

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BISHOP ÇATISINA GÖRE
TİP-3 SLANT HELİSLER**

Gonca CİHANGİR

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

OCAK 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BISHOP ÇATISINA GÖRE TİP-3
SLANT HELİSLER**

Tez Yazarı

Gonca CİHANGİR

Danışman

Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN

OCAK 2022

ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: 4-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Tip-3 Slant Helisler
Yazarı: Gonca CİHANGİR
İlk Teslim Tarihi: 27.12.2021
Savunma Tarihi: 21.01.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN

Onayladım

Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Başkan: Prof. Dr. Vedat ASİL

Onayladım

Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT

Onayladım

Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Fakültesi

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “4-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Tip-3 Slant Helisler” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

21.01.2022

Gonca CİHANGİR



ÖNSÖZ

Matematik anabilim dalında yüksek lisans yapmam konusunda beni destekleyen, tez aşamasında kendisinden çok şey öğrendiğim çok saygıdeğer hocam Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN 'e verdiği emeklerinden dolayı teşekkürü borç bilirim.

Lisans ve Lisansüstü eğitimimde benden desteğini asla esirgemeyen sevgili annem Birgül YİĞİT 'e ve kardeşlerime, sevgili eşim Samet CİHANGİR 'e varlığıyla dünyamı aydınlatan biricik kızım Zeynep CİHANGİR' e ve emeği geçen herkese teşekkürü borç bilirim.

Gonca CİHANGİR

ELAZIĞ, 2022



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. MATERYAL VE METOT	7
3.1. 4 -Boyutlu Öklid Uzayında (k, m) –Tip Slant Helisler	7
3.2. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Tip-3 Slant Helisler	10
3.3. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Paralel Taşıma Çatısına Göre k -Tip Slant Helisler	16
3.4. n -Boyutlu Öklid Uzayında Vn -Slant Helisler	20
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	28
4.1. E^4 'te Bishop Çatısına Göre (k, m) -Tip Slant Helisler	28
5. SONUÇLAR.....	33
KAYNAKLAR.....	34
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

4-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Tip-3 Slant Helisler

Gonca CİHANGİR

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2022, Sayfa: viii + 35

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmı yer almaktadır. İkinci bölümde Öklid uzayına ait temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına ve paralel taşıma çatısına göre slant helisler incelenmiştir. Dördüncü bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında paralel taşıma çatısına göre (k,m) -tip slant helisler araştırılmıştır. Beşinci bölümde çalışmanın sonuç kısmı yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Helis, Slant helis, Tip-3 Slant helis, Bishop çatısı, (k,m) -Tip slant helis

ABSTRACT

On Type-3 Slant Helices Due To Bishop Frame in Euclidean 4-Space

Gonca CİHANGİR

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

January 2022, Pages: viii + 35

This study comprises five sections. In the first section the introduction is placed. In the second section, fundamental definitions and theorems in Euclidean space are given. In the third section, slant helices with respect Frenet frame and parallel transport frame in the four dimensional Euclidean space are examined.

In the four section slant helices of (k,m) -type with respect to parallel transport frame in the four dimensional Euclidean space are investigated.

Keywords: Helices, Slant helices, Type-3 slant helices, Bishop frame, (k,m) - Type Slant helices

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

B	:Binormal vektör alanı
D	:Darboux vektörü
E^4	:4 Boyutlu Öklid Uzayı
E^n	:n-boyutlu Öklid Uzayı
κ	:Eğrilik fonksiyonu
τ	:Burulma fonksiyonu
$\in$	:Elemanıdır
$\langle, \rangle$	:İç çarpım
$\ \cdot \ $	:Norm, Uzaklık
N	:Birinci dik (asli normal) vektör alanı
$\mathbb{R}^n$	:n-Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar cümlesi
S^3	:Küre
T	:Birim teğet fonksiyonu
$\times$	:Vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride, eğriler teorisi en temel çalışma alanlarından biridir. Bir eğrinin pek çok özelliğini karakterize etmek için; Frenet üçlüsü ve bunların eğri boyunca değişimlerini içeren Frenet denklemleri kullanılır. Diğer taraftan Frenet denklemleri ve eğrinin eğrilikleri, eğrileri sınıflandırmada kullanılan önemli bir araçtır. Bu eğrilerin en önemlilerinden biri helis eğrisidir.

Frenet denklemlerinden; diferansiyel geometri de silindirik helisler, dairesel helisler, slant helisler kavramlarına ulaşılmaktadır. Slant helis, asli normal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanmıştır. Bununla birlikte, Darboux helis adı verilen ve Darboux vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan yeni özel eğriler olarak bilinir.

Tanım olarak bir genel helis, teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan bir eğri olarak verilir. Helisin yeni bir türü olan slant helis; eğrinin asli normal vektör alanı sabit doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanır. Bu tanım 2004 yılında Izumiya ve Takeuchi tarafından ilk defa yapılmıştır[1]. 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux helis kavramı Yaylı ve arkadaşları tarafından [2] 2012 tarihinde tanıtılmış ve çalışılmıştır. Öklid uzayında Darboux helisleri 2018 yılında İlarslan ve Yıldırım [3] tarafından incelenmiştir. Öklid uzayında slant helisleri 2009 yılında Ali ve arkadaşları tarafından [4] incelenmiştir. Ayrıca, son yıllarda, bu konuda birçok çalışma yapan çoğu araştırmacılar [5 ,6] tarafından eğrinin asli normal vektör alanı ile sabit doğrultu arasındaki açının sabit olması halindeki eğriler slant helis olarak adlandırılmıştır.

Eğriler teorisinde ise son zamanlarda en çok ilgi çeken eğriler helisler, slant helisler ve bağlantılı eğrilerdir [7]. Eğriliklerin aldığı değerlere göre bir eğri, geodezik, çember ve helis olarak adlandırılabilir.

Eğrilerin diferansiyel geometrisi farklı uzaylarda farklı çatılara göre çalışılan en önemli alanlardan birisidir. 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin teğet, asli normal ve binormal vektörlerinden oluşan Frenet çatısı bu eğrinin diferansiyel geometrisinin çalışılabilmesi için en iyi bilinen bir ortonormal çatıdır. Ayrıca bir uzay eğrisinin şekli, yani uzaydaki yerel davranışı bu eğrinin eğrilik ve burulması ile tamamen belirlidir. Dolayısıyla bir eğrinin tamamen incelenebilmesi için en azından üçüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilir olması gerekmektedir.

Birçok araştırmacı eğrilerin özelliklerini karakterize etmek ve hesap yapmak için Frenet çatısını kullanır. Fakat Frenet çatısı yalnızca diferensiyellenebilen eğriler için tanımlıdır ve bazı noktalarda eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda eğri için alternatif bir çatıya ihtiyaç vardır. Bu sebeple 1975 yılında L.R. Bishop paralel vektör alanları yardımıyla 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler için bir alternatif çatı ya da paralel öteleme çatısı tanımlamıştır [8]. Bu çatı bir eğrinin ikinci türevinin tamamen sıfır olduğu durumda bile iyi tanımlanan bir hareketli çatıdır.

Bishop, bu çatı sayesinde hareketli bir çatıyı tanımlamak için alternatif bir yol bulmuştur. Bu çatı Frenet çatısında bulunan teğet vektör sabit tutularak normal vektörlerin belli bir açıyla

döndürülmesiyle oluşur [8]. Bu alternatif çatının bulunuşuyla birlikte araştırmacılar bazı temel konuları bu yeni çatıya göre incelemeyi amaçlamışlardır ve Bishop çatısı üzerine pek çok çalışma yapmışlardır [9,10].

Bükçü ve Karacan bazı özel eğrileri Bishop çatısına göre incelemişlerdir [10]. Yılmaz, Özyılmaz ve Turgut söz konusu Bishop çatısının bileşenlerinin küresel görüntüleri üzerine çalışmıştır [11]. Macit ve Düldül, E^3 'de her ilişkili eğrinin eğriliklerini karakterize etmişler ve E^4 'de bazı yeni ilişkili eğrileri tanımlamışlardır [12]. 2015 yılında Büyükkütük ve Öztürk E^4 'de Bishop çatıya göre eğriler için bazı sonuçlar elde etmişler [13]. Elzawy 2017 yılında yaptığı çalışmasında 4-boyutlu Öklid uzayında Bishop ve Frenet çatıyı çalışmıştır [14]. J. H. Choi ve Y. H. Kim 2012 yılında integral eğrileri yardımıyla, verilen bir Frenet eğrisi için bazı bağlantılı eğriler tanımlamışlardır. Bu bağlantılı eğrileri asli-doğrultu eğrisi, binormal doğrultu eğrisi, asli-donör eğrisi, binormal-donör eğrisi olarak sıralayabiliriz. [15]. Körpınar 3-boyutlu Öklid uzayda Bishop çatıya göre ilişkili eğrileri de [10,16] incelenmiştir. Ayrıca, 4-boyutlu Öklid uzayında ve 4-boyutlu Minkowski uzayında (k, m) -tip slant helisler araştırılmıştır[17-19].

