



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



Doktora Tezi

**YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ KÜTLEÇEKİM
KURAMLARINDA HOMOJEN EVREN MODELLERİNİN
VARLIĞININ ARAŞTIRILMASI**

Selçuk GÜLER

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

**DANIŞMAN
Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ**

Şubat, 2022

İSTANBUL

Bu çalışma, 25.02.2022 tarihinde aşığıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Matematiksel Fizik Programında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Değer SOFUOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Arzu ÇİLLİ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Mustafa SARISAMAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Sezgin AYGÜN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

İntihal Programı Beyanı

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Proje Destekleri

Bu tez, TÜBİTAK 2211-A numaralı Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri

Güler S., Güdekli E., 2021, Consistency Conditions of $f(R, G)$ -Gravity Field Equations For Bianchi-Type III Metric, Asian Journal of Research and Reviews in Physics 4(3), 29-41.

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında değerli zamanını hiçbir şekilde esirgemeyen, beni sürekli destekleyip, sürekli motive ederek gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı tez danışmanım Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ 'ye sonsuz teşekkür ederim.

Çalışma konumun seçiminde çok büyük katkı sağlayan, geniş bilgi birikimi, yol göstericiliği ve tecrübesiyle benden desteğini ve yardımını esirgemeyen Prof. Dr. Haşım MUTUŞ 'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Değerli hocam, Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ 'e yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca verdiği her türlü destek ve motivasyon için teşekkür ederim.

Kıymetli hocam, Doç. Dr. Değer SOFUOĞLU 'na çalışmam boyunca bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek hep destek olduğu için teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde yanımda olan, maddi-manevi hiçbir desteğini esirgemeyen ve tüm çalışmalarımnda beni yüreklendirip emek veren sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Son olarak doktora öğrenimim sırasında desteklerini bir an olsun eksik etmeyen bütün arkadaşlarıma, öğrencilik hayatımda emeği geçen hocalarıma, eserlerinden faydalandığım tüm bilim insanlarına ve İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Sekreterliğine çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı'na çok teşekkür ederim.

Şubat 2022

Selçuk GÜLER

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	ivv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	viiviii
TABLO LİSTESİ	ixx
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	x
ÖZET	xixii
SUMMARY	xiixiv
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	6
2.1. EINSTEIN' IN GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİ	6
2.1.1. Newtonsal Kütleçekimin Yetersizlikleri	6
2.1.2. GRT' nin Temellerinde Mach ve Minkowski' nin Düşünceleri	8
2.2. ALAN DENKLEMLERİNİN Λ KOZMOLOJİK SABİTİ İLE DEĞİŞİKLİĞE UĞRATILMASI	10
2.2.1. İlk Evren Modelleri	10
2.2.2. Kozmolojik Gelişmelerde Λ nın Önemi	11
2.2.3. Karanlık Enerji ve Λ	13
2.3. ALAN DENKLEMLERİNİN EĞRİLİK İNVARYANTLARI İLE DEĞİŞİKLİĞE UĞRATILMASI	15
3. MALZEME VE YÖNTEM	177
3.1. ÖNBİLGİLER	17
3.1.1. Koordinatsal Tabanda Tansörler	17
3.1.2. Koordinatsal Tabanda Alan Denklemleri Hesabı İçin Gerekli Malzeme	18
3.1.3. Koordinatsal Olmayan Taban: Tetrad Tabanı	19
3.1.4. Ortonormal Tetrad Tabanında Alan Denklemleri Hesabı İçin Gerekli Malzeme	20
3.1.5. Uzay-Zamanın 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemi	22
3.1.6. Homojen Kozmolojik Modeller	25
3.1.6.1. Uzayca Homojen ve Eşyönlü Model: RW-Metriği	25

3.1.6.2. <i>Uzayca Homojen ve Eşyönsüz Modeller: Bianchi-Tip Metrik</i>	26
3.2. $f(R,G)$ -GRAVİTE ALAN DENKLEMLERİNİ HESAPLAMA YÖNTEMLERİ....	31
3.2.1. Efektif Enerji-Momentum Tansörleri.....	31
3.2.2. Alan Denklemleri Bileşenlerinin Doğrudan Doğruya Yazılması (Birinci Yöntem)34	
3.2.3. 1+3 Kovaryant Ayrışım Uygulamak (İkinci Yöntem).....	35
4. BULGULAR	39
4.1. BİANCHİ-TİP III METRİĞİ İÇİN $f(R,G)$ -GRAVİTE DENKLEMLERİ.....	39
4.1.1. Birinci Yönteme Göre $f(R,G)$ Alan Denklemleri.....	39
4.1.2. İkinci Yönteme Göre $f(R,G)$ Alan Denklemleri.....	40
4.1.3. Tutarlılık Koşulları.....	47
4.2. BİANCHİ-TİP III İÇİN $f(R,G)$ MODELİ TESİSİ.....	57
4.2.1. i -Birincil Koşulu Altında Denklemlerin İndirgenmesi.....	57
4.2.1.1. $(i \oplus i_2)$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi.....	59
4.2.1.2. $(i \oplus i_1)$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi.....	73
4.2.1.3. $(i \oplus i_3)$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi.....	77
4.2.2. j -Birincil Koşulu Altında Denklemlerin İndirgenmesi.....	80
4.2.2.1. $(j \oplus j_1)$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi.....	80
4.2.2.2. $(j \oplus j_2)$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi.....	84
4.2.2.3. $(j \oplus j_3)$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi.....	88
4.2.3. k -Birincil Koşulu Altında Denklemlerin İndirgenmesi.....	91
4.2.3.1. $(k \oplus k_1), (k \oplus k_2)$ ve $(k \oplus k_3)$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi..	92
4.3. BİANCHİ-TİP I METRİĞİ İÇİN $f(R,G)$ -GRAVİTE DENKLEMLERİ.....	95
4.3.1. Birinci Yönteme Göre $f(R,G)$ Alan Denklemleri.....	95
4.3.2. İkinci Yönteme Göre $f(R,G)$ Alan Denklemleri.....	96
4.3.3. Tutarlılık Koşulları.....	100
4.4. BİANCHİ-TİP I İÇİN $f(R,G)$ MODELİ TESİSİ.....	103
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	108
KAYNAKLAR	110
EKLER	113

Ek A. ROBERTSON-WALKER.....	113
Ek B. BIANCHI-TİP I.....	116
Ek C. BAZI YARARLI BAĞINTILAR.....	119
ÖZGEÇMİŞ	122



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 4.1. (a) : $n = n(w)$ fonksiyonunun değişimi	69
Şekil4.1. (b) : $w = w(n)$ fonksiyonunun değişimi	69



TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 4.1 : Bianchi-Tip III Modeli İçin Tutarlılık Koşulları.....	56
Tablo 4.2.a : n parametresinin işaret tablosu.....	66
Tablo 4.2.b : λ parametresinin işaret tablosu.....	66
Tablo 4.2.c : (λ, n) parametresine göre G nin işaret tablosu.....	66
Tablo 4.2.d : (λ, n) parametresine göre G nin işaret tablosu.....	70
Tablo 4.3 : Bianchi-Tip I Modeli İçin Tutarlılık Koşulları.....	103

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
ds^2	: Metrik ya da uzay-zaman aralığı
g_{ab}	: Uzay-zamanın metriği
η_{ab}	: Lorentzsel uzay-zaman metriği
R_{ab}	: Ricci tansörü
R	: Ricci skaler eğriliği
G_{ab}	: Einstein tansörü
Λ	: Kozmolojik sabit
T_{ab}	: Enerji-momentum tansörü
T	: Enerji-momentum tansörünün izi
κ^2	: Einstein kuplaj sabiti
G	: Newton gravitasyon sabiti veya yerine göre Gauss-Bonnet terimi
c	: Işık hızı
R_{abcd}	: Riemann eğrilik tansörü
u^a	: 4-lü hız vektörü
h_{ab}	: Dik izdüşürme tansörü
U_{ab}	: Paralel izdüşürme tansörü
μ^m	: Madde-enerji yoğunluğu
p^m	: Eşyönlü basınç
q_a	: Isı akısı (enerji akısı)
π_{ab}	: Eşyönsüz basınç tansörü
$\dot{u}_a$	: İvme
θ_{ab}	: Genişleme tansörü
θ	: Genişleme skaleri
σ_{ab}	: Makaslama tansörü
σ	: Makaslama skaleri

ω_{ab}	: Girdap (dönme) tansörü
ω_a	: Girdap (dönme) skaleri
ω	: Dönme skaleri
η_{abcd}	: 4-boyutlu permütasyon tansörü (hacim elemanı)
ε_{abcd}	: 4-boyutlu Levi-Civita sembolü
Γ^a_{bc}	: Christoffel sembolleri (veya Ricci dönme skaleri)
∇_a	: Kovaryant türev operatörü
$\square \equiv \nabla^a \nabla_a$	: d'Alembert operatörü
δ	: Varyasyon operatörü
$e_a \equiv \partial_a$	: Tetrad taban vektörü veya tetrad türev operatörü
e^a	: Düal tetrad taban 1-formu
S_{EH}	: Einstein-Hilbert aksiyonu
S_m	: Madde-enerji aksiyonu
L_m	: Maddenin Lagrange yoğunluğu
γ^c_{ab}	: Komütasyon fonksiyonları
H	: Hubble parametresi
q	: Yavaşlama parametresi
w	: Sıradan madde hal parametresi
w_{KE}	: Karanlık madde hal parametresi

Kısaltmalar

Açıklama

EAD	: Einstein Alan Denklemleri
EH	: Einstein-Hilbert
FLRW	: Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
GRT	: Genel Rölativite Teorisi
KE	: Karanlık Enerji
KM	: Karanlık Madde
RW	: Robertson-Walker
ÖRT	: Özel Rölativite Teorisi
YDS	: Yerel Dönmesel Simetrik

ÖZET

DOKTORA TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ KÜTLEÇEKİM KURAMLARINDA HOMOJEN EVREN MODELLERİNİN VARLIĞININ ARAŞTIRILMASI

Selçuk GÜLER

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ

Bu tez’de, $f(R,G)$ -gravite diye adlandırılan yüksek mertebeden kütleçekim teorilerinde uzayca ve de uzay-zamanca homojen evren modellerinin varlığını, $f(R,G)$ -gravite fonksiyonlarının şekillerine ve özelliklerine bağlı olarak araştırmaktır. Yukarıdaki ifadelerde R Ricci Eğriliği ve G de $G \equiv R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2$ ile tanımlı Gauss-Bonnet terimidir. Yukarıda bahsedilen teoriler Einstein’ın 1916’daki Genel Rölativite Teorisinin genelleştirilmesini oluşturmaktadır ve özellikle 1998’deki gözlem verilerinden hareketle ortaya konan “evrenin hızlanarak genişlemesi” olgusunu açıklamaya yönelik girişimlerin bir parçasını oluşturmaktadır. Dolayısıyla bu yeni gravite teorilerinde kozmolojik modellerin inşasını, rölativist kozmolojik modellere nispetle ne tür değişiklikler içerdiğini görmek önem kazanmaktadır. $f(R,G)$ -gravite teorisini, uzayca homojen ve eşyönsüz modeller sınıfından Bianchi Tip-I ve Bianchi Tip-III modelleri çerçevesinde, evrenin normal (standard) madde-enerji içeriğinin lineer barotropik hal denklemleri bir mükemmel akışkan olduğu varsayımı altında ele alacağız. Matematiksel işlenilebilirlik sağlaması bakımından söz konusu modeller dönmesiz ve ortogonal tipten olacak, yani, metrikler köşegensel olup yalnızca 3 bilinmeyen ölçek çarpanı içerecektir. Bianchi Tip-I modeli en basit eşyönsüz model olup, aynı zamanda da uzayca düz eşyönlü Robertson-Walker modelinin (düz, açık ve kapalı) genelleştirilmesini oluşturmamaktadır. Temel amacımız, efektif akışkan yaklaşımı altında alan denklemlerini eşhareketli bir ortonormal tetrad çatısında hesaplayıp, bunların çözümleri olan ölçek çarpanları ile birlikte $f(R,G)$ -gravitenin fonksiyonel formunu tesis etmek olacaktır. Bu işi, literatürde

çok az sayıda yapılmış benzer amaçlı çalışmalardan farklı bir biçimde ele alacağız. Bunlarda yapıldığı üzere, peşinen amaca yönelik (ad hoc) ön çözümler (anzats) varsaymak yerine; önce, evrenin madde-enerji içeriğinin eşyönlü bir mükemmel akışkan olarak varsayılması altında alan denklemlerinin bu kısıtlama ile tutarlılık koşulları belirlenecek ve sonrasında da, gerektiği durumlarda ön çözümlere başvurulacaktır.

Şubat 2022, 137 sayfa.

Anahtar kelimeler: Yüksek Mertebeden Gravitasyon Teorileri, $f(R,G)$ -gravite, Homojen ve Anizotropik Evren Modelleri, Tutarlılık Koşulları, Bianchi Tip-III



SUMMARY

Ph.D. THESIS

INVESTIGATION OF THE EXISTENCE OF HOMOGENEOUS UNIVERSE MODELS IN HIGHER ORDER CURVATURE GRAVITY THEORIES

Selçuk GÜLER

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ

In this thesis, it is to investigate the existence of homogeneous universe models in space and space-time in higher order gravitational theories called $f(R, G)$ -gravity, depending on the shapes and properties of $f(R, G)$ -gravity functions. In the above expressions, R is the Ricci Curvature and G is the Gauss-Bonnet term defined with $G \equiv R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2$. The above-mentioned theories constitute a generalization of Einstein's General Theory of Relativity in 1916, and form part of attempts to explain the phenomenon of "accelerated expansion of the universe", which is particularly evident from the observation data of 1998. Therefore, it is important to see what kind of changes the construction of cosmological models involve in these new gravity theories compared to relativist cosmological models. We will consider $f(R, G)$ -gravity theory within the framework of Bianchi Type-I and Bianchi Type-III models from the class of spatially homogeneous and anisotropic models, under the assumption that the normal (standard) matter-energy content of the universe is a perfect fluid with a linear barotropic equation of state. In terms of providing mathematical workability, these models will be rotationless and of orthogonal type, that is, the metrics will be diagonal and contain only 3 unknown scale factors. The Bianchi Type-I model is the simplest anisotropic model, and at the same time it does not constitute a generalization of the linear isotropic Robertson-Walker model (flat, open, and closed). Our main goal will be to calculate the field equations in an isometric orthonormal tetrad framework under the effective fluid approach, and to establish the functional

form of $f(R,G)$ -gravity with their solutions, scale factors. We will deal with this work in a different way from the very few studies with similar purposes in the literature. Instead of assuming ad hoc preliminary solutions (anzats) in advance, as is done in these; First, the consistency conditions of the field equations with this restriction will be determined under the assumption that the matter-energy content of the universe is a isotropic perfect fluid, and then preliminary solutions will be applied when necessary.

February 2022, 137 pages.

Keywords: Higher Order Theories of Gravitation, $f(R,G)$ -gravity, Homogeneous and Anisotropic Universe Models, Consistency Conditions, Bianchi-Type III



1. GİRİŞ

Einstein'ın Özel Rölâtivite Teorisinin ileri sürülmüş olduğu 1905 yılının hemen sonralarında, Newton'un Gravitasyon Teorisini de bu teorinin çerçevesine oturtmaya yönelik pek çok girişim: iç tutarsızlık, gözlemlerle uyuşmama, öngörülerde isabetsizlik... gibi birtakım ölçütler ışığında, başarısız kalmıştır. Buna karşılık, 1916 yılında Einstein tarafından ileri sürülen Genel Rölâtivite Teorisi (GRT) gravitasyonu 4-boyutlu bir uzay-zaman manifoldunu eğriliği diliyle tasvir eder. Bu teori, hem Merkür'ün perihel noktasının yüzyıllık gözlemsel ilerlemesini açıklamış hem de, Güneş civarından geçen ışığın Güneş'in gravitasyon alanı nedeniyle saptırılacağını öngörmüş ve sapma miktarını da doğru olarak vermiştir. İlerleyen yıllarda ortaya çıkan Brans-Dicke skaler-tansörel teorisi, zar-evren teorileri gibi alternatif teorilerle karşılaştırıldığında, GRT'nin, bir yüzyılını geride bırakmış olarak, Güneş sistemimize ilişkin olaylarda, yani, yerel ölçekte, hâlâ en başarılı bir gravitasyon teorisi olma özelliğini koruya gelmekte (sürdüre gelmekte) olduğunu söylemek pek de yanlış olmaz. Öte yandan; GRT'nin alan denklemlerinin, astrofizik ve kozmoloji alanında da, yani, galaksiler ve galaksiler arası ortamlar ile evrenin bütünü gibi çok daha geniş ölçeklere uygulanması da: Büyük Patlama, $2.7^{\circ}K$ 'lık kalıntı ışıınım, Evrenin genişlemesi, geniş ölçek yapılarının (galaksilerin) oluşumu, karadeliklerin varlığı gibi... gözlemlerle büyük ölçüde uyuşan sonuçların elde edilmesine önayak olmuştur. Bununla beraber, GRT'nin, ya da buna dayanan Rölâtivist Kozmolojinin eksikleri ve sorunları da yok değildir. Gözlemlerden kaynaklı: Evrenin eşyönlüleşmesi, uzayca düz olma, ufuk gibi sorunların açıklanmasının henüz tatminkâr bir düzeyde olmadığı söylenebilir. Ancak, bunlardan daha da önemlisi, 80'li yıllardan itibaren yapılan teorik düzeydeki çalışmalarda GRT'nin orijinal şekliyle, kuvantum teorisiyle bağdaştırılmayacağı yönünde yeterince ikna edici sonuçların ortaya çıkmış olduğudur. Bu; GRT'nin, Güneş sistemi gibi zayıf gravitasyon alanında ve dolayısıyla da düşük eğrilikli sistemler için geçerli olabileceği; fakat evrenin başlangıç anları ile kuvvetli gravitasyon ve yüksek eğrilikli durumlarda geçerli olamayacağı yolunda bir kanıya sevk etmiştir. Böyle durumlara getirilen çözüm; gravitasyonu kuvantalaştırma amacıyla ortaya çıkan istenmeyen sonsuzlukları elemek ('rönormalize etmek') üzere, R Ricci skaler eğriliğine göre lineer olan Einstein-Hilbert (EH) aksiyonuna Riemann eğrilik tansörünün - ve de diğer bazılarının- muhtelif kombinasyonlarıyla oluşturulabilecek eğrilik invaryantları terimleri eklemek suretiyle GRT'yi değişikliğe uğratmak

olmuştur. Einstein teorisinin değişikliğe uğratılması, yalnızca alan denklemlerine ek terimler getirmemiş, fakat gravitasyonun dörtten büyük boyutlarda ele alınması gerektiğine de yol açmıştır. Literatürde M-Teori, Sicim Teorisi, Zar-Evren Teorileri gibi teoriler böyle yaklaşımın ürünleridir. Ne var ki bu girişimler, yalnızca teorik düzeyde olup, bunların henüz ne öngörüsül ve ne de gözlemsel herhangi bir karşılıkları bulunmamaktadır.

Şimdi, GRT'nin geniş ölçeklerdeki geçerliliğini asıl sorgulanır duruma getiren astrofiziksel ve kozmolojik gözlemsel gelişmelere gelelim. Bunlardan ilki, "Karanlık Madde" (kısaca KM) denilen meseledir. 30'lu yılların başında özellikle Zwicky ile başlatılan Galaksimize ilişkin gözlemler, Galaksi'mizde bir eksik (kayıp) kütle bulunduğuna dair birtakım şüpheler ortaya çıkarmıştır. Günümüzde daha da geliştirilmiş gözlemlerden oluşturulan galaksi dönme eğrileri diyagramları, galaksi kollarında dönen maddenin dönme hızının merkezden uzaklık ile önce lineer olarak arttığını ve galaksi halosu civarında ise artık sabit kaldığını vermektedirler. Oysa Newton teorisi ve dolayısıyla lineerleştirilmiş Einstein teorisi, lineerlikten sonra uzaklık ile ters orantılı olarak azalan bir değişim öngörmektedir. Böyle bir davranışı açıklamak için halo civarında gözlenenenden daha fazla madde bulunmasını varsaymak gerekmektedir. Ancak, böyle bir maddeye aday olarak ne gösterilmişse, hiç biri de şimdiye kadar gözlenebilmiş değildir. Galaksilerde gravitasyonel etki gösteren mahiyeti henüz muamma böyle bir maddenin varlığını destekleyen bir başka gözlemsel veri de, galaksilerin ışığın yayılışına uyguladığı mercekleme olayıdır. Bu gözlemlerden hareketle evrende olması gereken karanlık maddenin toplam maddeye oranını için yaklaşık %27 bulunmaktadır.

İkinci mesele ise, yüksek kıızıla kaymaya sahip Süpernova Tip-Ia'ların gözlemlerinden 1998 de elde edilen şaşırtıcı sonuçtur; zira o tarihlere kadar evrenin günümüzde yavaşlayan bir şekilde genişlediğine inanılırken söz konusu gözlemler, bunun böyle olmadığını; tam tersine, genişlemenin hızlanarak (ivmelenerek) olduğu yönünde sonuçlar vermişlerdir. Günümüze kadar çeşitli gruplarca da gittikçe daha duyarlı şekilde yapılan benzer gözlemler de, bir kozmik ivmelenme sürecinde olduğumuzu doğrular mahiyettedir Bu durum, ayrıca, doğrudan doğruya olmasa da: baryon akustik osilasyonları, kozmik arkafon eşyönsüzlükleri, zayıf gravitasyonel mercekleme gibi farklı mahiyetteki gözlem sonuçlarıyla da teyit edilmektedir. Evren için ölçülen ışıklı madde-enerji miktarı, GRT'nin Rölativist Kozmolojisi içinde kalınıldığı takdirde böyle bir ivmelenmeyi açıklayamamaktadır; zira normal madde diyeceğimiz bu 'ışıklı madde' çok çok evrenin madde enerji içeriğinin yaklaşık %5 i kadardır ve ivmelenme için gerekli olan

%73 ün neredeyse on beşte biridir. İşte, geri kalan %68 oranındaki madde-enerji “Karanlık Enerji” (KE) olarak adlandırılmaktadır ve bunun da günümüzde gözlenen ivmeye yol açabilmesi için, bilinegelen standart madde türlerinden farklı olarak aşırı negatif basınçlı olması gerekmektedir.

GRT içinde kalınıldığında, aslında, böyle aşırı basınçlı bir ekzotik madde-enerji varsayımı yapmaksızın da, söz konusu ivmelenmeyi açıklamak mümkündür. Bu KE ye en basit aday, hal parametresi -1 e eşit olan bir efektif akışkana karşılık düşen Λ kozmolojik sabitidir ve bundan ötürü de Λ nın alan denklemlerinde barındırılması gerektiği düşünülmüştür. Öte yandan, Λ kozmolojik sabiti aynı zamanda boşluğun (vakumun) da enerjisidir. Ancak, şöyle bir sorun ortaya çıkmaktadır: KE için gerekli olan Λ nın şimdiki değeri ile vakum değeri arasında niçin 121 mertebelik bir farklılık bulunmaktadır? “Hiyerarşi problemi” olarak adlandırılan bu sorun, KE nin kozmolojik sabit ile açıklanmasına güven duyulmamasına yol açmaktadır. KE ye aday ikinci bir alternatifi ise EH-aksiyonunda madde Lagrange’yenine ithal edilen çeşitli skaler alanlar oluşturmaktadır. Bu tür modeller, “quintessence” ($\equiv$ beşinci element, skaler alanlı) olarak anılmaktadır. Ancak bu, bir bilinmeyeni şimdiye kadar hiçbir şekilde gözlenememiş başka bir bilinmeyenle açıklamak gibi bir durum ortaya çıkarmaktadır. Kaldı ki Einstein Alan Denklemleri’ne (EAD) bu tür alanların ithali Güneş sistemine ilişkin testlerde uygunsuzluklar da yaratmaktadır.

Yukarıdaki her iki yaklaşım da, KE ye karşılık düşecek şekilde bir-madde enerji oluşturmak üzere, EAD denklemlerinin sağ yanını oluşturan enerji-momentum tansörünün içeriğinin değiştirilmesini hedef almaktadır. Lagrange’yen formülasyon diliyle söylendiğinde bu, madde Lagrange’yeninde amaca uygun değişiklikler yapmak demektir. Bu yaklaşımının alternatifini ise, EAD’nin sol tarafını değişikliğe uğratmak, yani, EH-aksiyonunda R ye göre lineer olan geometrik Lagrange’yeni, eğrilik invaryantlarının keyfi bir $f(R, G, R_{ab}R^{ab}, \dots)$ fonksiyonu ile değiştirmek oluşturmaktadır. Bu yolla oluşturulan değiştirilmiş Einstein teorisi $f(R, G, R_{ab}R^{ab}, \square R, \dots)$ -gravite olarak anılmaktadır. Burada: G ; R_{abcd} Riemann eğrilik tansörünün büzülmeleri olan Ricci eğrilik tansörü $R_{ab} \equiv R^c_{acb}$ ve Ricci eğrilik skaleri $R \equiv R^c_c$ den hareketle $G \equiv R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2$ şeklinde oluşturulan bir kombinasyonla tanımlı olup Gauss-Bonnet eğrilik invaryantı olarak anılır.

Literatürde, bu tip teoriler, özellikle de $f(R) - \text{gravite}$ daha ağırlıklı olmak üzere, son 20 yıldan bu yana çeşitli kozmolojik meseleler için yoğun bir uğraş alanı oluşturmaktadırlar. Çalışmaların tamamına yakınında $f(R) - \text{gravite}$ teorileri, evrenin, büyük ölçekte uzayca homojen ve eşyönlü olduğu varsayımına dayalı Robertson-Walker (RW) metriği çerçevesinde ele alınmaktadırlar. RW metriği, GRT'nin ortaya çıkışından bu yana en çok kullanılan metrik olmuştur. Evrenin geometrisi için matematiksel bakımdan yapılan bu amaca yönelik (ad hoc) basitleştirici varsayım, sonuçta, alan denklemlerini t kozmik zamanına göre adi türevli ikinci mertebeden diferansiyel denklemlere indirgemekte ve basınç ile madde-enerji yoğunluğu gibi dinamik değişkenlerin de yalnızca t nin fonksiyonu olmalarına yol açmaktadır. Bu, homojenlik özelliğinin bir sonucudur. Öte yandan eşyönlülük ise, metrik ifadesinde, ölçek çarpanı denilen $a(t)$ gibi tek bir bilinmeyen fonksiyonla iş görülmesine yol açmaktadır. $f - \text{gravite}$ için de durum GRT'deki gibidir: şu farkla ki, alan denklemleri bu sefer dördüncü mertebeden olmaktadır.

Uzayca homojenlik ve eşyönlülük varsayımı, başlangıçta, sadece ve sadece basitleştirme amaçlı matematiksel bir çalışma varsayımı olarak düşünülmüşse de, ilerleyen yıllardaki gözlemler evrenin büyük ölçekteki bugünkü görünümünün söz konusu varsayımla gerçekten de büyük ölçüde uyduğuna destek vermiştir. Bununla beraber, yakın zamanlardaki gözlemler 5×10^{-5} oranında bir eşyönsüzlüğe de işaret etmektedirler. Öte yandan, evrenin ilk zamanlarındaki görünümünün, pekâlâ eşyönsüz olup da sonraları birtakım mekanizmalar ile eşyönlülüğe evrildiği olasılık dışı değildir. Literatürde bu konu 'eşyönlüleşme meselesi' olarak yer almaktadır ve matematiksel çerçevesini de eşyönlülük kısıtlamasının gevşetilmesiyle varılan 'uzayca homojen ve eşyönsüz uzay-zamanlar' oluşturmaktadır. Bu özellikteki uzay zamanları, Kantowski-Sachs modeli ile Bianchi-Tip modeller oluşturmaktadır. Bianchi-Tip modeller, 1898 de Bianchi tarafından Tip I-IX şeklinde 9 ayrı tip olarak sınıflandırılmış olup 40' lı yılların sonlarından itibaren de kozmolojide yoğun bir şekilde kullanılmaktadırlar.

Bu Tez'de, $f(R, G) - \text{gravite}$ teorisini, uzayca homojen ve eşyönsüz modeller sınıfından Bianchi-Tip I ile Bianchi-Tip III modelleri çerçevesinde, evrenin normal (standard) madde-enerji içeriğinin lineer barotropik hal denklemleri bir mükemmel akışkan olduğu varsayımı altında ele alacağız. Matematiksel işlenebilirlik sağlaması bakımından söz konusu modeller dönmesiz ve ortogonal tipten olacak, yani, metrikler köşegensel olup yalnızca 3 bilinmeyen ölçek çarpanı içerecektir. Bianchi Tip-I modeli en basit eşyönsüz model olup, aynı zamanda da

uzayca düz eşyönlü RW modelini içermektedir. Bianchi-Tip III modeli ise hiç bir şekilde bir RW modelinin (düz, açık ve kapalı) genelleştirilmesini oluşturmamaktadır. Temel amacımız, efektif akışkan yaklaşımı altında alan denklemlerini eşhareketli bir ortonormal tetrad çatısında hesaplayıp, bunların çözümleri olan ölçek çarpanlarıyla birlikte $f(R,G)$ nin fonksiyonel formunu tesis etmek olacaktır. Bu işi, literatürde çok az sayıda yapılmış benzer amaçlı çalışmalardan farklı bir biçimde ele alacağız. Bunlarda yapıldığı üzere, peşinen amaca yönelik (ad hoc) önçözümler (anzats) varsaymak yerine; önce, evrenin madde enerji içeriğinin eşyönlü bir mükemmel akışkan olarak varsayılması altında alan denklemlerinin bu kısıtlama ile tutarlılık koşulları belirlenecek ve sonrasında da, gerektiği durumlarda önçözümlere başvurulacaktır.

İzlenecek çalışma planı şöyle olacaktır: 2.Bölüm’de; Einstein’ın gravitasyon teorisinin ortaya çıkışında Einstein’a yol gösterici temel düşünceleri özetliyor ve alan denklemlerinin bizzat Einstein tarafından, önce kozmolojik sabiti ile değişikliğe uğratılması ve sonrasında da bundan vazgeçilmesi sürecine kısaca değiniyoruz. Bu Bölüm’de, kozmolojik sabitin, evrenin güncel ivmeli genişlemesinin açıklanmasında Karanlık Enerji’ye nasıl bir alternatif oluşturduğu da ele alınmaktadır. 3. Bölüm’de; Einstein Alan Denklemleri ile $f(R,G)$ – *gravite* için değişikliğe uğratılmış alan denklemlerini: Robertson-Walker metriği ile Bianchi-Tip I ve Bianchi-Tip III metrikleri çerçevesinde ortonormal bir tetrad çatısında hesaplamaya yetecek ölçüde, matematiksel malzeme hakkında bilgilendirme sunmaktayız. Bu vesileyle; notasyon, indis kabulleri, formül yazılımlarındaki tanımlamalar, kurallar,... gibi kaynaktan kaynağa değişkenlik gösteren pek çok unsurun birbirleriyle tutarlılığı da sağlanmış olacaktır. 4. Bölüm’de; yani Bulgular bölümünde sırasıyla Bianchi-Tip III ve Bianchi-Tip I modelleri için iki farklı yöntemle alan denklemlerini yazıyoruz. Bunun akabinde bu alan denklemlerinden hareketle her iki model için tutarlılık koşullarını elde ediyoruz. Daha sonra bu tutarlılık koşulları altında ve mükemmel akışkan varsayımı ile birlikte Bianchi-Tip III ve Bianchi-Tip I modelleri için $f(R,G)$ modellerini tesis ediyoruz. Tartışma ve Sonuç Bölümü ise, sonuçların değerlendirme ve tartışmasına ayrılmıştır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. EINSTEIN'IN GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİ

2.1.1. Newtonsal Kütleçekimin Yetersizlikleri

Newton'un postüle etmiş olduğu Evrensel Kütleçekim Kanunu; kütleli cisimlerin birbirleriyle etkileşmesini, kütleleriyle orantılı, aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı bir çekim kuvveti yoluyla tasvir eder. Bu kanuna dayalı Newton Gök Mekaniği, Güneş sistemimizdeki gezegen, uydu, kuyruklu yıldız vb. gök cisimlerinin hareketlerini yalnızca açıklamakla kalmamış, fakat aynı zamanda, Ay-Güneş tutulmaları, kuyruklu yıldızların tekrar görünmeleri, gel-git olayları gibi pek çok konuda isabetli öngörüler sunmuştur. Bir örnek vermek gerekirse, Neptün'ün varlığının önce kâğıt üzerinde keşfi, Newton Gök Mekaniğinin belki de en çarpıcı başarılarından birini oluşturmuştur. Bununla beraber, Newton Gök Mekaniği, Merkür gezegeninin presesyon hareketindeki perihel noktasının gözlenen ilerlemesi konusunda teorik ve gözlemsel değerler arasında neden 53''/yüzyıl kadarlık bir fark bulunduğunu açıklamakta yetersiz kalmıştır. 20'nci yüzyılın başlarına gelene kadar pek çok astronom ve astrofizikçiye meşgul eden bu sorun için amaca uygun (ad hoc) yaklaşık bir düzine kadar hipotez ileri sürülmüşse de bunlardan hiçbiri kabul görmemiştir. Bunlar arasında belki de en çarpıcı olanı, uzaklığın tamı tamına bir ters kare olamayabileceği düşüncesinden hareketle, kütleçekim kanunu $F \propto r^{-2}$ yi, $\varepsilon \ll 1$ olmak üzere $F \propto r^{-2 \pm \varepsilon}$ şeklinde değişikliğe uğratmak fikridir. Fakat bu girişim, hem diğer gezegenlere ilişkin perihel ilerlemesi gözlemleriyle tutarsızlığa yol açtığından ve hem de Galaksimizde (Samanyolu'nda) gözlemlerle hiç bir şekilde ortaya konulamamış bir gel-git etkisi öngördüğünden terk edilmiştir. Bu sorun Einstein'ın 1916'da ileri sürmüş olduğu Genel Rölativite Teorisi (GRT) çerçevesinde çözüm bulmuştur [1]. Einstein, 1905'de ileri sürmüş olduğu Özel Rölativite Teorisini (ÖRT) ivmeli referans sistemlerini de kapsayacak şekilde genelleştirme arzusu sonucunda kütleçekimi, genel bir $\{x^a, a, b, \dots = 0, 1, 2, 3\}$ koordinat sisteminde metriği (yay elemanı ya da uzay-zaman aralığı)

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad (2.1)$$

ile temsil edilen 4-boyutlu eğrisel (Riemannsal) bir uzay-zaman geometrisinin eğriliği diliyle tasvir eden bir teoriye varmıştır. Einstein'ın GRT 'sinin alan denklemleri orijinal şekliyle

(Λ kozmolojik sabit olmaksızın),

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa^2 T_{ab} \quad (2.2)$$

dir. 3. Bölüm 'de daha da ayrıntılı olarak açıklamak üzere, şimdilik burada:

g_{ab} : gravitasyon potansiyelleri rolünü oynayan 4-boyutlu uzay-zaman manifoldunun metrik tansörü,

R_{ab} : g_{ab} ve bunun birinci ile ikinci türevleriyle oluşturulmuş 4-boyutlu uzay-zaman manifoldunun içsel eğrilik tansöründen, R^c_{acb} büzülmesiyle elde edilmiş Ricci Eğrilik Tansörü,

R : R_{ab} den hareketle R^a_a büzülmesiyle elde edilmiş Ricci Eğrilik Skalari,

T_{ab} : Madde-Enerji dağılımını tasvir eden Enerji-Momentum Tansörü,

G_{ab} : Einstein Tansörü,

κ^2 : Işık hızı c ve Newton evrensel kütleçekim sabiti G ile gösterilmek üzere $\kappa^2 = 8\pi G / c^4$ ile tanımlı Einstein Kuplaj Sabiti olduklarını kaydedelim.

Simetri özellikleri (bkz: 3.Bölüm) de dikkate alındığında; ikinci mertebeden kısmi türevli, birbirlerine kuple ve lineer olmayan toplam 10 adet bağımsız denklemden oluşan bu denklem sistemi, formel olarak, Newtonal kütleçekim kanununun kütleçekimsel ϕ potansiyeli diliyle ifade edildiği $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ Poisson denkleminin bir çeşit genellemesi görünümündedir (ρ kütle yoğunluğudur). Einstein kütleçekiminde, ϕ nin yerini, toplamda 10 adet olan ve genel olarak koordinatların fonksiyonu olan g_{ab} metrik fonksiyonları (kütleçekim potansiyelleri) almaktadır. Einstein, bu teoriyi zayıf kütleçekim alanı yaklaşıklığında Güneş sistemimize uyguladığında yalnızca Merkür gezegeninin perihel noktasının gözlemsel ilerleme değerini doğru olarak hesaplamakla kalmamış, fakat aynı zamanda, ışığın Güneş civarından geçerken kütleçekimden etkilenecek yörüngesinin eğrilip sapacağını da öngörmüştür. Ayrıca sapma miktarını, 1919'da Eddington tarafından gözlemsel olarak doğrulandığı üzere, doğru olarak da hesaplamıştır [1]. Teorisinin Güneş sistemi ölçeğinde bir diğer doğrulanmasının da radar yankı testi gözlemleri olduğunu kaydedelim. Şimdi, her ne kadar Newton Teorisine alternatif bu yeni kütleçekim teorisi, Güneş sistemi ölçeğindeki olaylar konusunda açıklama ve öngörmede

yukarıda sıralanan başarıları göstermiş olsa da Einstein, aşağıdaki şu iki mesele konusunda teorisini tatminkâr bulmamıştır.

