

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ VE YAKLAŞIM
TEORİSİNE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bayram SÖZBİR

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ
Tez Danışmanı	:	Yrd. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ

Haziran 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ VE YAKLAŞIM
TEORİSİNE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bayram SÖZBİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
**Enstitü Bilim Dalı : FONKSİYONLAR TEORİSİ VE
FONKSİYONEL ANALİZ**

Bu tez 16/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı

Üye

Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Bayram SÖZBİR

16.06.2015

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kendimi geliştirmeme katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Selma Altundağ'a, ihtiyaç duyduğumda içtenlikle bana yardımcı olan, fikirlerinden yararlandığım değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Metin Başarır, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mahpeyker Öztürk, Sayın Doç. Dr. Hüseyin Altundağ'a ve üzerimdeki emeklerinden dolayı tüm akademisyen hocalarım ve öğretmenlerime çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca hayatımın her anında yanımda olan, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, varlıklarından güç aldığım sevgili arkadaşlarım ve çok değerli aileme, özellikle de ailemizin en küçük bireyleri Cemre, Berşan ve Miraç'a sevgi ve saygılarımı sunar, canı gönülden teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
ÖZET	v
SUMMARY.....	vi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
GENEL BİLGİLER.....	4
2.1. Temel Kavramlar.....	4
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık.....	9
2.3. İdeal Kavramı ve İdeal Yakınsaklık.....	14
BÖLÜM 3.	
GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	16
3.1. Ağırlıklı İstatistiksel Yakınsaklık	16
3.2. $S_{\bar{N}}(I)$ –Yakınsaklık	18
BÖLÜM 4.	
GENELLEŞTİRİLMİŞ KOROVKİN YAKLAŞIM TEOREMİ	28
4.1. Lineer Pozitif Operatörler.....	28
4.2. Korovkin Yaklaşım Teoremi.....	31
4.3. $I - (\bar{N}, p_n)$ –Toplanabilir Korovkin Yaklaşım Teoremi.....	33

BÖLÜM 5.

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER İÇİN AĞIRLIKLİ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK... 40

BÖLÜM 6.

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ YENİ DİZİ
UZAYLARI..... 48

6.1. Modülüs Fonksiyonu ve Bazı Özellikleri..... 48

6.2. $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ Dizi Uzayı..... 50

KAYNAKLAR..... 58

ÖZGEÇMİŞ..... 61

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$	: İki boyutlu pozitif tamsayılar kümesi
2^X	: X kümesinin kuvvet kümesi
w	: Tüm reel veya kompleks sayı dizileri uzayı
c	: Tüm yakınsak diziler uzayı
c_0	: Tüm sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_∞	: Tüm sınırlı diziler uzayı
$Ax = ((Ax)_n) = (\sum_k a_{nk}x_k)$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$\delta(K)$	: K kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_2(K)$	: K kümesinin iki boyutlu doğal yoğunluğu
st	: Tüm istatistiksel yakınsak diziler kümesi
S_2	: Tüm istatistiksel yakınsak çift diziler kümesi
ℓ_∞^2	: Tüm sınırlı çift diziler uzayı
$S_{\bar{N}}$	: Tüm ağırlıklı istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_{\bar{N}_{m,n}}$	: Tüm ağırlıklı istatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesi
$S(I)$	: Tüm I – istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_{\bar{N}}(I)$	: Tüm I – ağırlıklı istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların kümesi

ÖZET

Anahtar kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, İdeal yakınsaklık, Toplanabilme, Dizi uzayı, Çift indisli dizi, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, Modülüs fonksiyonu.

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü, konunun tarihi gelişimini ve hazırlanan çalışmanın kısa bir taslağını içeren giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, istatistiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklık kavramları ve bazı temel tanımlar hatırlatılmıştır. Tezin orijinal olan sonuçları üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsaklık ve $I-(\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik kavramları tanıtılıp bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, klasik Korovkin yaklaşım teoremi $I-(\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik kavramı kullanılarak daha genel bir şekilde elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, çift indisli diziler için ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ($S_{\bar{N}_{m,n}}$ - yakınsaklık) ve toplanabilme metodu tanıtılıp, bu kavramlar arasındaki ilişki ve ayrıca $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsaklık kavramı ile istatistiksel yakınsaklık ve Riesz yakınsaklık kavramları arasındaki ilişki çalışılmıştır.

Son bölümde ise, modülüs fonksiyonu yardımıyla yeni dizi uzayları tanımlanmış ve tanımlanan bu yeni uzayların üzerinde bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir.

SOME TYPES OF CONVERGENCE AND ITS APPLICATIONS TO APPROXIMATION THEORY

SUMMARY

Keywords: Statistical convergence, Ideal convergence, Summability, Sequence space, Double sequence, Korovkin type approximation theorem, Modulus function.

This thesis consists of six chapters. The first chapter of the thesis is the introduction chapter and it includes historical background of the subject and also a brief overview of the study.

In the second chapter, some basic definitions and the concepts of statistical convergence and ideal convergence have been recalled. The original results of the thesis have been given in the third, fourth, fifth and sixth chapters.

In the third chapter, the concepts of $S_{\bar{N}}(I)$ -convergence and $I-(\bar{N}, p_n)$ -summability have been introduced and also some relations between these concepts have been examined.

In the fourth chapter, using the concept of $I-(\bar{N}, p_n)$ -summability, classical Korovkin approximation theorem has been obtained in more general form.

In fifth chapter, weighted statistical convergence ($S_{\bar{N}_{m,n}}(I)$ -convergence) and summability method for double sequence have been introduced, and the relations between these methods have been examined and also the relations between $S_{\bar{N}_{m,n}}(I)$ -convergence and the concepts of statistical convergence and Riesz convergence have been studied.

In the final chapter, some new sequence spaces have been defined through a modulus function and some inclusion relations of these sequence spaces have been investigated.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisinin en geniş uygulama ve araştırma alanlarından biri, 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast [9] ve Steinhaus [43] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık metodudur. Bu yakınsaklık tipi klasik anlamda yakınsaklığın bir genelleşmesi olup, pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık günümüze kadar çok sayıda matematikçi tarafından üzerinde çalışılmış ve halen çalışılmakta olan bir konudur. Özellikle Schoenberg [42], Šalát [38], Freedman ve Sember [10], Fridy [11,12], Cannor [4], Fridy ve Orhan [13,14] gibi birçok matematikçi istatistiksel yakınsaklığın gelişimine önemli katkılarda bulunmuştur.

Mursaleen ve Edely [28] istatistiksel yakınsaklık kavramını çift indisli dizilere genişletmişlerdir. Bu çalışmalarında Mursaleen ve Edely [28] çift indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklığı tanımını ve çift indisli diziler için istatistiksel Cauchy dizisi tanımını verip, istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesáro toplanabilir çift indisli diziler arasındaki ilişkiyi incelediler.

Kostyrko vd. [21] ideal kavramını kullanarak, klasik yakınsaklığın ve istatistiksel yakınsaklığın bir genelleşmesi olan ideal yakınsaklık (I -yakınsaklık) kavramını tanımladılar. I -yakınsaklık, $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin bir I ideali kavramına dayanır.

Savaş ve Das [40], Das vd. [6] ve Savaş vd. [41] istatistiksel yakınsaklık, λ -istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramlarını idealler aracılığı ile genelleştirilip, I -istatistiksel yakınsaklık, $I-\lambda$ -istatistiksel yakınsaklık, I -lacunary istatistiksel yakınsaklık ve A^I -istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılan yeni yakınsaklık türleri elde ettiler.

Yaklaşım teorisinde önemli bir yeri olan ve literatürde “Korovkin Teoremi” olarak bilinen teorem, istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Gadjiev ve Orhan [15] tarafından genelleştirilmiştir. Bu çalışmadan sonra, Duman vd. [7] ve Duman [8] sırasıyla A –istatistiksel yakınsaklık ve I –yakınsaklık metotlarını kullanarak daha genel Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde etmişlerdir.

Modülüs fonksiyonları yardımıyla birçok dizi uzayı tanımlanmış ve bunların çeşitli özellikleri birçok yazar tarafından incelenmiştir. Modülüs fonksiyonu tanımı ilk kez Nakano [31] tarafından verilmiştir. Daha sonra Ruckle [37], f modülüs fonksiyonu yardımıyla $L(f)$ dizi uzayını tanımlamış ve bu dizi uzayının bazı özelliklerini incelemiştir. Maddox [25], kuvvetli Cesàro toplanabilme tanımının bir genelleşmesi olan, modülüse göre kuvvetli Cesàro toplanabilen dizilerin sınıfını $W(f)$ olarak tanımladı. Bu çalışmadan sonra Cannor [5], Maddox [25] un tanımını, Cesàro matrisi yerine herhangi negatif olmayan bir regüler matris toplanabilme metodu alarak, $W(A, f)$ toplanabilme tanımına genelleştirdi.

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışmada, ideal kavramı kullanılarak daha genel olan istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilme metotlarının tanımlanıp incelenmesi, bu yeni toplanabilme metodunun Korovkin yaklaşım teoremi üzerinde uygulamalarının çalışılması, çift indisli diziler için ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramının tanımlanması ve ayrıca modülüs fonksiyonu yardımıyla yeni dizi uzaylarının tanıtılması amaçlanmaktadır.

Yukarıda belirttiğimiz amaç doğrultusunda bu tezde öncelikle, I –istatistiksel yakınsaklık yardımı ile ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ($S_{\bar{N}}$ -yakınsaklık) kavramının bir genelleşmesi olan ideal ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ($S_{\bar{N}}(I)$ –yakınsaklık) kavramı tanıtılmıştır. Sonrasında ise $(\bar{N}, p_n)$ –toplanabilirlik ve istatistiksel $(\bar{N}, p_n)$ –toplanabilirlik kavramlarından daha genel olan ideal $(\bar{N}, p_n)$ –toplanabilirlik (I – $(\bar{N}, p_n)$ –toplanabilirlik) kavramı tanımlanıp, klasik ve istatistiksel Korovkin teoremlerindeki yakınsaklık koşullarının gerçekleşmemesi

durumunda $I-(\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik aracılığı ile genel bir Korovkin yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca beşinci bölümde, $S_{\bar{N}}$ -yakınsaklık kavramı çift indisli diziler için tanımlanıp, çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık ve Riesz yakınsaklık kavramları ile olan ilişkisi araştırılmıştır. Son olarak, modülüs fonksiyonu yardımıyla yeni dizi uzayları tanımlanmış ve tanımlanan bu yeni uzaylar üzerinde bazı bağıntılar incelenmiştir.



BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamıza temel teşkil edecek bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilecektir. İlk kısımda bazı genel bilgiler yer alacaktır. İkinci kısımda tek ve çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı, üçüncü kısımda ise ideal ve ideal yakınsaklık kavramları verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : F \times X &\rightarrow X \\ (\lambda, x) &\rightarrow \lambda \cdot x \end{aligned}$$

fonksiyonları $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

$$L1) \ x + y = y + x$$

$$L2) \ (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$L3) \ \forall x \in X \text{ için } x + \theta = \theta + x = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$L4) \ \forall x \in X \text{ için } x + (-x) = (-x) + x = \theta \text{ olacak şekilde bir } -x \in X \text{ vardır.}$$

$$L5) \ 1 \cdot x = x \quad (\text{Burada } 1, F \text{ cisminin birim elamanıdır.})$$

$$L6) \ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$L7) \ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$L8) \ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, \cdot)$ üçlüsüne, F cismi üzerinde bir lineer uzay (veya vektör uzayı) denir [19].

$F = \mathbb{R}$ alınırsa X e reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ alınırsa X e kompleks lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.1.2. X , F cismi üzerinde bir lineer uzay ve M de X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall x, y \in M$ için $\alpha x + \beta y \in M$ oluyorsa M ye X in bir lineer alt uzayı denir [19].

Tanım 2.1.3. X boş olmayan bir küme olsun.

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü, $\forall x, y, z \in X$ için

$$M1) d(x, y) \geq 0$$

$$M2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

şartlarını sağlıyor ise, d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve bu durumda (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [24].

Tanım 2.1.4. X , F cismi ($F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

şartlarını sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir [2].

Tanım 2.1.5. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 2.1.6. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise, bu (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [19].

Tanım 2.1.7. Eğer $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise, bu $(X, \|\cdot\|)$ nomlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [19].

Tanım 2.1.8. Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin kümesini w ile gösterelim. w kümesi, $x = (x_k), y = (y_k) \in w$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan ikili işlemler ile bir lineer uzaydır. w uzayının herhangi bir alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir. Örneğin,

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

uzayları birer dizi uzayıdır. ℓ_∞ , c ve c_0 sırasıyla sınırlı diziler uzayı, yakınsak diziler uzayı ve sıfır diziler uzayı olarak adlandırılır. ℓ_∞ , c ve c_0 dizi uzayları, $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ normuyla birlikte birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.9. X ve Y , w uzayının iki alt kümesi ve $A = (a_{nk})$ ($n, k = 1, 2, \dots$) reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, bir $x = (x_k) \in X$ dizisi ve her $n \geq 1$ için

$$y_n := (Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise, $Ax := ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi (x in A -dönüşüm dizisi) mevcuttur denir.

Eğer her $x \in X$ için $((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $((Ax)_n) \in Y$ ise, o zaman A matrisi X den Y ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve bu durum $A \in (X, Y)$ ile gösterilir.

Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L sayısına yakınsak ise, x dizisi L sayısına A -toplanabilir (veya A -limitlenebilir) denir ve bu durum $A\text{-}\lim x = L$ ile gösterilir.

Özel olarak, $X = Y = c$ olmak üzere $A \in (c, c)$ ise A ya konservatif matris denir.

Ayrıca her yakınsak $x = (x_k)$ dizisi için $\lim_k x_k = L$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = L$ koşulu

sağlanıyor (yani A matris dönüşümü limiti koruyor) ise, bu durumda A regüler matris adını alır ve bu durum $A \in (c, c; p)$ ile gösterilir [17].

Teorem 2.1.10. (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \|A\|_{\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \text{ Her sabit } k \text{ için } \lim_n a_{nk} = 0$$

$$(iii) \lim_n \sum_k a_{nk} = 1$$

koşullarının sağlanmasıdır [17].

Şimdi ise çift indisli dizilerle ilgili bazı önemli bilgileri hatırlatalım.

Tanım 2.1.11. X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (i, j) &\rightarrow f(i, j) = x_{ij} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna X de bir çift indisli dizi denir.

Çift indisli dizilerin yakınsaklığı ilk olarak Pringsheim [36] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.12. $x = (x_{ij})$ kompleks veya reel terimli bir çift indisli dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $i, j \geq N$ için

$$|x_{ij} - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $x = (x_{ij})$ dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır (veya P -yakınsaktır) denir. Buradaki L sayısına x dizisinin P -limiti denir ve bu durum $P\text{-}\lim x = L$ ile ifade edilir. Tüm Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin kümesi c_2 ile gösterilir [36].

Tanım 2.1.13. $x = (x_{ij})$ kompleks veya reel terimli bir çift indisli dizi olmak üzere, eğer

$$\|x\|_{(\infty,2)} = \sup_{i,j} |x_{ij}| < \infty$$

oluyorsa, x dizisine sınırlıdır denir. Tüm sınırlı çift indisli dizilerin kümesi ℓ_{∞}^2 ile gösterilir.

Uyarı 2.1.14. Tek indisli diziler için yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat Pringsheim anlamında yakınsak bir çift indisli dizi, sınırlı olmak zorunda değildir. Örneğin, genel terimi

$$x_{ij} = \begin{cases} j, & i=1 \\ i, & j=1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $x = (x_{ij})$ dizisi için $P\text{-}\lim x = 0$, fakat bu dizi sınırlı değildir.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, hem tek hem de çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı hatırlatılacaktır.

Tanım 2.2.1. Bir $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olmak üzere K_n kümesinin eleman sayısını $|K_n|$ ile gösterelim. Eğer

$$\lim_n \frac{|K_n|}{n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir.

(a_k) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise, bu durumda

$$\delta(K) = \lim_n \frac{n}{a_n}$$

dir [32].

Örneğin, $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ ve $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olduğu yoğunluk tanımından elde edilebilir. Ayrıca doğal sayılar kümesinin her bir sonlu alt kümesi sıfır yoğunluklıdır. Bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesi için $\delta(A)$ mevcut ise, bu durumda

$$\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$$

eşitliği geçerlidir [32].

Tanım 2.2.2. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin yoğunluğu sıfır, yani

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st - \lim x = L$ şeklinde gösterilir [9].

Yakınsak diziler uzayını c ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını st ile gösterecek olursak, tanımdan $c \subset st$ dir. Fakat bunun karşıtının her zaman doğru olamayacağı aşağıdaki örnekte görölmektedir.

Örnek 2.2.3. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases} , \quad (m = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Böylece $st - \lim x = 0$ elde edilir.

Ayrıca Klasik Analizden biliyoruz ki yakınsak her dizi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek 2.2.4.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2 \\ 1 & , \quad k \neq m^2 \end{cases} , \quad (m = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x = 1$ dir ve fakat bu dizi sınırsız ve ıraksaktır.

Şimdi de istatistiksel yakınsaklık kavramını çift indisli diziler için tanıtalım. Çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı Mursaleen ve Edely [28] tarafından verilmiştir.

Tanım 2.2.5. $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ iki boyutlu pozitif tamsayılar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere $K_{m,n} = \{(i, j) \in K : i \leq m, j \leq n\}$ kümesinin eleman sayısını gösterebiliriz.

Eğer $\left(\frac{K_{m,n}}{mn}\right)$ dizisinin Pringsheim anlamında bir limiti mevcut ise, bu durumda K kümesi çift doğal yoğunluğa sahiptir denir ve

$$\delta_2(K) = P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{K_{m,n}}{mn}$$

şeklinde tanımlanır [28].

Örneğin, $K = \{(i^2, j^2) : i, j \in \mathbb{N}\}$ kümesini alalım. Bu durumda

$$\delta_2(K) = P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{K_{m,n}}{mn} \leq P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

olup, K kümesinin çift doğal yoğunluğu sıfırdır. Bir başka örnek olarak, $\{(i, 2j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ kümesinin çift doğal yoğunluğu $1/2$ dir.

Tanım 2.2.6. $x = (x_{ij})$ reel sayıların bir çift indisli dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_2\left(\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : |x_{ij} - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

veya denk olarak

$$P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \left| \{(i, j) : i \leq m, j \leq n : |x_{ij} - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise, bu durumda x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st_2 - \lim_{i,j} x_{ij} = L$ şeklinde yazılır. Tüm istatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesi ise S_2 ile gösterilir [28].

Uyarı 2.2.7. (i) $x = (x_{ij})$ dizisi P -yakınsak bir çift dizi ise, bu durumda x dizisi yakınsak olduğu aynı P -limit değerine istatistiksel yakınsaktır. Eğer $P - \lim x = L$ ise, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $i, j \geq N$ için $|x_{ij} - L| < \varepsilon$ olur. Bu durumda

$$K := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : |x_{ij} - L| \geq \varepsilon\} \subset (\mathbb{N} \times \{1, 2, \dots, N-1\}) \cup (\{1, 2, \dots, N-1\} \times \mathbb{N})$$

olur. Böylece s_1 ve s_2 sonlu sayılar olmak üzere

$$K_{m,n} \leq s_1 m + s_2 n$$

yazılabilir. Bu ise x dizisinin istatistiksel yakınsak olmasını gerektirir.

(ii) Eğer $x = (x_{ij})$ çift dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu L sayısı bir tektir.