Bu çalışmada; [20] de yapılan incelemelere benzer olarak 4-boyutlu Öklid uzayındaki Tip-3 slant helisleri ve (k, m) -tip slant helisleri paralel taşıma çatısında inceleyeceğiz.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde diferansiyel geometrinin temeli diyebileceğimiz tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.

Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: Ax A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A ya V de birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$i) Her P, Q, R \in A için f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$ii) Her P \in A ve \gamma \in V için f(P, Q) = \gamma$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır[21].

Tanım 2.2.

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V vektör uzayında bir iç çarpım işlemi olarak, iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle = V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir.

Böylece A afin uzayı yeni bir ad alarak Öklid uzayı adını alır. $\mathbb{R}^n$ veya E^n ile gösterilir [22].

Tanım 2.3.

$\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında herhangi bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elemanı için

$$\| \cdot \|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü ile tanımlı $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ifadesine x in normu denir [23].

Tanım 2.4.

γ eğrisinin birim hızlı olması için gerek yeter şart $\|\gamma\| = 1$ olmasıdır. E^n uzayında birim hızlı

$$\gamma: I \rightarrow E^n$$

regüler eğrisi için $T(s) = \gamma'(s)$ ise verilen $\gamma(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü veya hız vektörü denir [22].

Tanım 2.5.

$I, \mathbb{R}$ 'nin bir açık aralığı olmak üzere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün bir γ dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir eğri denir [21].

Tanım 2.6.

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere $\gamma: I \rightarrow E^n$ şeklinde diferansiyellenebilir dönüşüme E^n 'de bir eğri denir. $\gamma(a)$ her mertebeden türevleri mevcutsa diferansiyellenebilir eğri denir [22].

Tanım 2.7.

Her $a \in I$ için $\gamma'(a) \neq 0$ oluyorsa $\gamma(a)$ eğrisine regüler eğri denir. Yani her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir [22].

Tanım 2.8.

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Eğrisi verildiğinde, I 'nın her bir t noktasına $T_{\gamma(t)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir $X(t)$ vektörünü karşılık getiren bir X fonksiyonuna, γ eğrisi üstünde bir vektör alanı denir [21].

Tanım 2.9.

E^n 'de birim hızlı eğri γ olsun. γ 'nın Frenet çatısı $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)\}$ olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} H_1^{*'} \\ H_2^{*'} \\ H_3^{*'} \\ \vdots \\ H_{n-4}^{*'} \\ H_{n-3}^{*'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k_{n-3} & 0 & -k_{n-4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{n-4} & 0 & -k_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^* \\ H_2^* \\ H_3^* \\ \vdots \\ H_{n-4}^* \\ H_{n-3}^* \\ H_{n-2}^* \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) eğrinin i .inci eğrilik fonksiyonlarıdır [23].

Tanım 2.10.

f fonksiyonunun E^n 'nin her bir noktasında k . basamaktan kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise “ f fonksiyonu C^k sınıfındandır” denir. E^n 'den $\mathbb{R}$ ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların cümlesine $C^k(E^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir [23].

Tanım 2.11.

E^n 'nin her bir P noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^∞ sınıfındandır veya düzgün fonksiyondur denir [23].

Tanım 2.12.

f , E^n den $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyon ve $P \in E^n$ olsun.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [f(p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_i + s, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n)]$$

limiti varsa bu limite f fonksiyonunun i . değişkene göre kısmi türevi denir. Genel olarak E^n uzayında dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olduğuna göre $1 \leq i \leq n$ için her bir $x_i: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k . değişkene göre kısmi türevi

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}, 1 \leq i \leq n$$

dir [24].

Tanım 2.13.

$\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $T(s) = \gamma'(s)$ eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [21].

Tanım 2.14.

γ eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer her $s \in I$ için $\|\gamma'\| = 1$ ise γ eğrisi birim hızlı eğridir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [23].

Tanım 2.15.

$T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına, γ eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [21].

Tanım 2.16.

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için, $N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$ eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir. N vektör alanına, γ eğrisinin birinci vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir [21].

Tanım 2.17.

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, γ eğrisi için $\gamma(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir. B vektör alanına, γ eğrisinin ikinci vektör alanı (binormal vektör alanı) denir [21].

Tanım 2. 18.

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olsun.

$\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\gamma(s)$ noktasındaki dokunum düzlemi veya oskülatör düzlem denir.

$\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\gamma(s)$ noktasındaki doğrultma düzlemi veya rektifyan düzlem denir.

$\{B(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\gamma(s)$ noktasındaki dik düzlem veya normal düzlem denir [21].

Teorem 2.1.

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere, $T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T + \tau B$ ve $B' = -\tau N$ dir [21].

Tanım 2.19.

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için, $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ fonksiyonuna, γ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği denir [21].

Tanım 2.20.

$\mathbb{R}^3$ Uzayındaki birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere, $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ fonksiyonuna, γ eğrisini burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki burulması denir [21].

Tanım 2.21.

E^n 'de yay parametrelili bir eğri γ , $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ ve sabit birim vektör U olsun. Her $s \in I$ için $\gamma'(s)$, γ' 'nin s noktasındaki birim teğet vektörü olmak üzere $\gamma'(s)$ ve U arasında ϕ kadar sabit açı yapıyorsa γ 'ya E^n de helis adı verilir [24].

Tanım 2.22.

E^n 'de birim hızlı eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ olsun. Sıfırdan farklı k_i eğrilikli ve γ 'nın frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ verilsin. γ 'nın i . birim vektör alanı U ile bir doğrultusu ϕ kadar sabit bir açı yapıyorsa γ 'ya V_n -slant helis adı verilir [24].

Tanım 2.23.

E^4 'de s yay parametrelili bir eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ olsun ve X sabit birim vektörü olmak üzere her $s \in I$ için, $\gamma'(s)$, γ 'nın s noktasındaki birim teğet vektörü olmak üzere $\gamma'(s)$ ve X arasında ϕ kadar sabit açı yapıyorsa

$$\langle \gamma'(s), X \rangle = \cos \phi \quad \phi \neq 0, \phi = \text{sabit}$$

γ 'ya E^4 'de helis adı verilir [24].

Tanım 2.24.

$I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere E^4 'de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. γ 'nın teğet vektör alanına dik birim normal vektör alanı $T(U)$ olmak üzere $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ kümesine γ 'nın paralel öteleme çatısı, Bishop çatısı veya paralel taşıma çatısı denir. Biz bu çalışmada daha çok paralel taşıma çatısı ismini kullanacağız [25].

Tanım 2.25.

γ , birim hızlı eğrisinin paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. k_1, k_2, k_3 sırasıyla eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikliğini belirtsin. E^4 'de her $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ için $k_3 \neq 0$ olmak üzere Frenet formülleri aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \\ M_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

dir [26].

Tanım 2.26.

E^4 'de keyfi bir γ eğrisi sabit eğrilik fonksiyonlarına sahipse ω -eğri olarak adlandırılır [24].

Tanım 2.27.

E^4 Öklid uzayında bir tür eğik helezona B_2 -slant helis adı verilir [24].

Teorem 2.2.

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ birim hızlı, sıfırdan farklı k_i eğrilikli ($i = 1, 2, 3$) eğri olsun. B_2 -slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{k_3'}{k_2}\right)^2 = \tan^2 \phi_3 = \text{sabit}$$

olması gerekir. $\phi_3 = B_2$ binormal vektör alanı ile birim sabit vektör U arasındaki açıdır [25].

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde tezimizin asıl konusunu oluşturan slant helisler verilecektir.

3.1. 4 -Boyutlu Öklid Uzayında (k, m) –Tip Slant Helisler

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında (k, m) -tip slant helisleri vereceğiz.

Tanım 3.1.1.

E^4 'te bir regüler eğri γ , eğrinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ olsun. U sıfırdan farklı sabit vektör alanı $U \in E^4$ olmak üzere $1 \leq k \leq 4$ $k \neq m$ için $\langle V_k, U \rangle = a$ (a sabit) olmak üzere γ eğrisine (k, m) - tip slant helis denir. U sabit vektörü (k, m) -tip slant helis üzerindedir Frenet çatısına göre U vektörünü düzenlersek burada $k_i \neq 0, (1 \leq i \leq 3)$ $u_i = u_i(s)$ 'ler s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonlar ve $V_1 = T, V_2 = N, V_3 = B_1, V_4 = B_2$ diyebiliriz. O halde;

$$U = u_1 T + u_2 N + u_3 B_1 + u_4 B_2 \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir [20].

Teorem 3.1.1.

E^4 'te γ , bir regüler eğri olsun. Frenet çatısına göre $(1,2)$ –tip slant helis olamaz [20].