2.1.2. GRT 'in Temellerinde Mach ve Minkowski'nin Düşünceleri

Bunlardan birincisi; Einstein'ın kendisi tarafından “eylemsizliğin göreliliği”; günümüzde ise, genel olarak “Mach İlkesi” olarak adlandırılan görüşlerin [2,3], teori tarafından tatminkâr bir biçimde kapsanamadığının tespitidir. Şöyle ki; Avusturyalı fizikçi ve bilim felsefecisi Ernst Mach'a (18.-1916) göre, merkezkaç kuvvetleri, Coriolis kuvvetleri gibi eylemsizlik kuvvetlerinin kökeni, Newtonun savunduğu gibi “Mutlak uzay” (ya da mutlak hareket) değil, fakat, evrendeki madde dağılımıdır (ya da maddeye göre harekettir). Buna göre, evrende hiç bir madde dağılımı olmasaydı bu takdirde eylemsizlik olaylarından da söz edilemeyecekti. Bu görüş doğrultusunda Mach, mutlak uzayın fazladan ve gereksiz bir hipotez olduğunu ifade ederek dinamiğin mutlak hareket kavramı yerine görel hareket (maddeye göre) kavramına dayandırılması gerektiğini ileri sürmüştür. Her ne kadar Mach; Mutlak uzay ve mutlak hareket kavramına dayalı Newton Mekaniği yerine, kendi görüşlerine dayalı bir mekanik inşa etmemiş ve dahası eylemsizlik kuvvetleriyle evrendeki uzak maddeler arasındaki esrarengiz etkileşmenin mahiyetini belirtmemiş olsa da, eylemsizlik olaylarının kökenine Mutlak uzay gibi tanımı gereği hiçbir şekilde gözlenemez metafiziksel bir varlık yerine evrendeki cisimler gibi gözlenebilir fiziksel bir köken atfeden bu görüşleri, “etkiyen, fakat üzerine etkinemez” mahiyetteki böyle varlığın fizikte yeri olamayacağını söyleyen Einstein tarafından da benimsenmiş ve GRT 'nin ileri sürülmesinde kılavuzlayıcı (heuristic) bir rol oynamıştır. Bununla beraber, Einstein'ın 1905'de ileri sürmüş olduğu ÖRT, aslında, Mutlak uzay kavramını hiçbir şekilde reddetmemektedir. Teori, sadece ve sadece, düzgün doğrusal harekette bulunan eylemsizlik sistemleri arasındaki geçişin; ister mekanik, ister elektrodinamik olsun, tüm fizik kanunlarının invaryantlığı (değişmezliği) için, artık Galile dönüşümleriyle değil de bundan böyle Lorentz dönüşümüyle olması gerektiğini ileri sürmektedir. Ve bu teorinin temelinde olan eylemsizlik sistemleri, “mutlak uzaya göre duran ya da düzgün doğrusal harekette bulunan sistemler” şeklindeki tanımını hâlâ koruyadurmaktadırlar. Öte yandan, ÖRT'nin Newton'un Mutlak uzay kavramını yakından uzaktan dışlamadığını bir de şöyle söyleyebiliriz; çok iyi bilindiği üzere, ÖRT'nin ortaya çıkışının hemen sonrasında (bir-iki yıl içinde) Minkowski, teoriyi; biri zaman, diğer üçü de uzay koordinatları olmak üzere toplamda dört koordinatlı noktaların (ki artık bunlara “olay” demiştir) kümesinin oluşturduğu ve uzay-

zaman adını verdiği bir 4-boyutlu geometri çerçevesinde ele alıp yorumlamıştır. Bu geometriyi tanımlayan ve iki olay arasındaki uzay-zaman aralığı anlamını taşıyan Temel birinci formun (metriğin) ifadesi, kartezyen koordinatlarda

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3)$$

biçimindedir. Aynı zamanda bu da Öklidimsi düz bir geometriyi temsil etmektedir. $g_{ab} \equiv \eta_{ab} = \text{köş} (-1, +1, +1, +1) = \text{sabit}$ metrik katsayıları, madde ya da herhangi bir şeye bağlı olmaksızın bir kereye mahsus peşinen verilmiş olduğundan tüm kinetik ve geometrik özelliklerin (uzunluk, açı, vb...) belirleyicisi rolünü oynamaktadır. İşte, Minkowski metriği denilen bu (2.3) ifadesi, mutlak uzay-zaman adlandırılması farkıyla Newtonsal Mutlak uzayın ÖRT'deki eşdeğer karşılığı olmaktadır. Nitekim bir eylemsizlik sisteminden ivmeli ya da dönen bir referans sistemine geçildiğinde, tıpkı Newton'un II. hareket kanununun invariant kalmayıp da ortaya eylemsizlik kuvvetlerinin çıkıyor olması gibi, (2.3) metriğinin katsayıları da invariant kalmayıp hareketli sistemin hız ve ivmesini içeren fonksiyonlara dönüşmekte ve dolayısıyla bunlar, (2.3) metriklı mutlak uzay-zamana göre bir hareketinin belirleyicisi olma durumuna gelmektedirler [2]. Sonuç olarak; Newton'un Mutlak uzay kavramına yöneltilebilecek tüm eleştiriler aynı şekilde ÖRT'nin mutlak uzay-zaman kavramı için de geçerliliğini korumaktadır [2,3]. Şimdi, Einstein'a geri dönelim. Ancak, tamamlılık amacıyla şunu da belirtmeden geçmeyelim; Minkowski'nin ÖRT'yi 4-boyutlu bir uzay-zaman geometrisi bünyesinde yorumlama, yani başka bir deyişle, ÖRT'yi geometrileştirme yaklaşımına Einstein, başlangıçta, ÖRT'nin kavramsal basitliğini karmaşıktırdığı gerekçesiyle itirazda bulunmuşsa da, çok geçmeden bu yaklaşımın yerinde ve verimli olabileceğini idrak etmiştir. Minkowski'nin bu katkısı, GRT'nin ortaya çıkış sürecinde önemli bir rol oynamış ve Einstein'a, ÖRT'yi ivmeli ve dönen sistemlere genelleştirmek yolunda isabetli bir hareket noktası oluşturmuştur. Einstein, (2.1) metriğini, (2.3) ün genel eğrisel koordinatlara (referans sistemlerine) genelleştirilmesi olarak almış ve buradaki $g_{ab}(x^c)$ metrik fonksiyonlarına taşınan hız, ivme gibi referans sisteminin kinematik özelliklerine bağlı geometrik kökenli terimleri, sanal bir kütleçekim alanı gibi yorumlamıştır. Eylemsizlik kütlesi ile kütleçekimsel kütlenin birbirlerine eşit olduğu varsayımına dayalı olarak eylemsizlik kuvvetlerinin yerel olarak sanal bir kütleçekim kuvveti gibi yorumlanabilmesi, Einstein tarafından "zayıf eşdeğerlik ilkesi" olarak adlandırılmıştır. Bu suretle Einstein, eylemsizlik kuvvetlerine, Mach'ın düşünceleri doğrultusunda, gözlenebilir büyüklüklerden kaynaklı kütleçekimsel bir köken atfetmektedir. Mach'ın cisimlerin

eylemsizliği konusundaki düşüncelerinden çok etkilenmiş olduğunu çeşitli vesilelerle ifade eden Einstein, teorisini tamamladığında Mach'ın düşüncelerinin ne ölçüde kapsandığına bakmış ve Mach'ın görüşlerine uygun birtakım sonuçlar elde etmiştir. Ancak, alan denklemlerine ilk bakışta Mach İlkesiyle uyuşmayan bir tutarsızlık derhal göze çarpmaktadır. Şöyle ki; $T_{ab} \equiv 0$ olduğunda, yani, evrende hiç bir madde bulunmasa dahi alan denklemleri, türevlerinin sıfır olmasından ötürü $g_{ab} \equiv \eta_{ab} = \text{köş}(-1, +1 +1 +1) = \text{sabit}$ metriğini çözüm addetmektedir. Bu, evren boş olsa dahi, Mach'ın düşüncelerine aykırı bir şekilde hâlâ mutlak hareket ya da mutlak uzaydan bahsedile biliniyor demektir. Einstein'ın bu olumsuzluğun üstesinden nasıl geldiği birazdan söylenecektir.

2.2. ALAN DENKLEMLERİNİN Λ KOZMOLOJİK SÂBİTİ İLE DEĞİŞİKLİĞE UĞRATILMASI

2.2.1. İlk Evren Modelleri

Einstein'ın (2.2) deki alan denklemlerini tatminkâr bulmamasının ikinci nedenini ise, denklemlerin, tasavvur ettiği evren modelinin inşasına imkân tanımaması oluşturmaktadır [3]. Einstein, teorisini ileri sürmesinin hemen akabinde, yerel ölçekteki (Güneş sisteminde) başarılarından cesaret olarak, alan denklemlerini evren gibi en geniş ölçeğe uygulayarak bir evren modeli inşa etmeyi hedeflemiştir. O tarihlerde henüz evrenin genişlediği bilinmediğinden evren hakkında yaygın inanış, “küresel” ve “kapalı” bir geometriye sahip statik bir görünüm taşıdığı yolunda idi. Hesapları basitleştirmek üzere Evrenin geniş ölçekte homojen ve uzayca eşyönlü olduğu varsayımından yola çıkarak ve madde–enerji içeriğini de boş almak yerine fiziksel bakımdan nispeten daha gerçekçi olması bakımından basınçsız maddeli bir akışkan gibi varsayarak basit bir model oluşturmayı tasarladı. Ancak, (2.2) deki denklemlerin böyle bir modele izin vermemesi üzerine, bunu sağlamak için denklemlere kozmolojik sabit adını verdiği ve genel olarak $\Lambda < 0$, $\Lambda = 0$ ve $\Lambda > 0$ olabilen bir Λ sabitiyle oluşturulmuş Λg_{ab} gibi terim eklemek gerekliliğini duydu. Bu takdirde (2.2) deki alan denklemleri bizzat Einstein tarafından

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \quad (2.4)$$

şeklinde değişikliğe uğratılmış oldu. Bu değişiklik yalnızca, hedeflenen: basınçsız madde dolu, küresel, kapalı ve de statik bir evren modeli vermekle kalmamış, fakat aynı zamanda, alan

denklemlerinin Mach ilkesiyle olan uyumsuzluğunu da (tutarsızlığını da) ortadan kaldırmıştır. Nitekim $T_{ab} \equiv 0$ alındığında (2.2) denklemlerinde $g_{ab} \equiv \eta_{ab}$ için artık $\Lambda \eta_{ab} \neq 0$ olmakta ve dolayısıyla da, mutlak uzay-zamanın boş evren için bir çözüm olması durumu bertaraf edilmektedir. Ancak, Statik Einstein Evreni olarak anılan bu modelin ileri sürülmesinden çok kısa bir süre sonrasında, 1917’de Hollandalı astronom de Sitter, Λ -lı alan denklemlerinin boş evren, yani, $T_{ab} = 0$ hali için, kabaca evrenin “yarıçapı” gözüyle bakılabilecek $a(t)$ ölçek çarpanı için $a(t) \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3} t)$ şeklinde zamana bağlı bir şekilde genişleyen (statik değil!) bir çözümünü sundu [3,4]. “Hareketsiz madde” olarak nitelendirilen Statik Einstein evrenine karşılık, de Sitter evreni olarak anılan bu model “maddesiz hareket” niteliği taşımaktaydı. Öte yandan, de Sitter evren modeli Λ -lı olmasına rağmen Mach’ın eylemsizlik görüşleriyle uyumlayan unsurlar da içeriyordu. O tarihlerde pek fazla dikkat çekmeyen Λ -lı alan denklemlerinin bu genişleyen çözümünü, 1922 de Friedmann’ın, fakat bu sefer Λ -sız alan denklemlerinin, uzayca homojen ve eşyönlü evren varsayımı altında: kapalı, açık ve düz olabilen genişleyen ya da büzülen evren modeli çözümleri izlemiştir. Statik evren modeline alternatif olan bu tip çözümlere Einstein’ın şiddetli itirazları olmuşsa da 1929’da Edwin Hubble, galaksilerin kızıla kayma gözlemlerinden hareketle, evrenimizin statik değil de genişlemekte olduğunu ortaya koyunca Einstein, dinamik evren tasvirine yönelik itirazlarını artık sürdürememiştir. Bir yandan gözlemlerin genişleyen bir evren tasvirine destek vermesi, diğer yandan da Statik Einstein evreninin madde pertürbasyonları altında kararsız olduğunun gösterilmesi ve de dahası Λ -lı denklemlerin bile Mach’a karşıt çözümler vermesi üzerine Einstein, Λ kozmolojik sabitin teoriye ithalinin gerekçelerinin artık ortadan kalktığına kani olarak bu sabitten vazgeçmiştir. Bu bağlamda, Einstein’ın ilerleyen yıllarda Λ kozmolojik sabiti için, “hayatımdaki en büyük hatam” dediği rivayet edilmektedir. Ancak, Λ kozmolojik sabitinin hikâyesi burada bitmemektedir.

2.2.2. Kozmolojik Gelişmelerde Λ nın Önemi

Einstein tarafından artık dışarılanmış olmasına rağmen Λ kozmolojik sabiti yine de kozmolojik ve astrofizik alanındaki bir takım olayların açıklanması için gerektiğinde ilk önce başvurulmuş kavram olmayı sürdürmüştür. Mesela, 60’lı yılların ortasında $z \approx 1.5-2$ kızıla kayma aralıklarında nispeten fazla sayıda galaksi ve quasar gözlenmesini açıklamak için ışığın günümüze, aynı gök cisminde birkaç görüntü oluşturacak şekilde evreni birkaç kere

turladıktan sonra ulaşmış olduğu tasarlanmış ve böyle bir durumun da ancak Λ kozmolojik sabitini işin içine sokmakla gerçekleştirilebileceği düşünülmüştür [5]. Ve bu amaçla da, Λ kozmolojik sabitinin savunucularının başında gelen ve Büyük Patlama senaryosunun öncülerinden olan George Lemaître'in Eddington-Lemaître-tipi kozmolojik modelleri kullanılmıştır. Bu modellerde, evren; genişleme sırasında, Λ nın kritik değerleri için geçici olarak bir “uyuklama” evresine girebilmekte ve bu süre içinde de ışık evreni birkaç kez turlama zamanı bulabilmektedir [5].

Λ nın kestirilen değeri yaklaşık $1.11 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ dir ve Güneş sistemimize ilişkin hesaplarda bu kadar küçük bir değerın hesaplara etkisi hemen hemen yok gibidir. Ancak, evren ölçeğinde durum tamamen farklıdır; zira Λ nın varlığı kozmolojik modellerin yapısını tamamen değiştirebilmektedir. Söz konusu durum; h Planck sabitinin, Klasik mekaniksel ile kuvantumsal ölçekteki olaylar için oynadığı rollere benzetilebilir.

Einstein'ın “en büyük hatam” dediği Λ kozmolojik sabiti; önemini ve vazgeçilmezliğini, 80'li yılların ortalarında ileri sürülen biri enflasyon (evrenin hızlı şişmesi anlamında) teorisinde, diğeri de kütleçekimi kuvantum teorisile bağdaştırmayı amaçlayan Kuvantumsal Kütleçekim (Quantum Gravity) teorisinde yer bularak göstermiştir. Enflasyon teorisini; Parçacık Fiziği ile klasik kozmolojinin birleşimi olan ve Büyük Patlama varsayımına dayalı olarak evrenin evrimini tasvir eden Standart Kozmoloji'nin: ufuk, eşyönlüleşme, uzayın düzlüğü gibi kavramsal ve de gözlemsel sorunlarına çözüm getirmek üzere ileri sürülmüş olup, günümüze kadar da çeşitli değişiklik ve iyileştirmelere konu olagelmıştır. Bu teori temel olarak, evrenin Büyük Patlamadan hemen sonra (yaklaşık 10^{-35} saniye sonra) yukarıda yazdığımız $a(t) \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3} t)$ gibi “de Sitter benzeri” bir ivmeli genişleme öngörmekte ve bunun devamında da evrenin günümüze kadar sürecek bir yavaşlayan genişleme sürecine gireceğini söylemektedir. Kuvantumsal Kütleçekim Teorisinde ise Λ ya, boşluğun (vakumun) enerjisi rolünü oynamak düşmektedir. Gerçekten de (2.4) denklemi

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir de $T_{ab} \equiv 0$ alınırsa $-\Lambda g_{ab}$ teriminin, boşluğa bağlanabilecek bir enerji-momentum tansörü rolü oynadığı görülür.

2.2.3. Karanlık Enerji ve Λ

Şimdi Λ yı günümüzde Kozmolojinin ‘yıldızı’ yapan çarpıcı gelişmeye kısaca değinelim. 2000 yılına birkaç yıl kalana kadar, yukarıda kısaca işaret ettiğimiz gibi Standart Kozmoloji çerçevesinde, evrenin, ivmeli bir genişleme (enflasyon) safhası geçirdikten sonra yavaşlayan bir genişleme sürecine girmiş olduğu ve bunun da günümüzde hâlâ sürmekte olduğu düşünülüyordu. Ancak 1998’lerde ilk sonuçları alınan yüksek kıızıla kaymalı Tip-Ia Süpernova gözlemleri [6-8] bunun böyle olmadığını, tam tersine, yaşının 13.6 milyar yıl olduğu kestirilen evrenin genişlemesinin, yaklaşık son iki milyar yılından bu yana, ivmeli bir şekilde olduğunu ortaya koymuştur. Bu kanıyı günümüze kadar çeşitli gruplarca gerçekleştirilen Tip-Ia Süpernova gözlemleri ile farklı mahiyetteki: Geniş Ölçek Yapıları, Kozmik Mikrodalga Arka Plan Eşyönsüzlükleri, Baryon Akustik Osilasyonları (dalgalanmaları), Zayıf Galaksi Merceklenmesi gibi gözlemler de dolaylı ya da dolaysız olarak desteklemektedirler [9-16]. Gözlemler, evrenin ışıklı ya da dedekte edilebilir, yani, baryonik madde-enerji içeriğinin evrende olması gereken toplam madde-enerjinin ancak % 5 i kadar olduğunu vermektedir; %27 si ise Karanlık Madde’ den oluşmaktadır. Bu, galaksilerin halosunda ya da galaksiler civarında bulunması gereken ve kütleçekim etkisi gösteren, ancak bu güne kadar hiçbir şekilde gözlenememiş ve dolayısıyla da mahiyeti bilinmeyen bir madde dağılımına verilen isimdir. Geri kalan %68 ine de Karanlık Enerji denilmektedir. Gözlenen ivmeli genişlemenin sorumlusu olan işte budur ve bunun da bilinegelen (normal, sıradan) maddeden farklı olarak aşırı negatif basınçlı bir madde olması gerekmektedir. İşte, bu özelliği gösterecek ilk akla gelen aday da yine Kozmolojik sabit olmaktadır [17,18]. Bunu aşağıda açıklayalım.

Evrenin büyük ölçeklerde uzayca homojen ve eşyönlü olduğu varsayımına dayalı Robertson-Walker (RW) metriği için GRT’nin alan denklemlerinin verdiği denklemlerden biri

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\kappa^2 c^2 (\mu + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda c^2 \quad (2.6)$$

olup bu Raychaudhuri denklemi olarak bilinir [3,4]. Burada, kozmik t zamanının fonksiyonu olan $a(t)$ ye ölçek çarpanı denir ve bu, sabit-zamanlı 3-boyutlu uzaysal kesitlerin zamana bağlı değişimlerinin bir ölçüsünü verir. μ ve p de, eğer tek tür madde söz konusuysa, o maddenin madde-enerji yoğunluğu ve eşyönlü basıncıdır. Bu ikisinin $w = \text{sabit}$ olmak üzere, hal denklemi denilen $p = w\mu$ bağıntısıyla birbirlerine bağlı oldukları varsayılacaktır. Eğer, pek

çok madde türü (baryon, soğuk karanlık madde (KM), foton, nötrino, elektron,...) söz konusu ise, μ ve p toplam yoğunluk ve basınç anlamında alınacaktır. Bu toplamlara, kozmolojik sabite

$$\mu_{\Lambda} = +\frac{\Lambda}{\kappa^2}, \quad p_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{\kappa^2} \quad \Leftrightarrow \quad p_{\Lambda} = -\mu_{\Lambda} \quad \Leftrightarrow \quad w_{\Lambda} = -1 \quad (2.7)$$

bağıntılarıyla bağlanan bir yoğunluk ile bir basınç da katılsın (son iki bağıntı hal denklemi ile hal parametresini göstermektedir). Ayrıca, şimdilik, “Karanlık Enerji” denilecek sanal bir madde türü de bulunduğu varsayalım. Bunun; yoğunluk, basınç ve hal denklemi, sırasıyla μ_{KE} , p_{KE} ve $p_{KE} = w_{KE}\mu_{KE}$ ile gösterilsin. O halde, en genişletilmiş toplamlar: $\mu^{top} = \mu + \mu_{KM} \dots + \mu_{\Lambda} + \mu_{KE}$ ve $p^{top} = p + p_{KM} \dots + p_{\Lambda} + p_{KE}$ olacaktır. Şimdi, genelliği bozmadan, baryon ve soğuk Karanlık Madde toplamını tek tür madde olarak alalım ve 'm' indisi ile bunu kast edelim, yani, $\mu_m = \mu + \mu_{KM}$ $p_m = p + p_{KM}$ olsun. Bu söylenenler ışığında (2.6) denklemi tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{6}\kappa^2 c^2 (\mu_m \dots + \mu_{\Lambda} + \mu_{KE} + 3(p_m + \dots + p_{\Lambda} + p_{KE})) \\ &= -\frac{1}{6}\kappa^2 c^2 [1 + 3(w_m + \dots - 1 + w_{KE})](\mu_m + \dots + \mu_{\Lambda} + \mu_{KE}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

olur. Şimdi, bu denklemde yer alan tüm büyüklükleri şimdiki kozmik zamanda değerlendirilmiş olarak alalım. Günümüzdeki hızlanan bir genişleme, $\ddot{a} > 0$ demek olduğundan, (2.8) den

$$1 + 3(w_m - 1 + w_{KE}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_m - 1 + w_{KE} < -\frac{1}{3} \quad (2.9)$$

kısıtlaması elde edilir (μ_m , μ_{Λ} ve μ_{KE} pozitif varsayılmıştır; dolayısıyla $\Lambda > 0$ dir). Eğer Λ alınmamış ve KE de varsayılmamış olsaydı, $w_m < -\frac{1}{3}$ olması gerekirdi ki, böyle bir hal denkleminin uyan hiçbir Standard (bilinegelen, normal, sıradan) madde türü bilinenler arasında yer almamaktadır. Bir Λ varlığı varsayımı ise, $w_m < -\frac{1}{3} + 1 = +\frac{2}{3}$ vereceğinden bir sorun yaratmamaktadır. Eğer Λ yerine KE gibi tasarımsal bir madde türü varsayılırsa, bu takdirde

$w_{KE} < -\frac{1}{3} - w_m$ olmalıdır ki, bu, söz konusu madde türünün aşırı negatif olması gerektiğinin ifadesinden başka bir şey değildir. Bu inceleme; hal parametresi -1 olan bir efektif akışkan gibi düşünülebilecek Λ kozmolojik sabiti aracılığıyla, KE gibi bir tasarımsal maddeye ihtiyaç duyulmaksızın da evrenin günümüzdeki ivmelenmesinin açıklanabileceğini göstermektedir. Ne var ki, bu yolla bir açıklama; Giriş Bölümünde söylenildiği gibi, başta ‘Hiyerarşi problemi’ olmak üzere ‘çakışma’(coincidence), Güneş sistemi testleriyle uyumsuzluk gibi sorunları da beraberinde taşımaktadır [17-19]. Yukarıdaki incelemeden çıkan bir başka sonuç ise, ek bir tasarımsal akışkan varsayımının aracılığıyla da ivmelenmenin açıklanabileceğinin mümkün olabileceğidir. Enerji-momentum tansörüne skaler alanlar ithal etmek suretiyle, efektif akışkanlar oluşturma yaklaşımına ‘quintessence’ denilmektedir; ancak, bunlar da sorunsuz değildirler [19].

2.3. ALAN DENKLEMLERİNİN EĞRİLİK İNVARİYANTLARI İLE DEĞİŞİKLİĞE UĞRATILMASI

Yukarıdaki yaklaşım, KE ye karşılık düşecek şekilde bir-madde enerji oluşturmak üzere, EAD denklemlerinin sağ yanını oluşturan enerji-momentum tansörünün içeriğinin değiştirilmesini hedef almaktadır. Lagrange’yen formülasyon diliyle söylendiğinde bu, madde-enerji-momentum tansörünü $T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{ab}}$ şeklinde tanımlayan L_m madde-enerji Lagrange yoğunluğunda, yani, madde Lagrange’yeninde amaca uygun değişiklikler yapmak demektir. Bu yaklaşımının alternatifini ise, EAD’nin sol tarafını değişikliğe uğratmak ve bunun için de

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m \quad (2.10)$$

şeklindeki EH-aksiyonunda $(\Lambda - l_I)$ R ye göre lineer olan geometrik Lagrange’yen, eğrilik invariyantlarının keyfi bir $f(R, G, R_{ab}R^{ab}, \square R, \dots)$ fonksiyonu ile değiştirmek oluşturmaktadır. Bu yolla oluşturulan değiştirilmiş Einstein teorisi $f(R, G, R_{ab}R^{ab}, \square R, \dots)$ -gravite teorileri olarak anılmaktadır [20-29]. Özel olarak, aksiyon,

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} f(R, G) + S_m \quad (2.11)$$

şeklinde seçildiğinde, buradan metriğe göre varyasyon olarak varılan alan denklemleri teorilere $f(R, G) - \text{gravite}$ denir. Yukarıda $-g > 0$ ile $d^4x\sqrt{-g}$, sırasıyla, imzası +2 olan metriğin determinanı ve 4-boyutlu uzay-zamanın invaryant hacim elemanı gösterilmektedir; S_m de, L_m madde- enerji Lagrange yoğunluğunun $S_m = \int_V d^4x\sqrt{-g}L_m$ şeklindeki aksiyonudur. (2.11)

seçimi altında, metriğe göre varyasyon olarak değişikliğe uğratılmış Einstein denklemleri, yani, $f(R, G) - \text{gravite}$ 'nin alan denklemleri

$$\begin{aligned} f_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f + \frac{1}{2} g_{ab} G f_G - \nabla_a \nabla_b f_R + g_{ab} \square f_R - 4 g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \\ - 4 G_{ab} \square f_G - 2 R \nabla_a \nabla_b f_G + 4 R_a^c \nabla_c \nabla_b f_G + 4 R_b^c \nabla_c \nabla_a f_G - 4 R_a^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (2.12)$$

şeklinde olmaktadır (Açıklamalı ve ayrıntılı hesaplama için Bkz.[1,3,30,31]). Özel olarak, $f(R) - \text{gravite}$ için indirgenmiş denklemler

$$f_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f - \nabla_a \nabla_b f_R + g_{ab} \square f_R = \kappa^2 T_{ab}^m \quad (2.13)$$

dir. Literatürde, 'değişikliğe uğratılmış' veya 'yüksek mertebeden gravitasyon teorileri' olarak anılan bu tip teoriler, özellikle de $f(R) - \text{gravite}$ daha ağırlıklı olmak üzere, son 20 yıldan bu yana çeşitli kozmolojik meseleler için yoğun bir uğraş alanı oluşturmaktadır. Çalışmaların tamamına yakınında $f - \text{gravite}$ teorileri, evrenin, büyük ölçekte uzayca homojen ve eşyönlü olduğu varsayımına dayalı Robertson-Walker (RW) metriği çerçevesinde ele alınmaktadır. RW metriği, GRT'nin ortaya çıkışından bu yana en çok kullanılan metrik olmuştur. Evrenin geometrisi için matematiksel bakımdan yapılan bu amaca yönelik (ad hoc) basitleştirici varsayım, sonuçta, alan denklemlerini t kozmik zamanına göre adi türevli ikinci mertebeden diferansiyel denklemlere indirgemekte ve basınç ile madde-enerji yoğunluğu gibi dinamik değişkenlerin de yalnızca t nin fonksiyonu olmalarına yol açmaktadır. Bu, homojenlik özelliğinin bir sonucudur. Öte yandan eşyönlülük ise, metrik ifadesinde, ölçek çarpanı denilen $a(t)$ gibi tek bir bilinmeyen fonksiyonla iş görülmesine yol açmaktadır. $f - \text{gravite}$ için de durum, GRT 'deki gibidir: şu farkla ki, alan denklemleri bu sefer dördüncü mertebeden olmaktadır. Bulgular Bölümü'nde bu alan denklemleri ağırlıklı olarak, homojen fakat uzayca eşyönsüz modeller olan ve dolayısıyla üç ölçek çarpanı barındıran Bianchi-Tip III ve Bianchi-Tip I modelleri çerçevesinde ele alınacaktır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. ÖNBİLGİLER

3.1.1. Koordinatsal Tabanda Tansörler

Einstein'ın Genel Rölativite teorisi, kütleçekimi 4-boyutlu bir uzay-zaman geometrisinde ele alır. Bu geometride, artık olay gözüyle bakılan bir noktanın koordinatları, x^0, x^1, x^2 ve x^3 yazılışıyla gösterilen 4 adet parametre ile gösterilir. Bunlardan x^0 , $x^0 = ct$ olarak zaman koordinatı; diğer x^1, x^2 ve x^3 ise uzay koordinatları olarak düşünülecektir. Bu 4 sayıya (veya fonksiyona), aynı zamanda bir koordinat sisteminin eksenlerinin adı gözüyle de bakılabilir. Diferansiyel Geometri' de bu eksenlere teğet taban vektörleri için genellikle birbirlerine eşdeğer şekilde $e_i \equiv \partial_i \equiv \partial / \partial x^i$ yazılışları kullanılır ve bunlar eksenler boyunca doğrultu türevi anlamında bir operatör olarak yorumlanırlar. Daha fazla ilerlemeden önce, şu indis kabullerini verelim: Latin ve Grek alfabelerinin ikinci yarısındaki harfler, tansörel (ya da koordinatsal) indis olarak kullanılacak olup sırasıyla şu değerleri alacaklardır: $i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3$ ve $\mu, \nu, \rho, \dots = 1, 2, 3$. Birincilere uzay-zaman; ikincilere ise, uzay indisleri adı verilir. Birazdan göreceğimiz tetrad indisleri için ise, yukarıda sözü edilen alfabelerin ilk yarısındaki harfler kullanılacaktır; buna göre: $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3$ olacaktır. Şimdi, koordinatsal tabanı $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\} \equiv \{\partial_i\}$ kümesi ile gösterelim. Bir tansör, ya da özel olarak, 1-nci mertebeden bir tansör olan bir X vektörü, bu tabanda, taban vektörlerinin lineer bir kombinasyonu olarak $X = X^i \partial_i$ şeklinde ifade edilebilir (aksi söylenmedikçe, Einstein toplam kuralı kullanılacaktır, yani, tekrarlanan indisler, o indis değerleri üzerinden toplam yapılacağına işaret edecektir). X vektörünün $\{\partial_i\}$ tabanındaki yukarıdaki gösteriminde yer alan X^i lere X vektörünün kontravaryant bileşenleri denir. X in bir başka gösterimi ise, $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$ düallite bağıntısı uyarınca tanımlanan dx^i lerden oluşturulan $\{dx^i\}$ tabanını kullanmak suretiyle $X = X_i dx^i$ şeklinde yapılabilir. Burada, X_i lere kovaryant bileşenler denir; dx^i lere ise, koordinatsal diferansiyel 1-formlar denilmekte olup, bunlar, $x^i = \text{Sabit}$ hiperyüzeylerinin gradyentleri olarak yorumlanırlar. Söz konusu iki tabandan 'oluşturulan' $\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanında (buna doğal taban da denir), p-nci mertebeden kontravaryant ve q-nuncu

mertebeden kovaryant (p+q)-nuncu merebeden karışık bir genel tansörün bileşenlerinin gösterimi $T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ şeklinde olur. Bir gösterimden diğerine geçiş ise, Temel birinci form veya uzay-zaman aralığı veyahut da metrik olarak adlandırılan

$$ds^2 = g_{ij}(x^k) dx^i dx^j \quad (3.1)$$

ifadesindeki g_{ij} metrik katsayıları ve bunun g^{ij} ($g^{ij} \equiv (g_{ij})^{-1}$) ile g^i_j gösterimleri aracılığıyla, mesela, $X^{i s \dots}_{j k l \dots} = g_{km} g_{ln} g^{ip} g^r_j X^{mns}_{pr}$ gibi olur.

3.1.2. Koordinatsal Tabanda Alan Denklemleri Hesabı İçin Gerekli Malzeme

$\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanında Einstein Alan Denklemlerinin (EAD) gösterimlerinden biri, tüm indisler kovaryant olarak

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\Lambda g_{ij} + \kappa^2 T_{ij} \quad (3.2)$$

dir. Toplamda 4x4=16 adet denklemden oluşan bu denklem sistemi; metrik tansörün, Ricci eğrilik tansörünün ve enerji-momentum tansörünün, sırasıyla, $g_{ij} = g_{ji}$, $R_{ij} = R_{ji}$, $T_{ij} = T_{ji}$ simetri özelliklerinden dolayı 10 bağımsız denklemlili bir sisteme indirgenir. GRT' de temel hesap, verilmiş bir (3.1) metriği için (3.2) yi hesaplamaktır. Bunun için izlenen standart yolun aşamalarını kısaca belirtelim. Önce,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \quad (3.3)$$

bağıntısı aracılığıyla Christoffel sembolleri hesaplanır. Bunlar 4x4x4= 64 adet olmakla birlikte, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ simetri özelliğinden dolayı ancak 40 ı bağımsızdır. İkinci adım olarak,

$$R^l_{ikj} = \partial_k \Gamma^l_{ij} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{ij} \Gamma^l_{mk} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} \quad (3.4)$$

ifadesinden Riemann eğrilik tansörü hesaplanır ve buradan da iz alarak, R_{ij} Ricci eğrilik tansörü ile R izi

$$R_{ij} = g^k{}_l R^l{}_{ikj} \equiv R^k{}_{ikj} \quad , \quad R = g^{ij} R_{ij} \equiv R^i{}_i \quad (3.5)$$

şeklinde bulunur. R_{ij} Ricci eğrilik tansörüne, istenirse, (3.4) e doğrudan doğruya $l = k$ büzme işlemini uygulayarak da elde edilebilecek

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma^k{}_{ij} - \partial_j \Gamma^k{}_{ik} + \Gamma^m{}_{ij} \Gamma^k{}_{mk} - \Gamma^m{}_{ik} \Gamma^k{}_{jm} \quad (3.6)$$

ifadesinden de varılabilir. Toplam $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ bileşene sahip $R^m{}_{jkl}$ Riemann eğrilik tansörünün, ya da bunun $R_{ijkl} = g_{im} R^m{}_{jkl}$ gösteriminin,

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \quad R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = -R_{iljk}, \quad R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} = 0 \quad (3.7)$$

simetri özellikleri nedeniyle, yalnızca 40 bağımsız bileşeni bulunmaktadır. R_{ij} Ricci eğrilik tansörünün ise $4 \times 4 = 16$ bileşeninden yalnızca 10 u, $R_{ij} = R_{ji}$ den ötürü, bağımsızdır. Yukarıdaki bilgilendirmelere ek olarak bir de, kovaryant türev ifadesinin: bir skaler fonksiyon, bir vektör ve bir 2-tansör için

$$\begin{aligned} \nabla_s \varphi &= \partial_s \varphi, \quad \nabla_s X^i = \partial_s X^i + \Gamma^i{}_{sj} X^j, \quad \nabla_s X_i = \partial_s X_i - \Gamma^j{}_{si} X_j \\ \nabla_s X^{ij} &= \partial_s X^{ij} + \Gamma^i{}_{sk} X^{kj} + \Gamma^j{}_{sk} X^{ik}, \quad \nabla_s X_{ij} = \partial_s X_{ij} - \Gamma^k{}_{si} X_{kj} - \Gamma^k{}_{sj} X_{ik} \\ \nabla_s X^i{}_j &= \partial_s X^i{}_j + \Gamma^i{}_{sk} X^k{}_j - \Gamma^k{}_{sj} X^i{}_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

olduklarını kaydedelim. Ve ayrıca da Gauss-Bonnet eğrilik invariantının

$$G = R_{ijkl} R^{ijkl} - 4R_{ij} R^{ij} + R^2 \quad (3.9)$$

şeklindeki tanımını verelim.

