

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NONLİNEER KROMATİK DAĞILIMLI KOMPLEKS
GINZBURG-LANDAU DENKLEMİNİN DURAĞAN OPTİK
SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

ALİ MURAT YALÇI

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi MEHMET EKİCİ

YOZGAT – ŞUBAT 2022

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NONLİNEER KROMATİK DAĞILIMLI KOMPLEKS
GINZBURG-LANDAU DENKLEMİNİN DURAĞAN OPTİK
SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

ALİ MURAT YALÇI

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi MEHMET EKİCİ

YOZGAT – ŞUBAT 2022

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ali Murat YALÇI

02/02/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NONLİNEER KROMATİK DAĞILIMLI KOMPLEKS GINZBURG-LANDAU DENKLEMİNİN DURAĞAN OPTİK SOLİTON ÇÖZÜMLERİ.

ALİ MURAT YALÇI

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİMDALI

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET EKİCİ

Optik solitonlar, nonlinear optik alanında araştırmaların bir hazinesini temsil eder. Uzun mesafeler için optik fiberler aracılığıyla soliton yayılımının dinamiklerini tanımlayan birkaç model vardır. Bunlar, nonlinear Schrödinger denklemi, Schrödinger-Hirota denklemi, Sasa-Satsuma denklemi, Manakov denklemi, Biswas-Milović denklemi ve diğerleridir. Bu çalışmada, çok sayıda nonlinear kırılma indisi yapılarına sahip nonlinear kromatik dağılım ile çalışılan kompleks Ginzburg-Landau denkleminin durağan soliton çözümleri elde edilmiştir. Genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin uygulanması ile parlak, koyu ve tekil durağan optik solitonlar, Jacobi'nin eliptik fonksiyonları cinsinden çözümler ve diğer çözümler elde edilmiştir. Ayrıca, log yasası nonlinearliği durumunda, ele alınan modele Gaussian soliter dalgalar rapor edilmiştir.

2022, xi+79

ANAHTAR KELİMELELER: Durağan solitonlar, Nonlinear kromatik dağılım, Kompleks Ginzburg-Landau denklemi, Genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi.

ABSTRACT

MASTER THESIS

STATIONARY OPTICAL SOLITON SOLUTIONS OF COMPLEX GINZBURG-LANDAU EQUATION WITH NONLINEAR CHROMATIC DISPERSION

ALİ MURAT YALÇI

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. MEHMET EKİCİ

Optical solitons represent a treasure trove of research in the field of nonlinear optics. There are several models that describe the dynamics of soliton propagation through optical fibers for long distances. These are the nonlinear Schrödinger's equation, Schrödinger–Hirota equation, Sasa–Satsuma equation, Manakov equation, Biswas–Milovic equation and several others. In this work, stationary soliton solutions to the complex Ginzburg-Landau equation that is studied with nonlinear chromatic dispersion having a plethora of nonlinear refractive index structures are obtained. Bright, dark and singular stationary optical solitons, solutions in terms of Jacobi's elliptic functions and other solutions are obtained by the application of generalized (G'/G) -expansion method. Also, in the case of log law nonlinearity, Gaussian solitary waves to the governing equation are reported.

2022, xi+79

KEYWORDS: Stationary solitons, Nonlinear chromatic dispersion, Complex Ginzburg-Landau equation, Generalized (G'/G) -expansion method.

ÖNSÖZ

“Nonlinear Kromatik Dağılımlı Kompleks Ginzburg-Landau Denkleminin Durağan Optik Soliton Çözümleri” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını feda ederek, her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen, engin bilgisi ile beni yönlendiren değerli tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ’ye teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans ders döneminde kendilerinden çok şey öğrendiğim Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU’na teşekkürü bir borç bilirim.

Tezi okuyarak katkı sağlayan Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL’a teşekkürlerimi sunarım.

Bu zaman zarfında her zaman maddi ve manevi yanımda olan, bana moral veren aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ali Murat YALÇI

02/02/2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Tez Onay Sayfası.....	ii
Tez Beyanı.....	iii
Özet.....	iv
Abstract.....	v
Önsöz.....	vi
İçindekiler.....	vii
Şekiller Listesi.....	ix
Simgeler ve Kısaltmalar Listesi.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL BİLGİLER.....	4
2.1. Solitonlar	4
2.2. Optik Solitonlar	5
2.2.1. Optik Soliton Tipleri	5
3. NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ	8
3.1. Nonlineerliğin Sınıflandırılması	8
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ G'/G -AÇILIM YÖNTEMİ.....	12
5. ANA MODEL.....	14
6. MATEMATİKSEL ANALİZ.....	15
6.1. Kerr Yasası.....	15
6.2. Kuvvet Yasası.....	20
6.3. Parabolik Yasası.....	24
6.4. Çift Kuvvet Yasası.....	27
6.5. Kuadratik-Kübik Yasası.....	31
6.6. Logaritma Yasası.....	35
6.7. Anti-Kübik Yasası.....	37

Sayfa

6.8. Kübik-Kuintik-Septik Yasası.....	39
6.9. ��l�-Kuvvet Yasası.....	42
6.10. Zayıf Yerel-Olmayan Nonlineerli�e Sahip Parabolik Yasası.....	45
6.11. Genelleştirilmiş Anti-Kübik Yasası.....	49
6.12. Kübik-Kuartik Yasası.....	54
6.13. Genelleştirilmiş Kübik-Kuartik Yasası.....	58
7. SONUÇ VE �NER�LER.....	70
8. KAYNAKLAR.....	73

 ZGE M  

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (36) çözümünün nümerik simülasyonu.....	62
Şekil 2: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (37) çözümünün nümerik simülasyonu.....	62
Şekil 3: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (38) çözümünün nümerik simülasyonu.....	62
Şekil 4: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (39) çözümünün nümerik simülasyonu.....	63
Şekil 5: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (40) çözümünün nümerik simülasyonu.....	63
Şekil 6: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (41) çözümünün nümerik simülasyonu.....	63
Şekil 7: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (42) çözümünün nümerik simülasyonu.....	64
Şekil 8: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (43) çözümünün nümerik simülasyonu.....	64
Şekil 9: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (44) çözümünün nümerik simülasyonu.....	64
Şekil 10: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (45) çözümünün nümerik simülasyonu....	65
Şekil 11: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (46) çözümünün nümerik simülasyonu ...	65
Şekil 12: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (47) çözümünün nümerik simülasyonu....	65
Şekil 13: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (48) çözümünün nümerik simülasyonu....	66
Şekil 14: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (49) çözümünün nümerik simülasyonu....	66
Şekil 15: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (50) çözümünün nümerik simülasyonu....	66

Şekil 16: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (51) çözümünün nümerik simülasyonu...	67
Şekil 17: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (52) çözümünün nümerik simülasyonu...	67
Şekil 18: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (53) çözümünün nümerik simülasyonu...	67
Şekil 19: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (54) çözümünün nümerik simülasyonu...	68
Şekil 20: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (55) çözümünün nümerik simülasyonu...	68
Şekil 21: $a = 1$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (57) çözümünün nümerik simülasyonu.....	68
Şekil 22: $a = 1$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (58) çözümünün nümerik simülasyonu.....	69
Şekil 23: $a = 1$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (59) çözümünün nümerik simülasyonu.....	69
Şekil 24: $a = 1$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (60) çözümünün nümerik simülasyonu.....	69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Çalışma boyunca kullanılan simgeler ve kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklamalar
α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
λ	Lambda
θ	Theta
κ	Kappa
ξ	Xi
ϕ	Phi
μ	Mu
ζ	Zeta
Σ	Toplam sembolü
$ q $	q nun modülü

Kısaltmalar	Açıklamalar
NLS	Nonlinear Schrödinger
SH	Schrödinger-Hirota
FL	Fokas-Lenells
KdV	Korteweg de Vries
NLDS	Nonlinear dispersif Schrödinger
SS	Sasa-Satsuma
LPD	Lakshmanan-Porsezian-Daniel

1. GİRİŞ

Optik solitonlar teknolojisinin analitik ve hızlı gelişimi, telekomünikasyon endüstrisinde kalıcı bir etki bırakmıştır (Atai ve Malomed, 2001; Geng ve Li, 2008; Guo ve Zhou, 2010; Kudryashov, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d, 2021; Susanto ve Malomed, 2021; Yan, 2006a, 2006b; Zhang vd., 2010; Wazwaz, 2016, 2018; Wazwaz ve Kaur, 2019). Bu durum, bu alanda performans artışı için çok sayıda sonuca ve sayısız yollara yol açtı. Kıtalararası mesafeler boyunca solitonların dinamik akışını yöneten birkaç model vardır. En görünür model, nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi olsa da, duruma bağlı olarak genellikle diğer modellere sapsak gerekir. Örneğin, dispersif solitonlar Schrödinger-Hirota (SH) denklemi veya Fokas-Lenells (FL) denklemi ve diğerleri tarafından yönetilir.

Kıtalararası mesafeler boyunca soliton iletimi için temel elektronik kumaşı oluşturan iki anahtar bileşen, kromatik dağılım ve kendiliğinden faz modülasyonudur. Kromatik dağılım lineer iken, kendiliğinden faz modülasyonu bir optik fiberdeki nonlinear kırılma indisinin yapısından kaynaklanır. Kapsamlı olarak incelenen kendiliğinden faz modülasyonunun çeşitli biçimleri vardır. Bunlar, nonlinear kırılma indisinin Kerr olmayan yasaları olarak bilinirler. Burada, Kerr yasası nonlinearliğin kübik biçimidir ve bu bağlamda ele alınan modele sıklıkla kübik Schrödinger denklemi veya daha yaygın olarak NLS denklemi olarak atıfta bulunulur.

Bu çalışmada, uzun mesafeler için soliton dinamiklerini yöneten alternatif bir model olan kompleks Ginzburg-Landau (GL) denklemi ele alınacaktır (Biswas, 2009, 2018; Triki vd., 2012; Mirzazadeh vd., 2016; Arnous vd., 2017; Biswas ve Alqahtani, 2017, Biswas vd., 2018a, 2018b, 2021a, 2021b; Arshed vd., 2019; Das vd., 2019; Yildirim vd., 2020a, 2020b; Zayed vd., 2020, 2021; Yan vd., 2020; Yalçı ve Ekici, 2022). Bu model, nonlinear kromatik dağılım ile incelenmiştir. Kendiliğinden faz modülasyon yapılarının çeşitli formları çalışılmıştır. (Biswas ve Konar, 2006). Bu nonlinearlik formları şu şekildedir: Kerr yasası, kuvvet yasası, parabolik yasası, çift kuvvet yasası, kuadratik-kübik yasası, logaritma yasası, anti-kübik yasası, kübik-kuintik-septik yasası, üçlü-kuvvet yasası, zayıf yerel-olmayan nonlinearliğe sahip parabolik yasası, genelleştirilmiş anti-kübik yasası, kübik-kuartik yasası ve son olarak genelleştirilmiş kübik-kuartik yasasıdır. Fiberlerin özensiz kullanımı, fiberin yeraltı ve denizaltı kurulumu gibi çeşitli fiziksel

unsurlar ve çevresel nedenler gibi diğer sorunlar, kromatik dağılımın nonlinear hale getirilmesine neden olabilir. Böyle bir durumda solitonlar durağan hale gelecek ve böylece kıtalar arası ve okyanuslar arası mesafeler için bilgi transferi tamamen duracaktır. Bu, özellikle dünyanın tamamen internet faaliyetlerine bağımlı olduğu COVID-19 zamanlarında feci bir etkiye yol açacaktır. Çok çeşitli kendiliğinden faz modülasyonu için, durağan solitonların analitik türetilmesi, çalışmanın geri kalanında gösterilmektedir. Durağan solitonlar, eliptiklik modülü uygun limite yaklaşırken soliton çözümlerine yaklaşan Jacobi'nin eliptik fonksiyonları aracılığıyla elde edilir.

Durağan optik solitonların araştırılması son zamanlarda büyük ilgi gördü ve bir dizi anlamlı sonuç elde edildi. (Biswas ve Khalique, 2011)'de nonlinear dispersif Schrödinger (NLDS) denkleminin Lie grup analizi yardımıyla integrasyonu gerçekleştirildi ve ele alınan model için durağan çözümler elde edildi. (Biswas ve Khalique, 2013)'te genelleştirilmiş gelişimli NLDS denklemi için durağan çözümler çıkarıldı. (Biswas vd., 2018)'de, nonlinear grup hız dağılımını sürdüren optik fiberlerdeki durağan solitonları incelemek için genişletilmiş deneme fonksiyon yöntemi kullanıldı ve bu çalışmanın devamı olarak aynı yöntem kullanılarak Kerr olmayan birkaç egzotik nonlinearlik yasasına sahip NLS denkleminin durağan soliton çözümleri ortaya çıkarıldı (Ekici vd., 2018). (Adem vd., 2020)'de, model denklem lineer zamansal gelişimin yanı sıra genelleştirilmiş zamansal gelişim ile birlikte göz önüne alındı ve nonlinear kırılma indisinin quadratik-kübik yasasına ve nonlinear kromatik dağılıma sahip durağan optik solitonlar türetilti. (Adem vd., 2020)'de, NLS denkleminin pertürbe edilmiş bir formu olan Sasa-Satsuma (SS) denklemi tarafından modellenen, nonlinear kromatik dağılıma ve kendiliğinden faz modülasyonunun Kerr yasasına sahip durağan optik solitonlar keşfedildi. (Adem vd., 2021)'de, nonlinear kırılma indisinin Kerr yasasına sahip Lakshmanan-Porsezian-Daniel (LPD) modeli için nonlinear kromatik dağılımlı durağan optik solitonlar elde edildi. (Sucu vd., 2021)'de, karşılık gelen kromatik dağılım nonlinear hale getirildiğinde, bir optik fiberin nonlinear kırılma indisinin on bir farklı formu için genişletilmiş deneme fonksiyon algoritması ile durağan optik solitonları keşfedildi. (Ekici vd., 2021)'de, kromatik dağılımın nonlinear versiyonuyla birlikte, Nikolay Kudryashov tarafından son zamanlarda önerilen altı nonlinear kırılma indisi yasası ile modellenen durağan solitonlar çalışıldı. (Sonmezoglu vd., 2021)'de, nonlinear kromatik dağılımla birlikte nonlinear kırılma indisinin yeni önerilmiş kübik-kuartik biçimi için durağan optik solitonlar araştırıldı. (Biswas vd., 2022)'de, Kudryashov'un son zamanlarda önerilen kırılma indisinin beşli

(quintuple) kuvvet yasası ile NLS denkleminde durağan optik soliton çözümler elde etmek için genişletilmiş deneme fonksiyon şeması uygulandı. İncelenen bu model, nonlinear kromatik dağılım ile birlikte çalışıldı. Hem lineer zamansal gelişim hem de genelleştirilmiş zamansal gelişim dikkate alındı.

Tez çalışmasının yapısı şu şekilde düzenlenmiştir: 2. Bölümde, solitonlar ve optik solitonlar hakkında bilgiler verildi ve optik soliton tipleri olan parlak, koyu, tekil ve durağan solitonlardan bahsedildi. Bir optik fiber boyunca ışık darbesinin yayılmasını yöneten NLS denklemi 3. Bölümde verildi ve sonra nonlinear optikte meydana gelen nonlinearliğin on üç formu tanıtıldı. 4. Bölümde, çok sayıda nonlinear kırılma indisi yapılarına sahip nonlinear kromatik dağılımlı kompleks GL denkleminde durağan soliton çözümler elde etmek için uygulanacak olan genelleştirilmiş G'/G -açılım yönteminin tanımı verildi. Bir sonraki bölümde ana modele girişten sonra takip eden bölüm, modelde uygulanacak olan matematiksel analizin ayrıntılı bir şekilde açıklamasıdır. Bu analiz kendiliğinden faz modülasyonunun önerildiği şekliyle on üç alt bölümden oluşan nonlinear kırılma indisi yapılarının on üç formu ile birlikte başarıyla uygulandı. Son olarak, 7. Bölümde, bazı sonuçlar ve gelecekte açılacak olan araştırma yollarını da kapsayan birkaç öneri sunulmaktadır.

2.TEMEL BİLGİLER

2.1. Solitonlar

Fizik ve matematik alanında, soliter dalga, yayılma sırasında boyutunu ve şeklini değiştirmeyen özel bir dalga türüdür. Soliter dalga olgusu ilk olarak Viktorya dönemi mühendisi, deniz mimarı ve gemi yapımcısı John Scott Russell (1808-1882) tarafından keşfedilmiştir (Russell, 1834). 1834'te dar bir kanal boyunca hareket eden soliter dalgaları gözlemlemek için bir dizi deney yapmıştır. Daha sonra Russell, dalgaların kararlı olmaları ve hızlarını ve boyutlarını değiştirmeden çok büyük mesafelerde yayılabilmeleri de dahil olmak üzere bu soliter dalgaların temel özelliklerini incelemek için laboratuvarında bir tank inşa etmiştir. Russell'ın gözlemleri, iki Hollandalı bilim adamı olan Diederik Korteweg ve Gustav de Vries (Korteweg ve de Vries, 1895) 1895'te soliter dalga ve periyodik dalga çözümleri ile birlikte KdV denklemini sağlayana kadar Newton ve Bernoulli'nin hidrodinamik teorileriyle pek uyumlu değildi. Bir soliton, diğer soliter dalgalarla çarpışmadan sonra kalıcı yapısını koruma özelliğine sahip bir parçacık olarak da hareket eden bir dalga paketidir. Başka bir deyişle soliton, aşağıdaki istisnai özelliklere sahip soliter hareket eden dalgayı temsil eden lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü olarak tanımlanabilir (Agrawal, 2001):

- Kalıcı bir yapıya sahiptir.
- Dağılmaz.
- Süperpozisyon teorisine uymaz.
- Belirli bir bölge içinde yer alır.
- Diğer solitonlarla çarpıştıktan sonra şekli ve boyutu değişmez.

Solitonlar yalnızca su dalgaları ile sınırlı değildir, aynı zamanda integrallenebilir nonlinear kısmi diferansiyel denklemin çeşitli soliton çözümleri vermesi gibi, farklı nonlinear sistemlerde de görünürler. Solitonlar benzersiz özelliklerinden dolayı, akışkanlar dinamiği, yay sistemi, DNA'daki sıvının hareketi, plazma fiziği, telekomünikasyon endüstrisi ve nonlinear optik gibi matematiksel fiziğin çeşitli alanlarında çok verimlidirler (Agrawal, 1989).

2.2. Optik Solitonlar

Nonlinear optikte soliton terimi, dalganın geçtiği ortamdaki lineer ve lineer olmayan etkiler arasındaki denge nedeniyle yayılma sırasında yolunu veya şeklini

değiştirmeyen herhangi bir optik darbe olarak tanımlanır. Bunlara, ortamda kırılmayan veya dağılmayan lokalize ışık darbeleri olarak atıfta bulunulur. Herhangi bir bozulma olmadan uzun mesafeler katedebilirler ve bu özellik soliton teorisini optik iletişim alanında çok faydalı kılar. Optik fiberde bulunan ve telekomünikasyon endüstrisinde optik sistemin performansını etkileyebilecek çeşitli etkenler vardır. Optik darbe yayılımı, darbe genişlemesi ve semboller arası girişim üreten lineer bir etki olarak tanımlanan ve basitçe GVD olarak adlandırılan grup hız dağılımından etkilenebilir. Tek modlu fiberlerde ortaya çıkan birçok doğrusal olmayan etki de vardır, bunlar kendiliğinden faz modülasyonu, Raman saçılması ve Kerr etkisidir. Bir ışık dalgasını yaymak için, ışığı iyi tanımlanmış bir yol boyunca hareket etmeye zorlamak için bir kırılma indisi varyasyonu uygulayarak ışık huzmesini optik fiber veya başka bir ortamda yönlendirmek için dalga kılavuzu kullanılabilir. Günümüzde internet sektörü, Twitter, Facebook ve Google da dahil olmak üzere telekomünikasyon sektörü optik solitonların yardımıyla çalışmaktadır (Milović ve Biswas, 2013).

2.2.1. Optik soliton tipleri

(i) Parlak soliton

Parlak soliton, kendisiyle ilişkili dalganın genliğinde kısa süreli bir artışla oluşturulan lokalize bir yüzeydir. Parlak solitonlar, taşıyıcının kararsızlığından kaynaklanır ve bu kararlı olmayan durumun nedeni uzun dalga modülasyonudur. Dağılım alanında, dalganın frekansı ve kırılma indisi ters orantılıdır, bu nedenle frekans arttıkça kırılma indisi azalır ve geçici parlak solitonlar elde edilebilir (Hasegawa ve Tappert, 1973). Normal dağılım bölgesinde, optik fiberlerdeki nonlinear etkenler solitonların oluşumunu etkiler. Optik fiberlerde, grup hız dağılımı, kararsızlığı nedeniyle düzensiz olan sabit genlik dalgasına sahiptir. Parlak solitonlar, sekant hiperbolik grafiği temsil eder. Matematiksel olarak, parlak solitonlar $\zeta = B(\hat{t} - \mu z)$ olmak üzere

$$v(z, \hat{t}) = \lambda \operatorname{sech}^p \zeta \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır (Biswas vd., 2012). Burada $v(z, \hat{t})$ solitonun $\hat{t}$ zamanına ve z mesafesine bağlı genliği, μ soliton hızı, λ yer değiştirme ($z = 0$ ve $\hat{t} = 0$ 'da maksimum), B ters soliton genişliği ve p denklemin çıkarılması sırasında belirlenen bilinmeyendir.

