



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE SİNGÜLER
KONFORM STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN
GENİŞLEMELERİ**

Erdal YOLCU

BURDUR, 2022

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE SİNGÜLER
KONFORM STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN
GENİŞLEMELERİ**

Erdal YOLCU

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2022

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Zaman Skalası Üzerinde Singüler Konform Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.././

Erdal YOLCU

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Hüseyin Tuna'ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ocak, 2022

Erdal YOLCU

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET....	iv
SUMMARY	v
1. GİRİŞ	- 1 -
2. GENEL BİLGİLER	- 2 -
2.1. Temel Kavramlar	3
2.2. Konform Kesirli Türevler	15
2.3. Nabla Konform Kesirli Türevler	24
2.4. Nabla Konform Kesirli İntegraller	34
3. MATERYAL VE YÖNTEM	- 41 -
3.1. Disipatif Genişlemeler	- 41 -
3.2. Lineer Bağıntılar	- 43 -
3.3. Sınır Değer Uzayları ve Disipatif Genişlemeler	- 47 -
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	- 50 -
5. SONUÇ	56
KAYNAKLAR	57

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
T	: Zaman Skalası
σ	: İleri Sıçrama Operatörü
ρ	: Geri Sıçrama Operatörü
T_α	: α . Konform Kesirli Mertebeden Türev
$\int$	: İntegral
f^Δ	: Delta Türev
f^∇	: Nabla Türev
$T_{\nabla,\alpha}(f)$	: Nabla Konform Türev
$\int f(t) \nabla_\alpha t$	: Nabla Konform İntegral

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**Zaman Skalası Üzerinde Singüler Konform Sturm-Liouville Operatörünün
Genişlemeleri**

Erdal YOLCU

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Ocak, 2022

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, sınır değer uzayı ve dissipatif genişlemelerin temel tanım ve özellikleri verildi.

Son olarak, zaman skalası üzerinde singüler konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville operatörünün maximal dissipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası üzerinde konform kesirli kalkülüs, Sturm-Liouville operatörü, simetrik operatör, kendine eş operatör, dissipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Extensions of singular conformable Sturm-Liouville operator on a time scale

Erdal YOLCU

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

January, 2022

In this study, firstly historical development of the topic is mentioned, some definitions and main results used in the work are given.

In the third section, basic definitions and properties of a boundary value space and dissipative extension are given.

Finally, a description of all maximal dissipative, accretive, self-adjoint and other extensions of singular conformable fractional Sturm-Liouville operator on time scales is given in terms of boundary conditions.

Keywords: Conformable fractional calculus on time scales, Sturm-Liouville operator, symmetric operators, self-adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions.

1. GİRİŞ

Zaman skalası kavramı 1988 yılında Stefan Hilger tarafından literatüre kazandırılmıştır (Hilger,1988). Hilger doktora tezinde ayırık kalkülüs ile sürekli kalkülüsü tek bir teori altında birleştirmiştir. Bu kavram yardımıyla diferansiyel denklemler teorisi ile fark denklemler teorisi tek bir çatı altında toplanmıştır. Literatürde zaman skalalarının pek çok uygulamaları vardır. Örneğin, böcek popülasyon modellerinde, ısı transferi çalışmalarında, borsa ve sinirsel ağ modellerinde zaman skalası kavramından yararlanılır. Bu konuda daha ayrıntılı bilgi için Bohner ve Peterson'un (Bohner ve Peterson, 2001, 2003) çalışmalarına bakılabilir.

Kesirli mertebeden kalkülüs günümüzde uygulamalı matematikçiler tarafından yoğun olarak çalışılan alanlarından biridir. Yakın zamanlarda Khalil ve arkadaşları (Khalil vd, 2014) konform kesirli mertebeden türev kavramını tanımlamışlardır. Bu çalışmalarında konform kesirli mertebe türev tanımının adi türeve paralel olarak çarpım kuralı, bölüm kuralı vb özellikleri sağladığını göstermişlerdir. Daha sonra Abdeljawad (Abdeljawad, 2015) konform kesirli mertebe türev teorisini geliştirerek çeşitli özelliklerini ispatlamıştır. Al-Refai ve Abdeljawad (Al-Refai ve Abdeljawad, 2017) konform Sturm Liouville özdeğer problemi için temel sonuçları (özdeğerlerin reelliği, basitliği, farklı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonların ortogonalitesi vb) elde etmişlerdir. Allahverdiev ve arkadaşları (Allahverdiev vd., 2019) 2019 yılında yaptıkları çalışmada konform Sturm Liouville problemini ele almışlardır.

Benkhettou ve arkadaşları (Benkhettou vd,2016) konform kesirli mertebeden kalkülüsü zaman skalaları üzerine taşımışlardır. Zaman skalası üzerinde konform kesirli mertebeden türevin temel kavramlarını ispatlamışlardır. Benzer tanımlar Zhao ve Li (Zhao ve Li, 2016) tarafından da verilmiştir. Daha sonra Zhao ve arkadaşları (Zhao vd, 2016) Benkhettou ve arkadaşlarının (Benkhettou vd,2016) çalışmalarını genişleterek zaman skalaları üzerinde birim operatöre sahip konform delta türev kavramını vermiştir. 2019 yılında Bendouma ve Hammoudi (Bendouma ve Hammoudi, 2019) zaman skalaları üzerinde konform nabla türev kavramını vermiştir ve çeşitli özelliklerini araştırmışlardır. Gülşen ve arkadaşları (Gülşen vd, 2018) zaman skalası üzerinde konform Sturm Liouville denklemi için çözümlerin varlığını incelemişlerdir. Allahverdiev ve Tuna (Allahverdiev ve Tuna, 2021) zaman skalası üzerinde konform Sturm Liouville denkleminin ele alarak çeşitli özelliklerini ispatlamışlardır.

Simetrik operatörlerin genişleme teorisi operatörler teorisinin önemli uğraşı alanlarından biridir. Bu konuda ile ilgili temel sonuçlar 1929 yılında J. von Neumann (Von Neumann, 1929), tarafından elde edilmiştir. J. von Neumann hangi koşullarda simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeye sahip olduğu ve bu genişlemenin nasıl olacağını göstermiştir. Rellich (Rellich,1951), Krein (Krein, 1947-1952), Vishik (Vishik,1952), Birman (Birman,1956), Phillips (Phillips,1959), simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeleri üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır.

Lineer bağıntılar metodunu kullanarak simetrik operatörlerin genişlemesi 1969 yılında Rofe-Beketov (Rofe-Beketov,1969) tarafından verilmiştir. Bu metodu kullanarak simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler: Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk vd,1984), Bairamogly (Bairamogly,1984), Allahverdiev (Allahverdiev, 2013, 2014, 2016), Tuna (Tuna , 2013), Tuna ve Bayrak (Tuna ve Bayrak, 2018), Tuna ve Allahverdiev (Tuna ve Allahverdiev, 2018) ve Allahverdiev vd. (Allahverdiev vd., 2020) dir.

Disipatif lineer bağıntılar kullanılarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemeleri Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (Gorbachuk vd,1972) tarafından verildi. Daha sonraları birbirinden bağımsız olarak Bruk (Bruk,1976) ve Kochubei (Kochubei,1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk vd,1989) çalışmasına bakılabilir.

Bu tez çalışmasında, zaman skalaları üzerinde singüler durumda konform Sturm Liouville denklemi için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri verildi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. U , bir kompleks lineer uzay olmak üzere her $u, v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ her için aşağıdaki şartları sağlayan ve (u, v) ile gösterilen kompleks sayısına u ve v elemanlarının iç çarpımı ve U lineer uzayına da iç çarpım uzayı denir:

1. $(u, u) \geq 0; (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$
4. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$.

Ayrıca verilen bu özellikler gözönünde bulundurularak $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v)$ ve

$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de verilebilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.2. $(U, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $u \in U$ olsun. u vektörünün normu,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^2 \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.3. Bir $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} \quad (2.2)$$

normuna göre tam ise, yani $(U, (.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi U ' nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.4. K, H Hilbert uzayının herhangi bir lineer alt uzayı ($K \subseteq H$) olsun.

$$T: K \subseteq H \rightarrow H \quad (2.3)$$

dönüşümü, her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve her $u, v \in K$ için

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv \quad (2.4)$$

eşitliğini sağlanıyorsa, T dönüşümüne lineer operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.5. H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan bir T lineer operatörü verilsin.

Her $u \in H$ için

$$\|Tu\| \leq k\|u\| \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir. Bu k sayılarının en küçüğüne T sınırlı operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

T operatörünün normu alternatif olarak

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| \quad (2.6)$$

eşitliği ile de hesaplanabilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.6. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, T nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t) \quad (2.7)$$

eşitliğini sağlayan T^* operatörüne T ' nin eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in H$ vektörler kümesine T ' nin tanım kümesi denir ve $K(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

i. $(T^*)^* = T$

ii. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$

iv. $(T)^* = L^* T^*$

v. $\|T^*\| = \|T\|$ (T sınırlı iken)

(Naimark, 1968).

Tanım 2.1.7. $T^* = T$ ise, T ye kendine eş operatör adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.8. Tanım kümesin $D(A)$ olan bir A lineer operatörü için, $f, g \in D(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa, A operatörüne Hermitian denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.9. $A: D(A) \rightarrow H$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi H Hilbert uzayında yoğun olsun ($\overline{D(A)} = H$). Her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise, yani $A \subset A^*$ ise, A ya simetrik operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.10. $D(U)$, U operatörünün tanım bölgesi olmak üzere, her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

ise, U ya izometrik operatör denir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.11. Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi tüm H Hilbert uzayına eşit ise, U operatörüne üniter operatör denir.

Sınırlı bir izometrik U operatörünün üniter olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$U^*U = UU^* = I \text{ olmasıdır (Akhiezer and Glazman, 1963).}$$

Tanım 2.1.12. T lineer operatörünün $\mathcal{D}(T)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $h \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$\operatorname{Im}(Th, h) \geq 0 \tag{2.8}$$

ise, T lineer operatörüne dissipatif (dissipative) operatör denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.1.13. Reel (Gerçel) sayıların keyfi boş olmayan kapalı alt kümelerine zaman skalası denir. Zaman skalası T ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.1.14. Reel (Gerçel) sayılar ($\mathbb{R}$), Tam sayılar ($\mathbb{Z}$), Doğal sayılar ($\mathbb{N}$) ve $[2, 5]$ kapalı alt aralığı bir zaman skalasına örnek oluştururken Rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$), İrrasyonel sayılar ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$), Kompleks sayılar ($\mathbb{C}$) ve $(1, 3)$ açık aralığı zaman skalasına örnek oluşturmazlar.

(Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.15. $t \in T$ olmak üzere $\sigma: T \rightarrow T$ operatörü ileri sıçrama operatörüdür ve

$$\sigma(t) = \sup \{s \in T: s > t\}$$

şeklinde tanımlanır. (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.16. $t \in T$ olmak üzere; $\rho: T \rightarrow T$ operatörü geri sıçrama operatörüdür ve

$$\rho(t) = \sup \{s \in T: s < t\}$$

şeklinde tanımlanır. (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.17. Graininess fonksiyonları $\mu, \vartheta: T \rightarrow (0, \infty)$, $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ve

$$\vartheta(t) = t - \rho(t), \forall t \in T \text{ ile tanımlanır. (Bohner ve Peterson 2001, 2003).}$$

Tanım 2.1.18. $t \in T$ olsun. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t ye sağ yayılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise t ye sol yayılmış nokta denir. Eğer $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise $t \in T$ noktasına ayırık(izole) nokta denir. (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.19. $t \in T$ olsun. Eğer $t < \sup T$ ve $\sigma(t) = t$ ise t ye sağ yoğun nokta,

$t > \inf T$ ve $\rho(t) = t$ ise t ye sol yoğun nokta denir. (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.20. T zaman skalası sol yayılmış maksimum değer M ' ye sahip ise, türevlenebilirlik bölgesi $T^K = T - \{M\}$ dir. Diğer durumda $T^K = T$ şeklindedir.

T zaman skalası sağ yayılmış maksimum değer m ' ye sahip ise, türevlenebilirlik bölgesi

$T_K = T - \{m\}$ dir. Diğer durumda $T_K = T$ şeklindedir. (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.21. $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde tanımlı ileri sıçrama fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.22. $v: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde tanımlı geri sıçrama fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$v(t) = t - \rho(t) \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.23. Eğer $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ yayılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ 'ye soldan yayılmış nokta denir. Eğer

$$\rho(t) < t < \sigma(t) \quad (2.11)$$

ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına ayırık(izole) nokta denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.24. Eğer $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağdan yoğun nokta, $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye soldan yoğun nokta denir. Eğer

$$\rho(t) = t = \sigma(t) \quad (2.12)$$

ise $t \in \mathbb{T}$ ye hem sağ hem de sol yoğun nokta denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.25. $\mathbb{T}$ zaman skalası soldan yayılmış maksimum değer M ' ye sahip ise türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$ dir. Diğer durumlarda $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ şeklindedir.

$\mathbb{T}$ zaman skalası sağdan yayılmış minimum değer m ye sahip ise türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}_K = \mathbb{T} - \{m\}$ dir. Diğer durumlarda $\mathbb{T}_K = \mathbb{T}$ şeklindedir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.26. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $f^\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $f^\rho(t) = f(\rho(t))$ şeklinde tanımlıdır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.27. $U \subset \mathbb{T}$ olmak üzere herhangi bir $\delta > 0$ için

$$U(t) = \{s \in \mathbb{T}: |s - t| < \delta\}$$

biçiminde tanımlanan $U(t)$ kümesine t ' nin δ -komşuluğu denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.28. $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $t \in U(t_0)$ için

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu varsa $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasında süreklidir denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.29. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ için t noktasının $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğunda f^Δ türevi her

$$s \in U \text{ için } |f(\sigma(t) - f(s)) - f^\Delta(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

şeklinde tanımlanır. Burada f^Δ türevine delta (Hilger) türevi denir.