İspat:

Farz edelim ki γ , $(1,2)$ –tip slant helis olsun. U sabit vektör alanı olmak üzere

$$\langle T, U \rangle = a, \quad \langle N, U \rangle = b,$$

ve Frenet formüllerini kullanarak türevini alırsak.

$$k_1 \langle N, U \rangle = 0$$

olup N ve U ortogonaldır. E^4 te $(1,2)$ - tip slant helis yoktur.

Teorem 3.1.2.

E^4 'te γ , bir regüler eğri olsun. γ , $(1,3)$ - tip slant helis olamaz [20].

İspat:

Farz edelim ki; γ , $(1,3)$ -tip slant helis olsun.

$$\langle T, U \rangle = a, a = \text{sabit} \quad \langle B, U \rangle = b, b = \text{sabit}$$

yazabiliriz. Ayrıca Tanım 3.1.1 den

$$U = aT + bB_1 + u_2 B_2$$

U sabit vektör alanının türevini alırsak

$$0 = a(k_1 N) + b(-k_2 N + k_3 B_2) + u_2' B_2 + u_2(-k_3 B_1) \quad (3.2)$$

$$0 = ak_1 N - bk_2 \quad (3.3)$$

$$0 = -u_2 k_3 \quad (3.4)$$

$$0 = u_2' + bk_3 \quad (3.5)$$

buradan $b = 0$ dır. Dolayısıyla $u_2 = 0$ dır. O halde E^4 'te $(1, 3)$ - tip slant helis olamaz.

Teorem 3.1.3.

E^4 'te γ , bir regüler eğri olsun. γ , $(1, 4)$ -tip slant helis olamaz [20].

İspat:

Farz edelim ki; γ , $(1, 4)$ -tip slant helis olsun. O halde;

$$U = aT + u_1B_1 + bB_2$$

yazabiliriz. U sabit vektör alanının türevinden aşağıdaki denklemleri yazabiliriz.

$$0 = a(k_1N) + u_1'B_1 + u_1(-k_2N + k_3B_2) + b(-k_3B_1) \quad (3.6)$$

$$0 = ak_1 - u_1k_2 \quad (3.7)$$

$$0 = u_1' - bk_3 \quad (3.8)$$

$$0 = u_1k_3 \quad (3.9)$$

Burada 3.8 denkleminde $b = 0$ olduğundan $u_1' = 0$ olur. γ , $(1, 4)$ -tip slant olamaz.

Sonuç 3.1.1.

E^4 'te γ , bir regüler eğri olsun. γ , $(1, k)$ - tip slant helis olamaz [20].

Teorem 3.1.4:

Eğer γ , $(2, 3)$ - tip slant helis ise gerek ve yeter şart

$$\frac{k_2(t)}{k_1(t)} - \int_0^s k_1(t)dt = 0$$

dir [20].

İspat:

Farz edelim ki; γ , E^4 'te $(2, 3)$ -tip slant helis olsun.

$$U = u_1T + aN + bB_1 + u_2B_2$$

U sabit vektörünün türevini alırsak

$$0 = u_1'T + u_1(k_1N) + a(-k_1T + k_2B_1) + b(-k_2N + k_3B_2) + u_2'B_2 + u_2(-k_3B_1) \quad (3.10)$$

$$0 = u_1' - ak_1 \quad (3.11)$$

$$0 = u_1k_1 - bk_2 \quad (3.12)$$

$$0 = ak_2 - k_3 \quad (3.13)$$

$$0 = bk_3 + u_2' \quad (3.14)$$

3.11 ve 3.14 denklemlerinden

$$u_1 = a \int_0^s k_1(t)dt \quad (3.15)$$

$$u_2 = -b \int_0^s k_3(t) dt \quad (3.16)$$

3.12 denkleminde $u_1 = b \frac{k_2}{k_1}$ dir. Bu sonucu dikkate alarak 3.15 denkleminde

$$c \int_0^s k_1(t) dt = b \frac{k_2}{k_1} = \frac{a}{b} \int_0^s k_1(t) dt \quad (3.17)$$

a ve b sabit olduğu için dolayısıyla $\frac{a}{b}$ de sabittir 3.17 denklemini kullanarak

$$\frac{k_2(t)}{k_1(t)} - \int_0^s k_1(t) dt$$

yazabiliriz. O halde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.5.

E^4 'te γ , bir regüler eğri olsun. γ , $(2,4)$ -tip slant helis olamaz [20].

İspat:

Farz edelim ki γ , E^4 'te $(2,4)$ -tip slant helis olsun. O halde U sabit vektörünü

$$U = u_1 T + aN + u_2 B_1 + bB_2$$

yazabiliriz. U sabit vektörünün türevinden

$$\begin{aligned} 0 &= u_1' T + u_1(k_1 N) + a(-k_1 T + k_2 B_1) + u_2' B_1 \\ &\quad + u_2(-k_1 N + k_3 B_2) + b(-k_3 B_2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$0 = u_1' - ak_1 \quad (3.19)$$

$$0 = u_1 k_1 - u_2 k_2 \quad (3.20)$$

$$0 = ak_2 + u_2' - bk_3 \quad (3.21)$$

$$0 = u_2 k_3 \quad (3.22)$$

3.22 denkleminde $u_2 = 0$ dir. 3.20 denkleminde de $u_1 = 0$ ve sonuç olarak $a = b = 0$ yazabiliriz. O halde E^4 'te $(2,4)$ -tip slant helis yoktur.

Teorem 3.1.6.

E^4 'te γ , bir regüler eğri olsun. γ , $(3,4)$ - tip slant helis olamaz [20].

İspat:

Farz edelim ki γ , E^4 'te $(3,4)$ - tip slant helis olsun. O halde;

$$U = u_1 T + u_2 N + aB_1 + bB_2 \quad (3.23)$$

U sabit vektörün türevinden

$$0 = (u_1' - u_1 k_1) T + (u_1 k_1 + u_2' - ak_2) N + (u_2 k_2 - bk_3) B_1 + (ak_3) B_2$$

$$0 = u_1' - u_2 k_1$$

$$0 = u_1 k_1 + u_2' - ak_2$$

$$0 = u_2 k_2 - bk_3$$

$$0 = ak_3$$

$a = 0$ dır. Diğer teoremlerdeki gibi E^4 'te (3,4)- tip slant helis yoktur.

3.2. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Tip-3 Slant Helisler

Bu bölümde, 4-boyutlu Öklid Uzayı E^4 'te Bishop çatısına göre tip-3 slant helisleri vereceğiz.

Tanım 3.2.1.

γ eğrisinin, Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ Burada γ 'nın paralel taşıma çatısında eğrilik fonksiyonları $\{k_1, k_2, k_3\}$ Frenet çatısındaki eğrilikleri $\{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ olmak üzere aşağıdaki denklemleri verebiliriz.

$$N = \cos \Theta(s) \cos \psi(s) M_1 + (-\cos \varphi(s) \sin \psi(s) + \sin \varphi(s) \sin \Theta(s) \cos \psi(s)) M_2$$

$$+ (\sin \varphi(s) \sin \psi(s) + \cos \varphi(s) \sin \Theta(s) \cos \psi(s)) M_3$$

$$B_1 = \cos \Theta(s) \sin \psi(s) M_1 + (\cos \varphi(s) \cos \psi(s) + \sin \varphi(s) \sin \Theta(s) \sin \psi(s)) M_2$$

$$+ (-\sin \varphi(s) \cos \psi(s) + \cos \varphi(s) \sin \Theta(s) \sin \psi(s)) M_3$$

$$B_2 = -\sin \Theta(s) M_1 + \sin \varphi(s) \cos \Theta(s) M_2 + \cos \varphi(s) \cos \Theta(s) M_3$$

Buradan paralel taşıma denklemlerini:

$$T' = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3, M_1' = -k_1 T, M_2' = -k_2 T, M_3' = -k_3 T \quad (3.24)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$k_1 = \bar{k}_1 \cos \Theta \cos \psi,$$

$$k_2 = \bar{k}_1 (-\cos \phi \sin \psi + \sin \Theta \sin \phi \cos \psi),$$

$$k_3 = \bar{k}_1 (\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \Theta \cos \psi),$$

$$\bar{k}_1(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2},$$

$$\bar{k}_2(s) = -\psi'(s) + \phi'(s) \sin \Theta(s),$$

$$\bar{k}_3(s) = \frac{\theta'(s)}{\sin \psi(s)},$$

$$\varphi'(s) = \frac{-\phi'(s) \cot \psi(s)}{\cos \Theta(s)}.$$

Buradan;

$$\psi'(s) = -(\bar{k}_2 + \bar{k}_3) \frac{\sqrt{k_3^2 - \theta'^2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}},$$

$$\phi'(s) = -\frac{\sqrt{k_3^2(s) - \theta'(s)^2}}{\cos \Theta(s)},$$

$$\theta'(s) = \frac{\bar{k}_3(s)}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}}.$$

dir [25].

Tanım 3.2.2.