3.1.3. Koordinatsal Olmayan Taban: Tetrad Tabanı

$\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanı, metriğin grup simetrisi gibi özelliklerini yansıtmakta yetersiz kaldığından genel tabanlar tanımlama yoluna gidilmiştir. Bilindiği üzere, 4-boyutlu uzay-zaman için 4 adet lineer bağımsız herhangi 4 adet vektör, bir taban olarak seçilebilir. Genel ya da tetrad tabanı denilecek bu $\{e_a\}$ tabanının e_a ($a, b, \dots = 0, 1, 2, 3$) vektörleri, koordinatsal taban

vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak $e_a = e_a^i \partial_i$ şeklinde alınabilir. Burada e_a^i ‘katsayıları’, genel olarak koordinatların fonksiyonu olup e_a vektörünün i-ninci bileşenini göstermektedir. e_a ların düalleri ise $e^a(e_b) = \delta^a_b$ düallite bağıntısı aracılığıyla $e^a = e_i^a dx^i$ olarak tanımlanırlar ve $\{e^a\}$ ya, diferansiyel 1-form tabanı denir. Burada e_a^i ve e_i^a matrisleri, $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$ den ötürü $e_a^i e_j^a = \delta_j^i$ (veya $e_a^i e_i^b = \delta_b^a$) bağıntılarını sağlar, yani, $\det(e_a^i) \neq 0$ ve $\det(e_i^a) \neq 0$ olup birbirlerinin ters matrisleridir. Bir tansörün $\{\partial_i, dx^i\}$ ve $\{e_a, e^a\}$ tabanlarındaki koordinatsal ile tetrad bileşenleri arasındaki geçişler

$$X_{ab...}^{c...} = e_a^i e_b^j \dots e_k^c \dots X_{ij...}^{k...} \Leftrightarrow X_{ij...}^{k...} = e_i^a e_j^b \dots e_c^k \dots X_{ab...}^{c...} \quad (3.10)$$

uyarınca olurlar. Özel olarak, metrik tansörün tetrad bileşenleri

$$g_{ab} = e_a^i e_b^j g_{ij}, \quad g^{ab} = e_i^a e_j^b g^{ij}, \quad g_a^b = e_a^i e_j^b g_i^j \quad (3.11)$$

dir ve tetrad indislerini indirme ve kaldırmalar bu g_{ab}, g^{ab}, g_a^b aracılığıyla olur. Koordinatsal tabanda yazılmış olan (3.2) deki Einstein alan denklemleri $\{e_a, e^a\}$ tetrad tabanında

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilirler.

3.1.4. Ortonormal Tetrad Tabanında Alan Denklemleri Hesabı İçin Gerekli Malzeme

$\{e_a\}$ taban vektörlerinin birbirlerine dik alınması durumunda, metriğin tetrad bileşenlerini tanımlayan $e_a \cdot e_b = g_{ab}$ bağıntısı, $\eta_{ab} = \text{köş}(-1, +1, +1, +1)$ olmak üzere

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab} \Leftrightarrow e_0 \cdot e_0 = -1, \quad e_0 \cdot e_\beta = 0, \quad e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.13)$$

bağıntılarına indirgenir. Bu, taban 1-formları diliyle (3.1) deki uzay-zaman aralığının, Minkowski’sel

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a e^b = -(e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 \quad (3.14)$$

şeklinde alınacağı anlamına gelir. $\{e_a, e^a\}$ nın ortonormal (dik) bir çatı olarak seçimi, genel bir tetrad tabanı için yazılmış bağıntıları hatırı sayılır ölçüde sadeleştirir. Bir başka sadeleştirmeyi ise; tetrad çatısının zamansal taban vektörü e_0 ın, akışkanın 4-lü hız vektörü $\mathbf{u}$ ya paralel seçilmesi oluşturur. Bu takdirde, $\{e_a, e^a\}$ çatısına eşhareketli çatı denir. $e_0 = \mathbf{u} = \partial_t$ alınması, 4-lü hız vektörünün tetrad bileşenlerinin

$$u^a = (1, 0, 0, 0) \equiv \delta^a_0 \quad \text{ve} \quad u_a = (-1, 0, 0, 0) \equiv -\delta_a^0 \quad (3.15)$$

olması anlamına geldiğinden, buradan, birazdan değineceğimiz $h_{ab} = \eta_{ab} + u_a u_b$ ile tanımlı dik izdüşürme tansörünün tetrad bileşenlerinin

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = h^{ab} \quad (3.16)$$

şeklinde basitleşeceği kolayca görülür.

Şimdi, tetrad çatısına özgü bazı özelliklere kısaca değinelim. Koordinatsal teğet taban vektörlerinin komütatörlerinin $[\partial_i, \partial_j] \equiv \partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i = 0$ olmasına karşın, tetrad taban vektörleri için $[e_a, e_b] \equiv e_a e_b - e_b e_a = \gamma^c_{ab} e_c$ dir. $\gamma^c_{ab} = -\gamma^c_{ba}$ anti simetri özelliği taşıyan γ^c_{ab} lara komütasyon fonksiyonları denilmektedir. Söz konusu komütatör bağıntısından hareketle bunların

$$\gamma^c_{ab} = -(e_a^i e_b^j - e_b^i e_a^j) \partial_i e_j^c \quad (3.17)$$

bağıntısıyla hesaplanabileceğini görmek kolaydır. Öte yandan, koordinatsal tabandaki Christoffel sembollerinin tetrad tabanındaki karşılıkları ise, yine aynı sembol ile gösterilen, fakat $\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} = \gamma^c_{ab}$ bağıntısından dolayı artık alt indislerine göre simetrik olmayan Γ^c_{ab} büyüklükleridir. Bunlara, Ricci dönme katsayıları denilmekte olup, tetrad çatısının, özel olarak, ortonormal olması halinde,

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} (\gamma^c_{ab} - \eta^{cd} \eta_{af} \gamma^f_{bd} - \eta^{cd} \eta_{bf} \gamma^f_{ad}) \quad (3.18)$$

ifadesiyle verilirler. (3.4-3.6) ve (3.9) daki: Riemann ve Ricci eğrilik tansörleriyle Ricci skaleri ve Gauss-Bonnet terimi için ortonormal tetrad çatısındaki ifadeler ise, sırasıyla

$$R^a_{bcd} = e_c \Gamma^a_{bd} - e_d \Gamma^a_{cb} + \Gamma^e_{db} \Gamma^a_{ce} - \Gamma^e_{cb} \Gamma^a_{de} - \gamma^e_{cd} \Gamma^a_{eb} \quad (3.19)$$

$$R_{ab} = e_c \Gamma^c_{ab} - e_b \Gamma^c_{ca} + \Gamma^d_{ba} \Gamma^c_{cd} - \Gamma^d_{cb} \Gamma^c_{da} \quad (3.20)$$

$$R = \eta^{ab} R_{ab} \quad , \quad G = R_{abcd} R^{abcd} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2 \quad (3.21)$$

dir ve Riemann tansörü için (3.7) de verilen simetri özellikleri tetrad bileşenleri için de geçerlidir. (3.8) deki kovaryant türevlerin tetrad karşılıkları ise, Γ lar Ricci dönme katsayıları olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla_f \varphi &= e_f \varphi, \quad \nabla_f X^a = e_f X^a + \Gamma^a_{fb} X^b, \quad \nabla_f X_a = e_f X_a - \Gamma^b_{fa} X_b \\ \nabla_f X^{ab} &= e_f X^{ab} + \Gamma^a_{fc} X^{cb} + \Gamma^b_{fc} X^{ac}, \quad \nabla_f X_{ab} = e_f X_{ab} - \Gamma^c_{fa} X_{cb} - \Gamma^c_{fb} X_{ac} \\ \nabla_f X^a_b &= e_f X^a_b + \Gamma^a_{fc} X^c_b - \Gamma^c_{fb} X^a_c \end{aligned} \quad (3.22)$$

dir. Öte yandan, aşağıda tanımlarını vereceğimiz, akışkanın: θ_{ab} genişleme tansörü, θ genişleme skaleri ve de σ_{ab} makaslama tansörünün komütasyon fonksiyonları cinsinden ifadeleri de [3,32,33] şöyle olur:

$$\theta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\gamma^\gamma_{0\alpha} + \gamma^\gamma_{0\beta}) \quad , \quad \theta = -\gamma^\gamma_{0\gamma} \quad , \quad \sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\gamma^\gamma_{0\alpha} - \gamma^\gamma_{0\beta}) + \frac{1}{3}\gamma^\lambda_{0\lambda}\delta_{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

3.1.5. Uzak-Zamanın 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemi

Bir uzay-zamanda, $\mathbf{u}$ ile gösterilecek bir ayrıcalıklı vektörün bulunması durumunda, bu uzay-zamandaki geometrik ve dinamik büyüklükler yeni bir yapı çerçevesinde ele alınabilir. Kozmoloji kapsamında, evreni dolduran madde-enerji akışkanına, ya da onunla birlikte hareket eden bir gözlemciye bağlanan 4-lü hız vektörünün böyle bir ayrıcalıklı vektör rolünü oynadığı düşünülebilir. Bu takdirde

$$u_a u^a = -1 \quad (3.24)$$

uyarınca normlanmış bu zamansal $\mathbf{u}$ vektörü aracılığıyla

$$U_{ab} = -u_a u_b \quad \text{ve} \quad h_{ab} = u_a u_b + g_{ab} \quad (3.25)$$

şeklinde ‘ izdüşüm operatörleri’ denilecek iki tansör tanımlanabilir. Birincisi, tansörleri $\mathbf{u}$ ya paralel; ikincisi ise, $\mathbf{u}$ ya dik olarak, yani, gözlemcinin $\mathbf{u}$ ya dik anlık durgunluk sistemine (3-

boyutlu uzaysal hiperyüzeyler) iz düşürür. Dik izdüşürme tansörü denilen h_{ab} , tanımından dolayı

$$h_{ab} = h_{ba}, \quad h_{ab}u^b = 0, \quad h^a_a = 3 \quad (3.26)$$

özelliklerini sağlar. Bu iki izdüşürme tansörü kullanılarak herhangi bir tansörün ya da tansörel bağıntının zamansal ve uzaysal kısımlarının tesisine 1+3 kovaryant (gözlemciden bağımsız anlamında) ayrışım yöntemi denilmektedir. Ayrıntılarına hiç girmeyip, sadece, Tez’imizde kullanacağımız akışkanın kinematik ve dinamik özelliklerine aşağıda kısaca değinelim.

Madde akışkanına bağlanan 4-lü hız vektörünün kovaryant türevinin ayrışımı

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.27)$$

şeklindedir. Burada: $\mathbf{u}$ nun zamana göre türevi olan $\dot{u}_b$ bileşenine ivme, θ_{ab} ye genişleme tansörü ve ω_{ab} ye de dönme tansörü denir. Göz önüne alacağımız modeller ivmesiz ve de dönmesiz olacağından $\dot{u}_b$ ve ω_{ab} nin üzerinde durmayalım. $\theta_{ab} = \theta_{ba}$ ve $\theta_{ab}u^a = 0$ özelliklerini sağlayan, yani, simetrik ve uzaysal olan θ_{ab} nin $\theta = \theta^a_a$ şeklinde tanımlı izine genişleme skaleri adı verilir. Bu ikisinden hareketle $\sigma_{ab} \equiv \theta_{ab} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$ şeklinde tanımlanan tansöre de makaslama tansörü denir ve bu: $\sigma_{ab}u^b = 0$ (uzaysal), $\sigma_{ab} = \sigma_{ba}$ (simetrik) ve $\sigma^a_a = 0$ (izsiz) özelliklerini sağlar. Bu tansör, hacim değişmeksizin genişlemedeki şekil deformasyonunu (mesela kürenin elipsoyide dönüşmesi gibi) tasvir eder. Bu tansöre, $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$ bağıntısı aracılığıyla makaslama skaleri denilen bir de skaler büyüklük bağlanabilmektedir.

Şimdi, ikinci bir bilgilendirme de akışkanın dinamik büyüklükleri hakkında olacaktır. $\mathbf{u}$ hızıyla hareket eden bir gözlemcinin akışkana bağlayabileceği enerji-momentum tansörünün ifadesi

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + q_a u_b + q_b u_a + \pi_{ab} \quad (3.28)$$

şeklinde olup, burada μ, p, q_a ve π_{ab} dinamik değişkenlerine, sırasıyla, madde-enerji yoğunluğu, eşyönlü basınç, ısı akısı vektörü ve eşyönsüz basınç tansörü denir. Bunlar, gözlemciye göre ölçülmüş büyüklükler olup, (3.24-3.26) bağıntıları kullanılarak kolayca tesis edileceği üzere, aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\begin{aligned}\mu &= u^a u^b T_{ab} \\ p &= \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab} \\ q_a &= -h^b_a u^c T_{bc} \\ \pi_{ab} &= T_{\langle ab \rangle} \equiv h^c_{(a} h^d_{b)} T_{cd} - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} T_{cd}\end{aligned}\tag{3.29}$$

Burada; yuvarlak parantezler, bir tansörün simetrik kısmını; açılı olanlar ise, yukarıda tanımlandığı gibi, izdüşürülmüş izsiz simetrik kısmını göstermektedir. Tanımlarından

$$q_a u^a = 0 \quad \text{ve} \quad \pi_{ab} u^b = 0 \quad (\text{yani, her ikisi de uzaysal})\tag{3.30.a}$$

$$\pi_{ab} = \pi_{ba} \quad \text{ve} \quad \pi_{\langle ab \rangle} = 0 \quad (\text{yani, simetrik ve izsiz})\tag{3.30.b}$$

oldukları anlaşılmaktadır.

Bu bağlamda şu iki noktaya dikkat çekmek yerinde olacaktır: Birincisi, (3.28) deki enerji-momentum tansörü, hiç bir şekilde akışkanın fiziği hakkında bir bilgi sunmamaktadır. Sadece dinamik değişkenler arasındaki birtakım bağıntılar verir. Bunlara hal denklemi adı verilir. Mesela, hal denklemi. $q_a = 0 = \pi_{ab}$ ise, bu taktirde (3.28),

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab}\tag{3.31}$$

ifadesine indirgenir ki, buna mükemmel (veya ideal) akışkan denir. Eşyönlü basınç ile maddde-enerji yoğunluğu arasında $p = p(\mu)$ şeklindeki bir bağıntıya ise barotropik hal denklemi ve bu bağıntının da $w = \text{Sabit}$ olmak üzere $p = w\mu$ şeklinde olanına da lineer barotropik hal denklemi denir. w nun değişim aralığı $-1 \leq w \leq +1$ dir. Kuvvetli enerji koşulu ($\mu + 3p \geq 0$) ihlal edilmeyecek şekilde w nun alacağı değerler aralığı $[-1/3; +1]$ dir. Özel olarak $w = 1$ ve $w = 1/3$ değerlerine katı akışkan ve ışıyım (rölativistik gaz veya radyasyon) akışkanı adı verilmektedir. $w = 0$ durumuna ise basınçsız akışkan (etkileşimsiz madde veya toz)

denilmektedir. $w < 0$ durumu negatif basınçlı bir akışkana; $w < -1/3$ durumu ise aşırı negatif basınçlı bir akışkana karşılık gelmektedir. Ancak, bilinen standart madde- enerji türleri arasında bu sonuncu duruma uyan bir madde türü bulunmamaktadır. Evrenin günümüzdeki güncel ivmeli genişlemesini açıklamak için varlığı varsayımsal olarak ileri sürülen böyle bir madde henüz gözlemlenmiş değildir.

İkinci nokta ise, (3.28) ve (3.29) deki T_{ab} tansörünün illa da standard maddeye ait olması gerekmemektedir. Bu, pekâlâ, kısmen ya da tamamen geometrik kökenli efektif bir enerji-momentum tansörü de olabilir. Ve bu takdirde (3.28) bağıntıları, bu efektif akışkana bağlanan efektif dinamik büyüklüklerin tanımlanmasına olanak sağlayacaktır. Nitekim $f(R,G)$ -gravite de ortaya çıkan ekstra geometrik terimler topluluğunun yorumu da bu yaklaşıma dayandırılacaktır.

3.1.6. Homojen Kozmolojik Modeller

Yerel bir $\{x^i\}$ -koordinat sisteminin $\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanında yazılmış (3.1) ifadesi, bir uzay-zaman için en genel metrik ifadesidir. Ancak, böyle genel bir metrik için Einstein alan denklemlerinden bilinmeyen bağımsız 10 adet $g_{ij}(x^k)$ metrik fonksiyonunu çözmek neredeyse olanaksızdır. Bu yüzden, eldeki problemin fiziğine ve geometrisine uygun birtakım basitleştirici varsayımlarda bulunup, hem bilinmeyen sayısını ve hem de diferansiyel denklem sisteminin karmaşıklığını azaltmak yoluna gidilmektedir. Uzakya homojen modeller, bu türden matematiksel kolaylıklar bakımından en basit modellerdir. Her ne kadar bunlar, (3.1) ile tasvir edilen en genel uzay-zamanların çok özel bir sınıfını oluşturmaktaysalar da, kozmolojideki uygulamalar bakımından yeterince kapsamlı modellerdir. Bu Tez’de, $f(R,G)$ -gravite teorisinin kozmolojisi için, homojen modeller arasından, yalnızca Robertson-Walker (RW), Bianchi-Tip I ve Bianchi-Tip III metrikleri konu edilecektir.

3.1.6.1. Uzakya Homojen ve Eşyönlü Model: RW-Metriği

Kozmoloji kapsamında en iyi bilinen ve en çok kullanılan örnek, evrenin geniş ölçeklerdeki geometrisi hakkında yapılan ‘uzakya homojen ve eşyönlü olduğu’ varsayımdır. Bu takdirde (3.1) metriği yerel bir (t, r, θ, ϕ) koordinat sisteminde

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[dr^2 + f_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (3.32)$$

şekline indirgenmiş olur. Buna Robertson-Walker (RW) metriği denir. RW metriğinin en az dört farklı yazılışından biri olan bu ‘trigonometrik’ gösterimde $a(t)$ ye ölçek çarpanı denir ve bu, sabit-zamanlı 3-boyutlu uzaysal kesitlerin zamana bağlı değişimlerinin bir ölçüsünü verir. Söz konusu 3-uzayların topolojisi ise, bunların sabit eğrilikli olduğunu ifade eden ve uzaysal eğrilik indeksi denilen boyutsuz bir k parametresiyle tasvir edilir. Buna göre, $k = -1$, $k = 0$ ve $k = +1$ için 3-boyutlu uzayın geometrisinin: açık (hiperbolik), düz (Öklidsel) ve kapalı (eliptik) olduğu söylenir. $f_k(r)$ fonksiyonu ise

$$f_k(r) = \begin{cases} \sin r & k = +1 \text{ için} \\ r & k = 0 \text{ için} \\ \sinh r & k = -1 \text{ için} \end{cases} \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Hemen anlaşılacağı üzere, bu metrikte $a(t)$ gibi tek bir bilinmeyen metrik fonksiyon bulunmaktadır. Bunun, r, θ ve ϕ ye değil de yalnızca t ye bağlı olması homojenliği; her üç r, θ ve ϕ -doğrultuları için ortak olması da eşyönlülüğü ifade etmektedir. Söz konusu varsayımın sonucunda, GRT’nin (3.2) deki alan denklemleri, yalnızca t nin fonksiyonu olan dinamik büyüklüklerle birlikte, t ye göre adi türevli iki bağımsız denkleme indirgenmiş olmaktadır. (3.2) metriğinin bir ön çözüm (anzats) olarak kullanımı GRT’nin ortaya çıkış yıllarına kadar uzanmaktadır. Ancak, uzayca homojenlik ve eşyönlülük varsayımı altında elde edilebilecek yegâne metrik şeklinin bu olduğu çok daha sonraki yıllarda (1933’de) Robertson ve Walker tarafından, Grup Teorisi kullanılarak matematiksel bir kesinlikle gösterilmiştir. Grup Teorisi diliyle bu metrik, 6-parametrelili G_6 eşölçüm (izometri) simetri grubu altında invariant kalan maksimum simetrik bir uzay-zamanı temsil etmektedir.

3.1.6.2. Uzayca Homojen ve Eşyönsüz Modeller: Bianchi-Tip Metrikler

Uzayca homojen modeller, Grup Teorisi diliyle söylenildiğinde, r -parametrelili sürekli bir G_r ($r \geq 3$) hareket grubu (izometri, eşölçüm) altında invariant kalan uzay cinsinden hiperyüzeylere sahip modellerdir (geniş bilgi için bkz.[3,32,33]). Homojen ve eşyönlü olan RW metriği, 6-parametrelili G_6 eşölçüm (izometri) grubu altında invariant kalan maksimum simetrik bir uzay-zamanı temsil etmektedir. Eğer söz konusu varsayım; homojen olma koşulu

tutulup da eşyönlülük varsayımı terk edilerek gevşetirse, bu takdirde uzayca homojen, fakat eşyönsüz modeller elde edilir. Bu özellikteki 3-uzaylar 1898'de Bianchi tarafından incelenmiş ve Bianchi-Tip I...IX şeklinde 9 tip olarak sınıflandırılmıştır. Bunların metrikleri, uzaysal 3-uzaylara basitçe transitif olarak etkiyen 3-parametrelili bir $G_3(r=3)$, eşölçüm grubu altında, invariant kalmaktadır. Uzayca homojen olup da Bianchi-Tip modeller sınıfına ait olmayan tek bir model daha bulunmaktadır; o da, Kantowski-Sachs modeli denilen modeldir. Bu da, basitçe transitif alt-grubu olmayan bir G_4 simetri grubu altında invariant kalan bir metriği tasvir eder. Uzayca homojen modeller, metrik yapısı bakımından, $\{E^\alpha\}$ zamandan bağımsız 3 adet 1-form dan oluşan taban (triad) olmak üzere

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \Gamma_{\alpha\beta}(t) E^\alpha E^\beta \quad (3.34)$$

biçimindedirler (indis kabulünün §3.1.1. de söylenildiği gibi: $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3$ ve $\mu, \nu, \rho, \dots = 1, 2, 3$ olduğunu hatırlatalım). Burada E^α lar, $\{\partial_i, dx^i\}$ tabanı cinsinden

$$E^\alpha = E^\alpha_i(x^\nu) dx^i \quad (3.35)$$

biçiminde tanımlanmışlardır. Bunların düalleri ise

$$E^\alpha(E_\beta) = \delta^\alpha_\beta \quad (E_i^\alpha E_\beta^i = \delta_\beta^\alpha, \quad E_i^\alpha E_\alpha^j = \delta_i^j) \quad (3.36)$$

olmak üzere

$$E_\alpha = E_\alpha^i(x^\nu) \partial_i \quad (3.37)$$

dir. (3.34) ifadesinde $\Gamma_{\alpha\beta}(t) = \Gamma_{\beta\alpha}(t)$ matrisi yalnızca zamanın fonksiyonudur ve simetriden dolayı en fazla 6 bileşene sahiptir. Ancak, biz bu matrisi, $A(t)$, $B(t)$ ve $C(t)$ ölçek çarpanları olmak üzere, Literatürde çok sıklıkla kullanıldığı gibi,

$$\Gamma_{\alpha\beta}(t) = \begin{pmatrix} A^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & B^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & C^2(t) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

biçiminde köşegensel alacağız. Bu takdirde, (3.34) metriği

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + A^2(t)(E^1)^2 + B^2(t)(E^2)^2 + C^2(t)(E^3)^2 \quad (3.39)$$

biçiminde ifade edilir. Böyle metrikli modellere dönmesiz ortogonal modeller denir. İki ölçek çarpanının birbirlerine eşit olması durumu da Yerel Dönmesel Simetrik (YDS) olarak anılmaktadır. Ölçek çarpanlarından ikisinin orantılı olması durumuna ise ‘hemen hemen Yerel Dönmesel Simetrik’ denilecektir.

Bianchi-Tip I için zamandan bağımsız invaryant taban 1-formları: $E^1 = dx$, $E^2 = dy$, $E^3 = dz$ ve Bianchi-Tip III için de: $E^1 = dx$, $E^2 = e^{-\lambda z} dy$, $E^3 = dz$ şeklinde seçilirse, $x \equiv x^1$, $y \equiv x^2$, $z \equiv x^3$ koordinatlarında metriklerin gösterimleri, sırasıyla,

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)dy^2 + C^2(t)dz^2 \quad (3.40)$$

ve

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)e^{-2\lambda z}dy^2 + C^2(t)dz^2 \quad (3.41)$$

olur. Burada λ , $\lambda \neq 0$ olan reel bir parametredir. $\lambda = 0$ için (3.41) in (3.40) a indirgendiği göze çarpmaktadır. Ancak, bu durum, hiçbir şekilde Bianchi-Tip I modelinin Bianchi-Tip III modelinin bir özel hali olduğu anlamı taşımamaktadır; zira λ parametresi için $\lambda \neq 0$ den $\lambda = 0$ durumuna geçiş, aynı zamanda uzay-zamanın topolojisini de değiştirmektedir. Bu bağlamda, (3.41) metriğinde $\lambda = 0$ ve $A(t) = B(t) = C(t)$ seçiminin de uzayca düz RW modelini verdiğini; fakat bunun, söz konusu modelin Bianchi-Tip III sınıfına ait olduğu anlamına gelmediğini vurgulayalım.

Şimdi; (3.33), (3.40) ve (3.41) metrikleri için, alan denklemlerinin hesabında gerekecek: ortonormal taban ((3.13),(3.14) ve düalete bağıntısından), komütasyon fonksiyonları ((3.17) den) ile Ricci dönme katsayıları ((3.18) den), genişleme ile makaslama tansörleri ve skalerleri ((3.23) den, Riemann ile Ricci tansörleri ((3.19) ile (3.20) den) ile Einstein tansörü ((3.12) den) ve nihayet, Ricci skaleri ile Gauss-Bonnet terimi ((3.21) den) gibi kinematik ve geometrik büyüklüklerin ifadelerini verelim. Bunlar aşağıda Bianchi-Tip III metriği için gösterilmiştir. RW ve Bianchi-Tip I metrikleri için olanlar ise sırasıyla Ek A ve Ek B de yer almaktadır.

BIANCHI-TİP III: $ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)e^{-2\lambda z}dy^2 + C^2(t)dz^2$

- Ortonormal tetrad $\{e_a, e^a\}$ tabanı:

$$\begin{aligned} e^0 &= dt \\ e^1 &= A(t)dx \\ e^2 &= B(t)e^{-\lambda z}dy \\ e^3 &= C(t)dz \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad e_i^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B(t)e^{-\lambda z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(t) \end{pmatrix} \quad (3.42.a)$$

$$\begin{aligned} e_0 &= \partial_t \\ e_1 &= \frac{1}{A(t)}\partial_x \\ e_2 &= \frac{e^{\lambda z}}{B(t)}\partial_y \\ e_3 &= \frac{1}{C(t)}\partial_z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad e_a^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{\lambda z}}{B(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C(t)} \end{pmatrix} \quad (3.42.b)$$

- Komütasyon fonksiyonları ve Ricci dönme katsayıları ((3.17) ve (3.18) den):

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{ab}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 \\ \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_{ab}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\dot{B}}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{B}}{B} & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{C} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{C} & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{ab}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{C}}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{C}}{C} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.43.a)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{B}}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{C}}{C} \end{pmatrix} & \Gamma^1_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Gamma^2_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{B}}{B} & 0 & 0 & \frac{-\lambda}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma^3_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{C} & 0 \\ \frac{\dot{C}}{C} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.43.b}$$

- **Genişleme Tansörü, genişleme skaleri ve makaslama tansörü:**

$$\theta_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{B}}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{C}}{C} \end{pmatrix} \quad \sigma_{ab} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{C}}{C} \end{pmatrix} \tag{3.44.a}$$

$$\theta = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \tag{3.44.b}$$

$$\theta^2 = \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{C}^2}{C^2} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + 2\frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \tag{3.44.c}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{C}^2}{C^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA}\right) \tag{3.44.d}$$

- **Riemann ve Ricci eğrilik tansörleri, Ricci eğrilik skaleri, Gauss-Bonnet terimi**
(Sıfırdan farklı bileşenler yazılmıştır):

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= R_{1010} = -R_{0110} = -R_{1001} = -\frac{\ddot{A}}{A} \\
R_{0202} &= R_{2020} = -R_{0220} = -R_{2002} = -\frac{\ddot{B}}{B} \\
R_{0303} &= R_{3030} = -R_{0330} = -R_{3003} = -\frac{\ddot{C}}{C} \\
R_{0223} &= R_{2032} = -R_{0232} = -R_{2023} = -\frac{\lambda}{C} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right)
\end{aligned} \tag{3.45.a}$$

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112} = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \\
R_{1313} &= R_{3131} = -R_{1331} = -R_{3113} = \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \\
R_{2323} &= R_{3232} = -R_{2332} = -R_{3223} = \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \\
R_{00} &= -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \\
R_{11} &= \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} \\
R_{22} &= \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}\dot{A}}{BA} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \\
R_{33} &= \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} + \frac{\dot{C}\dot{B}}{CB} - \frac{\lambda^2}{C^2} \\
R_{03} &= \frac{\lambda}{C} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} - \frac{\lambda^2}{C^2} \\
G_{11} &= -\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\lambda^2}{C^2} \\
G_{22} &= -\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \\
G_{33} &= -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \\
G_{03} &= \frac{\lambda}{C} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right)
\end{aligned} \tag{3.45.b}$$

$$R = 2 \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \tag{3.45.c}$$

$$G = 8 \left(\frac{\ddot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} + \frac{\ddot{B}\dot{C}\dot{A}}{BCA} + \frac{\ddot{C}\dot{A}\dot{B}}{CAB} - \frac{\ddot{A}}{A} \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \tag{3.45.d}$$

3.2. $f(R,G)$ -GRAVİTE ALAN DENKLEMLERİNİ HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

3.2.1. Efektif Enerji-Momentum Tansörleri

Şimdi, (2.12) de yazılmış $f(R,G)$ -gravite'nin alan denklemlerini aşağıda tekrar yazalım:

$$\begin{aligned}
& f_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f + \frac{1}{2} g_{ab} G f_G - \nabla_a \nabla_b f_R + g_{ab} \square f_R - 4 g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \\
& - 4 G_{ab} \square f_G - 2 R \nabla_a \nabla_b f_G + 4 R_a^c \nabla_c \nabla_b f_G + 4 R_b^c \nabla_c \nabla_a f_G - 4 R_a^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G = \kappa^2 T_{ab}^m
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Bunun izinin, $f(R, G)$ fonksiyonunu verecek şekilde düzenlenmiş ifadesinin

$$f = \frac{1}{2} (-\kappa^2 T^m + R f_R + 2 G f_G + 3 \square f_R + 2 R \square f_G - 4 R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G) \tag{3.47}$$

olduğunu kaydedelim. Bu ifadelerde, T_{ab}^m , evreni dolduran standard madde-enerji akışkanına bağlanan enerji-momentum tansörüdür ve (3.28) deki format gibi, 4-lü hız vektörüne göre ölçülmüş akışkanın dinamik büyüklüklerinden oluşmuştur. Standard madde-enerji olduğunu vurgulamak için (3.28) i, “ m ” üst-indisi kullanarak

$$T_{ab}^m = \mu^m u_a u_b + p^m h_{ab} + q_a^m u_b + q_b^m u_a + \pi_{ab}^m \tag{3.48}$$

şeklinde yazalım. Eşhareketli bir ortonormal çatıda; (3.15), (3.16), (3. 24), (3.26) ve (3.30) bağıntılarını kullanarak ve $q_0^m = 0$, $\pi_{a0}^m = \pi_{0a}^m = 0$, $\pi_{\alpha\beta}^m = \pi_{\beta\alpha}^m$, $\pi_{11}^m + \pi_{22}^m + \pi_{33}^m = 0$ olduğuna da dikkat ederek, bunun ve $T^m = \eta^{ab} T_{ab}^m$ ile tanımlı izinin

$$T_{ab}^m = \begin{pmatrix} \mu^m & -q_1^m & -q_2^m & -q_3^m \\ -q_1^m & p^m + \pi_{11}^m & \pi_{12}^m & \pi_{13}^m \\ -q_2^m & \pi_{21}^m & p^m + \pi_{22}^m & \pi_{23}^m \\ -q_3^m & \pi_{31}^m & \pi_{32}^m & p^m + \pi_{33}^m \end{pmatrix}, \quad T^m = -\mu^m + 3p^m \tag{3.49}$$

şekline indirgeneceğini görmek kolaydır. Mükemmel akışkan için ise bu, daha da sadeleşerek

$$T_{ab}^m = \begin{pmatrix} \mu^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^m \end{pmatrix}, \quad T^m = -\mu^m + 3p^m \tag{3.50}$$

olur. Verilmiş bir metrik alan denklemlerinin hesaplanma yöntemlerini aşağıda sunuyoruz.

(3.46) y1, Einstein tansörünü ortaya çıkaracak şekilde düzenleyelim: bunu,

$$G_{ab} = \kappa^2 \left\{ \frac{T_{ab}^m}{f_R} + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2} g_{ab} (f - Rf_R - Gf_G) + \nabla_a \nabla_b f_R - g_{ab} \square f_R \\ &+ 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + 4G_{ab} \square f_G + 2R \nabla_a \nabla_b f_G \\ &- 4R_a^c \nabla_c \nabla_b f_G - 4R_b^c \nabla_c \nabla_a f_G + 4R_a^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \end{aligned} \right] \right\} \quad (3.51)$$

şeklinde yazıp,

$$T_{ab}^{m.ef} \equiv \frac{T_{ab}^m}{f_R} \quad (3.52)$$

ve

$$T_{ab}^{RG} \equiv \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2} g_{ab} (f - Rf_R - Gf_G) + \nabla_a \nabla_b f_R - g_{ab} \square f_R \\ &+ 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + 4G_{ab} \square f_G + 2R \nabla_a \nabla_b f_G \\ &- 4R_a^c \nabla_c \nabla_b f_G - 4R_b^c \nabla_c \nabla_a f_G + 4R_a^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \end{aligned} \right] \quad (3.53)$$

ile de iki efektif enerji-momentum tansörü tanımlarsak ve ayrıca da bunların toplamını

$$T_{ab}^{t.ef} \equiv T_{ab}^{m.ef} + T_{ab}^{RG} \quad (3.54)$$

ile gösterirsek, sonuçta

$$G_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^{t.ef} \quad (3.55)$$

elde edilmiş olur. (3.52) ile tanımlanan $T_{ab}^{m.ef}$ ye efektif madde-enerji-momentum tansörü denir. Tamamen geometrik terimlerden oluşan T_{ab}^{RG} ise, efektif bir akışkanın enerji-momentum tansörüne karşılık gelmektedir. Toplam efektif enerji-momentum tansörü olan $T_{ab}^{t.ef}$ de, bu ikisinin toplamı olup, standard madde ile geometrinin bir çeşit etkileşiminin ifadesini yansıtmaktadır. Öte yandan, söz konusu 4-tip enerji-momentum tansörünün

$$\nabla^a G_{ab} \equiv 0 \Rightarrow \nabla^a T_{ab}^{t.ef} = 0, \quad \nabla^a T_{ab}^{m.ef} = 0, \quad \nabla^a T_{ab}^{RG} = 0, \quad \nabla^a T_{ab}^m = 0 \quad (3.56)$$

korunum kanunlarına uydukları da gösterilebilir[3,30,31]. Alan denklemlerinin yukarıdaki ele alınış tarzına efektif akışkan yaklaşımı denir.

Şimdi; standard maddenin enerji-momentum tansörünün (3.49) daki genel ifadesini alarak ve $g_{ab} = \eta_{ab}$ ortonormallik koşulunu da göz önünde bulundurarak, (3.55) deki efektif Einstein denklemlerini bileşenleri cinsinden açıkça yazalım. Bunu en azından iki türlü yapmak mümkün görünmektedir.