Eğer her $t \in \mathbb{T}^K$ için f fonksiyonu f^Δ türevlenebiliyorsa $\mathbb{T}^K$ kümesine delta (Hilger) türevlenebilirdir denir. Yani

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.30. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ için t noktasının $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğunda f^∇ türevi

her $s \in U$ için

$$|f(\rho(t) - f(s)) - f^\nabla(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|$$

şeklinde tanımlanır. Burada f^∇ türevine nabla türevi denir.

Eğer her $t \in \mathbb{T}_K$ için f fonksiyonu f^∇ türevlenebiliyorsa $\mathbb{T}_K$ kümesine nabla türevlenebilirdir denir. Yani

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(\rho(t))}{s - \rho(t)}$$

şeklinde tanımlanır.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{T}^K = \mathbb{T}$ olduğundan her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $f^\Delta = f'$ şeklindedir. Benzer şekilde

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $f^\nabla = f'$ şeklindedir

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\mathbb{T}^K = \mathbb{T}$ olduğundan $\forall t \in \mathbb{T}^K$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{\sigma(t) \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{(t+1) - t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^\Delta = \Delta f$ şeklindedir. Benzer şekilde

$$f^\nabla(t) = \lim_{\rho(t) \rightarrow t} \frac{f(t) - f(\rho(t))}{t - \rho(t)} = \frac{f(t) - f(t-1)}{t - (t-1)} = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^\nabla = \nabla f$ şeklindedir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.31. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}^{K^2} = (\mathbb{T}^K)^K$ üzerinde ikinci mertebeden delta (Hilger) türevi

$$f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta: \mathbb{T}^{K^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır. n . mertebeden delta (Higher) türevi $f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{K^n} \rightarrow \mathbb{R}$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}_0$ için $\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$ şeklinde olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.32. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}'$ deki sağdan yoğun noktalarda sağdan, soldan yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona düzenli fonksiyon denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.33. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}'$ deki sağdan yoğun noktalarda sürekli ve soldan yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona sağdan yoğun sürekli ya da rd-sürekli fonksiyon denir .

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere rd-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{rd} := C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir olmak üzere türevi rd-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{rd}^1 := C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

şeklinde ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.34. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}'$ deki soldan yoğun noktalarda sürekli ve sağdan yoğun noktalarda sağdan limiti varsa bu fonksiyona sol yoğun sürekli ya da ld-sürekli fonksiyon denir.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere ld-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$$C_{ld} := C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir olmak üzere türevi ld-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$$C_{ld}^1 := C_{ld}^1(\mathbb{T}) = C_{ld}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde gösterilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1.35. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

- i. f sürekli ise rd-sürekli.
- ii. f rd-sürekli ise düzenlidir.
- iii. İleri sıçrama operatörü σ rd-sürekli.
- iv. f düzenli ya da rd-sürekli ise f^σ fonksiyonu da düzenli ya da rd-sürekli.
- v. f sürekli olsun. Eğer $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli ya da rd-sürekli ise $f \circ g$ fonksiyonu da bu özelliğe sahiptir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1.36. Kompakt aralık üzerinde her düzenli fonksiyon sınırlıdır.

İspat. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|f(t_n)| > 0 \text{ ve } t_n \in [a, b], \{t_n: n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$$

olduğundan bir $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ yakınsak alt dizisi vardır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0 \quad t_0 \in [a, b] \text{ ve } \{t_n: n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T} \quad (2.13)$$

ve $\mathbb{T}$ kapalı olduğundan $t_0 \in \mathbb{T}$ dir. (2.13) den dolayı t_0 ayrık(izole) nokta değildir ve t_0 aşağıdan ya da yukarıdan yaklaşan bir alt dizi vardır. Her bir durum için $t \rightarrow t_0$ iken $f(t)$ nin limiti düzenlilikten dolayı sonlu olmak zorundadır. Bu ise bir çelişkidir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.37. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $D \subset \mathbb{T}^K$ olmak üzere $\mathbb{T}^K \setminus D$ ve $\mathbb{T}$ nin sağdan yayılımlı elemanlarını kapsayan ve $\forall t \in D$ için f türevlenebilir ise D ile ön türevlenebilir denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Sonuç 2.1.38. f ve g fonksiyonları D ile ön türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

i. Eğer $U, s, r \in \mathbb{T}$ noktaları ile kompakt aralık ise

$$|f(s) - f(r)| \leq \sup_{t \in U^K \cap D} \{|f^\Delta(t)|\} |s - r|$$

olur.

ii. Eğer her $t \in D$ için $f^\Delta(t) = 0$ ise f sabit fonksiyondur.

iii. Eğer her $t \in D$ için $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için $g(t) = f(t) + C$ olur. Burada C bir sabittir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.39. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Eğer $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^K$ üzerinde delta (Hilger) türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^K$ için $F^\Delta(t) = f^\Delta(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun delta-anti türevi veya ilkeli denir.

Eğer f fonksiyonun Δ -anti türevi varsa f fonksiyonuna Δ -integrallenebilir fonksiyon denir.

$a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.40. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Eğer $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_K$ üzerinde nabla türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}_K$ için $F^\nabla(t) = f^\nabla(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun nabla-anti türevi veya ilkeli denir.

Eğer f fonksiyonun ∇ -anti türevi varsa f fonksiyonuna ∇ -integrallenebilir fonksiyon denir.

$a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t) \nabla t = F(b) - F(a)$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1.41. Her rd-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1.42. Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^K$ ise

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t) f(t) \text{ olur.}$$

İspat. Teorem 2.3.4. gereğince f fonksiyonunun F anti-türevi vardır. O zaman

$$\begin{aligned}
\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta t &= F(\sigma(t)) - F(t) \\
&= \mu(t) F^\Delta(t) \\
&= \mu(t) f(t)
\end{aligned}$$

elde edilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1.43. Her ld-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.1.44. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $a \neq 1$ ise

$\int a^t \Delta(t)$ integralini hesaplayalım.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^\Delta = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1}-a^t}{a-1} = a^t \text{ olduğundan}$$

$$\int a^t \Delta(t) = \frac{a^t}{a-1} + C \text{ elde edilir.}$$

burada C bir sabittir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.1.45. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$$

şeklinde hesaplanır.

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

iii. Eğer $[a, b]$ aralığı ayrık noktalar içeriyorsa ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a,b)} \mu(t)f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ - \sum_{t \in [a,b)} \mu(t)f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

iv. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk: k \in \mathbb{Z}\}$ ve $h > 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ - \sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1.46. Eğer $f^\Delta \geq 0$ ise f azalan değildir.

İspat: $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde $f^\Delta \geq 0$ ve $s, t \in \mathbb{T}$ için $a \leq s \leq t \leq b$ olsun. O zaman

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau)\Delta\tau \geq f(s)$$

olur. Dolayısıyla f artan değildir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1.47. Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ ise

i. $\int_a^b (f(t) + g(t))\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$

ii. $\int_a^b (\alpha f(t))\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$

iii. $\int_a^b f(t)\Delta t = - \int_b^a f(t)\Delta t$

iv. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$

v. $\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t$

vi. $\int_a^b f(t)g^\Delta\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t$

vii. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$

viii. Eğer $[a, b]$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$$

ix. Eğer $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$$

olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1.48. Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{ld}$ ise

i. $\int_a^b (f(t) + g(t)) \nabla t = \int_a^b f(t) \nabla t + \int_a^b g(t) \nabla t$

ii. $\int_a^b (\alpha f(t)) \nabla t = \alpha \int_a^b f(t) \nabla t$

iii. $\int_a^b f(t) \nabla t = - \int_b^a f(t) \nabla t$

iv. $\int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^b f(t) \nabla t + \int_c^b f(t) \nabla t$

v. $\int_a^b f(\rho(t)) g^\nabla \nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t) g(t) \nabla t$

vi. $\int_a^b f(t) g^\nabla \nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t) g(\rho(t)) \nabla t$

vii. $\int_a^a f(t) \nabla t = 0$

viii. Eğer $[a, b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise

$$\left| \int_a^b f(t) \nabla t \right| \leq \int_a^b g(t) \nabla t$$

ix. Eğer $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla t \geq 0$$

olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

2.2 Konform Kesirli Türev

Bu bölümde zaman skalaları üzerinde konform kesirli delta türev kavramı ve özellikleri verilecektir. $\mathbb{T}$ zaman skalası, $t \in \mathbb{T}$ ve $\delta > 0$ olsun. t 'nin δ komşuluğunu

$$V_t :=]t - \delta, t + \delta[\cap \mathbb{T} \text{ olarak tanımlayacağız.}$$

Tanım 2.2.1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}^K$ ve $\alpha \in]0,1]$ olsun. $t > 0$ için öyle bir $T_\alpha(f)(t)$ sayısı tanımlayalım ki herhangi $\varepsilon > 0$ verildiğinde δ komşuluğunda t 'nin $V_t \subset \mathbb{T}$ için

$\delta > 0$ olsun, öyle ki

$$\forall s \in V_t, |[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

$T_\alpha(f)(t), t$ 'de f 'nin α . mertebeden konform kesirli türevi olarak adlandırılır.

$t = 0$ için konform kesirli türevi $T_\alpha(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T_\alpha(f)(t)$ olarak tanımlayacağız. (Benkhettou vd., 2016).

Uyarı 2.2.2. $\alpha = 1$, o zaman Tanım 2.2.1'den delta zaman skalasının türevi elde edilir.

$\alpha = 0$ mertebeden konform kesirli türevi $T_0(f) = f$ operatörüyle tanımlayacağız.

Uyarı 2.2.3. Çalışma boyunca $[f(t)]^\alpha = T_\alpha(f)(t)$ notasyonunu kullanacağız.

Teorem 2.2.4. $\alpha \in]0,1]$ ve $\mathbb{T}$ zaman skalası olsun. Kabul edelim ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. Bunu izleyen özelliklere devam edelim.

i. $f, t > 0$ için α . mertebeden konform kesirli türevlenebilirse o zaman f, t 'de süreklidir.

ii. f, t 'de sürekli ve t sağdan dağınık ise, o zaman f, t 'de α . mertebeden türevlenebilirdir.

$$T_\alpha(f)(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} \quad (2.14)$$

iii. t sağdan yoğun ise, o zaman f, t 'de α . mertebeden konform kesirli türevlenebilirdir ancak ve ancak $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}$ gibi sonlu bir sayı vardır.

Bu durumda

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \quad (2.15)$$

iv. f, t 'de α . mertebeden kesirli türevlenebilirse

$$f(\sigma(t)) = f(t) + (\mu(t))t^{1-\alpha}T_\alpha(f)(t)$$

(Benkhettou vd., 2016).

Lemma 2.2.5. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}, c \in \mathbb{R}$ için, $f(t) = c$ tarafından tanımlanırsa o zaman $T_\alpha(f)(t) = (c)^{(\alpha)} = 0$.

İspat. t sağdan dağılmış ise, o zaman Teorem 2.2.4'in (ii) öncülü gereği

$$T_\alpha(f)(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = 0. \text{ Aksi taktirde } t \text{ sağdan yoğun ve Teorem 2.2.4'in (iii) öncülü gereği } T_\alpha(f)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{c-c}{t-s} t^{1-\alpha} = 0$$

(Benkhettou vd., 2016).

Lemma 2.2.6. Tüm $t \in \mathbb{T}$ için $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t$ şeklinde tanımlıysa o zaman

$$T_\alpha(f)(t) = t^{(\alpha)} = \begin{cases} t^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \text{ ise,} \\ 1, & \alpha = 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

İspat. Teorem 2.2.4'in (iv) öncülü gereği

$$\sigma(t) = t + \mu(t)t^{\alpha-1}T_\alpha(f)(t), \mu(t) = \mu(t)t^{\alpha-1}T_\alpha(f)(t) \text{ takip eder.}$$

$$\mu(t) \neq 0 \text{ ise, } T_\alpha(f)(t) = t^{\alpha-1} \text{ ve istenilen ilişki kanıtlanır.}$$

Farz edelim ki $\mu(t) = 0, \sigma(t) = t$ olsun. Bu durumda t sağdan yoğun Teorem 2.2.4'in (iii) öncülü gereği $T_\alpha(f)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{t-s}{t-s} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha}$.

Bu yüzden $\alpha = 1$ ise o zaman $T_\alpha(f)(t) = 1, 0 < \alpha < 1$ ise $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}$.

Şimdi kabullerimizi $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}, h > 0$ olmak üzere iki sınıf için düşünelim

(Benkhettou vd., 2016).

Sonuç 2.2.7. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $t \in \mathbb{R}$ noktası için α . mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyonu için gerek ve yeter koşul $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} t^{1-\alpha}$ limiti sonlu bir sayıdır. Bu durumda

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} t^{1-\alpha}$$

İspat. Burada $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için tüm noktalar sağdan yoğundur. Sonuç Teorem 2.2.4'in (iii) öncülünü takip eder

(Benkhettou vd., 2016).

Sonuç 2.2.8. $h > 0$ olsun. $f: h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ise, o zaman $f, t \in h\mathbb{Z}$ için, α . mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilirdir ki

$$T_\alpha(f)(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} t^{1-\alpha} \quad (2.16)$$

(Benkhettou vd., 2016).

İspat. Burada $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ve tüm noktalar sağdan dağınıktır. Sonuç Teorem 2.2.4'in (iii) öncülünü takip eder

(Benkhettou vd., 2016).