(ii) Koyu soliton

Koyu solitonlar, ilk kez 1987’de P. Emplit ve ark. (Emplit vd., 1987) tarafından çalışıldı. Onlar normal darbe kısa bir süre için sıfıra atladığında ve orijinal konumuna geri döndüğünde koyu solitonların üretildiğini gözlemlediler. Bunlar kendileriyle ilişkili dalgaların genliğinde kısa süreli bir azalmanın yarattığı lokalize dalgalardır ve ayrıca taşıyıcı dalga kararlı olduğunda da ortaya çıkarlar.

Bu tür solitonlar yoğunluk düşüşleri olarak gösterilebildiğinden, sürekli dalga arka planında koyu soliton bulunur. Kendi kendine odaklanmayan nonlinear durumlarda, koyu solitonlar ortaya çıkar. Sürekli kararlı arka planları nedeniyle, bu solitonlar nonlinear fiberden geçen darbelerde küçük boşluklar oluşturur. Topolojik dalgalar ve şok dalgaları koyu solitonlar kullanılarak incelenir. Bu tür solitonlar çok yüksek hızda yayılırlar ve hızla enerji kazanıp kaybedebilirler. Kerr olmayan malzemelerin varlığında koyu soliter dalgalar kararsız dalgalara dönüşür ve teğet hiperbolik grafiği oluştururlar.

Matematiksel olarak, koyu solitonlar $n > 0$ ve $\zeta = B(\hat{t} - \mu z)$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır (Bekir vd., 2014):

$$v(z, \hat{t}) = \lambda \tanh^n \zeta. \quad (2)$$

Burada $v(z, \hat{t})$ solitonun $\hat{t}$ zamanına ve z mesafesine bağlı genliği, μ soliton hızı, λ yer değiştirme ($z = 0$ ve $\hat{t} = 0$ ’da maksimum), B ters soliton genişliği ve n denklemin çıkarılması sırasında belirlenen bilinmeyendir.

(iii) Tekil soliton

Nonlinear oluşum denklemleri alanında, tekil solitonlar bol karakteristiktir ve çözümleri, belirli koşullar altında Rouge dalgalarının oluşumuna neden olan sivri uçlar şeklinde gösterilebilir.

Rosenau-KdV denklemini kullanarak Razborova ve ark. (Razborova vd., 2014) tekil solitonları, korunum yasalarını ve şok dalgaları buldular.

Tekil bir soliton bulmak için

$$v(\zeta) = B \operatorname{csch}^n \zeta \quad (3)$$

formunda ansatz uygulanır. Burada B sıfırdan farklı keyfi bir sabiti gösterir ve n , daha sonra belirlenecek olan bir bilinmeyendir.

(iv) Durağan soliton

Hareketsiz duruyormuş gibi görünen ve üzerinde mevcut olan parçacıkların sabitlenmiş yerlerinde titreştiği dalga, durağan veya duran dalga olarak bilinir. NLS denkleminin durağan çözümü, bu NLS denkleminin çözümü zıt yönde hareket eden ve belirli dalga boyunda birbiriyle çarpışan iki özdeş dalga biçiminde olduğunda ortaya çıkar. NLDS denkleminin lokalize edilmiş durağan soliton çözümleri

$$v(x, t) = \phi(x)e^{i\lambda t} \quad (4)$$

şeklinde dir. Burada λ bir sabittir ve ϕ fonksiyonu sadece x bağımsız değişkenine bağlıdır. Biswas ve arkadaşları (Biswas ve Khaliq, 2011), NLS denkleminin durağan çözümlerini elde ettiler.

3. NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ

Bir optik fiber boyunca ışık darbesinin yayılmasını yöneten denklem, NLS denklemi olarak bilinir. Bu denklem, nonlinear optik, plazma fiziği ve akışkanlar dinamiği dahil olmak üzere matematiksel fiziğin sayısız alanında önemli bir rol oynar. NLS denklemi, normalde integre edilemeyen nonlinear bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklemi integrallenemez kılan, yalnızca onda bulunan nonlinear terim değildir, aynı zamanda yüksek dereceli dağılım da integrallenebilirliğini etkiler. Bu denklem, daha sonra tartışılacak olan farklı nonlinearlik türleri için soliton çözümlerine yardımcı olur. NLS denklemi genellikle aşağıdaki denklemle tanımlanır (Biswas ve Konar, 2006):

$$iv_t + \frac{1}{2}v_{xx} + F(|v|^2)v = 0. \quad (5)$$

Yukarıdaki denklemde F , reel değerli fonksiyonu temsil eder ve v , x ve t bağımsız değişkenlerine bağlıdır. İlk terim zamana göre gelişim terimini temsil ederken, ikinci terim grup hız dağılımından kaynaklanmaktadır ve üçüncü terim nonlinear terimin varlığını göstermektedir. Bu denklem optik fiberden geçen kısa darbeyi bulmak için kullanılır ve pikosaniyelik ışık darbelerinin araştırılması için iki faktör olan grup hız dağılımı ve kendiliğinden faz modülasyonu NLS denklemine dahil edilmiştir (Azzouzi vd., 2009). Katı çekirdekli fotonik kristal fiberlerden geçen optik darbeleri incelemek için üçüncü mertebeden dağılım, Raman öz frekans kaymaları ve kendiliğinden dikleşme gibi bazı nonlinear etkilere sahip daha yüksek dereceli NLS denklemi kullanılır (Azzouzi vd., 2015). Nonlinear optik fiberlerde çeşitli soliton yayılımlarını incelemeye yardımcı olan bu tür denklemler ayrıca nonlinear oluşum denklemleri olarak da bilinir.

3.1. Nonlinearliğin Sınıflandırılması

(5) denklemindeki F fonksiyonunun şimdiye kadar bilinen çeşitli nonlinearlik türleri vardır. Bunlar aşağıdaki gibi listelenir:

1. Kerr yasası:

Bu nonlinearlik durumu

$$F(s) = s \quad (6)$$

iken oluşur (Biswas ve Konar, 2006). Nonlinear optikte meydana gelen nonlinearliğin en basit formu olarak tanımlanabilir. Nonlinearliğin bu türüne sahip NLS denklemi, ters saçılma dönüşümü yöntemi kullanılarak integrallenebilir. Optik fiberlerin çoğunda Kerr yasası nonlinearliği gözlemlenebilir.

2. Kuvvet yasası:

Kuvvet yasası nonlinearliği

$$F(s) = s^m \quad (7)$$

şeklinde formüle edilir (Biswas ve Konar, 2006). Nonlinearliğin bu türü, nonlinear plazma fiziğinde ve nonlinear optikte ortaya çıkar. Nonlinearliğin bu durumunda, dalga parçalanmasından kaçınmak için $0 < n < 2$ olması esastır. Yarı iletkenler kuvvet yasası nonlinearliği de sergilerler.

3. Kübik-kuintik yasası (parabolik yasası):

Parabolik yasası nonlinearliği, b_1 ve b_2 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$F(s) = b_1 s + b_2 s^2 \quad (8)$$

ile verilir (Biswas ve Konar, 2006). Bu nonlinearlik, parabolik yasası olarak da bilinir. Nonlinearliğin bu türü, Langmuir dalgaları ile iyon-akustik dalgalar arasındaki bağlantının değerlendirilmesinde ortaya çıkar.

4. Çift kuvvet yasası:

Çift-kuvvet yasası nonlinearliği, b_1 ve b_2 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$F(s) = b_1 s^m + b_2 s^{2m} \quad (9)$$

biçiminde yapılır (Biswas ve Konar, 2006). Bu nonlinearlik, LiNbO₃ gibi fotovoltaik-fotorefraktif materyallerdeki solitonları tanımlamak için temel model olarak hizmet etmektedir.

5. Kuadratik-kübik yasası:

Kuadratik-kübik yasası, b_1 ve b_2 sabitler olmak üzere,

$$F(s) = b_1 \sqrt{s} + b_2 s \quad (10)$$

iken oluşur (Fujioka vd., 2011). Bu yasa, ilk olarak, 2011 yılında ortaya çıktı ve kaotik fenomenlerin incelenmesinde görüldü.

6. Logaritma yasası:

Bu nonlinearlik durumunda (Biswas ve Konar, 2006)

$$F(s) = \ln s. \quad (11)$$

Böyle bir yasanın avantajı, bu tip nonlinear ortamın, solitonları dağılmadan koruyan soliton radyasyonu üretmemesidir. Bu durum yukarıda tartışılan nonlinear yasalara kıyasla bu ortamın ek bir avantajıdır.

7. Anti-kübik yasası:

Bu yasa, ilk olarak, 2003 yılında ortaya çıktı (Fedele vd., 2003; Triki vd., 2016). Anti-kübik yasası, b_1 ve b_2 ve b_3 sabitler olmak üzere

$$F(s) = \frac{b_1}{s^2} + b_2 s + b_3 s^2 \quad (12)$$

iken oluşur.

8. Kübik-kuintik-septik yasası:

Bu yasa, parabolik yasası nonlinearliğinin bir genişlemesidir. Bu nonlinear ortam, b_1 ve b_2 ve b_3 sabitler olmak üzere

$$F(s) = b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 \quad (13)$$

iken oluşur (Biswas ve Konar, 2006).

9. Üçlü-kuvvet yasası:

Bu nonlinear ortam, b_1 , b_2 ve b_3 sabitler olmak üzere

$$F(s) = b_1 s^m + b_2 s^{2m} + b_3 s^{3m} \quad (14)$$

iken oluşur (Biswas ve Konar, 2006). Bu yasa, çift-kuvvet yasası nonlinearliğinin bir genişlemesi ve kübik-kuintik-septik yasası nonlinearliğinin bir genelleştirmesidir.

10. Zayıf yerel-olmayan nonlinearliğe sahip parabolik yasası:

Bu ortam, b_1 , b_2 ve b_3 sabitler olmak üzere

$$F(s) = b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s_{xx} \quad (15)$$

ile verilir (Zhou vd., 2013).

11. Genelleştirilmiş anti-kübik yasası:

Bu yasa, anti-kübik yasası nonlineerliğinin bir genelleştirmesidir ve b_1 , b_2 , b_3 sabitler olmak üzere aşağıdaki gibi yapılır (Biswas vd., 2019):

$$F(s) = \frac{b_1}{s^{m+1}} + b_2 s^m + b_3 s^{m+1}. \quad (16)$$

12. Kübik-kuartik yasası:

İlk olarak, 2021 yılında ortaya çıktı. Bu nonlineer ortam, b_1 ve b_2 sabitler olmak üzere

$$F(s) = b_1 s + b_2 s^{\frac{3}{2}} \quad (17)$$

şeklinde formüle edilir (Sonmezoglu vd., 2021).

13. Genelleştirilmiş kübik-kuartik yasası:

Bu yasa kübik-kuartik yasasının bir genelleştirmesidir ve b_1 ve b_2 sabitler olmak üzere

$$F(s) = b_1 s^m + b_2 s^{\frac{3m}{2}} \quad (18)$$

biçiminde yapılır (Sonmezoglu vd., 2021).

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ G'/G -AÇILIM YÖNTEMİ

Son zamanlarda, Wang ve diğerleri (Wang vd., 2008), nonlinear oluşum denklemlerinin hareket eden dalga çözümlerini araştırmak için G'/G –açılım yöntemi adı verilen basit bir yöntem sunmuşlardır. Burada $G = G(\xi)$, $G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$ ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemini sağlar ve λ, μ keyfi sabitlerdir. Daha fazla detay için bkz. (Zayed vd., 2009; Zayed, 2009; Zhang vd., 2008a, 2008b).

Bu çalışmada, genelleştirilmiş G'/G –açılım yöntemi olarak adlandırılan alternatif bir yaklaşım kullanıldı. Bu yöntemin ana fikri, nonlinear diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerinin G'/G 'de bir polinom ile ifade edilebildiğidir, burada $G = G(\xi)$, ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemi yerine $[G'(\xi)]^2 = e_2 G^4(\xi) + e_1 G^2(\xi) + e_0$, Jacobi eliptik denklemini sağlar. Burada $\xi = x + y + z - Vt$ ve e_2, e_1, e_0, V keyfi sabitler iken $\xi' = \frac{d}{d\xi}$ şeklinde tanımlanır. Bu polinomun derecesi, verilen nonlinear denklemlerde görülen en yüksek mertebeden türevler ile nonlinear terimler arasındaki homojen denge dikkate alınarak belirlenebilir. Bu polinomun katsayıları, önerilen yöntemin kullanılması sürecinden kaynaklanan bir dizi cebirsel denklemin çözülmesiyle elde edilebilir. Bu yaklaşım, çok sayıda nonlinear kırılma indisi yapılarına sahip nonlinear kromatik dağılım ile çalışılan kompleks GL denkleminin durağan soliton çözümlerinin oluşturulmasında önemli bir rol oynayacaktır.

Genelleştirilmiş G'/G –açılım yönteminin tanımı aşağıdaki gibi verilir (Zayed, 2009; Malik vd., 2012; Yalçı ve Ekici, 2022):

Nonlinear kısmi diferansiyel denklemin

$$F(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{yt}, u_{zz}, u_{zt}, u_{zx}, u_{zy}, \dots) = 0 \quad (19)$$

biçiminde verildiğini varsayalım. Burada $u = u(x, y, z, t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur, F ise $u(x, y, z, t)$ ve onun kısmi türevlerinde en yüksek mertebeli türevlerin ve nonlinear terimlerin yer aldığı bir polinomdur. Genelleştirilmiş G'/G –açılım yönteminin ana adımları aşağıdaki gibi sunulur:

1. Adım: Hareket eden dalga değişkeni

$$u(x, y, z, t) = u(\xi), \quad \xi = x + y + z - Vt \quad (20)$$

ile verilir. Burada V bir sabittir. (20) denklemi, (19) denkleminde yazılarak, $u = u(\xi)$ için (19) denklemi

$$P(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (21)$$

formunda bir adi diferansiyel denkleme indirgenir.

2. Adım: (21) denkleminin çözümünün G'/G 'de bir polinom ile aşağıdaki gibi ifade edilebildiğini varsayalım:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i. \quad (22)$$

Burada $G = G(\xi)$ fonksiyonu

$$[G'(\xi)]^2 = e_2 G^4(\xi) + e_1 G^2(\xi) + e_0 \quad (23)$$

Jacobi eliptik denklemini sağlar. Burada α_i, e_2, e_1, e_0 ve $V, \alpha_N \neq 0$ daha sonra belirlenecek keyfi sabitlerdir. N pozitif tam sayısı, (19) veya (21) denkleminde görülen en yüksek mertebeli türevler ile nonlinear terimler arasındaki homojen denge dikkate alınarak belirlenebilir. Daha net bir ifadeyle, $u(\xi)$ 'nin derecesini $D[u(\xi)] = N$ olarak tanımlanır ve bu takdirde diğer ifadelerin derecesi aşağıdaki gibi verilir:

$$D \left[\frac{d^q u}{d\xi^q} \right] = N + q, \quad D \left[u^p \left(\frac{d^q u}{d\xi^q} \right)^s \right] = Np + s(q + N). \quad (24)$$

Böylece, (22) denklemindeki N 'nin değeri bulunabilir.

3. Adım: (22) denklemi (21) denkleminde yerine koyularak ve (23) denklemi kullanılarak, $G^j(\xi), G'(\xi), G^j(\xi) (j = \pm 1, \pm 2, \dots)$ cinsinden polinomlar elde edilir. Elde edilen polinomların her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek, α_i, e_2, e_1, e_0 ve V için bir dizi cebirsel denklem bulunur.

4. Adım: (23) denkleminin genel çözümleri iyi bilindiğinden (bkz. Ek-A), α_i, V ve (23) denkleminin genel çözümü (22) denkleminde yerine konulduğunda, (19) ile verilen nonlinear kısmi diferansiyel denklemin birçok hareket eden dalga çözümü çıkarılır.

5. ANA MODEL

Bu çalışmada incelenecek olan kompleks GL denkleminin boyutsuz formu

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + bF(|q|^2)q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (25)$$

ile verilir (Biswas, 2009, 2018; Triki vd., 2012; Mirzazadeh vd., 2016; Arnous vd., 2017; Biswas ve Alqahtani, 2017, Biswas vd., 2018a, 2018b, 2021a, 2021b; Arshed vd., 2019; Das vd., 2019; Yildirim vd., 2020a, 2020b; Zayed vd., 2020, 2021; Yan vd., 2020; Yalçı ve Ekici, 2022). Burada a, b, α, β ve γ sabitlerdir ve F nonlinear fonksiyonu temsil eder. İlk terim lineer gelişim terimini temsil ederken, a nın katsayısı nonlinear kromatik dağılımdır ve üçüncü terim genelleştirilmiş nonlinear terimi açıklar. α, β ve γ terimleri, pertürbasyon etkilerinden kaynaklanmaktadır; özellikle γ , detuning etkisinden gelir. Ayrıca (25) ile verilen modelde bağımsız değişkenler, sırasıyla uzaysal ve zamansal koordinatlar olan x ve t dir. $q(x, t)$ bağımlı değişkeni dalga profilini temsil eden kompleks değerli bir fonksiyondur, $q^*(x, t)$ fonksiyonu $q(x, t)$ fonksiyonunun eşleniğini gösterir ve son olarak $i = \sqrt{-1}$.

(25) denkleminde, F gerçekte değerli bir cebirsel fonksiyondur ve kompleks $F(|q|^2)q: C \rightarrow C$ fonksiyonunun düzgünlüğüne sahip olmak gereklidir. Kompleks C düzlemi iki boyutlu bir R^2 lineer uzay olarak göz önüne alınırsa, $F(|q|^2)q$ fonksiyonu k kez sürekli türevlenebilir, yani

$$F(|q|^2)q \in \bigcup_{m,n=1}^{\infty} C^k((-n, n) \times (-m, m); R^2) \quad (26)$$

(25) denklemi, Painleve integrallenebilirlik testini geçemediği için klasik ters saçılma dönüşümü yöntemiyle integrallenemeyen nonlinear bir kısmi diferansiyel denklemdir.

6. MATEMATİKSEL ANALİZ

Ele alınan modele durağan soliton çözümler elde etmek için, çözüm hipotezi aşağıdaki gibi alınır (Biswas ve Khalique, 2011, 2013; Biswas vd., 2018, 2021; Ekici vd., 2018, 2021; Sonmezoglu vd., 2021; Sucu vd., 2021; Adem vd., 2020a, 2020b, 2021):

$$q = \phi(x)e^{i\lambda t}. \quad (27)$$

Burada, λ sabiti dalga sayısını temsil eder ve ϕ fonksiyonu sadece x bağımsız değişkenine bağlıdır. (27) denklemi, (25) denkleminde yazılarak

$$\begin{aligned} &-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b\phi^2 G(\phi^2) - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + an(n+1)\phi^n(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' \\ &+ a(n+1)\phi^{n+1}\phi'' = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

denkleminde ulaşılır. (28) denklemi, sonraki alt bölümlerde nonlinear ortamın tipine göre analiz edilecektir.