3.2.2. Alan Denklemleri Bileşenlerinin Doğrudan Doğruya Yazılması (Birinci Yöntem)

Şimdi; standard maddenin enerji-momentum tansörünün (3.49) daki genel ifadesini alarak ve (3.52 – 3.54) bağıntılarını da dikkate alarak, $g_{ab} = \eta_{ab}$ ortonormallik koşulu altında, (3.55) deki efektif Einstein denklemlerini, bileşenleri cinsinden açıkça yazalım.

$$G_{00} \equiv R_{00} + \frac{1}{2}R = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{2}(f - Rf_R - Gf_G) + \nabla_0 \nabla_0 f_R + \square f_R \\ &-4R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + 4G_{00} \square f_G + 2R \nabla_0 \nabla_0 f_G \\ &-8R_0^c \nabla_c \nabla_0 f_G + 4R_0^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \end{aligned} \right] \quad (3.57.a)$$

$$G_{11} \equiv R_{11} - \frac{1}{2}R = \kappa^2 \frac{p^m + \pi_{11}^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2}(f - Rf_R - Gf_G) + \nabla_1 \nabla_1 f_R - \square f_R \\ &+4R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + 4G_{11} \square f_G + 2R \nabla_1 \nabla_1 f_G \\ &-8R_1^c \nabla_c \nabla_1 f_G + 4R_1^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \end{aligned} \right] \quad (3.57.b)$$

$$G_{22} \equiv R_{22} - \frac{1}{2}R = \kappa^2 \frac{p^m + \pi_{22}^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2}(f - Rf_R - Gf_G) + \nabla_2 \nabla_2 f_R - \square f_R \\ &+4R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + 4G_{22} \square f_G + 2R \nabla_2 \nabla_2 f_G \\ &-8R_2^c \nabla_c \nabla_2 f_G + 4R_2^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \end{aligned} \right] \quad (3.57.c)$$

$$G_{33} \equiv R_{33} - \frac{1}{2}R = \kappa^2 \frac{p^m + \pi_{33}^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2}(f - Rf_R - Gf_G) + \nabla_3 \nabla_3 f_R - \square f_R \\ &+4R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + 4G_{33} \square f_G + 2R \nabla_3 \nabla_3 f_G \\ &-8R_3^c \nabla_c \nabla_3 f_G + 4R_3^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \end{aligned} \right] \quad (3.57.d)$$

$$G_{10} \equiv R_{10} = \kappa^2 \frac{-q_1^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[\begin{aligned} &+\nabla_1 \nabla_0 f_R + 4G_{10} \square f_G + 2R \nabla_1 \nabla_0 f_G \\ &-4R_1^c \nabla_c \nabla_0 f_G - 4R_0^c \nabla_c \nabla_1 f_G + 4R_1^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \end{aligned} \right] \quad (3.57.e)$$

$$G_{20} \equiv R_{20} = \kappa^2 \frac{-q_2^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[+\nabla_2 \nabla_0 f_{RR} + 4G_{20} \square f_G + 2R \nabla_2 \nabla_0 f_G \right. \\ \left. - 4R_2^c \nabla_c \nabla_0 f_G - 4R_0^c \nabla_c \nabla_2 f_G + 4R_2^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \right] \quad (3.57.f)$$

$$G_{30} \equiv R_{30} = \kappa^2 \frac{-q_3^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[+\nabla_3 \nabla_0 f_{RR} + 4G_{30} \square f_G + 2R \nabla_3 \nabla_0 f_G \right. \\ \left. - 4R_3^c \nabla_c \nabla_0 f_G - 4R_0^c \nabla_c \nabla_3 f_G + 4R_3^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \right] \quad (3.57.g)$$

$$G_{12} \equiv R_{12} = \kappa^2 \frac{\pi_{12}^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[+\nabla_1 \nabla_2 f_R + 4G_{12} \square f_G + 2R \nabla_1 \nabla_2 f_G \right. \\ \left. - 4R_1^c \nabla_c \nabla_2 f_G - 4R_2^c \nabla_c \nabla_1 f_G + 4R_1^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \right] \quad (3.57.h)$$

$$G_{23} \equiv R_{23} = \kappa^2 \frac{\pi_{23}^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[+\nabla_2 \nabla_3 f_R + 4G_{23} \square f_G + 2R \nabla_2 \nabla_3 f_G \right. \\ \left. - 4R_2^c \nabla_c \nabla_3 f_G - 4R_3^c \nabla_c \nabla_2 f_G + 4R_2^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \right] \quad (3.57.k)$$

$$G_{32} \equiv R_{32} = \kappa^2 \frac{\pi_{32}^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left[+\nabla_3 \nabla_2 f_R + 4G_{32} \square f_G + 2R \nabla_3 \nabla_2 f_G \right. \\ \left. - 4R_3^c \nabla_c \nabla_2 f_G - 4R_2^c \nabla_c \nabla_3 f_G + 4R_3^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \right] \quad (3.57.l)$$

3.2.3. 1+3 Kovaryant Ayrışım Uygulamak (İkinci Yöntem)

Yukarıdaki amaç için bir diğer yöntem ise, alan denklemlerinin eşhareketli ortonormal tetrad çatısında 1+3 ayrışımını yapmaktır. Bu yöntem; (3.55) denkleminin her iki yanını, sırasıyla,

herhangi bir T_{ab} tansörü için geçerli olan (3.29) bağıntılarında yer alan: $u^a u^b$, $\frac{1}{3} h^{ab}$, $-h_a^b u^c$

ve $h^c_{(a} h^d_{b)} T_{cd} - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd}$ operatörleriyle çarpmaya dayanır. u^a ve h_{ab} nin, eşhareketli

ortonormal tetrad çatısını tanımlayan, sırasıyla, (3.15) ve (3.16) bağıntıları kullanıldığında, mesela,

$$u^a u^b G_{ab} = u^a u^b \kappa^2 T_{ab}^{t.ef} \Rightarrow u^0 u^0 G_{00} = \kappa^2 u^a u^b T_{ab}^{t.ef} \Rightarrow G_{00} = \kappa^2 \mu^{t.ef}$$

elde edilir. Burada: $\mu^{t.ef}$, efektif toplam madde-enerji yoğunluğu olup, (3.29) daki ilk bağıntı ile tanımlanmıştır. $\mu^{t.ef}$ nin; enerji momentum tansörlerinin bileşenleri cinsinden ve bunların da, (3.57.a) göz önüne alındığında, açılımları cinsinden

$$\begin{aligned}
\mu^{t.ef} &= T_{00}^{t.ef} = T_{00}^{m.ef} + T_{00}^{RG} \\
&= \frac{\mu^m}{f_R} + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[-\frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) + \nabla_0 \nabla_0 f_R + \square f_R - 4R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \right. \\
&\quad \left. + 4G_{00} \square f_G + 2R \nabla_0 \nabla_0 f_G - 8R_0^c \nabla_c \nabla_0 f_G + 4R_0^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \right] \\
&= \frac{\mu^m}{f_R} + \mu^{RG}
\end{aligned}$$

olarak verildiği kolayca anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, (3.55) denkleminin her iki yanının

$\frac{1}{3} h^{ab}$ ile çarpımı da

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} h^{ab} G_{ab} &= \kappa^2 \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^{t.ef} \Rightarrow \frac{1}{3} (h^{11} G_{11} + h^{22} G_{22} + h^{33} G_{33}) = \kappa^2 p^{t.ef} \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} (G_{11} + G_{22} + G_{33}) = \kappa^2 p^{t.ef}
\end{aligned}$$

verir. Burada: $p^{t.ef}$, efektif toplam basınç olup, (3.29) daki ikinci bağıntı ile tanımlanmıştır.

$p^{t.ef}$ nin; enerji momentum tansörlerinin bileşenleri cinsinden ve bunların da, (3.57.a) göz önüne alındığında, açılımları cinsinden

$$\begin{aligned}
p^{t.ef} &= \frac{1}{3} (T_{11}^{t.ef} + T_{22}^{t.ef} + T_{33}^{t.ef}) \\
&= \frac{1}{3} (T_{11}^{m.ef} + T_{22}^{m.ef} + T_{33}^{m.ef}) + \frac{1}{3} (T_{11}^{RG} + T_{22}^{RG} + T_{33}^{RG}) \\
&= \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[\frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{1}{3} (\nabla_1 \nabla_1 f_R + \nabla_2 \nabla_2 f_R + \nabla_3 \nabla_3 f_R) - \square f_R + 4R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \right. \\
&\quad + \frac{4}{3} (G_{11} + G_{22} + G_{33}) \square f_G + \frac{2}{3} R (\nabla_1 \nabla_1 f_G + \nabla_2 \nabla_2 f_G + \nabla_3 \nabla_3 f_G) \\
&\quad - \frac{8}{3} (R_1^c \nabla_c \nabla_1 f_G + R_2^c \nabla_c \nabla_2 f_G + R_3^c \nabla_c \nabla_3 f_G) + 4R_1^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \\
&\quad \left. + \frac{4}{3} (4R_1^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + R_2^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + R_3^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G) \right] \\
&= \frac{p^m}{f_R} + p^{RG}
\end{aligned}$$

olarak verildiği kolayca anlaşılmaktadır (yukarıdaki bağıntıda $\pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33} = 0$ özelliği kullanılmıştır). Yine benzer şekilde, geri kalan diğer iki operatör ile çarpımlar sonucunda,

toplam efektif ısı akısı $q_a^{t.ef}$ ile toplam efektif eşyönsüz basınç tansörü $\pi_a^{t.ef}$ için benzer bağıntılar elde edilebilir. Bunları, yukarıdakilerle birlikte aşağıda topluca vermekteyiz:

$$G_{00} = \kappa^2 \mu^{t.ef} \Rightarrow \mu^{t.ef} = T_{00}^{t.ef} = T_{00}^{m.ef} + T_{00}^{RG} \quad (3.58)$$

$$G_{11} + G_{22} + G_{33} = \kappa^2 p^{t.ef} \Rightarrow p^{t.ef} = \frac{1}{3}(T_{11}^{m.ef} + T_{22}^{m.ef} + T_{33}^{m.ef}) + \frac{1}{3}(T_{11}^{RG} + T_{22}^{RG} + T_{33}^{RG}) \quad (3.59)$$

$$G_{10} = -\kappa^2 q_1^{t.ef} \Rightarrow q_1^{t.ef} = -T_{10}^{t.ef} = -(T_{10}^{m.ef} + T_{10}^{RG}) \quad (3.60.a)$$

$$G_{20} = -\kappa^2 q_2^{t.ef} \Rightarrow q_2^{t.ef} = -T_{20}^{t.ef} = -(T_{20}^{m.ef} + T_{20}^{RG}) \quad (3.60.b)$$

$$G_{30} = -\kappa^2 q_3^{t.ef} \Rightarrow q_3^{t.ef} = -T_{30}^{t.ef} = -(T_{30}^{m.ef} + T_{30}^{RG}) \quad (3.60.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(+2G_{11} - G_{22} - G_{33}) = \kappa^2 \pi_{11}^{t.ef} &\Rightarrow \pi_{11}^{t.ef} = \frac{1}{3}(+2T_{11}^{t.ef} - T_{22}^{t.ef} - T_{33}^{t.ef}) \\ &= \frac{1}{3}(+2T_{11}^{m.ef} - T_{22}^{m.ef} - T_{33}^{m.ef}) \\ &\quad + \frac{1}{3}(+2T_{11}^{RG} - T_{22}^{RG} - T_{33}^{RG}) \end{aligned} \quad (3.61.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(-G_{11} + 2G_{22} - G_{33}) = \kappa^2 \pi_{22}^{t.ef} &\Rightarrow \pi_{22}^{t.ef} = \frac{1}{3}(-T_{11}^{t.ef} + 2T_{22}^{t.ef} - T_{33}^{t.ef}) \\ &= \frac{1}{3}(-T_{11}^{m.ef} + 2T_{22}^{m.ef} - T_{33}^{m.ef}) \\ &\quad + \frac{1}{3}(-T_{11}^{RG} + 2T_{22}^{RG} - T_{33}^{RG}) \end{aligned} \quad (3.61.b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(-G_{11} - G_{22} + 2G_{33}) = \kappa^2 \pi_{33}^{t.ef} &\Rightarrow \pi_{33}^{t.ef} = \frac{1}{3}(-T_{11}^{t.ef} - T_{22}^{t.ef} + 2T_{33}^{t.ef}) \\ &= \frac{1}{3}(-T_{11}^{m.ef} - T_{22}^{m.ef} + 2T_{33}^{m.ef}) \\ &\quad + \frac{1}{3}(-T_{11}^{RG} - T_{22}^{RG} + 2T_{33}^{RG}) \end{aligned} \quad (3.61.c)$$

$$G_{12} = \kappa^2 \pi_{12}^{t.ef} \Rightarrow \pi_{12}^{t.ef} = T_{12}^{t.ef} = T_{12}^{m.ef} + T_{12}^{RG} \quad (3.61.d)$$

$$G_{23} = \kappa^2 \pi_{23}^{t.ef} \quad \Rightarrow \quad \pi_{23}^{t.ef} = T_{23}^{t.ef} = T_{23}^{m.ef} + T_{23}^{RG} \quad (3.61.e)$$

$$G_{31} = \kappa^2 \pi_{31}^{t.ef} \quad \Rightarrow \quad \pi_{32}^{t.ef} = T_{31}^{t.ef} = T_{31}^{m.ef} + T_{31}^{RG} \quad (3.61.f)$$

Bulgular Bölümü'nde, yukarıdaki her iki formalizmin de Bianchi-Tip III, Bianchi-Tip I uygulanması ele alınacaktır.



4. BULGULAR

4.1. BIANCHI-TİP III METRİĞİ İÇİN $F(R,G)$ -GRAVİTE ALAN DENKLEMLERİ

Bu Bölüm’ de, önce Bianchi-Tip III modelini ele alıyoruz. § 3.2.2. ve § 3.2.3.deki yöntemlerle bileşenler cinsinden yazılan alan denklemleri, (3.41) metriği için (3.42)-(3.45) de verilen kinematik ve geometrik özellikler ile Ek C deki bağıntılar kullanılarak, ölçek çarpanları ile $f(R,G)$ fonksiyonunun zamansal türevleri cinsinden açık bir şekilde ifade edilecektir. Ancak, standard maddeye bağlanan enerji-momentum tansörünün (3.49) ile verilmiş genel şekli, belirlenmesi gereken 10 adet bilinmeyen dinamik değişken içermektedir. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için, nispeten basit bir çalışma hipotezi olarak, standard maddenin enerji-momentum tansörünü (3.50) deki gibi mükemmel akışkanınki olarak kısıtlayacağız. Ancak, böyle bir kısıtlamanın alan denklemlerinde herhangi bir çelişkiye ya da tutarsızlığa yol açıp açmayacağı, incelenmesi gereken bir konu oluşturacaktır ve bu da, tutarlılık koşulları olarak öncelikli olarak ele alınacaktır [34,35].

4.1.1. Birinci Yönteme Göre $f(R,G)$ Alan Denklemleri

Mükemmel akışkan için hal denklemi $q_\alpha^m = 0$ ve $\pi_{\alpha\beta}^m = 0$ şeklinde alındığında, yukarıda söylenen yol izlenerek § 3.2.2. deki alan denklemlerini aşağıdaki şekillere indirgenebilecekleri kolayca görülebilir.

$$G_{00} = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} - \frac{\lambda^2}{C^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} - 4 \frac{\dot{A}}{A} \left(3 \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} \quad (4.1)$$

$$G_{11} = -\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\lambda^2}{C^2} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) + \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} + 4 \left(\frac{\ddot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\ddot{C}\dot{B}}{CB} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} + 4 \left(\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \frac{\ddot{f}_G}{f_R} \quad (4.2.a)$$

$$G_{22} = -\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) + \left(\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{A}}{A} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} + 4 \left(\frac{\ddot{C}\dot{A}}{CA} + \frac{\ddot{A}\dot{C}}{AC} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} + 4 \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \frac{\ddot{f}_G}{f_R} \quad (4.2.b)$$

$$G_{33} = -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} + 4 \left(\frac{\ddot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\ddot{B}\dot{A}}{BA} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} + 4 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \frac{\ddot{f}_G}{f_R} \quad (4.2.c)$$

$$G_{01} = 0 = 0$$

$$G_{02} = 0 = 0 \quad (4.3.a,b,c)$$

$$G_{03} = \frac{\lambda}{C} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) = -4 \frac{\lambda}{C} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R}$$

$$G_{12} = 0 = 0$$

$$G_{23} = 0 = 0$$

$$G_{31} = 0 = 0 \quad (4.3.d,e,f)$$

Bu denklemler, bu durumlarıyla ele alındığında, amacımıza uygun kullanıma elverişli bulunmamaktadır. Bunlardan, eğer varsa, hangilerinin bağımsız denklem olduğu ilk bakışta anlaşılamamaktadır. Öte yandan, mesela (4.2.c) denklemi (G_{33} -denklemleri) göz önüne alındığında, burada $C(t)$ ölçek çarpanının yer almadığı derhal göze çarpmaktadır. Benzer şekilde G_{11} -denkleminde $A(t)$; G_{22} -denkleminde de $B(t)$ ölçek çarpanı bulunmamaktadır. Bu durum, döngüsel simetriye sahip söz konusu denklemlerin bir tür kombinasyonlarını almak gerekliliğini düşündürmektedir. Ancak bu, biraz da deneme-yanılma yöntemine dayalı bir iş olduğundan biz bu işe girişmeyeceğiz. Kaldı ki, aşağıda uygulayacağımız § 3.2.3 deki 1+3 kovaryant ayrışım yöntemi bu işi kendiliğinden gerçekleştirecektir.

4.1.2. İkinci Yönteme Göre $f(R,G)$ Alan Denklemleri

(3.58)-(3.61) denklemlerinin; ölçek çarpanları ile $f(R,G)$ fonksiyonunun türevleri cinsinden yazılımları, (3.42)-(3.45) bağıntıları, Ek C ve de (3.50) olarak belirtilen girdiler yine

kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur. (3.58) ve (3.59) denklemlerinin karşılıkları, sırasıyla $\mu^{t.ef}$ ve $p^{t.ef}$ ile etiketlendireceğimiz şu denklemler olurlar:

$$\mu^{t.ef} : \quad \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} - \frac{\lambda^2}{C^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ -\frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ \left. + \left(-\frac{12\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} + \frac{4\lambda^2}{C^2} \frac{\dot{A}}{A} \right) \dot{f}_G \right\} \quad (4.4)$$

$$p^{t.ef} : \quad -\frac{2}{3} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) + \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{C^2} \\ = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R + \ddot{f}_R \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) \right] \dot{f}_G \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) - \frac{\lambda^2}{C^2} \right] \ddot{f}_G \right\} \quad (4.5)$$

(3.60) denklemleri ise, yalnızca $G_{30} \neq 0$ ve $q_3^{t.ef} \equiv 0 + q_3^{RG} \neq 0$ olduğundan, özdeş olarak sıfır olmayan tek bir denklem verir.

$$q_1^{t.ef} : \quad 0 = 0 \\ q_2^{t.ef} : \quad 0 = 0 \\ q_3^{t.ef} : \quad \frac{\lambda}{C} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) = -4 \frac{\lambda}{C} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} \Rightarrow \frac{\lambda}{C} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \left(1 + \frac{4\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} \right) = 0 \quad (4.6.a,b,c)$$

(3.61) denklemlerinin karşılıkları da, düzenlendiklerinde, denklemlerin sağ tarafları $\pi_{\alpha\beta}^{t.ef}$ leri göstermek üzere:

$$\pi_{11}^{t.ef} : \quad \frac{1}{3} \left(\frac{2\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{2\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) + \frac{2}{3} \frac{\lambda^2}{C^2} = \frac{1}{f_R} \left\{ \frac{1}{3} \left(-\frac{2\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ \left. - \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(-\frac{2\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{2\ddot{B}}{B} \right) \right] \dot{f}_G \right. \\ \left. - \frac{4}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{2\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} + \frac{2\lambda^2}{C^2} \right) \ddot{f}_G \right\} \quad (4.7.a)$$

$$\begin{aligned} \pi_{22}^{t.ef} : \quad & \frac{1}{3} \left(-\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{2\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{2\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) - \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{C^2} = \frac{1}{f_R} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{2\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ & - \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{2\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(-\frac{2\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) \right] \dot{f}_G \\ & \left. - \frac{4}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{2\dot{C}\dot{A}}{CA} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \ddot{f}_G \right\} \end{aligned} \quad (4.7.b)$$

$$\begin{aligned} \pi_{33}^{t.ef} : \quad & \frac{1}{3} \left(-\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{2\ddot{C}}{C} \right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) - \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{C^2} = \frac{1}{f_R} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} - \frac{2\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ & - \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(-\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{2\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) \right] \dot{f}_G \\ & \left. - \frac{4}{3} \left(-\frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \ddot{f}_G \right\} \end{aligned} \quad (4.7.c)$$

$$\begin{aligned} \pi_{12}^{t.ef} : \quad & 0 = 0 \\ \pi_{23}^{t.ef} : \quad & 0 = 0 \\ \pi_{32}^{t.ef} : \quad & 0 = 0 \end{aligned} \quad (4.7.d,e,f)$$

olur. Şimdi, (4.7) deki üç denklemden hareketle, taraf tarafa çıkarmalarla aşağıdaki şu düzenlenmiş üç yardımcı denklemi oluşturalım ve bunların düzenlenmiş şekillerini de ‘ Π ’ sembolleriyle etiketleyelim:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} - \Pi_{22} : \quad & \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + 4 \left[\frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} \right) + \frac{\ddot{C}}{C} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} \\ & + 4 \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\ddot{f}_G}{f_R} + \frac{\lambda^2}{C^2} \left(1 + \frac{4\ddot{f}_G}{f_R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.8.a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{22} - \Pi_{33} : \quad & \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) + \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + 4 \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\ddot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} \\ & + 4 \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\ddot{f}_G}{f_R} = 0 \end{aligned} \quad (4.8.b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{33} - \Pi_{11} : \quad & \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) + \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + 4 \left[\frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\ddot{B}}{B} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} \\ & + 4 \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) \frac{\ddot{f}_G}{f_R} - \frac{\lambda^2}{C^2} \left(1 + \frac{4\ddot{f}_G}{f_R} \right) = 0 \quad (4.8.c) \end{aligned}$$

Bianchi-Tip III modeli için (3.45) de yazmış olduğumuz Ricci skaleri ile Gauss-Bonnet teriminin ifadelerini, bütünlüğü sağlamak üzere aşağıda tekrarlayalım:

$$R = 2 \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \quad (4.9.a)$$

$$G = 8 \left(\frac{\ddot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} + \frac{\ddot{B}\dot{C}\dot{A}}{BCA} + \frac{\ddot{C}\dot{A}\dot{B}}{CAB} - \frac{\ddot{A}}{A} \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \quad (4.10.a)$$

Bunları, ilerideki amaçlarımıza uygun olarak

$$\frac{R}{2} = \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \quad (4.9.b)$$

$$\frac{G}{8} = \frac{\ddot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) + \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\ddot{C}\dot{B}}{CB} \right) \quad (4.10.b)$$

şeklinde düzenleyelim. Yine, ilerideki bazı kullanımlarımız için $\mu^{t.ef} + p^{t.ef}$ ve $\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} - \mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$ birleştirmelerini de oluşturalım:

$$\mu^{t.ef} + p^{t.ef} :$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) - \frac{2}{3} \frac{\lambda^2}{C^2} \\ & = \kappa^2 \frac{\mu^m + p^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ -\frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R + \ddot{f}_R \right. \\ & \quad + \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) - \frac{9\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} + \frac{3\lambda^2}{C^2} \frac{\dot{A}}{A} \right] \dot{f}_G \\ & \quad \left. + \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) - \frac{\lambda^2}{C^2} \right] \ddot{f}_G \right\} \quad (4.11) \end{aligned}$$

$$\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} :$$

$$\begin{aligned} -2\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C}\right) &= \kappa^2 \frac{\mu^m + 3p^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ f - Rf_R - Gf_G + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right) \dot{f}_R + 3\ddot{f}_R \right. \\ &\quad + 4\left[\frac{\dot{A}}{A}\left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C}\right) + \frac{\dot{B}}{B}\left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A}\right) + \frac{\dot{C}}{C}\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B}\right) - \frac{3\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} + \frac{\lambda^2}{C^2} \frac{\dot{A}}{A}\right] \dot{f}_G \\ &\quad \left. + 4\left[\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA}\right) - \frac{\lambda^2}{C^2}\right] \ddot{f}_G \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$-\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} :$$

$$\begin{aligned} -2\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C}\right) - 2\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA}\right) + 2\frac{\lambda^2}{C^2} &= \kappa^2 \frac{-\mu^m + 3p^m}{f_R} \\ &\quad + \frac{1}{f_R} \left\{ 2(f - Rf_R - Gf_G) + 3\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right) \dot{f}_R + 3\ddot{f}_R \right. \\ &\quad + 4\left[\frac{\dot{A}}{A}\left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C}\right) + \frac{\dot{B}}{B}\left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A}\right) + \frac{\dot{C}}{C}\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B}\right) + 3\frac{\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \frac{\dot{A}}{A}\right] \dot{f}_G \\ &\quad \left. + 4\left[\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA}\right) - \frac{\lambda^2}{C^2}\right] \ddot{f}_G \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Yukarıdaki denklemlerden (4.4) ile (4.5) e, RW-metriğindeki karşılıklarına atfen “Friedmann denklemleri” denir; fakat burada, $f(R,G)$ –gravite için yazılmış olduklarından “genelleştirilmiş Friedmann denklemleri” demek daha doğru olacaktır. (4.12) ye ise, “Raychaudhuri denklemi” adı verilir. (4.13) ise, (3.50) ile birlikte ele alındığında, (3.47) de yazılmış iz denkleminde başka bir şey değildir. Bu denklemlerin: $2 \times (4.4) - (4.12) + (3.47) = R$ şeklindeki birleştirilmesinden (4.9.a) ile verilen Ricci eğrilik skalerini elde etmek mümkündür. Şimdi, bir de; mükemmel akışkan olarak alınacak sıradan madde için, (3.56) daki $\nabla^b T_{ab}^m = 0$ korunum denkleminde hareketle elde edilebilecek

$$\dot{\mu}^m + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)(\mu^m + p^m) = 0 \quad (4.14)$$

korunum denklemini yazalım. Bunun integrasyonunu şimdiden vermek iyi olacaktır. Sıradan maddenin $w = \text{Sabit}$ olmak üzere

$$p^m = w\mu^m \quad (4.15)$$

şeklinde lineer bir barotropik hal denkleminde uyduğu varsayımı altında (4.14) denklemi

$$\dot{\mu}^m + (1+w) \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \mu^m = 0 \quad (4.16)$$

şeklini alır ve bu da

$$\frac{d}{dt} \ln \mu^m = -(1+w) \frac{d}{dt} \ln(ABC)$$

yazıldığında, kolayca integre edilerek

$$\mu^m \propto (ABC)^{-(1+w)} \quad (4.17)$$

verir. Orantı katsayısını belirlemek üzere; başlangıç koşulu olarak, $t = t_0$ şimdiki kozmik zamanında μ^m, A, B ve C nin şimdiki değerleri μ_0^m, A_0, B_0 ve C_0 ile gösterilirse

$$\mu_0^m \propto (A_0 B_0 C_0)^{-(1+w)} \quad (4.18)$$

olur ve dolayısıyla da, sonuçta, korunum denkleminin çözümü için

$$\mu^m(t) = \mu_0^m \left(\frac{A}{A_0} \frac{B}{B_0} \frac{C}{C_0} \right)^{-(1+w)} \quad (4.19)$$

elde edilir. Bu noktada şuna dikkati çekmek yerinde olacaktır. $\nabla^b T_{ab}^m = 0$ enerji momentum tansörünün korunumundan hareketle tesis edilen (4.14) deki korunum denklemi, (4.4) ve (4.5) denklemlerinden bağımsız değildir; bir başka deyişle, bu denklemi (4.4) ile (4.5) denklemlerinden de elde etmek mümkündür. Nitekim (4.4) denkleminde çekilecek $\mu^{m,ef}$ fonksiyonun t zamanına göre türevi oluşturulup da, (4.4) ile (4.5) in (4.11) deki toplamının $\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right)$ ile çarpılmış şekliyle birleştirilirse, uygun düzenlemeler sonucunda (4.14) denkleminde varılır. Bu işlemi uzunluğu nedeniyle burada göstermiyoruz. Ancak (4.14) ün

gerçekten de böyle elde edilebileceği § 4.2.1.1 de ele alınacak özel bir durum çerçevesinde açıkça gösterilecektir.

$f(R, G)$ -gravite'nin Bianchi-Tip III modeli çerçevesinde yazılabilecek tüm denklemleri - bazıları bağımsız olmasalar da - yukarıdakilerden ibarettir. Bunlardan hareketle, öncelikli amacımız $f(R, G)$ nin fonksiyonel formunun belirlenmesi olacaktır. Bu “ $f(R, G)$ modeli tesisi” olarak anılacaktır. Sonrasında ise söz konusu modelin evrenimizin günümüzdeki ivmeli genişlemesini verip vermediğine bakılacaktır.

Yukarıdaki denklem ve bağıntılar: üçü bilinmeyen $A(t), B(t), C(t)$ ölçek çarpanı; biri $\mu^m(t)$ (veya $p^m(t)$) fonksiyonu ve diğeri de bilinmeyen $f(R, G)$ fonksiyonu olmak üzere toplamda beş bilinmeyen içermektedirler. Bunlarda yer alan $f(R, G)$ fonksiyonunun, argümanlarına göre türevlerinin zamansal türevleri için, zincir kuralı kullanılarak kolayca yazılabilecek

$$\dot{f}_R = f_{RR}\dot{R} + f_{RG}\dot{G} \quad (4.20.a)$$

$$\dot{f}_G = f_{GR}\dot{R} + f_{GG}\dot{G} \quad (4.20.b)$$

$$\ddot{f}_R = f_{RR}\ddot{R} + f_{RG}\ddot{G} + 2f_{RRG}\dot{R}\dot{G} + f_{RRR}\dot{R}^2 + f_{RGG}\dot{G}^2 \quad (4.20.c)$$

$$\ddot{f}_G = f_{GR}\ddot{R} + f_{GG}\ddot{G} + 2f_{GRG}\dot{R}\dot{G} + f_{GRR}\dot{R}^2 + f_{GGG}\dot{G}^2 \quad (4.20.d)$$

bağıntıları ve bunlarla birlikte R ile G nin (4.9) ve (4.10) daki ifadeleri de dikkate alındığında, denklemlerin ölçek çarpanlarına göre dördüncü mertebeden türevli, yüksek dereceli, birbirlerine kuple ve aşırı lineer-olmayan (non-lineer) bir mahiyette oldukları derhal anlaşılır. Dolayısıyla, analitik çözümler elde etmenin zor ve hatta imkânsız olduğu ve dahası çözümlerin var olup olmadığını da peşinen söyleyemeyecek bir durumla karşı karşıya bulunmaktayız. Bilinmeyen tüm ölçek çarpanları belirlenmiş ve f fonksiyonun t zamanı cinsinden $f = f(t)$ fonksiyonu bulunmuş olsa bile, (4.9) ve (4.10) bağıntılarından elde edilecek $R = R(t)$ ve $G = G(t)$ ifadeleri, f yi, $f = f[t(R), t(G)] \equiv f(R, G)$ olarak açık bir şekilde tesis etmeye her zaman izin veremeye bilmektedir; zira bunun mümkün olabilmesi için muhakkak şekilde analitik olarak $t = t(R)$ (veya $t = t(G)$) ters fonksiyonlarının oluşturulması gerektiği aşikârdır. Aksi takdirde, söz konusu aşamada $f(R, G)$ modelinin tesisi amacıyla

$\{f = f(t), R = R(t), G = G(t)\}$ parametrik gösterimi ile yetinilmek zorunda kalınacaktır. Literatürde; $f(R, G)$ denklemlerini nispeten sadeleştirmek için bilinmeyen sayısını azaltmak üzere, sıklıkla, $B = C$ (ya da $A = B$ veya $A = C$) varsayımına dayalı Yerel Dönmesel Simetrik (YDS) (Locally Rotationally Symmetric(LRS)) Bianchi-Tip modeller göz önüne alınmaktadır [36,37,38,41]. Ölçek çarpanları için GRT’de de pek sıklıkla yapılan bu basitleştirmenin yanı sıra, tek bilinmeyene indirgenmiş denklemler elde etmek için ad hoc (amaca yönelik) varsayımlardan birini “genişleme skaleriyle makaslama skalerini orantılı almak” oluşturmaktadır [36,40,41]. Bir başka varsayım ise, f fonksiyonu ile bir ölçek çarpanı arasında kuvvet kanunu gibi bir takım bağıntılar öne sürmektir [39,40,41,42,43]. Bunların yanı sıra; q yavaşlama parametresi, H Hubble sabiti gibi bir takım kozmolojik parametreler hakkında da ad hoc varsayımlar söz konusu olabilmektedir [40,42,43]. Aşağıda, bu tür amaca uygun (ad hoc) varsayımlara başlangıçta başvurmak yerine, önce, alan denklemlerinin mükemmel akışkan varsayımı ile tutarlılığını incelemeyi ve sonrasında da, ortaya çıkacak kısıtlamalar altında, denklem sistemini, gerek sayıca ve gerekse de bilinmeyenler bakımından olabildiğince indirgenmiş bir duruma getirmeyi amaçlıyoruz.

4.1.3. Tutarlılık Koşulları

Evrenin sıradan madde-enerji içeriğinin yalnızca $\mu^m(t)$ madde-enerji yoğunluklu ve $p^m(t)$ basınçlı bir mükemmel akışkan ile tasvir edilmesi ya da başka bir deyişle, akışkanın enerji-momentum tansöründe hal denklemi olarak $q_\alpha^m \equiv 0$ ve $\pi_{\alpha\beta}^m \equiv 0$ ($\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3$) varsayılması, alan denklemlerinin $G_{0\alpha}$ ve $G_{\alpha\beta}$ bileşenlerinin söz konusu varsayım ile tutarlı olup olmayacağı sorununu ortaya çıkarmaktadır. Aşağıda, mükemmel akışkan varsayımı ile tutarlılık anlamında bu sorun incelenecektir.

Şimdi, önce (4.6.c) denklemini ele alalım. $\lambda \neq 0$ için, bu denklemin tutarlılığının sağlanacağı durumlar şunlardır:

$$(i) \quad 1 + 4 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} \neq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = k_1 B, \quad (k_1 = \text{sabit} > 0) \quad (4.21)$$

$$(j) \quad C \neq k_1 B \quad \text{ve} \quad 1 + 4 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} = 0 \quad (4.22)$$

$$(k) \quad 1 + 4 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = k_1 B \quad (4.23)$$

“Birincil koşullar” olarak nitelendireceğimiz bu koşulların (4.8) denklemlerine yansımaları ele almadan önce, söz konusu denklemleri aşağıdaki gibi düzenleyelim. (4.8.a) yı

$$\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} \right) \left(1 + \frac{4\dot{C}}{C} \frac{\dot{f}_G}{f_R} \right) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \left(\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{4\ddot{C}}{C} \frac{\dot{f}_G}{f_R} + \frac{4\dot{C}}{C} \frac{\ddot{f}_G}{f_R} \right) + \frac{\lambda^2}{C^2} \left(1 + \frac{4\ddot{f}_G}{f_R} \right) = 0$$

şeklinde ortak çarpanlara alarak yazar ve

$$\begin{aligned} \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{4\ddot{C}}{C} \frac{\dot{f}_G}{f_R} + \frac{4\dot{C}}{C} \frac{\ddot{f}_G}{f_R} &= \frac{1}{Cf_R} (\dot{C}f_R + Cf_R + 4\ddot{C}\dot{f}_G + 4\dot{C}\ddot{f}_G) \\ &= \frac{1}{Cf_R} \frac{d}{dt} (Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G) \end{aligned}$$

olduğuna da dikkat ederek, (4.8.a) için

$$\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} \right) \frac{1}{Cf_R} (Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{1}{Cf_R} \frac{d}{dt} (Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G) + \frac{\lambda^2}{C^2} \left(1 + \frac{4\ddot{f}_G}{f_R} \right) = 0$$

veya, Cf_R ile de çarparak

$$\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} \right) (Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{d}{dt} (Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G) + \frac{\lambda^2}{C} (f_R + 4\ddot{f}_G) = 0 \quad (4.24.a)$$

elde ederiz. Benzer yolla, (4.8.b) ve (4.8.c) denklemleri de, sırasıyla,

$$\left(\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \right) (Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{d}{dt} (Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G) = 0 \quad (4.24.b)$$

$$\left(\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} \right) (Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) \frac{d}{dt} (Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G) - \frac{\lambda^2 B}{C^2} (f_R + 4\ddot{f}_G) = 0 \quad (4.24.c)$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağlamda, şu özelliklere dikkat çekmek yerinde olacaktır. Yukarıdaki bu 3 denklem, sırasıyla, tekrar düzenlenmiş $\Pi_{11} - \Pi_{22}$, $\Pi_{22} - \Pi_{33}$ ve $\Pi_{33} - \Pi_{11}$ denklemleridir. Eğer bunlardan biri özdeş olarak sıfır oluyorsa geri kalan diğer iki denklem birbirlerinin ters

işaretlisi olurlar. Gerçekten de, mesela $\Pi_{22} - \Pi_{33} \equiv 0$ olduğunda, buradan, $\Pi_{22} = \Pi_{33}$ ve dolayısıyla da $\Pi_{11} - \Pi_{22} = \Pi_{11} - \Pi_{33} = -(\Pi_{33} - \Pi_{11})$ olur. Buradan da; (4.8) ya da (4.24) denklemlerinden en az ikisinin özdeş olarak sağlandığını göstermenin tutarlılık için yeterli olacağı sonucu çıkmaktadır. Öte yandan, özdeş olarak sağlanmış, mesela $\Pi_{11} - \Pi_{22} \equiv 0$ denklemi, ek bilgi yoksa, hiçbir şekilde $\Pi_{11} \equiv 0$ veya $\Pi_{22} \equiv 0$ sonucunu doğurmaz. Diğer $\Pi_{22} - \Pi_{33} \equiv 0$ ve $\Pi_{33} - \Pi_{11} \equiv 0$ sağlanmaları ise çok çok $\Pi_{11} = \Pi_{22} = \Pi_{33}$ verir. Ancak, $\dot{I}z(\Pi_{\alpha\beta}) \equiv \Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33} \equiv 0$ özelliği göz önünde bulundurulursa, buradan zorunlu olarak $\Pi_{11} = \Pi_{22} = \Pi_{33} \equiv 0$ sonucuna varılır. O halde; (4.8) denklemlerinin tutarlılığı, aynı zamanda (4.7.a,b,c) denklemlerinin tutarlılığı ile de eşdeğerdir.