(iii) Eğer $x = (x_{ij})$ çift dizisi istatistiksel yakınsak ise, bu durumda x dizisinin P -yakınsak olması gerekmez. Ayrıca sınırlı olması da gerekmez. Örneğin, $x = (x_{ij})$ dizisi

$$x_{ij} = \begin{cases} ij, & i = m^2, j = n^2 \\ 1, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}, \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için $\left| \{(i, j) : |x_{ij} - 1| \geq \varepsilon\} \right| \leq \sqrt{i}\sqrt{j}$ olduğundan $st_2 - \lim_{i,j} x_{ij} = 1$ dir. Fakat $x = (x_{ij})$ dizisi ne P -yakınsak ne de sınırlıdır.

2.3. İdeal Kavramı ve İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda ideal yakınsaklık (veya I -yakınsaklık) kavramı hatırlatılacaktır. Bunun için öncelikle ideal ve süzgeç tanımları verilecek, daha sonra da bu kavramlarla ilgili ihtiyaç duyulduğu ölçüde tanım ve teoremlere değinilecektir.

Tanım 2.3.1. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $I \subset 2^X$ ailesi için,

- (i) $\emptyset \in I$
- (ii) $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$ (toplamsallık)
- (iii) $A \in I$ ve $B \subset A$ ise $B \in I$ (kalıtsallık)

şartları sağlanıyorsa, I ailesine X üzerinde bir ideal denir [22]

Tanım 2.3.2. Eğer $X \notin I$ ise, I idealine öz (non-trivial) ideal denir. Buna göre 2^X dışındaki tüm idealler öz idealdir [22].

Tanım 2.3.3. I , X de bir öz (non-trivial) ideal olsun. Eğer her $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise, yani I öz ideali X in tüm sonlu alt kümelerini içeriyor ise, I idealine uygun (admissible) ideal denir [21].

Tanım 2.3.4. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $F \subset 2^X$ ailesi için,

- (i) $\emptyset \notin F$
- (ii) $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$
- (iii) $A \in F$ ve $A \subset B$ ise $B \in F$

şartları sağlanıyorsa, F ailesine X üzerinde bir filtre (veya süzgeç) denir [30].

Aşağıdaki önerme ideal ve filtre kavramları arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Önerme 2.3.5. $X \neq \emptyset$ bir küme ve I , X de bir öz (non-trivial) ideal olsun. Bu durumda

$$F(I) = \{M \subset X : \exists A \in I \text{ vardır öyle ki } M = X \setminus A\}$$

ailesi X üzerinde bir filtredir ve $F(I)$ filtresine I ideali ile ilgili filtre denir [21].

Tanım 2.3.6. $I \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de bir öz (non-trivial) ideal, $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise, bu durumda x dizisi L sayısına ideal yakınsaktır (veya I –yakınsaktır) denir ve bu durum $I - \lim x = L$ ile gösterilir [21].

Uyarı 2.3.7. (i) I_f , $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda I_f bir uygun (admissible) idealdir ve $I = I_f$ için ideal yakınsaklık (I –yakınsaklık) klasik anlamda yakınsaklıkla çakışır. Diğer taraftan I uygun ideal ise, klasik anlamda yakınsaklık I –yakınsaklığı gerektirir [21].

(ii) $I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ sınıfı $\mathbb{N}$ de bir uygun ideal olup, $I = I_\delta$ için I –yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır [21].

BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, ilk olarak tek indisli diziler için Riesz dönüşümü, Riesz yakınsaklık, Mursaleen vd. [29] tarafından tanıtılan ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık (veya $S_{\bar{N}}$ - yakınsaklık) ve Das vd. [6] tarafından verilen I - istatistiksel yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır. Daha sonra ise, ideal kavramı kullanılarak $S_{\bar{N}}$ - yakınsaklık kavramı genişletilecek ve bazı teoremler ispatlanacaktır.

3.1. Ağırlıklı İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. (p_n) , hepsi birden sıfır olmayan, negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve

$$P_n = \sum_{k=1}^n p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n \quad , \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

olsun. Bu durumda bir (x_n) dizisi için

$$t_n(x) := \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k x_k$$

ile tanımlı $(t_n(x))$ dönüşümüne x dizisinin Riesz dönüşümü veya Riesz ortalaması denir ve $(\bar{N}, p_n)$ ile gösterilir [35].

Bu tanımdan da görüleceği gibi 1.mertebeden Cesàro ortalaması, Riesz ortalamasının her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ alınması özel haline karşılık gelir. Ayrıca Riesz dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ iken $P_n \rightarrow \infty$ olmasıdır [35].

Bu çalışma boyunca $n \rightarrow \infty$ iken $P_n \rightarrow \infty$ alınacaktır ve ayrıca yukarıdaki özelliklere sahip $p = (p_n)$ dizilerinin sınıfı Δ ile gösterilecektir. Yani, $p = (p_n) \in \Delta$ ise $p = (p_n)$, hepsi birden sıfır olmayan, negatif olmayan reel sayıların bir dizisidir.

Tanım 3.1.2. Verilen bir $x = (x_k)$ dizisi için, eğer

$$\lim_n t_n(x) = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına $(\bar{N}, p_n)$ -toplanabilir (veya Riesz yakınsaktır) denir ve bu durum $x_k \rightarrow L(\bar{N}, p_n)$ ile gösterilir.

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ alınır ise, bu durumda $(\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik $(C, 1)$ -toplanabilirliğe dönüşür.

Tanım 3.1.3. Bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde, eğer

$$st - \lim_n t_n(x) = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel $(\bar{N}, p_n)$ -toplanabilir denir [27].

İstatistiksel yakınsaklığın bir genelleşmesi olan ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Karakaya ve Chishti [18] tarafından verilmiş ve fakat daha sonra bu tanım Mursaleen vd. [29] tarafından aşağıdaki gibi tekrar düzenlenmiştir.

Tanım 3.1.4. Bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyor ise, x dizisi L sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır (veya $S_{\bar{N}}$ – yakınsaktır) denir ve bu durum $S_{\bar{N}} - \lim x = L$ ile gösterilir [29].

3.2. $S_{\bar{N}}(I)$ – Yakınsaklık

Bu kısımda Tanım 3.1.2 ve Tanım 3.1.4 de verilen $(\bar{N}, p_n)$ – toplanabilirlik ve $S_{\bar{N}}$ – yakınsaklık kavramlarını, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir uygun (admissible) ideali aracılığı ile genelleştirip $I - (\bar{N}, p_n)$ – toplanabilirlik ve $S_{\bar{N}}(I)$ – yakınsaklık kavramlarını tanıtaacağız.

Das vd. [6] tarafından yapılan çalışmada ideal kavramı kullanılarak istatistiksel yakınsaklık kavramından daha genel olan I – istatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun (admissible) ideal ve $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

ise, x dizisi L sayısına I – istatistiksel yakınsaktır (veya $S(I)$ – yakınsaktır) denir ve bu durum $S(I) - \lim x = L$ ile gösterilir. Tüm I – istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(I)$ ile gösterilir [6].

Uyarı 3.2.2. Eğer $I = I_f$ alınırsa, I – istatistiksel yakınsaklık kavramı, istatistiksel yakınsaklık kavramı ile çakışır.

Tanım 3.2.3. $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun (admissible) ideal ve $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olsun.

(i) Eğer $I - \lim_n t_n(x) = L$ ise, yani her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n \in \mathbb{N} : |t_n(x) - L| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise, x dizisi L sayısına $I - (\bar{N}, p_n)$ – toplanabilirdir denir ve bu durum $(\bar{N}, p_n)(I) - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(\bar{N}, p_n)(I)$ ile gösterilir.

(ii) Eğer her $\delta > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k |x_k - L| \geq \delta\right\} \in I$$

ise, x dizisi L sayısına $I - [\bar{N}, p_n]$ – toplanabilirdir (veya kuvvetli $I - (\bar{N}, p_n)$ – toplanabilirdir) denir ve bu durum $[\bar{N}, p_n](I) - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L[\bar{N}, p_n](I)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4. $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun (admissible) ideal ve $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{P_n} \left| \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| \geq \delta\right\} \in I$$

ise, x dizisi L sayısına ağırlıklı ideal istatistiksel yakınsaktır (veya $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsaktır) denir ve bu durum $S_{\bar{N}}(I)$ - $\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ ile gösterilir.

Uyarı 3.2.5. Tanım 3.2.4 de her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alınırsa, bu durumda $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsaklık kavramı $S(I)$ -yakınsaklık kavramına indirgenir.

Uyarı 3.2.6. Eğer $I = I_f$ alırsak, bu durumda $I - (\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik, $I - [\bar{N}, p_n]$ -toplanabilirlik ve $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsaklık kavramları, sırasıyla $(\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik, $[\bar{N}, p_n]$ -toplanabilirlik ve $S_{\bar{N}}$ -yakınsaklık kavramları ile çakışır.

$S_{\bar{N}}(I)$, $(\bar{N}, p_n)(I)$ ve $[\bar{N}, p_n](I)$ ile sırasıyla tüm $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsak, $I - (\bar{N}, p_n)$ -toplanabilir ve $I - [\bar{N}, p_n]$ -toplanabilir dizilerin uzayını göstereceğiz.

Aşağıdaki teorem ile $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsaklık ve $(\bar{N}, p_n)(I)$ -toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 3.2.7. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k |(x_k - L)| \leq M$ olsun. Eğer $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ ise bu durumda $x_k \rightarrow L(\bar{N}, p_n)(I)$ dır, fakat tersi geçerli değildir.

İspat. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ olsun.