E^4 'te sıfırdan farklı k_i eğrilikli ve birim hızlı eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ olsun. γ , birim hızlı eğrisinin paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. X sabit yönlü vektör olmak üzere, X ile paralel vektör alanı M_3 arasında ϕ kadar sabit açı oluşturuyorsa. Bu eğriye, tip-3 slant helis denir.

$$\langle M_3, X \rangle = \cos \phi = \text{sabit}$$

ile gösterilir [25].

Tanım 3.2.3.

E^4 'te sıfırdan farklı k_i eğrilikli birim hızlı eğri γ olsun. γ 'nın harmonik eğrilik fonksiyonları

$$H_0 = 0$$

$$H_1 = -\frac{\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}$$

$$H_3 = \frac{\left(\frac{k_3}{k_1}\right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}$$

şeklinde tanımlanır [25].

Teorem 3.2.1.

E^4 'te sıfırdan farklı k_i eğrilikli ve birim hızlı eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ olsun. γ , birim hızlı eğrisinin paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ ve harmonik eğrilikleri $\{H_0, H_1, H_2\}$ olsun. Eğer γ , eksen X olan tip-3 slant helis ise Bu takdirde;

$$\langle T, X \rangle = H_0 \langle M_3, X \rangle$$

$$\langle M_2, X \rangle = H_1 \langle M_3, X \rangle$$

$$\langle M_3, X \rangle = H_2 \langle M_3, X \rangle$$

eşitlikleri sağlanır [25].

İspat:

γ , eksen X olan tip-3 slant helis olduğundan

$$\langle M_3(s), X \rangle = \cos \phi = \text{sabit}$$

yazılabilir. Denklemin s 'ye göre diferansiyelini alırsak.

$$\langle M_3(s)', X \rangle = \cos \phi'$$

$$-k_3 \langle T, X \rangle = 0$$

Burada ; $k_3 \neq 0$ dır.

$$\langle T, X \rangle = 0$$

$$\langle T, X \rangle = H_0 \langle M_3, X \rangle \tag{3.25}$$

elde edilir. Bu da 3.25 denkleminin s 'ye göre diferansiyelidir. Paralel taşıma çatısını kullanırsak

$$k_1 \langle M_1, X \rangle + k_2 \langle M_2, X \rangle + k_3 \langle M_3, X \rangle = 0 \quad (3.26)$$

denklemini elde edilir. 3.26 'nın s'ye göre diferansiyeli alınırsa

$$k_1' \langle M_1, X \rangle + k_2' \langle M_2, X \rangle + k_3' \langle M_3, X \rangle = 0 \quad (3.27)$$

elde edilir 3.26 ve 3.27 denkleminde

$$\begin{aligned} \langle M_1, X \rangle &= \left[\frac{k_3}{k_2} \right]' \langle M_3, X \rangle \\ \langle M_2, X \rangle &= \left[\frac{k_3}{k_1} \right]' \langle M_3, X \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

dir. Tanım 3.2.3' den

$$\begin{aligned} \langle M_1, X \rangle &= H_1 \langle M_3, X \rangle \\ \langle M_2, X \rangle &= H_2 \langle M_3, X \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1.

E^4 'te sabit bir vektör alanı X , ve sıfırdan farklı k_i eğrilikli birim hızlı eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ ve harmonik eğrilikleri $\{H_0, H_1, H_2\}$ olsun. Buradan, γ 'nın X eksenli tip-3 slant helis olması için gerek ve yeter şart γ 'nın harmonik eğrilikleri

$$H_1 = -\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' / \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \quad \text{ve} \quad H_2 = -\left(\frac{k_3}{k_1}\right)' / \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' (\neq 0)$$

sabit olmasıdır[25].

İspat:

Denklemler 3.25 'in s'ye göre diferansiyelinden

$$-k_1 \langle T, X \rangle = H_1' \langle M_3, X \rangle = 0$$

yazabiliriz. $\langle M_3, X \rangle \neq 0$ ve $H_1' = 0$ olabilir. Çünkü ; H_1 sabit fonksiyondur.

Tersine; H_1 sabit ve

$$\langle M_1, X \rangle = H_1 \langle M_3, X \rangle$$

denkleminin s 'ye göre diferansiyelinden;

$$-k_1 \langle T, X \rangle = H_1' \langle M_3, X \rangle + H_1 [\langle M_3, X \rangle]' = 0$$

dir.

$$\langle M_3, X \rangle = \|M_3\| \|X\| \cos \phi = \text{sabit}$$

olur. Buradan kolaylıkla görebiliriz ki H_2 de sabit fonksiyondur.

Sonuç 3.2.2.

E^4 'te bir sabit vektör alanı X , sıfırdan farklı k_i ($i = 1, 2, 3$) eğrilikli birim hızlı eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ harmonik eğrilikleri $\{H_0, H_1, H_2\}$ olsun. Burada; tip-3 slant helisin eksenli

$X = \{H_1M_1 + H_2M_2 + M_3\} \cos \phi$
dir[25].

İspat:

Eğer, E^4 'te γ 'nın tip-3 slant helisin X ise Teorem 3.2.1 'i kullanarak

$$X = c_1T + c_2M_2 + c_3M_3 + c_4M_4$$

yazabiliriz. Burada;

$$c_1 = \langle T, X \rangle = H_0 \langle M_3, X \rangle = 0$$

$$c_2 = \langle M_1, X \rangle = H_1 \langle M_3, X \rangle$$

$$c_3 = \langle M_2, X \rangle = H_2 \langle M_3, X \rangle$$

$$c_4 = \langle M_3, X \rangle = \cos \phi$$

kolaylıkla;

$$X = \{H_1M_1 + H_2M_2 + M_3\} \cos \phi$$

çözümüne ulaşabiliriz.

Teorem 3.2.2.

E^4 'te bir sabit vektör alanı X , sıfırdan farklı k_i eğrilikli birim hızlı eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ harmonik eğrilikleri $\{H_0, H_1, H_2\}$ olsun. Burada; tip-3 slant helis olması için $\{M_1, M_2\}$ vektör alanları ile sabit açı yapması gerekir. Yani; $\langle M_1, X \rangle$ ve

$\langle M_2, X \rangle$ sabittir[25].

İspat:

Teorem 3.2.1 'den $\langle M_1, X \rangle = H_1 \cos \phi$ ve $\langle M_2, X \rangle = H_2 \cos \phi$ yazabiliriz. Ayrıca,

Sonuç 3.2.2 'den γ 'nın tip-3 slant helisinin harmonik eğrilikleri $\{H_1, H_2\}$ sabittir. Çünkü ;

$$\langle M_1, X \rangle' = (H_1 \cos \phi)' = 0 \text{ ve } \langle M_2, X \rangle' = (H_2 \cos \phi)' = 0 \text{ iki denklemin türevinden}$$

$\langle M_1, X \rangle$ ve $\langle M_2, X \rangle$ sabit olduğu anlaşılır.

Bu teoremden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.3.

γ , tip-3 slant helis ise aynı zamanda tip-1 ve tip-2 slant helisdir[25].

Tanım 3.2.5.

E^4 'te $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ birim hızlı eğri ve sıfırdan farklı eğrilikleri k_i ($i = 1, 2, 3$) olsun. E^4 'te bir sabit vektör alanı X olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ harmonik eğrilikleri $\{H_0, H_1, H_2\}$ olmak üzere. γ eğrisinin tip-3 slant helisinin Darboux vektörü

$$D = H_1M_1 + H_2M_2 + M_3$$

verilebilir[25].

Teorem 3.2.3.

γ, E^4 'te sıfırdan farklı k_i ($i = 1,2,3$) eğrilikli birim hızlı eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. X bir sabit vektör alanı olmak üzere, γ tip-3 slant helistir gerek ve yeter şart D sabit vektör alanıdır[25].

İspat:

Eksenli X olan γ , tip-3 helis olsun. Sonuç 3.2.2 den biliyoruz ki,

$X = \{H_1 M_1 + H_2 M_2 + M_3\} \cos \phi$ dir. Tersine; D sabit vektör alanı olsun. O halde;

$$\langle D, M_3 \rangle = 1$$

$$\|D\| \cos \phi = 1$$

dir. Buradan;

$$\cos \phi = \frac{1}{\|D\|}$$

ϕ , D ve M_3 arasındaki açıdır. O halde;

$$\langle X, M_3 \rangle = \cos \phi = \frac{1}{\|D\|}$$

olup X sabit vektör ve γ tip-3 slant helisdir.

Teorem 3.2.4.

Eğer; γ tip-3 slant helis ise

$$\left[\frac{(k_3/k_2)'}{(k_1/k_2)'} \right]^2 + \left[\frac{(k_3/k_2)'}{(k_2/k_1)'} \right]^2 = \tan^2 \phi = \text{sabit}$$

dir. ϕ , X ile M_3 arasındaki sabit açıdır[25].