Teorem 2.2.9. $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha$. mertebeden sürekli konform kesirli diferansiyellenebilir olsun. O zaman

- i. $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ konform kesirli diferansiyellenebilir
 $T_\alpha(f + g) = T_\alpha(f) + T_\alpha(g)$.
- ii. Herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $\lambda f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ konform kesirli diferansiyellenebilir
 $T_\alpha(\lambda f) = \lambda T_\alpha(f)$.
- iii. f ve g sürekli ise çarpımları da $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ konform kesirli diferansiyellenebilir
 $T_\alpha(fg) = T_\alpha(f)g + (f \circ \sigma)T_\alpha(g) = T_\alpha(f)(g \circ \sigma) + fT_\alpha(g)$.
- iv. f sürekli ise, $\frac{1}{f}$ konform kesirli diferansiyellenebilir
 $T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{T_\alpha(f)}{f(f \circ \sigma)}, f(t)f(\sigma(t)) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}^K$ geçerlidir.
- v. f ve g sürekli ise $\frac{f}{g}$ konform kesirli diferansiyellenebilir
 $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = -\frac{T_\alpha(f)g - fT_\alpha(g)}{g(g \circ \sigma)}, g(t)g(\sigma(t)) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}^K$ geçerlidir.

İspat. $\alpha \in]0,1]$ olsun ve $t \in \mathbb{T}^K$ için f ve g konform kesirli diferansiyellenebilir olsun.

i. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman t 'nin komşuluğunda olan V_t ve U_t vardır.

$$\forall s \in V_t, |[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|$$

ve

$$\forall s \in U_t, |[g(\sigma(t)) - g(s)]t^{1-\alpha} - T_\alpha(g)(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

$W_t = V_t \cap U_t$ olsun. O zaman $\forall s \in W_t$,

$$|[f + g](\sigma(t)) - [f + g](s)]t^{1-\alpha} - [T_\alpha(f)(t) + T_\alpha(g)(t)][\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

Bu yüzden $f + g, t$ 'de konform diferansiyellenebilir ve

$$T_\alpha(f + g)(t) = T_\alpha(f)(t) + T_\alpha(g)(t).$$

ii. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman t 'nin V_t komşuluğundaki tüm s 'ler için,

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

Bunu

$$\forall s \in V_t, |[(\lambda f)(\sigma(t)) - (\lambda f)(s)]t^{1-\alpha} - \lambda T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\lambda| |\sigma(t) - s|$$

takip eder. Bu yüzden $\lambda f, t$ 'de $T_\alpha(\lambda f) = \lambda T_\alpha(f)$ 'dir.

iii. t sağdan yoğun ise, o zaman

$$\begin{aligned}
T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \right] g(t) + \lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \right] f(s) \\
&= T_\alpha(f)(t)g(t) + T_\alpha(g)(t)f(t) \\
&= T_\alpha(f)(t)g(\sigma(t)) + T_\alpha(g)(t)f(t).
\end{aligned}$$

t sağdan dağılmış ise,

$$\begin{aligned}
T_\alpha(fg)(t) &= \left[\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} \right] g(\sigma(t)) + \left[\frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} \right] f(t) \\
&= T_\alpha(f)(t)g(\sigma(t)) + f(t)T_\alpha(g)(t).
\end{aligned}$$

f ve g fonksiyonlarının rolleri değiştirilerek diğer çarpım kuralı formülü takip eder.

iv. $T_\alpha\left(f\frac{1}{f}\right) = 1^\alpha = 0$ olduğundan (iii) gereği $T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)(t)f(\sigma(t)) + T_\alpha(f)(t)\frac{1}{f(t)} = 0$ olur. $f(\sigma(t)) \neq 0$ varsaydığımız için, $T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)(t) = -\frac{T_\alpha(f)(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$ elde edilir.

v. (ii) ve (iv)'den elde ettiklerimizi kullanırsak

$$\begin{aligned}
T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t) &= T_\alpha\left(f\frac{1}{g}\right)(t) = f(t)T_\alpha\left(\frac{1}{g}\right)(t) + T_\alpha(f)(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= \frac{T_\alpha(f)(t)g(t) - f(t)T_\alpha(g)(t)}{g(t)g(\sigma(t))}
\end{aligned}$$

(Benkhettou vd., 2016).

Örnek 2.2.10. $\alpha \in]0,1]$ ve $f(t) = t^m$ olsun. O zaman

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \sum_{p=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^{m-1-p} t^p$$

olur. t sağdan yoğun ise, o zaman

$$T_\alpha(f)(t) = mt^{m-\alpha}$$

olur. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\alpha = 1$ seçersek o zaman alışılmış türev

$$T_1(f)(t) = mt^{m-1} = f'(1) \text{ elde edilir}$$

(Benkhettou vd., 2016).

Örnek 2.2.11. $f(t) = (t - 1)^2$ ise, o zaman tüm $\alpha \in]0,1]$ için

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}[(\sigma(t) + 1)^2 + (\sigma(t) + 1)(t + 1) + (t + 1)^2]$$

(Benkhettou vd., 2016).

Örnek 2.2.12. $\alpha \in (0,1)$ olsun. Öyle ki $\mathbb{T} = \mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ ve

$\sigma(t) = t + 1, \mu(t) = 1$ ve $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, f(t) = g(t) = t$ olsun. O zaman

$$T_\alpha(f)(g(t))T_\alpha(g)(t) = t^{2(1-\alpha)} \text{ iken}$$

$$T_\alpha(f \circ g)(t) \neq T_\alpha(f)(g(t))T_\alpha(g)(t): T_\alpha(f \circ g)(t) = t^{1-\alpha}$$

(Benkhettou vd., 2016).

Teorem 2.2.13. $\alpha \in]0,1]$ olsun. $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli $t \in \mathbb{T}^K$ 'da α . mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilir olsun ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilirdir. O zaman $[t, \sigma(t)]$ gerçel aralığında c sabiti olsun ki

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(c))T_\alpha(g)(t) \quad (2.17)$$

İspat. $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. İlk olarak t sağdan dağılmış olsun. Bu durumda

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{\mu(t)} t^{1-\alpha}.$$

$g(\sigma(t)) = g(t)$ ise $T_\alpha(f \circ g)(t) = 0$ ve $T_\alpha(g)(t) = 0$ olur.

Bu yüzden (2.3)'den $[t, \sigma(t)]$ reel aralığında herhangi c sabiti için sağlanır.

Bu teoremden $\xi \in]\sigma(t), g(\sigma(t))]$

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{g(\sigma(t)) - g(t)} \cdot \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = f'(\xi)T_\alpha(g)(t).$$

$g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olduğu için $c \in [t, \sigma(t)]$ öyle ki $g(c) = \xi$ 'dir. Şimdi t sağdan yoğun olsun. Bu durumda

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)} \cdot \frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha}.$$

Bu teorem aracılığıyla burada $\xi \in]\sigma(t), g(\sigma(t))]$ vardır öyle ki

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \left\{ f'(\xi) \cdot \frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \right\}.$$

g 'nin sürekliliğinden $\lim_{s \rightarrow t} \xi_s = g(t)$ elde edilir. O zaman

$T_\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(t))T_\alpha(g)(t)$ olur. t sağdan yoğun olduğu için $c = t = \sigma(t)$ olur ve sonuç elde edilir (Benkhettou vd., 2016).

Tanım 2.2.14. $\mathbb{T}$ zaman skalası, $\alpha \in (n, n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$ olsun ve $f, t \in \mathbb{T}^K$, n defa delta türevlenebilir olsun. f 'nin α . mertebeden konform kesirli türevini

$T_\alpha(f)(t) := T_{\alpha-n}(f^{\Delta^n})(t)$ olarak tanımlayacağız. Notasyon olarak önceki gibi

$(f(t))^{(\alpha)} = T_\alpha(f)(t)$ kullanacağız (Benkhettou, 2015).

Teorem 2.2.15. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bunu takiben

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1+n-\alpha} f^{\Delta^{1+n}}(t). \quad (2.18)$$

İspat. f fonksiyonu n defa delta türevlenebilir olsun. $\alpha \in (n, n + 1]$ için $\beta \in (0, 1]$ vardır öyle ki $\alpha = n + \beta$ 'dir. Tanım 2.2.14 gereği $T_\alpha(f) = T_\beta(f^{\Delta^n})$.

Yüksek mertebeden delta türevin tanımından ve Teorem 2.2.4'deki (ii) ve (iii)'den

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\beta} (f^{\Delta^n})^\Delta(t)$$

(Benkhettou vd., 2016).

Tanım 2.2.16. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli fonksiyon olsun. O zaman f 'nin α –kesirli integrali

$$0 < \alpha \leq 1, \int f(t) \Delta^\alpha t := \int f(t) t^{\alpha-1} \Delta t \text{ olarak tanımlanır}$$

(Benkhettou vd., 2016).

Tanım 2.2.17. Farz edelim ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli fonksiyon olsun. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere mertebesi α olan f 'nin ifade edilen belirsiz α –kesirli integrali

$$F_\alpha(t) = \int f(t) \Delta^\alpha t$$

olarak tanımlanır. O zaman Cauchy α –kesirli integrali

$$\forall a, b \in \mathbb{T}, \int_a^b f(t) \Delta^\alpha t = F_\alpha(b) - F_\alpha(a)$$

olarak tanımlayabiliriz

(Benkhettou vd., 2016).

Örnek 2.2.18. $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \alpha = \frac{1}{2}$ ve $f(t) = t$ olsun. O zaman $\int_1^{10^{\frac{2}{3}}} f(t) \Delta^\alpha t = 6$

(Benkhettou vd., 2016).

Teorem 2.2.19. $\alpha \in (0,1]$ olsun. O zaman herhangi bir sağdan yoğun sürekli $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için öyle $F_\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ vardır ki

$$\forall t \in \mathbb{T}^K, T_\alpha(F_\alpha)(t) = f(t).$$

F_α fonksiyonu f 'nin söz konusu α – antitürevidir

(Benkhettou vd., 2016).

Teorem 2.2.20. $\alpha \in (0,1], a, b, c, d \in \mathbb{T}, \lambda \in \mathbb{R}$ ve f, g sağdan yoğun sürekli iki fonksiyon olsun. O zaman,

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta^\alpha t = \int_a^b f(t) \Delta^\alpha t + \int_a^b g(t) \Delta^\alpha t.$$

$$\int_a^b (\lambda f)(t) \Delta^\alpha t = \lambda \int_a^b f(t) \Delta^\alpha t.$$

$$\text{i. } \int_a^b f(t) \Delta^\alpha t = - \int_b^a f(t) \Delta^\alpha t.$$

$$\text{ii. } \int_a^b f(t) \Delta^\alpha t = \int_a^c f(t) \Delta^\alpha t + \int_c^b f(t) \Delta^\alpha t.$$

$$\text{iii. } \int_a^a f(t) \Delta^\alpha t = 0.$$

iv. $\forall t \in [a, b], g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|f(t)| \leq g(t) \text{ ise, } \left| \int_a^b f(t) \Delta^\alpha t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta^\alpha t.$$

v. $\forall t \in [a, b], f(t) > 0$ ise, $\int_a^b f(t) \Delta^\alpha t \geq 0$
(Benkhettou vd., 2016).

Teorem 2.2.21. $\mathbb{T}$ zaman skalası, $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{T}$ olsun.

$\forall t \in [a, b] \cap \mathbb{T}, T_\alpha(f)(t) \geq 0$ o zaman f fonksiyonu $[a, b] \cap \mathbb{T}$ 'de artan fonksiyondur
(Benkhettou vd., 2016).

Tanım 2.2.22. $h(\alpha)$ sürekli bir fonksiyon ve $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 1$ ve $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} h(\alpha) = 1$ kabul edelim.

$\mathbb{T}$ zaman skalası ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $t \in T^k$ için $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu α mertebeden konform delta kesirli diferansiyellenebilirdir öyle ki $T_\alpha(f^\Delta)(t)$ vardır. $\forall \epsilon > 0$ için t nin U komşuluğu vardır öyle ki tüm $s \in U$ için

$$|h(\alpha)f(t)\sigma(t) - s + (1 - h(\alpha))(f^\sigma(t) - f(s))\sigma^{1-\alpha} - T_\alpha(f^\Delta)(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon |\sigma(t) - s| \text{ dir.}$$

$T_\alpha(f^\Delta)(t)$ ifadesini α mertebeden konform delta kesirli türev olarak adlandıracağız ve f tüm T^k için konform delta kesirli diferansiyellenebilir ise f ye konform delta kesirli diferansiyellenebilir diyeceğiz.

T_k^k de α mertebeden konform delta kesirli diferansiyellenebilir bütün fonksiyonların ailesini $\mathfrak{S}$ sembolü ile göstereyim (Zhao vd., 2016).

Teorem 2.2.23. $\mathbb{T}$ zaman skalası , $t \in T^k$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun.

i. $f \in \mathfrak{S}$ ise f, t de süreklidir.

ii. f, t de sürekli ve t sağdan dağılmış is o zaman $f \in \mathfrak{S}$ ile

$$T_\alpha(f^\Delta)(t) = h(\alpha)f(t) + (1 - h(\alpha)) \frac{f^\sigma(t) - f(t)}{\mu(t)} \sigma^{1-\alpha}(t)$$

iii. f sağdan yoğun ise o zaman $f \in \mathfrak{S}$ ancak ve ancak

$$\lim_{s \rightarrow t} h(\alpha)f(t) + (1 - h(\alpha)) \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}$$

gibi sonlu bir sayı vardır.

Bu durumda

$$T_\alpha(f^\Delta)(t) = \lim_{s \rightarrow t} h(\alpha)f(t) + (1 - h(\alpha)) \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}$$

olur (Zhao vd., 2016).