6.1. Kerr Yasası

Kerr yasası durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + b|q|^2 q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (29)$$

halini alır. (29) denklemini integrallemek için $n = 1$ seçilmesi gerekir. Bu takdirde, (29) denklemi

$$iq_t + a(|q|q)_{xx} + b|q|^2 q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (30)$$

biçiminde sadeleşir ve (28) denklemi

$$-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b\phi^4 - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 2a\phi(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' + 2a\phi^2\phi'' = 0 \quad (31)$$

denkleminde indirgenir. Bu bölümde, (30) ile verilen modele durağan soliton çözümler ortaya çıkarmak için genelleştirilmiş G'/G -açılım yöntemi uygulanacaktır. Balans

prensibinden, (31) denklemindeki ϕ^4 ile $\phi(\phi')^2$ veya $\phi^2\phi''$ terimleri dengelenerek $N = 2$ bulunur. Bu durumda formal çözüm

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \quad (32)$$

şeklini alır. (32) denklemi, (31) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm setleri elde edilir:

$$b = \frac{80a^2e_1}{\alpha}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{\alpha}{4ae_1}, \quad \beta = \frac{3\alpha}{4}, \quad \lambda = -\gamma + 5\alpha e_1 + \frac{12\alpha e_0 e_2}{e_1}. \quad (33)$$

$$b = -\frac{20a^2e_1}{\alpha}, \quad e_0 = 0, \quad \alpha_0 = -\frac{\alpha}{a}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha}{ae_1}, \quad \beta = \frac{\alpha}{4}, \quad \lambda = -\gamma - 12\alpha e_1. \quad (34)$$

(33) denklemi, (32) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4ae_1} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha e_1 + \frac{12\alpha e_0 e_2}{e_1} \right) t \right] \quad (35)$$

elde edilir. Bu takdirde, (23) denkleminin Ek-A da verilen çözümleri kullanılarak, ele alınan model için aşağıdaki durağan çözümler çıkarılır:

I. $e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2$ ise

$$q(x, t) = \frac{\alpha}{4a(k^2 + 1)} \text{cs}^2 x \text{dn}^2 x \exp \left[-i \left(\gamma + 5\alpha(k^2 + 1) + \frac{12\alpha k^2}{k^2 + 1} \right) t \right] \quad (36)$$

veya

$$q(x, t) = \frac{\alpha(1 - k^2)^2}{4a(k^2 + 1)} \text{sc}^2 x \text{nd}^2 x \exp \left[-i \left(\gamma + 5\alpha(k^2 + 1) + \frac{12\alpha k^2}{k^2 + 1} \right) t \right]. \quad (37)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4a(2k^2 - 1)} \text{sc}^2 x \text{dn}^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha(2k^2 - 1) + \frac{12\alpha k^2(k^2 - 1)}{2k^2 - 1} \right) t \right]. \quad (38)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = -\frac{\alpha k^4}{4a(2 - k^2)} \text{sd}^2 x \text{cn}^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha(2 - k^2) + \frac{12\alpha(1 - k^2)}{2 - k^2} \right) t \right]. \quad (39)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \frac{\alpha}{4a(k^2 + 1)} \text{ds}^2 x \text{cn}^2 x \exp \left[-i \left(\gamma + 5\alpha(k^2 + 1) + \frac{12\alpha k^2}{k^2 + 1} \right) t \right] \quad (40)$$

veya

$$q(x, t) = \frac{\alpha(1 - k^2)^2}{4a(k^2 + 1)} \text{sc}^2 x \text{nd}^2 x \exp \left[-i \left(\gamma + 5\alpha(k^2 + 1) + \frac{12\alpha k^2}{k^2 + 1} \right) t \right]. \quad (41)$$

V. $e_0 = -k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1 - k^2$ durumunda

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4a(2k^2 - 1)} \text{sc}^2 x \text{dn}^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha(2k^2 - 1) + \frac{12\alpha k^2(k^2 - 1)}{2k^2 - 1} \right) t \right]. \quad (42)$$

VI. $e_0 = -1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = k^2 - 1$ ise

$$q(x, t) = -\frac{\alpha k^4}{4a(2 - k^2)} \text{sd}^2 x \text{cn}^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha(2 - k^2) + \frac{12\alpha(1 - k^2)}{2 - k^2} \right) t \right]. \quad (43)$$

VII. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4a(2 - k^2)} \text{ds}^2 x \text{nc}^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha(2 - k^2) + \frac{12\alpha(1 - k^2)}{2 - k^2} \right) t \right]. \quad (44)$$

VIII. $e_0 = 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1 - k^2$ iken

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4a(2 - k^2)} dc^2 x ns^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha(2 - k^2) + \frac{12\alpha(1 - k^2)}{2 - k^2} \right) t \right]. \quad (45)$$

IX. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ olduğunda

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4a(2k^2 - 1)} cd^4 x ns^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha(2k^2 - 1) + \frac{12\alpha k^2(k^2 - 1)}{2k^2 - 1} \right) t \right]. \quad (46)$$

X. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4a(2k^2 - 1)} cs^2 x nd^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + 5\alpha(2k^2 - 1) + \frac{12\alpha k^2(k^2 - 1)}{2k^2 - 1} \right) t \right]. \quad (47)$$

XI. $e_0 = \frac{1}{4}, e_1 = \frac{1}{2}(1 - 2k^2), e_2 = \frac{1}{4}$ ise

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{2a(1 - 2k^2)} ds^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + \frac{5\alpha(1 - 2k^2)}{2} + \frac{3\alpha}{2(1 - 2k^2)} \right) t \right]. \quad (48)$$

XII. $e_0 = \frac{1}{4}(1 - k^2), e_1 = \frac{1}{2}(1 + k^2), e_2 = \frac{1}{4}(1 - k^2)$ için

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{2a(1 + k^2)} dc^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + \frac{5\alpha(1 + k^2)}{2} + \frac{3\alpha(1 - k^2)^2}{2(1 + k^2)} \right) t \right]. \quad (49)$$

XIII. $e_0 = \frac{k^2}{4}, e_1 = \frac{1}{2}(k^2 - 2), e_2 = \frac{1}{4}$ iken

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{2a(k^2 - 2)} cs^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + \frac{5\alpha(k^2 - 2)}{2} + \frac{3\alpha k^2}{2(k^2 - 2)} \right) t \right]. \quad (50)$$

XIV. $e_0 = \frac{k^2}{4}, e_1 = \frac{1}{2}(k^2 - 2), e_2 = \frac{k^2}{4}$ olduğunda

$$q(x, t) = \frac{\alpha}{2a(k^2 - 2)} \text{dn}^2 x \exp \left[i \left(-\gamma + \frac{5\alpha(k^2 - 2)}{2} + \frac{3\alpha k^4}{2(k^2 - 2)} \right) t \right]. \quad (51)$$

Burada, (36) denkleminde (51) denklemine kadar olan çözümler, modelin Jacobi eliptik fonksiyon çözümlerini temsil eder.

XV. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ durumunda, durağan koyu optik soliton çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4a} \tanh^2 x \exp[i(-\gamma + 5\alpha)t]. \quad (52)$$

XVI. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ ise, ele alınan denklem için durağan tekil optik soliton çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{4a} \coth^2 x \exp[i(-\gamma + 5\alpha)t]. \quad (53)$$

XVII. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ için, aşağıdaki periyodik dalga türetilir:

$$q(x, t) = \frac{\alpha}{4a} \tan^2 x \exp[-i(\gamma + 5\alpha)t]. \quad (54)$$

XVIII. $e_0 = 0, e_1 = -(1 + k^2), e_2 = k^2$ iken, Jacobi eliptik fonksiyon çözüm aşağıdaki gibi çıkarılır:

$$q(x, t) = \frac{\alpha}{4a(1 + k^2)} \text{cs}^2 x \text{dn}^2 x \exp[-i(\gamma + 5\alpha(1 + k^2))t]. \quad (55)$$

Benzer şekilde, (34) denklemini, (32) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemini kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{ae_1} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right\} \exp[-i(\gamma + 12\alpha e_1)t] \quad (56)$$

bulunur. Bu durumda, incelenen model için durağan çözümler aşağıdaki gibi listelenir:

I. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ ise, aşağıdaki durağan parlak optik soliton çözüm keşfedilir:

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{a} \text{sech}^2 x \exp[-i(\gamma + 12\alpha)t]. \quad (57)$$

II. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ için, durağan tekil optik soliton çözümün diğer formu bulunur:

$$q(x, t) = \frac{\alpha}{a} \text{csch}^2 x \exp[-i(\gamma + 12\alpha)t]. \quad (58)$$

III. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ iken, aşağıdaki periyodik dalga elde edilir:

$$q(x, t) = -\frac{\alpha}{a} \text{csc}^2 x \exp[-i(\gamma - 12\alpha)t]. \quad (59)$$

IV. $e_0 = 0, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2$ olduğunda, Jacobi eliptik fonksiyonlar açısından çözüm aşağıdaki gibi türetilir:

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{\alpha}{a} \left(1 + \frac{\text{cs}^2 x \text{dn}^2 x}{k^2 + 1} \right) \right\} \exp[-i(\gamma - 12\alpha(k^2 + 1))t]. \quad (60)$$

6.2. Kuvvet Yasası

Kuvvet yasası nonlinearliği durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + b|q|^{2m} q = \frac{1}{|q|^{2q^*}} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (61)$$

denkleminde çöker. (61) denkleminin integrasyonunu gerçekleştirmek için $n = m$ seçilmesi gerekir, bu da (61) denkleminin

$$iq_t + a(|q|^m q)_{xx} + b|q|^{2m} q = \frac{1}{|q|^{2q^*}} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (62)$$

denkleminde yoğunlaştığı anlamına gelir. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} & -(\gamma + \lambda)\phi^2 + b\phi^{2m+2} - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + am(m+1)\phi^m(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' \\ & + a(m+1)\phi^{m+1}\phi'' = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

şeklinde sadeleşir. Kapalı form çözümler elde etmek için

$$\phi = \varphi^{\frac{2}{m}} \quad (64)$$

dönüşümü kullanılır. Böylece (63) denklemi

$$\begin{aligned} & -m^2(\gamma + \lambda)\varphi^2 + bm^2\varphi^6 + 4(4\beta + \alpha(m-4))(\varphi')^2 + 2a(m^2 + 3m + 2)\varphi^2(\varphi')^2 \\ & - 4\alpha m\varphi\varphi'' + 2am(m+1)\varphi^3\varphi'' = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

halini alır. Balans prensibinden $N = 1$ bulunur. Bu durumda, formal çözüm aşağıdaki gibi yapılır:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right). \quad (66)$$

(66) denklemi, (65) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm seti elde edilir:

$$b = \frac{2a^2e_1(m+1)^3(3m+2)}{\alpha m^3}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{1}{m+1} \sqrt{-\frac{\alpha m}{ae_1}},$$

$$\beta = \alpha - \frac{\alpha m}{4}, \quad \gamma = \frac{2\alpha e_1^2(3m+2) + 8\alpha e_0 e_2(m+2) - e_1 \lambda m(m+1)}{e_1 m(m+1)}.$$
(67)

(67) denklemi, (66) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ \frac{1}{m+1} \sqrt{-\frac{\alpha m}{ae_1} \left(\frac{G'}{G} \right)} \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}$$
(68)

bulunur. Bu takdirde, ele alınan denklem için durağan çözümler aşağıdaki gibi çıkarılır:

I. $e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2$ ise

$$q(x, t) = \left\{ \frac{1}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(k^2 + 1)}} \operatorname{csx} \operatorname{dn} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}$$
(69)

veya

$$q(x, t) = \left\{ \frac{k^2 - 1}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(k^2 + 1)}} \operatorname{scx} \operatorname{nd} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}.$$
(70)

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{1}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(1 - 2k^2)}} \operatorname{scx} \operatorname{dn} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}.$$
(71)

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{k^2}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(k^2 - 2)}} \operatorname{sd} x \operatorname{cn} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (72)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{1}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(k^2 + 1)}} \operatorname{ds} x \operatorname{cn} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t} \quad (73)$$

veya

$$q(x, t) = \left\{ \frac{1 - k^2}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(k^2 + 1)}} \operatorname{sc} x \operatorname{nd} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (74)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{1}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(k^2 - 2)}} \operatorname{ds} x \operatorname{nc} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (75)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \left\{ \frac{1}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(1 - 2k^2)}} \operatorname{cd}^2 x \operatorname{ns} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (76)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ iin

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{1}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a(1-2k^2)}} \operatorname{csxnd} x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (77)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{1}{m+1} \sqrt{-\frac{\alpha m}{a}} \tanh x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (78)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{1}{m+1} \sqrt{-\frac{\alpha m}{a}} \coth x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (79)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \left\{ \frac{1}{m+1} \sqrt{\frac{\alpha m}{a}} \tan x \right\}^{\frac{2}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (80)$$

Burada, (69)-(77) denklemleri ile verilen çözümler, modelin Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri iken, (78)-(80) çözümleri, sırasıyla durağan koyu optik soliton çözümü, durağan tekil optik soliton çözümü ve periyodik dalgayı temsil eder.

6.3. Parabolik Yasası

Parabolik yasa nonlinearliği durumunda, (25) ile verilen GL denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4)q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (81)$$

denkleminde çöker. (81) denkleminin integrasyonunu gerçekleştirmek için $n = 2$ seçilmesi gerekir, bu durumda (81) denklemi

$$iq_t + a(|q|^2 q)_{xx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4)q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (82)$$

denkleminde yoğunlaşır. Bu takdirde (28) denklemi

$$-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b_1\phi^4 + b_2\phi^6 - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 6a\phi^2(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' + 3a\phi^3\phi'' = 0 \quad (83)$$

halini alır. Balans prensibinden $N = 1$ olur. Bu durumda formal çözüm

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (84)$$

şeklini alır. (84) denklemi, (83) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, $G^j, G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm seti elde edilir:

$$b_2 = \frac{3a(18ae_1 - b_1)}{\alpha}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18ae_1}}, \quad (85)$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma = \frac{6a(8\alpha e_1^2 + 16\alpha e_0 e_2 - 3e_1 \lambda) + b_1(\lambda - 4\alpha e_1)}{18ae_1 - b_1}.$$

(85) denklemi, (84) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18ae_1}} \left(\frac{G'}{G} \right) e^{i\lambda t} \quad (86)$$

ifadesine ulaşılır. Bu takdirde, durağan çözümler aşağıdaki gibi listelenir:

$$\text{I.} \quad e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2 \text{ ise}$$

$$q(x, t) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 + 18\alpha(k^2 + 1)}} \text{csx} \text{dn} x e^{i\lambda t} \quad (87)$$

veya

$$q(x, t) = -\frac{2(1 - k^2)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 + 18\alpha(k^2 + 1)}} \text{scx} \text{nd} x e^{i\lambda t}. \quad (88)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = -\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18\alpha(2k^2 - 1)}} \text{scx} \text{dn} x e^{i\lambda t}. \quad (89)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = -\frac{2k^2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18\alpha(2 - k^2)}} \text{sdx} \text{cn} x e^{i\lambda t}. \quad (90)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = -\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 + 18\alpha(k^2 + 1)}} \text{dsx} \text{cn} x e^{i\lambda t} \quad (91)$$

veya

$$q(x, t) = \frac{2(1 - k^2)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 + 18\alpha(k^2 + 1)}} \text{scx} \text{nd} x e^{i\lambda t}. \quad (92)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = -\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18\alpha(2 - k^2)}} \text{dsx} \text{nc} x e^{i\lambda t}. \quad (93)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18\alpha(2k^2 - 1)}} \operatorname{cd}^2 x \operatorname{ns} x e^{i\lambda t}. \quad (94)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = -\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18\alpha(2k^2 - 1)}} \operatorname{cs} x \operatorname{nd} x e^{i\lambda t}. \quad (95)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = -\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18\alpha}} \tanh x e^{i\lambda t}. \quad (96)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = -\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 - 18\alpha}} \coth x e^{i\lambda t}. \quad (97)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_1 + 18\alpha}} \tan x e^{i\lambda t}. \quad (98)$$

Burada, (87)-(95) çözümleri, Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri temsil ederken, (96)-(98) çözümleri, sırasıyla durağan koyu optik soliton çözümü, durağan tekil optik soliton çözümü ve periyodik dalgayı işaret eder.

6.4. Çift Kuvvet Yasası

Çift-kuvvet yasası nonlineerliği durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + (b_1 |q|^{2m} + b_2 |q|^{4m})q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (99)$$

halini alır. (99) denklemini integrallemek için $n = 2m$ seçilmesi gerekir. Bu durumda, (99) denklemi

$$iq_t + a(|q|^{2m} q)_{xx} + (b_1 |q|^{2m} + b_2 |q|^{4m})q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (100)$$

biçiminde değişir ve (28) denklemi

$$\begin{aligned} &-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b_1 \phi^{2m+2} + b_2 \phi^{4m+2} - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 2am(2m+1)\phi^{2m}(\phi')^2 \\ &-2\alpha\phi\phi'' + a(2m+1)\phi^{2m+1}\phi'' = 0 \end{aligned} \quad (101)$$

denklemine indirgenir. Aşağıda verilen

$$\phi = \varphi^{\frac{1}{m}} \quad (102)$$

dönüşümü yardımıyla (101) denklemi

$$\begin{aligned} &-m^2(\gamma + \lambda)\varphi^2 + b_1 m^2 \varphi^4 + b_2 m^2 \varphi^6 + 2(\alpha(m-2) + 2\beta)(\varphi')^2 \\ &+ a(2m^2 + 3m + 1)\varphi^2(\varphi')^2 - 2m\alpha\varphi\varphi'' + am(2m+1)\varphi^3\varphi'' = 0 \end{aligned} \quad (103)$$

denklemine dönüşür. Dengeleme prensibinden $N = 1$ bulunur. Bu da formal çözümün

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (104)$$

şeklinde olacağı anlamına gelir. (104) denklemi, (103) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, $G^j, G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm seti elde edilir:

$$b_1 = -\frac{4b_2\alpha m}{a(6m^2 + 5m + 1)} + \frac{2a(2m + 1)^2 e_1}{m^2}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{-a(m(6m + 5) + 1)}}{m\sqrt{b_2}}, \quad (105)$$

$$\beta = \alpha - \frac{\alpha m}{2}, \quad \gamma = \frac{m^3 b_2 (4\alpha e_1 - m\lambda) - (m + 1)(3m + 1)(2am + a)^2 (e_1^2 - 4e_0 e_2)}{m^4 b_2}.$$

(105) denklemi, (104) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ \frac{\sqrt{-a(m(6m + 5) + 1)}}{m\sqrt{b_2}} \left(\frac{G'}{G} \right) \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t} \quad (106)$$

elde edilir. Bu takdirde, çözümler aşağıdaki gibi keşfedilir:

I. $e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2$ ise

$$q(x, t) = \left\{ \frac{\sqrt{-a(m(6m + 5) + 1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{csx} \operatorname{dn} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t} \quad (107)$$

veya

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{(1 - k^2)\sqrt{-a(m(6m + 5) + 1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{scx} \operatorname{nd} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (108)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{\sqrt{-a(m(6m + 5) + 1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{scx} \operatorname{dn} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (109)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{k^2 \sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{sd} x \operatorname{cn} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (110)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{\sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{ds} x \operatorname{cn} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t} \quad (111)$$

veya

$$q(x, t) = \left\{ \frac{(1-k^2) \sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{sc} x \operatorname{nd} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (112)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{\sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{ds} x \operatorname{nc} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (113)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \left\{ \frac{\sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{cd}^2 x \operatorname{ns} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (114)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{\sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \operatorname{cs} x \operatorname{nd} x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (115)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{\sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \tanh x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (116)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{\sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \coth x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (117)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \left\{ \frac{\sqrt{-a(m(6m+5)+1)}}{m\sqrt{b_2}} \tanh x \right\}^{\frac{1}{m}} e^{i\lambda t}. \quad (118)$$

Burada, (107)-(115) denklemlerinde bahsedilen çözümler, modelin Jacobi eliptik fonksiyon çözümlerini gösterirken, (116)-(118) çözümleri, sırasıyla durağan koyu optik soliton çözümü, durağan tekil optik soliton çözümü ve periyodik dalgayı temsil eder.