$K_{p_n}(\varepsilon) := \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ ve $K_{p_n}^c(\varepsilon) := \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| < \varepsilon\}$ kümelerini tanımlayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
|t_n - L| &= \left| \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k x_k - L \right| = \left| \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k (x_k - L) \right| = \left| \frac{1}{P_n} \sum_{k \in K_{P_n}(\varepsilon)} p_k (x_k - L) + \frac{1}{P_n} \sum_{k \in K_{P_n}^c(\varepsilon)} p_k (x_k - L) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{P_n} \sum_{k \in K_{P_n}(\varepsilon)} p_k (x_k - L) \right| + \left| \frac{1}{P_n} \sum_{k \in K_{P_n}^c(\varepsilon)} p_k (x_k - L) \right| \\
&\leq \frac{1}{P_n} \sum_{k \in K_{P_n}(\varepsilon)} p_k |x_k - L| + \frac{1}{P_n} \sum_{k \in K_{P_n}^c(\varepsilon)} p_k |x_k - L| \\
&\leq \frac{1}{P_n} \sum_{k \in K_{P_n}(\varepsilon)} M + \frac{1}{P_n} \sum_{k \in K_{P_n}^c(\varepsilon)} \varepsilon \\
&\leq \frac{M}{P_n} \left| \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz. $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ olduğundan

$$A(\varepsilon) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{P_n} \left| \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| \geq \frac{\varepsilon}{M} \right\} \in I$$

dır. Eğer $n \in (A(\varepsilon))^c$ ise, bu durumda

$$|t_n - L| < 2\varepsilon$$

olur. Buradan ise

$$\{n \in \mathbb{N} : |t_n - L| \geq 2\varepsilon\} \subset A(\varepsilon)$$

elde ederiz. Son içermenin sağ tarafındaki küme I ya ait olduğundan, sol tarafındaki küme de I ya aittir. Dolayısıyla $I - \lim_n t_n = L$ olup, ve buradan da

$x_k \rightarrow L(\bar{N}, p_n)(I)$ sonucuna ulaşırız.

Tersinin geçerli olmadığını göstermek için $I = I_f$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alalım. Bu durumda $I - (\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik ve $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsaklık kavramları sırasıyla $(C, 1)$ -toplanabilirlik ve istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir. Şimdi $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 - m, m^2 - m + 1, \dots, m^2 - 1 \\ -m, & k = m^2 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}, \quad (m = 2, 3, 4, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda x dizisi 0 sayısına $(\bar{N}, p_n)$ -toplanabilir olmasına rağmen $S_{\bar{N}}$ -yakınsak değildir [29]. Dolayısıyla yukarıdaki seçimlerimiz göz önüne alındığında x dizisi 0 sayısına $I - (\bar{N}, p_n)$ -toplanabilir olmasına rağmen $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsak değildir sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.2.8. (i) Eğer $x_k \rightarrow L[\bar{N}, p_n](I)$ ise $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ dır ve $[\bar{N}, p_n](I) \subset S_{\bar{N}}(I)$ kapsaması kuvvetlidir.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k |(x_k - L)| \leq M$ olsun. Eğer $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ ise $x_k \rightarrow L[\bar{N}, p_n](I)$ dır.

(iii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k |(x_k - L)| \leq M$ olsun. Bu durumda $[\bar{N}, p_n](I) = S_{\bar{N}}(I)$ dır.

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $x_k \rightarrow L[\bar{N}, p_n](I)$ olsun.

$K_{p_n}(\varepsilon) := \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ ve $K_{p_n}^c(\varepsilon) := \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| < \varepsilon\}$ kümelerini tanımlayalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k |(x_k - L)| &= \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}(\varepsilon)}}^n p_k |(x_k - L)| + \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}^c(\varepsilon)}}^n p_k |(x_k - L)| \\
&\geq \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}(\varepsilon)}}^n p_k |(x_k - L)| \geq \varepsilon \frac{1}{P_n} |\{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

ve böylece her $\delta > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{P_n} |\{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \Rightarrow \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k |(x_k - L)| \geq \varepsilon \delta$$

olur. Buradan ise

$$\frac{1}{P_n} |\{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \Rightarrow \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k |(x_k - L)| \geq \varepsilon \delta$$

elde ederiz.

$x_k \rightarrow L[\bar{N}, p_n](I)$ olduğundan son içermenin sağ tarafındaki küme I ya ait olur, ve bu durumda sol tarafındaki küme de I ya aittir. Dolayısıyla $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ sonucuna ulaşırız.

Şimdi $[\bar{N}, p_n](I) \subset S_{\bar{N}}(I)$ kapsamasının kuvvetli olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği verelim:

I , bir uygun (admissible) ideal ve $p_k = k$ ($k=1, 2, \dots$) olsun. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}, \quad (m=1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu durumda

$$P_n = \sum_{k=1}^n p_k = \frac{n(n+1)}{2}$$

dir ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - 0| \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken})$$

olur. Dolayısıyla her $\delta > 0$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - 0| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}} \geq \delta \right\}$$

elde ederiz.

$n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}} \rightarrow 0$ olduğundan son içermenin sağ tarafındaki küme I

idealine ait olur, ve dolayısıyla sol taraftaki küme de I idealine aittir. Bu ise

$x_k \rightarrow 0(S_{\bar{N}}(I))$ olmasıdır. Fakat

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k |x_k - 0| = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken})$$

olduğundan $x_k \not\rightarrow 0[\bar{N}, p_n](I)$ dir.

(ii) $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ olsun. $K_{P_n}(\varepsilon) := \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}$

ve $K_{P_n}^c(\varepsilon) := \{k \leq P_n : p_k |x_k - L| < \varepsilon\}$ kümelerini tanımlayalım. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k |(x_k - L)| &= \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}(\varepsilon)}}^n p_k |(x_k - L)| + \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}^c(\varepsilon)}}^n p_k |(x_k - L)| \\ &\leq \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}(\varepsilon)}}^n M + \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}^c(\varepsilon)}}^n \varepsilon \\ &\leq \frac{M}{P_n} |\{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ olduğundan

$$A(\varepsilon) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{P_n} |\{k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\varepsilon}{M} \right\} \in I$$

dır. Eğer $n \in (A(\varepsilon))^c$ ise, bu durumda

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k |(x_k - L)| < 2\varepsilon$$

olur. Buradan ise

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k |(x_k - L)| \geq 2\varepsilon \right\} \subset A(\varepsilon)$$

elde ederiz. Son içermenin sağ tarafındaki küme I ya ait olduğundan, sol tarafındaki küme de I ya aittir. Dolayısıyla $x_k \rightarrow L[\bar{N}, p_n](I)$ sonucuna ulaşırız.

(iii) (i) ve (ii) nin direk sonucudur.

Bu bölümdeki son teoremimiz de ise $S_{\bar{N}}(I)$ -yakınsaklık ve I -istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 3.2.9. Kabul edelim ki $\lim_n \frac{P_n}{n} < \infty$ olsun. Bu durumda,

(i) Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ ve $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ ise $x_k \rightarrow L(S(I))$ dır.

(ii) Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k < 1$ ve $x_k \rightarrow L(S(I))$ ise $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ dır.

İspat. Kabulümüzden, $K_1 \leq \frac{P_n}{n} \leq K_2$ olacak şekilde K_1 ve K_2 pozitif sabit sayıları vardır.

(i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ ve $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \frac{K_2}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

ve böylece her $\delta > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \Rightarrow \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{K_2}$$

olur. Buradan ise

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{K_2} \right\}$$

elde ederiz. $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ olduğundan son içermenin sağ tarafındaki küme I idealine ait olur, ve dolayısıyla sol taraftaki küme de I idealine aittir. Bu ise $x_k \rightarrow L(S(I))$ olmasıdır.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k < 1$ ve $x_k \rightarrow L(S(I))$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| &\geq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\geq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\geq \frac{K_1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

ve böylece her $\delta > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \Rightarrow \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq K_1 \delta$$

olur. Buradan ise

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq K_1 \delta \right\}$$

elde ederiz. $x_k \rightarrow L(S(I))$ olduğundan son içermenin sağ tarafındaki küme I idealine ait olur, ve dolayısıyla sol taraftaki küme de I idealine aittir. Bu ise $x_k \rightarrow L(S_{\bar{N}}(I))$ olmasıdır.

BÖLÜM 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOROVKİN YAKLAŞIM TEOREMİ

Bu bölümde ihtiyaç duyacağımız bazı temel tanım ve teoremleri hatırlattıktan sonra Gadjev ve Orhan [15] tarafından verilen istatistiksel Korovkin yaklaşım teoremini $I - (\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik yardımı ile geliştireceğiz.

4.1. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa, bu durumda X uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x) = L(f; x)$$

şeklinde gösterilir. X uzayına L operatörünün tanım kümesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f; x) = g(x)$, Y uzayının bir elemanı olup, g fonksiyonlarının kümesine L operatörünün değer kümesi denir ve bu küme $R(L)$ ile gösterilir. $R(L) \subset Y$ olduğu açıktır [16].

Tanım 4.1.1. X ve Y lineer uzaylar olsun. $L: X \rightarrow Y$ operatörü, her $f, g \in X$ her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulunu sağlıyor ise, bu durumda L operatörüne lineer operatör denir [16].

Uyarı 4.1.2. L , bir lineer operatör olsun.

$$\begin{aligned}
L(0; x) &= L(f(t) - f(t); x) \\
&= L(f(t); x) - L(f(t); x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $L(0; x) = 0$ dır.

Tanım 4.1.3. X ve Y reel değerli fonksiyonların uzayı ve $L : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. L operatörü pozitif değerli bir fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani X tanım uzayından alınan her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f; x) \geq 0$ koşulu gerçekleşiyor ise, bu durumda L operatörüne pozitif operatör denir [16].

Lineer ve pozitif olan operatörlere lineer pozitif operatör denir.

Uyarı 4.1.4. L lineer pozitif operatörü, negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür. Şöyle ki $f(x) \leq 0$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $-f(x) \geq 0$ olur. L pozitif olduğundan $L(-f; x) \geq 0$ dır. L lineer olduğundan $-L(f; x) \geq 0$ olur. O halde $L(f; x) \leq 0$ dır.

Lemma 4.1.5. Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani bir L lineer pozitif operatörü için

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow L(f; x) \leq L(g; x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda $g(x) - f(x) \geq 0$ olur. L operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f; x) \geq 0$$

olur. Ayrıca L operatörü lineer olduğundan

$$L(g; x) - L(f; x) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$L(g; x) \geq L(f; x)$$

gerçeklenir. Bu durumda lineer pozitif L operatörünün monoton artan olduğu ispatlanmış olur [16].