Örnek 2.2.24. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ olarak tanımlansın. O zaman

$$T_\alpha(f^\Delta)(t) = h(\alpha)t + (1 - h(\alpha))\sigma^{1-\alpha}(t) \text{ olur.}$$

$\alpha = 1$ ise o zaman

$$T_\alpha(f^\Delta)(t) \equiv 1 \text{ dir (Zhao vd., 2016).}$$

Teorem 2.2.25. $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathfrak{S}$ olsun. O zaman

i. Herhangi λ_1, λ_2 sabitleri için $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in \mathfrak{S}$ ile

$$T_\alpha((\lambda_1 f + \lambda_2 g)^\Delta)(t) = \lambda_1 T_\alpha(f^\Delta)(t) + \lambda_2 T_\alpha(g^\Delta)(t) \text{ dir.}$$

ii. f ve g sürekli ise o zaman $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathfrak{S}$ ile

$$\begin{aligned} T_\alpha(fg)^\Delta(t) &= T_\alpha(f^\Delta)(t)g^\sigma(t) + f(t)T_\alpha(g^\Delta)(t) - h(\alpha)g(t)f^\sigma(t) \\ &= T_\alpha(g^\Delta)(t)f^\sigma(t) + g(t)T_\alpha(f^\Delta)(t) - h(\alpha)g(t)f^\sigma(t) \text{ olur.} \end{aligned}$$

iii. $f(t)f^\sigma(t) \neq 0$ ise o zaman $\frac{1}{f} \in \mathfrak{S}$ ile

$$T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{T_\alpha(f^\Delta)(t)}{f(t)f^\sigma(t)} + \frac{h(\alpha)}{f(t)} + \frac{h(\alpha)}{f^\sigma(t)} \text{ olur.}$$

iv. $g(t)g^\sigma(t) \neq 0$ ise o zaman $\frac{f}{g} \in \mathfrak{S}$ ile

$$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{T_\alpha(f^\Delta)(t)g(t) - f(t)T_\alpha(g^\Delta)(t)}{g(t)g^\sigma(t)} + h(\alpha)\frac{f(t)}{g(t)} \text{ olur. (Zhao vd., 2016).}$$

2.3 Nabla Konform Kesirli Türev

Bu bölümde zaman skalaları üzerinde nabla konform kesirli türev kavramı verilecektir. $\mathbb{T}$ keyfi zaman skalası ve $\alpha \in]0,1]$ olsun.

Tanım 2.3.1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $t \in \mathbb{T}_\kappa$ olsun. $t > 0$ için $T_{\nabla, \alpha}(f)(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır. Herhangi bir t nin $V_t \subset \mathbb{T}$ δ komşuluğu ($\delta > 0$) vardır öyleki $\forall s \in V_t, |[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$ sağlanır.

$T_{\nabla, \alpha}(f)(t)$, t noktasında f 'nin α . mertebeden nabla konform kesirli türevi olarak adlandırılır.

$t = 0$ için nabla konform kesirli türevi

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T_{\nabla, \alpha}(f)(t) \text{ olarak tanımlanır}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Uyarı 2.3.2. $\alpha = 1$ için $T_{\nabla, \alpha}(f) = f^\nabla(t)$ elde edilir.

Bu bölümün devamında aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

i. $T_{\nabla, \alpha}(f) = f_{\nabla}^{(\alpha)}$

ii. $C^\alpha([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) = \{f: [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R},$

$f, [a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $T_{\nabla, \alpha}(f) \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})\}$

iii. $C_{ld}^\alpha([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) = \{f: [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R},$

$f, [a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $T_{\nabla, \alpha}(f) \in C_{ld}([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})\}$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.3.3.

Farz edelim ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_\kappa$ olsun.

O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. f fonksiyonu $t > 0$ noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise t noktasında süreklidir.

ii. f , t noktasında sürekli ve t sol yayılmış ise f , t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyondur ve

$$T_{\nabla, \alpha}(f) = f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} \quad \text{dır.} \quad (2.19)$$

iii. t sol yoğun bir nokta olsun. O zaman f , t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir ancak ve ancak $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha}$ limiti var ve sonlu bir sayıdır. Bu durumda

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha} \quad \text{dır.} \quad (2.20)$$

iv. Eğer f , t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$f(\rho(t)) = f(t) - (v(t)) t^{\alpha-1} T_{\nabla, \alpha}(f)(t) \quad \text{dir.}$$

İspat. i. Kabul edelim f , t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

O zaman t 'nin bir $v(t)$ komşuluğu vardır, öyle ki

$$\left| (f(\rho(t)) - f(s)) t^{1-\alpha} - T_{\nabla, \alpha}(f)(t)(\rho(t) - s) \right| \leq \epsilon |\rho(t) - s|$$

$s \in V_t$ için sağlanır. Buradan

$\forall s \in V_t \cap]t - \epsilon, t + \epsilon]$ için

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq \left| (f(\rho(t)) - f(s)) - T_{\nabla, \alpha}(f)(t)(\rho(t) - s) t^{\alpha-1} \right| \\ &\quad + \left| (f(\rho(t)) - f(t)) \right| + \left| f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) \right| |\rho(t) - s| t^{\alpha-1} \end{aligned}$$

elde edilir ve t sol yoğun bir nokta olduğundan,

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq \left| (f(\rho(t)) - f(s)) - f^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - s)^{\alpha} \right| + \left| f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(t - s)^{\alpha} \right| \\ &\leq \epsilon \delta + |t^{\alpha-1}| |T_{\nabla, \alpha}(f)(t)| \delta \end{aligned}$$

dır.

$t > 0$ ve $s \rightarrow t$ için $\delta \rightarrow 0$ olduğundan f 'nin t noktasındaki sürekliliği görülür.

ii. f , t noktasında sürekli ve t 'nin sol yayılmış nokta olsun. Süreklilikten

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s} t^{1-\alpha} = \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - t} t^{1-\alpha} = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} \quad \text{dır.}$$

Buradan verilen, $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in]0,1]$ için, t 'nin bir V_t komşuluğu vardır öyleki

$$\forall s \in V_t \text{ için } \left| \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s} t^{1-\alpha} - \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} \right| \leq \varepsilon \text{ sağlanır.}$$

Buradan

$$\left| f(\rho(t)) - f(s) t^{1-\alpha} - \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} (\rho(t) - s) \right| \leq |\rho(t) - s| \text{ dır.}$$

Tanım-2.3.1 den (2.19) eşitliği elde edilir.

iii. t sol yoğun nokta ve f , t 'de α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.

$\varepsilon > 0$ verilsin. f , fonksiyonu t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon olduğundan t nin V_t komşuluğu vardır öyleki

$$\forall s \in V_t \text{ için } \left| [f(\rho(t)) - f(s)] t^{1-\alpha} - T_{\nabla, \alpha}(f)(t)(\rho(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\rho(t) - s| \text{ dir.}$$

$$\rho(t) = t \text{ olduğundan } \forall s \in V_t \text{ için } \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha} - T_{\nabla, \alpha}(f)(t) \right| \leq \varepsilon \text{ dir.}$$

$s \neq t$ için , istenen (2.20) eşitliği elde edilir.

Şimdi (2.20)'nin sağ tarafındaki limit var ve L 'ye eşit t yi sol yoğun nokta olarak alalım.

O zaman, t nin bir V_t komşuluğu vardır öyleki

$$\forall s \in V_t \text{ için}$$

$$\left| (f(t) - f(s)) t^{1-\alpha} - L(t - s)(t) \right| \leq \varepsilon |t - s| \text{ dir.}$$

t sol yoğun olduğundan

$$\left| (f(\rho(t)) - f(s)) t^{1-\alpha} - L(\rho(t) - s)(t) \right| \leq \varepsilon |\rho(t) - s| \text{ dir.}$$

Buradan bizi f nin t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir olduğu ve $T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = L$ sonucu elde edilir.

iv. Eğer t , sol yoğun nokta ise $\rho(t) = t$ yani $v(t) = 0$ dır.

$$f(\rho(t)) = (f)(t) = (f)(t) - v(t) T_{\nabla, \alpha}(f)(t) t^{1-\alpha} \text{ dır.}$$

Diğer taraftan, t sol yayılmış bir nokta yani $\rho(t) < t$ (iii) den

$$f(\rho(t)) = (f)(t) - v(t) t^{1-\alpha} \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} = f(t) - (v(t)) t^{1-\alpha} T_{\nabla, \alpha}(f)(t)$$

elde edilir

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Örnek 2.3.4.

i. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall t \in \mathbb{T}, c \in \mathbb{R}$ için $f(t) = c$ ile tanımlansın.

O zaman

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = (c)_{\nabla}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{dır.}$$

ii. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(t) = t$ ile tanımlansın.

O zaman

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = (t)_{\nabla}^{(\alpha)} = \begin{cases} t^{1-\alpha} & ; \alpha \neq 1 \\ 1 & ; \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{dır}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem-2.3.5. $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar

i. O zaman $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplam fonksiyonunda α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$$T_{\nabla, \alpha}(f + g) = T_{\nabla, \alpha}(f) + T_{\nabla, \alpha}(g) \quad \text{dir.}$$

ii. Keyfi $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$$T_{\nabla, \alpha}(\lambda f) = \lambda T_{\nabla, \alpha}(f) \quad \text{dir.}$$

iii. f ve g sürekli fonksiyonlar olsun, o zaman $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çarpım fonksiyonunda α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$$T_{\nabla, \alpha}(fg) = T_{\nabla, \alpha}(f)g + f^{\rho} T_{\nabla, \alpha}(g) = T_{\nabla, \alpha}(f)g^{\rho} + f T_{\nabla, \alpha}(g) \quad \text{dir.}$$

iv. f fonksiyonu sürekli olsun, o zaman $\frac{1}{f}$ fonksiyonunda α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$$\forall t \in \mathbb{T}_K, f(t)f^{\rho}(t) \neq 0 \quad \text{için} \quad T_{\nabla, \alpha}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{T_{\nabla, \alpha}(f)}{ff^{\rho}} \quad \text{dır.}$$

v. f ve g sürekli fonksiyonlar olsunlar, o zaman $\frac{f}{g}$ fonksiyonunda α mertebeden nablo konform kesirli diferansiyellenebilir ve

$$\forall t \in \mathbb{T}_K, g(t)g^\rho(t) \neq 0 \text{ için } T_{\nabla,\alpha} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{T_{\nabla,\alpha}(f)g + fT_{\nabla,\alpha}(g)}{gg^\rho} \text{ dir.}$$

İspat. Kabul edelim f ve g fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_K$ için α mertebeden nablo konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

i. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman t 'nin V_t ve U_t komşulukları vardır öyleki

$$\forall s \in V_t \text{ için } \left| [f(\rho(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - T_{\nabla,\alpha}(f)(t)(\rho(t) - s) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\rho(t) - s|$$

$$\forall s \in U_t \text{ için } \left| [g(\rho(t)) - g(s)]t^{1-\alpha} - T_{\nabla,\alpha}(g)(t)(\rho(t) - s) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\rho(t) - s|$$

$W_t = V_t \cap U_t$ olsun. O zaman $s \in W_t$

$$\left| [(f+g)(\rho(t)) - (f+g)(s)]t^{1-\alpha} - [T_{\nabla,\alpha}(f)(t) + T_{\nabla,\alpha}(g)(t)](\rho(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|$$

dir.

Böylece, $f + g$, t noktasında α mertebeden nablo konform kesirli diferansiyellenebilir ve $T_{\nabla,\alpha}(f+g)(t) = T_{\nabla,\alpha}(f)(t) + T_{\nabla,\alpha}(g)(t)$

ii. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman t' nin bir V_t komşuluğundaki bütün s' ler için

$$\left| [f(\rho(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - T_{\nabla,\alpha}(f)(t)(\rho(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\rho(t) - s| \text{ dir.}$$

Buradan $\forall s \in V_t$ için

$$\left| [(\lambda f)(\rho(t)) - (\lambda f)(s)]t^{1-\alpha} - T_{\nabla,\alpha}(\lambda f)(t)(\rho(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\lambda| |\rho(t) - s| \text{ dir.}$$

Yani λf , t noktasında α mertebeden nablo konform kesirli diferansiyellenebilir ve

$$T_{\nabla,\alpha}(\lambda f) = \lambda T_{\nabla,\alpha}(f) \text{ sağlanır.}$$

iii. t sol yayılmış nokta olsun, o zaman

$$T_{\nabla,\alpha}(fg)(t) = \left[\frac{(f)(t) - (f)(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} \right] g(\rho(t)) + \left[\frac{(g)(t) - (g)(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} \right] f(t)$$

$$= T_{\nabla, \alpha}(f)(t)g(\rho(t)) + f(t)T_{\nabla, \alpha}(g)(t)$$

Eğer t sol yoğun nokta ise, o zaman

$$T_{\nabla, \alpha}(fg)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{f(t)-f(s)}{t-s} t^{1-\alpha} \right] g(t) + \lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{g(t)-g(s)}{t-s} t^{1-\alpha} \right] f(s)$$

$$= T_{\nabla, \alpha}(f)(t)g(t) + T_{\nabla, \alpha}(g)(t)f(t) = T_{\nabla, \alpha}(f)(t)g(\rho(t)) + T_{\nabla, \alpha}(g)(t)f(t) \quad \text{dır.}$$

iv. Örnek 2.3.1 (i) den $T_{\nabla, \alpha} \left(f \cdot \frac{1}{f} \right) (t) = (1)_{\nabla}^{(\alpha)} = 0$ dır.