6.5. Kuadratik-Kübik Yasası

Kuadratik-kübik yasaı durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + (b_1|q| + b_2|q|^2)q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (119)$$

halini alır. (119) denklemini integrallemek için $n = 1$ seçilmesi gerekir. Bu takdirde, (119) denklemi

$$iq_t + a(|q|q)_{xx} + (b_1|q| + b_2|q|^2)q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (120)$$

biçiminde değişir. Bu yüzden (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b_1\phi^3 + b_2\phi^4 - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 2a\phi(\phi')^2 - 2a\phi\phi'' + 2a\phi^2\phi'' = 0 \quad (121)$$

şeklinde sadeleşir. Dengeleme prensibinden balans sayısı, $N = 2$ olarak belirlenir. Böylece, formal çözüm

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \quad (122)$$

şeklini alır. (122) denklemi, (121) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm setleri elde edilir:

$$b_1 = -\frac{2ab_2}{5a} + 32ae_1, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{20a}{b_2}, \quad (123)$$

$$\beta = \frac{3\alpha}{4}, \quad \lambda = \frac{b_2(8ae_1 - \gamma) + 240a^2(4e_0e_2 - e_1^2)}{b_2}.$$

$$e_0 = 0, \quad \alpha_0 = \frac{20ae_1}{b_2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{20a}{b_2}, \quad (124)$$

$$\beta = \frac{5(a(16ae_1 + b_1) + ab_2)}{4b_2}, \quad \lambda = \frac{20ae_1(16ae_1 + b_1) - b_2(\gamma - 4ae_1)}{b_2}.$$

(123) denklemi, (122) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \exp \left[i \left(\frac{b_2(8\alpha e_1 - \gamma) + 240a^2(4e_0 e_2 - e_1^2)}{b_2} \right) t \right] \quad (125)$$

elde edilir. Bu takdirde, ele alınan modele durağan çözümler aşağıdaki gibi bulunur:

I. $e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2$ ise

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \text{cs}^2 x \text{dn}^2 x \exp \left[-i \left(\frac{b_2(8\alpha k^2 + 8\alpha + \gamma) + 240a^2(k^4 - 2k^2 + 1)}{b_2} \right) t \right] \quad (126)$$

veya

$$q(x, t) = -\frac{20a(1 - k^2)^2}{b_2} \text{sc}^2 x \text{nd}^2 x \exp \left[-i \left(\frac{b_2(8\alpha k^2 + 8\alpha + \gamma) + 240a^2(k^4 - 2k^2 + 1)}{b_2} \right) t \right]. \quad (127)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \text{sc}^2 x \text{dn}^2 x \exp \left[i \left(\frac{b_2(16\alpha k^2 - 8\alpha - \gamma) - 240a^2}{b_2} \right) t \right]. \quad (128)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = -\frac{20ak^4}{b_2} \text{sd}^2 x \text{cn}^2 x \exp \left[-i \left(\frac{b_2(8\alpha k^2 - 16\alpha + \gamma) + 240a^2 k^4}{b_2} \right) t \right]. \quad (129)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \text{ds}^2 x \text{cn}^2 x \exp \left[-i \left(\frac{b_2(8\alpha k^2 + 8\alpha + \gamma) + 240a^2(k^4 - 2k^2 + 1)}{b_2} \right) t \right] \quad (130)$$

veya

$$q(x, t) = -\frac{20a(1-k^2)^2}{b_2} \text{sc}^2 x \text{nd}^2 x \exp \left[-i \left(\frac{b_2(8\alpha k^2 + 8\alpha + \gamma) + 240a^2(k^4 - 2k^2 + 1)}{b_2} \right) t \right]. \quad (131)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} d s^2 x \text{nc}^2 x \exp \left[-i \left(\frac{b_2(8\alpha k^2 - 16\alpha + \gamma) + 240a^2 k^4}{b_2} \right) t \right]. \quad (132)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \text{cd}^4 x \text{ns}^2 x \exp \left[i \left(\frac{b_2(16\alpha k^2 - 8\alpha - \gamma) - 240a^2}{b_2} \right) t \right]. \quad (133)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \text{cs}^2 x \text{nd}^2 x \exp \left[i \left(\frac{b_2(16\alpha k^2 - 8\alpha - \gamma) - 240a^2}{b_2} \right) t \right]. \quad (134)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \tanh^2 x \exp \left[i \left(\frac{b_2(8\alpha - \gamma) - 240a^2}{b_2} \right) t \right]. \quad (135)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \coth^2 x \exp \left[i \left(\frac{b_2(8\alpha - \gamma) - 240a^2}{b_2} \right) t \right]. \quad (136)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \tan^2 x \exp \left[-i \left(\frac{b_2(8\alpha + \gamma) + 240a^2}{b_2} \right) t \right]. \quad (137)$$

Burada, (126)-(134) denklemleri ile verilen çözümler, modelin Jacobi eliptik fonksiyon çözümlerini temsil ederken, (135)-(137) çözümleri, sırasıyla durağan koyu optik soliton çözüm, durağan tekil optik soliton çözüm ve periyodik dalgadır.

Benzer şekilde, (124) denklemi, (122) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ \frac{20ae_1}{b_2} - \frac{20a}{b_2} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right\} \exp \left[i \left(\frac{20ae_1(16ae_1 + b_1) - b_2(\gamma - 4\alpha e_1)}{b_2} \right) t \right] \quad (138)$$

elde edilir. Bu durumda, aşağıdaki durağan çözümler türetilir:

- I.** $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ ise, durağan parlak optik soliton çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$q(x, t) = \frac{20a}{b_2} \operatorname{sech}^2 x \exp \left[i \left(\frac{20a(16a + b_1) - b_2(\gamma - 4\alpha)}{b_2} \right) t \right]. \quad (139)$$

- II.** $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ iken, ele alınan denklem için durağan tekil optik soliton çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \operatorname{csch}^2 x \exp \left[i \left(\frac{20a(16a + b_1) - b_2(\gamma - 4\alpha)}{b_2} \right) t \right]. \quad (140)$$

- III.** $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ olduğunda, aşağıdaki periyodik dalga keşfedilir:

$$q(x, t) = -\frac{20a}{b_2} \sec^2 x \exp \left[i \left(\frac{20a(16a - b_1) - b_2(\gamma + 4\alpha)}{b_2} \right) t \right]. \quad (141)$$

6.6. Logaritma Yasası

Logaritma yasası durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + 2bq \ln|q| = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (142)$$

denklemine indirgenir. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$-(\gamma + \lambda)\phi^2 + 2b\phi^2 \ln|\phi| - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + an(n+1)\phi^n(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' + a(n+1)\phi^{n+1}\phi'' = 0 \quad (143)$$

halini alır. Kapalı form çözümler çıkarmak için

$$\phi = \exp \frac{1}{\varphi} \quad (144)$$

dönüşümü uygulanır. Böylece (143) denklemi

$$2b\varphi^3 - (\gamma + \lambda)\varphi^4 + \left(a(n+1)^2 e^{\frac{n}{\varphi}} - 4\alpha + 4\beta\right)(\varphi')^2 - \left(a(n+1)e^{\frac{n}{\varphi}} - 2\alpha\right)\varphi^2\varphi'' + 2\left(a(n+1)e^{\frac{n}{\varphi}} - 2\alpha\right)\varphi(\varphi')^2 = 0 \quad (145)$$

denklemine dönüşür. $n = 0$ iken (145) denkleminin integrasyonu gerçekleştirilebilir ve bu durumda (142) denklemi

$$iq_t + aq_{xx} + 2bq \ln|q| = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (146)$$

halini alır ve (145) denklemi de

$$2b\varphi^3 - (\gamma + \lambda)\varphi^4 + (a - 4\alpha + 4\beta)(\varphi')^2 + 2(a - 2\alpha)\varphi(\varphi')^2 - (a - 2\alpha)\varphi^2\varphi'' = 0 \quad (147)$$

olarak değişir. Balans prensibinden $N = 2$ bulunur. Böylece formal çözüm

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (148)$$

şeklini alır. (148) denklemi, (147) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen

polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm seti elde edilir:

$$\begin{aligned} b &= 2e_1(2\alpha - a), \quad e_0 = 0, \quad \alpha_0 = -\alpha_2 e_1, \quad \alpha_1 = 0, \\ \beta &= \alpha - \frac{a}{4}, \quad \lambda = \frac{2(a - 2\alpha)}{\alpha_2} - \gamma. \end{aligned} \quad (149)$$

(149) denklemi, (148) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \exp \left[-\alpha_2 e_1 + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right]^{-1} \exp \left[i \left(\frac{2(a - 2\alpha)}{\alpha_2} - \gamma \right) t \right] \quad (150)$$

elde edilir. Bu takdirde, benimsenen modele Gaussian soliter dalgalar aşağıdaki gibi listelenir:

I. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ ise

$$q(x, t) = \exp[-\alpha_2 \operatorname{sech}^2 x]^{-1} \exp \left[i \left(\frac{2(a - 2\alpha)}{\alpha_2} - \gamma \right) t \right]. \quad (151)$$

II. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = \exp[\alpha_2 \operatorname{csch}^2 x]^{-1} \exp \left[i \left(\frac{2(a - 2\alpha)}{\alpha_2} - \gamma \right) t \right]. \quad (152)$$

III. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ iken

$$q(x, t) = \exp[\alpha_2 \operatorname{sec}^2 x]^{-1} \exp \left[i \left(\frac{2(a - 2\alpha)}{\alpha_2} - \gamma \right) t \right]. \quad (153)$$

6.7. Anti-Kübik Yasası

Anti-kübik yasası durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + \left(\frac{b_1}{|q|^4} + b_2 |q|^2 + b_3 |q|^4 \right) q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (154)$$

denkleminde indirgenir. $n = 2$ iken (154) denkleminin integrasyonu gerçekleştirilebilir. Bu takdirde, (154) denklemi

$$iq_t + a(|q|^2 q)_{xx} + \left(\frac{b_1}{|q|^4} + b_2 |q|^2 + b_3 |q|^4 \right) q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (155)$$

gibi yoğunlaşır. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$b_1 \phi^{-2} - (\gamma + \lambda) \phi^2 + b_2 \phi^4 + b_3 \phi^6 - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 6a\phi^2(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' + 3a\phi^3\phi'' = 0 \quad (156)$$

şeklinde sadeleşir. Balans prensibinden $N = 1$ bulunur. Böylece

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (157)$$

şeklini alır. (157) denklemi, (156) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm seti elde edilir:

$$b_1 = 0, \quad b_3 = \frac{3a(18ae_1 - b_2)}{\alpha}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_2 - 18ae_1}}, \quad (158)$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma = \frac{6a(8ae_1^2 + 16ae_0e_2 - 3e_1\lambda) + b_2(\lambda - 4ae_1)}{18ae_1 - b_2}.$$

(158) denklemi, (157) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b_2 - 18ae_1}} \left(\frac{G'}{G} \right) e^{i\lambda t} \quad (159)$$

ifadesine ulaşılır. (158) denklemindeki sonuçlardan görüleceği gibi, $b_1 = 0$ olduğundan, anti-kübik yasası parabolik yasasına indirgenir. Ayrıca, (158) ile verilen çözüm seti parabolik yasası durumunda elde edilen çözüm seti ile aynı olduğundan bu bölümdeki çözümler ihmal edildi.

6.8. Kübik-Kuintik-Septik Yasası

Bu nonlinearlik durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3|q|^6)q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (160)$$

denkleme indirgenir. $n = 4$ iken (160) denkleminin integrasyonu gerçekleştirilebilir. Bu takdirde, (160) denklemi

$$iq_t + a(|q|^4 q)_{xx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3|q|^6)q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (161)$$

gibi yoğunlaşır. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} &-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b_1\phi^4 + b_2\phi^6 + b_3\phi^8 - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 20a\phi^4(\phi')^2 \\ &-2\alpha\phi\phi'' + 5a\phi^5\phi'' = 0 \end{aligned} \quad (162)$$

şeklinde sadeleşir. Balans prensibinden $N = 1$ bulunur. Böylece

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (163)$$

şeklini alır. (163) denklemi, (162) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm seti elde edilir:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4(\alpha - 5a\alpha_1^4(e_1^2 - 4e_0e_2))}{\alpha_1^2}, & b_2 &= 50ae_1, \\ b_3 &= -\frac{30a}{\alpha_1^2}, & \alpha_0 &= 0, & \beta &= \frac{\alpha}{2}, & \lambda &= 4\alpha e_1 - \gamma. \end{aligned} \quad (164)$$

(164) denklemi, (163) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \exp[i(4\alpha e_1 - \gamma)t] \quad (165)$$

elde edilir. Sonuç olarak, aşağıdaki durağan çözümler türetilir:

$$\text{I.} \quad e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2 \text{ ise}$$

$$q(x, t) = \alpha_1 \text{csxdnx} \exp[-i(4\alpha(k^2 + 1) + \gamma)t] \quad (166)$$

veya

$$q(x, t) = \alpha_1(k^2 - 1) \text{scxndx} \exp[-i(4\alpha(k^2 + 1) + \gamma)t]. \quad (167)$$

$$\text{II.} \quad e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2 \text{ için}$$

$$q(x, t) = -\alpha_1 \text{scxndx} \exp[i(4\alpha(2k^2 - 1) - \gamma)t]. \quad (168)$$

$$\text{III.} \quad e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1 \text{ iken}$$

$$q(x, t) = -\alpha_1 k^2 \operatorname{sdxcnx} \exp[i(4\alpha(2 - k^2) - \gamma)t]. \quad (169)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = -\alpha_1 \operatorname{dsxcnx} \exp[-i(4\alpha(k^2 + 1) + \gamma)t] \quad (170)$$

veya

$$q(x, t) = \alpha_1 (1 - k^2) \operatorname{scxndx} \exp[-i(4\alpha(k^2 + 1) + \gamma)t]. \quad (171)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = -\alpha_1 \operatorname{dsxncx} \exp[i(4\alpha(2 - k^2) - \gamma)t]. \quad (172)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \alpha_1 \operatorname{cd}^2 \operatorname{xnsx} \exp[i(4\alpha(2k^2 - 1) - \gamma)t]. \quad (173)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = -\alpha_1 \operatorname{csxndx} \exp[i(4\alpha(2k^2 - 1) - \gamma)t]. \quad (174)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = -\alpha_1 \operatorname{tanhx} \exp[i(4\alpha - \gamma)t]. \quad (175)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = -\alpha_1 \operatorname{cothx} \exp[i(4\alpha - \gamma)t]. \quad (176)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \alpha_1 \tan x \exp[-i(4\alpha + \gamma)t]. \quad (177)$$

Burada, Jacobi eliptik fonksiyon çözümler (166)-(174) denklemleri ile temsil edilirken, durağan koyu optik soliton çözüm, durağan tekil optik soliton çözüm ve periyodik dalga çözüm sırasıyla (175), (176) ve (177) denklemleri ile temsil edilir.

6.9. Üçlü-Kuvvet Yasası

Üçlü-kuvvet yasası durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + (b_1 |q|^{2m} + b_2 |q|^{4m} + b_3 |q|^{6m})q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (178)$$

denklemine indirgenir. $n = 4m$ iken (178) denkleminin integrasyonu gerçekleştirilebilir. Bu takdirde, (178) denklemi

$$iq_t + a(|q|^{4m} q)_{xx} + (b_1 |q|^{2m} + b_2 |q|^{4m} + b_3 |q|^{6m})q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (179)$$

gibi yoğunlaşır. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} &-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b_1 \phi^{2m+2} + b_2 \phi^{4m+2} + b_3 \phi^{6m+2} - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 \\ &+ 4am(4m + 1)\phi^{4m}(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' + a(4m + 1)\phi^{4m+1}\phi'' = 0 \end{aligned} \quad (180)$$

şeklinde sadeleşir. Kapalı form çözümler çıkarmak için

$$\phi = \varphi^{\frac{1}{m}} \quad (181)$$

dönüşümü (180) denklemine uygulanır ve böylece (180) denklemi

$$\begin{aligned} & -m^2(\gamma + \lambda)\varphi^2 + b_1m^2\varphi^4 + b_2m^2\varphi^6 + b_3m^2\varphi^8 + 2(\alpha(m-2) + 2\beta)(\varphi')^2 \\ & + \alpha(12m^2 + 7m + 1)\varphi^4(\varphi')^2 - 2m\alpha\varphi\varphi'' + \alpha m(4m+1)\varphi^5\varphi'' = 0 \end{aligned} \quad (182)$$

denkleme dönüşür. Balans prensibinden $N = 1$ bulunur. Böylece

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (183)$$

şeklini alır. (183) denklemi, (182) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm seti elde edilir:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4\alpha m - \alpha\alpha_1^4(e_1^2 - 4e_0e_2)(3m+1)(4m+1)}{\alpha_1^2m^2}, \quad b_2 = \frac{2\alpha e_1(4m+1)^2}{m^2}, \\ b_3 &= -\frac{\alpha(4m+1)(5m+1)}{\alpha_1^2m^2}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta = \alpha - \frac{\alpha m}{2}, \quad \lambda = \frac{4\alpha e_1}{m} - \gamma. \end{aligned} \quad (184)$$

(184) denklemi, (183) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \right\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[i \left(\frac{4\alpha e_1}{m} - \gamma \right) t \right] \quad (185)$$

elde edilir. Bu takdirde, incelenen model için aşağıdaki durağan çözümler keşfedilir:

$$\text{I.} \quad e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2 \text{ ise}$$

$$q(x, t) = \{\alpha_1 \text{csx} \text{dn} x\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{4\alpha(k^2 + 1)}{m} + \gamma \right) t \right] \quad (186)$$

veya

$$q(x, t) = \{\alpha_1(k^2 - 1) \text{scx} \text{nd} x\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{4\alpha(k^2 + 1)}{m} + \gamma \right) t \right]. \quad (187)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \text{scx} \text{dn} x\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[i \left(\frac{4\alpha(2k^2 - 1)}{m} - \gamma \right) t \right]. \quad (188)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 k^2 \text{sd} x \text{cn} x\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[i \left(\frac{4\alpha(2 - k^2)}{m} - \gamma \right) t \right]. \quad (189)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \text{ds} x \text{cn} x\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{4\alpha(k^2 + 1)}{m} + \gamma \right) t \right] \quad (190)$$

veya

$$q(x, t) = \{\alpha_1(1 - k^2) \text{scx} \text{nd} x\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{4\alpha(k^2 + 1)}{m} + \gamma \right) t \right]. \quad (191)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \operatorname{dsxncx}\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[i \left(\frac{4\alpha(2-k^2)}{m} - \gamma \right) t \right]. \quad (192)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \{\alpha_1 \operatorname{cd}^2 \operatorname{xnsx}\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[i \left(\frac{4\alpha(2k^2 - 1)}{m} - \gamma \right) t \right]. \quad (193)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \operatorname{csxndx}\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[i \left(\frac{4\alpha(2k^2 - 1)}{m} - \gamma \right) t \right]. \quad (194)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \operatorname{tanhx}\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[i \left(\frac{4\alpha}{m} - \gamma \right) t \right]. \quad (195)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \operatorname{cothx}\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[i \left(\frac{4\alpha}{m} - \gamma \right) t \right]. \quad (196)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \{\alpha_1 \operatorname{tanx}\}^{\frac{1}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{4\alpha}{m} + \gamma \right) t \right]. \quad (197)$$

Burada, Jacobi eliptik fonksiyon çözümler (186)-(194) denklemleri ile temsil edilirken, durağan koyu optik soliton çözüm, durağan tekil optik soliton çözüm ve periyodik dalga çözüm sırasıyla (195), (196) ve (197) denklemleri ile temsil edilir.

6.10. Zayıf Yerel-Olmayan Nonlineerliğe Sahip Parabolik Yasası

Bu nonlinearlik durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3(|q|^2)_{xx})q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (198)$$

denkleminde indirgenir. $n = 2$ iken (198) denkleminin integrasyonu gerçekleştirilebilir. Bu takdirde, (198) denklemi

$$iq_t + a(|q|^2 q)_{xx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3(|q|^2)_{xx})q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (199)$$

gibi yoğunlaşır. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} & -(\lambda + \gamma)\phi^2 + b_1\phi^4 + b_2\phi^6 - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 6a\phi^2(\phi')^2 \\ & -2a\phi\phi'' + 3a\phi^3\phi'' = 0 \end{aligned} \quad (200)$$

şeklinde sadeleşir. Balans prensibinden $N = 1$ bulunur. Böylece

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (201)$$

şeklini alır. (201) denklemi, (200) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm setleri elde edilir:

$$\begin{aligned} b_1 &= e_1 \left(2a - \frac{4\alpha_1^2 b_2}{3} \right) + \frac{4\alpha}{\alpha_1^2}, \quad b_3 = -2a - \frac{\alpha_1^2 b_2}{6}, \quad \alpha_0 = 0, \\ \beta &= \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda = 2a\alpha_1^2(e_1^2 - 4e_0e_2) - \frac{\alpha_1^4 b_2(e_1^2 - 4e_0e_2)}{3} - \gamma + 4\alpha e_1. \end{aligned} \quad (202)$$

$$b_1 = \frac{\alpha}{\alpha_1^2} - \frac{12ae_1}{5}, \quad b_2 = \frac{3a}{5\alpha_1^2}, \quad b_3 = -\frac{21a}{10}, \quad e_0 = 0, \quad (203)$$

$$\alpha_0 = \alpha_1\sqrt{e_1}, \quad \beta = \frac{5\alpha}{4}, \quad \lambda = 4\alpha e_1 - \gamma.$$

(202) denklemi, (201) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2(e_1^2 - 4e_0e_2) - \frac{\alpha_1^4 b_2(e_1^2 - 4e_0e_2)}{3} - \gamma + 4\alpha e_1 \right) t \right] \quad (204)$$

elde edilir. Sonuç olarak, durağan çözümler aşağıdaki gibi listelenir:

I. $e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2$ ise

$$q(x, t) = \alpha_1 \text{csx} \text{dn} x \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2(k^2 - 1)^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2(k^2 - 1)^2}{3} - \gamma - 4\alpha(k^2 + 1) \right) t \right] \quad (205)$$

veya

$$q(x, t) = \alpha_1(k^2 - 1) \text{scx} \text{nd} x \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2(k^2 - 1)^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2(k^2 - 1)^2}{3} - \gamma - 4\alpha(k^2 + 1) \right) t \right]. \quad (206)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = -\alpha_1 \text{scx} \text{dn} x \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2}{3} - \gamma + 4\alpha(2k^2 - 1) \right) t \right]. \quad (207)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = -\alpha_1 k^2 \text{sd} x \text{cn} x \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2 k^4 - \frac{\alpha_1^4 b_2 k^4}{3} - \gamma - 4\alpha(k^2 - 2) \right) t \right]. \quad (208)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = -\alpha_1 \text{dsxcn} \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2(k^2 - 1)^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2(k^2 - 1)^2}{3} - \gamma - 4\alpha(k^2 + 1) \right) t \right] \quad (209)$$

veya

$$q(x, t) = \alpha_1(1 - k^2) \text{scxnd} \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2(k^2 - 1)^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2(k^2 - 1)^2}{3} - \gamma - 4\alpha(k^2 + 1) \right) t \right]. \quad (210)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = -\alpha_1 \text{dsxnc} \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2 k^4 - \frac{\alpha_1^4 b_2 k^4}{3} - \gamma + 4\alpha(2 - k^2) \right) t \right]. \quad (211)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \alpha_1 \text{cd}^2 \text{xns} \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2}{3} - \gamma + 4\alpha(2k^2 - 1) \right) t \right]. \quad (212)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = -\alpha_1 \text{csxnd} \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2}{3} - \gamma + 4\alpha(2k^2 - 1) \right) t \right]. \quad (213)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = -\alpha_1 \text{tanh} \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2}{3} - \gamma + 4\alpha \right) t \right]. \quad (214)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = -\alpha_1 \coth x \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2}{3} - \gamma + 4\alpha \right) t \right]. \quad (215)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \alpha_1 \tan x \exp \left[i \left(2a\alpha_1^2 - \frac{\alpha_1^4 b_2}{3} - \gamma - 4\alpha \right) t \right]. \quad (216)$$

Burada, Jacobi eliptik fonksiyon çözümler (205)-(213) denklemleri ile temsil edilirken, durağan koyu optik soliton çözüm, durağan tekil optik soliton çözüm ve periyodik dalga çözüm sırasıyla (214), (215) ve (216) denklemleri ile temsil edilir.