Lemma 4.1.6. L lineer pozitif bir operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

olduğu açıktır. L lineer pozitif operatörü monoton artan olduğundan

$$L(-|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

olur. L operatörü lineer olduğundan

$$-L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

yazılabilir. Buradan ise

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

sonucu elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur [16].

Tanım 4.1.7. Kapalı ve sonlu bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. $f \in C[a, b]$ olmak üzere, $C[a, b]$ uzayı üzerinde tanımlı norm

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile birlikte $C[a, b]$ uzayı, bir Banach uzayı (yani, tam normlu uzay) olur.

4.2. Korovkin Yaklaşım Teoremi

Bu kısımda ilk olarak klasik ve istatistiksel Korovkin teoremlerini vereceğiz ve daha sonra bu teoremlerdeki pozitif lineer operatörler dizisi için yakınsaklık koşullarının gerçekleşmediği durumda $I - (\bar{N}, p_n)$ -toplanabilirlik yardımı ile daha genel olan bir Korovkin teoremini ispatlayacağız.

Şimdi literatürde “Korovkin Teoremi” olarak bilinen ve yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan aşağıdaki teoremi hatırlayalım.

Teorem 4.2.1. $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ile tanımlı (L_n) , pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda tüm reel eksen üzerinde sınırlı olan her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$\lim_n \|L_n(f; x) - f(x)\|_{\infty} = 0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \|L_n(f_i; x) - f_i(x)\|_\infty = 0 ; \quad f_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, 2$$

koşullarının gerçekleşmesidir [20].

Klasik Korovkin teoremi istatistiksel yakınsaklık kullanılarak Gadjiev ve Orhan [15] tarafından geliştirilmiştir.

Teorem 4.2.2. $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ile tanımlı (L_n) , pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda tüm reel eksen üzerinde sınırlı olan her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$st - \lim_n \|L_n(f; x) - f(x)\|_\infty = 0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$st - \lim_n \|L_n(f_i; x) - f_i(x)\|_\infty = 0 ; \quad f_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, 2$$

koşullarının gerçekleşmesidir [15].

Aşağıdaki örnek Bernstein polinomlar dizisinin 4.2.1 ve 4.2.2 teoremlerini gerçeklediğini gösterir.

Örnek 4.2.3. $f \in C[0, 1]$ olmak üzere,

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan Bernstein polinomlar dizisi için

$$B_n(1; x) = 1$$

$$B_n(t; x) = x$$

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

olduğundan [23], (B_n) pozitif lineer operatörler dizisi için Teorem 4.2.1-4.2.2 gerçekleşir.

4.3. $I - (\bar{N}, p_n)$ – Toplanabilir Korovkin Yaklaşım Teoremi

Bu kısımda Şimdi $I - (\bar{N}, p_n)$ – toplanabilirlik yardımı ile daha genel olan bir Korovkin teoremini ispatlayacağız.

Teorem 4.3.1. $T_k : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ile tanımlı (T_k) pozitif lineer operatörler dizisi

$$(\bar{N}, p_n)(I) - \lim_k \|T_k(1; x) - 1\|_\infty = 0 \quad (4.1)$$

$$(\bar{N}, p_n)(I) - \lim_k \|T_k(t; x) - x\|_\infty = 0 \quad (4.2)$$

$$(\bar{N}, p_n)(I) - \lim_k \|T_k(t^2; x) - x^2\|_\infty = 0 \quad (4.3)$$

koşullarını sağlıyor ise, bu durumda tüm reel eksen üzerinde sınırlı olan her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$(\bar{N}, p_n)(I) - \lim_k \|T_k(f; x) - f(x)\|_\infty = 0 \quad (4.4)$$

olur.

İspat. f fonksiyonu tüm reel eksen üzerinde sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan ise üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \quad (4.5)$$

elde edilir. Ayrıca $f \in C[a, b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır, öyle ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ iken

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (4.6)$$

olur.

(4.5) ve (4.6) eşitsizliklerinden dolayı her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \quad (4.7)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Çünkü $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ve

$\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 0$ olduğundan $|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ sağlanır. $|t - x| \geq \delta$

olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ eşitsizliği sağlanır. Bu

durumda $\varepsilon > 0$ olduğu için (4.5) eşitsizliğinden (4.7) eşitsizliği elde edilir.

T_k lineer olduğundan

$$\begin{aligned} |T_k(f(t); x) - f(x)| &= |T_k(f(t); x) - f(x) + T_k(f(x); x) - T_k(f(x); x)| \\ &= |T_k(f(t); x) - T_k(f(x); x) + T_k(f(x); x) - f(x)| \end{aligned}$$

$$=|T_k(f(t)-f(x);x)+f(x)(T_k(1;x)-1)|$$

dir. Burada üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$|T_k(f(t);x)-f(x)|\leq|T_k(f(t)-f(x);x)|+|f(x)||T_k(1;x)-1|$$

elde edilir. T_k lineer pozitif operatör olduğundan, Lemma 4.1.6 gereğince

$$|T_k(f(t);x)-f(x)|\leq T_k(|f(t)-f(x)|;x)+|f(x)||T_k(1;x)-1|$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca hipotezimizden her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq M$ olduğundan

$$|T_k(f(t);x)-f(x)|\leq T_k(|f(t)-f(x)|;x)+M|T_k(1;x)-1|$$

yazılabilir. Lemma 4.1.5 den T_k monoton artan olup, (4.7) eşitsizliğinden

$$|T_k(f(t);x)-f(x)|\leq T_k\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+M|T_k(1;x)-1| \quad (4.8)$$

elde edilir. Öte yandan T_k nın lineerliğinden

$$\begin{aligned} T_k\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= T_k(\varepsilon;x)+T_k\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) \\ &= \varepsilon T_k(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}T_k((t-x)^2;x) \\ &= \varepsilon T_k(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}T_k(t^2-2xt+x^2;x) \\ &= \varepsilon T_k(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}\{T_k(t^2;x)-2xT_k(t;x)+x^2T_k(1;x)\} \\ &= \varepsilon(T_k(1;x)-1)+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\{T_k(t^2;x)-x^2-x^2+2x^2-2xT_k(t;x)+x^2T_k(1;x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon + \varepsilon (T_k(1; x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2} \{T_k(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xT_k(t; x) + x^2T_k(1; x) - x^2\} \\
&= \varepsilon + \varepsilon (T_k(1; x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2} \{(T_k(t^2; x) - x^2) - 2x(T_k(t; x) - x) + x^2(T_k(1; x) - 1)\} \\
&= \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} + x^2\right) (T_k(1; x) - 1) - \frac{4M}{\delta^2} x(T_k(t; x) - x) + \frac{2M}{\delta^2} (T_k(t^2; x) - x^2)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin (4.8) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
|T_k(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} x^2 + M\right) |T_k(1; x) - 1| \\
&\quad + \frac{4M}{\delta^2} |x| |T_k(t; x) - x| + \frac{2M}{\delta^2} |T_k(t^2; x) - x^2|
\end{aligned}$$

elde ederiz. $a \leq x \leq b$ üzerinden supremum alınıp, ε nun keyfi pozitif sayı olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|T_k(f(t); x) - f(x)\|_\infty &\leq \left(\varepsilon + \frac{2Mb^2}{\delta^2} + M\right) \|T_k(1; x) - 1\|_\infty \\
&\quad + \frac{4M}{\delta^2} b \|T_k(t; x) - x\|_\infty + \frac{2M}{\delta^2} \|T_k(t^2; x) - x^2\|_\infty \\
&\leq B \left(\|T_k(1; x) - 1\|_\infty + \|T_k(t; x) - x\|_\infty + \|T_k(t^2; x) - x^2\|_\infty \right)
\end{aligned}$$

olur. Burada $b = \max_{x \in [a, b]} |x|$ ve $B := \max \left\{ \varepsilon + \frac{2Mb^2}{\delta^2} + M, \frac{2M}{\delta^2}, \frac{4Mb}{\delta^2} \right\}$ dir. Son bulunnan eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
\|T_k(f, x) p_k - f(x)\|_\infty &\leq \varepsilon + B \left(\|T_k(1, x) p_k - 1\|_\infty + \|T_k(t, x) p_k - x\|_\infty \right. \\
&\quad \left. + \|T_k(t^2, x) p_k - x^2\|_\infty \right) \quad (4.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) eşitsizliğinde $T_k(\cdot; x)p_k$ yerine $L_m(\cdot; x) = \frac{1}{P_m} \sum_{k=1}^m T_k(\cdot; x)p_k$ alıp, verilen $r > 0$ sayısı için $\eta < r$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı seçerek

$$H := \left\{ m \in \mathbb{N} : \|L_m(f; x) - f(x)\|_{\infty} \geq r \right\},$$

$$H_i := \left\{ m \in \mathbb{N} : \|L_m(f_i; x) - f_i(x)\|_{\infty} \geq \frac{r - \eta}{3B} \right\}, \quad i = 0, 1, 2$$

kümelerini tanımlayalım. Bu durumda (4.9) dan $H \subset \bigcup_{i=0}^2 H_i$ dir. (4.1), (4.2) ve (4.3)

den $i = 0, 1, 2$ için $H_i \in I$ dir. Böylece ideal tanımından $\bigcup_{i=0}^2 H_i \in I$ ve dolayısıyla da $H \in I$ olur. Buradan ise her $f \in C[a, b]$ için

$$(\bar{N}, p_n)(I) - \lim_k \|T_k(f; x) - f(x)\|_{\infty} = 0$$

sonucuna ulaşırız ve bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki örnekte verilen pozitif lineer operatörler dizisi için Teorem 4.3.1 in koşulları sağlanmasına rağmen Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 nin koşulları gerçekleşmez.