Öyleyse (iii) den

$$T_{\nabla, \alpha} \left(\frac{1}{f} \right) (t) f(\rho(t)) + T_{\nabla, \alpha}(f)(t) \frac{1}{(f)(t)} = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

$(f)(t)f^{\rho}(t) \neq 0$ kabulümüzden

$$T_{\nabla, \alpha} \left(\frac{1}{f} \right) (t) = - \frac{T_{\nabla, \alpha}(f)(t)}{f(t)f(\rho(t))} \quad \text{dır.}$$

v. (ii) ve (iv)'i kullanarak

$$\begin{aligned} T_{\nabla, \alpha} \left(\frac{f}{g} \right) &= T_{\nabla, \alpha} \left(f \cdot \frac{1}{g} \right) (t) = (f)(t) T_{\nabla, \alpha} \left(\frac{1}{g} \right) (t) + T_{\nabla, \alpha}(f)(t) \frac{1}{g(\rho(t))} \\ &= \frac{T_{\nabla, \alpha}(f)(t)g(t) - f(t)T_{\nabla, \alpha}(g)(t)}{g(t)g(\rho(t))} \end{aligned}$$

elde edilir

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.3.6. c bir sabit olsun, $m \in \mathbb{N}$ ve $f(t) = (t - c)^m$ olsun. O zaman

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{m-1} (t - c)^{m-1-i} (\rho(t) - c)^i \quad \text{dir.} \quad (2.21)$$

Eğer $c=0$ ise

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = (t^m)_{\nabla}^{(\alpha)} = t^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{m-1} (t)^{m-1-i} (\rho(t))^i \quad \text{dir.}$$

İspat. İlk formülü tümevarım yöntemi ile kanıtlıyalım.

Eğer $m = 1$ için, $f(t) = t - c$ olur. Örnek 2.3.1 ve Teorem 2.3.5 (i)'den $T_{\nabla, \alpha}(f)(t)t^{1-\alpha}$ sağlanır.

Şimdi varsayalım ki $f(t) = (t - c)^m$ için

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{m-1} (t - c)^{m-1-i} (\rho(t) - c)^i \text{ doğru olsun.}$$

$\mathcal{F}(t) = (t - c)^{m+1} = (t - c)f(t)$ dersek, Teorem 2.3.5 (iii) elde edilir.

$$\mathcal{F}(t)^{(\alpha)} = T_{\nabla, \alpha}(t - c)f(\rho(t)) + T_{\nabla, \alpha}(f)(t)(t - c) = t^{1-\alpha} \sum_{i=0}^m (t - c)^{m-p} (\rho(t) - c)^i$$

Buradan ispat tamamlanır.

Eğer $c=0$ ise

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{m-1} (t)^{m-1-i} (\rho(t))^i \text{ dir.}$$

Eğer t sol yoğun nokta ise $T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = mt^{m-\alpha}$ dır

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.3.7. (Zincir kuralı) Farz edelimki $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_K$ noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

O zaman $[\rho(t), t]$ reel aralığında bir c noktası vardır öyleki

$$T_{\nabla, \alpha}(f \circ g)(t) = f'(g(c)) T_{\nabla, \alpha}(g)(t) \quad \text{dir.} \quad (2.22)$$

İspat. $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. İlk önce t 'yi sol yayılmış alalım.

Bu durumda

$$T_{\nabla, \alpha}(f \circ g)(t) = \frac{f(g(t)) - f(g(\rho(t)))}{v(t)} t^{1-\alpha} \text{ dir.}$$

Eğer $g(\rho(t)) = g(t)$ ise o zaman $T_{\nabla, \alpha}(f \circ g)(t) = 0$ ve $T_{\nabla, \alpha}(g)(t) = 0$ dır.

Buradan (2.22), $[\rho(t), t]$ reel aralığındaki herhangi bir c için geçerlidir.

Şimdi $g(\rho(t)) \neq g(t)$ kabul edelim.

ortalama değer teoremi ile

$$T_{\nabla, \alpha}(f \circ g)(t) = \frac{f(g(\rho(t))) - f(g(t))}{g(\rho(t)) - g(t)} \cdot \frac{g(t) - g(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} = f'(\xi) T_{\nabla, \alpha}(g)(t)$$

dir.

Burada ξ , $g(\rho(t))$ ve $g(t)$ arasındadır. $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olduğundan $c \in [\rho(t), t]$ vardır öyleki $g(c) = \xi$ vardır, buda istenen sonucu verir. Şimdi t 'nin sol yoğun olduğu durumu ele alalım. Bu durumda;

$$T_{\nabla, \alpha}(f \circ g)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)} \cdot \frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \text{ dir.}$$

Ortalama değer teoremi ile $g(\rho(t))$ ve $g(t)$ arasında ξ_s vardır, öyle ki

$$T_{\nabla, \alpha}(f \circ g)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \left\{ f'(\xi_s) \frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \right\} \text{ sağlanır.}$$

g 'nin sürekliliğinden, $\lim_{s \rightarrow t} \xi_s = g(t)$ elde edilir. O zaman

$$T_{\nabla, \alpha}(f \circ g)(t) = f'(g(t)) T_{\nabla, \alpha}(g)(t) \text{ dir.}$$

t sol yoğun olduğundan $c = t = \rho(t)$ elde edilir

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Tanım 2.3.8. $\mathbb{T}$ bir zaman skalsı olsun. $\alpha \in (m, m + 1]$, $m \in \mathbb{N}$

ve f fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_{K^m}$ noktasında m defa nabla diferansiyellenebilir olsun.

Bu durumda

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = T_{\nabla, \alpha-m}(f^{\nabla^m})(t) \text{ dir}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.3.9. $\alpha \in (m, m + 1]$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = t^{1+m-\alpha} f^{\nabla^{1+m}}(t) \text{ dir.} \quad (2.23)$$

İspat. f , m defa nabla diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

$\alpha \in (m, m + 1]$ için, $\alpha = m + \beta$ olacak şekilde bir $\beta \in (0, 1]$ vardır.

Tanım 2.3.8 kullanılarak $T_{\nabla, \alpha}(f) = T_{\nabla, \beta} f^{\nabla^m}$ elde edilir.

nabla türevinin tanımı ve Teorem 2.3.3 (ii) ve (iii)'den

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = t^{1-\beta} (f^{\nabla^m})^{\nabla}(t) \text{ elde edilir.}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Tanım 2.3.11. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathbb{T}$ 'nin sol yoğun noktalarında sürekli ve sağ yoğun noktalarında sağ taraftan limiti varsa f fonksiyonuna ld-sürekli denir ve $f \in C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ gösterilir.

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Tanım 2.3.12. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 'nin bir fonksiyon olsun.

$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. O zaman

$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = (T_{\nabla, \alpha}f_1(t), T_{\nabla, \alpha}f_2(t), \dots, T_{\nabla, \alpha}f_n(t))$ ile tanımlanır.

0 noktasındaki nabla konform kesirli türev $T_{\nabla, \alpha}(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f)(t)$ olarak tanımlanır.

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Tanım 2.3.13. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $\alpha \in (m, m + 1]$, $m \in \mathbb{N}$ olsun ve $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$

fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_K^m$ noktasında m defa nabla diferansiyellenebilir olsun.

O zaman α mertebeden f 'nin nabla kesirli türevi

$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = T_{\nabla, \alpha-m}(f^{\nabla^m})(t)$ tanımlanır.

Tanım 2.3.12, Teorem 2.3.3 ve Teorem 2.3.4'yi kullanarak aşağıdaki teoremler elde edebilir.

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.3.14. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $f, t > 0$ noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise f, t noktasında sürekli dir.

ii. t sol yayılmış bir nokta ve f, t noktasında sürekli bir fonksiyon olsun o zaman f, t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyondur ve

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)} t^{1-\alpha} \quad \text{dir.} \quad (2.24)$$

iii. Eğer t sol-yoğun nokta ise, o zaman f, t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyondur ancak

$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha}$ limiti var ve sonlu ise

Bu durumda

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha} \quad \text{dir.} \quad (2.25)$$

iv. f, t noktasında α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir ise

$$f(\rho(t)) = f(t) - (v(t))t^{\alpha-1} T_{\nabla, \alpha}(f)(t) \text{ elde edilir.}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.3.15. $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

α mertebesinde nabla konform kesirli türevlenebilir olduğunu varsayalım. Sonra;

i. $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ toplam fonksiyonu α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$$T_{\nabla, \alpha}(f + g) = T_{\nabla, \alpha}(f) + T_{\nabla, \alpha}(g) \text{ dir.}$$

ii. Keyfi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $\lambda f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$$T_{\nabla, \alpha}(\lambda f) = \lambda T_{\nabla, \alpha}(f) \text{ dir.}$$

(iii) f ve g sürekli ise, o zaman $f.g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ çarpım fonksiyonu α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$$T_{\nabla, \alpha}(f.g) = T_{\nabla, \alpha}(f)g + (f \circ \rho)T_{\nabla, \alpha}(g) = T_{\nabla, \alpha}(f)(g \circ \rho) + f T_{\nabla, \alpha}(g) \text{ dir.}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

2.4 Nabla Konform Kesirli İntegral

Bu bölümde zaman skalaları üzerinde nabla konform kesirli integral kavramı verilecektir.

Tanım 2.4.1.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. O zaman f 'nin nabla α -kesirli integrali

$$0 < \alpha \leq 1 \text{ için } \int f(t) t^{\alpha-1} \nabla t \text{ dir.}$$

$$\alpha = 1 \text{ için } \int f(t) \nabla_\alpha t = \int f(t) \nabla t \text{ dir}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Tanım 2.4.2.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. $\alpha \in (0, 1]$ için f nin α mertebeden nabla α -kesirli belirsiz integrali $F_{\nabla, \alpha}(t) = \int f(t) \nabla_\alpha t$ ile tanımlanır.

$\forall a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b f(t) \nabla_\alpha t = F_{\nabla, \alpha}(b) - F_{\nabla, \alpha}(a) \text{ dir}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Tanım 2.4.3. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$A, \mathbb{T}$ 'nin ∇ -ölçülü bir alt kümesi olsun.

f , fonksiyonu A üzerinde nabla α integrallenebilirdir ancak ve ancak $t^{\alpha-1} f(t)$ A üzerinde

integrallenebilirdir. Ayrıca $\int_A f(t) \nabla_\alpha t = \int_A t^{\alpha-1} f(t) \nabla t$ dir

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.4.4.

Keyfi $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir ld sürekli fonksiyonu için öyle bir $F_{\nabla, \alpha} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki $\forall t \in \mathbb{T}_K$ için $\mathbb{T}_{\nabla, \alpha}(F_{\nabla, \alpha})(t) = f(t)$ dir.

$F_{\nabla, \alpha}$ fonksiyonuna f 'nin bir nabla α -ilkeli denir.

İspat. $\alpha = 1$ durumu (Bohner, M., Peterson, A., 2001)'de kanıtlanmıştır. $\alpha \in (0, 1)$ olsun. f 'ninc ld sürekli olduğunu varsayalım. (Bohner, M., Peterson, A., 2003)'deki Teorem 1.16 dan f düzenli fonksiyondur. O zaman

$$F_{\nabla, \alpha}(t) = \int f(t) \nabla_\alpha t$$

$\mathbb{T}_K$ üzerinde nabla konform kesirli diferansiyellenebilir. (2.23) eşitliği ve Tanım 2.4.1 den

$$\mathbb{T}_{\nabla, \alpha}(F_{\nabla, \alpha})(t) = t^{1-\alpha} \left(F_{\nabla, \alpha}(t) \right)^{\nabla} = f(t) \quad t \in \mathbb{T}_K \text{ elde edilir.}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.4.5. $\alpha \in (0, 1]$, $a, b, c \in \mathbb{T}$ $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ ve f, g iki ld-süreklili fonksiyonlar olsun.

i.

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \gamma g(t)] \nabla_{\alpha} t = \lambda \int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t + \gamma \int_a^b g(t) \nabla_{\alpha} t$$

ii.

$$\int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t = - \int_b^a f(t) \nabla_{\alpha} t$$

iii.

$c \in (a, b)$ için;

$$\int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t = \int_a^c f(t) \nabla_{\alpha} t + \int_c^b f(t) \nabla_{\alpha} t$$

iv.

$$\int_a^a f(t) \nabla_{\alpha} t = 0$$

v. Eğer $t \in [a, b]$ için $|f(t)| \leq g(t)$ olacak şekilde bir $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa o zaman

$$\left| \int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t \right| \leq \int_a^b g(t) \nabla_{\alpha} t$$

dır.

vi. $\forall t \in [a, b]$ ve $f(t) > 0$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t \geq 0 \text{ dir.}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.4.6. Eğer $f : \mathbb{T}_K \rightarrow \mathbb{R}$ ld-süreklili bir fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. O zaman

$$\int_{\rho(t)}^t f(s) \nabla_{\alpha} s = v(t) f(t) t^{\alpha-1} \text{ dir.}$$

İspat. $f, \mathbb{T}_K$ üzerinde ld-süreklı bir fonksiyon olsun. O zaman f düzenli bir fonksiyondur.

Tanım 2.4.2 ve Teorem 2.4.1'e göre, bir f fonksiyonu $F_{\nabla, \alpha}$ ilkeli vardır öyleki

$$\int_{\rho(t)}^t f(s) \nabla_{\alpha} s = F_{\nabla, \alpha}(t) - F_{\nabla, \alpha}(\rho(t)) = \mathbb{T}_{\nabla, \alpha}(F_{\nabla, \alpha})(t) v(t) t^{\alpha-1} = v(t) f(t) t^{1-\alpha}$$

sağlanır.

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.4.7. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ üzerinde ld-süreklı bir fonksiyon olsun.

O zaman

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$\int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t = \int_a^b f(t) t^{\alpha-1} dt$ dir. Bu eşitliktekisag taraftaki integral (Khalil R., v.d, 2014)'de verilen konform kesirli integraldir.

Eğer $\alpha = 1$ ise bilinen Riemann integraline indirgenir.

ii. $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı izole noktalardan oluşsun, o zaman

$$\int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t = \begin{cases} \sum_{t \in (a, b]_{\mathbb{T}}} v(t) t^{\alpha-1} f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t \in (a, b]_{\mathbb{T}}} v(t) t^{\alpha-1} f(t) & a > b \end{cases}$$

dir.

iii. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ $h > 0$ dir.

$$\int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} h(kh)^{\alpha-1} f(kh) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} h(kh)^{\alpha-1} f(kh) & a < b \end{cases}$$

dir.

iv. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla_{\alpha} t = \begin{cases} \sum_{t=a+1}^b t^{\alpha-1} f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t=b+1}^a t^{\alpha-1} f(t) & a < b \end{cases}$$

dir

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Örnek 2.4.8.

i. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = ct^{1-\alpha}$ $t \in \mathbb{T}$, $c \in \mathbb{R}$ ile tanımlansın. O zaman

$$\int_a^b f(t) \nabla_\alpha t = c(b - a) \text{ dir.}$$

ii. Eğer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tüm $t \in \mathbb{R}$ için $f(t) = t$ ile tanımlanırsa, sonra

$$\int_a^b f(t) \nabla_\alpha t = \int_a^b t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha + 1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

iii. Eğer $f : \frac{1}{2}\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(t) = 2^t$ ile $\alpha = \frac{1}{2}$ ise

$$\int_1^3 2^t \nabla_{\frac{1}{2}} t = \frac{1}{2} \sum_{t \in (1,3]_{\frac{1}{2}\mathbb{N}}} \sqrt{\frac{1}{t}} 2^t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} 2^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} 2^2 + \sqrt{\frac{2}{5}} 2^{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} 2^3 \right) = \sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ dir}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Lemma 2.4.9. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun.

$\forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ için $T_{\nabla, \alpha}(f)(t) \geq 0$ ise f , fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde artan bir fonksiyondur.

İspat. $T_{\nabla, \alpha}(f)$, $[a, b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde var olsun. $\forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ için $T_{\nabla, \alpha}(f)(t) \geq 0$ olsun. O zaman

Teorem 2.3.1 (i) den $T_{\nabla, \alpha}(f)$ $[a, b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde süreklidir ve Teorem 2.4.2 (vi) den

$\int_s^t T_{\nabla, \alpha} f(\xi) \nabla_\alpha \xi \geq 0$ elde edilir. $a \leq s \leq t \leq b$ olacak şekilde Tanım 8'den,

$$f(t) = f(s) + \int_s^t T_{\nabla, \alpha} f(\xi) \nabla_\alpha \xi \geq f(s) \text{ dir.}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.4.10. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde sürekli ve

$(a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f(a) = f(b)$ olsun.

O zaman $\xi, \eta \in [a, b]_{K, \mathbb{T}}$ vardır, öyle ki $T_\alpha(f)(\xi) \leq 0 \leq T_\alpha(f)(\eta)$ dir.

İspat. f fonksiyonu $[a, b]_{K, \mathbb{T}}$ kompakt kümesinde sürekli olduğundan, f in minimumunu m ve maksimumunu M vardır. O zaman $\xi, \eta \in [a, b]_{K, \mathbb{T}}$ vardır öyle ki

$m = f(\xi)$, $M = f(\eta)$, $f(a) = f(b)$ olduğundan $\xi, \eta \in [a, b]_{K, \mathbb{T}}$ alınabilir.

Lemma 1 den $T_\alpha(f)(\xi) \leq 0 \leq T_\alpha(f)(\eta)$ elde edilir.

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.4.11. (Ortalama değer teoremi) $0 < a < b$ olsun.

$f, [a, b]_{\mathbb{T}}$ sürekli ve $[a, b]_{K, \mathbb{T}}$ aralığı üzerinde α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.

O zaman

$\xi^{\alpha-1} T_{\nabla, \alpha}(f)(\xi) \leq \frac{(f)(b)-(f)(a)}{b-a} \leq \eta^{\alpha-1} T_{\nabla, \alpha}(f)(\eta)$ olacak şekilde $\xi, \eta \in [a, b]_{K, \mathbb{T}}$ elemanı vardır.

İspat. Teorem 2.3.9 den

$$T_{\nabla, \alpha}(t) = (t)_{\nabla}^{(\alpha)} = \begin{cases} t^{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{elde edilir.} \quad (2.26)$$

$h(t) = f(t) - f(b) - \frac{(f(b)-f(a))}{(b-a)}(t-b)$ olsun.

O zaman, h fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde sürekli, $[a, b)_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde fonksiyondur ve bu, α mertebeden nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve $h(a) = h(b)$ dir.

Teorem 2.3.2 ve (2.26) eşitliğinden

$$T_{\nabla, \alpha}(h)(t) = \begin{cases} T_{\nabla, \alpha}(f)(t) - \frac{(f(b)-f(a))}{(b-a)}, & \alpha = 1 \\ T_{\nabla, \alpha}(f)(t) - \frac{(f(b)-f(a))}{(b-a)} t^{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad \text{elde edilir.} \quad (2.27)$$

Teorem 2.4.10' u h fonksiyonuna uygulanırsa $\xi, \eta \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ vardır öyleki

$$T_{\nabla, \alpha}(h)(\xi) \leq 0 \leq T_{\nabla, \alpha}(h)(\eta) \text{ dir}$$

$$\text{Yani } \xi^{\alpha-1} T_{\nabla, \alpha}(f)(\xi) \leq \frac{(f)(b)-(f)(a)}{b-a} \leq \eta^{\alpha-1} T_{\nabla, \alpha}(f)(\eta) \text{ dır.}$$

(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.4.12. Varsayalım $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{T}^K$ üzerinde konform kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $T_\alpha(f)$ $\mathbb{T}^K$ üzerinde sürekli ise f , $\mathbb{T}^K$ üzerinde nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir.

$$\forall t \in \mathbb{T}^K \text{ için } T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = T_\alpha(f)(\rho(t)) \text{ dir.}$$

İspat. $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. İlk olarak t sol yayılmış nokta olsun.

f konform kesirli diferansiyellenebilir olduğundan, sürekli fonksiyon olacaktır. Buradan f, t 'de nabla konform kesirli diferansiyellenebilir olacaktır ve

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - t} t^{1-\alpha} \text{ dır.}$$

Diğer tarfatan, $\rho(t)$ sağa yayılmış olabileceğinden

$$T_{\nabla, \alpha}(f)(\rho(t)) = \frac{f((\sigma\rho(t))) - f(\rho(t))}{\sigma(\rho(t)) - \rho(t)} t^{1-\alpha} = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{t - \rho(t)} t^{1-\alpha} \text{ dir.}$$

Buradan $T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = T_{\alpha}(f)(\rho(t))$ dir.

Şimdi t hem soldan yoğun hem de sağdan yoğun olsun.

Bu durumda $T_{\alpha}(f)(t)$ var olduğundan

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \quad (2.28)$$

limiti vardır, sonludur ve $T_{\alpha}(f)(t)$ 'ye eşittir.

Diğer taraftan, t sol-yoğun olduğundan, (2.28) deki limitin varlığından $T_{\nabla, \alpha}(f)(t)$ vardır ve bu limite eşittir. Buradan $T_{\nabla, \alpha}(f)(t) = T_{\alpha}(f)(t)$ dir.

Son olarak, soldan yoğun ve sağ yayılmış olsun. (Wang Y., v.d 2016)'nin 15. Teoremi f , fonksiyonuna uygularsak

$$\xi^{\alpha-1} T_{\alpha}(f)(\xi) \leq \frac{(f)(t) - (f)(s)}{t - s} \leq \eta^{\alpha-1} T_{\alpha}(f)(\eta) \quad (2.29)$$

elde edilir.

Burada ξ, η s ve t arasındadır. $s \rightarrow t$ iken

$\xi \rightarrow t, \eta \rightarrow t$, $T_{\alpha}(f)$ sürekli olduğundan,

(2.29)'den

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)} t^{\alpha-1} T_{\alpha}(f) \quad (2.30)$$

elde edilir.

Diğer tarfatan, t sol yoğun olduğundan, (2.30)'ün sol tarafı $t^{\alpha-1} T_{\nabla, \alpha}(f)(t)$ eşittir.

yani $T_{\nabla,\alpha}(f)(t) = T_{\alpha}(f)$ dir
(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Teorem 2.4.13. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_K$ üzerinde nabla konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve $T_{\nabla,\alpha}(f)$ $\mathbb{T}_K$ üzerinde sürekli ise f fonksiyonu $\mathbb{T}^K$ üzerinde konform kesirli diferansiyellenebilirdir.
 $\forall t \in \mathbb{T}^K$ için $T_{\alpha}(f)(t) = T_{\nabla,\alpha}(f)(\sigma(t))$ dır.
(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

Tanım 2.4.14. $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde mutlak süreklidir (i.e., $f \in AC([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$) denir, eğer $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\eta > 0$ vardır ki $[a, b]_{\mathbb{T}}$ nin alt aralıklarının sonlu ikişer ikişer ayrık $\{(a_k, b_k]_{\mathbb{T}}\}_{k=1}^m$ ailesi
 $\sum_{k=1}^{k=m}(b_k, a_k) < \eta$ için
 $\sum_{k=1}^{k=m}(f(b_k), f(a_k)) < \varepsilon$ sağlanır
(Bendouma ve Hammoudi, 2019).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Hilbert uzayda simetrik operatörlerin sınır değer uzayı yardımıyla yapılan disipatif genişlemeleri ile ilgili temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

3.1. Disipatif Genişlemeler

Teorem 3.1.1. Her disipatif operatör maksimal disipatif genişlemeye sahiptir. Disipatif bir A operatörün maksimal disipatif olması için gerek ve yeter koşul $\Im \lambda < 0$ için

$$R(A - \lambda I) = H$$

olmasıdır (Gorbachukve Gorbachuk, 1991).

İspat. A kapalı disipatif operatör, $\Im \lambda < 0$ olsun. O zaman $R(A - \lambda I) = H$ kapalıdır

$\Im((A - \lambda I)f, f) \geq -\Im \lambda (f, f)$ olduğundan

$\Im((A - \lambda I)f, f) \leq \|(A - \lambda I)f\| \|f\| - \Im \lambda \leq \|(A - \lambda I)f\|$ dir.

Buradan $R(A - \lambda I) = H$ kapalıdır. Şimdi iki durum oluşabilir:

1. $\Im \lambda < 0$ için $R(A - \lambda I) = H$ olursa A maksimal disipatif operatör olur. Aksi halde A operatörünün kendisinden farklı disipatif $\tilde{A}$ genişlemesi için bir $f_0 \neq 0$ elemanı bulunur öyle ki $(\tilde{A} - \lambda I)f_0 = 0$ olur. Buradan $\Im(\tilde{A}f_0, f_0) = \Im \lambda (f_0, f_0)$ olur ki bu $\tilde{A}$ nın disipatifliği ile çelişir.

2. $R(A - \lambda I) \neq H$ ise A operatörü kendisinden farklı disipatif genişlemeye sahiptir ve bu genişleme şu şekilde inşa edilir:

$$N = H \ominus R(A - \lambda I), D_{\tilde{A}} = D_A + N,$$

$$\tilde{A}(f + u) = Af + \bar{\lambda}u, f \in D_A, u \in N.$$

olarak tanımlayalım $\tilde{A}$ operatörü doğru tanımlanır: $f + u = 0$ ise

$(Af, f) = (Au, u) = (u, \lambda u) = \lambda(u, u)$ dir. $Im(Af, f) \leq 0$ ise $u = 0, f = 0$ olur. $\tilde{A}$ operatörü disipatifdir:

$$(\tilde{A}(f + u), f + u) = (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (Af, u) + \bar{\lambda}(u, f)$$

$$= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (f, A^*u) + \bar{\lambda}(u, f)$$

$$= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + \lambda(f, u) + \bar{\lambda}(u, f)$$

$$\text{Buradan } Im(\tilde{A}(f + u), f + u) = Im(Af, f) + Im\bar{\lambda}(u, u) \geq 0.$$

Son olarak $R(\tilde{A} - \lambda I) = H$ olduğunu kontrol etmek zor değildir. Yukarıda gösterildiği gibi $\tilde{A}$ operatörü maksimal disipatifdir. Teorem 3.1.1. den bir operatör maksimal disipatif ve maksimal akretif olması için gerek ve yeter koşul operatörün kendine eş olmasıdır. Maksimal disipatif veya maksimal akretif simetrik operatöre maksimal simetrik operatör denir. Teorem 3.1.1. den A simetrik operatörü maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul operatörün defekt sayılarından biri sıfıra eşit olmasıdır. A operatörünün maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul A operatörünün kendinden farklı simetrik genişlemeye sahip olmamasıdır.

3.2. Lineer Bağıntılar

Tanım 3.2.1. $0 < H$ bir Hilbert uzay olsun. $\theta \in H \oplus H$ keyfi lineer kümesine lineer bağıntı denir. θ_1, θ_2 lineer bağıntılar olsunlar. $\theta_1 \subset \theta_2$ ise θ_2 ye θ_1 in genişlemesi denir. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 3.2.2. θ lineer bağıntısında $\{x, x'\} \in \theta$ için

$$Im(x', x) \geq 0, (\text{sırasıyla}, Im(x', x) \leq 0, Im(x', x) = 0)$$

oluyorsa θ lineer bağıntısına disipatif (sırasıyla, akretif, simetrik) bağıntı denir. Eğer disipatif (akretif, simetrik) bağıntının kendisinden farklı disipatif genişlemesi yoksa bağıntı maksimal disipatiftir. Aynı anda hem maksimal disipatif hem de maksimal akretif olan simetrik bağıntı kendine eşittir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991). θ disipatif bağıntısı ile eşleşen U_θ operatörünü tanımlayalım:

$$D_{U_\theta} = \{x' + ix : \{x, x'\} \in \theta\},$$

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix$$

olsun. U_θ operatörüne θ bağıntısının Cayley dönüşümü denir. U_θ operatörü iyi tanımlanmıştır. Eğer $\{x, x'\} \in \theta$, $\{y, y'\} \in \theta$ için $x' + ix = y' + iy$ olursa

$$\{x - y, x' - y'\} \in \theta, x' - y' = -i(x - y)$$

olur. Diğer taraftan

$$0 \leq Im(x' - y', x - y) = Im(-i(x - y), x - y) = -\|x - y\|^2$$

dir. Buradan $x = y, x' = y'$ elde edilir.

$$\|U_\theta(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x', x)$$

$$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2Im(x', x)$$

dir. θ bağıntısı disipatif olduğundan

$$\|U_\theta(x' + ix)\| \leq \|x' + ix\|, \{x, x'\} \in \theta \quad (3.1)$$

elde edilir. θ bağıntısı simetrik ise (3.1) eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.2.3 K, H Hilbert uzay üzerinde büzülme operatörü olsun.

$$(K - I)x' + i(K + I)x = 0 \quad (3.2)$$

$$(K - I)x' - i(K + I)x = 0 \quad (3.3)$$

eşitlikleri ile verilen lineer bağıntılar sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretiftir. Tersine keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı (3.2), (3.3) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul (3.2) ifadesindeki (3.3) deki K operatörü izometrik olmasıdır. Kendine eş bağıntıların genel formu (3.2) veya (3.3) ile verilir, burada K operatörü üniterdir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat. (3.2) ile tanımlı θ lineer bağıntısını alalım. $\{x, x'\} \in \theta$ olsun.

$$K(x' + ix) = x' - ix$$

$$\|K(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2\text{Im}(x', x)$$

$$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2\text{Im}(x', x).$$

Sonuncu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$4\text{Im}(x', x) = \|x' + ix\|^2 - \|K(x' + ix)\|^2 \geq 0 \quad (3.4)$$

olur. Böylece θ bağıntısı disipatiftir. $u \in H$ için

$$x' = \frac{1}{2}(u + Ku), x = \frac{1}{2i}(u - Ku)$$

tanımlayalım. O zaman $\{x, x'\} \in \theta$, $x' + ix = u$, $x' - ix = Ku$ olur. Bu da $D_{U_\theta} = H$, $U_\theta = K$ olduğunu gösterir. θ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi ise $U_{\tilde{\theta}} \supset U_\theta$ olur. Bu ise ancak $U_{\tilde{\theta}} = U_\theta$ olmasıyla mümkündür. Buradan $\tilde{\theta} = \theta$ olur. Yani θ maksimal disipatifdir. θ keyfi maksimal disipatif bağıntı, U_θ da θ bağıntısının Cayley dönüşümü olsun. O zaman $D_{U_\theta} = H$ dır. Bunu ispatlayalım: Tersini kabul edelim. $U_\theta, \overline{D_{U_\theta}}$ ya sürekli olarak genişletilebilir. $\overline{D_{U_\theta}} \neq H$ ise $U_\theta, H \ominus \overline{D_{U_\theta}}$ üzerinde sıfıra eşitlenerek U_θ, H a genişletilir. Buradan $K \supset U_\theta$ büzülme operatörü tüm uzayda tanımlanır. K operatörünü inşa ederek (3.2) eşitliğine karşılık gelen $\tilde{\theta}$ bağıntısını ele alalım. Yukarıda ispat ettiğimiz gibi $\tilde{\theta}$ bağıntısı disipatif ve $\tilde{\theta} \supset \theta$ dır. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğundan $\tilde{\theta} = \theta$, $U_{\tilde{\theta}} = U_\theta$ olur buradan bir çelişki elde edilir. Böylece U_θ, H üzerinde büzülme operatörüdür. Cayley dönüşümünün tanımından her $\{x, x'\} \in \theta$ için

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix \quad (3.5)$$

dır. Daha önceden belirttiğimiz gibi (3.5) maksimal disipatif $\tilde{\theta} \supset \theta$ bağıntısını tanımlar. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğunda $\tilde{\theta} = \theta$, yani θ bağıntısı (3.2) ile belirlenir. (3.4) dan θ bağıntısı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul K izometrik operatör olmasıdır. θ bağıntısı maksimal akretif olsun.

$$\theta_1 = \{\{-x, x'\}: \{x, x'\} \in \theta\} \in \theta \quad (3.6)$$

bağıntısı maksimal disipatifdir. Gösterdik ki

$$\{x, x'\} \in \theta_1 \text{ (veya } \{-x, x'\} \in \theta) \Leftrightarrow (K - I)x' + i(K + I)(-x) = 0$$

dir. Bu ifade de (3.3) e denktir. Tersini de benzer şekilde gösterilir. Son olarak θ bağıntısı kendine eş olsun. O zaman K_1, K_2 operatörleri H üzerinde izometrik operatör olmak üzere

$$(K_1 - I)x' + i(K_1 + I)x = 0$$

$$(K_2 - I)x' - i(K_2 + I)x = 0$$

eşitlikleri denktir.

$$K_1K_2(x' - ix) = x' + ix, K_2K_1(x' + ix)K_2K_1(x' + ix)$$

elde edilir.

$$\{x' + ix | \{x, x'\} \in \theta\} = \{x' - ix | \{x, x'\} \in \theta\} = H$$

olduğundan

$$K_1K_2 = K_2K_1 = I$$

olur, yani K_1 ve K_2 üniterdir. Tersî aşıkardır.

3.3. Sınır Değer Uzayları ve Disipatif Genişlemeler

Tanım 3.3.1. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: D_{A^*} \rightarrow K$ lineer dönüşümler olsun.

i. $f, g \in D_{A^*}$ için

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K;$$

ii. Keyfi $F_1, F_2 \in K$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D_{A^*}$ vektörü vardır; şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 3.3.2. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $\dim K = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat.

$$D_{A^*} = D_A \oplus N_i \oplus N_{-i} \quad (3.7)$$

idi. $P_{-i}, P_i: D_{A^*} \rightarrow N_{-i}, N_i$ izdüşüm operatörleri olsun. $\dim N_{-i} = \dim N_i$ olduğundan $N_i \rightarrow N_{-i}$ izometrik bir dönüşüm vardır. Bunu U ile gösterelim. $K = N_{-i}$ alırsak (H dan indirgenen iç çarpıma göre)

$$\Gamma_1 = P_{-i} + UP_i, \Gamma_2 = -iP_{-i} + iUP_i$$

olsun. (K, Γ_1, Γ_2) nin A operatörünün sınır değer uzayı olduğunu ispatlayalım. (3.7) ifadesinden $f, g \in D_{A^*}$ ise

$$f = f_0 + P_{-i}f + P_i f, g = g_0 + P_{-i}g + P_i g, f_0, g_0 \in D_A$$

dir.

$$A^*P_i = -iP_i, A^*P_{-i} = -iP_{-i}$$

ve A operatörünün simetrik olduğunu dikkate alırsak

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_if, P_ig))$$

dir. Diğer taraftan U operatörünün izometrikliğine denk olarak

$$(\Gamma_1f, \Gamma_2g)_K - (\Gamma_2f, \Gamma_1g)_K = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_if, P_ig))$$

dir. Buradan sınır değer uzayının (i) koşulu sağlanır. $F_1, F_2 \in K, f \in D_{A^*}$ alalım.

$$f = f_0 + f_{-i} + f_i, f_0 \in D_A$$

$$f_{-i} = \frac{1}{2i}(iF_1 - F_2) \in N_i, f_i = \frac{1}{2i}U^{-1}(iF_1 + F_2) \in N_i$$

olsun. O zaman $\Gamma_1f = F_1, \Gamma_2f = F_2$ olur.

Teorem 3.3.3. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1f + i(K + I)\Gamma_2f = 0 \quad (3.8)$$

$$(K - I)\Gamma_1f - i(K + I)\Gamma_2f = 0 \quad (3.9)$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (3.8) ve (3.9) koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (3.8) , (3.9) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (3.8), (3.9) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C)\Gamma_2f - (\sin C)\Gamma_1f = 0$$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \quad (3.10)$$

sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \quad (3.11)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|K_f\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (3.10), (3.11) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde zaman skalaları üzerinde singüler durumdaki konform kesirli Sturm-Liouville operatörlerini çalışacağız. Sınır koşulları kullanılarak bu operatör için sınır değer uzayı inşa edilecektir. Bu kavram yardımıyla simetrik konform kesirli Sturm-Liouville operatörünün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilecektir.

Şimdi

$$\Gamma(y) := -T_{\nabla,\alpha}[p(t)T_{\Delta,\alpha}y(t)] + q(t)y(t) = \lambda y(t), \quad t \in [0, \infty)_{\mathbb{T}} \quad (4.1)$$

konform kesirli Sturm-Liouville denklemini göz önüne alalım. Burada $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ fonksiyonu, $[0, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyondurlar.

Denklemden operatöre geçiş yapmak için,

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty f(t)\overline{g(t)}\nabla_\alpha t,$$

iç çarpımı yardımıyla $L_{\nabla,\alpha}^2[0, \infty)_{\mathbb{T}}$ Hilbert uzayını gözönüne alalım (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Şimdi bu denkleme karşılık gelen maksimal ve minimal operatörlerin tanım kümelerini verelim.

$$D_{max} = \left\{ y \in L_{\nabla,\alpha}^2[0, \infty)_{\mathbb{T}} : \begin{array}{l} y \text{ ve } p T_{\Delta,\alpha} y \text{ fonksiyonları} \\ [0, \infty)_{\mathbb{T}} \text{ aralığı üzerinde} \\ \nabla_\alpha - \text{lokal mutlak sürekli,} \\ \text{ve} \\ l(y) \in L_{q,\omega}^2(\omega_0, b) \end{array} \right\}.$$

$$D_{min} = \{y \in D_{max} : y(0) = T_{\Delta,\alpha}y(0) = 0, W_{\Delta,\alpha}(y, z) = 0 \forall z \in D_{max}\}.$$

D_{max} kümesi üzerinde $L_{max}y = ly$ ile L_{max} maksimal operatörünü tanımlayalım. Eğer L_{max} operatörünü D_{min} kümesine kısıtlarsak L_{min} minimal operatörü elde edilir.

$L_{min}^* = L_{max}$ ve L_{min} kapalı simetrik operatördür (Naimark, 1968).

Lemma 4.1. $y_1, y_2 \in D_{max}$ ve $t \in [0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\int_0^\infty [\Gamma(y_1)(t)\overline{y_2(t)} - y_1(t)\overline{\Gamma(y_2)(t)}]\nabla_\alpha t = W_{\Delta,\alpha}(y_1, y_2)(\infty) - W_{\Delta,\alpha}(y_1, y_2)(0)$$

elde edilir. Burada

$W_{\Delta,\alpha}(y_1, y_2)(t) := p(t) \left\{ y_1(t) \overline{T_{\Delta,\alpha}(y_2)(t)} - T_{\Delta,\alpha}y_1(t) \overline{y_2(t)} \right\}$ ile tanımlanır. (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

İspat. $y_1, y_2 \in D_{max}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\Gamma(y_1)(t) \overline{y_2(t)} - y_1(t) \overline{\Gamma(y_2)(t)} \right] \nabla_\alpha t \\ &= \int_0^\infty \left[-T_{\nabla,\alpha} [p(t) T_{\Delta,\alpha} y_1(t)] + q(t) y_1(t) \right] \overline{y_2(t)} \nabla_\alpha t \\ & \quad - \int_0^\infty y_1(t) \left[-T_{\nabla,\alpha} [p(t) T_{\Delta,\alpha} y_2(t)] + q(t) y_2(t) \right] \nabla_\alpha t \\ &= - \int_0^\infty T_{\nabla,\alpha} [p(t) T_{\Delta,\alpha} y_1(t)] \overline{y_2(t)} \nabla_\alpha t + \int_0^\infty y_1(t) \left[T_{\nabla,\alpha} [p(t) T_{\Delta,\alpha} y_2(t)] \right] \nabla_\alpha t \end{aligned}$$

∇_α -Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\Gamma(y_1)(t) \overline{y_2(t)} - y_1(t) \overline{\Gamma(y_2)(t)} \right] \nabla_\alpha t \\ &= -[p(t) T_{\Delta,\alpha} y_1(t)] \overline{y_2(t)} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty [p(t) T_{\Delta,\alpha} y_1(t)] \overline{T_{\Delta,\alpha} y_2(t)} \Delta_\alpha t \\ & \quad + y_1(t) \overline{p(t) T_{\Delta,\alpha} y_2(t)} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty T_{\Delta,\alpha} y_1(t) \overline{p(t) T_{\Delta,\alpha} y_2(t)} \Delta_\alpha t \\ &= p(t) \left\{ y_1(t) \overline{T_{\Delta,\alpha} y_2(t)} - T_{\Delta,\alpha} y_1(t) \overline{y_2(t)} \right\} \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

elde edilir.

L_{min} simetrik operatörü Weyl 'in limit-çember durumunda olsun, yani (2,2) indis defektine sahip olduğunu varsayacağız.

$\Gamma(y) = 0$ denkleminin,

$$u_1(0) = 1, \quad (pT_{\Delta,\alpha}u_1)(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad (pT_{\Delta,\alpha}u_2)(0) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ olarak gösterelim.