Benzer şekilde, (203) denklemi, (201) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \alpha_1 \left\{ \sqrt{e_1} + \left(\frac{G'}{G} \right) \right\} \exp[i(4\alpha e_1 - \gamma)t] \quad (217)$$

elde edilir. Bu durumda, elde edilen durağan çözümler aşağıdaki gibidir:

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ ise, durağan koyu optik soliton çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$q(x, t) = \alpha_1 (1 - \tanh x) \exp[i(4\alpha - \gamma)t]. \quad (218)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ iken, durağan tekil optik soliton çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$q(x, t) = \alpha_1 (1 - \coth x) \exp[i(4\alpha - \gamma)t]. \quad (219)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ olduğunda, aşağıdaki periyodik dalga çözüm türetilir:

$$q(x, t) = \alpha_1 (i + \tan x) \exp[-i(4\alpha + \gamma)t]. \quad (220)$$

6.11. Genelleştirilmiş Anti-Kübik Yasası

Bu nonlineerlik durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + \left(\frac{b_1}{|q|^{2m+2}} + b_2 |q|^{2m} + b_3 |q|^{2m+2} \right) q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (221)$$

denkleminde indirgenir. $n = m + 1$ iken (221) denkleminin integrasyonu gerçekleştirilebilir. Bu takdirde, (221) denklemi

$$iq_t + a(|q|^{m+1} q)_{xx} + \left(\frac{b_1}{|q|^{2m+2}} + b_2 |q|^{2m} + b_3 |q|^{2m+2} \right) q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (222)$$

gibi yoğunlaşır. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} & -(\gamma + \lambda)\phi^2 + b_1 \phi^{-2m} + b_2 \phi^{2m+2} + b_3 \phi^{2m+4} - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 \\ & + a(m+1)(m+2)\phi^{m+1}(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' + a(m+2)\phi^{m+2}\phi'' = 0 \end{aligned} \quad (223)$$

şeklinde sadeleşir. Kapalı form çözümler çıkarmak için

$$\phi = \varphi^{\frac{1}{m+1}} \quad (224)$$

dönüşümü (223) denkleminde uygulanır ve böylece (223) denklemi

$$\begin{aligned} & b_1(m+1)^2 - (m+1)^2(\gamma + \lambda)\varphi^2 + b_3(m+1)^2\varphi^4 + 2(\alpha(m-1) + 2\beta)(\varphi')^2 \\ & + a(m+2)\varphi(\varphi')^2 - 2\alpha(m+1)\varphi\varphi'' + a(m+1)(m+2)\varphi^2\varphi'' + b_2(m+1)^2\varphi(x)^{\frac{2m}{m+1}+2} = 0 \end{aligned} \quad (225)$$

denkleminde dönüşür. Daha fazla ilerleyebilmek için $b_2 = 0$ seçilmesi gerekir. Bu durumda, (221) denklemi

$$iq_t + a(|q|^{m+1} q)_{xx} + \left(\frac{b_1}{|q|^{2m+2}} + b_3 |q|^{2m+2} \right) q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (226)$$

şeklinde değişir ve (225) denklemi

$$\begin{aligned}
& b_1(m+1)^2 - (m+1)^2(\gamma + \lambda)\varphi^2 + b_3(m+1)^2\varphi^4 + 2(\alpha(m-1) + 2\beta)(\varphi')^2 \\
& + a(m+2)\varphi(\varphi')^2 - 2\alpha(m+1)\varphi\varphi'' + a(m+1)(m+2)\varphi^2\varphi'' = 0
\end{aligned} \tag{227}$$

biçiminde sadeleşir. Balans prensibinden $N = 2$ bulunur. Böylece

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \tag{228}$$

şeklini alır. (228) denklemi, (227) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm setleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{8\alpha\alpha_2^3(e_1^3 - 36e_0e_1e_2)^2(m+2)}{81(e_1^2 + 12e_0e_2)(m+1)^2}, \quad b_3 = -\frac{2a(m+2)(3m+5)}{\alpha_2(m+1)^2}, \\
\alpha_0 &= -\frac{2\alpha_2e_1}{3}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha = \frac{a\alpha_2e_1(e_1^2 - 36e_0e_2)(m+2)}{9(e_1^2 + 12e_0e_2)(m+1)}, \\
\beta &= \frac{a\alpha_2e_1(e_1^2 - 36e_0e_2)(m+2)(m+5)}{36(e_1^2 + 12e_0e_2)(m+1)}, \quad \gamma = -\lambda - \frac{2a\alpha_2(e_1^2 + 12e_0e_2)(m+2)(m+3)}{3(m+1)^2}.
\end{aligned} \tag{229}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= 0, \quad b_3 = -\frac{2a(m+2)(3m+5)}{\alpha_2(m+1)^2}, \quad e_0 = 0, \quad \alpha_0 = -\alpha_2e_1, \quad \alpha_1 = 0, \\
\alpha &= \frac{a\alpha_2e_1(m+2)^2}{m+1} + \frac{(m+1)(\gamma + \lambda)}{4e_1}, \quad \beta = \frac{a\alpha_2e_1(m+2)^2}{m+1} + \frac{(m+1)(m+5)(\gamma + \lambda)}{16e_1}.
\end{aligned} \tag{230}$$

(229) denklemi, (228) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{2\alpha_2e_1}{3} + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t} \tag{231}$$

elde edilir. Sonuç olarak, elde edilen durağan çözümler aşağıdaki gibidir:

I. $e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2$ ise

$$q(x, t) = \left\{ \frac{2\alpha_2(k^2 + 1)}{3} + \alpha_2 \text{cs}^2 x \text{dn}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t} \quad (232)$$

veya

$$q(x, t) = \left\{ \frac{2\alpha_2(k^2 + 1)}{3} + \alpha_2(1 - k^2)^2 \text{sc}^2 x \text{nd}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (233)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{2\alpha_2(2k^2 - 1)}{3} + \alpha_2 \text{sc}^2 x \text{dn}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (234)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{2\alpha_2(2 - k^2)}{3} + \alpha_2 k^4 \text{sd}^2 x \text{cn}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (235)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \left\{ \frac{2\alpha_2(k^2 + 1)}{3} + \alpha_2 \text{ds}^2 x \text{cn}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t} \quad (236)$$

veya

$$q(x, t) = \left\{ \frac{2\alpha_2(k^2 + 1)}{3} + \alpha_2(1 - k^2)^2 \text{sc}^2 x \text{nd}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (237)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{2\alpha_2(2 - k^2)}{3} + \alpha_2 \operatorname{ds}^2 x \operatorname{nc}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (238)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{2\alpha_2(2k^2 - 1)}{3} + \alpha_2 \operatorname{cd}^4 x \operatorname{ns}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (239)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{2\alpha_2(2k^2 - 1)}{3} + \alpha_2 \operatorname{cs}^2 x \operatorname{nd}^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (240)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{2\alpha_2}{3} + \alpha_2 \tanh^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (241)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \left\{ -\frac{2\alpha_2}{3} + \alpha_2 \coth^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (242)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \left\{ \frac{2\alpha_2}{3} + \alpha_2 \tan^2 x \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (243)$$

Burada, Jacobi eliptik fonksiyon çözümler (232)-(240) denklemleri ile temsil edilirken, durağan koyu optik soliton çözüm, durağan tekil optik soliton çözüm ve periyodik dalga çözüm sırasıyla (241), (242) ve (243) denklemleri ile temsil edilir.

Benzer şekilde, (230) denklemi, (228) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ -\alpha_2 e_1 + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t} \quad (244)$$

elde edilir. Bu durumda, incelenen model için, sırasıyla, durağan parlak ve tekil optik soliton çözümler ve ayrıca periyodik dalga çözüm aşağıdaki gibi çıkarılır:

I. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ ise

$$q(x, t) = \{-\alpha_2 \text{sech}^2 x\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (245)$$

II. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = \{\alpha_2 \text{csch}^2 x\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t}. \quad (246)$$

III. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ iken

$$q(x, t) = \{\alpha_2 \text{sec}^2 x\}^{\frac{1}{m+1}} e^{i\lambda t} \quad (247)$$

6.12. Kübik-Kuartik Yasası

Bu nonlinearlik durumunda, (25) denklemi

$$i q_t + a(|q|^n q)_{xx} + (b_1 |q|^2 + b_2 |q|^3) q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (248)$$

denklemine indirgenir. $n = 2$ iken (248) denkleminin integrasyonu gerçekleştirilebilir. Bu takdirde, (248) denklemi

$$i q_t + a(|q|^2 q)_{xx} + (b_1 |q|^2 + b_2 |q|^3) q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (249)$$

gibi yoğunlaşır. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b_1\phi^4 + b_2\phi^5 - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 6a\phi^2(\phi')^2 - 2\alpha\phi\phi'' + 3a\phi^3\phi'' = 0 \quad (250)$$

şeklinde sadeleşir. Balans prensibinden $N = 2$ olarak belirlenir. Böylece

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \quad (251)$$

şeklini alır. (251) denklemi, (250) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm setleri elde edilir:

$$\begin{aligned} b_1 = 72ae_1, \quad b_2 = -\frac{42a}{\alpha_2}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha = \frac{15\alpha_2^2 a(e_1^2 - 4e_0e_2)}{4}, \\ \beta = \frac{45\alpha_2^2 a(e_1^2 - 4e_0e_2)}{16}, \quad \lambda = 30a\alpha_2^2 e_1(e_1^2 - 4e_0e_2) - \gamma. \end{aligned} \quad (252)$$

$$\begin{aligned} b_1 = -36ae_1, \quad b_2 = -\frac{42a}{\alpha_2}, \quad e_0 = 0, \quad \alpha_0 = -\alpha_2 e_1, \quad \alpha_1 = 0, \\ \beta = \frac{5a}{4}, \quad \lambda = 4ae_1 - \gamma. \end{aligned} \quad (253)$$

(252) denklemi, (251) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \exp[i(30a\alpha_2^2 e_1(e_1^2 - 4e_0e_2) - \gamma)t] \quad (254)$$

elde edilir. Sonuç olarak, aşağıdaki durağan çözümler keşfedilir:

$$\text{I.} \quad e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2 \text{ ise}$$

$$q(x, t) = \alpha_2 \text{cs}^2 x \text{dn}^2 x \exp[-i(30a\alpha_2^2(k^2 + 1)(k^2 - 1)^2 + \gamma)t] \quad (255)$$

veya

$$q(x, t) = \alpha_2 (1 - k^2)^2 \text{sc}^2 x \text{nd}^2 x \exp[-i(30a\alpha_2^2(k^2 + 1)(k^2 - 1)^2 + \gamma)t]. \quad (256)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = \alpha_2 \text{sc}^2 x \text{dn}^2 x \exp[i(30a\alpha_2^2(2k^2 - 1) - \gamma)t]. \quad (257)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \alpha_2 k^4 \text{sd}^2 x \text{cn}^2 x \exp[i(30a\alpha_2^2 k^4(2 - k^2) - \gamma)t]. \quad (258)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \alpha_2 \text{ds}^2 x \text{cn}^2 x \exp[-i(30a\alpha_2^2(k^2 + 1)(k^2 - 1)^2 + \gamma)t] \quad (259)$$

veya

$$q(x, t) = \alpha_2 (1 - k^2)^2 \text{sc}^2 x \text{nd}^2 x \exp[-i(30a\alpha_2^2(k^2 + 1)(k^2 - 1)^2 + \gamma)t]. \quad (260)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \alpha_2 \text{ds}^2 x \text{nc}^2 x \exp[i(30a\alpha_2^2 k^4(2 - k^2) - \gamma)t]. \quad (261)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \alpha_2 \text{cd}^4 x \text{ns}^2 x \exp[i(30a\alpha_2^2(2k^2 - 1) - \gamma)t]. \quad (262)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = \alpha_2 \text{cs}^2 x \text{nd}^2 x \exp[i(30a\alpha_2^2(2k^2 - 1) - \gamma)t]. \quad (263)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \alpha_2 \tanh^2 x \exp[i(30a\alpha_2^2 - \gamma)t]. \quad (264)$$

IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \alpha_2 \coth^2 x \exp[i(30a\alpha_2^2 - \gamma)t]. \quad (265)$$

X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \alpha_2 \tan^2 x \exp[-i(30a\alpha_2^2 + \gamma)t]. \quad (266)$$

Burada, Jacobi eliptik fonksiyon çözümler (255)-(263) denklemleri ile temsil edilirken, durağan koyu optik soliton çözüm, durağan tekil optik soliton çözüm ve periyodik dalga çözüm sırasıyla (264), (265) ve (266) denklemleri ile temsil edilir.

Benzer şekilde, (253) denklemi, (251) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ -\alpha_2 e_1 + \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right\} \exp[i(4\alpha e_1 - \gamma)t] \quad (267)$$

elde edilir. Bu durumda, sırasıyla, durağan parlak ve tekil optik soliton çözümler ve ayrıca periyodik dalga çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

I. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ ise

$$q(x, t) = -\alpha_2 \operatorname{sech}^2 x \exp[i(4\alpha - \gamma)t]. \quad (268)$$

II. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = \alpha_2 \operatorname{csch}^2 x \exp[i(4\alpha - \gamma)t]. \quad (269)$$

III. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ iken

$$q(x, t) = \alpha_2 \sec^2 x \exp[-i(4\alpha + \gamma)t]. \quad (270)$$

6.13. Genelleştirilmiş Kübik-Kuartik Yasası

Bu nonlineerlik durumunda, (25) denklemi

$$iq_t + a(|q|^n q)_{xx} + (b_1 |q|^{2m} + b_2 |q|^{3m})q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (271)$$

denkleminde indirgenir. $n = 2m$ iken (271) denkleminin integrasyonu gerçekleştirilebilir. Bu takdirde, (271) denklemi

$$iq_t + a(|q|^{2m} q)_{xx} + (b_1 |q|^{2m} + b_2 |q|^{3m})q = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q \quad (272)$$

gibi yoğunlaşır. Bu yüzden, (28) ile verilen adi diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} &-(\gamma + \lambda)\phi^2 + b_1 \phi^{2m+2} + b_2 \phi^{3m+2} - 2(\alpha - 2\beta)(\phi')^2 + 2am(2m+1)\phi^{2m}(\phi')^2 \\ &-2\alpha\phi\phi'' + a(2m+1)\phi^{2m+1}\phi'' = 0 \end{aligned} \quad (273)$$

şeklinde sadeleşir. Kapalı form çözümler çıkarmak için

$$\phi = \varphi^{\frac{2}{m}} \quad (274)$$

dönüşümü (273) denkleminde uygulanır ve böylece (273) denklemi

$$\begin{aligned} &-m^2(\gamma + \lambda)\varphi^2 + b_1 m^2 \varphi^6 + b_2 m^2 \varphi^8 + 4(\alpha(m-4) + 4\beta)(\varphi')^2 \\ &+ 2a(6m^2 + 7m + 2)\varphi^4(\varphi')^2 - 4m\alpha\varphi\varphi'' + 2am(2m+1)\varphi^5\varphi'' = 0 \end{aligned} \quad (275)$$

denkleminde dönüşür. Balans prensibinden $N = 1$ elde edilir. Böylece

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (276)$$

şeklini alır. (276) denklemi, (275) denkleminde yerine yazılarak ve (23) denklemi kullanılarak, G^j , $G'G^j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) cinsinden bir polinom elde edilir. Elde edilen polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek α_i, e_2, e_1, e_0 için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Daha sonra, ortaya çıkan sistemin çözülmesi ile aşağıdaki çözüm seti elde edilir:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{8ae_1(2m+1)^2}{m^2}, \quad b_2 = -\frac{2a(2m+1)(5m+2)}{\alpha_1^2 m^2}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha = \frac{a\alpha_1^4(e_1^2 - 4e_0e_2)(m(6m+7)+2)}{4m}, \\ \beta &= -\frac{a\alpha_1^4(e_1^2 - 4e_0e_2)(m-4)(2m+1)(3m+2)}{16m}, \quad \lambda = \frac{2a\alpha_1^4e_1(e_1^2 - 4e_0e_2)(6m^2+7m+2)}{m^2} - \gamma. \end{aligned} \quad (277)$$

(277) denklemi, (276) denkleminde yerine konularak ve (27) denklemi kullanılarak

$$q(x, t) = \left\{ \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \right\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[i \left(\frac{2a\alpha_1^4e_1(e_1^2 - 4e_0e_2)(6m^2+7m+2)}{m^2} - \gamma \right) t \right] \quad (278)$$

elde edilir. Sonuç olarak, incelenen denklem için durağan çözümler aşağıdaki gibi çıkarılır:

I. $e_0 = 1, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = k^2$ ise

$$q(x, t) = \{\alpha_1 \operatorname{csx} \operatorname{dnx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{2a\alpha_1^4(k^2 + 1)(k^2 - 1)^2(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} + \gamma \right) t \right] \quad (279)$$

veya

$$q(x, t) = \{\alpha_1(k^2 - 1) \operatorname{scx} \operatorname{ndx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{2a\alpha_1^4(k^2 + 1)(k^2 - 1)^2(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} + \gamma \right) t \right]. \quad (280)$$

II. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = -k^2$ için

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \operatorname{scx} \operatorname{dnx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[i \left(\frac{2a\alpha_1^4(2k^2 - 1)(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} - \gamma \right) t \right]. \quad (281)$$

III. $e_0 = k^2 - 1, e_1 = 2 - k^2, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 k^2 \text{sdxcnx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[i \left(\frac{2a\alpha_1^4 k^4 (2 - k^2)(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} - \gamma \right) t \right]. \quad (282)$$

IV. $e_0 = k^2, e_1 = -(k^2 + 1), e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \text{dsxcnx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{2a\alpha_1^4 (k^2 + 1)(k^2 - 1)^2 (6m^2 + 7m + 2)}{m^2} + \gamma \right) t \right] \quad (283)$$

veya

$$q(x, t) = \{\alpha_1 (1 - k^2) \text{scxndx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{2a\alpha_1^4 (k^2 + 1)(k^2 - 1)^2 (6m^2 + 7m + 2)}{m^2} + \gamma \right) t \right]. \quad (284)$$

V. $e_0 = 1 - k^2, e_1 = 2 - k^2, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \text{dsxncx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[i \left(\frac{2a\alpha_1^4 k^4 (2 - k^2)(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} - \gamma \right) t \right]. \quad (285)$$

VI. $e_0 = 1, e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = k^2(k^2 - 1)$ ise

$$q(x, t) = \{\alpha_1 \text{cd}^2 \text{xnsx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[i \left(\frac{2a\alpha_1^4 (2k^2 - 1)(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} - \gamma \right) t \right]. \quad (286)$$

VII. $e_0 = k^2(k^2 - 1), e_1 = 2k^2 - 1, e_2 = 1$ için

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \text{csxndx}\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[i \left(\frac{2a\alpha_1^4 (2k^2 - 1)(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} - \gamma \right) t \right]. \quad (287)$$

VIII. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = -1$ iken

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \tanh x\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[i \left(\frac{2a\alpha_1^4(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} - \gamma \right) t \right]. \quad (288)$$