Şimdi, (i) birincil koşulunu göz önüne alalım. Bu koşul altında (4.24.b) nin özdeş olarak sağlandığı; (4.24.c) nin ise (4.24.a) nın ters işaretlisine eşit olduğu kolayca görülebilir. O halde (i) birincil koşulu altında incelenmesi gereken yegâne bağımsız denklem (4.24.a) olmaktadır. A, B, C ve f – fonksiyonu olmak üzere 4 bilinmeyen içeren bu denklem, (i) birincil koşulu kullanılarak, 3 bilinmeyenli denklem olarak aşağıdaki:

$$\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} \right) (Bf_R + 4B\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{d}{dt} (Bf_R + 4B\dot{f}_G) + \frac{\lambda^2}{k_1 B} (f_R + 4\ddot{f}_G) = 0 \quad (4.25)$$

denklemine indirgenmiş olur. Bu denklemin sağlanacağı durumlar ise ilk bakışta şunlar gözükmektedir:

$$(i_1) \quad B = k_2 A, (k_2 = \text{sabit} > 0) \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.26)$$

$$(i_2) \quad Bf_R + 4B\dot{f}_G = 0 \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.27)$$

Bundan böyle, bunlar “ikincil koşul” olarak anılacaktır. Bu arada (i_1) ve (i_2) koşulunun birlikte sağlandığı, yani, “ $B = k_2 A$ ve $Bf_R + 4B\dot{f}_G = 0$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$ ” gibi bir koşulun, (i) birincil koşulu ile çelişki oluşturacağından ötürü yazılamayacağına işaret edelim. Şimdi, (i_1) koşulu (i) ile birlikte göz önüne alındığında

$$C = k_1 B = k_3 A \quad (k_3 = k_1 k_2 > 0) \quad (4.28)$$

koşuluna dönüşür ve dolayısıyla da Bianchi-Tip III modelini RW modeli gibi tek ölçek çarpanlı bir modele indirir. (i_2) koşulu ise, $B \propto A$ gibi bir koşulun ileri sürülmesine gerek duyurtmayacak şekilde oluşturulmuş iki bağıntıdan oluşmaktadır. Bu denklem sisteminde, f_R nin elenmesiyle elde edilebilecek

$$-B\ddot{f}_G + \dot{B}\dot{f}_G = 0$$

denklemini

$$-\frac{\ddot{f}_G}{\dot{f}_G} + \frac{\dot{B}}{B} = 0$$

şeklinde yazılıp da integre edilirse ve ayrıca da (i) temel koşulundaki $C = k_1 B$ bağıntısı göz önüne alınırsa, K_1 ve $K_2 \equiv K_1 / k_1$ pozitif ya da negatif olabilen sabitler olmak üzere

$$\dot{f}_G = K_1 B = K_2 C \quad (4.29.a)$$

bulunur ve bundan hareketle de gerek denklem sisteminden ve gerekse de türetme yoluyla

$$\ddot{f}_G = K_1 \dot{B} = K_2 \dot{C} \quad (4.29.b)$$

$$f_R = -4K_1 \dot{B} = -4K_2 \dot{C} \quad (4.29.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{B} = -4K_2 \ddot{C} \quad (4.29.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{\ddot{B}} = -4K_2 \ddot{\ddot{C}} \quad (4.29.e)$$

bağıntıları elde edilir. Şimdi, her ne kadar etkisi peşinen görülmese de, (4.25) denkleminin sağlanmasına yönelik (i_1) ve (i_2) den farklı bir koşul daha ileri sürmek düşünülebilir; o da:

$$(i_3) \quad B \neq k_2 A \quad \text{ve} \quad Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G \neq 0 \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.30)$$

dir. Bu takdirde (4.25) denklemini $B \neq k_2 A$ ve $Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G \neq 0$ olmak kaydıyla

$$\frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{\dot{A}B - A\dot{B}} + \frac{\frac{d}{dt}(B\dot{f}_R + 4\dot{B}\dot{f}_G)}{B\dot{f}_R + 4\dot{B}\dot{f}_G} = 0 \quad (4.31)$$

şekline getirilebilir. Bunun da integrasyonundan M ile pozitif ya da negatif olabilen bir integrasyon sabiti gösterilmek üzere

$$\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \left(f_R + 4 \frac{\dot{B}}{B} \dot{f}_G \right) = \frac{M}{AB^2} \quad (4.32)$$

elde edilir. Bu denklemin bir benzeri, istenirse, (i) temel koşulundaki $C = k_1 B$ bağıntısı sayesinde, $B \rightarrow C$ konularak da elde edilebilir.

Şimdi, $C \neq k_1 B$ olmak kaydıyla, (j) birincil koşulunu ele alalım. Bu, birbirlerine eşdeğer biçimde

$$C \neq k_1 B;$$

$$1 + 4 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} = 0 \Leftrightarrow A\dot{f}_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0 \Leftrightarrow f_R = -4 \frac{\dot{A}}{A} \dot{f}_G \Leftrightarrow \dot{f}_G = -\frac{1}{4} \frac{\dot{A}}{A} f_R \quad (4.33)$$

bağıntılarıyla ifade edilebilir. Bu koşul altında (4.24.b) nin sağlandığı hemen görülmektedir. (4.24.a) ın sağlanması için ise, ilk bakışta,

$$(j_1) \quad B = k_2 A, \quad (k_2 = \text{sabit} > 0) \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.34)$$

$$(j_2) \quad Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0 \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.35)$$

koşullarından birinin yeterli olacağı görülmektedir. Bunlar da yine “ikincil koşul” olarak adlandırılacaklardır. Yine burada (j_1) ile (j_2) koşullarının birlikte sağlandığı duruma karşılık gelen $B = k_2 A$ ve $Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$ gibi bir üçüncü ikincil koşul ileri sürülemeyeceğine dikkat çekelim; zira bunun (j) ile birleştirilmesi $B \propto A, C \propto A \Rightarrow C \propto B$ gibi, (j) birincil koşulu ile çelişen bir sonuca yol açmaktadır. Şimdi, (j_1) ikincil koşulunun, (j) birincil koşulu ile birleştirilmesi

$$B\dot{f}_R + 4\dot{B}\dot{f}_G = 0 \quad (4.36.a)$$

$$f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.36.b)$$

denklem sistemiyle ifade edilebilir. Bu iki denklem arasında önce f_R elenerek bulunabilecek

$$-B\ddot{f}_G + \dot{B}\dot{f}_G = 0$$

denklemini integre edilir ve tekrar (j_1) ikincil koşulu da kullanılırsa, sonuçta, $\dot{f}_G$ ile f_R ve bunların da zamana göre türevleri, aşağıdaki gibi bulunur:

$$\dot{f}_G = K_1 B = K_2 A \quad (4.37.a)$$

$$\ddot{f}_G = K_1 \dot{B} = K_2 \dot{A} \quad (4.37.b)$$

$$f_R = -4K_1 \dot{B} = -4K_2 \dot{A} \quad (4.37.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{B} = -4K_2 \ddot{A} \quad (4.37.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{B} = -4K_2 \ddot{A} \quad (4.37.e)$$

Burada, K_1 keyfi bir integrasyon sabiti, K_2 de $K_2 = K_1 k_2$ şeklinde tanımlı yeni bir sabittir. Şimdi, geriye kalan (4.24.c) denkleminin de (j_1) ikincil koşulu altında, $C \propto A$ olması gerekmeyecek şekilde, özdeş olarak sağlandığı derhal görülür. Koşulların kullanımı bağlamında şuna işaret etmek yerinde olacaktır; eğer, önce (4.24.a) değil de (4.24.c) denkleminin sağlanıp sağlanmadığına bakılmış olunsaydı, bu takdirde (j_1) deki koşulda $B = k_2 A$ yerine $C = k_1 A$, yani,

$$(j_1) \quad C = k_1 A, \quad (k_1 = \text{sabit} > 0) \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.38)$$

değişikliğini yapmak gerekecek ve bu da (4.37) de $B \rightarrow C$ ile değiştirilmiş

$$\dot{f}_G = K_1 C = K_2 A \quad (4.39.a)$$

$$\ddot{f}_G = K_1 \dot{C} = K_2 \dot{A} \quad (4.39.b)$$

$$f_R = -4K_1 \dot{C} = -4K_2 \dot{A} \quad (4.39.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{C} = -4K_2 \ddot{A} \quad (4.39.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{\ddot{C}} = -4K_2 \ddot{\ddot{A}} \quad (4.39.e)$$

ifadelerine yol açacaktı. Bu durum için, (4.24.a) denkleminde $B \propto A$ olmak gibi bir gereklilik getirmenin söz konusu olamayacağına da işaret edelim.

Şimdi, (j_2) ikincil koşulunu ele alalım. (j_2) deki ilk bağıntının (4.33) ile karşılaştırılmasından $C = k_1 A$ olması gerektiği anlaşılmaktadır ve bu bağıntı da, B ile A arasında herhangi bir bağıntı bulunmasını gerektirmeyecek şekilde, (4.24.c) denkleminin özdeş olarak sağlanmasına yol açmaktadır. (4.39) bağıntıları (j_2) koşuluna denk olmaktadır. (j) koşuluna ilişkin buraya kadarki incelemelerden çıkan sonucu özetlemek gerekirse; $C \neq k_1 B$ olmak üzere, (4.37) veya (4.39) bağıntıları, (4.6.c) ve (4.8) denklemlerinin özdeş olarak sağlanması için yeterli olmaktadır.

Öte yandan, (4.24) denklemlerinin birlikte sağlanıp sağlanmayacakları apaçık görülme de, (j) birincil koşulu altında (j_1) ve (j_2) den daha az kısıtlayıcı

$$(j_3) \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.40)$$

koşulunu ileri sürelim. Bu taktirde (j) ve (j_3) den, (4.37) ile (4.39) dan daha az kısıtlayıcı

$$\dot{f}_G = K_2 A \quad (4.41.a)$$

$$\ddot{f}_G = K_2 \dot{A} \quad (4.41.b)$$

$$f_R = -4K_2 \dot{A} \quad (4.41.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_2 \ddot{A} \quad (4.41.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_2\ddot{A} \quad (4.41.e)$$

bağıntılarına varılır. Bunlar (4.24) denklemlerine yerleştirildiğinde; (4.24.a), düzenlenmiş şekliyle

$$\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B}\right)\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{C}}{C}\right) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right)\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{C}}{C}\right) = 0 \quad (4.42)$$

denklemine indirgenir; (4.24.b) ise özdeş olarak sıfır; ve (4.24.c) de yukarıdakinin ters işaretlisini verir. (4.42) denklemi

$$\frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{\dot{A}B - A\dot{B}} + \frac{\ddot{A}C - A\ddot{C}}{\dot{A}C - A\dot{C}} = 0$$

şeklinde yazılır da integre edilirse

$$\frac{d}{dt} \ln |\dot{A}B - A\dot{B}| + \frac{d}{dt} \ln |\dot{A}C - A\dot{C}| = 0$$

$$\frac{d}{dt} \ln |(\dot{A}B - A\dot{B})(\dot{A}C - A\dot{C})| = 0$$

$$|(\dot{A}B - A\dot{B})(\dot{A}C - A\dot{C})| = \text{Sabit}$$

$$(\dot{A}B - A\dot{B})(\dot{A}C - A\dot{C}) = L \quad (4.43.a)$$

ya da,

$$\left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A}\right)\left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A}\right) = \frac{L}{A^2BC} \quad (4.43.b)$$

bulunur. Burada L , pozitif veya negatif olabilen bir integrasyon sabitidir. Dikkat edileceği üzere, söz konusu koşul takımı, ölçek çarpanları için hiçbir şekilde $A \propto B \propto C$ gibi bir koşul ortaya çıkartmamaktadır.

Şimdi, son olarak (k) birincil koşulunu ele alalım. Bu koşul altında (4.24.b) nin özdeş olarak sağlandığı ve (4.24.a) nın da

$$\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B}\right)(B\dot{f}_R + 4\dot{B}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{d}{dt}(B\dot{f}_R + 4\dot{B}\dot{f}_G) + \frac{\lambda^2}{k_1 B}(f_R + 4\ddot{f}_G) = 0 \quad (4.44)$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülebilir. Bunun sağlanması ise şu durumlarda gerçekleşir:

$$(k_1) \quad B \propto A \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.45)$$

$$(k_2) \quad B\dot{f}_R + 4\dot{B}\dot{f}_G = 0 \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.46)$$

$$(k_3) \quad B \propto A \quad \text{ve} \quad B\dot{f}_R + 4\dot{B}\dot{f}_G = 0 \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.47)$$

Bu ikincil koşulların herbiri (k) birincil koşulu ile birlikte değerlendirildiğinde, hepsinin de aşağıdaki tek bir bağıntı takımına yol açtıkları kolayca bulunabilir.

$$C \propto B \propto A \quad (4.48.a)$$

$$\dot{f}_G = K_1 A = K_2 B = K_3 C \quad (4.48.b)$$

$$\ddot{f}_G = K_1 \dot{A} = K_2 \dot{B} = K_3 \dot{C} \quad (4.48.c)$$

$$f_R = -4K_1 \dot{A} = -4K_2 \dot{B} = -4K_3 \dot{C} \quad (4.48.d)$$

$$\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{A} = -4K_2 \ddot{B} = -4K_3 \ddot{C} \quad (4.48.e)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{\dot{A}} = -4K_2 \ddot{\dot{B}} = -4K_3 \ddot{\dot{C}} \quad (4.48.f)$$

Yukarıda ortaya çıkan tüm koşulları Tablo: 4.1 de göstermekteyiz. Bundan böyle, Tablodaki koşul öbekleri; birincil koşullar ile ikincil koşulların birleştirilmesi anlamında, mesela, $i \oplus i_1, j \oplus j_3, \dots$ gibi “ $\oplus$ ” sembolüyle gösterilecektir.

Tablo 4.1: Bianchi-Tip III Modeli İçin Tutarlılık Koşulları [44]

(i) $\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B} = 0 (\Leftrightarrow C = k_1 B)$ iken $1 + 4 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} \neq 0$		
(i ₁) $B = k_2 A$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$ $C = k_1 B = k_3 A$	(i ₂) $Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G = 0$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$ ($B \propto A$ gerekmez) $\dot{f}_G = K_1 B = K_2 C$ $\ddot{f}_G = K_1 \dot{B} = K_2 \dot{C}$ $f_R = -4K_1 \dot{B} = -4K_2 \dot{C}$ $\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{B} = -4K_2 \ddot{C}$ $\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{B} = -4K_2 \ddot{C}$	(i ₃) $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$ ($B \propto A$ gerekmez) $B \neq kA$ ve $Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G \neq 0$ $\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right) \left(f_R + 4\frac{\dot{B}}{B} \dot{f}_G\right) = \frac{M}{AB^2}$ veya $\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{C}}{C}\right) \left(f_R + 4\frac{\dot{C}}{C} \dot{f}_G\right) = \frac{Mk_1^2}{AC^2}$
(j) $\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B} \neq 0 (\Leftrightarrow C \neq k_1 B)$ iken $1 + 4 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} = 0$		
(j ₁) $B = k_2 A$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$ ($C \propto A$ gerekmez) $\dot{f}_G = K_1 B = K_2 A$ $\ddot{f}_G = K_1 \dot{B} = K_2 \dot{A}$ $f_R = -4K_1 \dot{B} = -4K_2 \dot{A}$ $\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{B} = -4K_2 \ddot{A}$ $\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{B} = -4K_2 \ddot{A}$	(j ₂) $Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$ $C = k_1 A$ ($B \propto A$ gerekmez) $\dot{f}_G = K_1 C = K_2 A$ $\ddot{f}_G = K_1 \dot{C} = K_2 \dot{A}$ $f_R = -4K_1 \dot{C} = -4K_2 \dot{A}$ $\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{C} = -4K_2 \ddot{A}$ $\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{C} = -4K_2 \ddot{A}$	(j ₃) $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$ ($A \propto B \propto C$ gerekmez) $\dot{f}_G = K_2 A$ $\ddot{f}_G = K_2 \dot{A}$ $f_R = -4K_2 \dot{A}$ $\dot{f}_R = -4K_2 \ddot{A}$ $\ddot{f}_R = -4K_2 \ddot{A}$ $\left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A}\right) \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A}\right) = \frac{L}{A^2 BC}$
(j ₁) ((j ₁) de $B \rightarrow C$ konulacak)		
(k) $\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B} = 0 (\Leftrightarrow C = k_1 B)$ ve $1 + 4 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} = 0$		
(k ₁) $B \propto A$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$	(k ₂) $Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G = 0$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$	(k ₃) $B \propto A$ ve $Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G = 0$ ve $f_R + 4\ddot{f}_G = 0$
Hepsi için ($A \propto B \propto C$) $\dot{f}_G = K_1 A = K_2 B = K_3 C$ $\ddot{f}_G = K_1 \dot{A} = K_2 \dot{B} = K_3 \dot{C}$ $f_R = -4K_1 \dot{A} = -4K_2 \dot{B} = -4K_3 \dot{C}$ $\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{A} = -4K_2 \ddot{B} = -4K_3 \ddot{C}$ $\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{A} = -4K_2 \ddot{B} = -4K_3 \ddot{C}$		

4.2. BIANCHI-TİP III İÇİN $f(R,G)$ MODELİ TESİSİ

Şimdi; (4.8) ve dolayısıyla da (4.7) denklemlerinin mükemmel akışkan varsayımı ile tutarlılıklarının sağlanması gerekliliğinin yol açtığı yukarıdaki kısıtlamaların, geri kalan alan denklemleri ile bağıntılara yansımaları ele alalım.

4.2.1. i -Birincil Koşulu Altında Denklemlerin İndirgenmesi

Önce i -birincil koşulunu, yani,

$$C = k_1 B \Leftrightarrow \dot{C} = k_1 \dot{B}, \ddot{C} = k_1 \ddot{B} \Leftrightarrow \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{B}}{B} \Leftrightarrow \frac{\ddot{C}}{C} = \frac{\ddot{B}}{B} \quad (4.49)$$

bağıntılarını göz önüne alalım ve bunların ışığında: $\mu^{t.ef}$, $p^{t.ef}$, $\mu^{t.ef} + p^{t.ef}$, $\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$, $-\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$, μ^m , R ve G nin, iki bilinmeyen ölçek çarpanı içeren indirgenmiş ifadelerini tesis edelim. Buna göre: (4.4), (4.5), (4.11), (4.12), (4.13), (4.19), (4.9) ve (4.10) dan:

$$\begin{aligned} \mu^{t.ef} : \quad & 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) - \left(\frac{\dot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} \\ & - 4 \frac{\dot{A}}{A} \left(3 \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} p^{t.ef} : \quad & -\frac{2}{3} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\ddot{B}}{B} \right) - \frac{1}{3} \left(2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \\ & = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\ & + \frac{4}{3} \left[2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} + \frac{4}{3} \left[\left(2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right) - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \right] \frac{\ddot{f}_G}{f_R} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
\mu^{t.ef} + p^{t.ef} : & -\frac{2}{3}\left(\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\ddot{B}}{B}\right) + \frac{2}{3}\left(2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2}\right) - \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \\
& = \kappa^2 \frac{\mu^m + p^m}{f_R} - \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\
& + \frac{4}{3}\left[2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{B}}{B}\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B}\right) - \frac{9\dot{A}\dot{B}^2}{AB^2} + \frac{3\lambda^2}{k_1^2 B^2}\frac{\dot{A}}{A}\right]\frac{\dot{f}_G}{f_R} \\
& + \frac{4}{3}\left[2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2}\right]\frac{\ddot{f}_G}{f_R}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} : & -2\left(\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\ddot{B}}{B}\right) = \kappa^2 \frac{\mu^m + 3p^m}{f_R} + \frac{1}{f_R}(f - Rf_R - Gf_G) \\
& + \left(\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{\dot{f}_R}{f_R} + 3\frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\
& + 4\left[2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{B}}{B}\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B}\right) - \frac{3\dot{A}\dot{B}^2}{AB^2} + \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2}\frac{\dot{A}}{A}\right]\frac{\dot{f}_G}{f_R} \\
& + 4\left[2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2}\right]\frac{\ddot{f}_G}{f_R}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
-\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} : & -2\left(\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\ddot{B}}{B}\right) - 2\left(2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2}\right) + 2\frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \\
& = \kappa^2 \frac{-\mu^m + 3p^m}{f_R} + \frac{2}{f_R}(f - Rf_R - Gf_G) + 3\left(\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{\dot{f}_R}{f_R} + 3\frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\
& + 4\left[2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{B}}{B}\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B}\right) + \frac{\dot{A}}{A}\left(3\frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2}\right)\right]\frac{\dot{f}_G}{f_R} \\
& + 4\left[\left(2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2}\right) - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2}\right]\frac{\ddot{f}_G}{f_R}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\dot{\mu}^m + \left(\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B}\right)(1+w)\mu^m = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu^m \propto (AB^2)^{-(1+w)}, \quad \mu^m = \mu_0^m \left(\frac{A}{A_0} \frac{B^2}{B_0^2}\right)^{-(1+w)} \tag{4.55}$$

$$\frac{R}{2} = \frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \tag{4.56}$$

$$\frac{G}{8} = \frac{\ddot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \right) + 2 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\ddot{B}\dot{B}}{BB} \quad (4.57)$$

elde edilir.

4.2.1.1. $i \oplus i_2$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi

İncelemelerimize, Tablo: 4.1 de ilk sıradaki $i \oplus i_1$ koşul takımıyla başlamak yerine, önce, daha zengin bir yapı sunması bakımından $i \oplus i_2$ koşul takımıyla başlamayı tercih ediyoruz. Denklemlere gönderme yapmayı kolaylaştırmak üzere $i \oplus i_2$ tutarlılık koşullarını aşağıda tekrarlıyoruz:

$$B\dot{f}_R + 4\dot{B}\dot{f}_G = 0 \text{ ve } f_R + 4\ddot{f}_G = 0, \quad (B \propto A \text{ gerekmez}) \quad (4.58)$$

$$\dot{f}_G = K_1 \dot{B} = K_2 \dot{C} \quad (4.59.a)$$

$$\ddot{f}_G = K_1 \ddot{B} = K_2 \ddot{C} \quad (4.59.b)$$

$$f_R = -4K_1 \dot{B} = -4K_2 \dot{C} \quad (4.59.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{B} = -4K_2 \ddot{C} \quad (4.59.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{\ddot{B}} = -4K_2 \ddot{\ddot{C}} \quad (4.59.e)$$

$f(R,G) = \alpha R + F(G)$ hali:

İşe önce α ile $\alpha \neq 0$ olan gerçel bir sayı ve $F(G)$ ile de G nin keyfi bir fonksiyonu gösterilmek üzere $f(R,G)$ fonksiyonunun

$$f(R,G) = \alpha R + F(G) \quad (4.60)$$

şeklinde özel bir formunu göz önüne alarak başlayalım. Bu takdirde

$$f_R = \text{Sabit} = \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{f}_R = 0 \quad \text{ve} \quad \ddot{f}_R = 0 \quad (4.61)$$

olur. B ölçek çarpanı için (4.59.c) den bulunabilecek

$$\alpha = -4K_1\dot{B} \Rightarrow \dot{B} = \frac{\alpha}{-4K_1} \Rightarrow B = \frac{\alpha}{-4K_1}t + C_1 \quad (4.62)$$

çözümüne başlangıç koşulları olarak: $t=0$ için $B=0$ ve şimdiki $t=t_0$ için de $B(t=t_0)=B_0 > 0$ koşulları uygulanırsa, C_1 integrasyon sabiti için $C_1=0$ ve B_0 için de $B_0 = \frac{\alpha}{-4K_1}t_0 > 0$ bulunur. Bu çözüm, yani,

$$B = B_0 \frac{t}{t_0} = \frac{\alpha}{-4K_1}t \text{ (aynı zamanda } C_0 = k_1 B_0 \text{ olmak üzere } C = k_1 C_0 \frac{t}{t_0} = \frac{k_1 \alpha}{-4K_1}t) \quad (4.63)$$

(4.59.a) ya yerleştirilir ve bulunan da hem türetilir, hem de integre edilirse

$$\begin{aligned} f_G &= F_G = -\frac{\alpha}{8}t^2 + C_2 \\ \dot{f}_G &= \dot{F}_G = -\frac{\alpha}{4}t \\ \ddot{f}_G &= \ddot{F}_G = -\frac{\alpha}{4} \end{aligned} \quad (4.64)$$

bağıntıları elde edilir. (4.60) varsayımı altında $i \oplus i_2$ koşul takımının, f fonksiyonu ile bunun türevlerine ve de B ile C ölçek çarpanlarına getirmiş olduğu kısıtlamaları aşağıda topluca göstermekteyiz:

$$\begin{aligned} f_R &= \alpha, \quad \frac{\dot{f}_R}{f_R} = 0 = \frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\ \frac{f_G}{f_R} &= \frac{F_G}{f_R} = -\frac{1}{8}t^2 + C_2, \quad \frac{\dot{f}_G}{f_R} = \frac{\dot{F}_G}{f_R} = -\frac{1}{4}t, \quad \frac{\ddot{f}_G}{f_R} = \frac{\ddot{F}_G}{f_R} = -\frac{1}{4} \\ B &= B_0 \frac{t}{t_0}, \quad C = k_1 B, \quad C = C_0 \frac{t}{t_0}, \quad C_0 = k_1 B_0 = \frac{k_1 \alpha}{-4K_1}t_0, \quad \frac{\dot{B}}{B} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{t}, \quad \frac{\ddot{B}}{B} = \frac{\ddot{C}}{C} = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Bunlar (4.56) ve (4.57) ye taşınır ve hem kısaltma amacıyla, hem de sonraki tartışmaları kolaylaştırmak için

$$\eta \equiv \frac{t_0}{k_1 B_0} > 0 \quad \text{ve} \quad \xi \equiv 1 - \frac{\lambda^2 t_0^2}{k_1^2 B_0^2} \equiv 1 - \lambda^2 \eta^2 \quad (4.66)$$

tanımları yapılırsa, düzenlenmiş şekilleriyle

$$\frac{R}{2} = \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}}{A} \frac{2}{t} + \frac{\xi}{t^2} \quad (4.67)$$

$$\frac{G}{8} = \frac{\ddot{A} \xi}{A t^2} \quad (4.68)$$

elde edilir. Öte yandan, (4.50) denklemi ise

$$\begin{aligned} 2 \frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{\lambda^2 \eta^2}{t^2} &= \kappa^2 \frac{\mu^m}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} [F(G) - GF_G] + \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{3}{t} - \frac{\lambda^2 \eta^2}{t} \right) \\ \rightarrow -\xi \left[\frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] &= \kappa^2 \frac{\mu^m}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} [F(G) - GF_G] \end{aligned} \quad (4.69)$$

biçimine indirgenir. Benzer şekilde, (4.51) - (4.55) denklemlerinin indirgenmiş şekilleri için de sırasıyla,

$$0 = \kappa^2 \frac{p^m}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} [F(G) - GF_G] \quad (4.70)$$

$$-\xi \left[\frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] = \kappa^2 \frac{\mu^m + p^m}{\alpha} \quad (4.71)$$

$$-\xi \left[\frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] = \kappa^2 \frac{\mu^m + 3p^m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} [F(G) - GF_G] \quad (4.72)$$

$$\xi \left[\frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] = \kappa^2 \frac{-\mu^m + 3p^m}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} [F(G) - GF_G] \quad (4.73)$$

$$\dot{\mu}^m + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{2}{t} \right) (1+w) \mu^m = 0 \Rightarrow \mu^m \propto (At^2)^{-(1+w)} \quad , \quad \mu^m = \mu_0^m \left(\frac{A}{A_0} \frac{t^2}{t_0^2} \right)^{-(1+w)} \quad (4.74)$$

bulunur. Son dört denklem, (4.69) ve (4.70) den bağımsız değildirler. (4.71), (4.72) ve (4.73) denklemlerin, bu iki denklemin doğrudan doğruya birleştirilmesi suretiyle de kolayca elde edilebileceğine işaret edelim. Öte yandan, §4.1.2 de ispatsız belirtildiği üzere, (4.74) deki

standard maddenin korunum denklemi de, (4.1) ve (4.2) nin sırasıyla indirgenmiş şekilleri olan (4.69) ve (4.70) den bağımsız olmayıp, bu ikisinin bir tür kombinasyonundan elde edilebilirler. Bu genel özelliği yukarıdaki özel denklemler aracılığıyla gösterelim. (4.69) denklemi t ye göre türetildiğinde bulunacak

$$-\xi \left[\frac{\ddot{A} 1}{A t} - \frac{\dot{A}^2 1}{A^2 t} - \frac{\dot{A} 1}{A t^2} + \frac{2}{t^3} \right] = \kappa^2 \frac{\dot{\mu}^m}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \left[\dot{F}(G) - \dot{G}F_G - G\dot{F}_G \right] \quad (4.75)$$

denklemine, zincir kuralından yazılacak $\dot{F}(G) = F_G \dot{G}$ bağıntısı yerleştirildiğinde eşitliğin sağındaki parantez içindeki ilk iki terim yok olur ve geriye kalan $G\dot{F}_G$ terim için de (4.64) ve (4.68) bağıntıları kullanıldığında, sonuçta

$$\xi \left[\frac{\dot{A}^2 1}{A^2 t} + \frac{\dot{A} 1}{A t^2} - \frac{2}{t^3} \right] = \kappa^2 \frac{\dot{\mu}^m}{\alpha} \quad (4.76)$$

elde edilir. Öte yandan, (4.71) denkleminin her iki yanı da $\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \equiv \frac{\dot{A}}{A} + \frac{2}{t}$ ile çarpıldığında

$$-\xi \left[\frac{\dot{A}^2 1}{A^2 t} + \frac{\dot{A} 1}{A t^2} - \frac{2}{t^3} \right] = \kappa^2 \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{2}{t} \right) \left(\frac{\mu^m + p^m}{\alpha} \right) \quad (4.77)$$

olur ki, bununla da (4.75) in taraf tarafa toplanması, (4.74) daki arzulanan sonucu verir. O halde; (4.69)-(4.74) denklemleri arasında en çok ikisinin bağımsız olduğunu bir daha vurgulayalım. $i \oplus i_2$ tutarlılık koşul takımı altında $f(R, G) = \alpha R + F(G)$ hali için elde edilebilecek mümkün tüm bağıntı ve denklemler, henüz bilinmeyen $A(t)$ ölçek çarpanı dışında, hepsi hepsi yukarıda yer alanlar kadardır. Şimdi amacımız, $F(G)$ fonksiyonel formunun (dolayısıyla da $f(R, G)$ nin) belirlenmesi anlamına gelen “ $f(R, G)$ modeli tesisi” meselesini ele almak olacaktır. Bu iş için izlenebilecek yöntemleri aşağıda sıralayalım.

1) $f(R, G)$ fonksiyonel formunun peşinen bilinmesi ya da seçilmesi durumunda bunun $f_R, f_G, f_{RG} \dots$ gibi argümanlarına göre türevleri de biliniyor olacağından, (4.67) ve (4.68) deki R ve G ifadeleri sayesinde hepsi, A nın türevleri ile t cinsinden ifade edilmiş olurlar. Bunların,

mesela (4.69) a yerleştirilmesi, denklemi, bilinmeyen $A(t)$ fonksiyonun türevleri cinsinden bir diferansiyel denkleme dönüştürür ve buradan da geriye, eğer bulunabiliyorsa, $A(t)$ çözümünü tesis etmek kalır. Bu suretle, ilkesel olarak, her bir $f(R,G)$ fonksiyonel form seçimi için bunlara karşılık düşecek farklı $A(t)$ çözümleri bulmak mümkün görünmektedir. Ancak, bu yolla elde edilecek diferansiyel denklemlerin, bir yandan iki ya da daha yüksek mertebeden ve diğer yandan da aşırı nonlineer olabilmeleri, çözümün varlığı ve inşası sorununu ortaya çıkaracaktır.

2) Yukarıdaki yöntemin karşıt yaklaşımını, $f(R,G)$ yerine bilinen ya da seçilen bir $A(t)$ fonksiyonundan hareket etmek oluşturmaktadır. Ancak, $A(t)$ nin fonksiyonel şeklinin, (4.67) deki $R = R(t)$ den (veya (4.69) daki $G = G(t)$ den) $t = t(R)$ (veya $t = t(G)$) ters fonksiyonunun çekilmesini mümkün kılabilcek özellikte olması gerektiği aşikârdır. Bu takdirde, t cinsinden olan (4.69)-(4.73) denklemleri yalnızca R cinsinden (veya G cinsinden) denklemlere dönüşür ve buradan da F fonksiyonunu kolayca tesis edebilmek olanağı doğmuş olur.

Şimdi; önce bu ikinci yaklaşımı benimseyerek, söylenenleri somutlaştırmak üzere, mesela, (4.69) ve (4.70) denklemlerini göz önüne alalım. Bunlardan çekilecek μ^m ve p^m ifadeleri

$$p^m = w\mu^m \quad (4.78)$$

hal denklemine taşınırsa

$$-\frac{1}{2}[F - GF_G] = -\alpha\xi w \left[\frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] + \frac{1}{2} w [F - GF_G] \quad (4.79)$$

ve buradan da F çekilirse

$$F = \frac{2\alpha\xi w}{1+w} \left[\frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] + GF_G \quad (4.80)$$

olur; ya da (4.64) deki $F_G = -\frac{1}{8}\alpha t^2 + C_2$ bağıntısı kullanılırsa

$$F = \frac{2\alpha\xi w}{1+w} \left[\frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] - \frac{1}{8}\alpha G t^2 + C_2 G \quad (4.81)$$

elde edilir. Son terim G nin bir skaler katı olduğundan topolojik invaryant durumundadır ve dolayısıyla da alan denklemlerine bir katkısı bulunmamaktadır (aksiyondaki varyasyonu bir toplam diverjans olarak ortaya çıkmaktadır). Bu bakımdan bundan böyle, G nin sabit bir katı durumundaki bu tür terimler göz ardı edilecektir. (4.81) de görüldüğü üzere $F = F(t)$ dir. $F = F(G)$ fonksiyonunu ortaya çıkarmak için şimdi yapılması gereken, (4.68) den $t = t(G)$ ters fonksiyonu elde etmek ve bunu da (4.81) e yerleştirip sonuçta $F = F(G)$ yi tesis etmektir. Bu yöntemin yürümesine olanak tanıyabileceğini kestirebildiğimiz bir fonksiyon olarak $A(t)$ yi aşağıdaki gibi seçelim:

$$A(t) = A_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad n \neq 0, 1 \quad (4.82)$$

Bir kuvvet kanunu tipinde olan $A(t)$ fonksiyonu; $t=0$ için $A=0$ ve $t=t_0$ için de $A=A_0$ başlangıç koşullarını sağlamaktadır. $n=0$ için $A=\text{Sabit}$ ve $n=1$ için de, bir yandan $A(t) \propto B(t) \propto C(t)$ ve diğer yandan da $G \equiv 0$ olacağından, bu $n=0, 1$ değerleri dışlanmıştır. $A(t)$ nin

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{n}{t}, \quad \frac{\ddot{A}}{A} = \frac{n(n-1)}{t^2} \quad (4.83)$$

türevleri; (4.67), (4.68) ve (4.81) ye yerleştirilirse, sırasıyla,

$$R = 2(n^2 + n + \xi)t^{-2} \quad (4.84)$$

$$G = 8n(n-1)\xi t^{-4} \quad (4.85)$$

$$F = \frac{2\alpha\xi w(n-1)}{1+w} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{8} \alpha G t^2 \quad (4.86)$$

elde edilir. (4.85) deki G ifadesinin $t = t(G)$ ters fonksiyonunu oluşturmaya olanak tanıdığı görülmektedir. Ancak, bu işi bir adım sonrasına bırakarak önce, hesap kolaylığı sağlaması bakımından, (4.86) yı, (4.85) den yazılabilecek $G t^2 = 8n(n-1)\xi t^{-2}$ ifadesi yardımıyla daha sade bir biçimde

$$F = \frac{2\alpha\xi w(n-1)}{1+w} \frac{1}{t^2} - \alpha n(n-1)\xi \frac{1}{t^2}$$

$$F = \frac{\alpha(n-1)\xi[2w-n(1+w)]}{1+w} \frac{1}{t^2} \quad (4.87)$$

yazalım. Şimdi, (4.85) den t yi

$$t = t(G) = \left| \frac{8n(n-1)\xi}{G} \right|^{\frac{1}{4}} \quad (4.88)$$

olarak çekip de bu son denkleme yerleştirirsek $F(G)$ yi

$$F = F(G) = \frac{\alpha(n-1)\xi[2w-n(1+w)]}{1+w} \left| \frac{G}{8n(n-1)\xi} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (4.89)$$

olarak tesis etmiş oluruz. Ancak, bu aşamaya gelmeden önce, (4.88) deki t fonksiyonunun gerçekten de reel değerli olduğundan emin olmak gerekmektedir. Bunun için, mutlak değer içindeki ifadenin işaret incelemesini yapalım ve bu amaçla

$$N_{\lambda,n} \equiv 8n(n-1)\xi = 8n(n-1) \left(1 - \lambda^2 \frac{t_0^2}{k_1^2 B_0^2} \right) \quad (4.90)$$

gibi bir büyüklük tanımlayalım. Bu takdirde, (4.85) in $G = N_{\lambda,n} t^{-4}$ şeklinde yazılışından anlaşılacağı üzere G nin işaretini $N_{\lambda,n}$ belirlemektedir, yani,

$$\begin{aligned} N_{\lambda,n} > 0 & \quad \text{ise} \quad G > 0 \\ N_{\lambda,n} < 0 & \quad \text{ise} \quad G < 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

dir. O halde, $N_{\lambda,n} / G$ oranı daima pozitif olacağından, t reel değerli olur ve dolayısıyla da (4.89), mutlak değere gerek kalmaksızın

$$F = F(G) = \frac{\alpha(n-1)\xi[2w-n(1+w)]}{1+w} \sqrt{\frac{G}{8n(n-1)\xi}} \quad (4.92)$$

şeklinde ifade edilebilir. λ ve n parametrelerinin değerlerine göre $N_{\lambda,n}$ nin işareti aşağıdaki işaret tablolarından hareketle belirlenebilir.