İspat:

γ tip-3 slant helis, X eksenli bir vektör alanıdır.

$$(H_1^2 + H_2^2) \cos^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

Buradan;

$$H_1^2 + H_2^2 = \left[\frac{(k_3/k_2)'}{(k_1/k_2)'} \right]^2 + \left[\frac{(k_3/k_2)'}{(k_2/k_1)'} \right]^2 = \frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \tan^2 \phi = \text{sabit}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5.

γ 'nın tip-3 slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$k_1 H_1 + k_2 H_2 + k_3 = 0$$

olmasıdır[25].

İspat:

γ 'nın tip-3 slant helisinin D darboux vektörünün diferansiyeli

$$D' = H_1' M_1 + H_1 M_1' + H_2' M_2 + H_2 M_2' + M_3' = 0$$

Burada Sonuç 3.2.1 'den kolaylıkla

$$k_1 H_1 + k_2 H_2 + k_3 = 0$$

olur. Tersine; Eğer;

$$k_1 H_1 + k_2 H_2 + k_3 = 0$$

ise $D' = 0$ ve buradan da $D = \text{sabit}$ olur ki Teorem 3.2.3 'den γ 'nın tip-3 slant helis olur.

Teorem 3.2.6.

γ 'nın paralel taşıma çatısının matrisi

$$M_3(s) = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R_3^3$$

şeklinde verilsin. Burada γ 'nın tip-3 slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D = [H_0 \ H_1 \ H_2 \ 1] \in R_1^3$$

olmak üzere

$$M_3(s)[H_0 \ H_1 \ H_2 \ 1]^T = \frac{d}{ds}[H_0 \ H_1 \ H_2 \ 1]$$

eşitliğinin sağlanmasıdır[25].

İspat:

Teorem 3.2.5 ve Sonuç 3.2.1 'i kullanarak

$$\begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ 1 \end{bmatrix} = k_1 H_1 + k_2 H_2 + k_3 = \frac{d}{ds}[H_0 \ H_1 \ H_2 \ 1] = 0$$

elde edilir. Sonuç 3.2.1 ve Teorem 3.2.5 'den ispat aşıkardır.

Sonuç 3.2.4.

γ eğrisi tip-3 slant helistir gerek ve yeter şart D darboux vektörü paralel taşıma çatısında matrisi $M_3(s)$ 'in çekirdeğindedir[25].

Teorem 3.2.7.

E^4 'te γ , tip-3 slant helis ise ω -eğri olamaz[25].

İspat:

Farz edelim ki;

γ , tip-3 slant helis olsun ve ω -eğrisi olsun. Burada, 3.28 denkleminde

$$\cos \phi = \frac{\langle M_1, X \rangle \left(\frac{k_1}{k_2} \right)'}{\left(\frac{k_2}{k_3} \right)'} \neq 0 \quad (3.29)$$

yazabiliriz. Çünkü;

$\frac{k_1}{k_2}, \frac{k_3}{k_2}$ oranları sabit olamaz. Diğer taraftan eğer γ , ω -eğri ise $\overline{k_1}, \overline{k_2}, \overline{k_3}$ 'ler sabit aynı zamanda $\frac{k_1}{k_2}$ nin de sabit olması demektir. 3.29 denkleminde $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ dır. Bu nedenle, γ , ω -eğri olamaz.

Teorem 3.2.8.

E^4 'te birim hızlı ve sıfırdan farklı k_i eğrilikli eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ olsun. a, b, c sabit olmak üzere, eğer γ 3-küre S^3 üzerinde yatıyorsa gerek ve yeter şart

$$ak_1 + bk_2 + ck_3 + 1 = 0$$

dır[25].

Teorem 3.2.9.

γ , sıfırdan farklı $k_i (i = 1, 2, 3)$ eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. Eğer γ , bir tip-3 slant helis ise S^3 küresi üzerinde yatan eğri olamaz[25].

İspat:

γ , P merkezli, r yarıçaplı küre üzerinde yatan bir eğri olsun. Bu takdirde; Teorem 3.2.8 'den a, b, c sabitler ve $\{k_1, k_2, k_3\}$ sıfırdan farklı eğrilikler olmak üzere $ak_1 + bk_2 + ck_3 + 1 = 0$ dır. Ancak Teorem 3.2.5 'den eğer γ eğrisi tip-3 slant helis ise H_1, H_2 sabitler olmak üzere

$$k_1 H_1 + k_2 H_2 + k_3 = 0$$

dır. Yani $\{k_1, k_2, k_3\}$ eğrilikleri $ak_1 + bk_2 + ck_3 + 1 = 0$ denklemini sağlamaz. Böylece γ , S^3 küresi üzerinde yatan bir eğri olamaz.

3.3. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Paralel Taşıma Çatısına Göre k -Tip Slant Helisler

Tanım 3.3.1.

E^4 'te s yay parametrelili bir eğri γ ve γ eğrisinin paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. Eğer, U sıfırdan farklı sabit yönlü vektör alanı ile eğrinin k . eğriliği her $s \in I$ için $\langle M_k, U \rangle \neq 0$ oluyorsa γ 'ya k -tip slant helis denir $\{k \in \{0, 1, 2, 3\}\}$. Burada $M_0 = T$ ve U γ 'nın eksenidir [26].

Teorem 3.3.1.

γ , E^4 'te paralel taşıma çatısında birim hızlı bir eğri ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{k_1, k_2, k_3\}$ olsun. E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 0-tip slant helis (genel helis) yoktur [26].

İspat:

Farz edelim ki, γ E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 0-tip slant helis olsun. O halde;

$$\langle T, U \rangle = c_1(s) \quad (3.30)$$

ifadesi sabittir. Paralel taşıma çatısına göre denklemin türevini alırsak

$$\langle k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3, U \rangle = 0 \quad (3.31)$$

$$k_1 \langle M_1, U \rangle + k_2 \langle M_2, U \rangle + k_3 \langle M_3, U \rangle = 0 \quad (3.32)$$

bu denklemde U birim vektörünün $\{T\}$ ile gerilmiş alt uzaya gerilmiş olduğunu gösterir. O halde

$$U = c_1(s)T \quad (3.33)$$

yazılır. 3.33 denkleminin diferansiyelini alırsak

$$c_1 k_1 M_1 + c_2 k_2 M_2 + c_3 k_3 M_3 = 0 \quad (3.34)$$

dir. $\{M_1, M_2, M_3\}$ lineer bağımsız vektörler olduğu için sıfır olamaz o halde $c_1 = 0$ dir.

Buradan

$$U = 0 \quad (3.35)$$

olur. 3.35 denklemi U 'nun tanımı ile çelişir o halde E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 0-tip slant helis (genel helis) yoktur.

Teorem 3.3.2.

γ, E^4 'te birim hızlı ve sıfırdan farklı $\{k_1, k_2, k_3\}$ eğrilikli bir eğri olsun. γ 'nın E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 1-tip slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$-c_0 \frac{k_1}{k_3} - c_1 \frac{k_2}{k_3} \quad (3.36)$$

denklemi sabittir ve denklemde c_0 ve c_1 sabittir [26].

İspat:

Farz edelim ki, γ 'nın E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 1-tip slant helis, U sabit yönlü birim vektörü olsun. O halde;

$$\langle M_1, U \rangle = c_0(s), \quad c_0(s) \in \mathbb{R} \quad (3.37)$$

yazılabilir. s 'ye göre paralel taşıma çatısını kullanarak türev alırsak

$$-k_1 \langle T, U \rangle = 0 \quad (3.38)$$

dir. U birim vektörü $\{T, M_1, M_2\}$ gerdiği düzlemde yatar buna göre

$$U = c_0(s)M_1 + a(s)M_2 + b(s)M_3 \quad (3.39)$$

denklemi verilir.

$$(-c_0 k_1 - a k_2 - b k_3)T + a' M_2 + b' M_3 = 0 \quad (3.40)$$

$\{T, M_1, M_2\}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan

$$-c_0 k_1 - a k_2 - b k_3 = 0 \quad (3.41)$$

$$a' = 0 \quad (3.42)$$

$$b' = 0 \quad (3.43)$$

3.41, 3.42 ve 3.43 denklemlerinden

$$a = c_1, \quad b = -c_0 \frac{k_1}{k_3} - c_1 \frac{k_2}{k_3}$$

elde edilir. Tersine;

Eğer 3.36 denkleminin sağlandığını farz edelim U sabit yönlü birim vektörü ile

$$\langle M_1, U \rangle = \text{sabit}$$

yazabiliriz.

$$U = M_1 + M_2 - \left(\frac{k_1}{k_3} + \frac{k_2}{k_3}\right)M_3 \quad (3.44)$$

3.36 denkleminin yardımıyla U 'nın türevini alırsak $U' = 0$ olur. Buradan U sabit vektör çıkar. Sonuç olarak, γ E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 1-tip slant helisdir.

Teorem 3.3.2 den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3.1.