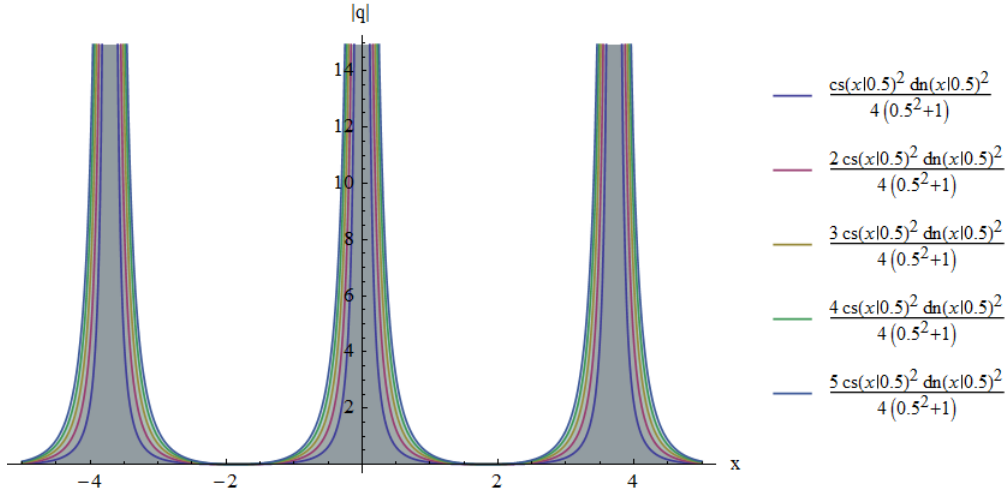
IX. $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 1$ olduğunda

$$q(x, t) = \{-\alpha_1 \coth x\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[i \left(\frac{2a\alpha_1^4(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} - \gamma \right) t \right]. \quad (289)$$

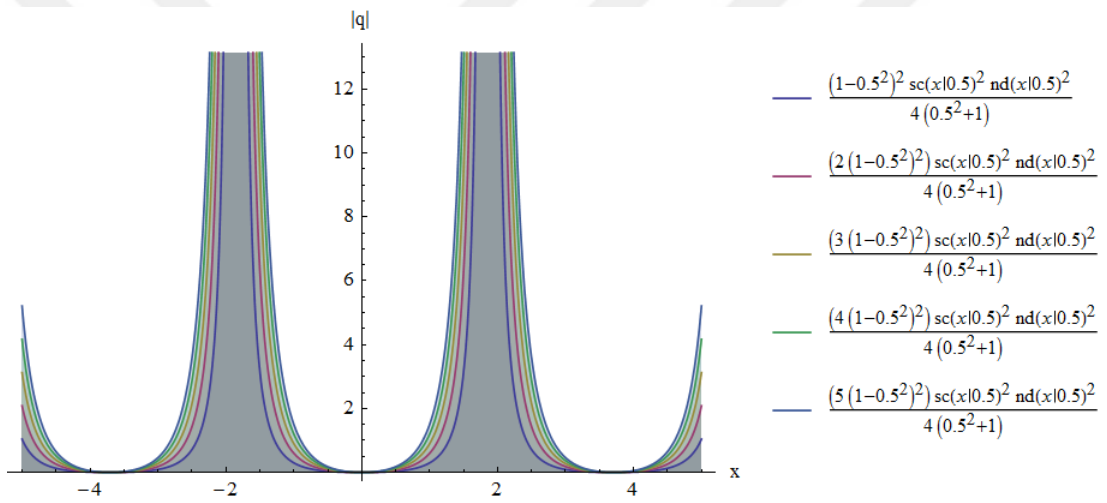
X. $e_0 = 0, e_1 = -1, e_2 = 1$ durumunda

$$q(x, t) = \{\alpha_1 \tanh x\}^{\frac{2}{m}} \exp \left[-i \left(\frac{2a\alpha_1^4(6m^2 + 7m + 2)}{m^2} + \gamma \right) t \right]. \quad (290)$$

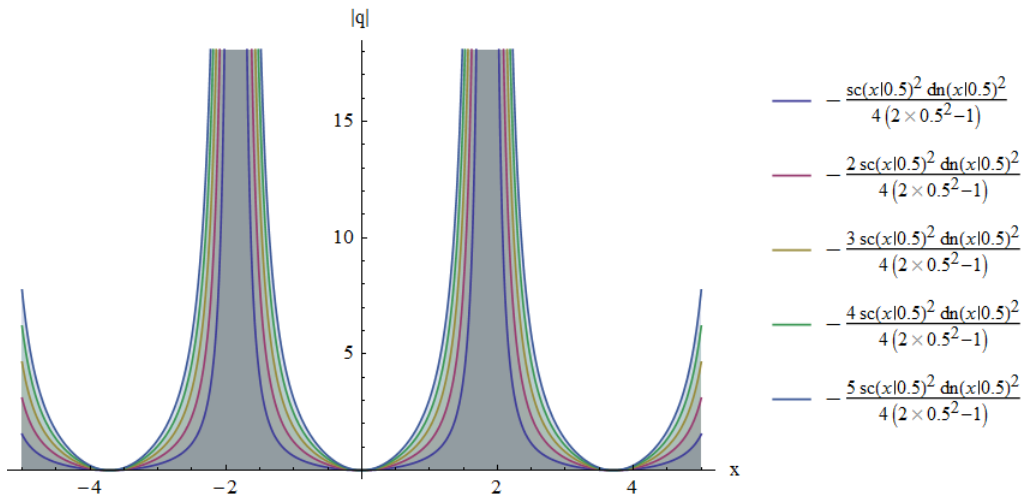
Burada, (279)-(287) denklemleri ile verilen çözümler, modelin Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri iken, (288)-(290) çözümleri, sırasıyla durağan koyu optik soliton çözümü, durağan tekil optik soliton çözümü ve periyodik dalgayı temsil eder.



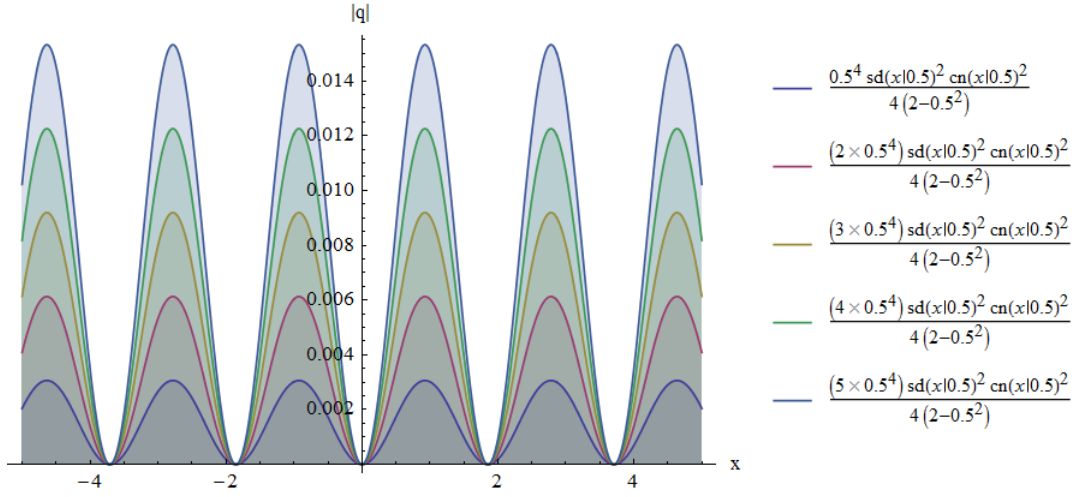
Şekil 1: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (36) çözümünün nümerik simülasyonu.



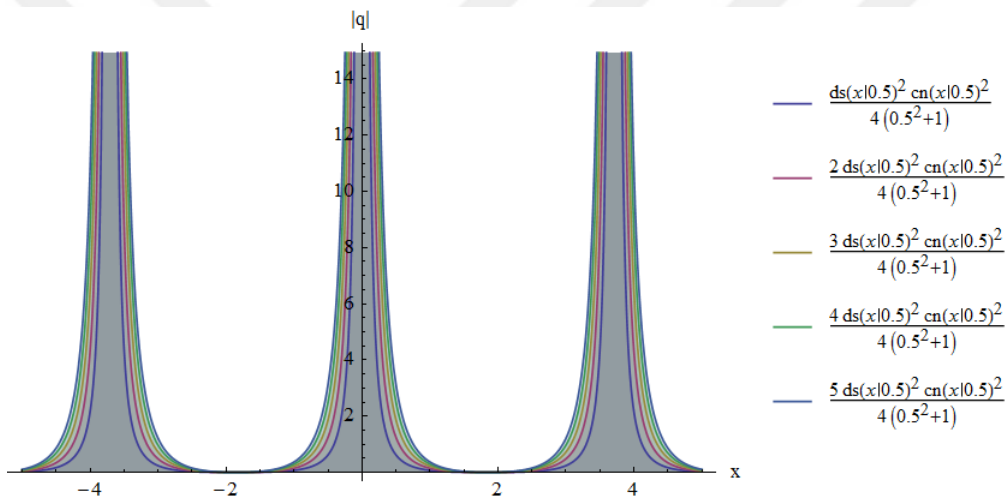
Şekil 2: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (37) çözümünün nümerik simülasyonu.



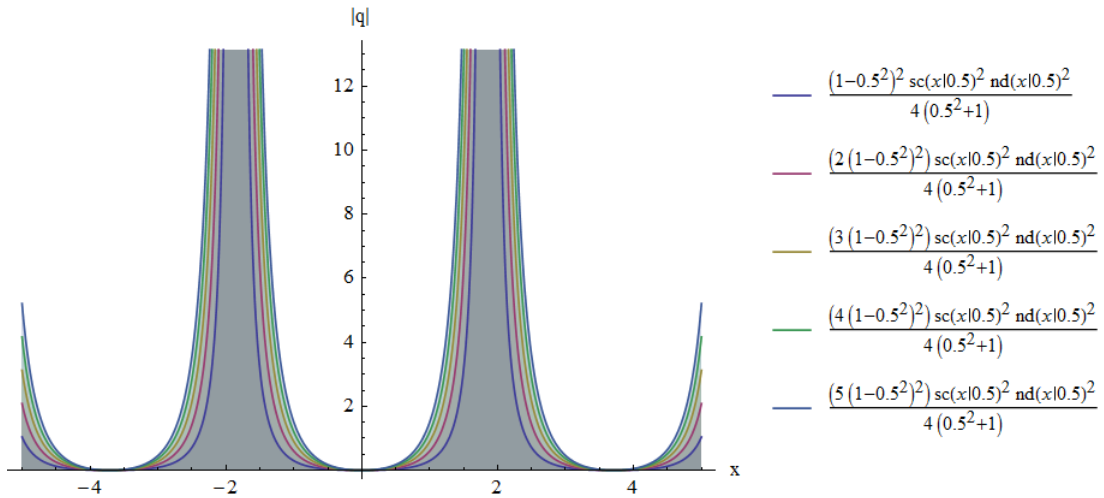
Şekil 3: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (38) çözümünün nümerik simülasyonu.



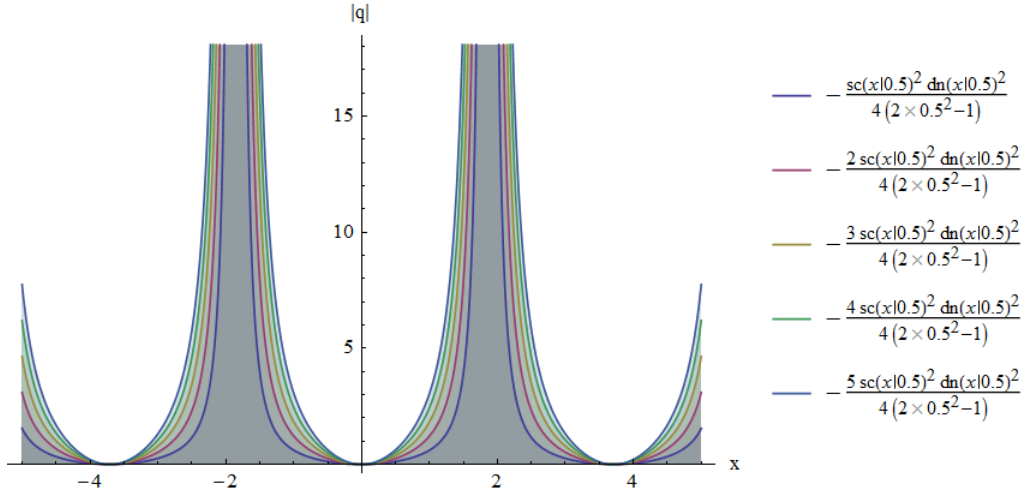
Şekil 4: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (39) çözümünün nümerik simülasyonu.



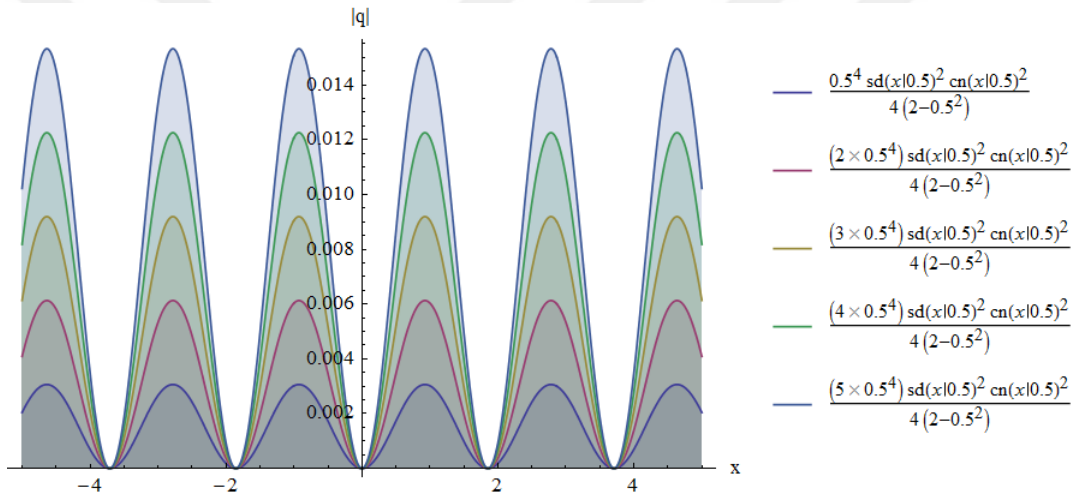
Şekil 5: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (40) çözümünün nümerik simülasyonu.



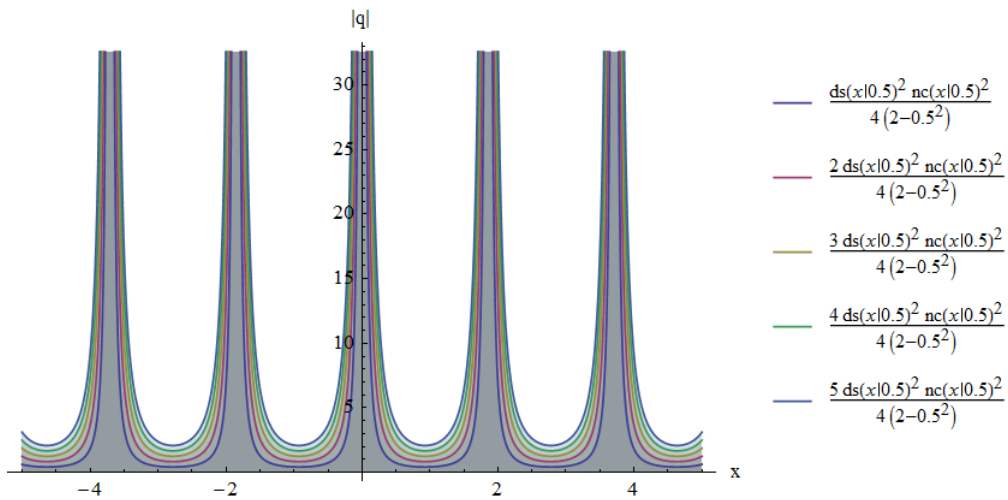
Şekil 6: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (41) çözümünün nümerik simülasyonu.



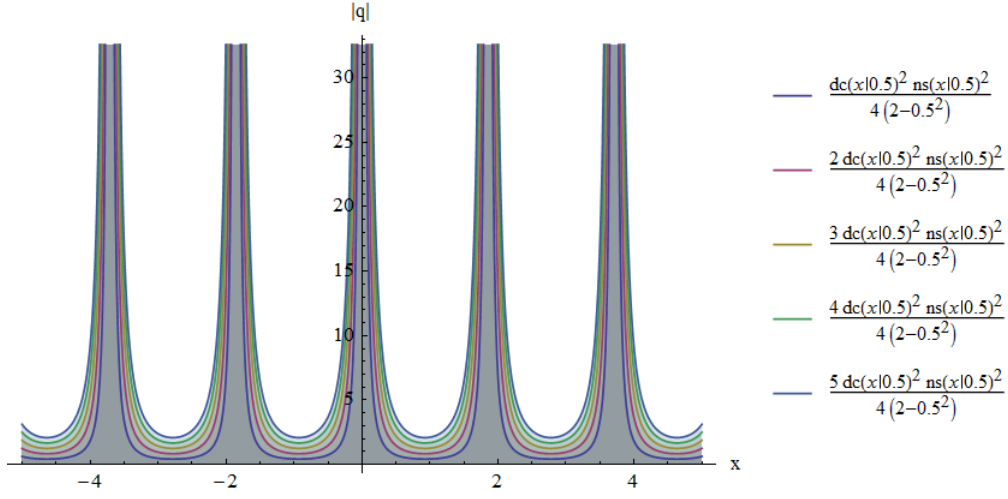
Şekil 7: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (42) çözümünün nümerik simülasyonu.



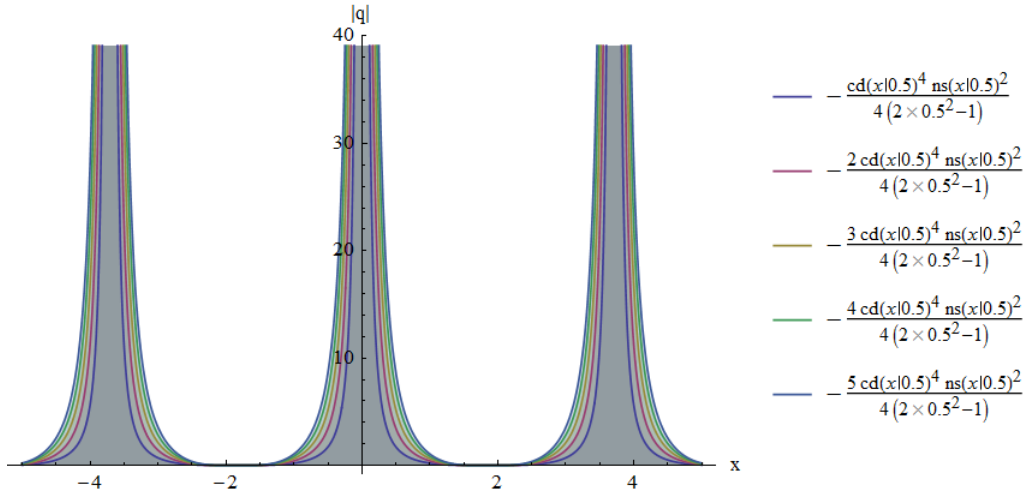
Şekil 8: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (43) çözümünün nümerik simülasyonu.



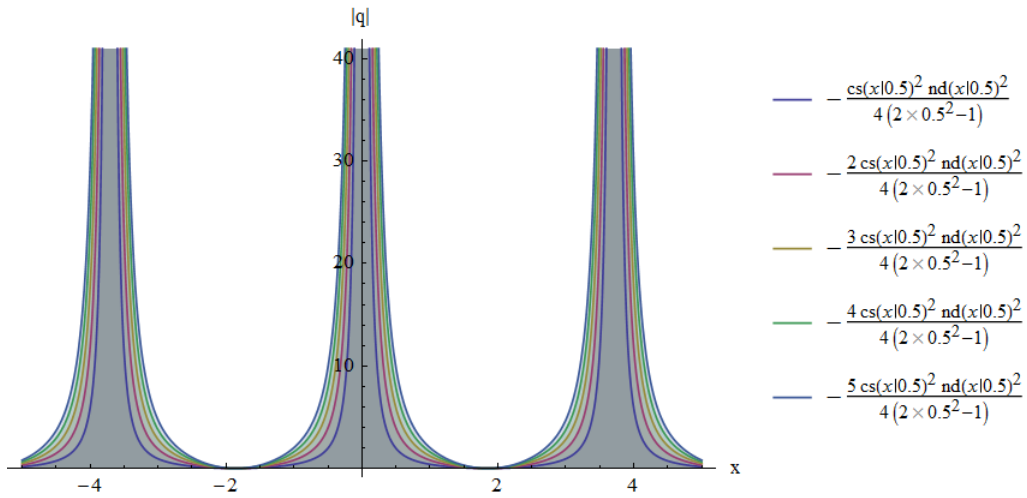
Şekil 9: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (44) çözümünün nümerik simülasyonu.