Örnek 4.3.2. Tersinin geçerli olmadığını göstermek için $I = I_f$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ alalım. $u = (u_n)$ dizisi Teorem 3.2.7 de tanımlandığı gibi

$$u_n = \begin{cases} 1, & n = m^2 - m, m^2 - m + 1, \dots, m^2 - 1 \\ -m, & n = m^2 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}, \quad (m = 2, 3, 4, \dots)$$

ile tanımlansın [29]. Bu durumda x dizisi klasik anlamda yakınsak ve istatistiksel yakınsak olmamasına rağmen, 0 sayısına $I - (\bar{N}, p_n)$ -toplanabilir.

Şimdi ise bir (T_n) pozitif lineer operatörler dizisini

$$T_n : C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad T_n(f; x) = (1 + u_n) B_n(f; x)$$

ile tanımlayalım. Burada (B_n) , Örnek 4.2.3 de verilen Bernstein polinomlar dizisidir. Böylece

$$T_n(1; x) - 1 = u_n$$

$$T_n(t; x) - x = u_n x$$

$$T_n(t^2; x) - x^2 = u_n \left(x^2 + \frac{x - x^2}{n} \right) + \frac{x - x^2}{n}$$

olur. Bu durumda (T_n) dizisi (4.1), (4.2) ve (4.3) koşullarını gerçekler. Böylece Teorem 4.3.1 den her $f \in C[0,1]$ için

$$(\bar{N}, p_n)(I) - \lim_n \|T_n(f; x) - f(x)\|_\infty = 0$$

dir. Diğer taraftan $B_n(f; 0) = f(0)$ olduğundan $T_n(f; 0) = (1 + u_n) f(0)$ dir. Buradan

$$\|T_n(f; x) - f(x)\|_\infty \geq |T_n(f; 0) - f(0)| = u_n |f(0)|$$

elde ederiz. Böylece $u = (u_n)$ dizisinin, klasik ve istatistiksel limiti sıfır olmadığından $i = 0, 1, 2$ için $(\bar{N}, p_n)(I) - \lim_n \|T_n(f_i; x) - f_i(x)\|_\infty$, ne klasik ne

istatistiksel anlamda sıfıra gitmez. Bu durumda (T_n) dizisi için Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 uygulanamaz. Yani Teorem 4.3.1 daha genel bir sonuçtur.



BÖLÜM 5. ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER İÇİN AĞIRLIKLİ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, ilk olarak çift indisli diziler için Riesz dönüşümü ve Riesz yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır. Daha sonra ise Mursaleen vd. [29] tarafından tanıtılan ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ($S_{\bar{N}}$ -yakınsaklık) kavramı çift indisli dizilere genişletilecek ve bazı teoremler ispatlanacaktır.

Çift indisli diziler için Riesz yakınsaklık kavramı Alotaibi ve Çakan [1] tarafından aşağıdaki gibi tanıtılmıştır.

Tanım 5.1. $q = (q_i)$ ve $p = (p_j)$, hepsi birden sıfır olmayan, negatif olmayan reel sayıların bir dizisi olsun.

$$Q_m = \sum_{i=1}^m q_i = q_1 + q_2 + \dots + q_m \quad \text{ve} \quad P_n = \sum_{j=1}^n p_j = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

olmak üzere, bir $x = (x_{ij})$ dizisi için çift Riesz ortalaması

$$t_{mn}^{qp}(x) = \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j x_{ij}$$

ile tanımlanır. Eğer

$$P\text{-}\lim_{m,n} t_{mn}^{qp}(x) = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına Riesz yakınsaktır denir [1].

Uyarı 5.2. Eğer her $i \in \mathbb{N}$ için $q_i = 1$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $p_j = 1$ alınırsa, bu durumda Riesz ortalama kavramı Cesàro ortalama kavramına ve Riesz yakınsaklık kavramı Cesàro yakınsaklık kavramına indirgenir [1].

Bu çalışma boyunca, bir $x = (x_{ij})$ dizisinin L sayısına Riesz yakınsak olma durumunu x dizisi L sayısına $(\bar{N}, q_m, p_n)$ –toplanabilirdir şeklinde ifade edeceğiz ve bu durumu $x_{ij} \xrightarrow{P} L(\bar{N}, q_m, p_n)$ şeklinde yazacağız. Tüm Riesz yakınsak (yani $(\bar{N}, q_m, p_n)$ –toplanabilir) dizilerin uzayını ise $(\bar{N}, q_m, p_n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 5.3. $x = (x_{ij})$ bir çift dizi olmak üzere, eğer

$$P\text{-}\lim_{m,n} \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda $x = (x_{ij})$ dizisi L sayısına kuvvetli Riesz yakınsaktır (veya kuvvetli $(\bar{N}, q_m, p_n)$ –toplanabilirdir veya $[\bar{N}, q_m, p_n]$ –toplanabilirdir) denir ve bu durum $x_{ij} \xrightarrow{P} L[\bar{N}, q_m, p_n]$ ile ifade edilir.

Tüm kuvvetli $(\bar{N}, q_m, p_n)$ –toplanabilir dizilerin uzayı $[\bar{N}, q_m, p_n]$ ile gösterilir.

Şimdi ise Mursaleen vd. [29] tarafından tanıtılan $S_{\bar{N}}$ –yakınsaklık kavramını çift indisli dizilere genişleterek $S_{\bar{N}_{m,n}}$ –yakınsaklık kavramını tanıtalım.

Tanım 5.4. $x = (x_{ij})$ bir çift dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$P-\lim_{m,n} \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_{ij})$ dizisi L sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır (veya $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsaktır) denir ve bu durum $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ veya $S_{\bar{N}_{m,n}} - \lim x = L$ ile gösterilir.

Tüm $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsak dizilerin uzayını $S_{\bar{N}_{m,n}}$ ile göstereceğiz. Eğer her $i \in \mathbb{N}$ için $q_i = 1$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $p_j = 1$ alınırsa, $S_{\bar{N}_{m,n}}$ uzayı S_2 uzayına indirgenir.

Aşağıdaki teoremden $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsaklık ve $(\bar{N}, q_m, p_n)$ -toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 5.5. Her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i p_j |x_{ij} - L| \leq M$ olsun. Eğer $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ ise bu durumda $x_{ij} \xrightarrow{P} L(\bar{N}, q_m, p_n)$ dır, fakat tersi geçerli değildir.

İspat. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ olsun.

$K(\varepsilon) := \left\{ (i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\}$ dersek, $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ olduğundan

$P-\lim_{m,n} \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} |K(\varepsilon)| = 0$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} |t_{mn}^{qp}(x) - L| &= \left| \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j x_{ij} - L \right| \\ &= \left| \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j (x_{ij} - L) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j (x_{ij} - L) + \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j (x_{ij} - L) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j (x_{ij} - L) \right| + \left| \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j (x_{ij} - L) \right| \\
&\leq \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L| + \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L| \\
&\leq \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} M |K(\varepsilon)| + \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varepsilon \\
&= \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} M |K(\varepsilon)| + \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \varepsilon |K^c(\varepsilon)|
\end{aligned}$$

olur ve burada $m, n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $t_{mn}^{qp}(x) \xrightarrow{P} L$ elde edilir. Dolayısıyla

$x_{ij} \xrightarrow{P} L(\bar{N}, q_m, p_n)$ sonucuna ulaşırız.

Şimdi tersinin geçerli olmadığını göstermek için aşağıdaki örneği verelim:

Her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i = 1$ ve $p_j = 1$ olsun. $x = (x_{ij})$ dizisini

$$x_{ij} = (-1)^i, \quad \forall j$$

ile tanımlansın. Buna göre

$$P\text{-}\lim_{m,n} \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j x_{ij} = P\text{-}\lim_{m,n} \frac{1}{m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j x_{ij} = 0$$

olduğundan x dizisi 0 sayısına $(\bar{N}, q_m, p_n)$ -toplanabilirdir. Fakat x dizisi $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsak değildir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 5.6. Teorem 5.5 de $q_i p_j |x_{ij} - L| \leq M$ şartı kaldırılırsa, $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsak bir dizinin $(\bar{N}, q_m, p_n)$ -toplanabilir olması gerekmez. Bunu göstermek için aşağıdaki örneği vereceğiz.

Örnek 5.7. Her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i = 1$ ve $p_j = j$ olsun. $x = (x_{ij})$ dizisini

$$x_{ij} = \begin{cases} j, & i=1 \\ 1, & j=1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} P - \lim_{m,n} \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ = P - \lim_{m,n} \frac{1}{m \frac{n(n+1)}{2}} \left(m + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, x dizisi 0 sayısına $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsaktır. Fakat

$$P - \lim_{m,n} \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j x_{ij} = P - \lim_{m,n} \frac{1}{m \frac{n(n+1)}{2}} \left(m + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right)$$

limiti sonsuz olduğundan x dizisi $(\bar{N}, q_m, p_n)$ -toplanabilir değildir.

Teorem 5.8. (i) Eğer $x_{ij} \xrightarrow{P} L [\bar{N}, q_m, p_n]$ ise $x_{ij} \xrightarrow{P} L (S_{\bar{N}_{m,n}})$ dir ve $[\bar{N}, q_m, p_n] \subset S_{\bar{N}_{m,n}}$ kapsaması kuvvetlidir.

(ii) Her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i p_j |x_{ij} - L| \leq M$ olsun. Eğer $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ ise bu durumda $x_{ij} \xrightarrow{P} L[\bar{N}, q_m, p_n]$ dır ve dolayısıyla $x_{ij} \xrightarrow{P} L(\bar{N}, q_m, p_n)$ olur.

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ olsun.

$K(\varepsilon) := \{(i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon\}$ dersek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L| &= \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L| + \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L| \\ &\quad (i,j) \in K(\varepsilon) \quad (i,j) \notin K(\varepsilon) \\ &\geq \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \varepsilon \left| \{(i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon\} \right| \end{aligned}$$

olur ve burada $m, n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ sonucuna ulaşırız.

$[\bar{N}, q_m, p_n] \subset S_{\bar{N}_{m,n}}$ kapsamasının kuvvetli olduğunu göstermek için, her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i = 1$ ve $p_j = j$ olsun. $x = (x_{ij})$ dizisini Örnek 5.7 deki gibi tanımlayalım. Bu durumda x dizisi 0 sayısına $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsaktır ve fakat x dizisi 0 sayısına $[\bar{N}, q_m, p_n]$ -toplanabilir değildir.