Tablo 4.2.a : n parametresinin işaret tablosu

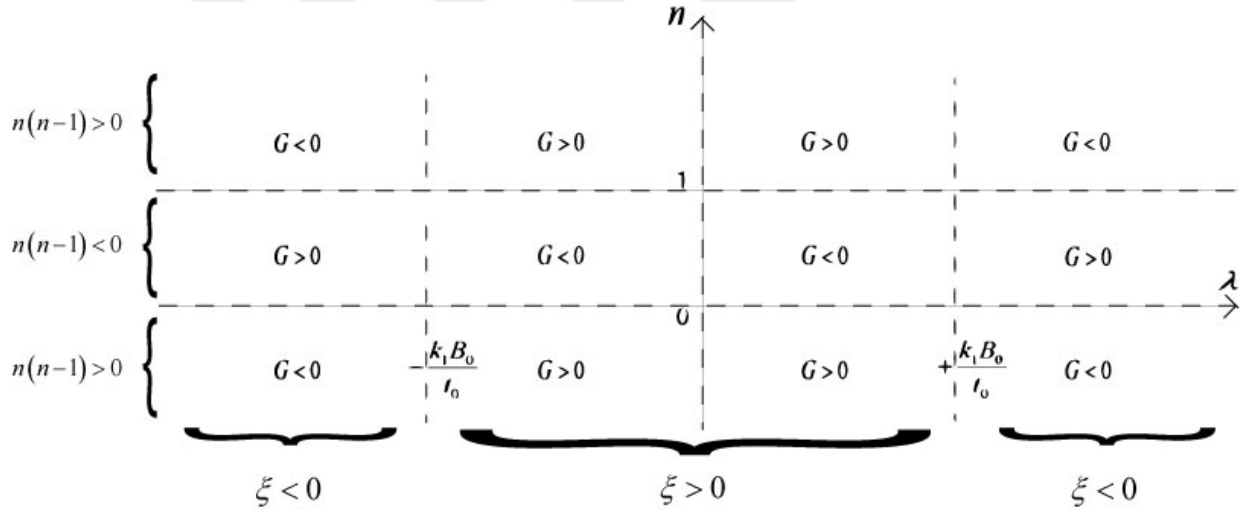
n	0	1
$n(n-1)$	+	-

Tablo 4.2.b : λ parametresinin işaret tablosu

λ	$-\frac{k_1 B_0}{t_0}$	0	$+\frac{k_1 B_0}{t_0}$
ξ	-	+	-

Buradan da, $N_{\lambda,n}$ nin, ve dolayısıyla da G nin; λ ve n parametrelerinin değerlerine göre işareti, Tablo 4.2.c deki gibi iki girdili bir (λ, n) – tablosu ile gösterilebilir.

Tablo 4.2.c: (λ, n) parametrelerine göre G nin işaret tablosu



Buna göre:

$$N_{\lambda,n} > 0 \text{ ve } G > 0 \text{ bölgeler için: } F(G) = + \frac{\alpha[2w - n(1+w)]\sqrt{8n(n-1)}\xi}{8n(1+w)} \sqrt{G} \quad (4.93.a)$$

$$N_{\lambda,n} < 0 \text{ ve } G < 0 \text{ bölgeler için: } F(G) = - \frac{\alpha[2w - n(1+w)]\sqrt{-8n(n-1)}\xi}{8n(1+w)} \sqrt{-G} \quad (4.93.b)$$

yazılabilir. Şimdi, söz konusu model üzerinden şu saptamalara işaret edelim:

1) Yukarıda hareket noktası olarak (4.69) ve (4.70) deki Friedmann denklemlerini aldık ve bunlara (4.78) deki hal denklemini uyguladık. Ve ayrıca da, bilinmeyen $A(t)$ ölçek çarpanı fonksiyonu için (4.82) deki kuvvet kanunu fonksiyonunu seçtik. Şimdi acaba, başka denklemlerden de yola çıkmış olsaydık, aynı $F(G)$ çözümüne varır mıydık? Aşağıda diğer muhtelif seçenekleri ele almaktayız.

2) $A(t)$ ölçek çarpanı fonksiyonu (4.82) deki kuvvet kanunu fonksiyonunu olarak biliniyor kaydıyla, hal denklemiyle birlikte, mesela, (4.71) deki birleştirilmiş denklem ile (4.74) deki korunum denkleminin yola çıkmış olsaydık acaba ne elde ederdik? Bunun cevabına yönelik olarak; önce, (4.74) deki korunum denkleminin $\mu^m(t)$ çözümünün (4.82) seçimi için

$$\mu^m(t) \equiv \mu^m = \beta t^{-(n+2)(1+w)} \quad , \quad (\beta \equiv \mu_0^m t_0^{(n+2)(1+w)}) \quad (4.94)$$

olduğunu kaydedelim. $A(t)$ ölçek çarpanının (4.82) deki seçimi ile (4.78) deki hal denklemini, yukarıdaki μ^m çözümü ile birlikte (4.71) e yerleştirildiğinde

$$-\xi \frac{(n-1)}{t^2} = \frac{\kappa^2(1+w)\beta}{\alpha} t^{-(n+2)(1+w)} \quad (4.95.a)$$

ya da

$$-\alpha \xi (n-1) = \kappa^2(1+w)\beta t^{-n(1+w)-2w} \quad (4.95.b)$$

denklemine yol açar. Bu ifadenin her t için geçerli olması demek, bir yandan

$$-n(1+w) - 2w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = -\frac{n}{n+2} \quad \Leftrightarrow \quad n = -\frac{2w}{1+w} \quad (4.96)$$

ve diğer yandan da

$$-\alpha \xi (n-1) = \kappa^2(1+w)\beta \quad (4.97.a)$$

bağıntılarının sağlanması gerektiği anlamına gelir. Bu son bağıntı, (4.96) nın yardımıyla,

$$-\alpha \xi (n-1)(n+2) = 2\kappa^2\beta \quad (4.97.b)$$

veya

$$\alpha\xi(1+3w) = \kappa^2\beta(1+w)^2 \quad (4.97.c)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Şekil 4.1.(a) ve Şekil 4.1.(b) de, sırasıyla, (4.96) daki $n = n(w)$ ve $w = w(n)$ fonksiyonlarının değişimleri gösterilmektedir. w nun değişim aralığı standard maddeye karşılık düşen $-1/3 < w \leq 1$ aralığı olarak alınmıştır ($w = -1/3$ değeri standard madde ile aşırı negatif basınçlı madde (karanlık enerji) sınırını oluşturduğundan aralığa dahil edilmemiştir). n parametresinin; (4.82) de belirtildiği üzere $n \neq 0,1$ olduğuna da dikkat ederek

$$-1/3 < w < 0 < w \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq n < 0 < n < 1 \quad (4.98)$$

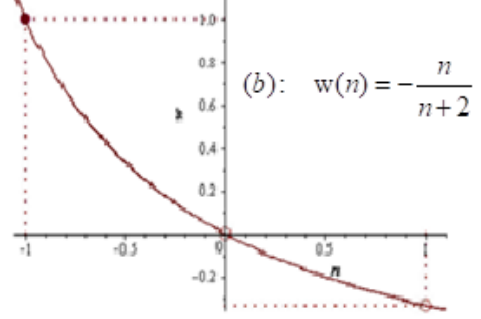
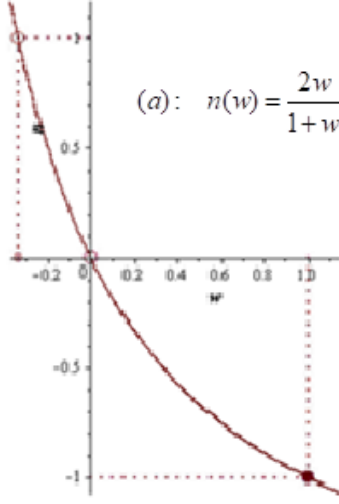
biçiminde kısıtlanmış olduğu kolayca görülür ve bu da (4.97.b) denklemi aracılığıyla, α ve ξ parametreleri üzerine

$$\kappa^2\beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\xi > 0 \quad (4.99)$$

kısıtlamasını getirir. Öte yandan, (4.96) kısıtlamaları altında, (4.94) çözümü de

$$\mu^m = \mu_0^m \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2}, \quad \beta = \mu_0^m t_0^2 \quad (4.100)$$

olur.



Şekil4.1.(a): $n = n(w)$ fonksiyonun değişimi Şekil4.1.(b): $w = w(n)$ fonksiyonun değişimi

Şimdi, bu varılan sonuçlar ışığında (4.92) deki çözüme geri dönelim. (4.96) kullanılarak bunun

$$F = F(G) = -2\alpha\xi n(n-1) \sqrt{\frac{G}{8n(n-1)\xi}} \quad (4.101)$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülür. (4.98) bağıntısı n parametresini daha da kısıtladığından G nin işareti, Tablo: 4.2.c yerine, artık aşağıdaki Tablo: 4.2.d ile verilecektir. Buna göre:

$$N_{\lambda,n} > 0 \text{ ve } G > 0 \text{ bölgeler için : } F(G) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \sqrt{n(n-1)\xi} \sqrt{G} \quad (4.102.a)$$

$$N_{\lambda,n} < 0 \text{ ve } G < 0 \text{ bölgeler için : } F(G) = +\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \sqrt{n(n-1)\xi} \sqrt{G} \quad (4.102.b)$$

olacaktır.

$$F = F(G) = -2\kappa^2 w\beta \left[\frac{8n(n-1)\xi}{G} \right]^{-\frac{(n+2)(1+w)}{4}} - \alpha\xi n(n-1) \left[\frac{8n(n-1)\xi}{G} \right]^{-1/2} + C_2 G \quad (4.105)$$

ifadesine dönüşmektedir. Ancak; bu, yukarıda F için tesis etmiş olduğumuz fonksiyonel formdan tamamen farklı bir görünüm taşımaktadır((4.101) ile karşılaştırınız). Söz konusu uyumsuzluğun çözümü aşağıdaki saptama belirtildikten sonra ele alınacaktır.

5) $F(G)$ fonksiyonunu; (4.69)-(4.74) deki denklemlerden hiçbirine gerek duymaksızın, doğrudan doğruya (4.64) bağıntısından hareketle, yalnızca (4.82) ve (4.85) bağıntılarını kullanarak tesis etmek mümkündür. Gerçekten de, (4.82) deki $A(t)$ seçimi için elde edilen (4.85) bağıntısı (ya da (4.88) bağıntısı), (4.64) e yerleştirilirse

$$F_G = -\frac{1}{8}\alpha \left[\frac{8n(n-1)\xi}{G} \right]^{1/2} + C_2 \quad (4.106)$$

elde edilir ve bunun da integrasyonundan, daha önce (4.101) de yazılmış olan

$$F(G) = -2\alpha\xi n(n-1) \left[\frac{G}{8n(n-1)\xi} \right]^{1/2} + C_2 G \quad (4.107)$$

çözümü bulunur. Şimdi, (4.105) çözümüne geri dönelim. Bunun (4.107) deki çözüm ile bağdaşması için, ikisi birbirlerine eşitlenir ve gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$-2\kappa^2 w\beta \left[\frac{8n(n-1)\xi}{G} \right]^{-\frac{(n+2)(1+w)}{4}} = -\alpha\xi n(n-1) \left[\frac{8n(n-1)\xi}{G} \right]^{-1/2} \quad (4.108)$$

bağıntısı elde edilir. Bunun her G için sağlanması, ancak ve ancak

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(n+2)(1+w) &= -\frac{1}{2} \\ -2\kappa^2 w\beta &= -\alpha\xi n(n-1) \end{aligned} \quad (4.109)$$

bağıntılarının birlikte sağlanmasıyla mümkün olur. Bunlar ise, (4.96) ve (4.97) bağıntılarından başka bir şey değildirler. Böylece (4.105) deki çözümün, aslında, (4.101) deki çözüme indirgenebileceğini göstermiş olmaktadır.

Bu paragrafı kapamadan önce şu önemli noktaya da işaret edelim; eğer $A(t)$ için (4.82) deki kuvvet kanunu yerine, mesela, $A(t) = A_0 e^{m(\frac{t}{t_0}-1)}$, ($m > 0$) şeklinde bir “de Sitter tipi” genişleme, yani, bir üstel kanun seçmiş olsaydık, denklemler $F(G) \propto \sqrt{|G|}$ verirken, (4.64) bağıntısı ise $F(G) \propto \ln|G|$ vermektedir. Bu uyuşmazlığın nedeni, aşağıdaki saptamada matematiksel olarak açık bir şekilde göstereceğimiz üzere; $t=t(G)$ ters fonksiyonunu elde etmek üzere matematiksel bir uygunluk olarak seçtiğimiz (4.82) deki kuvvet kanununun, korunum denklemi ile diğer denklemlerin bir çözümü olması; buna karşılık, aynı matematiksel uygunluğu sağlamasına rağmen üstel kanunun söz konusu denklemlerin bir çözümü olma özelliği taşımasıdır.

6) $A(t)$ yi peşinen seçmeyip de denklemlerden hareketle belirlemeye çalışalım. Bunun için korunum kanununun (4.74) deki

$$\mu^m = \mu_0^m \left(\frac{A}{A_0} \frac{t^2}{t_0^2} \right)^{-(1+w)} = \mu_0^m A_0^{1+w} t_0^{2(1+w)} A^{-(1+w)} t^{-2(1+w)} \quad (4.110)$$

çözümünü F fonksiyonu ile bunun F_G türevini içermeyen (4.71) denklemine -ki, bu (4.69) ve (4.70) Friedmann denklemlerinin bir birleştirilmesi idi- yerleştirirsek

$$-\xi \left[\frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] = \kappa^2 \frac{1+w}{\alpha} \mu_0^m A_0^{1+w} t_0^{2(1+w)} A^{-(1+w)} t^{-2(1+w)} \quad (4.111)$$

denklemini elde ederiz. Bu, bilinmeyen $A(t)$ fonksiyonuna göre birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Sabitler topluluğu için

$$K \equiv -\kappa^2 \frac{1+w}{\xi \alpha} \mu_0^m A_0^{1+w} t_0^{2(1+w)} \quad (4.112)$$

ile bir K sabiti tanımlayarak (4.111) i aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$t^{2w+1} A^w \dot{A} - t^{2w} A^{1+w} = K \quad (4.113)$$

Bunun genel çözümü için, C_1 bir integrasyon sabiti olmak üzere,

$$A(t) = \left[\frac{C_1 t^{w+1}(1+3w) - K t^{-2w}(1+w)}{1+3w} \right]^{\frac{1}{1+w}} \quad (4.114)$$

bulmaktayız. C_1 keyfi olduğundan, eğer $C_1 = 0$ alınırsa

$$A(t) = \left[\frac{-K(1+w)}{1+3w} \right]^{\frac{1}{1+w}} t^{-\frac{2w}{1+w}} \quad (4.115)$$

ya da

$$A(t) = \left[\frac{\kappa^2 (1+w)^2}{\xi \alpha} \mu_0^m A_0^{1+w} t_0^{2(1+w)} \right]^{\frac{1}{1+w}} t^{-\frac{2w}{1+w}} \quad (4.116)$$

şeklinde bir özel çözüm bulmuş oluruz. Şimdi

$$n \equiv -\frac{2w}{1+w} \quad (4.117)$$

alınırsa, bu taktirde $A(t) \propto t^n$ şeklinde kuvvet kanununun denklemleri sağlayan bir çözüm olarak kabul edilebilir olduğu ortaya çıkar.

7) Yukarıdaki incelemelerden çıkan temel sonuç şu olmaktadır. Ölçek çarpanlarının $t = t(G)$ ters fonksiyonunu verecek şekilde seçilmeleri ancak ve ancak yol gösterici (heuristic=kılavuzlayıcı) bir mahiyet taşımaktadır. Esas olan; bunların, özellikle F ve F_G yi içermeyen, korunum denklemi ile birlikte kullanılan (4.71) denklemini sağlamaları gerektiğidir. Bu anlamda (4.71) ile korunum denklemi birlikteliği bir bağ denklemi rolü oynamaktadır.

4.2.1.2. $i \oplus i_l$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi

Denklemlerimizin daha anlaşılır bir şekilde olması ve yollama yapmayı kolaylaştırmak üzere $i \oplus i_l$ tutarlılık koşulunu aşağıdaki gibi tekrarlıyoruz.

$$B = k_2 A \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.118)$$

İlk olarak $f(R, G)$ fonksiyonunu α ile $\alpha \neq 0$ olan gerçel bir sayı ve $F(G)$ ile de G nin keyfi bir fonksiyonu gösterilmek üzere

$$f(R, G) = \alpha R + F(G) \quad (4.119)$$

şeklinde özel bir form göz önüne alalım. Bu durumda, (4.118) ve (4.119) ifadeleri birlikte ele alındığı takdirde

$$f_R = \text{Sabit} = \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{f}_R = 0 \quad \text{ve} \quad \ddot{f}_R = 0 \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} f_G = F_G &= -\frac{\alpha}{8}t^2 + C_1t + C_2 \\ \dot{f}_G = \dot{F}_G &= -\frac{\alpha}{4}t + C_1 \\ \ddot{f}_G = \ddot{F}_G &= -\frac{\alpha}{4} \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} f_R &= \alpha, \quad \frac{\dot{f}_R}{f_R} = 0 = \frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\ \frac{f_G}{f_R} &= \frac{F_G}{f_R} = -\frac{1}{8}t^2 + \frac{C_1}{\alpha}t + \frac{C_2}{\alpha} \\ \frac{\dot{f}_G}{f_R} &= \frac{\dot{F}_G}{f_R} = -\frac{1}{4}t + \frac{C_1}{\alpha} \\ \frac{\ddot{f}_G}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_G}{f_R} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.122)$$

olur. Bunlar (4.50)-(4.57) bağıntılarına taşınırsa,

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \left(\frac{\dot{A}}{A} \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} - 3\frac{\dot{A}^3}{A^3} \right) t - \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} \left(1 + 4\frac{\dot{A}}{A} \frac{C_1}{\alpha} \right) + 12\frac{\dot{A}^3}{A^3} \frac{C_1}{\alpha} \\ = \kappa^2 \frac{\mu^m}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} (F(G) - GF_G) \end{aligned} \quad (4.123)$$

$$-2\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\ddot{A}}{A} \frac{\dot{A}}{A} t - 8\frac{\ddot{A}}{A} \frac{\dot{A}}{A} \frac{C_1}{\alpha} = \kappa^2 \frac{p^m}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} (F(G) - GF_G) \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned}
& -2\frac{\ddot{A}}{A} + 3\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \left(\frac{\dot{A}}{A} \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} - 3\frac{\dot{A}^3}{A^3} + 2\frac{\ddot{A}\dot{A}}{A A} \right) t - \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} \left(1 + 4\frac{\dot{A} C_1}{A \alpha} \right) \\
& + 12\frac{\dot{A}^3}{A^3} \frac{C_1}{\alpha} - 8\frac{\ddot{A}\dot{A} C_1}{A A \alpha} = \kappa^2 \frac{\mu^m + p^m}{\alpha}
\end{aligned} \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned}
& -6\frac{\ddot{A}}{A} + 3\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \left(\frac{\dot{A}}{A} \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} - 3\frac{\dot{A}^3}{A^3} + 6\frac{\ddot{A}\dot{A}}{A A} \right) t - \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} \left(1 + 4\frac{\dot{A} C_1}{A \alpha} \right) \\
& + 12\frac{\dot{A}^3}{A^3} \frac{C_1}{\alpha} - 24\frac{\ddot{A}\dot{A} C_1}{A A \alpha} = \kappa^2 \frac{\mu^m + 3p^m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} (F(G) - GF_G)
\end{aligned} \tag{4.126}$$

$$\begin{aligned}
& -6\frac{\ddot{A}}{A} - 3\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \left(\frac{\dot{A}}{A} \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} - 3\frac{\dot{A}^3}{A^3} - 6\frac{\ddot{A}\dot{A}}{A A} \right) t + \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} \left(1 + 4\frac{\dot{A} C_1}{A \alpha} \right) \\
& - 12\frac{\dot{A}^3}{A^3} \frac{C_1}{\alpha} - 24\frac{\ddot{A}\dot{A} C_1}{A A \alpha} = \kappa^2 \frac{-\mu^m + 3p^m}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} (F(G) - GF_G)
\end{aligned} \tag{4.127}$$

$$\dot{\mu}^m + \left(\frac{3\dot{A}}{A} \right) (1+w) \mu^m = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu^m \propto (A^3)^{-(1+w)}, \quad \mu^m = \mu_0^m \left(\frac{A^3}{A_0^3} \right)^{-(1+w)} \tag{4.128}$$

$$\frac{R}{2} = 3\frac{\ddot{A}}{A} + 3\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} \tag{4.129}$$

$$\frac{G}{8} = \frac{\ddot{A}}{A} \left(3\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A^2} \right) \tag{4.130}$$

elde edilir. (4.129) ve (4.130) daki $A(t)$ fonksiyonunun şeklini, $R = R(t)$ ve $G = G(t)$ veya $t = t(R)$ ve $t = t(G)$ ters fonksiyonunun çekilebilmesi mümkün olacak şekilde seçilmelidir. Bu durumda, (4.123)-(4.127) denklemleri yalnızca R cinsinden veya G cinsinden denklemlere dönüşür ve buradan da F fonksiyonunu kolayca tesis edebiliriz.

Şimdi $A(t)$ ölçek çarpanını aşağıdaki gibi seçelim.

$$A(t) = A_0 e^{mt} \tag{4.131}$$

$A(t)$ fonksiyonunun hesaplamalarda kullanılmak üzere gerekli türevleri,

$$\frac{\dot{A}}{A} = m \quad , \quad \frac{\ddot{A}}{A} = m^2 \quad (4.132)$$

biçimindedir. (4.131) ve (4.132) ifadeleri sırasıyla (4.129) ve (4.130) a yerleştirilirse,

$$R = 12m^2 - 2K^2 e^{-2mt} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2m} \ln \left(\frac{2K^2}{12m^2 - R} \right) \quad (4.133)$$

$$G = 24m^4 - 8m^2 K^2 e^{-2mt} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2m} \ln \left(\frac{8m^2 K^2}{24m^4 - G} \right) \quad (4.134)$$

ve burada $K^2 = \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2 A_0^2}$ olmak üzere elde edilir.

(4.123) ve (4.124) ifadeleri

$$p^m = w\mu^m \quad (4.135)$$

hal denkleminde taşınır ve $A(t)$ fonksiyonunu ve türevlerini yerlerine yazarsak,

$$F = GF_G + \frac{2\alpha}{(1+w)} \left[\left(1 - mt + 4m \frac{C_1}{\alpha} \right) \left(-2m^2 - w(3m^2 - K^2 e^{-2mt}) \right) \right] \quad (4.136)$$

olur ya da (4.121) deki $F_G = -\frac{\alpha}{8}t^2 + C_1 t + C_2$ bağıntısı kullanılırsa

$$F = -\frac{\alpha}{8}Gt^2 + C_1 Gt + C_2 G + \frac{2\alpha}{(1+w)} \left[\left(1 - mt + 4m \frac{C_1}{\alpha} \right) \left(-2m^2 - w(3m^2 - K^2 e^{-2mt}) \right) \right] \quad (4.137)$$

elde edilir. $C_2 G$ terimi G nin bir katı olduğundan topolojik invaryant durumundadır ve alan denklemlerine katkısı bulunmamaktadır. (4.137) de görüldüğü üzere $F = F(t)$ biçimindedir. Şimdi $F = F(G)$ fonksiyonunu elde edebilmek için (4.134) bağıntısını (4.137) eşitliğine yerleştirmek gerekmektedir. Bu durumda,

$$F = F(G) = \left\{ -\frac{\alpha}{8} \left[\frac{1}{2m} \ln \left(\frac{8m^2 K^2}{24m^4 - G} \right) \right] + C_1 + \frac{4m^3 \alpha}{1+w} \frac{1}{G} + \frac{w}{1+w} \frac{\alpha}{4m} \right\} \frac{1}{2m} \ln \left(\frac{8m^2 K^2}{24m^4 - G} \right) G - \frac{4m^2 \alpha}{1+w} \left(1 + 4m \frac{C_1}{\alpha} \right) \quad (4.138)$$

elde edilir.

4.2.1.3. $i \oplus i_3$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi

Bu koşul takımı için hesaplarımıza Gauss-Bonnet teriminden yani (4.57) ifadesini göz önüne alalım ve bu durum için $A(t)$ ve $B(t)$ ölçek çarpanlarının fonksiyonel formunu aşağıdaki gibi seçelim:

$$A(t) = A_0 t^m \quad (4.139)$$

$$B(t) = B_0 t^n \quad (4.140)$$

olsun. Fonksiyonel formu yukarıdaki gibi seçilen ölçek çarpanları için hesaplamalarda yollama yapmayı kolaylaştırmak üzere gerekli türev ifadeleri,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{m}{t}, \quad \frac{\ddot{A}}{A} = \frac{m(m-1)}{t^2} \quad (4.141)$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{n}{t}, \quad \frac{\ddot{B}}{B} = \frac{n(n-1)}{t^2} \quad (4.142)$$

biçimindedir. (4.139)-(4.142) bağıntıları (4.57) ye yerleştirilirse

$$\frac{G}{8} = \frac{m(m-1)}{t^2} \left(\frac{n^2}{t^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2 t^{2n}} \right) + 2 \frac{m}{t} \frac{n}{t} \frac{n(n-1)}{t^2} \quad (4.143)$$

olur. (4.143) ifadesi ayrıntılı olarak incelenirse, bu bağıntıdan t yi G cinsinden çekebilmemiz için bir ön koşul koymamız gerekmektedir. Bu durumda ilk terimi sıfır yapan $m=1$ seçimi yaparsak,

$$G = \frac{16n^2(n-1)}{t^4} \Rightarrow t = \left[\frac{16n^2(n-1)}{G} \right]^{1/4} \quad (4.144)$$

elde edilir. Şimdi $f(R, G)$ fonksiyonunu, α ile $\alpha \neq 0$ olan gerçel bir sayı ve $F(G)$ ile de G nin keyfi bir fonksiyonu gösterilmek üzere

$$f(R, G) = \alpha R + F(G) \quad (4.145)$$

şeklinde özel bir form göz önüne alalım. Bu durumda,

$$f_R = \text{Sabit} = \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{f}_R = 0 \quad \text{ve} \quad \ddot{f}_R = 0 \quad (4.146)$$

olur. $i \oplus i_3$ koşul takımı ve (4.146) ifadesi birlikte ele alındığı takdirde

$$\begin{aligned} f_G &= F_G = -\frac{\alpha}{8}t^2 + C_1t + C_2 \\ \dot{f}_G &= \dot{F}_G = -\frac{\alpha}{4}t + C_1 \\ \ddot{f}_G &= \ddot{F}_G = -\frac{\alpha}{4} \end{aligned} \quad (4.147)$$

elde edilir. Daha sonra hesaplamalara gönderme yapmak için aşağıdaki şu yararlı bağıntıları oluşturalım.

$$\begin{aligned} f_R &= \alpha, \quad \frac{\dot{f}_R}{f_R} = 0 = \frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\ \frac{f_G}{f_R} &= \frac{F_G}{f_R} = -\frac{1}{8}t^2 + \frac{C_1}{\alpha}t + \frac{C_2}{\alpha} \\ \frac{\dot{f}_G}{f_R} &= \frac{\dot{F}_G}{f_R} = -\frac{1}{4}t + \frac{C_1}{\alpha} \\ \frac{\ddot{f}_G}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_G}{f_R} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.148)$$

$i \oplus i_3$ koşul takımı altında elde edilen tüm bağıntılar (4.50)-(4.54) e taşınırsa,

$$\frac{2n(1-n)}{t^2} + 4 \frac{C_1}{\alpha} \left(\frac{3n^2}{t^3} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2 t^{2n+1}} \right) = \kappa^2 \frac{\mu^m}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} (F(G) - GF_G) \quad (4.149)$$

$$\frac{2n(n^2 - 2n + 1)}{3t^2} - \frac{4}{3} \frac{C_1}{\alpha} \left(\frac{2n(n-1)(n+1)}{t^3} \right) = \kappa^2 \frac{p^m}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} (F(G) - GF_G) \quad (4.150)$$

$$\frac{2n(n^2 - 5n + 4)}{3t^2} + 4\frac{C_1}{\alpha} \left(\frac{-2n^3 + 9n^2 + 2n}{3t^3} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2 t^{2n+1}} \right) = \kappa^2 \frac{\mu^m + p^m}{\alpha} \quad (4.151)$$

$$\frac{2n(n^2 - 3n + 2)}{t^2} + 4\frac{C_1}{\alpha} \left(\frac{n(-2n^2 + 3n + 2)}{t^3} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2 t^{2n+1}} \right) = \kappa^2 \frac{\mu^m + 3p^m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} (F(G) - GF_G) \quad (4.152)$$

$$\frac{2n^2(n-1)}{t^2} + 4\frac{C_1}{\alpha} \left(\frac{n(-2n^2 - 3n + 2)}{t^3} + \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2 t^{2n+1}} \right) = \kappa^2 \frac{-\mu^m + 3p^m}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} (F(G) - GF_G) \quad (4.153)$$

elde edilir. (4.149) ve (4.150) ifadeleri

$$p^m = w\mu^m \quad (4.154)$$

hal denkleminde taşınırsa,

$$F = GF_G + \frac{2\alpha}{1+w} \left[\frac{2n(n^2 - 2n + 1) - 6n(1-n)w}{3t^2} + 4\frac{C_1}{\alpha} \left(\frac{-2n(n-1)(n+1) - 9n^2w}{3t^3} + \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2 t^{2n+1}} w \right) \right] \quad (4.155)$$

bulunur. $F_G = -\frac{\alpha}{8}t^2 + C_1t + C_2$ ifadesini (4.155) eşitliğinde yerine yazarsak, F fonksiyonunu

$F = F(t)$ cinsinden elde ederiz.

$$\begin{aligned} X &= 2n(n^2 - 2n + 1) - 6n(1-n)w \\ Y &= -2n(n-1)(n+1) - 9n^2w \\ Z &= \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2} w \end{aligned} \quad (4.156)$$

F fonksiyonunu daha anlaşılır bir şekilde (4.156) kısaltmalarını kullanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$F = -\frac{\alpha}{8}Gt^2 + C_1Gt + C_2G + \frac{2\alpha}{1+w} \left[\frac{X}{3t^2} + 4\frac{C_1}{\alpha} \left(\frac{Y}{3t^3} + \frac{Z}{t^{2n+1}} \right) \right] \quad (4.157)$$

Burada C_2G terimi topolojik invaryant olduğu için etkisi yoktur. Son olarak $t=t(G)$ ters fonksiyonu cinsinden (4.144) ifadesini, (4.157) eşitliğinde yerlerine yazarsak

$$F = -\frac{\alpha}{8} [16n^2(n-1)]^{1/2} G^{1/2} + C_1 [16n^2(n-1)]^{1/4} G^{3/4} + \frac{2\alpha}{1+w} \left[\frac{X}{3[16n^2(n-1)]^{1/2}} G^{1/2} + 4 \frac{C_1}{\alpha} \left(\frac{Y}{3[16n^2(n-1)]^{3/4}} G^{3/4} + \frac{Z}{[16n^2(n-1)]^{2n+1/4}} G^{2n+1/4} \right) \right] \quad (4.158)$$

bulunur.

4.2.2. j -Birincil Koşulu Altında Denklemlerin İndirgenmesi

İlk olarak j -birincil koşulunu, yani

$$(j) \quad C \neq k_1 B \quad \text{ve} \quad 1 + 4 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_G}{f_R} = 0$$

bağıntılarını göz önüne alalım ve bunlar ışığında $\mu^{t.ef}$, $p^{t.ef}$, $\mu^{t.ef} + p^{t.ef}$, $\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$, $-\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$, μ^m , R ve G nin, üç bilinmeyenli ölçek çarpanı içeren indirgenmiş ifadeleri sırasıyla daha önceki hesaplamalardan elde edilen (4.4), (4.5), (4.11), (4.12), (4.13), (4.19), (4.9) ve (4.10) bağıntıları olduğunu belirtelim.

4.2.2.1. $j \oplus j_1$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi

Denklemlerimizin daha anlaşılır bir şekilde olması ve yollama yapmayı kolaylaştırmak üzere $j \oplus j_1$ tutarlılık koşulunu aşağıdaki gibi tekrarlayalım.

$$B = k_2 A \quad \text{ve} \quad f_R + 4 \ddot{f}_G = 0 \quad (4.159)$$

Bu durumu altında (4.4), (4.5), (4.9) ve (4.10) eşitlikleri

$$\mu^{t.ef} : \quad \frac{\dot{A}^2}{A^2} + 2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{\lambda^2}{C^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) - \left(2\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} - 4\frac{\dot{A}}{A} \left(3\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} \quad (4.160)$$

$$\begin{aligned} p^{t.ef} : \quad & -\frac{2}{3} \left(2\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} \right) + \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{C^2} \\ & = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{2}{3} \left(2\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\ & + \frac{4}{3} \left[2\frac{\ddot{A}\dot{C}}{AC} + 2\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} + \frac{4}{3} \left[\left(2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} \right) - \frac{\lambda^2}{C^2} \right] \frac{\ddot{f}_G}{f_R} \end{aligned} \quad (4.161)$$

$$\frac{R}{2} = 2\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + 2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\lambda^2}{C^2} \quad (4.162)$$

$$\frac{G}{8} = \frac{\ddot{A}}{A} \left(2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) + \frac{\ddot{C}}{C} \frac{\dot{A}^2}{A^2} \quad (4.163)$$

elde edilir. (4.160)-(4.163) ifadelerini incelediğimizde iki bilinmeyen ölçek çarpanı göze çarpmaktadır. Bu durumda ölçek çarpanlarını aşağıdaki gibi seçelim.

$$A(t) = A_0 t^n \quad (4.164)$$

$$C(t) = C_0 t^m \quad (4.165)$$

Fonksiyonel formu yukarıdaki gibi seçilen ölçek çarpanları için hesaplamalarda yollama yapmayı kolaylaştırmak üzere gerekli türev ifadeleri,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{n}{t}, \quad \frac{\ddot{A}}{A} = \frac{n(n-1)}{t^2} \quad (4.166)$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{m}{t}, \quad \frac{\ddot{C}}{C} = \frac{m(m-1)}{t^2} \quad (4.167)$$

biçimindedir. (4.164)-(4.167) bağıntıları (4.162) ve (4.163) e yerleştirilirse

$$\frac{R}{2} = \frac{3n^2 + (2n+m)(m-1)}{t^2} - \frac{\lambda^2}{C_0^2 t^{2m}} \quad (4.168)$$

$$\frac{G}{8} = \frac{n(n-1)}{t^2} \left(\frac{2nm}{t^2} - \frac{\lambda^2}{C_0^2 t^{2m}} \right) + \frac{n^2 m(m-1)}{t^4} \quad (4.169)$$

olur. (4.168) ve (4.169) ifadesi ayrıntılı olarak incelenirse, bu bağıntılardan t yi R ve G cinsinden çekebilmemiz için bir ön koşul koymamız gerekmektedir. İlk göze çarpan $n=1$ şartını koyarsak (4.169) eşitliğinden t yi G cinsinden elde edebiliriz. Fakat (4.168) bağıntısı incelenirse bu şart altından t yi R cinsinden çekemeyiz. Bu durumda bir diğer şart olabilecek $m=1$ için, (4.168) ve (4.169) ifadelerinden t yi R ve G cinsinden çekebiliriz. $m=1$ durumu altında (4.168) ve (4.169) bağıntıları incelenirse,

$$R = \frac{2}{C_0^2} \left(\frac{3C_0^2 n^2 - \lambda^2}{t^2} \right) \Rightarrow t = \left[\frac{2}{C_0^2} \left(\frac{3C_0^2 n^2 - \lambda^2}{R} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.170)$$

$$G = \frac{8n(n-1)(2C_0^2 n - \lambda^2)}{C_0^2 t^4} \Rightarrow t = \left[\frac{8n(n-1)(2C_0^2 n - \lambda^2)}{C_0^2 G} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (4.171)$$

elde edilir. $j \oplus j_1$ tutarlılık koşulunu aşağıda tekrarlayalım.

$$\dot{f}_G = K_2 A \quad (4.172.a)$$

$$\ddot{f}_G = K_2 \dot{A} \quad (4.172.b)$$

$$f_R = -4K_2 \dot{A} \quad (4.172.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_2 \ddot{A} \quad (4.172.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_2 \ddot{\ddot{A}} \quad (4.172.e)$$

Bu bağıntılar ışığında şu yararlı ifadeler sonraki hesaplamalarda kullanılmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{f}_R}{f_R} &= \frac{\dot{F}_R}{F_R} = \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} & \frac{\ddot{f}_R}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_R}{F_R} = \frac{\ddot{\ddot{A}}}{\ddot{A}} \\ \frac{\dot{f}_G}{f_R} &= \frac{\dot{F}_G}{F_R} = -\frac{1}{4} \frac{A}{\dot{A}} & \frac{\ddot{f}_G}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_G}{F_R} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.173)$$

elde edilir. (4.160) ve (4.161) ifadelerine (4.173) bağıntıları yerleştirilirse,

$$2\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\ddot{A}\dot{C}}{\dot{A}C} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.174)$$

$$-2\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.175)$$

bulunur. Yukarıdaki bu iki eşitlikte ölçek çarpanlarını yerlerine yazarsak,

$$\frac{3n^2 - 2n - 1}{t^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.176)$$

$$\frac{(n-1)(2-3n)}{t^2} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.177)$$

eşitliklerine ulaşılır. (4.176) ve (4.177) ifadeleri

$$p^m = w\mu^m \quad (4.178)$$

hal denkleminde taşınırsa,

$$F = GF_G + RF_R + \frac{2F_R}{1+w} \left[\frac{(n-1)(2-3n) - (3n^2 - 2n - 1)w}{t^2} \right] \quad (4.179)$$

elde edilir. (4.179) eşitliğinde bilinmeyen diğer ifadeleri de t cinsinden yazarsak,

$$\begin{aligned} f_R = F_R = -4K_2\dot{A} &\Rightarrow f_R = F_R = -4K_2A_0nt^{n-1} \\ \dot{f}_G = \dot{F}_G = K_2A &\Rightarrow f_G = F_G = \frac{K_2A_0}{n+1}t^{n+1} + C_1 \end{aligned} \quad (4.180)$$

elde ederiz. (4.180) ifadeleri (4.179) a taşınırsa,

$$F = \frac{K_2A_0}{n+1} Gt^{n+1} + C_1G - 4K_2A_0nt^{n-1}R - 8K_2A_0n \left[\frac{(n-1)(2-3n) - (3n^2 - 2n - 1)w}{1+w} \right] t^{n-3} \quad (4.181)$$

elde edilir. Burada $C_1 G$ terimi topolojik invaryant olduğu için etkisi yoktur. Son olarak (4.170) ve (4.171) ifadelerini kullanılarak t yi aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} X &= 4n(n-1)(2C_0^2 n - \lambda^2) \\ Y &= 3C_0^2 n^2 - \lambda^2 \end{aligned} \quad (4.182)$$

$$t = \left[\frac{X}{Y} \frac{R}{G} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.183)$$

elde ederiz. (4.183) ifadesini, (4.181) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} F &= \frac{K_2 A_0}{n+1} \left[\frac{X}{Y} \right]^{\frac{n+1}{2}} R^{\frac{n+1}{2}} G^{\frac{1-n}{2}} - 4K_2 A_0 n \left[\frac{X}{Y} \right]^{\frac{n-1}{2}} R^{\frac{n+1}{2}} G^{\frac{1-n}{2}} \\ &\quad - 8K_2 A_0 n \left[\frac{(n-1)(2-3n) - (3n^2 - 2n - 1)w}{1+w} \right] \left[\frac{X}{Y} \right]^{\frac{n-3}{2}} R^{\frac{n-3}{2}} G^{\frac{3-n}{2}} \end{aligned} \quad (4.184)$$

bulunur.