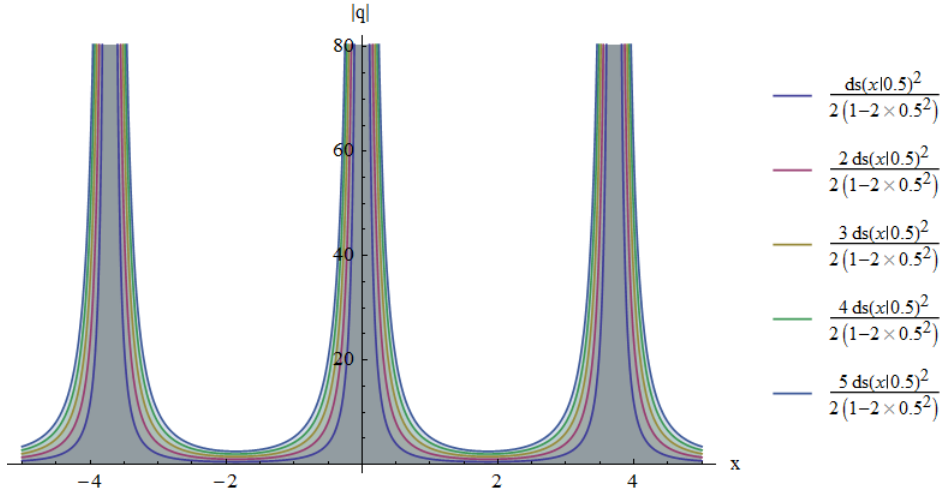
Şekil 10: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (45) çözümünün nümerik simülasyonu.



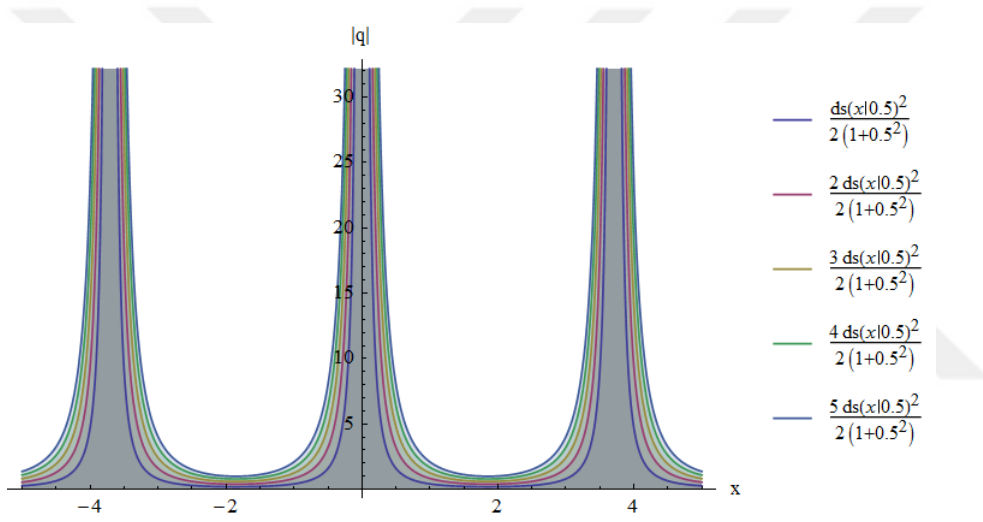
Şekil 11: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (46) çözümünün nümerik simülasyonu.



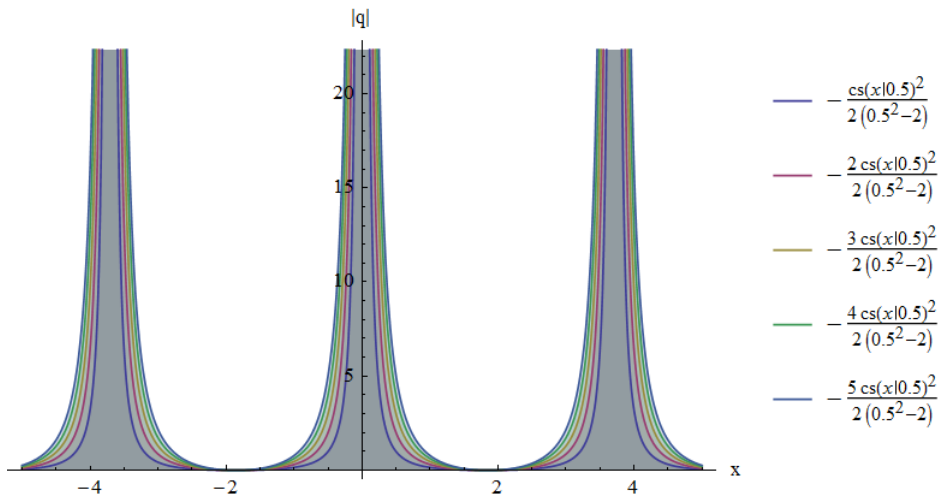
Şekil 12: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (47) çözümünün nümerik simülasyonu.



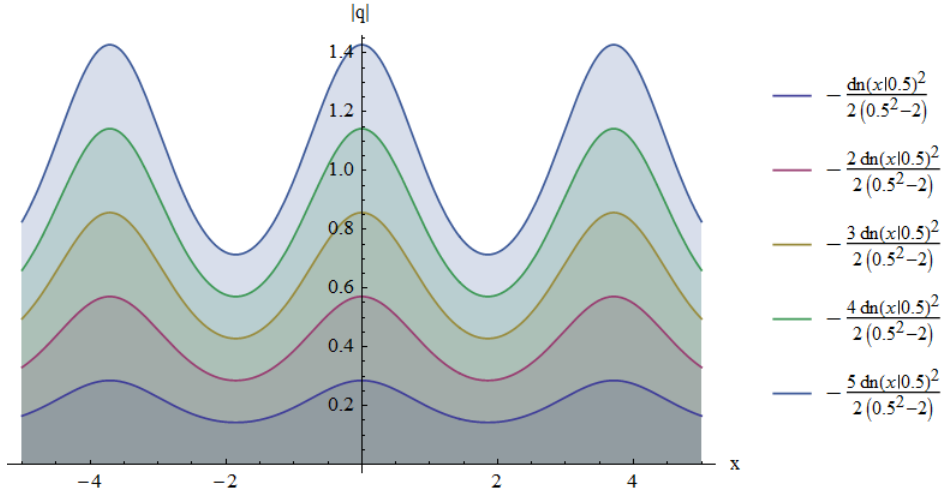
Şekil 13: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (48) çözümünün nümerik simülasyonu.



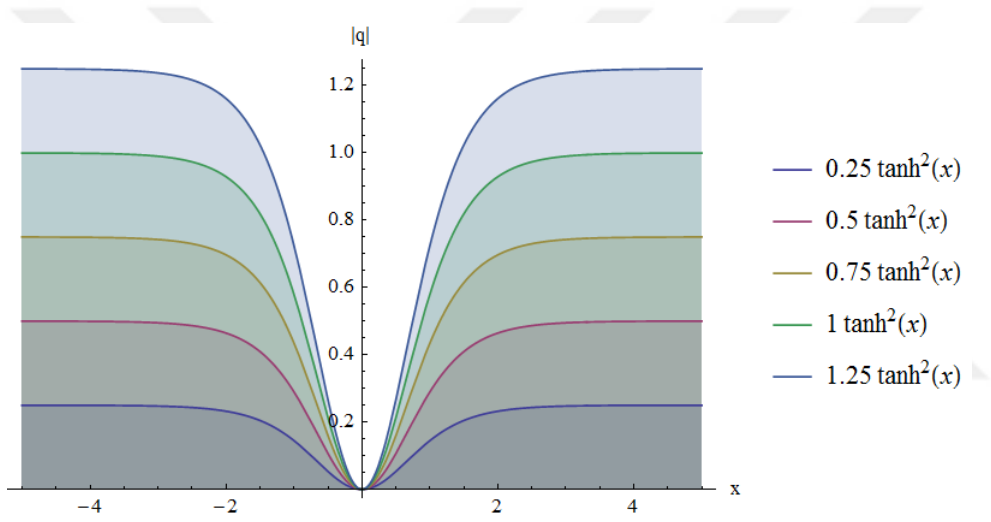
Şekil 14: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (49) çözümünün nümerik simülasyonu.



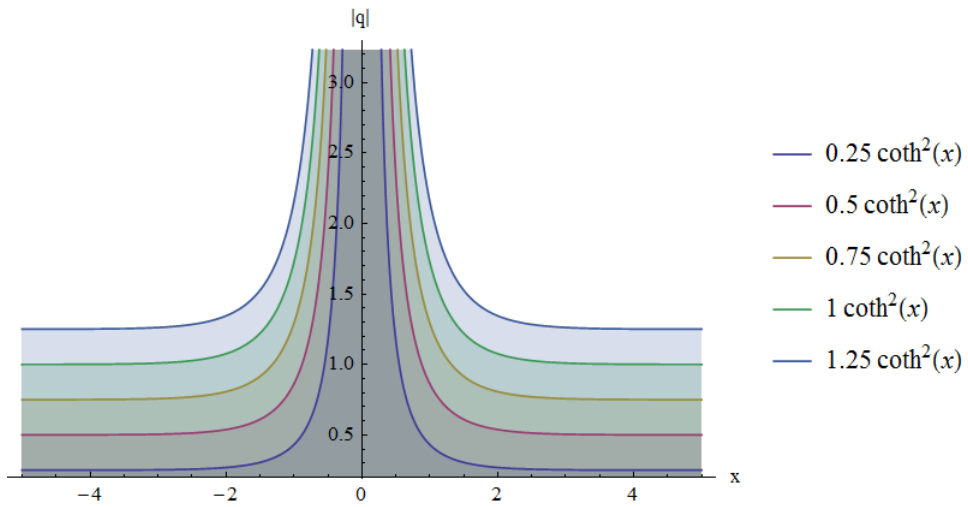
Şekil 15: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (50) çözümünün nümerik simülasyonu.



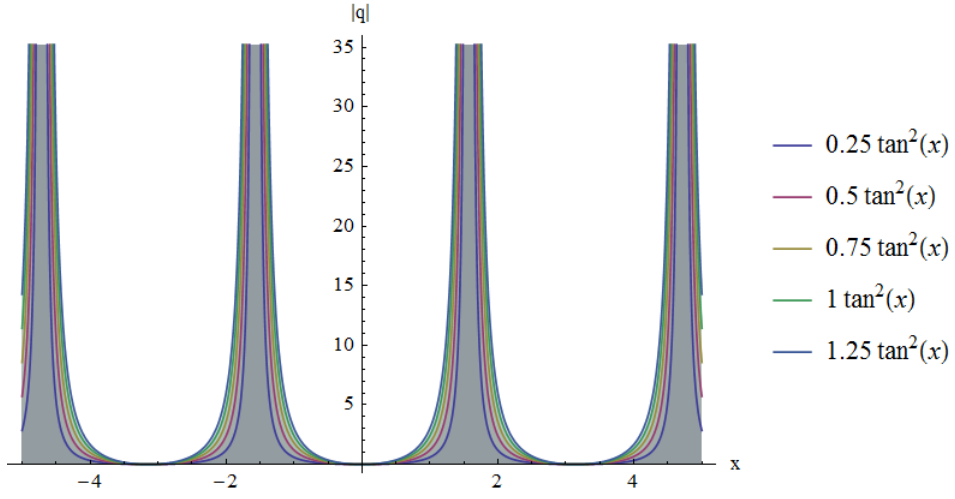
Şekil 16: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (51) çözümünün nümerik simülasyonu.



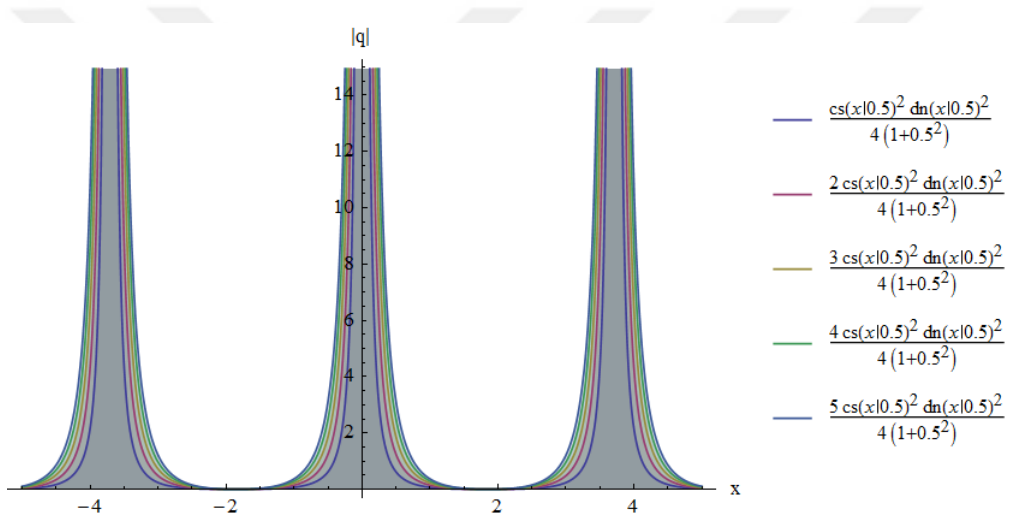
Şekil 17: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (52) çözümünün nümerik simülasyonu.



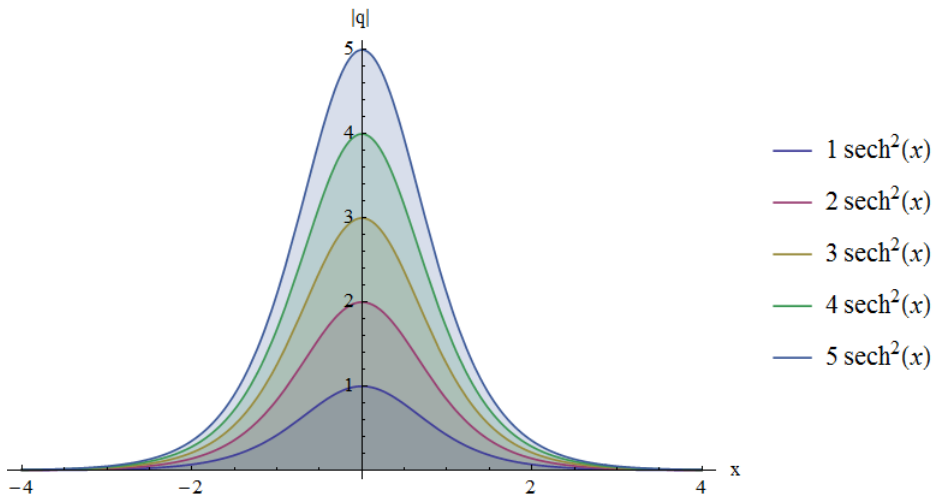
Şekil 18: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (53) çözümünün nümerik simülasyonu.



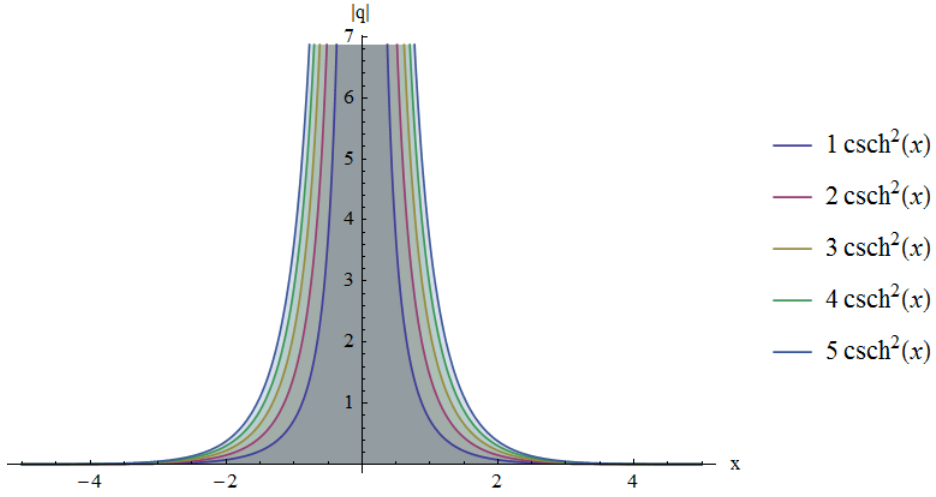
Şekil 19: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (54) çözümünün nümerik simülasyonu.



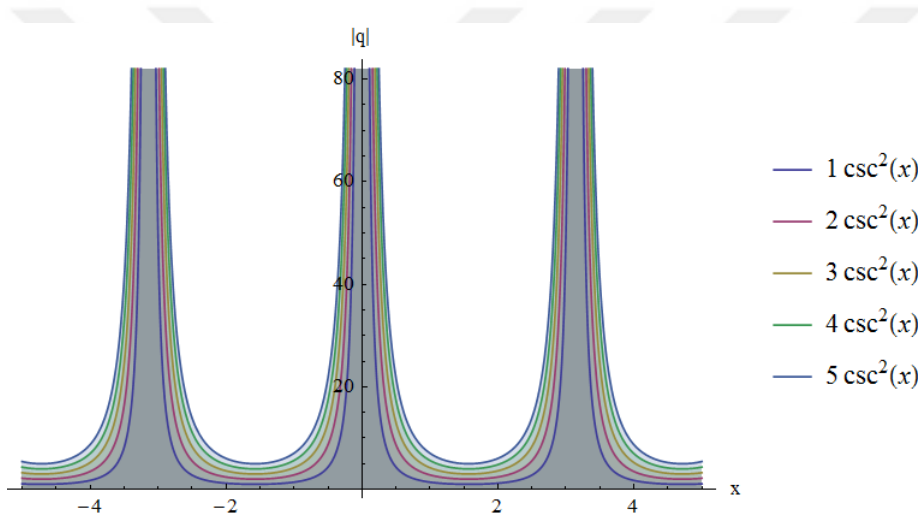
Şekil 20: $a = 1$, $k = 0.5$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (55) çözümünün nümerik simülasyonu.



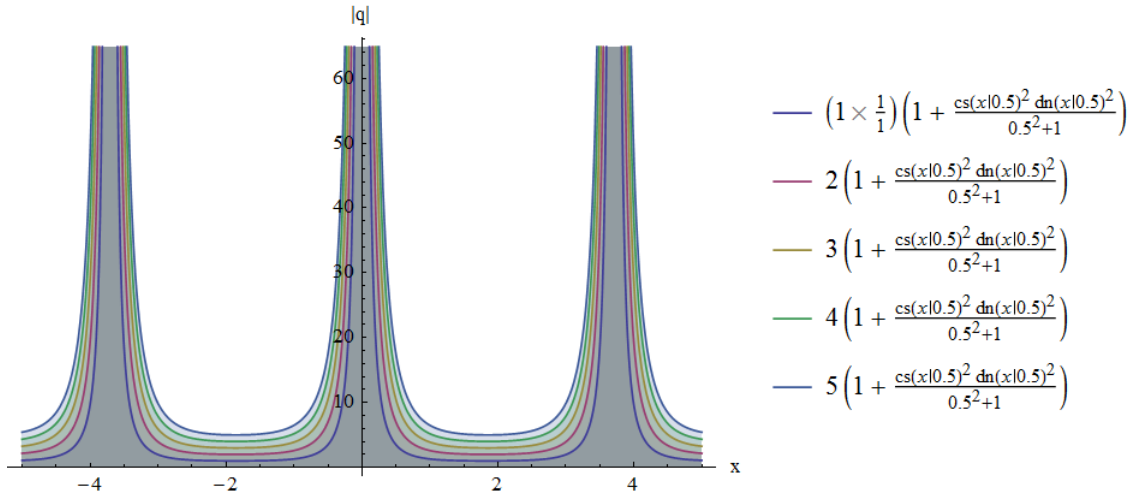
Şekil 21: $a = 1$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (57) çözümünün nümerik simülasyonu.



Şekil 22: $a = 1$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (58) çözümünün nümerik simülasyonu.



Şekil 23: $a = 1$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (59) çözümünün nümerik simülasyonu.



Şekil 24: $a = 1$ ve $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ için (60) çözümünün nümerik simülasyonu.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, nonlinear kromatik dağılımlı ve kendiliğinden faz modülasyonu yapılarının çeşitli formlarına sahip kompleks GL denkleminde ortaya çıkan durağan solitonların türetilmesi ve sergilenmesi üzerinedir. Sonuçlar, lineer zamansal gelişim için gösterilmiştir. Bir ürün olarak durağan optik soliton çözümleri ve diğer dalga çözümleri üreten Jacobi'nin eliptik fonksiyonlar yaklaşımı benimsenmiştir. Periyodik tekil çözümler, Gaussian solitary dalgalar ve Jacobi'nin eliptik fonksiyonları cinsinden çözümler elde edilmiştir. Durağan optik solitonların dört formunun tamamı bu çalışmada keşfedilmiştir ve bunlar parlak, koyu ve tekil solitonlardır (her iki türden). Burada listelenen çözümlerin bolluğu, kompleks GL denkleminin çalışıldığı diğer fiziksel ve mühendislik alanlarının yanı sıra optik topluluğunda faydalı bir varlık olacaktır.

