması zor olduğu için uygulamalarda sorunlar olduğu bilinmektedir. Caputo kesirli mertebede türev ise verilen fonksiyonun kesirli türevleri başlangıç değerlerini, fonksiyonun tamsayı mertebeden türevlerine dönüştürülebilir. Caputo kesirli mertebeden türev için normal türevin genelleştirmesi olarak tanımlanamasa da Riemann-Liouville kesirli hesaplamada sabitin türevinin sıfır olmaması sıkıntısını giderdiğinden son yıllarda, kesirli mertebeden hesaplamalarda Riemann-Liouville kesirli türevi yerine, Caputo kesirli mertebeden türevi daha çok tercih edilmektedir.

Bu çalışmada kesirli mertebeden türev yaklaşımları ve kesirli mertebeden integraller ayrıntılı olarak verilmiş bazı uygulamalar yapılmıştır. Bazı fonksiyonlar için kesirli mertebeden türevleri hesaplanıp grafikleri çizilmiştir. Bu grafikler yardımı ile kesirli mertebeden türev yaklaşımlarının sonuçları karşılaştırılmıştır. kesirli mertebeden türev yaklaşımlarının tamsayı mertebeden türevlerle kıyaslanmıştır. Grafiklerle aralarındaki farklılıklar görülmüştür.

Son olarak bazı eşitliklerin ve eşitsizliklerin ıspatında kesirli mertebeden integrallerden faydalanmıştır. Kesirli integraller, genelleştirilmiş kesirli integraller ve kesirli integral operatörlerinde bulunan bazı parametrelerin özel secimleriyle hangi kesirli veya klasik integrallere dönüştükleri açıklanmıştır. Özellikle son bölümde, diferensiyellenebilen konveks, j-konveks fonksiyonlar için bazı özdeşlikler ispatlanmış daha sonra bu özdeşlikler ve bilinen bazı eşitsizlikler kullanılarak Hermite-Hadamard tipli benzer sonuçlar ve eşitsizlikler elde edilmiştir. Yine bu özdeşlikler yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirmesi verilmiştir.

Kaynaklar

[1] Turhan, S.(2016) GA-Konveks ve Harmonik Konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları, Yüksek lisans tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[2] Altın,A.(2011) Uygulamalı Matematik. Gazi Kitabevi Yayınları, Ankara.

[3] Yalçın, A.(2016) Farklı türden konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integraller içeren integral eşitsizlikler, Yüksek lisans tezi, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[4] Yalçın Uzun, T(2018). Riemann liouville ve hadamard tipli genelleştirilmiş kesirli diferansiyel denklemler, Doktora tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[5] Gözpınar, A.(2018) Konveks Fonksiyon Sınıfları için Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[6] Cavlak, E(2013). Kesirli kuvvetlere sahip kısmi diferansiyel denklemlerin homotopi analiz yöntemi ile sayısal çözümlerinin irdelenmesi/ Examination of the numerical solutions with the homotopy analysis method of partial differential equation with fractional powers, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[7] Taşdelen Yeşildal, Fatma. Kesirli türevler-integraller ve hipergeometrik fonksiyonlar, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[8] İşcan, İ.(2014) Generalization of different type integral inequalities for s-convex functions via fractional integrals. Applicable Analysis, 93.9: 1846-1862.

[9] Akkurt, A., Yıldırım, H.(2013) Genelleştirilmiş Fractional İntegraller için Feng Qi Tipli İntegral Eşitsizlikleri Üzerine. International Anatolia Academic Online Journal/ Science Journal, 1.2.

[10] Soytaş, C.(2006) Kesirli diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemleri. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[11] Sarıkaya, M, Z; Yıldırım, H.(2016) On Hermite-Hadamard Type İnequalities For Riemann-Liouville Fractional İntegrals. Miskolc Mathematical Notes, 17.2: 1049-1059.

[12] Chen, F.(2013) A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions. Journal of Applied Mathematics, Hindawi Publishing Corporation, Article ID 935020.

[13] Mihai, Marcela V.(2013) Some Hermite-Hadamard type inequalities obtain via Riemann-Liouville fractional calculus. Tamkang Journal of Mathematics, 44.4: 411-416.

[14] Kunt, M, Karapinar D, Turhan S, İşcan İ.(2019) et al. The left Riemann-Liouville fractional Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions. Mathematica Slovaca, 69.4: 773-784.

[15] Sarıkaya, M.Z.; Ertuğral, F.(2020) On the generalized Hermite-Hadamard inequalities. Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series, 47.1: 193-213.

[16] Chen, F.(2014) A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals. Ital. J. Pure Appl. Math, 33: 299-306.

[17] Özdemir, M. E.; Yıldız, Ç.(2013) The Hadamard's inequality for quasi-convex functions via fractional integrals. Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series, 40.2: 167-173.

[18] Sarıkaya, M. Z.; Budak, H.; Erden, S.(2019) On new inequalities of Simpson's type for generalized convex functions. The Korean Journal of Mathematics, 27.2: 279-295.

[19] Komornik, V.(2016) Lectures on Functional Analysis and the Lebesgue integral. Universitext: Springer.

[20] Hoffman, K.(2007) Banach spaces of analytic functions, Courier Corporation publications, 0-486-45874-1.

[21] Bayraktar, M.(2006), Fonksiyonel Analiz, Uludağ Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik, Gazi Kitabevi Yayınları, Ankara, 320s.

[22] Kılbas, A.A.; Srivastiva H.M.; Trujillo, J.J.(2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equation, Elsevier B.V., Amsterdam.

[23] Podlubny I.(1999) Fractional Order Systems and PID Controllers IEEE Transactions on Automatic Control, 44, 208-214.

[24] Kara, H.H.(2016) Kesirli ntegraller için hermite-hadamard-fejer tipli eşitsizlikler. Yüksek Lisans Tezi. Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[25] Karcı, A.(2015). Kesir dereceli türevin yeni yaklaşımının özellikleri. Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 30(3).

[26] Gül, S.(2016). Kesirsel türev ve uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi. Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[27] Varjovi, M.H.; Hatami,M.; Öztemiz, F.; Donuk, K.(2019). Üç temel kesir dereceli türev tanımına göre matlab ortamında kesir dereceli türev hesaplamaları. Anatolian Journal of Computer Sciences. Volume: 4 No: 1 pp: 7-28 ISSN:2548-1304.

[28] Townsend, S.(2015). Numerical methods in fractional calculus. PhD Thesis. California State Polytechnic University, Pomona.

[29] Ünal, S.Ç.(2019). Kesirli diferansiyel denklemler için analitik çözümler. Doktora Tezi. Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Özgeçmiş

Mesut KISA

[redacted]

[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]

[redacted]

[redacted]	[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]