Açıktır ki, $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ lineer bağımsızdır ve onların Wronskian 1 e eşittir;

$$W_{\Delta,\alpha}[u_1, u_2](t) = W_{\Delta,\alpha}[u_1, u_2](0) = 1, \quad (t \in [0, \infty)_{\mathbb{T}}).$$

Şimdi

$$\begin{aligned} \Gamma_1, \Gamma_2: D_{max} &\rightarrow \mathbb{C}^2, \\ \Gamma_1 y &= \left(\frac{-y(0)}{W_{\Delta, \alpha}[y, u_1]_\infty} \right), \quad \Gamma_2 y = \left(\frac{T_{\Delta, \alpha} y(0)}{W_{\Delta, \alpha}[y, u_2]_\infty} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

Teorem 4.2. (4.2) dönüşümleri ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü, $\mathbf{L}_{\min}$ operatörünün sınır değer uzayıdır.

Sınır değer uzayının ilk koşulunu ispatlamak için ilk olarak aşağıdaki lemmayı ispatlamamız gerekiyor.

Lemma 4.3. $y(t), w(t) \in D_{max}$ keyfi fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} W_{\Delta, \alpha}[y, \bar{w}]_t &= W_{\Delta, \alpha}[y, u_1]_t \cdot W_{\Delta, \alpha}[\bar{w}, u_2]_t \\ &\quad - W_{\Delta, \alpha}[y, u_2]_t \cdot W_{\Delta, \alpha}[\bar{w}, u_1]_t, \quad 0 \leq t \leq \infty \end{aligned} \quad (4.3)$$

dır.

İspat. $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ reel değerli fonksiyonları için

$$\begin{aligned} &W_{\Delta, \alpha}[y, u_1]_t \cdot W_{\Delta, \alpha}[\bar{w}, u_2]_t - W_{\Delta, \alpha}[y, u_2]_t \cdot W_{\Delta, \alpha}[\bar{w}, u_1]_t \\ &= (y(t)T_{\Delta, \alpha}u_1(t) - T_{\Delta, \alpha}y(t)u_1(t)) \left(\overline{w(t)T_{\Delta, \alpha}u_2(t)} - \overline{T_{\Delta, \alpha}w(t)u_2(t)} \right) \\ &\quad - (y(t)T_{\Delta, \alpha}u_2(t) - T_{\Delta, \alpha}y(t)u_2(t)) \left(\overline{w(t)T_{\Delta, \alpha}u_1(t)} - \overline{T_{\Delta, \alpha}w(t)u_1(t)} \right) \\ &= y(t)\overline{T_{\Delta, \alpha}w(t)} - T_{\Delta, \alpha}y(t)\overline{w(t)} = W_{\Delta, \alpha}[y, \bar{w}]_t, \quad 0 \leq t \leq \infty \end{aligned}$$

elde edilir.

$\forall y(t), w(t) \in D_{max}$ için

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} = -y(0) \left(\overline{T_{\Delta, \alpha}(w(0))} \right) + T_{\Delta, \alpha}(y(0)) \overline{(w(0))} +$$

$$W_{\Delta,\alpha}[y, u_1]_\infty \cdot W_{\Delta,\alpha}[\bar{w}, u_2]_\infty - W_{\Delta,\alpha}[y, u_2]_\infty \cdot W_{\Delta,\alpha}[\bar{w}, u_1]_\infty$$

Lemma 4.3 den

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} = W_{\Delta,\alpha}[y, \bar{w}]_\infty - W_{\Delta,\alpha}[y, \bar{w}]_0$$

elde edilir. Lemma 4.1 kullanılarak

$$(L_{max} y, w)_{L^2_{\nabla,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}} - (y, L_{max} w)_{L^2_{\nabla,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} \quad (4.4)$$

elde edilir. Böylece sınır değer uzayının ilk şartı yerine getirilmiştir. İkinci şartı aşağıdaki lemma kullanılarak ispatlanır.

Lemma 4.4. Keyfi ρ_0, ρ_1, δ_0 ve δ_1 kompleks sayıları için

$$y(0) = \rho_0, \quad T_{\Delta,\alpha} y(0) = \rho_1, \quad W_{\Delta,\alpha}[y, u_1]_\infty = \delta_0, \quad W_{\Delta,\alpha}[y, u_2]_\infty = \delta_1 \quad (4.5)$$

şartlarını sağlayan bir $y \in D_{max}$ fonksiyonu vardır.

İspat.

$$(f, u_1)_{L^2_{\nabla,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}} = \delta_0 + \rho_1 \quad (f, u_2)_{L^2_{\nabla,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}} = \delta_1 - \rho_0 \quad (4.6)$$

sağlayan bir $f(t) \in L^2_{\nabla,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ fonksiyonunu dikkate alalım. Böyle bir fonksiyon u_1 ve u_2 fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak bulunabilir.

$$y(0) = \rho_0, \quad T_{\Delta,\alpha} y(0) = \rho_1$$

başlangıç koşullarını sağlayan $\Gamma(y) = f(t)$ denkleminin çözümünü $y_1(t)$ ile gösterelim. Bu çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$y_1(t) = \rho_0 u_1(t) + \rho_1 u_2(t) + \int_0^t \{u_1(t) u_2(\xi) - u_1(\xi) u_2(t)\} f(\xi) \nabla_\alpha \xi.$$

Bu ifade gösterir ki $y_1(t) \in L^2_{\nabla,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ dir. Lemma 4.1 den

$$(f, u_j)_{L^2_{\nabla,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}} = (\Gamma(y_1), u_j)_{L^2_{\nabla,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}}$$

$$= W_{\Delta,\alpha}[y_1, u_j]_{\infty} - W_{\Delta,\alpha}[y_1, u_j]_0 + (y, \Gamma(u_j))_{L^2_{V,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}}, \quad j = 1, 2 \quad (4.7)$$

elde edilir.

$j = 1, 2$ için $\Gamma(u_j) = 0$, ve $y_1(0) = \rho_0$, $T_{\Delta,\alpha}y(0) = \rho_1$ olduğundan

$$W_{\Delta,\alpha}[y_1, u_j]_{\infty} = \begin{cases} -\rho_1, & j = 1 \\ \rho_0, & j = 2 \end{cases}$$

elde edilir. O zaman

$$(f, u_1)_{L^2_{V,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}} = W_{\Delta,\alpha}[y_1, u_1]_{\infty} + \rho_1$$

$$(f, u_2)_{L^2_{V,\alpha}[0,\infty)_{\mathbb{T}}} = W_{\Delta,\alpha}[y_1, u_2]_{\infty} - \rho_0$$

buluruz. (4.6) ifadesinden

$$W_{\Delta,\alpha}[y_1, u_1]_{\infty} = \delta_0 \quad W_{\Delta,\alpha}[y_1, u_2]_{\infty} = \delta_1$$

elde edilir.

Böylece, Lemma 4.4 ve Teorem 4.2 ispatlandı. Teorem 4.2 ve Teorem 3.3.3 kullanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5. $K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzülme operatörü ise $L_{\min}$ operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (4.8)$$

ve

$$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (4.9)$$

koşullarını sağlayan $y \in D_{\max}$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla $L_{\min}$ operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine $L_{\min}$ operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (4.8) ve (4.9) koşulları yardımıyla verilir. K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. Eğer (4.8) ve (4.9) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa $L_{\min}$ operatörünün maksimal simetrik genişlemesini verir.

Eğer (4.8) ve (4.9) ifadesindeki K operatörü üniter olursa $L_{\min}$ operatörünün kendine eş genişlemesini verir.



5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında,

$$-T_{\mathbf{v},\alpha}[p(t)T_{\Delta,\alpha}y(t)] + q(t)y(t) == \lambda y(t), \quad t \in [0, \infty)_{\mathbb{T}}$$

formundaki zaman skalası üzerinde singüler konform kesirli Sturm-Liouville differensiyel denklemleri ele alındı. Burada $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ fonksiyonu, $[0, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyondurlar. Bu türden denklemlere karşılık gelen minimal ve maximal operatör oluşturuldu. Weyl limit-çember durumunda, yani indis defektin (2,2) olduğu durumda operatörün sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır değer uzayı yardımıyla simetrik operatörün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden ifade edildi.

Bu çalışma zaman skalası üzerinde singüler konform kesirli Sturm-Liouville differensiyel denklemlerinin Weyl limit-nokta durumu için yani indis defektin (1,1) olduğu durumda yapılarak konu genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., 2015. On Conformable Fractional Calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 279, 57-66.
- Abdeljawad, T., Al Horani, M., Khalil, R., 2015. Conformable fractional semigroups of operators, *Journal of Semigroup Theory and Applications* Art. ID 7, 9 pp.
- Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, *Volume I. Frederick Ungar*, New York.
- Allahverdiev, B.P., 2013. Extensions of symmetric second-order difference operators with matrix coefficients. *Journal of Difference Equations and Applications*. 19,5, 839-849.
- Allahverdiev, B.P., 2014. Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear Multilinear Algebra* 62,9, 1146-1152.
- Allahverdiev, B.P., 2016. Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat* 30, 6, 1475-1484.
- Allahverdiev, B.P., Tuna H., Yalçinkaya, Y., 2019. Conformable Fractional Sturm-Liouville Equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1-19.
- Allahverdiev, B.P., Tuna H., Yalçinkaya, Y., 2020. On the dissipative extensions of the conformable fractional Sturm-Liouville operator, *International Conference on Artificial Intelligence and Applied Mathematics in Engineering (ICAIAME 2020)*.
- Allahverdiev, B.P., Tuna, H., 2021. Conformable fractional Sturm–Liouville problems on time scales. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1– 16.
- Al-Refai, M., Abdeljawad, T., 2017. Fundamental Results of Conformable Sturm-Liouville Eigenvalue Problems, *Complexity*. 7, 3720471.
- Bendouma, B., Hammoudi, A., 2019, A nabla conformable fractional calculus on time scales, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7,1, 202-2016
- Benkhettou, N., Brito da Cruz, A.M.C., Torres, D.F.M., 2015. A fractional calculus on arbitrary time scales: fractional differentiation and fractional integration. *Signal Process.* 107, 230-237.
- Benkhettou, N., Hassani, S., Torres, D. F. M., 2016. A conformable fractional calculus on arbitrary time scales, *Journal of King Saud University- Science*. 28,1, 93-98.
- Bairamogly, M., 1976. Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, *Izu. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz-Tekhn. Mat. Nauk* 2, 140-143.
- Bohner, M., Peterson, A., 2001. Dynamic Equations on Time Scales. *Birkhäuser*, Boston, MA.

- Bohner, M., Peterson, A., 2003. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhäuser, Boston, MA.
- Bruck, V.M., 1976. On a class of boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions, *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 100, 210-216.
- Gorbachuk, M.L, Kochubei, A.N., Rybak M.A., 1972. Dissipative extensions of differential operators in a space of vector-valued functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 205,1029-1032 (*English transl., Soviet Math. Dokl.* 13(1972),1063-1067).
- Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V.I., 1984. *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations*, Naukova Dumka, Kiev (English transl. 1991, Birkhauser Verlag).
- Gorbachuk, M.L., Gorbachuk, V.I., Kochubei, A.N., 1989. The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations, *Ukrainian Mathematical Journal*. 41, 1299-1312 (English transl. in *Ukrainian Math. Journal*. 41, (1989), 1117-1129).
- Gülşen, T., Yılmaz, E., Kemaloğlu, H., 2017. Conformable fractional Sturm-Liouville equation and some existence results on time scales.
- Hilger, S., 1988. *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph.D. Thesis, Universität Würzburg, Germany.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative, *Journal of Applied Mathematics and Computing*. 264, 65-70.
- Kochubei, A. N., 1975. Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations, *Mat. Zametki* 17, 41-48; *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR* 17,25-28.
- Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications. I, *Mat. Sb.* 20, 431-495; II, *Mat. Sb.* 21, 365-404.
- Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval $(0, \infty)$, *Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 16,292-324.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York. 688
- Naimark, M. A., 1968. *Linear Differential Operators*, Second ed. Nauka, Moscow English transl. of First ed., Parts 1, 2, Ungar, New York.
- Neumann, J. von., 1929. Allgemeine eigenwertheorie hermitescher functional operatoren, *Mathematische Annalen*. 102,49-131.
- Philips, R.S., 1959. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations', *Transactions of the American Mathematical Society*. 90,193-254; (*Russian transl. In Matematika* 6:4(1962)11-70).

- Rellich, F., 1951. Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung', *Mathematische Annalen*. 122,343-368.
- Rofe-Beketov, F.S., 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 184,1034-1037 (*English translation in Soviet Math. Dokl.* 10 (1969),188-192).
- Tuna, H., Bayrak, S., 2018. On extensions of singular fourth- order dynamic operators on Time Scales. *Filomat*, 32, 11, 3843–3851.
- Tuna, H., Allahverdiev, B. P., 2018. Dissipative extensions of fourth order differential operators, *Thai Journal of Mathematics*, V 16, 1 ,275-285.
- Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations', *Trudy Moskov. Mat Obshch* 1, 187-246.
- Zhao, D., You, X., Cheng, J., 2016. Remarks on conformable fractional derivative on time scale, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*. 11, 1, 61-68
- Zhao D., Li T., 2016. On conformable delta fractional calculus on time scales, *Journal of Mathematics and Computer Science*. 16, 324-335.
- Zhao, D-F., You, X-X., 2016. Nabla local fractional derivative on time scales, *Advances in Applied Mathematical Analysis* ISSN 0973-5313. 11, 1, 29-35.
- Zhao, D-F., You X-X., Cheng J., 2016. Remarks on conformable fractional derivative on time scales, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics* ISSN 0973-4554. 11, 1, 61-68