(ii) $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ olsun.

$K(\varepsilon) := \{(i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon\}$ dersek, $x_{ij} \xrightarrow{P} L(S_{\bar{N}_{m,n}})$ olduğundan

$P - \lim_{m,n} \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} |K(\varepsilon)| = 0$ olur. Buna göre,

$$\frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L| = \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L| + \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_i p_j |x_{ij} - L|$$

$$(i,j) \in K(\varepsilon) \quad (i,j) \notin K(\varepsilon)$$

$$\leq \frac{1}{Q_m} \frac{1}{P_n} M \left| \left\{ (i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon$$

olur ve burada $m, n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $x_{ij} \xrightarrow{P} L[\bar{N}, q_m, p_n]$ ve dolayısıyla da $x_{ij} \xrightarrow{P} L(\bar{N}, q_m, p_n)$ sonucuna ulaşırız.

Bu bölümdeki son teoremimizde $S_{\bar{N}_{m,n}}$ -yakınsaklık ve st_2 -yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 5.9. $\lim_m \frac{Q_m}{m} < \infty$ ve $\lim_n \frac{P_n}{n} < \infty$ olsun. Bu durumda,

(i) Eğer her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i \geq 1$ ve $p_j \geq 1$ ise, bu durumda $S_{\bar{N}_{m,n}} - \lim x = L$ iken $st_2 - \lim x = L$ dir.

(ii) Eğer her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i < 1$ ve $p_j < 1$ ise, bu durumda $st_2 - \lim x = L$ iken $S_{\bar{N}_{m,n}} - \lim x = L$ dir.

İspat. Kabulümüzden, $K_1 \leq \frac{Q_m}{m} \leq K_2$ ve $M_1 \leq \frac{P_n}{n} \leq M_2$ olacak şekilde K_1, K_2, M_1 ve M_2 pozitif sabit sayıları vardır.

(i) Her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i \geq 1$ ve $p_j \geq 1$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $S_{\bar{N}_{m,n}} - \lim x = L$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{1}{n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq m, j \leq n : |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{m} \frac{1}{n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq m, j \leq n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{m} \frac{1}{n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{K_2}{Q_m} \frac{M_2}{P_n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur ve buradan $st_2 - \lim x = L$ sonucuna ulaşırız.

(ii) Her $i, j \in \mathbb{N}$ için $q_i < 1$ ve $p_j < 1$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $st_2 - \lim x = L$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{1}{n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq m, j \leq n : |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| &\geq \frac{1}{m} \frac{1}{n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq m, j \leq n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\geq \frac{1}{m} \frac{1}{n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\geq \frac{K_1}{Q_m} \frac{M_1}{P_n} \left| \left\{ (i, j) : i \leq Q_m, j \leq P_n : q_i p_j |x_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

olur ve buradan $S_{\bar{N}_{m,n}} - \lim x = L$ sonucuna ulaşırız.

BÖLÜM 6. MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ YENİ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde gerek duyulan bazı temel tanım ve teoremler hatırlatıldıktan sonra modülüs fonksiyonu yardımıyla yeni dizi uzayları tanıtılacaktır.

6.1. Modülüs Fonksiyonu ve Bazı Özellikleri

Tanım 6.1.1. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

- i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, (her $x, y \geq 0$ için)
- iii) f artan
- iv) f , $x = 0$ noktasında sağdan sürekli

şartlarını sağlıyorsa, f fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir [31].

(ii) ve (iv) özelliklerinden dolayı f modülüs fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli dir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $f(nx) \leq nf(x)$ dir. Buradan

$$f(x) = f\left(nx \frac{1}{n}\right) \leq nf\left(\frac{x}{n}\right)$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{n} f(x) \leq f\left(\frac{x}{n}\right)$$

elde edilir.

Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sınırlı,

$f(x) = x^p$ ($0 < p \leq 1$) sınırsız bir modülüs fonksiyonudur.

Ruckle [37], f modülüs fonksiyonu yardımıyla

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$$

dizi uzayını

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\}$$

dizi uzayına genelleştirerek bu dizi uzayının çeşitlik özelliklerini incelemiştir. Daha sonra modülüs fonksiyonu Maddox [25], Connor [5], Pehlivan ve Fisher [33,34], Savaş [39] ve pek çok diğer kaynaklarda çalışılmıştır.

Şimdi daha sonra kullanacağımız lemmaları verelim.

Lemma 6.1.2. f , bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \beta$ limiti mevcuttur [26].

Lemma 6.1.3. f , bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olsun. Bu durumda her $x \geq \delta$ için $f(x) \leq 2f(1)\delta^{-1}x$ dir [34].

6.2. $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ Dizi Uzayı

Bu kısımda Belen ve Mohiuddine [3] tarafından tanıtılan $(\bar{N}_\lambda, p_n)$ –toplanabilirlik ve $S_{\bar{N}_\lambda}$ –yakınsaklık kavramlarını verdikten sonra modülüs fonksiyonu yardımıyla $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ dizi uzayını tanımlayıp bu uzay üzerinde bazı bağıntılar inceleyeceğiz.

$\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan, sonsuza ıraksayan ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$$

koşulunu gerçekleyen bir pozitif tamsayılar dizisi ve $p = (p_n) \in \Delta$ (yani $p = (p_n)$, negatif olmayan reel sayıların $p_0 > 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi) olsun. Verilen bir $x = (x_k)$ dizisi için $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$P_{\lambda_n} := \sum_{k \in I_n} p_k \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad \sigma_n := \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} p_k x_k$$

tanımlansın.

Tanım 6.2.1. Verilen bir $x = (x_k)$ dizisi için,

(i) Eğer $\lim_n \sigma_n = L$ oluyor ise, x dizisi L sayısına $(\bar{N}_\lambda, p_n)$ –toplanabilirdir denir ve bu durum $x_k \rightarrow L(\bar{N}_\lambda, p_n)$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} p_k |x_k - L| = 0$ oluyor ise, x dizisi L sayısına kuvvetli

$(\bar{N}_\lambda, p_n)$ –toplanabilirdir denir ve bu durum $x_k \rightarrow L[\bar{N}_\lambda, p_n]$ ile gösterilir. Tüm kuvvetli $(\bar{N}_\lambda, p_n)$ –toplanabilir dizilerin kümesi $[\bar{N}_\lambda, p_n]$ ile gösterilir [3].

Tanım 6.2.2. Bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{P_{\lambda_n}} \left| \left\{ k \leq P_{\lambda_n} : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyor ise, x dizisi L sayısına ağırlıklı λ – istatistiksel yakınsaktır (veya $S_{\bar{N}_\lambda}$ – yakınsaktır) denir ve bu durum $S_{\bar{N}_\lambda} - \lim x = L$ ile gösterilir. Tüm $S_{\bar{N}_\lambda}$ – istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_{\bar{N}_\lambda}$ ile gösterilir [3].

Şimdi ise yeni dizi uzaylarımızı tanıtalım.

Tanım 6.2.3. f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere, bir L sayısı için

$$\begin{aligned} [\bar{N}_\lambda, p_n, f] &= \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k - L|) = 0 \right\} \\ [\bar{N}_\lambda, p_n, f]_0 &= \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k|) = 0 \right\} \end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlayalım.

Uyarı 6.2.4. Eğer Tanım 6.2.3 de $f(x) = x$ modülüs fonksiyonu alınırsa, bu durumda $[\bar{N}_\lambda, p_n, f] = [\bar{N}_\lambda, p_n]$ ve $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]_0 = [\bar{N}_\lambda, p_n]_0$ elde edilir. Burada

$$[\bar{N}_\lambda, p_n]_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} p_k |x_k| = 0 \right\}$$

dir.

Teorem 6.2.5. $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ ve $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]_0$ uzayları birer lineer uzaydır.

İspat. Biz burada yalnızca $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ uzayının bir lineer uzay olduğunu göstereceğiz. $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]_0$ uzayının da lineer olduğu benzer şekilde gösterilebilir. $x, y \in [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ (burada $x_k \rightarrow L[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ ve $y_k \rightarrow L'[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$) ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olduğundan $|\alpha| \leq M_\alpha$ ve $|\beta| \leq M_\beta$ olacak şekilde M_α ve M_β tamsayıları vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |\alpha x_k + \beta y_k - (\alpha L + \beta L')|) \\
&= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |(\alpha x_k - \alpha L) + (\beta y_k - \beta L')|) \\
&\leq \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k (|(\alpha x_k - \alpha L)| + |(\beta y_k - \beta L')|)) \\
&= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |(\alpha x_k - \alpha L)| + p_k |(\beta y_k - \beta L')|) \\
&= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |\alpha(x_k - L)| + p_k |\beta(y_k - L')|) \\
&\leq \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} (f(p_k |\alpha(x_k - L)|) + f(p_k |\beta(y_k - L')|)) \\
&= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} (f(p_k |\alpha||x_k - L|) + f(p_k |\beta||y_k - L'|)) \\
&\leq \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} (f(p_k M_\alpha |x_k - L|) + f(p_k M_\beta |y_k - L'|)) \\
&\leq M_\alpha \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k - L|) + M_\beta \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |y_k - L'|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $x_k \rightarrow L[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ ve $y_k \rightarrow L'[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olduğundan $\alpha x_k + \beta y_k \rightarrow (\alpha L + \beta L')[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olur ve dolayısıyla $\alpha x + \beta y \in [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olur. Böylece $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ uzayının bir lineer uzay olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi ise $[\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ ve $[\bar{N}_\lambda, p_n]$ dizi uzayları arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Teorem 6.2.6. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$[\bar{N}_\lambda, p_n] \subset [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$$

kapsaması gerçekleşir.