4.2.2.2. $j \oplus j_2$ Koşul Takımı Altında $f(R, G)$ Modeli Tesisi

Denklemlerimizin daha anlaşılır bir şekilde olması ve yollama yapmayı kolaylaştırmak üzere $j \oplus j_2$ tutarlılık koşulunu aşağıdaki gibi tekrarlayalım.

$$Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0 \quad \text{ve} \quad f_R + 4\ddot{f}_G = 0 \quad (4.185)$$

$C = k_1 A$ durumu altında (4.4), (4.5), (4.9) ve (4.10) eşitlikleri

$$\begin{aligned} \mu^{t.ef} : \quad & \frac{\dot{A}^2}{A^2} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 A^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) - \left(2\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} \\ & - 4\frac{\dot{A}}{A} \left(3\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 A^2} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} \end{aligned} \quad (4.186)$$

$$\begin{aligned}
p^{t.ef} : \quad & -\frac{2}{3} \left(2 \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \right) + \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{k_1^2 A^2} \\
& = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2 f_R} (f - R f_R - G f_G) + \frac{2}{3} \left(2 \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} \\
& \quad + \frac{4}{3} \left[2 \frac{\ddot{A}\dot{B}}{AB} + 2 \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} + \frac{4}{3} \left[\left(2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} \right) - \frac{\lambda^2}{k_1^2 A^2} \right] \frac{\ddot{f}_G}{f_R}
\end{aligned} \tag{4.187}$$

$$\frac{R}{2} = 2 \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 A^2} \tag{4.188}$$

$$\frac{G}{8} = \frac{\ddot{A}}{A} \left(2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 A^2} \right) + \frac{\ddot{B}}{B} \frac{\dot{A}^2}{A^2} \tag{4.189}$$

elde edilir. (4.186)-(4.189) ifadelerini incelediğimizde iki bilinmeyen ölçek çarpanı göze çarpmaktadır. Bu durumda ölçek çarpanlarını aşağıdaki gibi seçelim.

$$A(t) = A_0 t^n \tag{4.190}$$

$$B(t) = B_0 t^m \tag{4.191}$$

Fonksiyonel formu yukarıdaki gibi seçilen ölçek çarpanları için hesaplamalarda yollama yapmayı kolaylaştırmak üzere gerekli türev ifadeleri,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{n}{t} \quad , \quad \frac{\ddot{A}}{A} = \frac{n(n-1)}{t^2} \tag{4.192}$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{m}{t} \quad , \quad \frac{\ddot{B}}{B} = \frac{m(m-1)}{t^2} \tag{4.193}$$

biçimindedir. (4.190)-(4.193) bağıntıları (4.188) ve (4.189) a yerleştirilirse

$$\frac{R}{2} = \frac{3n^2 + (2n+m)(m-1)}{t^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 A_0^2 t^{2n}} \tag{4.194}$$

$$\frac{G}{8} = \frac{n(n-1)}{t^2} \left(\frac{2nm}{t^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 A_0^2 t^{2n}} \right) + \frac{n^2 m(m-1)}{t^4} \tag{4.195}$$

olur. (4.194) ve (4.195) ifadeleri ayrıntılı olarak incelenirse, bu bağıntılardan t yi R ve G cinsinden çekebilmemiz için bir ön koşul koymamız gerekmektedir. İlk göze çarpan $n=1$ şartını koyarsak, bu durum altında (4.194) ve (4.195) bağıntıları incelenirse,

$$R = \frac{k_1^2 A_0^2 (m^2 + m + 1) - 2\lambda^2}{k_1^2 A_0^2 t^2} \Rightarrow t = \left[\frac{k_1^2 A_0^2 (m^2 + m + 1) - 2\lambda^2}{k_1^2 A_0^2 R} \right]^{1/2} \quad (4.196)$$

$$G = \frac{8m(m-1)}{t^4} \Rightarrow t = \left[\frac{8m(m-1)}{G} \right]^{1/4} \quad (4.197)$$

elde edilir. $j \oplus j_2$ tutarlılık koşulunu aşağıda tekrarlayalım.

$$\dot{f}_G = K_2 A \quad (4.198.a)$$

$$\ddot{f}_G = K_2 \dot{A} \quad (4.198.b)$$

$$f_R = -4K_2 \dot{A} \quad (4.198.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_2 \ddot{A} \quad (4.198.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_2 \ddot{A} \quad (4.198.e)$$

Bu bağıntılar ışığında şu yararlı ifadeler sonraki hesaplamalarda kullanılmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{f}_R}{f_R} &= \frac{\dot{F}_R}{F_R} = \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} & \frac{\ddot{f}_R}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_R}{F_R} = \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} \\ \frac{\dot{f}_G}{f_R} &= \frac{\dot{F}_G}{F_R} = -\frac{1}{4} \frac{A}{\dot{A}} & \frac{\ddot{f}_G}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_G}{F_R} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.199)$$

elde edilir. (4.186) ve (4.187) ifadelerine (4.199) bağıntıları yerleştirilirse,

$$2 \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\dot{A}\ddot{B}}{AB} + \frac{\ddot{A}\dot{B}}{\dot{A}B} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.200)$$

$$-2 \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.201)$$

bulunur. Yukarıdaki bu iki eşitlikte ölçek çarpanlarını yerlerine yazarsak,

$$\frac{1-m}{t^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.202)$$

$$0 = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.203)$$

eşitliklerine ulaşılır. (4.202) ve (4.203) ifadeleri

$$p^m = w\mu^m \quad (4.204)$$

hal denklemine taşınırsa,

$$F = Gf_G + Rf_R + \frac{2f_R}{1+w} \left[\frac{(m-1)w}{t^2} \right] \quad (4.205)$$

elde edilir. (4.205) eşitliğinde bilinmeyen diğer ifadeleri de t cinsinden yazarsak,

$$\begin{aligned} f_R = -4K_2 \dot{A} &\Rightarrow f_R = -4K_2 A_0 n t^{n-1} = -4K_2 A_0 \\ \dot{f}_G = K_2 A &\Rightarrow f_G = \frac{K_2 A_0}{n+1} t^{n+1} + C_1 = \frac{K_2 A_0}{2} t^2 + C_1 \end{aligned} \quad (4.206)$$

elde ederiz. (4.206) ifadeleri (4.205) e taşınırsa,

$$F = \frac{K_2 A_0}{2} G t^2 + C_1 G - 4K_2 A_0 R - \frac{8K_2 A_0}{1+w} \frac{(m-1)w}{t^2} \quad (4.207)$$

olur. Burada $C_1 G$ terimi topolojik invariant olduğu için etkisi yoktur. Son olarak (4.196) ve (4.197) ifadelerini kullanılarak t yi aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} X &= 8m(m-1)k_1^2 A_0^2 \\ Y &= k_1^2 A_0^2 (m^2 + m + 1) - 2\lambda^2 \end{aligned} \quad (4.208)$$

$$t = \left[\frac{X}{Y} \frac{R}{G} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.209)$$

elde ederiz. (4.209) ifadesini, (4.207) eşitliğinde yerine yazarsak

$$F = \left[\frac{X - 8Y}{2Y} \right] K_2 A_0 R - \frac{8K_2 A_0 (m-1) w}{1+w} \frac{Y}{X} GR^{-1} \quad (4.210)$$

bulunur.

4.2.2.3. $j \oplus j_3$ Koşul Takımı Altında $f(R,G)$ Modeli Tesisi

Denklemlerimizin daha anlaşılır bir şekilde olması için $j \oplus j_3$ tutarlılık koşulunu aşağıdaki gibi tekrarlayalım.

$$\dot{f}_G = K_2 A \quad (4.211.a)$$

$$\ddot{f}_G = K_2 \dot{A} \quad (4.211.b)$$

$$f_R = -4K_2 \dot{A} \quad (4.211.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_2 \ddot{A} \quad (4.211.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_2 \ddot{\ddot{A}} \quad (4.211.e)$$

Bu bağıntılar ışığında şu yararlı ifadeler sonraki hesaplamalarda kullanılmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{f}_R}{f_R} &= \frac{\dot{F}_R}{F_R} = \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} & \frac{\ddot{f}_R}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_R}{F_R} = \frac{\ddot{\ddot{A}}}{\ddot{A}} \\ \frac{\dot{f}_G}{f_R} &= \frac{\dot{F}_G}{F_R} = -\frac{1}{4} \frac{\dot{A}}{\dot{A}} & \frac{\ddot{f}_G}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_G}{F_R} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.212)$$

elde edilir. Bu koşul takımı (4.4), (4.5), (4.9) ve (4.10) eşitlikleri üzerine herhangi bir değişiklik getirmemektedir. Bu durumda ilk olarak (4.9) ve (4.10) eşitliklerini göz önüne alalım.

$$R = 2 \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} - \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \quad (4.213)$$

$$G = 8 \left(\frac{\ddot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} + \frac{\ddot{B}\dot{C}\dot{A}}{BCA} + \frac{\ddot{C}\dot{A}\dot{B}}{CAB} - \frac{\ddot{A}}{A} \frac{\lambda^2}{C^2} \right) \quad (4.214)$$

$A(t)$, $B(t)$ ve $C(t)$ ölçek çarpanlarını aşağıdaki şekilde seçelim.

$$A(t) = A_0 t^m \quad (4.215)$$

$$B(t) = B_0 t^n \quad (4.216)$$

$$C(t) = C_0 t^p \quad (4.217)$$

Fonksiyonel formu yukarıdaki gibi seçilen ölçek çarpanları için hesaplamalarda yollama yapmayı kolaylaştırmak üzere gerekli türev ifadeleri,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{m}{t}, \quad \frac{\ddot{A}}{A} = \frac{m(m-1)}{t^2}, \quad \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} = \frac{(m-1)}{t} \quad (4.218)$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{n}{t}, \quad \frac{\ddot{B}}{B} = \frac{n(n-1)}{t^2}, \quad \frac{\ddot{B}}{\dot{B}} = \frac{(n-1)}{t} \quad (4.219)$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{p}{t}, \quad \frac{\ddot{C}}{C} = \frac{p(p-1)}{t^2}, \quad \frac{\ddot{C}}{\dot{C}} = \frac{(p-1)}{t} \quad (4.220)$$

biçimindedir. (4.215)-(4.220) bağıntıları (4.213) ve (4.214) e yerleştirilirse,

$$R = 2 \left(\frac{m(m-1) + n(n-1) + p(p-1) + mn + np + mp}{t^2} - \frac{\lambda^2}{C_0^2 t^{2p}} \right) \quad (4.221)$$

$$G = 8 \left(\frac{m(m-1)np + n(n-1)mp + p(p-1)mn}{t^4} - \frac{m(m-1)\lambda^2}{C_0^2 t^{2p+2}} \right) \quad (4.222)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden t yi çekebilmemiz için $p = 1$ seçimi yaparsak,

$$R = 2 \left(\frac{C_0^2 (m^2 + n^2 + mn) - \lambda^2}{C_0^2 t^2} \right) \Rightarrow t = \left[\frac{2C_0^2 (m^2 + n^2 + mn) - 2\lambda^2}{C_0^2 R} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.223)$$

$$G = 8 \left(\frac{mn(m+n-2)C_0^2 - m(m-1)\lambda^2}{C_0^2 t^4} \right) \Rightarrow t = \left[\frac{8\{mn(m+n-2)C_0^2 - m(m-1)\lambda^2\}}{C_0^2 G} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (4.224)$$

elde edilir. Şimdi elimizdeki bütün bağıntıları (4.4) ve (4.5) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\frac{m(m+2n+1) - (3n+1)}{t^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.225)$$

$$-\frac{1}{3} \left[\frac{(m-1)(4m^2 + n^2 + mn + m - n)}{mt^2} \right] = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.226)$$

eşitliklerine ulaşılır. (4.225) ve (4.226) ifadeleri

$$p^m = w\mu^m \quad (4.227)$$

hal denkleminde taşınırsa,

$$F = Gf_G + Rf_R + \frac{2f_R}{1+w} \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{(m-1)(4m^2 + n^2 + mn + m - n)}{mt^2} \right) - \left(\frac{m(m+2n+1) - (3n+1)}{t^2} \right) w \right] \quad (4.228)$$

elde edilir. (4.228) eşitliğinde bilinmeyen diğer ifadeleri de t cinsinden yazarsak,

$$\begin{aligned} f_R = -4K_2 \dot{A} &\Rightarrow f_R = -4K_2 A_0 m t^{m-1} \\ \dot{f}_G = K_2 A &\Rightarrow f_G = \frac{K_2 A_0}{m+1} t^{m+1} + C_1 \end{aligned} \quad (4.229)$$

elde ederiz. (4.229) ifadeleri (4.228) e taşınırsa,

$$\begin{aligned} F = \frac{K_2 A_0}{m+1} G t^{m+1} + C_1 G - 4K_2 A_0 m R t^{m-1} \\ + \frac{8K_2 A_0}{3(1+w)} \left[(m-1)(4m^2 + n^2 + mn + m - n) - (m^2(m+2n+1) - m(3n+1))w \right] t^{m-3} \end{aligned} \quad (4.230)$$

elde edilir. Burada $C_1 G$ terimi topolojik invaryant olduğu için etkisi yoktur. Son olarak (4.223)

ve (4.224) ifadelerini kullanarak t yi aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} X &= 8 \left[mn(m+n-2)C_0^2 - m(m-1)\lambda^2 \right] \\ Y &= 2 \left[C_0^2 (m^2 + n^2 + mn) - \lambda^2 \right] \end{aligned} \quad (4.231)$$

$$t = \left[\frac{X}{Y} \frac{R}{G} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.232)$$

elde ederiz. (4.232) ifadesini, (4.230) eşitliğinde yerine yazarsak

$$F = \frac{K_2 A_0}{m+1} \left(\frac{X}{Y} \right)^{\frac{m+1}{2}} R^{\frac{m+1}{2}} G^{\frac{1-m}{2}} - 4K_2 A_0 m \left(\frac{X}{Y} \right)^{\frac{m-1}{2}} R^{\frac{m+1}{2}} G^{\frac{1-m}{2}} + \frac{8K_2 A_0}{3(1+w)} \left[(m-1)(4m^2 + n^2 + mn + m - n) - (m^2(m+2n+1) - m(3n+1))w \right] \left(\frac{X}{Y} \right)^{\frac{m-3}{2}} R^{\frac{m-3}{2}} G^{\frac{3-m}{2}} \quad (4.233)$$

bulunur.

4.2.3. k -Birincil Koşulu Altında Denklemlerin İndirgenmesi

İlk olarak k -birincil koşulu altında $\mu^{t.ef}$, $p^{t.ef}$, $\mu^{t.ef} + p^{t.ef}$, $\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$, $-\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$, μ^m , R ve G nin, iki bilinmeyenli ölçek çarpanı içeren indirgenmiş ifadelerini tesis edelim. Bunlar i -birincil koşulu altındaki (4.50), (4.51), (4.52), (4.53), (4.54), (4.55), (4.56) ve (4.57) denklemlerinin kendisidir.

4.2.3.1. $k \oplus k_1$, $k \oplus k_2$ ve $k \oplus k_3$ Koşul Takımı Altında $f(R, G)$ Modeli Tesisi

$k \oplus k_1$, $k \oplus k_2$ ve $k \oplus k_3$ bu üç koşul takımını ayrı ayrı incelememiz bizi aynı denklemlere götüreceğinden sadece içlerinden bir koşul takımı altında modelimizi oluşturmak yeterli olacaktır. Denklemlerimizin daha anlaşılır bir şekilde olması için $k \oplus k_1$ tutarlılık koşulunu aşağıdaki gibi tekrarlayalım.

$$\dot{f}_G = K_1 A \quad (4.234.a)$$

$$\ddot{f}_G = K_1 \dot{A} \quad (4.234.b)$$

$$f_R = -4K_1 \dot{A} \quad (4.234.c)$$

$$\dot{f}_R = -4K_1 \ddot{A} \quad (4.234.d)$$

$$\ddot{f}_R = -4K_1 \ddot{\ddot{A}} \quad (4.234.e)$$

Bu bağıntılar ışığında şu yararlı ifadeler sonraki hesaplamalarda kullanılmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{f}_R}{f_R} &= \frac{\dot{F}_R}{F_R} = \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} & \frac{\ddot{f}_R}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_R}{F_R} = \frac{\ddot{\ddot{A}}}{\dot{A}} \\
\frac{\dot{f}_G}{f_R} &= \frac{\dot{F}_G}{F_R} = -\frac{1}{4} \frac{\dot{A}}{A} & \frac{\ddot{f}_G}{f_R} &= \frac{\ddot{F}_G}{F_R} = -\frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{4.235}$$

elde edilir. Bu koşul takımı (4.50), (4.51), (4.56) ve (4.57) eşitlikleri üzerine herhangi bir değişiklik getirmemektedir. Bu durumda ilk olarak (4.56) ve (4.57) eşitliklerini göz önüne alalım.

$$\frac{R}{2} = \frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{B}}{B} + 2 \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \tag{4.236}$$

$$\frac{G}{8} = \frac{\ddot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B^2} \right) + 2 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\ddot{B}}{B} \tag{4.237}$$

(4.236) ve (4.237) deki $A(t)$ ve $B(t)$ fonksiyonlarının şeklini $R \equiv R(t)$ ve $G \equiv G(t)$ veya $t \equiv t(R)$ ve $t \equiv t(G)$ ters fonksiyonunun çekilebilmesi mümkün olacak şekilde seçilmelidir. Şimdi $A(t)$ ve $B(t)$ ölçek çarpanlarını aşağıdaki gibi seçelim.

$$A(t) = A_0 t^n \tag{4.238}$$

$$B(t) = B_0 t^m \tag{4.239}$$

$A(t)$ ve $B(t)$ fonksiyonlarının hesaplamalarda kullanılmak üzere gerekli türevleri,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{n}{t}, \quad \frac{\ddot{A}}{A} = \frac{n(n-1)}{t^2} \tag{4.240}$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{m}{t}, \quad \frac{\ddot{B}}{B} = \frac{m(m-1)}{t^2} \tag{4.241}$$

biçimindedir. (4.238)-(4.241) ifadeleri sırasıyla (4.236) ve (4.237) ye yerleştirilirse,

$$\frac{R}{2} = \frac{3m^2 + (n-1)(2m+n)}{t^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2 t^{2m}} \tag{4.242}$$

$$\frac{G}{8} = \frac{n(n-1)}{t^2} \left(\frac{m^2}{t^2} - \frac{\lambda^2}{k_1^2 B_0^2 t^{2m}} \right) + \frac{2m^2 n(m-1)}{t^4} \quad (4.243)$$

olur. (4.242) ve (4.243) ifadeleri ayrıntılı olarak incelenirse, bu bağıntılardan t yi R ve G cinsinden çekebilmemiz için bir ön koşul koymamız gerekmektedir. $m=1$ şartını koyarsak, bu durum altında (4.242) ve (4.243) bağıntıları incelenirse,

$$R = \frac{2 \left[(n^2 + n + 1) k_1^2 B_0^2 - \lambda^2 \right]}{k_1^2 B_0^2 t^2} \Rightarrow t = \left[\frac{2 \left\{ (n^2 + n + 1) k_1^2 B_0^2 - \lambda^2 \right\}}{k_1^2 B_0^2 R} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.244)$$

$$G = \frac{8n(n-1)(k_1^2 B_0^2 - \lambda^2)}{k_1^2 B_0^2 t^4} \Rightarrow t = \left[\frac{8n(n-1)(k_1^2 B_0^2 - \lambda^2)}{k_1^2 B_0^2 G} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (4.245)$$

elde edilir. (4.50) ve (4.51) ifadelerine (4.235) bağıntıları yerleştirilirse,

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \left(2 \frac{\dot{A}}{A} - 2 \frac{\dot{B}}{B} + 2 \frac{\ddot{A}}{A} \right) = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.246)$$

$$-\frac{4}{3} \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{2}{3} \frac{\ddot{B}}{B} \left(1 + \frac{A}{\dot{A}} \right) - \frac{2}{3} \frac{\ddot{A}}{A} \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\ddot{A}}{A} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.247)$$

bulunur. Yukarıdaki bu iki eşitlikte ölçek çarpanlarını yerlerine yazarsak,

$$\frac{(n+4)(n-1)}{t^2} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.248)$$

$$\frac{7n^2 + 11n - 4}{3t^2} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) \quad (4.249)$$

eşitliklerine ulaşılır. (4.248) ve (4.249) ifadeleri

$$p^m = w\mu^m \quad (4.250)$$

hal denklemine taşınırsa,

$$F = Gf_G + Rf_R + \frac{2f_R}{1+w} \left[\frac{(-7n^2 + 11n - 4) - 3(n+4)(n-1)w}{3t^2} \right] \quad (4.251)$$

elde edilir. (4.251) eşitliğinde bilinmeyen diğer ifadeleri de t cinsinden yazarsak,

$$\begin{aligned} f_R = -4K_1\dot{A} &\Rightarrow f_R = -4K_1A_0nt^{n-1} \\ \dot{f}_G = K_1A &\Rightarrow f_G = \frac{K_1A_0}{n+1}t^{n+1} + C_1 \end{aligned} \quad (4.252)$$

elde edilir. (4.252) ifadeleri (4.251) e taşınırsa,

$$F = \frac{K_1A_0}{n+1}Gt^{n+1} + C_1G - 4K_1A_0nt^{n-1}R - \frac{8K_1n}{3} \left[\frac{(-7n^2 + 11n - 4) - 3(n+4)(n-1)w}{1+w} \right] t^{n-3} \quad (4.253)$$

burada C_1G terimi topolojik invaryant olduğu için etkisi yoktur. Son olarak (4.244) ve (4.245) ifadelerini kullanılarak t yi aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} X &= 8n(n-1)(k_1^2B_0^2 - \lambda^2) \\ Y &= 2 \left[(n^2 + n + 1)k_1^2B_0^2 - \lambda^2 \right] \end{aligned} \quad (4.254)$$

$$t = \left[\frac{X}{Y} \frac{R}{G} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.255)$$

elde edilir. (4.255) ifadesini, (4.253) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} F &= \frac{K_1A_0}{n+1} \left(\frac{X}{Y} \right)^{\frac{n+1}{2}} R^{\frac{n+1}{2}} G^{\frac{1-n}{2}} - 4K_1A_0n \left(\frac{X}{Y} \right)^{\frac{n-1}{2}} R^{\frac{n-1}{2}} G^{\frac{1-n}{2}} \\ &\quad - \frac{8K_1n}{3} \left[\frac{(-7n^2 + 11n - 4) - 3(n+4)(n-1)w}{1+w} \right] \left(\frac{X}{Y} \right)^{\frac{n-3}{2}} R^{\frac{n-3}{2}} G^{\frac{3-n}{2}} \end{aligned} \quad (4.256)$$

bulunur.

4.3. BIANCHI-TİP I METRİĞİ İÇİN $f(R,G)$ GRAVİTE DENKLEMLERİ

Uzayca homojen ve eşyönsüz evren modelleri sınıfından olan Bianchi-Tip I modelinin metrik ifadesi

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)dy^2 + C^2(t)dz^2 \quad (4.257)$$

biçimindedir. Bianchi-Tip I modeli için § 3.2.2. ve § 3.2.3.deki yöntemlerle bileşenler cinsinden yazılan alan denklemlerini (4.257) metriği için Ek B Bianchi-Tip I kısmında verilen (B.1)-(B.4) de kinematik ve geometrik özellikler ile Ek C deki bağıntılar kullanılarak, ölçek çarpanları ile $f(R,G)$ fonksiyonunun zamansal türevleri cinsinden açık bir şekilde ifade edilecektir. Fakat standard maddeye bağlanan enerji-momentum tansörünün (3.49) ile verilmiş genel şekli, belirlenmesi gereken 10 adet bilinmeyen dinamik değişken içermektedir. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için, nispeten basit bir çalışma hipotezi olarak, standard maddenin enerji-momentum tansörünü (3.50) deki gibi mükemmel akışkanınki olarak kısıtlayacağız. Ancak, böyle bir kısıtlamanın alan denklemlerinde herhangi bir çelişkiye ya da tutarsızlığa yol açıp açmayacağı, incelenmesi gereken bir konu oluşturacaktır ve bu da, tutarlılık koşulları olarak öncelikli olarak ele alınacaktır.

4.3.1. Birinci Yönteme Göre $f(R,G)$ Alan Denklemleri

Mükemmel akışkan için hal denklemi $q_\alpha^m = 0$ ve $\pi_{\alpha\beta}^m = 0$ şeklinde alındığında, yukarıda söylenen yol izlenerek § 3.2.2. deki alan denklemlerini aşağıdaki şekillere indirgenebilecekleri kolayca görülebilir.

$$G_{00} = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} - \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} - \frac{12\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} \frac{\dot{f}_G}{f_R} \quad (4.258)$$

$$G_{11} = -\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) + \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} + 4 \left(\frac{\ddot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\ddot{C}\dot{B}}{CB} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} + 4 \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \frac{\dot{f}_G}{f_R} \quad (4.259.a)$$

$$G_{22} = -\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) + \left(\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{A}}{A} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} + 4 \left(\frac{\ddot{C}\dot{A}}{CA} + \frac{\ddot{A}\dot{C}}{AC} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} + 4 \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \frac{\ddot{f}_G}{f_R} \quad (4.259.b)$$

$$G_{33} = -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R - Gf_G) + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} + 4 \left(\frac{\ddot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\ddot{B}\dot{A}}{BA} \right) \frac{\dot{f}_G}{f_R} + 4 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \frac{\ddot{f}_G}{f_R} \quad (4.259.c)$$

$$\begin{aligned} G_{01} &= 0 = 0 \\ G_{02} &= 0 = 0 \\ G_{03} &= 0 = 0 \end{aligned} \quad (4.260.a,b,c)$$

$$\begin{aligned} G_{12} &= 0 = 0 \\ G_{23} &= 0 = 0 \\ G_{31} &= 0 = 0 \end{aligned} \quad (4.260.d,e,f)$$

Bu denklemler, bu durumlarıyla ele alındığında, amacımıza uygun kullanıma elverişli bulunmamaktadır. Bunlardan, eğer varsa, hangilerinin bağımsız denklem olduğu ilk bakışta anlaşılamamaktadır. Öte yandan, mesela (4.259.c) denklemi (G_{33} -denklemi) göz önüne alındığında, bunda $C(t)$ ölçek çarpanının yer almadığı derhal göze çarpmaktadır. Benzer şekilde G_{11} -denkleminde $A(t)$; G_{22} -denkleminde de $B(t)$ ölçek çarpanı bulunmamaktadır. Bu durum, döngüsel simetriye sahip söz konusu denklemlerin bir tür kombinasyonlarını almak gerekliliğini düşündürmektedir. Ancak bu, biraz da deneme-yanılma yöntemine dayalı bir iş olduğundan biz bu işe girişmeyeceğiz. Kaldı ki, aşağıda uygulayacağımız § 3.2.3 deki 1+3 kovaryant ayrışım yöntemi bu işi kendiliğinden gerçekleştirecektir.

4.3.2. İkinci Yönteme Göre $f(R,G)$ Alan Denklemleri

(3.58)-(3.61) denklemlerinin; ölçek çarpanları ile $f(R,G)$ fonksiyonunun türevleri cinsinden yazılımları, Ek B ve de (3.50) olarak belirtilen girdiler yine kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur: (3.58) ve (3.59) denklemlerinin karşılıkları, sırasıyla $\mu^{t.ef}$ ve $p^{t.ef}$ ile etiketlendireceğimiz şu denklemler olurlar:

$$\mu^{t.ef} : \quad \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ -\frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ \left. + \left(-\frac{12\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} \right) \dot{f}_G \right\} \quad (4.261)$$

$$p^{t.ef} : \quad -\frac{2}{3} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \\ = \kappa^2 \frac{p^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R + \ddot{f}_R \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) \right] \dot{f}_G \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \right] \ddot{f}_G \right\} \quad (4.262)$$

(3.60) denklemleri ise özdeş olarak sıfır olan aşağıdaki denklemleri verir.

$$\begin{aligned} q_1^{t.ef} : \quad 0 &= 0 \\ q_2^{t.ef} : \quad 0 &= 0 \\ q_3^{t.ef} : \quad 0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.263.a,b,c)$$

(3.61) denklemlerinin karşılıkları da, düzenlendiklerinde, denklemlerin sağ tarafları $\pi_{\alpha\beta}^{t.ef}$ leri göstermek üzere:

$$\pi_{11}^{t.ef} : \quad \frac{1}{3} \left(\frac{2\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{2\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) = \frac{1}{f_R} \left\{ \frac{1}{3} \left(-\frac{2\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ \left. - \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(-\frac{2\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{2\ddot{B}}{B} \right) \right] \dot{f}_G \right. \\ \left. - \frac{4}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{2\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \ddot{f}_G \right\} \quad (4.264.a)$$

$$\begin{aligned} \pi_{22}^{t.ef} : \quad & \frac{1}{3} \left(-\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{2\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{2\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) = \frac{1}{f_R} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{2\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{2\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(-\frac{2\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) \right] \dot{f}_G \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{2\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \ddot{f}_G \right\} \end{aligned} \quad (4.264.b)$$

$$\begin{aligned} \pi_{33}^{t.ef} : \quad & \frac{1}{3} \left(-\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{2\ddot{C}}{C} \right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) = \frac{1}{f_R} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} - \frac{2\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(-\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{2\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) \right] \dot{f}_G \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{3} \left(-\frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \ddot{f}_G \right\} \end{aligned} \quad (4.264.c)$$

$$\begin{aligned} \pi_{12}^{t.ef} : \quad & 0 = 0 \\ \pi_{23}^{t.ef} : \quad & 0 = 0 \\ \pi_{32}^{t.ef} : \quad & 0 = 0 \end{aligned} \quad (4.264.d,e,f)$$

olur. Şimdi, (4.264) deki üç denklemden hareketle, taraf tarafa çıkarmalarla aşağıdaki şu düzenlenmiş üç yardımcı denklemi oluşturalım ve bunların düzenlenmiş şekillerini de ‘ Π ’ sembolleriyle etiketliyelim:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} - \Pi_{22} : \quad & \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + 4 \left[\frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} \right) + \frac{\ddot{C}}{C} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} \\ & + 4 \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\ddot{f}_G}{f_R} = 0 \end{aligned} \quad (4.265.a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{22} - \Pi_{33} : \quad & \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) + \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + 4 \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\ddot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} \\ & + 4 \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \frac{\ddot{f}_G}{f_R} = 0 \end{aligned} \quad (4.265.b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{33} - \Pi_{11} : \quad & \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) + \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) \frac{\dot{f}_R}{f_R} + 4 \left[\frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\ddot{B}}{B} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) \right] \frac{\dot{f}_G}{f_R} \\ & + 4 \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right) \frac{\ddot{f}_G}{f_R} = 0 \end{aligned} \quad (4.265.c)$$

Bianchi-Tip I modeli için Ek B (B.4) de yazmış olduğumuz Ricci skaleri ile Gauss-Bonnet teriminin ifadelerini, bütünlüğü sağlamak üzere aşağıda tekrarlayalım:

$$R = 2 \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \quad (4.266)$$

$$G = 8 \left(\frac{\ddot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} + \frac{\ddot{B}\dot{C}\dot{A}}{BCA} + \frac{\ddot{C}\dot{A}\dot{B}}{CAB} \right) \quad (4.267)$$

Yine, ilerideki bazı kullanımlarımız için $\mu^{t.ef} + p^{t.ef}$ ve $\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} - \mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$ birleştirmelerini de oluşturalım;

$$\mu^{t.ef} + p^{t.ef} :$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \\ & = \kappa^2 \frac{\mu^m + p^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ -\frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R + \ddot{f}_R \right. \\ & \quad + \frac{4}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) - \frac{9\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} \right] \dot{f}_G \\ & \quad \left. + \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \right] \ddot{f}_G \right\} \end{aligned} \quad (4.268)$$

$$\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} :$$

$$\begin{aligned}
-2\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C}\right) = & \kappa^2 \frac{\mu^m + 3p^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ f - Rf_R - Gf_G + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right) \dot{f}_R + 3\ddot{f}_R \right. \\
& + 4 \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) - \frac{3\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} \right] \dot{f}_G \\
& \left. + 4 \left[\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \right] \ddot{f}_G \right\} \quad (4.269)
\end{aligned}$$

$-\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} :$

$$\begin{aligned}
-2\left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C}\right) - 2\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA}\right) = & \kappa^2 \frac{-\mu^m + 3p^m}{f_R} \\
& + \frac{1}{f_R} \left\{ 2(f - Rf_R - Gf_G) + 3\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right) \dot{f}_R + 3\ddot{f}_R \right. \\
& + 4 \left[\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} \right) + 3\frac{\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} \right] \dot{f}_G \\
& \left. + 4 \left[\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \right] \ddot{f}_G \right\} \quad (4.270)
\end{aligned}$$

Şimdi, bir de; mükemmel akışkan olarak alınacak sıradan madde için, (3.56) daki $\nabla^b T_{ab}^m = 0$ korunum denkleminde hareketle elde edilebilecek

$$\dot{\mu}^m + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) (\mu^m + p^m) = 0 \quad (4.271)$$

korunum denklemini yazalım (detaylı bilgi için (4.14)-(4.19) eşitliklerine bakınız).

4.3.3. Tutarlılık Koşulları

Evrenin sıradan madde-enerji içeriğinin yalnızca $\mu^m(t)$ madde-enerji yoğunluklu ve $p^m(t)$ basınçlı bir mükemmel akışkan ile tasvir edilmesi ya da başka bir deyişle, akışkanın enerji-momentum tansöründe hal denklemi olarak $q_\alpha^m \equiv 0$ ve $\pi_{\alpha\beta}^m \equiv 0$ ($\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3$) varsayılması, alan denklemlerinin $G_{0\alpha}$ ve $G_{\alpha\beta}$ bileşenlerinin söz konusu varsayım ile tutarlı olup olmayacağı sorununu ortaya çıkarmaktadır. Aşağıda, mükemmel akışkan varsayımı ile tutarlılık anlamında bu sorun incelenecektir.

Önce (4.265.a) denklemlerini ele alalım.

$$\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B}\right)(Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{d}{dt}(Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G) = 0 \quad (4.272.a)$$

olur. Benzer şekilde, (4.265.b) ve (4.265.c) denklemleri de, sırasıyla,

$$\left(\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C}\right)(Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C}\right)\frac{d}{dt}(Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G) = 0 \quad (4.272.b)$$

$$\left(\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A}\right)(Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A}\right)\frac{d}{dt}(Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G) = 0 \quad (4.272.c)$$

şeklinde yazılabilir. (4.272.a) nın ilk bakışta şu durumlar için sağlandığı görülmektedir:

$$(ii) \quad B \propto A \quad (4.273)$$

$$(jj) \quad Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0 \quad (4.274)$$

$$(kk) \quad B \propto A \quad \text{ve} \quad Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0 \quad (4.275)$$

Bunlar ‘‘Birincil koşullar’’ımız olacaktır. Şimdi, (ii) koşulu altında (4.272.b) ve (4.272.c) denklemlerine bakalım. (4.272.b) denklemi

$$\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{C}}{C}\right)(Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G) + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{C}}{C}\right)\frac{d}{dt}(Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G) = 0 \quad (4.276)$$

ve diğeri de bunun ters işaretlisi olur. (4.276) nın sağlanması ise şu ikincil koşullar altında olur:

$$(ii_1) \quad C \propto A \quad (4.277)$$

$$(ii_2) \quad Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0 \quad (4.278)$$

$$(ii_3) \quad C \propto A \quad \text{ve} \quad Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0 \quad (4.279)$$

Şimdi sırayla (ii) ile bu ikincil koşulları birleştirelim. (ii_1) birleştirilmeden $A \propto B \propto C$ koşulu ortaya çıkar ve bu durum için f_R, f_G ve türevleri üzerine hiç bir koşul gelmez. (ii) ile (ii_2) birlikte göz önüne alındığında ise $B \propto A$ ve $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$ koşulları oluşur. İkinci bağıntının f_R veya $\dot{f}_G$ yi, ve dolayısıyla da bunların nokta türevlerini kısıtladığı görülmektedir. Bu koşul altında $B \propto C$ olmasının gerekmediği anlaşılmaktadır. (ii) ile (ii_3) ün birleştirilmesi ise $A \propto B \propto C$ ye ek olarak önceki durum gibi f_R ve f_G türevleri üzerine kısıtlama getirmektedir.

Şimdi (jj) ile $(ii_1), (ii_2)$ ve (ii_3) ikincil koşulların birleştirilmesine bakalım. (jj) ile bu üçünün birleştirilmesinin tek bir $C \propto A$ ve $Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0$ koşulunu verdiğini görmek kolaydır. Bu durumda $B \propto A$ olması gerekmediğinden geri kalan denklemler $A(t)$ ile $B(t)$ ölçek çarpanlarının ikisini de içerecektir.

Şimdi de (kk) ile $(ii_1), (ii_2)$ ve (ii_3) ikincil koşulların birleştirilmesine bakalım. Buradaki söz konusu üç birleştirmenin de aynı bir $A \propto B \propto C$ koşulunu, fakat buna ek olarak da $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$ kısıtlamasını getirdiği kolayca görülebilir.

Son olarak, (4.273)-(4.275) birincil koşullarına, bunlardan farklı mahiyette olan iki koşul daha ortaya koymak mümkün görünmektedir; o da (4.272.a) ile (4.272.b) denklemlerinin bizzat kendileridir. Gerçekten de $A \propto B \propto C$ varsaymadan ve de $Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G \neq 0$ (keza: $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G \neq 0$ ve $Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G \neq 0$) olmak kaydıyla, (4.272.a) ve (4.272.b) denklemleri düzenlenip de integre edildikten sonra M_1 ve M_2 keyfi iki integrasyon sabiti olmak üzere

$$(\dot{A}B - \dot{B}A)(Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G) = M_1 \quad \text{ve} \quad (\dot{B}C - \dot{C}B)(Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G) = M_2 \quad (4.280)$$

şeklinde bir koşul olarak ifade edilebilir. Bu iki bağıntıdan oluşan koşul altında (4.272.c) denkleminin de özdeş olarak sağlanacağını teorik olarak bilmekle birlikte bu pek aşikâr görünmemektedir. Ancak, söz konusu bağıntılar taraf tarafa toplanır ve parantez açılımı da yapıp düzenlenirse, sonuçta, $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ olmak üzere $(\dot{A}C - \dot{C}A)(Bf_R + 4\dot{B}\dot{f}_G) = M_3$ bulunur ki, bu, (4.272.c) nin (4.272.a) ve (4.272.b) gibi düzenlenmiş şeklinden başka bir şey değildir. Tablo 4.2 de yukarıdaki tutarlılık koşullarını topluca göstermekteyiz.

Tablo 4.3 : Bianchi-Tip I Modeli İçin Tutarlılık Koşulları

(ii ₁) $C \propto A$ $A \propto B \propto C$	(ii) $B \propto A$ (ii ₂) $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$ ($B \propto C$ gerekmez)	(ii ₃) $C \propto A$ ve $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$ $A \propto B \propto C$
(ii ₁) $C \propto A$	(jj) $Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0$ (ii ₂) $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$ Hepsi için $C \propto A$ ve $Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0$ ($B \propto A$ gerekmez)	(ii ₃) $C \propto A$ ve $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$
(ii ₁) $C \propto A$	(kk) $B \propto A$ ve $Cf_R + 4\dot{C}\dot{f}_G = 0$ (ii ₂) $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$ Hepsi için $A \propto B \propto C$ $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$	(ii ₃) $C \propto A$ ve $Af_R + 4\dot{A}\dot{f}_G = 0$

4.4. BIANCHI-TİP I İÇİN $f(R,G)$ MODELİ TESİSİ

Öncelikle (4.265) ve dolayısıyla da (4.264) denklemlerinin mükemmel akışkan varsayımı ile tutarlılıklarının sağlanması gerekliliğinin yol açtığı yukarıdaki kısıtlamaların, geri kalan alan denklemleri ile bağıntılara yansımaları ele alalım. Tutarlılık koşul takımları şu şekildedir: $ii \oplus ii_1$, $ii \oplus ii_2$, $ii \oplus ii_3$, $jj \oplus ii_1$, $jj \oplus ii_2$, $jj \oplus ii_3$, $kk \oplus ii_1$, $kk \oplus ii_2$ ve $kk \oplus ii_3$. Belirtilen koşul takımları altında açıkça görüldüğü üzere $\mu^{t.ef}$, $p^{t.ef}$, $\mu^{t.ef} + p^{t.ef}$, $\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$, $-\mu^{t.ef} + 3p^{t.ef}$, μ^m , R ve G nin, ölçek çarpanları içeren indirgenmiş ifadeleri sırasıyla (4.261), (4.262), (4.268), (4.269), (4.270), (4.271), (4.266) ve (4.267) bağıntılarının kendileridir. Bu durum altında tüm koşul takımları için tek bir çözüme gitmemiz yeterli olacaktır. Şimdi (4.261) eşitliğini aşağıda tekrarlayalım.

$$\mu^{t.ef} : \quad \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} = \kappa^2 \frac{\mu^m}{f_R} + \frac{1}{f_R} \left\{ -\frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{f}_R \right. \\ \left. + \left(-\frac{12\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} \right) \dot{f}_G \right\} \quad (4.281)$$

(4.281) eşitliliği ayrıntılı olarak incelenirse, ölçek çarpanları üzerine herhangi bir kısıtlama veya öngöründe bulunmadan önce, $f(R, G)$ fonksiyonunu α ile $\alpha \neq 0$ olan gerçel bir sayı ve $F(G)$ ile de G nin keyfi bir fonksiyonu gösterilmek üzere

$$f(R, G) = \alpha R + F(G) \quad (4.282)$$

şeklinde özel bir form göz önüne alalım [45,46]. Bu durumda,

$$f_R = \text{Sabit} = \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{f}_R = 0 \quad \text{ve} \quad \ddot{f}_R = 0 \quad (4.283)$$

$$\dot{f}_G = f_{GG} \dot{G} = F_{GG} \dot{G} \quad (4.284)$$

olur. (4.282)-(4.284) bağıntıları (4.281) e yerleştirilirse,

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} = \frac{1}{\alpha} \left(\kappa^2 \mu^m - \frac{1}{2} [F(G) - GF_G] - \frac{12\dot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} F_{GG} \dot{G} \right) \quad (4.285)$$

elde edilir. Şimdi $A(t)$, $B(t)$ ve $C(t)$ ölçek çarpanlarının fonksiyonel formunu aşağıdaki gibi seçelim:

$$A(t) = A_0 t^{p_1} \quad (4.286)$$

$$B(t) = B_0 t^{p_2} \quad (4.287)$$

$$C(t) = C_0 t^{p_3} \quad (4.288)$$

Fonksiyonel formu yukarıdaki gibi seçilen ölçek çarpanları için hesaplamalarda yollama yapmayı kolaylaştırmak üzere gerekli türev ifadeleri,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{p_1}{t}, \quad \frac{\ddot{A}}{A} = \frac{p_1(p_1-1)}{t^2} \quad (4.289)$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{p_2}{t} \quad , \quad \frac{\ddot{B}}{B} = \frac{p_2(p_2-1)}{t^2} \quad (4.290)$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{p_3}{t} \quad , \quad \frac{\ddot{C}}{C} = \frac{p_3(p_3-1)}{t^2} \quad (4.291)$$

biçimindedir. (4.289)-(4.291) bağıntıları (4.267) e yerleştirilirse

$$G = 8p_1p_2p_3(p_1 + p_2 + p_3 - 3)t^{-4} \quad (4.292)$$

$$G = \gamma_s t^{-4} \quad (4.293)$$

$$\gamma_s = 8p_1p_2p_3(p_1 + p_2 + p_3 - 3) \quad (4.294)$$

olur ve (4.292)-(4.294) bağıntıları ışığında şu yararlı ifadeler sonraki hesaplamalarda kullanılmak üzere

$$G = \gamma_s t^{-4} \quad \Rightarrow \quad \dot{G} = -4\gamma_s t^{-5} \quad (4.295)$$

$$t = \gamma_s^{1/4} G^{-1/4} \quad \Rightarrow \quad \dot{G} = -4\gamma_s^{1/4} G^{5/4} \quad (4.296)$$

olur. Şimdi korunum denklemini, yani (4.271) bağıntısı ele alıp incelersek

$$\dot{\mu}^m + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) (\mu^m + p^m) = 0 \quad (4.297)$$

sıradan (normal) maddenin $w = \text{sabit}$ olmak üzere

$$p^m = w\mu^m \quad (4.298)$$

şeklinde lineer bir barotropik hal denklemine uyduğu varsayımı altında (4.297) denklemini

$$\dot{\mu}^m + (1+w) \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \mu^m = 0 \quad (4.299)$$

şeklini alır ve bu da

$$\frac{d}{dt} \ln \mu^m = -(1+w) \frac{d}{dt} \ln(ABC)$$

yazıldığında, kolayca integre edilerek

$$\mu^m \propto (ABC)^{-(1+w)} \quad (4.300)$$

verir. Orantı katsayısını belirlemek üzere; başlangıç koşulu olarak, $t = t_0$ şimdiki kozmik zamanında μ^m, A, B ve C nin şimdiki değerleri μ_0^m, A_0, B_0 ve C_0 ile gösterilirse

$$\mu_0^m \propto (A_0 B_0 C_0)^{-(1+w)} \quad (4.301)$$

olur ve dolayısıyla da, sonuçta, (4.286)-(4.291) bağıntıları ışığında korunum denkleminin çözümü için

$$\mu^m(t) = \mu_0^m \left(\frac{A}{A_0} \frac{B}{B_0} \frac{C}{C_0} \right)^{-(1+w)} \quad (4.302)$$

$$\mu^m(t) = \mu_0^m t^{-(p_1+p_2+p_3)(1+w)} \quad (4.303)$$

elde edilir. Elde edilen tüm bağıntılar (4.285) e taşınırsa

$$\frac{p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1}{t^2} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \kappa^2 \mu_0^m \left(\frac{G}{\gamma_s} \right)^{\frac{1}{4}(p_1+p_2+p_3)(1+w)} - \frac{1}{2} (F(G) - G F_G) - \frac{12 p_1 p_2 p_3}{t^3} \left(\frac{-4G^{5/4}}{\gamma_s^{1/4}} \right) F_{GG} \right\} \quad (4.304)$$

$$\frac{1}{2} F(G) - \frac{1}{2} F_G G + \alpha (p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1) \sqrt{\frac{G}{\gamma_s}} - \frac{48 F_{GG} G^2 (p_1 p_2 p_3)}{\gamma_s} - \frac{\kappa^2 \mu_0^m}{\alpha} \left(\frac{G}{\gamma_s} \right)^{\frac{1}{4}(p_1+p_2+p_3)(1+w)} = 0 \quad (4.305)$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$F(G) = C_s \sqrt{\tilde{G}} + C_{sw} \tilde{G}^{\frac{1}{4}(p_1+p_2+p_3)(1+w)} + C_1 G + C_2 G^{\frac{1}{4} \frac{p_1+p_2+p_3}{4}} \quad (4.306)$$

burada

$$\tilde{G} = 8G/\gamma_s \quad (4.307)$$

olmak üzere diğer katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$C_s = -\sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\alpha(p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1)(p_1 + p_2 + p_3 - 3)}{(p_1 + p_2 + p_3 + 3)}$$

$$C_{sw} = \frac{-2^{\frac{2-3}{4}(p_1+p_2+p_3)(1+w)} 3^{-\frac{1}{4}(p_1+p_2+p_3)(1+w)} (p_1 + p_2 + p_3 + 3) (\kappa^2 \mu_0 / \alpha)}{4 - \frac{1}{3} (p_1 + p_2 + p_3)(19 + 15w) + (p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1)(4 + 7w + 3w^2)}$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Genel anlamıyla kozmoloji, evrenin gözlenebilir özelliklerini anlamayı zaman içindeki evrimine açıklık getirmeyi amaç edinmiş bir bilim dalıdır. Bu maksatla, spektroskopiden parçacık fiziğine kadar fiziğin birçok alt dalından faydalanılarak, tarih boyunca bu disipline ait çeşitli teoriler öne sürülmüştür. Şüphesiz ki evrenin tam bir izahının yapılabilmesi için ortaya atılmış öneriler arasında, Einstein'ın Genel Rölativite Teorisi (GRT) büyük bir önem taşımaktadır. 1915 yılında öne sürülen bu teori, modern kozmolojinin temelini oluşturmakta olup, gelişen gözlem teknoloji ve yöntemlerle elde edilen yeni bilgiler ışığında, ortaya atıldığı zamandan bugüne, bizzat Einstein'ın kendisi de dâhil olmak üzere, birçok bilim insanı tarafından modifiye edilmiştir.

Kozmoloji tarihinde dönüm noktası olan GRT'nin öne sürüldüğü dönem de, evrenin durağan ve sonlu olduğunun yaygın kabulü, teori için birtakım sıkıntılar ortaya çıkarmaktaydı. Herhangi bir madde-enerji dağılımının bulunmaması durumunda, yerel bölgede bir gravitasyonun oluşmaması, ayrıca durağan bir evrenin, gravitasyonel etkileşimlere yenik düşerek çökmesi gerekmektedir. Bu gibi sorunlar Einstein'ı, alan denklemlerinin madde ile ilgili bölümüne bir terim eklemeye itmiştir. Bu terim Λ parametresi veya Kozmolojik Sabit olarak adlandırılır. Her ne kadar bu öneri Einstein tarafından beyhude bir girişim olarak düşünülmüş olsa da 1929 yılında yapılan gözlemler sayesinde tespit edilen galaksilerin presesyon hareketi, kozmolojik sabitin gerekliliğini tekrar ortaya koymuştur. Ve bu sabit evrenin genişlemesinin izahı olarak denklemdeki yerini almıştır.

Fakat son dönem geniş ölçekli gözlem sonuçları bize, evrenin ivmelenerek genişlediği bir döneme geçiş yaptığını göstermektedir. Sadece sıradan madde-radyasyon ile dolu bir evren modeli ile bu durum tam olarak izah edilememektedir. Buna ek olarak, evrenin genişlemesinden sorumlu tutulmuş olan Λ parametresinin fiziksel yorumu da dinamik bir evreni tarif etmekte yetersiz kalmaktadır. Ayrıca Einstein alan denklemleri, güneş sistemi gibi daha düşük enerjili gravitasyon alanların çözümü için gayet tutarlı olması fakat izahında yüksek mertebeden eğriliklere ihtiyaç duyulan sistemlerin ve evrende meydana gelen bir takım olayların açıklanmasında yetersiz kalması, bilim insanlarını bir kez daha alternatif bir teori armaya ya da GRT'nin alan denklemlerinde değişiklik yapmaya itmiştir.

Bu amaçla, $f(R,G)$ -gravite teorisini, uzayca homojen ve eşyönsüz modeller sınıfından Bianchi-Tip I ve Bianchi-Tip III modelleri çerçevesinde, evrenin normal (standard) madde-enerji içeriğinin lineer barotropik hal denklemleri bir mükemmel akışkan olduğu varsayımı altında ele aldık. Matematiksel hesaplanabilme sağlaması bakımından söz konusu modeller dönmesiz ve ortogonal tipten alınarak, yani metrikler köşegensel olup yalnızca üç bilinmeyen ölçek çarpanı içermektedir. Bianchi-Tip I modeli en basit eşyönsüz model olup, aynı zamanda da uzayca düz eşyönlü RW modelini içermektedir. Bianchi-Tip III modeli ise hiçbir şekilde bir RW modelinin (düz, açık ve kapalı) genelleştirmesini oluşturmamaktadır. Efektif akışkan yaklaşımı altında alan denklemlerini eşhareketli bir ortonormal tetrad çatısında hesaplayıp, bunların çözümleri olan ölçek çarpanlarıyla birlikte $f(R,G)$ nin fonksiyonel formlarını tesis ettik. Bu işi, literatürde çok az sayıda yapılmış benzer amaçlı çalışmalardan farklı bir biçimde ele aldık. Bunlarda yapıldığı üzere, peşinen amaca yönelik (ad hoc) önçözümler (anzats) varsaymak yerine; önce evrenin madde-enerji içeriğinin eşyönlü bir mükemmel akışkan olarak varsayılması altında alan denklemlerinin bu kısıtlama ile ayrıntılı bir şekilde Bianchi-Tip III, Bianchi-Tip I modelleri için tutarlılık koşullarını belirledik ve sonrasında önçözümleri tesis ettik.

KAYNAKLAR

- [1]. Özemre, A. Y., 1982, Teorik Fizik Dersleri Cild 7: Gravitasyonun Rölativist Teorileri, İst. Üniv. Fen Fak. Yay., İstanbul.
- [2]. Mutuş, H., 1979, *Mach İlkesi ve Teorik Gelişmeleri*, Yüksek Lisans Tezi, İst. Üniv. Fen Fak. Fizik Bölümü.
- [3]. Mutuş, H., 2017, Kozmoloji Ders Notları (Gözden Geçirilmiş Manuskript Halinde, 376 sayfa).
- [4]. Özemre, A. Y., 1981, Teorik Fizik Dersleri Cild 8: Kozmolojiye Giriş, İst. Üniv. Fen Fak. Yay., İstanbul.
- [5]. Mutuş, H., 1986, *Rölativist ve G-değişken Kozmolojiler' de V/V_m Testine Göre Quasarların Evrimleşme Özelliklerinin 178 MHz, 2700 MHz ve 5000 MHz' deki Örneklemelerden Araştırılması*, Doktora Tezi, İst. Üniv. Fen Fak. Fizik Bölümü.
- [6]. Riess, A.G., et al., 1998, Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J.* 116, 1009-1038.
- [7]. Perlmutter, S., et al., 1999, Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae, *Astrophys. J.*, 517, 565-586.
- [8]. Riess, A.G., et al., 1999, BV RI light curves for 22 type Ia supernovae, *Astron. J.*, 117, 707.
- [9]. Hanany, S., et al., 2000, MAXIMA-1: a measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10^{-5} , *Astrophys. J.*, 545, 1.5-1.9.
- [10]. Spergel, D.N., et al., 2003, First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 175-194.
- [11]. Clocchiatti, A., et al., 2006, New Hubble Space Telescope and ground-based observations of Type Ia supernovae at redshift 0.5: cosmological implications, *Astrophys. J.*, 642, 1-21.
- [12]. Riess, A.G., et al., 2007, New Hubble Space Telescope discoveries of Type Ia supernovae at $z > 1$: narrowing constraints on the early behaviour of dark energy, *Astrophys. J.*, 659, 98.
- [13]. Komatsu, E., et al., 2011, Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl.* 192, 18.
- [14]. Hinshaw, G., et al., 2012, Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological parameter results, *Astrophys. J. Suppl.* 208, 19.
- [15]. Ade, P.A.R., et al., 2014, Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results, *Astron. Astrophys.*, 571, A1.

- [16]. Ade, P.A.R., et al., 2016, Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.*, 594, A13.
- [17]. Peebles P.J.E., Ratra, B., 2003, The cosmological constant and dark energy, *Rev. Mod. Phys.* 75, 559-606.
- [18]. Carroll, S.M., 2001, The cosmological constant, *Living Reviews in Relativity*, 4, 1.
- [19]. Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S., 2006, Dynamics of dark energy, *Int. J. Mod. Phys. D*, 15, 1753-1936.
- [20]. Schmidt, H.J., 2007, Fourth order gravity: Equations, history and applications to cosmology, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 4, 209.
- [21]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2007, Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 4, 115-146.
- [22]. Durrer, R., Maartens, R., 2008, Dark energy and dark gravity: theory overview, *Gen. Relativity Gravit.*, 40, 301-328.
- [23]. Sotiriou, T., 2009, 6+1 lessons from $f(R)$ gravity, *J. Phys. Conf. Ser.* 189, 012039.
- [24]. Linder, E.V., 2010, Einstein's other gravity and the acceleration of the universe, *Phys. Rev. D*, 81, 127301.
- [25]. De Felice, A., Tsujikawa, S., 2010, $f(R)$ theories, *Living Reviews in Relativity*, 13, 3.
- [26]. Sotiriou, T.P., Faraoni, V., 2010, $f(R)$ theories of gravity, *Rev. Mod. Phys.*, 82, 451-497.
- [27]. Capozziello, S., De Laurentis, M., 2011, Extended theories of gravity, *Phys. Rep.*, 509, 167.
- [28]. Capozziello, S., Faraoni, V., 2011, *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Springer, London.
- [29]. Clifton, T., Ferreira, P.G., Padilla, A., Skordis, C., 2012, Modified gravity and cosmology, *Phys. Rep.* 513, 1.
- [30]. Sofuoğlu, D., 2014, *Yüksek Mertebeden Eğrilikli Gravitasyonda Makaslamasız Kozmik Akışkan İddiası*, Doktora Tezi, İst. Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [31]. Can, D., 2021, *Genel Rölativite Teorisine Karanlık Madde ve Karanlık Enerjiye Alternatif Olacak Şekilde Kızılötesi Düzeltmeler*, Doktora Tezi, İst. Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [32]. Güdekli, E., 2004, *Bianchi Tip Çözümlerde Ufuk-Eşyönlüleşme Meseleleri*, Doktora Tezi, İst. Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [33]. Ellis, G.F.R., van Elst, H., 1999, Cosmological Models (Cargese lectures 1998), In: Theoretical and Observational Cosmology NATO Series C: *Math. Phys. Sci.*, Lachieze-Ray, M. (ed.), Vol 541, Kluwer, Dordrecht, 1-116.

- [34]. Güdekli, E., 1997, Homojen Evren Modellerinin Matematiksel Temelleri, Yüksek Lisans Tezi, İst. Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [35]. Ellis, G.F.R., 2006, The Bianchi Models: Then and Now, *Gen.Relativ. Gravit.* 38(6), 1003-1015.
- [36]. Shamir, M.F., Komal, A., 2017, Energy Bounds in $f(R,G)$ gravity with Anisotropic Background, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 14, 1750169.
- [37]. Tripathy, S.K., Mishra, B., 2016, Anisotropic solutions in $f(R)$ Gravity, *Eur. Phys. J. Plus*, 131, 273.
- [38]. Amir, M.J., Sattar, S., 2014, Locally Rotationally Symmetric Vacuum Solutions in $f(R)$ Gravity, *Int. J. Theor. Phys.*, 53, 773-787.
- [39]. Sharif, M., Kausar, H.R., 2011, Anisotropic Fluid and Bianchi Type III Model in $f(R)$ Gravity, *Phys. Lett. B* 697, 1-6.
- [40]. Sharif, M., Kausar, H.R., 2011, Non-vacuum Solutions of Bianchi Type VI₀ Universe in $f(R)$ Gravity, *Astrophys. Space Sci.* 332, 463-471.
- [41]. Shamir, M.F., 2010, Some Bianchi Type Cosmological Models in $f(R)$ Gravity, *Astrophys. Space Sci.* 330, 183-189.
- [42]. Sharif, M., Shamir, M.F., 2010, Non-vacuum Bianchi Types I and V in $f(R)$ Gravity, *Gen. Rel. Grav.* 42, 2643-2655.
- [43]. Sharif, M., Shamir, M.F., 2009, Exact Solutions of Bianchi Types I and V Spacetimes in $f(R)$ Theory of Gravity, *Class. Quant. Grav.* 26, 235020.
- [44]. Güler S., Güdekli E., 2021, Consistency Conditions of $f(R, G)$ -Gravity Field Equations For Bianchi-Type III Metric, *Asian Journal of Research and Reviews in Physics* 4(3), 29-41.
- [45]. Güler S., Sofuoğlu, D., Reconstructions of $f(G)$ -Gravity For Bianchi-Type I Model (Sözlü Bildiri), *Turkish Physical Society 31 st International Physics Congress Book of Abstracts*, 21-24 Temmuz 2014, Bodrum, Türkiye, 237.
- [46]. Goheer N., Goswami R., Dunsby P.K.S., Ananda K., 2009, On the Co-Existence of Matter Dominated and Accelerating Solutions in $f(G)$ -Gravity, *Phys. Rev. D* 79, 121301.

EKLER

EK A. ROBERTSON-WALKER:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[dr^2 + f_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

* **Koordinatlar** : $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \phi)$ (geçici olarak $c=1$ alınacaktır $\Rightarrow x^0 = ct \equiv t$)

* **Ortonormal tetrad** $\{e_a, e^a\}$ tabanı:

$$\begin{aligned} e^0 &= dt \\ e^1 &= a(t)dr \\ e^2 &= a(t)f_k(r)d\theta \\ e^3 &= C(t)dz \end{aligned} \quad e_i^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)f_k(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)f_k(r)\sin\theta \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} e_0 &= \partial_t \\ e_1 &= \frac{1}{a(t)}\partial_r \\ e_2 &= \frac{1}{a(t)f_k(r)}\partial_\theta \\ e_3 &= \frac{1}{a(t)f_k(r)\sin\theta}\partial_\phi \end{aligned} \quad e_a^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a(t)f_k(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a(t)f_k(r)\sin\theta} \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

• **Komütasyon fonksiyonları ve Ricci dönme katsayıları** ('nokta' ve 'üssü' yazılışları, sırasıyla, t kozmik zamanına ve r koordinatına göre türevleri göstermektedir):

$$\gamma^0_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.2)$$

$$\gamma^2_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\dot{a}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f'_k}{af_k} & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{f'_k}{af_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{a}}{a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{f'_k}{af_k} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cot \theta}{af_k} \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{f'_k}{af_k} & \frac{\cot \theta}{af_k} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma^0_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} \end{pmatrix} \quad \Gamma^1_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f'_k}{af_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{f'_k}{af_k} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma^2_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{f'_k}{af_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cot \theta}{af_k} \end{pmatrix} \quad \Gamma^3_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{f'_k}{af_k} & \frac{\cot \theta}{af_k} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

- **Genişleme Tansörü, genişleme skaleri ve makaslama tansörü:**

$$\theta_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} \end{pmatrix}, \quad \theta = 3\frac{\dot{a}}{a} \equiv 3H, \quad \sigma_{ab} = 0 \quad (\text{A.3})$$

- **Riemann ve Ricci eğrilik tansörleri, Ricci eğrilik skaleri, Gauss-Bonnet terimi** (Sıfırdan farklı bileşenler yazılmıştır):

$$R_{0101} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{0202} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{0303} = -\frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.4})$$

$$R_{1212} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}, \quad R_{1313} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}, \quad R_{2323} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} & G_{00} &= 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} \\
R_{11} &= \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} & G_{11} &= -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} \\
R_{33} &= R_{22} = R_{11} & G_{33} &= G_{22} = G_{11}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \quad , \quad G = 24\frac{\ddot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \tag{A.4}$$

EK B. BIANCHI-TİP I:

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)dy^2 + C^2(t)dz^2$$

* Ortonormal tetrad $\{e_a, e^a\}$ tabanı:

$$\begin{aligned} e^0 &= dt \\ e^1 &= A(t)dx \\ e^2 &= B(t)dy \\ e^3 &= C(t)dz \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad e_i^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} e_0 &= \partial_t \\ e_1 &= \frac{1}{A(t)}\partial_x \\ e_2 &= \frac{1}{B(t)}\partial_y \\ e_3 &= \frac{1}{C(t)}\partial_z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad e_a^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C(t)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

• Komütasyon fonksiyonları ve Ricci dönme katsayıları:

$$\begin{aligned} \gamma^0_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^1_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 \\ \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\dot{B}}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{B}}{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{C}}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{C}}{C} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{B}}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{C}}{C} \end{pmatrix} & \Gamma^1_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Gamma^2_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{B}}{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma^3_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{C}}{C} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

- **Genişleme Tansörü, genişleme skaleri ve makaslama tansörü:**

$$\theta_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{B}}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{C}}{C} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ab} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{C}}{C} \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

$$\theta = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \tag{B.3}$$

$$\theta^2 = \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{C}^2}{C^2} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + 2\frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \tag{B.3}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab} = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{C}^2}{C^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \tag{B.3}$$

- **Riemann ve Ricci eğrilik tansörleri, Ricci eğrilik skaleri, Gauss-Bonnet terimi** (Sıfırdan farklı olan bileşenler yazılmıştır) :

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= -\frac{\ddot{A}}{A}, \quad R_{0202} = -\frac{\ddot{B}}{B}, \quad R_{0303} = -\frac{\ddot{C}}{C} \\
R_{1212} &= \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}, \quad R_{1313} = \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA}, \quad R_{2323} = \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} & G_{00} &= \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \\
R_{11} &= \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} & G_{11} &= -\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \\
R_{22} &= \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}\dot{A}}{BA} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} & G_{22} &= -\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \\
R_{33} &= \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} + \frac{\dot{C}\dot{B}}{CB} & G_{33} &= -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$R = 2 \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right) \quad G = 8 \left(\frac{\ddot{A}\dot{B}\dot{C}}{ABC} + \frac{\ddot{B}\dot{C}\dot{A}}{BCA} + \frac{\ddot{C}\dot{A}\dot{B}}{CAB} \right) \tag{B.4}$$

EK C. BAZI YARARLI BAĞINTILAR:

- Yalnızca t zamanına bağlı bir skaler $\varphi = \varphi(t)$ skaler fonksiyonunun kovaryant türevlerinin tetrad bileşenleri ($\varphi = \varphi(t)$, $f_R = f_R(t)$ ve $f_G = f_G(t)$ fonksiyonlarının yerini tutmaktadır):

$$\left. \begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \varphi &= e_a (\nabla_b \varphi) - \Gamma_{ab}^c \nabla_c \varphi \\ &= e_a e_b \varphi - \Gamma_{ab}^c e_c \varphi \\ &= e_a e_b \varphi - \Gamma_{ab}^0 e_0 \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \nabla_0 \nabla_0 \varphi &= e_0 e_0 \varphi - \Gamma_{00}^0 e_0 \varphi = \ddot{\varphi} \\ \nabla_1 \nabla_1 \varphi &= -\Gamma_{11}^0 \dot{\varphi} \\ \nabla_2 \nabla_2 \varphi &= -\Gamma_{22}^0 \dot{\varphi} \\ \nabla_3 \nabla_3 \varphi &= -\Gamma_{33}^0 \dot{\varphi} \end{aligned} \right. \quad (C.1)$$

$$\nabla^a \nabla_b \varphi = \eta^{ac} \nabla_c \nabla_b \varphi \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \nabla^0 \nabla_0 \varphi &= -\nabla_0 \nabla_0 \varphi \\ \nabla^0 \nabla_\beta \varphi &= -\nabla_0 \nabla_\beta \varphi \\ \nabla^\alpha \nabla_0 \varphi &= -\nabla_\alpha \nabla_0 \varphi \\ \nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi &= +\nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi \end{aligned} \right., \nabla^a \nabla^b \varphi = \eta^{ac} \eta^{bd} \nabla_c \nabla_d \varphi \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \nabla^0 \nabla^0 \varphi &= +\nabla_0 \nabla_0 \varphi \\ \nabla^0 \nabla^\beta \varphi &= -\nabla_0 \nabla_\beta \varphi \\ \nabla^\alpha \nabla^0 \varphi &= -\nabla_\alpha \nabla_0 \varphi \\ \nabla^\alpha \nabla^\beta \varphi &= +\nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi \end{aligned} \right. \quad (C.2)$$

$$\square \varphi \equiv \nabla^b \nabla_b \varphi = \eta^{ab} \nabla_a \nabla_b \varphi \Rightarrow \square \varphi = -\nabla_0 \nabla_0 \varphi - (\nabla_1 \nabla_1 \varphi + \nabla_2 \nabla_2 \varphi + \nabla_3 \nabla_3 \varphi) \dot{\varphi} \\ = -\ddot{\varphi} - (\Gamma_{11}^0 + \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{33}^0) \dot{\varphi} \quad (C.3)$$

Bianchi-Tip I ve III için: $\Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{A}}{A}$, $\Gamma_{22}^0 = \frac{\dot{B}}{B}$, $\Gamma_{33}^0 = \frac{\dot{C}}{C} \Rightarrow \square \varphi = \ddot{\varphi} - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\varphi}$ (C.4)

RW için: $\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \square \varphi = -\ddot{\varphi} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi}$ (C.5)

- Ricci tansörünün tetrad gösterimleri arasındaki bağıntılar:

$$R_a^b = \eta^{bd} R_{ad} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} R_0^0 &= -R_{00} \\ R_0^\beta &= +R_{0\beta} \\ R_\alpha^0 &= -R_{\alpha 0} \\ R_\alpha^\beta &= +R_{\alpha\beta} \end{aligned} \right., R^{ab} = \eta^{ac} \eta^{bd} R_{cd} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} R^{00} &= +R_{00} \\ R^{0\beta} &= -R_{0\beta} \\ R^{\alpha 0} &= -R_{\alpha 0} \\ R^{\alpha\beta} &= +R_{\alpha\beta} \end{aligned} \right. \quad (C.6)$$

Koordinatlar : $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \phi)$

Metrik tansör ve tersi (geçici olarak $c=1$ alınmıştır $\Rightarrow x^0 = ct \equiv t$):

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 f_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 f_k^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, (g^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 f_k^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2 f_k^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (C.7)$$

Christoffel Sembolleri ('nokta' ve 'üssü' yazılışları, sırasıyla, t kozmik zamanına ve r koordinatına göre türevleri göstermektedir. Sıfırdan farklı olanlar yazılmıştır):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= a\dot{a} & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}f_k^2 & \Gamma_{22}^1 &= -f_k f_k' & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{f_k'}{f_k} & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{f_k'}{f_k} \\ \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}f_k^2 \sin^2 \theta & \Gamma_{33}^1 &= -f_k f_k' \sin^2 \theta & \Gamma_{33}^2 &= -\cos \theta \sin \theta & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \end{aligned} \quad (C.8)$$

Riemann tansörünün bileşenleri (kullanılarak diğer sıfırdan farklı olanlar bulunabilir):

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -a\ddot{a} \quad , \quad R_{0202} = -a\ddot{a}f_k^2 \quad , \quad R_{0303} = -a\ddot{a}f_k^2 \sin^2 \theta \\ R_{1212} &= a^2 f_k^2 (\dot{a}^2 + k) \quad , \quad R_{1313} = a^2 f_k^2 \sin^2 \theta (\dot{a}^2 + k) \quad , \quad R_{2323} = a^2 f_k^4 \sin^2 \theta (\dot{a}^2 + k) \end{aligned} \quad (C.9)$$

Ricci tansörünün bileşenleri (diğerleri=0):

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad , \quad R_{11} = a^2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right) \quad , \quad R_{22} = f_k^2 R_{11} \quad , \quad R_{33} = f_k^2 \sin^2 \theta R_{11} \quad (C.10)$$

Ricci skaler eğriliği ve Gauss-Bonnet eğrilik invariantı ($G = R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2$):

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \quad G = 24\frac{\ddot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \quad (C.11)$$

Einstein tansörünün bileşenleri (diğerleri=0):

$$G_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \quad G_{11} = a^2 \left(-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}\right), \quad G_{22} = f_k^2 G_{11}, \quad G_{33} = f_k^2 \sin^2 \theta G_{11} \quad (C.12)$$

Enerji-momentum tansörü (mükemmel akışkan ve $u^i = \delta^i_0 \Leftrightarrow u_i = -\delta^0_i$ alarak) :

$$T_{ij} = \mu u_i u_j + p(g_{ij} + u_i u_j) \Rightarrow T_{ij} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2 f_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2 f_k^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (C.13)$$

Einstein alan denklemleri ($c \neq 1$ durumuna düzeltilmiş Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) denklemleri) :

$$3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right) = \Lambda c^2 + \kappa^2 c^2 \mu \quad (C.14)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} = -\Lambda c^2 + \kappa^2 c^2 p \quad (C.15)$$

Bu ikisinin kombinasyonu, Raychudhuri denklemini verir. Öte yandan, yine bu ikisinden

$$\dot{\mu} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mu + p) = 0 \quad (C.16)$$

bulunur ki, bu da, korunum denklemi olup madde-enerjinin korunduğunu ifade eder. Bu son üç denklem Standard Rölativist Kozmoloji'nin temellerini oluşturur.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Selçuk GÜLER
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	Tarih girmek için tıklayın veya dokununuz.
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Trakya Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Fizik Bölümü
Mezuniyet Yılı	23.06.2009

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı

Makale ve Bildiriler	
- Güler, S., Sofuoğlu, D., Reconstructions of $f(G)$-gravity for Bianchi-type I Model (Sözlü Bildiri), Turkish Physical Society 31 st International Physics Congress Book of Abstracts, 21-24 Temmuz 2014, Bodrum, Türkiye, 237. - Güler S., Güdekli E., 2021, Consistency Conditions of $f(R, G)$-Gravity Field Equations For Bianchi-Type III Metric, Asian Journal of Research and Reviews in Physics 4(3), 29-41.	