İleride, kompleks GL denklemine ek integrasyon teknikleri uygulanacaktır. Hareket eden dalgalar yöntemi, yarı-ters varyasyon ilkesi ve belirsiz katsayılar yöntemi bunlardan birkaçıdır. Soliton parametrelerinin adyabatik dinamiklerini elde etmek için soliton pertürbasyon teorisi de uygulanacaktır. Solitonların kanal içi çarpışması incelenecek ve yarı parçacık teorisi geliştirilecektir. Ardından, stokastik pertürbasyon da ele alınacak ve bu çalışmanın anlık bir sonucu, aynı modeli genelleştirilmiş zamansal gelişimle incelemek olacaktır. Bu, burada ele alınan ve incelenen modele genelleştirilmiş bir bakış açısı verecektir. Son olarak model, varyasyonel iterasyon yöntemi, Adomian ayrıştırma şeması ve diğer yöntemlerin kullanımı ile nümerik olarak da ele alınacaktır.

EKLER

Bu kısımda (23) ile verilen Jacobi eliptik denkleminin çözümleri ve Jacobi eliptik fonksiyonlarla ilgili bazı bilgiler verilecektir.

EK-A

(23) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibi listelenir (Zayed, 2009; Malik vd., 2012; Yalçı ve Ekici, 2022):

Durum	e_0	e_1	e_2	$G(x)$	$G'(x)$
1	1	$-(1+k^2)$	k^2	$\operatorname{sn} x$	$\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$
2	1	$-(1+k^2)$	k^2	$\operatorname{cd} x$	$-(1-k^2) \operatorname{sd} x \operatorname{nd} x$
3	$1-k^2$	$2k^2-1$	$-k^2$	$\operatorname{cn} x$	$-\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$
4	k^2-1	$2-k^2$	-1	$\operatorname{dn} x$	$-k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x$
5	k^2	$-(k^2+1)$	1	$\operatorname{ns} x$	$-\operatorname{ds} x \operatorname{cs} x$
6	k^2	$-(k^2+1)$	1	$\operatorname{dc} x$	$(1-k^2) \operatorname{nc} x \operatorname{sc} x$
7	$-k^2$	$2k^2-1$	$1-k^2$	$\operatorname{nc} x$	$\operatorname{sc} x \operatorname{dc} x$
8	-1	$2-k^2$	k^2-1	$\operatorname{nd} x$	$k^2 \operatorname{sd} x \operatorname{cd} x$
9	$1-k^2$	$2-k^2$	1	$\operatorname{cs} x$	$-\operatorname{ns} x \operatorname{ds} x$
10	1	$2-k^2$	$1-k^2$	$\operatorname{sc} x$	$\operatorname{nc} x \operatorname{dc} x$
11	1	$2k^2-1$	$k^2(k^2-1)$	$\operatorname{sd} x$	$\operatorname{nd} x \operatorname{cd} x$
12	$k^2(k^2-1)$	$2k^2-1$	1	$\operatorname{ds} x$	$-\operatorname{cs} x \operatorname{ns} x$
13	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1-2k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\operatorname{ns} x \pm \operatorname{cs} x$	$-\operatorname{ds} x \operatorname{cs} x \mp \operatorname{ns} x \operatorname{ds} x$
14	$\frac{1}{4}(1-k^2)$	$\frac{1}{2}(1+k^2)$	$\frac{1}{4}(1-k^2)$	$\operatorname{nc} x \pm \operatorname{sc} x$	$\operatorname{sc} x \operatorname{dc} x \pm \operatorname{nc} x \operatorname{dc} x$
15	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2-2)$	$\frac{1}{4}$	$\operatorname{ns} x \pm \operatorname{ds} x$	$-\operatorname{ds} x \operatorname{cs} x \mp \operatorname{cs} x \operatorname{ns} x$
16	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2-2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\operatorname{sn} x \pm \operatorname{icn} x$	$\operatorname{dn} x \operatorname{cn} x \mp \operatorname{isn} x \operatorname{dn} x$
17	0	1	-1	$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \operatorname{tanh} x$
18	0	1	1	$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x \operatorname{coth} x$
19	0	-1	1	$\operatorname{sec} x$	$\operatorname{sec} x \operatorname{tan} x$
20	0	0	1	$\frac{1}{\xi}$	$-\frac{1}{\xi^2}$
21	0	$-(1+k^2)$	k^2	$\operatorname{sn} x$	$\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$

burada k , ($0 < k < 1$) Jacobi eliptik fonksiyonların modülüdür ve $i = \sqrt{-1}$.

EK-B

$k \rightarrow 1^-$ iken, Jacobi eliptik fonksiyonlar hiperbolik fonksiyonlara dejenere olur:

$$\operatorname{sn} x \rightarrow \tanh x, \quad \operatorname{cn} x \rightarrow \operatorname{sech} x, \quad \operatorname{dn} x \rightarrow \operatorname{sech} x, \quad \operatorname{sc} x \rightarrow \sinh x,$$

$$\begin{aligned}
sd\,x &\rightarrow \sinh x, & cd\,x &\rightarrow 1, & ns\,x &\rightarrow \coth x, & nc\,x &\rightarrow \cosh x, \\
nd\,x &\rightarrow \cosh x, & cs\,x &\rightarrow \operatorname{csch} x, & ds\,x &\rightarrow \operatorname{csch} x, & dc\,x &\rightarrow 1.
\end{aligned} \tag{291}$$

Ancak, $k \rightarrow 0^+$ iken, Jacobi eliptik fonksiyonlar trigonometrik fonksiyonlara dönüşür.

$$\begin{aligned}
sn\,x &\rightarrow \sin x, & cn\,x &\rightarrow \cos x, & dn\,x &\rightarrow 1, & sc\,x &\rightarrow \tan x, \\
sd\,x &\rightarrow \sin x, & cd\,x &\rightarrow \cos x, & ns\,x &\rightarrow \csc x, & nc\,x &\rightarrow \sec x, \\
nd\,x &\rightarrow 1, & cs\,x &\rightarrow \cot x, & ds\,x &\rightarrow \csc x, & dc\,x &\rightarrow \sec x.
\end{aligned} \tag{292}$$

EK-C

$$\begin{aligned}
cd\,x &= \frac{cn\,x}{dn\,x}, & dc\,x &= \frac{dn\,x}{cn\,x}, & nc\,x &= \frac{1}{cn\,x}, & nd\,x &= \frac{1}{dn\,x}, \\
cs\,x &= \frac{cn\,x}{sn\,x}, & sc\,x &= \frac{sn\,x}{cn\,x}, & sd\,x &= \frac{sn\,x}{dn\,x}, & ds\,x &= \frac{dn\,x}{sn\,x}.
\end{aligned} \tag{293}$$

8. KAYNAKLAR

- Adem, A. R., Ekici, M., Biswas, A., Asma, M., Zayed, E. M. E., Alzahrani A. K. & Belic, M. R. (2020). Stationary optical solitons with nonlinear chromatic dispersion having quadratic--cubic law of refractive index. *Physics Letters A, Volume* (384), Issue 25, 126606.
- Adem, A. R., Ntsime, B. P., Biswas, A., Asma, M., Ekici, M., Moshokoa, S. P., Alzahrani, A. K. & Belic, M. R. (2020). Stationary optical solitons with Sasa-Satsuma equation having nonlinear chromatic dispersion. *Physics Letters A, Volume* (384), Issue 27, 126721.
- Adem, A. R., Ntsime, B. P., Biswas, A., Khan, S., Alzahrani, A. K. & Belic, M. R. (2021). Stationary optical solitons with nonlinear chromatic dispersion for Lakshmanan-Porsezian-Daniel model having Kerr law of refractive index. *Ukrainian Journal of Physical Optics, Volume* (22), Issue 2, 83-86.
- Agrawal, G. P. (1989). *Applications of Nonlinear Fiber Optics*, New York: Academic Press.
- Agrawal, G. P. (2001). *Nonlinear Fiber Optics*, (2nd Edition), New York: Academic Press.
- Arnous, A. H., Seadawy, A. R., Alqahtani, R. T. & Biswas, A. (2017). Optical solitons with complex Ginzburg--Landau equation by modified simple equation method. *Optik, Volume* (144), 475-480.
- Arshed, S., Biswas, A., Mallawi F. & Belic, M. R. (2019). Optical solitons with complex Ginzburg--Landau equation having three nonlinear forms. *Physics Letters A, Volume* 383, Issue 36, 126026.
- Atai, J. & Malomed, B. (2001). Families of Bragg grating solitons in a cubic--quintic medium. *Physics Letters A, Volume* (284), Issues 6, 247-252.
- Azzouzi, F., Triki, H., Mezghiche, K., & El Akrmi, A. (2009). Solitary wave solutions for high dispersive cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3), 1304-1307.
- Azzouzi, F., Triki, H., & Grelu, P. (2015). Dipole soliton solution for the homogeneous high-order nonlinear Schrödinger equation with cubic--quintic--septic non-Kerr terms. *Applied Mathematical Modelling*, 39(3-4), 1300-1307.

- Bekir, A., Cevikel, A. C., Güner, Ö. & San, S. (2014). Bright and dark soliton solutions of the (2+1)-dimensional evolution equations. *Mathematical Modelling and Analysis*, 19(1), 118-126.
- Biswas, A. (2009). Temporal 1-soliton solution of the complex Ginzburg-Landau equation with power law nonlinearity. *Progress in Electromagnetics Research*, Volume (96), 1-7.
- Biswas, A. (2018). Chirp-free bright optical solitons and conservation laws for complex Ginzburg-Landau equation with three nonlinear forms. *Optik*, Volume (174), 207-215.
- Biswas, A. & Alqahtani, R. T. (2017). Optical soliton perturbation with complex Ginzburg-Landau equation by semi-inverse variational principle. *Optik*, Volume (147), 77-81.
- Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A. & Belic, M. (2018). Stationary optical solitons with nonlinear group velocity dispersion by extended trial function scheme. *Optik*, Volume (171), 529-542.
- Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A. & Belic, M. (2019). Chirped and chirp-free optical solitons with generalized anti-cubic nonlinearity by extended trial function scheme. *Optik*, 178, 636-644.
- Biswas, A., Ekici, M., & Sonmezoglu, A. (2021). Stationary optical solitons with Kudryashov's quintuple power-law of refractive index having nonlinear chromatic dispersion. *Physics Letters A*, 127885.
- Biswas, A., Kara, A. H., Sun, Y., Zhou, Q., Yildirim, Y., Alshehri, H. M. & Belic, M. R. (2021). Conservation laws for pure-cubic optical solitons with complex Ginzburg-Landau equation having several refractive index structures. *Results in Physics*, Volume (31), 104901.
- Biswas, A. & Khalique, C.M. (2011). Stationary solitons for nonlinear dispersive Schrödinger's equation. *Nonlinear Dynamics*, Volume (63), Number 4, 623-626.
- Biswas, A. & Khalique, C.M. (2013). Stationary solutions for nonlinear dispersive Schrödinger's equation with generalized evolution. *Chinese Journal of Physics*, Volume (51), Number 1, 157-164.

- Biswas, A., Khan, K., Rahman, A., Yildirim, A., Hayat, T. & ALDOSSARY, O. (2012). Bright and dark optical solitons in birefringent fibers with Hamiltonian perturbations and Kerr law nonlinearity. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, 14(7), 571.
- Biswas, A., & Konar, S. (2006). *Introduction to non-Kerr law optical solitons*. CRC Press.
- Biswas, A., Yildirim, Y., Yasar, E., Triki, H., Alshomrani, A. S., Ullah, M. Z., Zhou, Q., Moshokoa, S. P. & Belic, M. (2018). Optical soliton perturbation for complex Ginzburg--Landau equation with modified simple equation method. *Optik, Volume* (158), 399-415.
- Biswas, A., Yildirim, Y., Yasar, E., Triki, H., Alshomrani, A. S., Ullah, M. Z., Zhou, Q., Moshokoa, S. P. & Belic, M. (2018). Optical soliton perturbation with complex Ginzburg--Landau equation using trial solution approach. *Optik. Volume* (160), 44-60.
- Biswas, A., Yildirim, Y., Ekici, M., Guggilla, P., Khan, S., Gonzalez-Gaxiola, O., Alzahrani, A. K. & Belic, M. R. (2021). Cubic--quartic optical soliton pertubation with complex Ginzburg--Landau equation. *Journal of Applied Science and Engineering, Volume* (24), Number 6, 937-1004.
- Das, A., Biswas, A., Ekici, M., Zhou, Q., Alshomrani, A. S. & Belic, M. R. (2019). Optical solitons with complex Ginzburg--Landau equation for two nonlinear forms using \$F\$-expansion. *Chinese Journal of Physics, Volume* (61), 255-261.
- de Vries, D. J. G. & Korteweg, D.J. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine Series, Volume* (39), 422-443.
- Ekici, M., Sonmezoglu, A., Biswas, A. & Belic, M. (2018). Sequel to stationary optical solitons with nonlinear group velocity dispersion by extended trial function scheme. *Optik, Volume* (172), 636-650.
- Ekici, M., Sonmezoglu, A. & Biswas, A. (2021). Stationary optical solitons with Kudryashov's laws of refractive index. *Chaos, Solitons & Fractals, Volume* (151), 111226.

- Emplit, P., Hamaide, J. P., Reynaud, F., Froehly, C. & Barthelemy, A. (1987). Picosecond steps and dark pulses through nonlinear single mode fibers. *Optics communications*, 62(6), 374-379.
- Fedele, R., Schamel, H., Karpman, V. I. & Shukla, P. K. (2003). Envelope solitons of nonlinear Schrödinger equation with an anti-cubic nonlinearity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(4), 1169.
- Fujioka, J., Cortés, E., Pérez-Pascual, R., Rodríguez, R. F., Espinosa, A. & Malomed, B. A. (2011). Chaotic solitons in the quadratic-cubic nonlinear Schrödinger equation under nonlinearity management. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 21(3), 033120.
- Geng, Y, Y. & Li, J. (2008). Exact solutions to a nonlinearly dispersive Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, Volume (195), Issue 3, 420-439.
- Guo, S. & Zhou, Y. (2010). The extended (G'/G) –expansion method and its applications to Whitham-Broer-Kaup-Like equations and coupled Hirota-Satsuma KdV equations. *Applied Mathematics and Computation*, Volume (215), Issue 9, 3214-3221.
- Hasegawa, A., & Tappert, F. (1973). Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. *Applied Physics Letters*, 23(4), 171-172.
- Kudryashov, N. A. (2020). Periodic and solitary waves in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity. *Chinese Journal of Physics*. Volume (66), 401-405.
- Kudryashov, N. A. (2020). Solitary wave solutions of hierarchy with non--local nonlinearity. *Applied Mathematics Letters*, Volume (103), 106155.
- Kudryashov, N. A. (2020). Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. *Optik*, Volume (212), 164750.
- Kudryashov, N. A. (2020). Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations. *Applied Mathematics and Computation*, Volume (371), 124972.
- Kudryashov, N. A. (2021). Model of propagation pulses in an optical fiber with a new law of refractive indices. *Optik*, Volume (248), 168160.

- Malik, A., Chand, F., Kumar, H. & Mishra, S. C. (2012). Exact solutions of the Bogoyavlenskii equation using the multiple (G'/G) -expansion method. *Computers & Mathematics with Applications*, Volume (64), Issue 9, 2850-2859.
- Milović, D., & Biswas, A. (2013). Bright and dark solitons in optical fibers with parabolic law nonlinearity. *Serbian Journal Of Electrical Engineering*, 10(3), 365-370.
- Mirzazadeh, M., Ekici, M., Sonmezoglu, A., Eslami, M., Zhou, Q., Kara, A. H., Milovic, D., Majid, F. B., Biswas, A. & Belic, M. (2016). Optical solitons with complex Ginzburg--Landau equation. *Nonlinear Dynamics*, Volume (85), 1979-2016.
- Razborova, P., Ahmed, B., & Biswas, A. (2014). Solitons, shock waves and conservation laws of Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8(2), 485.
- Russell, J. S. (1834). *Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 311-390, John Murray, London.
- Sonmezoglu, A., Ekici, M. & Biswas, A. (2021). Stationary optical solitons with cubic--quartic law of refractive index and nonlinear chromatic dispersion. *Physics Letters A*, Volume (410), 127541.
- Sucu, N., Ekici, M. & Biswas, A. (2021). Stationary optical solitons with nonlinear chromatic dispersion and generalized temporal evolution by extended trial function approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume (147), 110971.
- Susanto, H. & Malomed, B. A. (2021). Embedded solitons in second--harmonic--generating lattices. *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume (142), 110534.
- Triki, H., Crutcher, S., Yildirim, A., Hayat, T., Aldossary, O. M. & Biswas, A. (2012). Bright and dark solitons of the modified complex Ginzburg--Landau equation with parabolic and dual-power law nonlinearity. *Romanian Reports in Physics*, Volume (64), Number 2, 367-380.
- Triki, H., Kara, A. H., Biswas, A., Moshokoa, S. P. & Belic, M. (2016). Optical solitons and conservation laws with anti-cubic nonlinearity. *Optik*, 127(24), 12056-12062.

- Wang, M., Li, X. & Zhang, J. (2008). The (G'/G) -expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A, Volume* (372), 417-23.
- Wazwaz, A. M. (2016). Multiple soliton solutions and multiple complex soliton solutions for two distinct Boussinesq equations. *Nonlinear Dynamics, Volume* (85), 731-737.
- Wazwaz, A. M. (2018). Two new integrable fourth-order nonlinear equations: multiple soliton solutions and multiple complex soliton solutions. *Nonlinear Dynamics, Volume* (94), 2655-2663.
- Wazwaz, A. M. & L. Kaur. (2019). Complex simplified Hirota's forms and Lie symmetry analysis for multiple real and complex soliton solutions of the modified KdV--Sine-Gordon equation. *Nonlinear Dynamics, Volume*(95), 2209-2215.
- Yalçı, A.M. & Ekici, M. (2022). Stationary optical solitons with complex Ginzburg-Landau equation having nonlinear chromatic dispersion. *Optical and Quantum Electronics, In press*.
- Yan, Z. (2006). Envelope compactons and solitary patterns. *Physics Letters A, Volume* (355), Issue 3, 212-215.
- Yan, Z. (2006). Envelope compact and solitary pattern structures for the equations. *Physics Letters A. Volume* (357), Issue 3, 196-203.
- Yan, Y., Liu, W., Zhou, Q. & Biswas, A. (2020). Dromion-like structures and periodic wave solutions for variable-coefficients complex cubic--quintic Ginzburg--Landau equation influenced by higher-order effects and nonlinear gain. *Nonlinear Dynamics, Volume* (99), 1313-1319.
- Yildirim, Y., Biswas, A., Ja'afar Mohamad Jawad, A., Ekici, M., Zhou, Q., Alzahrani, A. K. & Belic, M. R. (2020). Optical solitons with differential group delay for complex Ginzburg--Landau equation. *Results in Physics, Volume* (16), 102888.
- Zayed, E. M. E. (2009). New traveling wave solutions for higher dimensional nonlinear evolution equations using a generalized G'/G -expansion method. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Volume* (42), Number 19, 195202.

- Zayed, E. M. E. (2009). The (G'/G) -expansion method and its applications to some nonlinear evolution equations in the mathematical physics. *Journal of Applied Mathematics and Computing*.
- Zayed, E. M. E., Alngar, M. E. M., El-Horbaty, M., Biswas, A., Alshomrani, A. S., Ekici, M., Yildirim, Y. & Belic, M. R. (2020). Optical solitons with complex Ginzburg--Landau equation having a plethora of nonlinear forms with a couple of improved integration norms. *Optik, Volume* (207), 163804.
- Zayed, E. M. E., Alngar, M. E. M., Biswas, A., Ekici, M., Khan, S. & Alshomrani, A. S. (2021). Pure-cubic optical soliton perturbation with complex Ginzburg--Landau equation having a dozen nonlinear refractive index structures. *Journal of Communications Technology and Electronics, Volume* (66), 481-544.
- Zayed, E. M. E. & Gepreel, K. A. (2009). The (G'/G) -expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear PDEs in mathematical physics. *Journal of Mathematical Physics, Volume* (50), 013502–13.
- Zhang, J., Wei, X. & Lu, Y. (2008). A generalized (G'/G) -expansion method and its applications. *Physics Letters A, Volume* (372), 3653-8.
- Zhang, S., Tong, J. & Wang, W. (2008). A generalized (G'/G) -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients. *Physics Letters A, Volume* (372), 2254-7.
- Zhang, Z., Liu, Z., Miao, X. & Chen, Y. (2010). New exact solutions to the perturbed non-linear Schrödinger's equation with Kerr law nonlinearity. *Applied Mathematics and Computation. Volume* (2010), *Volume* (216), Issue 10, 3064-3072.
- Zhou, Q., Yao, D., Ding, S., Zhang, Y., Chen, F., Chen, F., ve Liu, X. (2013). Spatial optical solitons in fifth order and seventh order weakly nonlocal nonlinear media. *Optik, 124*(22), 5683-5686.