γ 'nın E^4 'te paralel taşıma çatısına göre sıfırdan farklı eğrilikleri $\{k_1, k_2, k_3\}$ olmak üzere γ 'nın eksenini

$$U = c_0 M_1 + c_1 M_2 + \left(-c_0 \frac{k_1}{k_3} - c_1 \frac{k_2}{k_3}\right)M_3$$

yazabiliriz. Burada c_0 ve c_1 sabitlerdir[26].

Teorem 3.3.3.

γ , E^4 'te birim hızlı ve sıfırdan farklı $\{k_1, k_2, k_3\}$ eğrilikli bir eğri olsun. γ 'nın E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 2-tip slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$-c_0 \frac{k_2}{k_3} - c_1 \frac{k_1}{k_3} = \text{sabit} \quad (3.45)$$

olmasıdır [26].

İspat:

γ 'nın E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 2-tip slant helis, ve U sabit yönlü sıfırdan farklı vektör olsun.

$$\langle M_2, U \rangle = c_0(s) \quad (3.46)$$

yazabiliriz. 3.46 'nın paralel taşıma çatısına göre türevini alırsak

$$-k_2 \langle T, U \rangle = 0 \quad (3.47)$$

U birim vektör $\{M_1, M_2, M_3\}$ gerdiği alt uzayda yatar. Buradan

$$U = a(s)M_1 + c_0(s)M_2 + b(s)M_3 \quad (3.48)$$

3.48 denkleminin diferansiyelini alırsak

$$(-ak_1 - c_0 k_2 - bk_3)T + a'M_2 + b'M_3 = 0$$

dır. $\{T, M_2, M_3\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$-ak_1 - c_0 k_2 - bk_3 = 0$$

$$a' = 0 \quad (3.49)$$

$$b' = 0$$

3.49 denkleminde

$$a = c_1, b = -c_0 \frac{k_2}{k_3} - c_1 \frac{k_1}{k_3} \quad (3.50)$$

c_1 sabittir.

Tersine;

3.45 denkleminin sağlandığını varsayalım. U sabit sıfırdan farklı vektörü $\langle M_1, U \rangle = \text{sabit}$ Buradan;

$$U = M_1 + M_2 + \left(\frac{k_2+k_1}{k_3}\right)M_3$$

U 'nın türevini alırsak 3.45 denklemi yardımıyla $U' = 0$ bulunur. U sabit vektör olduğundan γ , 2-tip slant helistir.

Teorem 3.3.3 den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3.2.

γ, E^4 'te paralel taşıma çatısında 2-tip slant helis ise eksen

$$U = c_0 M_1 + c_1 M_2 + \left(-c_0 \frac{k_2}{k_3} - c_1 \frac{k_3}{k_3}\right) M_3$$

dir[26].

Teorem 3.3.4.

γ, E^4 'te birim hızlı ve sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğrilikli bir eğri olsun. γ 'nın E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 3-tip slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$-c_1 \frac{k_1}{k_2} - c_0 \frac{k_3}{k_2} = \text{sabit} \quad (3.51)$$

olmasıdır [26].

İspat:

γ, E^4 'te paralel taşıma çatısında 3-tip slant helis olsun.

$$\langle M_3, U \rangle = c_0(s) \quad (3.52)$$

yazabiliriz. 3.52 denkleminin türevini alırsak

$$-k_3 \langle T, U \rangle = 0 \quad (3.53)$$

$$U = a(s)M_1 + b(s)M_2 + c_0(s)M_3 \quad (3.54)$$

$$U' = (-c_0 k_1 - a k_2 - b k_3)T + a' M_2 + b' M_3 = 0 \quad (3.55)$$

dır. $\{T, M_2, M_3\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$0 = -a k_1 - b k_2 - c_0 k_3, \quad 0 = a', \quad 0 = b' \quad (3.56)$$

$$a = c_1 \quad b = -c_1 \frac{k_1}{k_2} - c_0 \frac{k_3}{k_2} \quad (3.57)$$

$c_1 = \text{sabit}$ elde edilir.

Tersine; eğer 3.36 denklemi sağlanıyorsa $\langle M_1, U \rangle = \text{sabit}$

$$U = M_1 + \left(-\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_3}{k_2}\right) M_2 + M_3 \quad (3.58)$$

U vektörünün diferansiyelini alırsak $U' = 0$ bulunur. Bu da U 'nın sabit vektör olduğunu gösterir. O halde γ 'nın E^4 'te paralel taşıma çatısına göre 3-tip slant helisdir.

Bu teoremi takip ederek aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.3.

γ, E^4 'te paralel taşıma çatısına göre sıfırdan farklı k_1, k_2 ve k_3 eğrilikli 3-tip slant helis olsun. γ 'nın eksenini olarak c_0 ve c_1 sabit olmak üzere;

$$U = c_1 M_1 + \left(-c_1 \frac{k_1}{k_2} - c_0 \frac{k_3}{k_2}\right) M_2 + c_0 M_3 \quad (3.59)$$

dır[26].

3.4. n -Boyutlu Öklid Uzayında V_n -Slant Helisler

Bu bölümde n -boyutlu Öklid uzayında V_n - slant helisleri vereceğiz.

Tanım 3.4.1.

γ, E^n 'de birim hızlı bir eğri olsun. γ 'nın harmonik eğrilik fonksiyonları

$$H_i^*: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_i^* = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}}, & i = 1 \\ \{k_{n-i} H_i^* - H_{i-1}^*\} \frac{1}{k_{n-(i+1)}}, & i = 2, 3, \dots, n-2 \end{cases} \quad (3.60)$$

şeklinde tanımlıdır [27].

Tanım 3.4.2.

$\gamma: I \rightarrow E^n$ birim hızlı bir eğri olsun. $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)\}$, $\{H_1(t), H_2(t), \dots, H_n(t)\}$ sırasıyla γ eğrisinin Frenet çatısı ve yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri olsun.

$$D = V_1 + H_1 V_3 + \dots + H_{n-2} V_n \quad (3.61)$$

vektörüne γ eğrisinin Darboux vektörü denir [27].

Tanım 3.4.3.

E^n 'de yay parametrelili bir eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, ve sabit birim vektör X olsun. Her $s \in I$ için γ 'nın s noktasındaki birim teğet vektörü $\gamma'(s)$ ve X arasında φ kadar sabit açı yapıyorsa γ 'ya E^n de helis adı verilir [27].

$$\langle \gamma'(s), X \rangle = \cos \varphi, \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi = \text{sabit} \quad (3.62)$$

Tanım 3.4.4.

E^n 'de birim hızlı eğri γ olsun. Sıfırdan farklı k_i eğrilikli ve γ 'nın Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ verilsin. γ 'nın i . birim vektör alanı ile bir X doğrultusu φ kadar sabit bir açı yapıyorsa γ 'ya V_n -slant helis adı verilir [27].

Tanım 3.4.5.

E^4 'de keyfi bir γ eğrisi sabit eğrilik fonksiyonlarına sahipse ω -eğri olarak adlandırılır [27].

Tanım 3.3.6.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ regüler bir eğri olsun. Bu eğri sabit eğrilik oranlarına sahipse yani $H_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ ve $H_2 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2}$ oluyorsa bu eğriler ccr-eğri olarak adlandırılır. Ayrıca E^4 Öklid uzayında ω -eğrisi ccr-eğrisinin özel durumudur [27].

Önerme 3.4.1.

E^n 'de yay parametrelili bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ olsun. γ 'nın harmonik eğrilik fonksiyonları $\{H_1^*, H_2^*, \dots, H_n^*\}$

ve türevleri

$$\{H_1^{*'}, H_2^{*'}, \dots, H_n^{*'}\}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} H_1^{*'} \\ H_2^{*'} \\ H_3^{*'} \\ \vdots \\ H_{n-4}^{*'} \\ H_{n-3}^{*'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k_{n-3} & 0 & -k_{n-4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{n-4} & 0 & -k_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^* \\ H_2^* \\ H_3^* \\ \vdots \\ H_{n-4}^* \\ H_{n-3}^* \\ H_{n-2}^* \end{bmatrix}$$

dir [27].

Önerme 3.4.2.

E^n 'de yay parametrelili bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$ de birim sabit vektör alanı X , γ 'nın Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilik fonksiyonları $\{H_1^*, H_2^*, \dots, H_{n-2}^*\}$ verilsin. Eğer;

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisi ekseni X olan V_n -slant helis ise bu takdirde

$$\langle V_{n-(i+1)}, X \rangle = H_i^* \langle V_n, X \rangle \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (3.63)$$

dir[27].