İspat. $x \in [\bar{N}_\lambda, p_n]$ olsun. Bu durumda

$$s_n = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} p_k |x_k - L| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin ve her $t \in [0, \delta]$ için $f(t) < \varepsilon$

olacak şekilde bir $0 < \delta < 1$ sayısı seçelim. $K_{P_{\lambda_n}}(\delta) := \{k \leq P_{\lambda_n} : p_k |x_k - L| \geq \delta\}$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda, Lemma 6.1.3 den

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k - L|) &= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} f(p_k |x_k - L|) + \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \notin K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} f(p_k |x_k - L|) \\ &\leq 2f(1)\delta^{-1}s_n + \frac{1}{P_{\lambda_n}}(P_{\lambda_n}\varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k - L|) \rightarrow 0$ olur ve

dolayısıyla $x \in [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ elde ederiz. Böylece $[\bar{N}_\lambda, p_n] \subset [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ içermesi gerçekleşir.

Teorem 6.2.7. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise

$$[\bar{N}_\lambda, p_n, f] = [\bar{N}_\lambda, p_n]$$

dir.

İspat. Teorem 6.2.6 da $[\bar{N}_\lambda, p_n] \subset [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olduğu ispatlandığı için, burada sadece $[\bar{N}_\lambda, p_n, f] \subset [\bar{N}_\lambda, p_n]$ olduğunu göstereceğiz. $x \in [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ olsun. $\beta > 0$ olduğundan, her $t \geq 0$ için $f(t) \geq \beta t$ dir. Bu durumda,

$$\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k - L|) \geq \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} \beta p_k |x_k - L| = \beta \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} p_k |x_k - L|$$

dir. Böylece $x \in [\bar{N}_\lambda, p_n]$ edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki örnekte, Teorem 6.2.7 deki $\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ koşulunun ihmal edilemeyeceğini göstereceğiz.

Örnek 6.2.8. $f(x) = \ln(1+x)$ modülüs fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda

$$\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = 0 \text{ dir.}$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olsun ve $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} P_{\lambda_n}, & k = n - \lambda_n + 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$$\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k|) = \frac{\ln(1 + \lambda_n)}{\lambda_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan $x \in [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ elde edilir. Fakat

$$\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} p_k |x_k| = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır ve dolayısıyla da $x \notin [\bar{N}_\lambda, p_n]$ dir.

Teorem 6.2.9. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$[\bar{N}_\lambda, p_n, f] \subset S_{\bar{N}_\lambda}$$

kapsaması gerçekleşir.

İspat. $x \in [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olsun. O halde

$$\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k - L|) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon) = \{k \leq P_{\lambda_n} : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k - L|) &= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} f(p_k |x_k - L|) + \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \notin K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} f(p_k |x_k - L|) \\ &\geq \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} f(p_k |x_k - L|) \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{P_{\lambda_n}} f(\varepsilon) \left| \left\{ k \leq P_{\lambda_n} : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur. Burada $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $x \in S_{\bar{N}_\lambda}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.2.10. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda, $S_{\bar{N}_\lambda} = [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olması için gerek ve yeter şart f nin sınırlı olmasıdır.

İspat. $x \in S_{\bar{N}_\lambda}$ ve f sınırlı olsun. f sınırlı olduğundan, her $x \geq 0$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon) = \{k \leq P_{\lambda_n} : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek, bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} f(p_k |x_k - L|) &= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} f(p_k |x_k - L|) + \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \notin K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} f(p_k |x_k - L|) \\ &\leq \frac{M}{P_{\lambda_n}} \left| \left\{ k \leq P_{\lambda_n} : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| + f(\varepsilon) \end{aligned}$$

olur ve burada $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $x \in [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ elde edilir. Ayrıca, Teorem 6.2.9 da göz önüne alınırsa; böylece f sınırlı modülüs fonksiyonu için $S_{\bar{N}_\lambda} = [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $S_{\bar{N}_\lambda} = [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olsun. Biz f modülüs fonksiyonunun sınırlı olduğunu göstereceğiz. Aksine kabul edelim ki f sınırsız olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots$ için $f(p_i t_i) \geq P_{\lambda_i}$ olacak şekilde pozitif sayıların bir $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots$ dizisi vardır. $n = 1, 2, \dots$ için $n \leq P_{\lambda_n}$ olsun ve $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} t_k, & n - \sqrt{P_{\lambda_n}} + 1 \leq k \leq n \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu durumda,

$$\frac{1}{P_{\lambda_n}} \left| \left\{ k \leq P_{\lambda_n} : p_k |x_k| \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{\sqrt{P_{\lambda_n}}}{P_{\lambda_n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur. Buradan $x \in S_{\bar{N}_\lambda}$ dir ve fakat $x \notin [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ dir. Bu ise $S_{\bar{N}_\lambda} = [\bar{N}_\lambda, p_n, f]$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup, f sınırlıdır. Böylece ispat sonlanır.

KAYNAKLAR

- [1] Alotaibi, A., Çakan, C., The riesz convergence and riesz core of double sequences, J. Inequal. Appl., 56, 2012.
- [2] Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, Erzurum, 1992.
- [3] Belen, C., Mohiuddine, S. A., Generalized weighted statistical convergence and application, Appl. Math. Comput., 219, 9821-9826, 2013.
- [4] Connor, J., The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences, Analysis 8, 47-63, 1988.
- [5] Connor, J., On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canad. Math. Bull., 32, 194-198, 1989.
- [6] Das, P., Savaş, E., Ghosal, S. K., On generalizations of certain summability methods using ideals, Appl. Math Lett., 24(9), 1509-1514, 2011.
- [7] Duman, O., Khan, M. K., Orhan, C., A–statistical convergence of approximating operators, Math. Inequal. Appl., 6(4), 689-699, 2003.
- [8] Duman, O., A Korovkin type approximation theorems via I –convergence, Czechoslovak Math. J., 57, 367-375, 2007.
- [9] Fast, H., Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244, 1951.
- [10] Freedman, A. R., Sember, J. J., Densities and summability, Pacific J. Math., 95, 293-305, 1981.
- [11] Fridy, J. A., On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313, 1985.
- [12] Fridy, J. A., Statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc., 118, 1187-1192, 1993.
- [13] Fridy J. A., Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125, 3625-3631, 1997.

- [14] Fridy J. A., Orhan, C., Statistical core theorems, J. Math. Anal. Appl., 208, 520-527, 1997.2011.
- [15] Gadjiev, A. D., Orhan, C., Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math., 32, 129-138, 2002.
- [16] Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A., Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, Ankara Üniversitesi Yayınları, 1995.
- [17] Hardy, G. H., Divergent Series, Oxford Univ. Press, London, 1949.
- [18] Karakaya, V., Chishti, T. A., Weighted statistical convergence, Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., 33, 219-223, 2009.
- [19] Kızmaz, H., Fonksiyonel Analize Giriş, KTÜ Basımevi, Trabzon, 1993.
- [20] Korovkin, P. P., Linear operators and approximation theory, Hindustan Publ. Co., Delhi, 1960.
- [21] Kostyrko, P., Šalát, T., Wilczynski, W., I – Convergence, Real Anal. Exchange, 26, 669-686, 2000.
- [22] Kuratowski, C., Topologie I, PWN Warszawa, 1958.
- [23] Lorentz, G. G., Approximation of Functions, 2nd. Ed., Chelsea Publ. Comp., New York, 1986.
- [24] Maddox, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, 1970.
- [25] Maddox, I. J., Sequence spaces defined by a modulus, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 100, 161-166, 1986.
- [26] Maddox, I. J., Inclusions between FK spaces and Kuttner's theorem, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 101, 523-527, 1987.
- [27] Moricz, F., Orhan, C., Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability by weighted means, Studia Sci. Math. Hungar., 41, 391-403, 2004.
- [28] Mursaleen, M., Edely, O. H. H., Statistical convergence of double sequences, J. Math. Anal. Appl., 288, 223-231, 2003.
- [29] Mursaleen, M., Karakaya, V., Ertürk, M., Gürsoy, F., Weighted statistical convergence and its application to Korovkin type approximation theorem, Appl. Math. Comput., 218, 9132-9137, 2012.
- [30] Nagata, J., Modern General Topology, Noth-Holland Publ. Comp., Amsterdam-London, 1974.

- [31] Nakano, H., Concave modulars, J. Math. Soc. Japan, 5, 29-49, 1953. Exchange, 26, 669-686, 2000.
- [32] Niven, I., Zuckerman, H. S., An introduction to the theory of numbers, Fourth Ed., New York, 1980.
- [33] Pehlivan, S., Fisher, B., Lacunary strong convergence with respect to a sequence of modulus functions, Comment. Math. Univ. Carolin., 36, 69-76, 1995.
- [34] Pehlivan, S., Fisher, B., Some sequence spaces defined by a modulus. Math. Slovaca., 45, 275-280, 1995.
- [35] Petersen, M. G., Regular Matrix transformations, Mc. Graw-Hill, 1966.
- [36] Pringsheim, A., Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen, Math. Ann., 53, 289-321, 1900.
- [37] Ruckle, W. H., FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Can. J. Math., 25, 973-978, 1973.
- [38] Šalát, T., On statistical convergent sequences of real numbers Math. Slovaca, 30, 139-150, 1980.
- [39] Savaş, E., On some generalized sequence spaces defined by a modulus, Indian J. Pure Appl. Math., 30, 459-464, 1999.
- [40] Savaş, E., Das, P., A generalized statistical convergence via ideals, Appl. Math Lett., 24, 826-830, 2011.
- [41] Savaş, E., Das, P. Dutta, S., A note on strong matrix summability via ideals, Appl. Math Lett., 25(4), 733-738, 2012.
- [42] Schoenberg I. J., The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly 66, 361-375, 1959.
- [43] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73-74, 1951.

ÖZGEÇMİŞ

Bayram Sözbir, 26.04.1990'da Kocaeli'de doğdu. İlk ve orta eğitimini Gebze'de tamamladı. 2008 yılında Darıca Neşet Yalçın Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2012 yılında İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü'nü Fen Fakültesi ve Matematik Bölümü ikincisi olarak bitirdi. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı.