

ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU LIE GRUPLARDA DARBOUX EKSEN ÜZERİNE

Gülay ERDAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Gülay ERDAL tarafından hazırlanan "**Üç Boyutlu Lie Gruplarda Darboux Eksen Üzerine**" adlı tez çalışması 01/02/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği (veya oy çokluğu)** ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK

Eş Danışman : Doç. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Jüri Üyeleri :

Başkan : Doç. Dr. Bülent ALTUNKAYA
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Faruk KARAASLAN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Üç Boyutlu Lie Gruplarda Darboux Eksen Üzerine**” konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmamın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan “Bilimsel İntihal Tespit Programı”yla tarandığımı, “intihal içermediğini” beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

(01/02/2022)

Gülay ERDAL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇ BOYUTLU LIE GRUPLARDA DARBOUX EKSEN ÜZERİNE

Gülray ERDAL

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK
Eş Danışman: Doç. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Bu tezde, bi-invariant metrik $\langle, \rangle$ ile 3-boyutlu Lie grubu G de bir birim hızlı α eğrisinin Darboux dönme ekseninin hareketi eğrinin teğet ve binormal vektörlerinin birbiri etrafında farklı açısal hızlarda dönmesiyle oluşan iki eş zamanlı dönme hareketinden oluştuğu gösterildi. Daha sonra, Darboux vektörlerinin serisinin bu yöntemle elde edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, 3-boyutlu Lie gruplarında sabit devinim eğrileri tanımını verdik ve bu eğriler hakkında bazı sonuçlar verdik.

2022, 27 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER: Frenet-Serret çatısı, Darboux vektör, Darboux dönme eksen, Sabit devinim eğrisi, Lie grubu, Bi-invariant metrik

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ON THE DARBOUX AXIS IN THREE DIMENSIONAL LIE GROUPS

Gülay ERDAL

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Ufuk ÖZTÜRK
Co-Advisor: Assoc. Prof. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

In this thesis, it has been shown that the motion of the Darboux rotation axis of a unit speed curve α in the 3-dimensional Lie group G with a bi-invariant metric is separated into two simultaneous rotation motions which are the tangent and normal vectors of curve rotating around each other with different angular speeds. Then, the series of Darboux vectors can be obtained in this way. Also, we give the definition of constant precession curves in the 3-dimensional Lie groups and give some characterizations about these curves.

2022, 27 pages

Keywords: Frenet-Serret frame, Darboux vector, Darboux rotation axis, Constant precession curve, Lie groups, Bi -invariant metric

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, bana her konuda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK (Çankırı Karatekin Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), Doç. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK (Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve çalışmalarım sırasında sonsuz desteğini esirgemeyen sevgili eşim ve değerli aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Gülay ERDAL
Çankırı, Şubat 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Afın Uzay	3
2.2 Diferensiyellenebilir Manifoldlar	5
2.3 Eğriler Teorisi	7
2.4 Lie Grupları.....	13
3. ÜÇ BOYUTLU LIE GRUPLARDA DARBOUX DÖNME EKSENİ	17
3.1 Sabit Devinim Eğrileri	20
KAYNAKLAR.....	25
ÖZGEÇMİŞ	27

1. GİRİŞ

Uzayda bir P noktası eğriyi çizerken, eğrinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ her s anında bir eksen etrafında ani bir sarmal hareketi yapar. Bu eksene her s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki *Darboux ekseni* adı verilir ve bu eksenin doğrultu ve yönünü veren vektöre *Darboux vektörü* denir (Blaschke 1930). Darboux vektörüne, bir uzay eğrisinin Frenet çatısının *(ani) dönme ekseni* veya *açısal momentum vektörü* de denir.

Bu dönüş, fiziksel olmaktan çok kinematiktir. Çünkü genellikle katı bir nesne uzayda serbestçe hareket ettiğinde dönüşü, ötelenmesinden bağımsızdır.

Dual uzay eğrisinin dual Darboux dönme ekseni üzerine çalışılmış ve Darboux vektörlerinin serisi elde edilmiştir (Çöken and Görgülü 2002). Sonra, Yücesan ve arkadaşları tarafından yarı dual uzayda bir timelike dual uzay eğrisinin dual Darboux dönme ekseninin serisi verilmiştir (Yücesan *et al.* 2002). Yine, Yücesan ve arkadaşları tarafından Lorentzian uzay eğrisinin Darboux dönme ekseninin serisi verilmiştir (Yücesan *et al.* 2004). Dahası, Karacan ve Bükcü tarafından 3-boyutlu Minkowski uzayında normal spacelike olan bir spacelike eğri için Bishop Darboux dönme ekseni eş zamanlı dönmelere ayrılmış ve Bishop Darboux dönme eksenini incelemiştir (Karacan and Bukcu 2009).

$\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayındaki sabit devinim eğrileri ilk olarak Scofield tarafından Darboux vektörü veya eğri boyunca hareket ederken Frenet çerçevesinin ani dönüş ekseni (centrode) sabit bir eksenle sabit bir açı yapan ve bu eksen etrafında sabit hızlı hareket eden eğriler olarak tanımlanmış ve bazı karakterizasyonlar verilmiştir (Scofield 1995).

Kula ve Yaylı bir slant helisin küresel görüntülerini, tanjant göstergesini ve binormal göstergesini araştırdılar (Kula and Yayli 2005). Slant helislerin küresel görüntülerini küresel helisler olarak elde ettiler. Ayrıca, sabit devinim eğrisinin bir slant helis olduğunu gösterdiler.

Ali tarafından 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ de bir slant helisin konum vektörünün parametrik ifadesi eğrinin Frenet denklemleri cinsinden verildi (Ali 2012). Daha sonra

bu yöntemi, bir sabit devinim eğrisinin parametrik ifadesini bulmak için uyguladı.

Bu tezde, bi-invaryant metrik $\langle, \rangle$ ile 3-boyutlu Lie grubu G de Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ve eğriliği $\kappa > 0$ ve torsiyonu τ olan birim hızlı bir $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow G$ eğrisinin Darboux dönme ekseninin hareketinin eğrinin teğet ve binormal vektörlerinin birbiri etrafında dönmesiyle oluşan açısal hızları farklı olan iki eş zamanlı dönme hareketinden oluştuğu gösterildi. Daha sonra, α eğrisinin Darboux vektörlerinin serisi verilmiştir. Bir uygulaması olarak, 3-boyutlu Lie gruplarında sabit devinim eğrileri tanımını verdik ve bu eğriler hakkında bazı sonuçlar verdik.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Afin Uzay

Tanım 2.1 $(K, +, \bullet)$ bir cisim ve V boştan farklı bir cümle olmak üzere

$$\begin{aligned}\oplus : V \times V &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longrightarrow x \oplus y\end{aligned}$$

iç işlemine göre V cümlesi bir Abel grup ve

$$\begin{aligned}\odot : K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, x) &\longrightarrow \lambda \odot x\end{aligned}$$

dış işlemi (skalarla çarpma işlemi) $\forall x, y \in V$ ve $\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ için

1. $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y),$
2. $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot x = (\lambda_1 \odot x) \oplus (\lambda_2 \odot x),$
3. $(\lambda_1 \lambda_2) \odot x = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot x),$
4. K nın $\cdot$ işlemine göre birim elemanı 1 olmak üzere $\forall x \in V$ için $1 \odot x = x,$

özelliklerini sağlıyorsa V cümlesi $(K, +, \cdot)$ cismi üzerinde 21 aksiyomlu bir cebirsel yapı oluşturur. Bu cebirsel yapıya K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve bu uzayın elemanlarına da *vektör* adı verilir. Bu cebirsel yapı kısaca

$$\{V, \oplus, (K, +, \cdot), \odot\}$$

ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2006).

Örnek 2.1 $K = \mathbb{R}$ ise V vektör uzayı reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı ve $K = \mathbb{C}$ ise V vektör uzayı kompleks sayılar cismi üzerinde vektör uzayıdır.

Tanım 2.2 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar cismi ve $x_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere elemanları sıralı reel sayı n -lisi olan

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \}$$

cümlesi üzerinde tanımlı toplama işlemi ve skalar ile çarpma işlemi sırasıyla,

$$\begin{aligned}
+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
(\vec{x}, \vec{y}) &\longrightarrow \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\
\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
(\lambda, \vec{x}) &\longrightarrow \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup, bu iki işleme göre $\mathbb{R}^n$ cümlesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir *reel vektör uzayı* denir (Gray *et al.* 2006).

Tanım 2.3 $A \neq \emptyset$ bir küme ve V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu

1. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$,
2. $\forall P \in A$ ve $\forall a \in V$ için $f(P, Q) = a$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır.

koşullarını sağlıyorsa A ya V ile *birleştirilmiş bir afin uzay* denir (Hacısalihoglu 2000a).

Örnek 2.2 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olup

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
(P, Q) &\rightarrow f(P, Q) = Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)
\end{aligned}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu afin uzay önermelerini doğrular. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir afin uzaydır.

Önerme 2.1 Her vektör uzayı bir afin uzayıdır.

Tanım 2.4 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen bir n -boyutlu vektör uzayı V olsun. V üzerinde bir iç çarpım $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in V$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\langle, \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu işlem yardımıyla A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Bu durumda, A afin uzayına *Öklid uzayı* ve $\langle, \rangle$ dönüştürme *Öklid iç çarpımı* denir (Hacısalıhoğlu 2000a).

Uyarı 2.1 $\mathbb{E}^n$ standart Öklid uzayıdır.

Tanım 2.5 $\mathbb{E}^n$ uzayında bir sıralı $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen

$$\left\{ \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \right\}$$

vektör n -lisi $\mathbb{R}^n$ de ortonormal bir baz ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine $\mathbb{E}^n$ nin bir *dik çatısı* veya *Öklid çatısı* denir (Hacısalıhoğlu 2000a).

Tanım 2.6 $\mathbb{E}^n$ uzayında bir X noktasının Öklid çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{P_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

şeklinde yazılır. Burada, $1 \leq i \leq n$ için $x_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına X noktasının *Öklid koordinat fonksiyonları* ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemine *Öklid koordinat sistemi* denir (Hacısalıhoğlu 2000a).

Tanım 2.7 $\mathbb{E}^n$ uzayında $\{E_0 = (0, 0, \dots, 0), E_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ dik çatısına *standart Öklid çatısı* denir (Hacısalıhoğlu 2000a).

2.2 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.8 X boştan farklı bir cümle ve X in alt kümelerinden oluşan bir koleksiyon τ olsun. Eğer,

- i. $X, \emptyset \in \tau$,
- ii. $\forall A_i \in \tau$ için $\bigcup_i A_i \in \tau$,
- iii. $\forall A_i \in \tau$ için $\bigcap_i A_i \in \tau$,

aksiyomları sağlanıyorsa τ ailesine X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de *topolojik uzay* denir. τ nun elemanlarına X in *açık alt cümleleri* denir (Hacısalıhoğlu 2000a).

Tanım 2.9 X ile Y birer topolojik uzay ve bir fonksiyon $f : X \rightarrow Y$ olsun. Eğer,

- i. f birebir, örten ve sürekli,
- ii. f^{-1} mevcut ve sürekli,

ise f fonksiyonuna X den Y üzerine bir *homeomorfizm* veya *topolojik dönüşüm* denir (Hacısalihoglu 2000a).

Tanım 2.10 M bir topolojik uzay olsun. Eğer,

- i. M bir Hausdorff uzayı,
- ii. M nin herbir açık alt kümesi $\mathbb{E}^n$ veya $\mathbb{E}^n$ nin bir açık alt cümlesine homeomorf
- iii. M sayılabilir sayıda açık cümleler tarafından örtülebilir

ise M ye bir *n-boyutlu topolojik manifold* denir (Hacısalihoglu 2000a).

Tanım 2.11 M bir topolojik manifold ve M de bir açık alt cümle U olmak üzere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k . mertebeden kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli iseler f fonksiyonuna *C^k -sınıfından diferensiyellenebilirdir* denir ve $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Burada $C^0(U, \mathbb{R})$ sürekli fonksiyonların kümesini ifade eder (Hacısalihoglu 2000a).

Tanım 2.12 M bir n -boyutlu topolojik manifold ve M de bir açık alt cümle U olmak üzere

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$u \rightarrow F(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_m(u))$$

fonksiyonu tüm f_i ($1 \leq i \leq m$) fonksiyonları C^k -sınıfından ise F dönüşümüne *C^k -sınıfındandır* denir ve $F \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ olarak gösterilir (Hacısalihoglu 2000a).

Tanım 2.13 M bir topolojik manifold ve M nin iki açık alt cümlesi U ve V olsun. $F : U \rightarrow V$ dönüşümü

- i. $F \in C^k(U, V)$,
 - ii. F^{-1} mevcut ve $F^{-1} \in C^k(V, U)$,
- koşullarını sağlıyorsa F ye *C^k -sınıfından bir diffeomorfizm* denir. Eğer $F \in C^\infty(U, V)$ ise F ye bir *diffeomorfizm* denir (Hacısalihoglu 2000a).

Tanım 2.14 M bir n -boyutlu topolojik manifold, $U \subset M$ ve $W \subset \mathbb{E}^n$ açık alt

kümeleri verilsin. Eğer

$$\begin{aligned}\psi : U &\longrightarrow W \\ u &\longrightarrow \psi(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u))\end{aligned}$$

dönüşümü bir homeomorfizm ise (ψ, U) ikilisine M de bir *koordinat komşuluğu* veya *harita* denir. Burada $x_i(u)$ ($1 \leq i \leq n$) reel sayısına $\psi(u)$ noktasının *i. koordinatı* denir (Hacısalihoglu 2000a).

Tanım 2.15 M bir n -boyutlu topolojik manifold, $\{U_a\} \subset M$ ve $\{W_a\} \subset \mathbb{E}^n$ açık örtüsü ve $\psi_a : U_a \rightarrow W_a$ homeomorfizmleri verilsin. Buradaki

$$\{(\psi_a, U_a)\}$$

kolleksiyonuna bir *koordinat komşuluğu sistemi* veya *atlas* denir (Hacısalihoglu 2000a).

Tanım 2.16 M , n -boyutlu topolojik manifold ve $p \in M$ noktasının iki açık komşuluğu U_a ve U_b olsun. M nin bir atlası $S = \{(\psi_a, U_a)\}$ ve $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\psi_a : U_a \rightarrow W_a, \quad \psi_a^{-1}(W_a \cap W_b) \subset U_a$$

ve

$$\psi_b : U_b \rightarrow W_b, \quad \psi_b^{-1}(W_a \cap W_b) \subset U_b$$

homeomorfizmleri verildiğinde $\phi_{ba} = \psi_b^{-1} \circ \psi_a$, $\phi_{ba} : U_a \rightarrow U_b$ ve $\phi_{ab} = \psi_a^{-1} \circ \psi_b$, $\phi_{ab} : U_b \rightarrow U_a$ dönüşümleri tanımlanabilir. Buradaki $\forall a, b \in A$ için ϕ_{ba} ve ϕ_{ab} dönüşümleri C^k -sınıfından ise $S = \{(\psi_a, U_a)\}$ atlasına M üzerinde bir *diferensiyellenebilir yapı* denir. C^k -sınıfından bir diferensiyellenebilir yapıya sahip M manifolduna C^k -sınıfından *diferensiyellenebilir manifold* denir (Hacısalihoglu 2000a).

2.3 Eğriler Teorisi

Tanım 2.17 V bir vektör uzayı ve V ile birleşen bir afin uzay A olsun. $p \in A$ ve $v \in V$ için $v_p = (p, v)$ sıralı ikilisine A afin uzayının p noktasındaki *tanjant vektörü* denir (Hacısalihoglu 2000b).

Burada, A afin uzayının $p \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_p A$ ile gösterilir. Böylece $T_p A = \{(p, v) : v \in V\}$ veya $T_p A = \{p\} \times V$ dir. Burada, $T_p A$ kümesi

$$\begin{aligned} \oplus : T_p A \times T_p A &\rightarrow T_p A \\ ((p, v), (p, u)) &\rightarrow (p, u + v) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_p A &\rightarrow T_p A \\ (\lambda, (p, v)) &\rightarrow (p, \lambda v) \end{aligned}$$

işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı yapısına sahiptir.

Tanım 2.18 M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. M nin her bir p noktasına bir teğet vektör karşılık getiren fonksiyona, M üzerinde bir vektör alanı denir. Diğer bir ifadeyle, M nin tüm tanjant uzaylarının cümlesini $\bigcup_{p \in M} T_p M$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M \\ p &\rightarrow X(p) = X_p \end{aligned}$$

ile tanımlanan X operatörüne M üzerinde bir *vektör alanı* denir (Hacısalıhoğlu 2000b).

Burada, M nin tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Burada $\chi(M)$ kümesi

$$\begin{aligned} \oplus : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow X \oplus Y : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M \\ p &\rightarrow (X \oplus Y)(p) = X(p) + Y(p) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (\lambda, X) &\rightarrow \lambda \odot X : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M \\ p &\rightarrow (\lambda \odot X)(p) = \lambda X(p) \end{aligned}$$

işlemlerine göre bir vektör uzayı yapısına sahiptir.

Tanım 2.19 M bir diferensiyellenebilir manifold, $P \in M$ ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \chi(M)$ olsun. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = \langle \nabla f, v \rangle$$

ifadesine f fonksiyonunun v_p tanjant vektörü yönündeki türevi denir (Hacısalihoglu 2000b).

Burada $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall v_p, u_p \in T_p M$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

- i. $(av_p + bu_p)[f] = av_p[f] + bu_p[f],$
 - ii. $v_p(af + bg) = av_p[f] + bv_p[g],$
 - iii. $v_p[f \cdot g] = v_p[f]g(p) + f(p)v_p[g],$
- dir.

Tanım 2.20 $\mathbb{E}^n$ de bir eğri α ve $f \in C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda

$$\alpha'(t)[f] = \left. \frac{df(\alpha)}{dt} \right|_t = \frac{df(\alpha(t))}{dt} = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t)$$

ifadesine f fonksiyonunun α eğrisi yönünde kovaryant türevi denir (Hacısalihoglu 2000b).

Tanım 2.21 M bir diferensiyellenebilir manifold ve $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \chi(M)$ birer vektör alanı olmak üzere

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n])$$

ile tanımlanan dönüşüme Y nin X e göre kovaryant türevi denir (Hacısalihoglu 2000b).

Burada $\forall X, Y, Z, W \in M$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

- i. $D_X(Y + Z) = D_X(Y) + D_X(Z),$
- ii. $D_{X+W}(Y) = D_X(Y) + D_W(Y),$
- iii. $D_{fX}Y = fD_X(Y),$
- iv. $D_X(fY) = X(f)Y + fD_X(Y)$

dir.

Tanım 2.22 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir irtibatlı açık alt aralık olmak üzere

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve $t \in I$ değişkenine ise *eğrinin parametresi* denir (Hacısalihoglu 2000b).

Tanım 2.23 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right),$$

vektörüne α eğrisinin *teğet vektörü* veya *hız vektörü* denir. Ayrıca, α eğrisinin bir $t_0 \in I$ noktasında hız vektörlerinin cümlesi α eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasındaki *tanjant uzayı* olarak adlandırılır ve $T_{\alpha(t_0)}(\alpha(I))$ şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000b).

Tanım 2.24 n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de bir diferensiyellenebilir eğri $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere $\forall t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ ise α eğrisine *regülerdir* denir (Korkmaz 2012).

Tanım 2.25 $\mathbb{E}^n$ de bir eğri α olmak üzere, $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

oluyorsa α eğrisine birim hızlı eğri ve $s \in I$ parametresine de eğrinin *yay parametresi* denir (Hacısalıhoğlu 2000a).

Tanım 2.26 $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için $\alpha''(s) \neq 0$ ise $\alpha(s)$ eğrisine *Frenet eğrisi* veya *uzay eğrisi* denir (Kühnel 2006).

Tanım 2.27 n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de bir diferensiyellenebilir eğri $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ ve $\Psi = (\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)})$ sistemi lineer bağımsız olsun. Bu durumda $k > r$ olacak şekildeki $\forall \alpha^{(k)}$ için $\alpha^{(k)} \in S_p\{\Psi\}$ olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin *Serret-Frenet r -ayaklı alanı* ve

$$\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}|_{\alpha(t)}$$

sistemine ise α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki *Serret-Frenet r -ayaklısı* denir. Ayrıca, $1 \leq i \leq r$ için her bir V_i vektörüne *Serret-Frenet vektörü* denir (Hacısalıhoğlu 2000a).

Tanım 2.28 n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de s yay parametrelili bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre, $1 \leq i \leq r$ için

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \\ s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *i -yinci eğriliği* denir (Hacısalıhoğlu 2000a).

Teorem 2.1 n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de s yay parametrelili bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ ise

$$V_1'(s) = k_1(s) V_2(s)$$

$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r$$

$$V_r'(s) = -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s)$$

dir (Hacısalihoglu 2000a).

Tanım 2.29 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de s yay parametrelili bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere, $\forall s \in I$ için eğrinin teğet vektör alanı

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eğrinin normal vektör alanı

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

ve eğrinin binormal vektör alanı

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

olmak üzere, $\{T, N, B\}$ sistemine *Frenet 3-ayaklısı* denir (Hacısalihoglu 2000a).

Uyarı 2.2 $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı ortonormal bir çatı olduğundan $\mathbb{E}^3$ uzayının bir bazıdır.

Tanım 2.30 s yay parametrelili $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$k_1(s) = \kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

değerine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Do Carmo 1976).

Uyarı 2.3 $k_1(s)$ eğriliği, eğrinin teğet vektörden ne kadar uzaklaştığını ölçer.

Tanım 2.31 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de s yay parametrelili $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$B'(s) = -\tau(s) N(s)$$

eşitliği ile tanımlanan $\tau(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Hacısalihoglu 2000a).

Uyarı 2.4 $k_2(s) = \tau(s)$ burulması, eğrinin oskülör düzlemden ne kadar saptığını ölçer.

Teorem 2.2 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

olmak üzere $\forall s \in I$ için

- i. $\kappa(s) = 0 \iff \alpha$ eğrisi bir doğru,
 - ii. $\kappa(s) = \text{sabit}$ ve $\tau(s) = 0 \iff \alpha$ eğrisi düzlemsel eğri,
- dir.

O halde, 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de s yay parametrelili

$$\begin{aligned} \alpha : I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{E}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned}$$

eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere α nın Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_1(s) N(s), \\ N'(s) &= -k_1(s) T(s) + k_2(s) B(s), \\ B'(s) &= -k_2(s) N(s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir.

Ayrıca, $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Darboux (ani dönme) eksenini* denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = \tau T + \kappa B$$

olup, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü adını alır. Bu vektör

$$\begin{aligned} T' &= W \wedge T, \\ N' &= W \wedge N, \\ B' &= W \wedge B, \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar (Hacısalıhoğlu 2000a).

Tanım 2.32 $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir α eğrisinin birim teğet vektörü T , sabit bir u vektörü ile sabit bir φ açısı yapıyorsa, yani $\langle T, u \rangle = \cos \varphi$ ise, α eğrisine *genel helis* denir (Lancret 1806).

Teorem 2.3 $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri ve $\kappa > 0$ olsun. α eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa} = c \in \mathbb{R}$ olmasıdır (Lancret 1806).

Tanım 2.33 $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve $\kappa \neq 0$ olsun. Eğrinin asli normal vektörü N , eğrinin her noktasındaki sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa, yani $\langle N, u \rangle = \cos \theta$ ise, α eğrisine *slant helis* denir (Izumiya and Takeuchi 2004).

Teorem 2.4 α eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin eğriliği $\kappa \neq 0$ olmak üzere, α eğrisinin slant helis olması için gerek yeter koşul α eğrisinin asli normaller göstergesinin küresel resminin geodezik eğriliği olan

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \frac{\tau'}{\kappa} \right) (s)$$

fonksiyonun sabit olmasıdır (Izumiya and Takeuchi 2004).

2.4 Lie Grupları

Tanım 2.34 G bir grup ve M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$L_1 : G$ nin her elemanı M nin noktaları ile çakışır,

$L_2 : M \times M \rightarrow M$, $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ işlemi her yerde diferensiyellenebilir,

aksiyomları sağlanırsa (M, G) ikilisine *Lie grubu*, M ye *Lie grubunun temel manifoldu* ve G ye de *Lie grubunun temel grubu* denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Örnek 2.3 $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklidyen uzayı

$$+ : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

işlemine göre bir Lie grubudur (Arvanitoyeorgos 2003).

Örnek 2.4 Öklid uzayındaki tüm öteleme ve dönme hareketlerinin oluşturduğu gruba Öklidyen grup adı verilir ve bir Lie grubudur (Arvanitoyeorgos 2003).

Tanım 2.35 V bir vektör uzayı olmak üzere

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümü $\forall X, Y, Z \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

i. Bi-lineer:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

ve

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z],$$

ii. Alterne: $[X, X] = 0$,

iii. Jakobi özdeşliği: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme V üzerinde bir Lie parantez operatörü denir (Hacısalihoglu 2000b).

Burada, $V = \mathbb{E}^n$ alınırsa Lie parantez operatörü

$$\begin{aligned} [,] : \chi(\mathbb{E}^n) \times \chi(\mathbb{E}^n) &\rightarrow \chi(\mathbb{E}^n) \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

ve $\forall f \in C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlıdır ve $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{E}^n)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ için

1. $[X, Y](fg) = f[X, Y](g) + g[X, Y](f)$,
2. $[fX, gY] = f(X(g))Y - g(Y(f))X + fg[X, Y]$,
3. $[X, X] = 0$,

dir.

Tanım 2.36 G bir Lie grubu ve X, G üzerinde bir vektör alanı olmak üzere $\forall g_0, g_1 \in G$ için,

$$l_{(g_0)*}X(g_1) = X(g_0g_1),$$

yani $\forall g \in G$

$$l_{(g)*} \circ X = X \circ l_g$$

ise X vektör alanına *sol invariant vektör alanı* denir.

$$X_l = \{ X \mid X \in \chi, \quad l_{(g)*} \circ X = X \circ l_g \}$$

ile tanımlı cümle vektör alanları uzayının bir alt uzayı olup X_l uzayına sol invariant vektör alanlarının uzayı denir.

Benzer şekilde, $\forall g_0, g_1 \in G$ için,

$$r_{(g_0)*} X(g_1) = X(g_1 g_0)$$

yani $\forall g \in G$

$$r_{(g)*} \circ X = r_g \circ X$$

ise X vektör alanına *sağ invariant vektör alanı* denir.

$$X_r = \{ X \mid X \in \chi, \quad r_{(g)*} \circ X = r_g \circ X \}$$

ile tanımlı cümle vektör alanları uzayının bir alt uzayı olup X_r uzayına sağ invariant vektör alanlarının uzayı denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.37 G Lie grubu üzerinde bir metrik $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O halde, $\forall a \in G$ ve $\forall x, y \in G$ için

1. $d(ax, ay) = d(x, y)$ ise d metriğine *sol invariant metrik*,
 2. $d(xa, ya) = d(x, y)$ ise d metriğine *sağ invariant metrik*,
- denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.38 G Lie grubu üzerinde d metriği, hem sağ invariant hem sol invariant ise d metriğine *bi-invariant metrik* denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.39 Bi-invariant metrik $\langle, \rangle$ ile birlikte bir Lie grubu G ve G Lie grubunun Lie cebiri g olsun. O halde G üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere $\forall X, Y, Z \in g$ için

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle,$$

ve Lie gruplarda *bir vektör alanı yönünde kovaryant türev*,

$$D_x Y = \frac{1}{2} [X, Y]$$

şeklinde tanımlanır (Çiftçi 2009).

Tanım 2.40 n -boyutlu Lie grubu G üzerinde bir birim hızlı eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ ve G nin Lie cebiri $\mathfrak{g}$ nin ortonormal bir bazı $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ olsun. O halde, $\forall W, Z \in \mathfrak{g}$ için $W = \sum_{i=1}^n w_i X_i$ ve $Z = \sum_{i=1}^n z_i X_i$ olarak tanımlanan vektör alanlarının *Lie çarpımı*

$$[W, Z] = \sum_{i,j=1}^n w_i z_j [X_i, X_j],$$

eşitliği ile tanımlıdır. Burada, $w_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $z_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır (Çiftçi 2009).

Tanım 2.41 n -boyutlu Lie grubu G üzerinde bir birim hızlı eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ olsun. O halde, $T = \alpha'$ ve $\dot{W} = \sum_{i,j=1}^n w_i z_j = \sum_{i=1}^n \frac{dW}{dt} X_i$ olmak üzere, α eğrisi boyunca herhangi bir W vektör alanının kovaryant türevi $D_{\alpha'} W$ dir ve

$$D_{\alpha'} W = \dot{W} + \frac{1}{2} [T, W],$$

ile verilir (Çiftçi 2009).

Uyarı 2.5 Eğer W yı α eğrisi için sol invaryant vektör alanı kabul edersek $\dot{W} = 0$ olur (Çiftçi 2009).

3. ÜÇ BOYUTLU LIE GRUPLARDA DARBOUX DÖNME EKSENİ

Bi-invaryant metrik $\langle, \rangle$ ile 3-boyutlu Lie grubu G de Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ve eğriliği $\kappa > 0$ ve torsiyonu τ olan bir birim hızlı bir $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow G$ eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \kappa N, \\ \dot{N} &= -\kappa T + (\tau - \tau_G) B, \\ \dot{B} &= -(\tau - \tau_G) N,\end{aligned}\tag{3.1}$$

dir. Burada α eğrisinin eğriliği κ , torsiyonu τ ve Lie grup torsiyonu τ_G , sırasıyla,

$$\kappa = \|D_T T\| = \|\dot{T}\|, \quad \tau = \|D_T B\| - \tau_G,$$

ve

$$\tau_G = \frac{1}{2} \langle [T, N], B \rangle$$

ya da

$$\tau_G = \frac{1}{2\kappa^2\tau} \left\langle \ddot{T}, [T, \dot{T}] \right\rangle + \frac{1}{4\kappa^2\tau} \left\| [T, \dot{T}] \right\|^2,$$

dir (Çiftçi 2009).

Teorem 3.1 3-boyutlu Lie grubu G de Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olan birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}[T, N] &= \langle [T, N], B \rangle = 2\tau_G B, \\ [T, B] &= \langle [T, B], N \rangle = -2\tau_G N, \\ [N, B] &= \langle [N, B], T \rangle = 2\tau_G T,\end{aligned}$$

dir (Çiftçi 2009).

Uyarı 3.1 G , bi-invaryant metrik $\langle, \rangle$ ile 3-boyutlu Lie grubu olsun. Eğer

1. G değişmeli bir grup, yani; $G = \mathbb{E}^3$ ise $\tau_G = 0$,
2. G , $SO(3)$ ise $\tau_G = \frac{1}{2}$,
3. G , $S^3 \cong SU(2)$ ise $\tau_G = 1$,

dir (Çiftçi 2009).

Uyarı 3.2 3–boyutlu Lie grubu G de Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau, \tau_G\}$ olan birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ olsun. O halde,

(i) α , G de bir genel helistir gerek ve yeter koşul α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı T , bir $X \in g$ birim sol invaryant vektör alanı ile sabit açı yapıyor.

Ayrıca,

$$\frac{\tau - \tau_G}{\kappa} = \text{sabit} \neq 0,$$

dir (Çiftçi 2009).

(ii) α , G de bir slant helistir gerek ve yeter koşul α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim normal vektör alanı N , bir $X \in g$ birim sol invaryant vektör alanı ile sabit açı yapıyor. Ayrıca

$$\frac{\left(\frac{\tau - \tau_G}{\kappa}\right)'}{\kappa \left[1 + \left(\frac{\tau - \tau_G}{\kappa}\right)^2\right]^{3/2}} = \text{sabit},$$

dir (Okuyucu *et al.* 2013).

3–boyutlu Lie grubu G de Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

olsun. $\forall s \in I$ için $\{T, N, B\}$ Frenet 3–ayaklısı, $\alpha(s)$ noktasında Darboux (ani dönme) eksenini etrafında bir ani helis hareketi yapar. Bu Darboux ekseninin yön ve doğrultusunu veren vektöre $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü denir ve

$$W = (\tau - \tau_G)T + \kappa B \tag{3.2}$$

dir. Burada, Darboux eksenini

1. Tanjant vektörü T , binormal vektörü B etrafında κ açısal hızdan,
 2. Binormal vektör B , tanjant vektör T etrafında $\tau - \tau_G$ açısal hızdan,
- oluşan iki dönme hareketinden oluşur diyebiliriz. Öyleyse aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1 Darboux eksenini, iki dönme hareketine ayrılabilir.

Ayrıca, Darboux vektörü W yönündeki birim vektör

$$\omega = \frac{W}{\|W\|} = \frac{(\tau - \tau_G)T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + (\tau - \tau_G)^2}}$$

olup

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= \frac{\|W\|\dot{W}-W\|\dot{W}\|}{\|W\|^2} \\
&= \frac{\sqrt{\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2}\left((\tau-\tau_G)'T+\kappa'B+(\tau-\tau_G)\dot{T}+\kappa\dot{B}\right)-((\tau-\tau_G)T+\kappa B)\frac{\kappa\kappa'+(\tau-\tau_G)(\tau-\tau_G)'}{\sqrt{\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2}}}{\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2} \\
&= \frac{\left[(\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2)(\tau-\tau_G)'-(\tau-\tau_G)\kappa\kappa'-(\tau-\tau_G)^2(\tau-\tau_G)'\right]T+\left[(\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2)\kappa'-\kappa^2\kappa'-\kappa(\tau-\tau_G)(\tau-\tau_G)'\right]B}{(\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\left[\kappa^2(\tau-\tau_G)'-(\tau-\tau_G)\kappa\kappa'\right]T+\left[(\tau-\tau_G)^2\kappa'-\kappa(\tau-\tau_G)(\tau-\tau_G)'\right]B}{(\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\left[\kappa(\tau-\tau_G)'-(\tau-\tau_G)\kappa'\right]\kappa T+\left[(\tau-\tau_G)\kappa'-\kappa(\tau-\tau_G)'\right](\tau-\tau_G)B}{(\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\kappa(\tau-\tau_G)'-(\tau-\tau_G)\kappa'}{\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2} \left(\frac{\kappa T-(\tau-\tau_G)B}{\sqrt{\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2}} \right)
\end{aligned}$$

dir. Burada, $\frac{\kappa(\tau-\tau_G)'-(\tau-\tau_G)\kappa'}{\kappa^2+(\tau-\tau_G)^2} = \delta$ denirse

$$\dot{\omega} = -\frac{\delta}{\|W\|}\dot{N}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca, $\dot{\omega}$ vektörü hem W vektörüne hem de N vektörüne ortogondur. O halde, $\dot{\omega}$ vektörü yönündeki birim vektör

$$v = \frac{\dot{\omega}}{\|\dot{\omega}\|} = \frac{1}{\|W\|}\dot{N},$$

olmak üzere N, v, ω vektörlerinden oluşan yeni bir Frenet çatısı elde ederiz. Öyle ki Frenet formülleri

$$\begin{aligned}
\dot{N} &= \|W\| v, \\
\dot{v} &= \delta\omega - \|W\| N, \\
\dot{\omega} &= -\delta v
\end{aligned}$$

veya matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \dot{N} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \|W\| & 0 \\ -\|W\| & 0 & \delta \\ 0 & -\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ v \\ \omega \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\|W\| = \sqrt{\kappa^2 + (\tau - \tau_G)^2} > 0,$$

ve

$$\delta = \frac{\kappa(\tau - \tau_G)' - (\tau - \tau_G)\kappa'}{\kappa^2 + (\tau - \tau_G)^2} = \frac{\left(\frac{\tau - \tau_G}{\kappa}\right)'}{1 + \left(\frac{\tau - \tau_G}{\kappa}\right)^2}$$

olup $\left(\frac{\tau - \tau_G}{\kappa}\right)$ harmonik eğriliktir.

Yeni $\{N, v, \omega\}$ ortonormal çatısı yardımıyla W_1 Darboux vektörü eşitlikleri yardımıyla

$$W_1 = \delta N + \|W\| \omega = \delta N + W$$

dir. Benzer şekilde devam edersek Darboux ekseninin dönme hareketinin sıralı bir şekilde yapıldığını görüyoruz. Böylece Darboux vektörlerinin serisi elde edilir.

Ayrıca,

$$\frac{\delta}{\|W\|} = \frac{\left(\frac{\tau - \tau_G}{\kappa}\right)'}{\kappa \left[1 + \left(\frac{\tau - \tau_G}{\kappa}\right)^2\right]^{3/2}}$$

olup Uyarı 3.2 den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2 3-boyutlu Lie grubu G de hareketli ortonormal çatının $\{N, v, \omega, \|W\|, \delta\}$ elemanları olan birim hızlı bir $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi bir slant helisdir gerek ve yeter koşul $\frac{\delta}{\|W\|}$ oranı sabittir.

3.1 Sabit Devinim Eğrileri

Bu bölümde, bi-invariant metrikli 3-boyutlu Lie gruplarında sabit devinim eğrilerinin tanımı verilmiş ve bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Tanım 3.1 3-boyutlu Lie grubu G de Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve Darboux vektörü W olan bir birim hızlı eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ olsun. Eğer, W Darboux vektörünün hızı $\|W\| = \text{sabit}$ ve W , bir d sol invariant vektör alanı ile sabit bir açı yapıyorsa, yani;

$$\langle d, W \rangle = \text{sabit},$$

ise α eğrisine *sabit devinim eğrisi* denir.

Lemma 3.1 3-boyutlu Lie grubu G de Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan sabit devinim birim hızlı eğrisi $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ olsun. Eğer $\delta > 0$, μ ve $\lambda = \sqrt{\delta^2 + \mu^2}$ keyfi sabitleri için sol invariant vektör alanı

$$d = W + \mu N,$$

ise

i) $\|W\| = \delta = \text{sabit};$

ii) $\cos \varphi = \frac{\delta}{\lambda};$

iii) $\|\dot{N}\| = \delta = \text{sabit};$

iv) $\sin \varphi = \frac{\mu}{\lambda} = \text{sabit};$

v) $\|d\| = \lambda = \text{sabit},$

dir. Burada, φ , d ile W arasındaki açıdır.

İspat. (3.2) eşitliğinden α eğrisinin Darboux vektörü

$$W = (\tau - \tau_G)T + \kappa B,$$

olup

$$\begin{aligned} \|W\| &= \sqrt{\langle W, W \rangle} \\ &= \sqrt{\langle (\tau - \tau_G)T + \kappa B, (\tau - \tau_G)T + \kappa B \rangle} \\ &= \sqrt{(\tau - \tau_G)^2 + \kappa^2} \end{aligned}$$

ve Tanım 3.1 den α eğrisi, sabit devinim eğrisi olduğundan $\|W\| = \text{sabit}$ tir.

Dolayısıyla $\|W\| = \delta$ denirse $\delta = \sqrt{(\tau - \tau_G)^2 + \kappa^2} = \text{sabit}$ tir.

Ayrıca (3.1) sisteminden

$$\dot{N} = -\kappa T + (\tau - \tau_G) B,$$

olup

$$\begin{aligned} \|\dot{N}\| &= \sqrt{\langle \dot{N}, \dot{N} \rangle} \\ &= \sqrt{\langle -\kappa T + (\tau - \tau_G) B, -\kappa T + (\tau - \tau_G) B \rangle} \\ &= \sqrt{\kappa^2 \underbrace{\langle T, T \rangle}_1 + (\tau - \tau_G)^2 \underbrace{\langle B, B \rangle}_1} \\ &= \sqrt{(\tau - \tau_G)^2 + \kappa^2} \end{aligned}$$

ve $\delta = \sqrt{(\tau - \tau_G)^2 + \kappa^2} = \text{sabit}$ olduğunda $\|W\| = \|\dot{N}\| = \delta = \text{sabit}$ tir. Dahası,

$$\begin{aligned} \|d\| &= \sqrt{\langle W + \mu N, W + \mu N \rangle} \\ &= \sqrt{\langle W, W \rangle + 2\mu \langle W, N \rangle + \mu^2 \langle N, N \rangle} \end{aligned}$$

olup (3.2) eşitliği ve $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı bir ortonormal çatı olduğundan $\langle W, N \rangle = 0$ olacağından

$$\|d\| = \sqrt{\langle W, W \rangle + \mu^2 \langle N, N \rangle},$$

dir. Burada $\langle W, W \rangle = \|W\|^2 = \delta^2 = (\tau - \tau_G)^2 + \kappa^2$ ve $\langle N, N \rangle = 1$ olduğundan

$$\|d\| = \sqrt{\delta^2 + \mu^2},$$

yazılabilir. $\delta > 0$ ile μ birer keyfi sabit ve $\lambda = \sqrt{\delta^2 + \mu^2}$ olduğundan $\|d\| = \lambda = \text{sabit}$ tir. Öyleyse **i)**, **iii)** ve **v)** ile verilen ifadeler sağlamır.

Diğer yandan, d ile W arasındaki açı φ olmak üzere

$$\langle d, W \rangle = \|d\| \|W\| \cos \varphi$$

dir. Burada $d = W + \mu N$ ve $\langle N, W \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle W, W \rangle = \|d\| \|W\| \cos \varphi$$

olup **i)** ve **v)** den

$$\delta^2 = \lambda \delta \cos \varphi$$

dir. Burada, $\delta > 0$ ile λ birer sabit olduğundan $\cos \varphi = \frac{\delta}{\lambda}$ dir.

Dahası, d vektör alanı $Sp\{W, N\}$ düzleminde bulunduğundan W ile arasındaki açı φ ise W ile N birbirlerine dik olduğundan d ile N arasındaki açı $\frac{\pi}{2} - \varphi$ dir. O zaman

$$\langle d, N \rangle = \|d\| \|N\| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

dir ve $d = W + \mu N$ olduğundan

$$\underbrace{\langle W, N \rangle}_0 + \mu \underbrace{\langle N, N \rangle}_1 = \|d\| \underbrace{\|N\|}_1 \sin \varphi$$

olup **v)** den

$$\mu = \lambda \sin \varphi$$

dir. Burada, μ ve $\lambda = \sqrt{\delta^2 + \mu^2} > 0$ birer sabit olduğundan $\sin \varphi = \frac{\mu}{\lambda} = \text{sabit}$ dir.

Bu da ispatı tamamlar. ■

Sonuç 3.3 3-boyutlu Lie grubu G de Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan sabit devinimin birim hızlı eğrisi $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow G$ olsun. O halde,

i. $\dot{d} = 0$,

ii. $\|\dot{W}\| = \|\mu\dot{N}\|$,

eşitlikleri denktir.

Sonuç 3.4 3-boyutlu Lie grubu G de Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan bir birim hızlı eğrisi $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow G$ olsun. O zaman,

$$\alpha \text{ sabit devinimli bir eğri} \iff \alpha \text{ eğrisi bir slant helis}$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki, α sabit devinimli bir eğri olsun. O halde, Lemma 3.1 den,

$$\begin{aligned} \langle d, N \rangle &= \|d\| \|N\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ &= \lambda \sin \varphi \\ &= \mu \end{aligned}$$

ve μ bir sabit olduğundan $\langle d, N \rangle = \text{sabit}$ tir. Öyleyse, α eğrisi bir slant helistir.

Şimdi, kabul edelim ki α bir slant helis olsun. O halde, Lemma 3.1 den slant helisin eksenini olarak $d = W + \mu N$ yi alabiliriz. Buradan α sabit devinimli bir eğridir diyebiliriz. ■

Teorem 3.2 3-boyutlu Lie gruplarında Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan bir birim hızlı eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow G$ olsun. O zaman, α sabit devinimli bir eğri gerek ve yeter koşul

$$\kappa = -\delta \sin(\mu s), \quad \tau - \tau_G = \delta \cos(\mu s), \quad (3.3)$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki, α sabit devinimli bir eğri olsun. O halde, Sonuç 3.3 den

$$\dot{d} = \dot{W} + \mu\dot{N} = 0,$$

dir. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\left((\tau - \tau_G)' - \kappa\mu\right)T + \left(\kappa' + \mu(\tau - \tau_G)\right)B = 0$$

elde edilir. Burada, T ve B sıfırdan farklı vektör alanları olduğundan

$$\begin{cases} (\tau - \tau_G)' - \kappa\mu = 0, \\ \kappa' + \mu(\tau - \tau_G) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

sistemi elde edilir. Burada, $\mu \neq 0$ olmak koşuluyla bu diferansiyel denklem sisteminin çözümü

$$(\tau - \tau_G)^2 + \kappa^2 = 2C$$

dir. Burada C sıfırdan farklı pozitif bir integral sabitidir. Lemma 3.1 den $\|W\| = \delta = \sqrt{(\tau - \tau_G)^2 + \kappa^2}$ olduğundan $\delta^2 = 2C$ olup

$$\begin{cases} \tau - \tau_G = \delta \cos \theta, \\ \kappa = \delta \sin \theta, \end{cases} \quad (3.5)$$

yazılabilir. (3.4) ve (3.5) sistemlerinden $\theta = -\mu s$ elde edilir. O halde (3.5) sisteminde θ yerine $-\mu s$ yazılırsa

$$\begin{cases} \tau - \tau_G = \delta \cos(\mu s), \\ \kappa = -\delta \sin(\mu s), \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi, kabul edelim ki, $\kappa = -\delta \sin(\mu s)$ ve $\tau - \tau_G = \delta \cos(\mu s)$ olsun. Lemma 3.1 ve Sonuç 3.3 den α sabit deviniminin bir eğrisi olduğu açıktır. ■

KAYNAKLAR

- Ali, A.T. 2012. Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 20(1): 1-6.
- Arvanitoyeorgos, A. 2003. An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces. American Mathematical Society, 141 pages, Rhode Island.
- Blaschke, W. 1930. in: *Vorlesungen Über Differential Geometry I*, Vol.89. Verlag von Julius Springer, 89 pages, Berlin.
- Çiftçi, Ü. 2009. A generalization of Lancret's theorem. *Journal of Geometry and Physics*, 59(12): 1597-1603.
- Çöken, A.C. and Görgülü, A. 2002. On the dual Darboux rotation axis of the dual space curve, *Demonstratio Mathematica*, 2: 385-389.
- Do Carmo, M. P. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 528 pages, New Jersey.
- Gray, A., Abbena, E. and Salamon, S. 2006. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Taylor & Francis Group, 1016 pages, Boca Raton.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2000a. *Diferensiyel Geometri*, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 272 sayfa, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2000b. *Diferensiyel Geometri*, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 340 sayfa, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2006. *Yüksek Diferensiyel Geometri'ye Giriş*. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 439 sayfa, Elazığ.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28: 153-163.
- Karacan, M.K. and Bukcu, B. 2009. The Bishop Darboux rotation axis of the space-like curves with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space. *Revista Notas de Matematica*, 279: 29-35.
- Korkmaz, B. 2012. *Diferensiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler*. Türkiye Bilimler Akademisi, 587 sayfa, Ankara.
- Kula, L. and Yayli, Y. 2005. On slant helix and its spherical indicatrix. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1): 600-607.
- Kühnel, W. 2006. *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*, Second edition. American Mathematical Society, 380 pages, Rhode Island.
- Lancret, M. A. 1806. *Mémoire sur les courbes à double courbure*. Mémoires présentés à l'Institut, 1: 416-454.

- Okuyucu, O. Z., Gök, İ., Yaylı, Y. and Ekmekci, N. 2013. Slant helices in three dimensional Lie groups. *Applied Mathematics and Computation*, 221: 672-683.
- Scofield, P.D. 1995. Curves of constant precession. *The American mathematical monthly*, 102(6): 531-537.
- Yücesan, A., Çöken, A.C. and Ayyıldız, N. 2002. On the dual Darboux rotation axis of the timelike dual space curve. *Balkan J. Geom. Appl.*, 2: 137-142.
- Yücesan, A., Çöken, A.C. and Ayyıldız, N. 2004. On the Darboux rotation axis of Lorentz space curve. *Appl. Math. Comput.*, 155: 345-351.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Gülay ERDAL

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-Halen
Lisans	Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü	2005-2010

İş Deneyimi

Yıl	Kurum	Görev
2020-...	MEB, Çankırı Şehit Erdem Öztürk MTAL.	Öğretmen
2018-2020	MEB, Yapraklı ÇPAL.	Öğretmen
2014-2018	MEB, Dursunbey Sarı Hoca AİHL.	Öğretmen
2011-2014	MEB, Aydıncık Şehit Ali Çelik ÇPAL.	Öğretmen