İspat:

Bu önerme için tümevarım yöntemini kullanalım

$i = 1$ için;

X birim sabit vektör alanı $\forall s \in I$ için ;

$$\cos \varphi = \langle V_{n(s)}, X \rangle$$

$$0 = \langle V'_{n(s)}, X \rangle$$

$$0 = \langle -k_{n-1} V_{n-1}, X \rangle$$

Burada $k_{n-1} \neq 0$ dır. O Halde;

$$\langle V_{n-1}, X \rangle = 0 \quad (3.64)$$

yazabiliriz. 3.64 denkleminde s 'ye göre tekrar türev alırsak ve Serret-Frenet denklemlerini kullanarak

$$0 = \langle V'_{n-1}, X \rangle$$

$$0 = \langle -k_{n-2}V_{n-2} + k_{n-1}V_n, X \rangle$$

$$0 = -k_{n-2}\langle V_{n-2}, X \rangle + k_{n-1}\langle V_n, X \rangle$$

olur ve 3.60 denkleminde

$$\langle V_{n-2}, X \rangle = \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} \langle V_n, X \rangle$$

$$\langle V_{n-2}, X \rangle = H^*_1 \langle V_n, X \rangle$$

olur.

$i = 2$ için; son denklemin s 'ye göre türevi alınır

$$H_1^{*'} \langle V_n, X \rangle = \langle V'_{n-2}, X \rangle$$

$$H_1^{*'} \langle V_n, X \rangle = \langle -k_{n-3}V_{n-3} + k_{n-2}V_{n-1}, X \rangle$$

$$H_1^{*'} \langle V_n, X \rangle = -k_{n-3}\langle V_{n-3}, X \rangle + k_{n-2}\langle V_{n-1}, X \rangle$$

elde edilir. 3.63 denklemini ve Önerme 3.4.1 kullanılırsa

$$\langle V_{n-3}, X \rangle = H_2^* \langle V_n, X \rangle$$

olur. Önerme 3.4.2 'nin ($i-1$) için doğru olduğunu kabul edelim. Bu demektir ki,

$$H_{i-1}^* \langle V_n, X \rangle = \langle V_{n-i}, X \rangle \quad (3.65)$$

dir. 3.65 denkleminin s 'ye göre türevini alırsak.

$$H_{i-1}^{*'} \langle V_n, X \rangle = \langle V'_{n-i}, X \rangle$$

elde edilir ve

$$H_{i-1}^{*'} \langle V_n, X \rangle = \langle -k_{n-i-1}V_{n-i-1} + k_{n-i}V_{n+i}, X \rangle$$

$$H_{i-1}^{*'} \langle V_n, X \rangle = -k_{n-i-1}\langle V_{n-i-1}, X \rangle + k_{n-i}\langle V_{n+i}, X \rangle \quad (3.66)$$

olur. Önerme 3.4.2 nin ($i - 2$) için doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$\langle V_{n-(i+1)}, X \rangle = H_{i-2}^* \langle V_n, X \rangle$$

olur. 3.65 denkleminde bu eşitliği yerine yazarsak ve 3.60 denklemini de kullanırsak

$$\langle V_{n-(i+1)}, X \rangle = \frac{1}{k_{n-(i+1)}} \{k_{n-i}H_{i-2}^* - H_{i-1}^{*'}\} \langle V_n, X \rangle$$

$$\langle V_{n-(i+1)}, X \rangle = H_i^* \langle V_n, X \rangle$$

elde edilir.

Sonuç 3.4.1.

E^n 'de yay parametrelili eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ ve $\mathbb{R}^n$ de birim sabit vektör alanı X olsun. γ 'nın Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilikleri $\{H_1^*, H_2^*, \dots, H_{n-2}^*\}$ olsun. Eğer, E^n 'deki V_n -slant helisin eksenini X ise;

$$X = \{H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \dots + H_1^* V_{n-2} + V_n\} \langle V_n, X \rangle$$

veya

$$X = \{H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \dots + H_1^* V_{n-2} + V_n\} \cos \varphi$$

dir[27].

İspat:

Eğer E^n 'deki V_n -slant helisin eksenini X ise $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i$ yazabiliriz. Önerme 3.4.2 'yi kullanarak

$$\lambda_1 = \langle V_1, X \rangle = H_{n-2}^* \langle V_n, X \rangle$$

$$\lambda_2 = \langle V_2, X \rangle = H_{n-3}^* \langle V_n, X \rangle$$

.

.

.

$$\lambda_{n-2} = \langle V_{n-2}, X \rangle = H_1^* \langle V_n, X \rangle$$

$$\lambda_{n-1} = 0$$

$$\lambda_n = \langle V_n, X \rangle$$

olur. Böylece;

$$X = \{H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \dots + H_1^* V_{n-2} + V_n\} \langle V_n, X \rangle$$

elde edilir.

Tanım 3.4.7.

E^n 'de birim hızlı eğri γ olsun. Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilik fonksiyonu $\{H_1^*, H_2^*, \dots, H_{n-2}^*\}$ olsun.

$$D = H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \dots + H_1^* V_{n-2} + V_n$$

vektörüne V_n -slant helisinin Darboux vektörü denir [27].

Teorem 3.4.1.

E^n 'de birim hızlı eğri γ olsun. Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilikleri $\{H_1^*, H_2^*, \dots, H_{n-2}^*\}$ olsun. γ eğrisinin V_n -slant helis olması için gerek ve yeter şart D 'nin sabit vektör alanı olmasıdır[27].

İspat:

E^n 'de V_n -slant helis ve γ 'nın eksenini X olsun. Sonuç 3.4.1 den $\cos \varphi = \text{sabit}$ olmak üzere

$$X = \{H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \dots + H_1^* V_{n-2} + V_n\} \cos \varphi$$

olup D bir sabit vektör alanıdır.

Tersine; D sabit vektör alanı ise bu takdirde

$$1 = \langle D, V_n \rangle$$

$$1 = \|D\| \|V_n\| \cos \varphi$$

$$1 = \|D\| \cos \varphi$$

dir. Böylece;

$$\cos \varphi = \frac{1}{\|D\|}$$

elde edilir. Bu durumda V_n -slant helisinin eksenini $X = \cos \varphi D$ şeklinde tanımlanabilir. Böylece X bir sabit vektör alanıdır ve γ bir V_n -slant helistir.

Teorem 3.4.2.

E^n 'de birim hızlı eğri γ olsun. Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilik fonksiyonları $\{H_1^*, H_2^*, \dots, H_{n-2}^*\}$ olsun. γ 'nın V_n -slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$H_{n-2}^* - k_1 H_{n-3}^* = 0$$

olmasıdır[27].

İspat:

$$D = H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + H_{n-4}^* V_3 + \dots + H_3^* V_{n-4} + H_2^* V_{n-3} + H_1^* V_{n-2} + V_n$$

D vektörünün türevi alınır,

$$D' = H_{n-2}^{*'} V_1 + H_{n-2}^* V_1' + H_{n-3}^{*'} V_2 + H_{n-3}^* V_2' + \dots + H_1^{*'} V_{n-2} + H_1^* V_{n-2}' + V_1'$$

elde edilir. Frenet formülleri ve Önerme 3.4.1 kullanılırsa,

$$D' = \{H_{n-2}^{*'} - k_1 H_{n-3}^*\} V_1$$

olur. γ bir V_n -slant helis olduğunda D sabit vektör alanı olup $D' = 0$ ise dolayısıyla

$$H_{n-2}^{*'} - k_1 H_{n-3}^* = 0$$

bulunur. Tersine; eğer $H_{n-2}^{*'} - k_1 H_{n-3}^* = 0$ ise $D' = 0$ ve dolayısıyla D bir sabit vektördür.

Teorem 3. 4.1 den γ , bir V_n -slant helistir.

Sonuç 3.4.2.

E^3 'de birim hızlı eğri γ olsun. γ 'nın Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{k_1, k_2\}$ olsun. γ 'nın genelleştirilmiş helis olması için gerek ve yeter şart γ 'nın V_3 -slant helis olmasıdır[27].

İspat:

γ , E^3 'de V_3 -slant helis olsun. Teorem 3.4.2 'den $H_1^* - k_1 H_0^* = 0$ olduğunu biliyoruz.

Tanım 3.4.1 'i kullanarak

$$\left(\frac{k_2}{k_1} \right)' = 0$$

buradan da,

$$\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit ve } \frac{k_1}{k_2} = \text{sabit}$$

olup bu da γ 'nın genelleştirilmiş helis olması demektir.

Tersine; γ genelleştirilmiş helis olsun. $\frac{k_2}{k_1}$ ve $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. Dolayısıyla $(\frac{k_2}{k_1})' = 0$ olduğunu gösterir.

$H_1^* - k_1 H_0^* = 0$ Teorem 3.3.2 'den γ bir, V_3 -slant helis olur.

Sonuç 3.4.3.

E^4 'de birim hızlı eğri γ , eğrinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ve harmonik eğrilikleri $\{k_1, k_2, k_3\}$ olsun. γ , V_4 -slant helis eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\left[\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right]' + k_1 \frac{k_3}{k_2} = 0 \quad (3.67)$$

olmasıdır[27].

İspat:

γ , E^4 'de bir V_4 -slant helis olsun. Teorem 3.4.2 'den $H_2^{*'} - k_1 H_1^* = 0$ olur. Tanım 3.4.1 'den

$$\left[\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right]' + k_1 \frac{k_3}{k_2} = 0$$

bulunur. Tersine; $\left[\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right]' + k_1 \frac{k_3}{k_2} = 0$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.4.2 ve Tanım 3.4.1 'den γ 'nın V_4 -slant helis olduğu görülür.

Teorem 3.4.3.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$, birim hızlı eğri olsun. γ sıfırdan farklı $\{k_1(s), k_2(s), k_3(s)\}$ eğrilikli bir eğri olsun. γ 'nın V_4 -slant helis olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartı sağlamasıdır.

$$\left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2} \left(\left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)^2 = \tan^2 \varphi_3 = \text{sabit}$$

burada φ_3 , V_4 ikinci binormal vektör alanı ile birim sabit vektör X arasındaki açıdır[27].

Teorem 3.4.4.

E^n 'de birim hızlı bir eğri γ ve Frenet vektör alanları $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilik fonksiyonları $\{H_1^*, H_2^*, \dots, H_{n-2}^*\}$ olsun. γ , bir V_n -slant helis ise

$$\sum_{i=1}^{n-2} H_i^{*2}$$

sabittir[27].

İspat:

E^n 'de V_n -slant helis $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ olsun. Sonuç 3.4.1 kullanılarak, γ 'nın eksenli birim vektör alanı olduğundan

$$\{H_1^{*2} + \dots + H_{n-2}^{*2}\} \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \quad (3.68)$$

dir. Bundan dolayı

$$\sum_{i=1}^{n-2} H_i^{*2} = \frac{(1-\cos^2\varphi)}{\cos^2\varphi} = \tan^2\varphi = \text{sabit}$$

elde ederiz.

Sonuç 3.3.4.

Sıfırdan farklı $\{k_1, k_2, k_3\}$ eğrilikli birim hızlı bir eğri γ olsun. Eğer, γ bir V_4 -slant helis ise bu takdirde φ , ikinci binormal birim vektör alanı V_4 ile sabit birim vektör arasındaki açı olmak üzere

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^2} \left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = \tan^2\varphi = \text{sabit}$$

dir[27].

İspat:

$n = 4$ için Teorem 3.4.4 den açıkça görülür.

Teorem 3.4.5.

E^{2m+1} 'de birim hızlı eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^{2m+1}$ olsun. γ 'nın harmonik eğrilik fonksiyonları $\{H_1^*, H_2^*, \dots, H_{2m-1}^*\}$ olsun. Eğer; $\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \frac{k_6}{k_5}, \dots, \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}}, \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$ oranları sabit ise bu takdirde

$1 \leq i \leq m$ için

$$H_{2i}^* = 0$$

$$H_{2i-1}^* = \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}} \cdot \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}} \cdot \frac{k_{2m-4}}{k_{2m-5}} \dots \frac{k_{2m-(2i-3)}}{k_{2m+1-(2i-2)}} \cdot \frac{k_{2m+1-(2i-1)}}{k_{2m+1-(2i)}}$$

dir[27].

İspat:

Tümevarım metoduyla ispatı yapalım.

$i = 1$ için Tanım 3.4.1 den

$$H_2^* = \{k_{2m-1}H_0^* - H_1^{*'}\} \frac{1}{k_{m-2}}$$

$$H_2^* = -\frac{1}{k_{2m-1}} \left(\frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}\right)'$$

yazılabilir.

Burada $\frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$ sabit ve böylece $H_2^* = 0$ olur. Tanım 3.4.1 'den $H_2^* = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$H_3^* = \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}} \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$$

olur.

$i = p$ için doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda $H_{2p}^* = 0$ ve

$$H_{2p-1}^* = \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}} \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}} \frac{k_{2m-4}}{k_{2m-5}} \dots \frac{k_{2m-(2p-3)}}{k_{2m+1-(2p-2)}} \frac{k_{2m-(2p-1)}}{k_{2m+1-2p}}$$

olur.

$$H_{2p+1}^* = \{k_{2m-2p}H_{2p-1}^* - H_{2p}^{*'}\} \frac{1}{k_{2m-2p-1}}$$

olur. Tanım 3.4.1 den

$$H_{2p}^* = 0$$

$$H_{2p+1}^* = \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}} \cdots \frac{k_{2m+1-(2p+1)}}{k_{2m+1-(2p+2)}}$$

yazabilir ki buda ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4.5.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^{2m+1}$, E^{2m+1} 'de birim hızlı eğri olsun. Eğrinin eğrilik fonksiyonları $\{k_1, k_2, \dots, k_{2m}\}$ olsun. Eğer $\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \dots, \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$ oranları sabit ise, bu takdirde bir V_{2m+1} -slant helisinin eksenini

$$D = H_{2m-1}^*V_1 + H_{2m-2}^*V_2 + \cdots + V_{2m+1}$$

dir[27].

İspat:

Tanım 3.4.2 ye göre $n = 2m + 1$ için

$$D = H_{2m-1}^*V_1 + H_{2m-2}^*V_2 + \cdots + V_{2m+1}$$

dir. Teorem 3.4.5 den

$$D = H_{2m-1}^*V_1 + H_{2m-3}^*V_3 + \cdots + V_{2m+1}$$

elde edilir.

Sonuç 3.4.6.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^{2m+1}$, E^{2m+1} 'de birim hızlı eğri olsun. Eğrinin eğrilik fonksiyonları $\{k_1, k_2, \dots, k_{2m}\}$ olsun. Eğer, $\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \dots, \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$ oranları sabit iseler bu takdirde $\frac{k_1}{k_2}, \frac{k_3}{k_4}, \frac{k_5}{k_6}, \frac{k_{2m-3}}{k_{2m-2}}, \frac{k_{2m-1}}{k_{2m}}$ oranları sabit olsun. Bu takdirde Teorem 3.4.5 den $1 \leq i \leq m$ için H_{2i-1}^* sabittir. Bu durumda Sonuç 3.4.5 e göz önüne alınırsa D bir sabit vektör alanıdır. Bu takdirde Teorem 3.4.1 den γ bir V_{2m+1} -slant helistir[27].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde 4- Boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre (k, m) -tip slant helisleri inceleyeceğiz.

4.1. E^4 'te Bishop Çatısına Göre (k, m) -Tip Slant Helisler

Tanım 4.1.1.

E^4 'te bir regüler eğri γ , eğrinin paralel taşıma çatısı $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ olsun. U sıfırdan farklı sabit vektör alanı $U \in E^4$ olmak üzere $1 \leq k \leq 4$ $k \neq m$ için $\langle V_k, U \rangle = a$ (a sabit) olmak üzere γ eğrisine (k, m) - tip slant helis denir. U sabit vektörü (k, m) -tip slant helis üzerindedir paralel taşıma çatısına göre U vektörünü düzenlersek burada $k_i \neq 0$, $(1 \leq i \leq 3)$ $u_i = u_i(s)$ 'ler s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonlar ve $V_1 = T$, $V_2 = M_1$, $V_3 = M_2$ $V_4 = M_3$ diyebiliriz. O halde;

$$U = u_1 T + u_2 M_1 + u_3 M_2 + u_4 M_3$$

şeklinde ifade edilir[20].

Teorem 4.1.1.

γ , regüler bir eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. U sabit bir vektör ve u_i 'ler de $(i = 1, 2, 3)$ γ 'nın s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonları olmak üzere γ paralel taşıma çatısına göre $(1,2)$ -tip slant helis olamaz.

İspat:

Farz edelim ki; γ , 4-boyutlu Öklid uzayı E^4 ' te paralel taşıma çatısına göre $(1,2)$ -tip slant helis olsun. U sabit vektör alanını

$$U = aT + bM_1 + u_1M_2 + u_2M_3$$

şeklinde yazabiliriz.

$\langle T, U \rangle = a$ ve $\langle M_1, U \rangle = b$ a ve b sabittir. Paralel taşıma çatısına göre türevi alınırsa;

$$\langle T, U \rangle' = a'$$

$$\langle k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3, U \rangle = 0 \quad (4.1)$$

$$\langle M_1, U \rangle' = b'$$

$$\langle -k_1 T, U \rangle = 0 \quad (4.2)$$

bulunur. Bu eşitliklerden;

$$k_1 \langle M_1, U \rangle + k_2 \langle M_2, U \rangle + k_3 \langle M_3, U \rangle = 0 \quad (4.3)$$

$$-k_1 \langle T, U \rangle = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. k_1, k_2, k_3 'ler sıfırdan farklı olduğundan yukarıda verilen denklemlerden;

$\langle M_1, U \rangle = 0$, $\langle M_2, U \rangle = 0$, $\langle M_3, U \rangle = 0$, $\langle T, U \rangle = 0$ denklemlerinin sıfır olduğu sonucuna ulaşırız. O halde paralel taşıma çatısında γ , $(1,2)$ -tip slant helis değildir.

Teorem 4.1.2.

γ , regüler bir eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. U sabit bir vektör ve u_i 'ler de ($i = 1, 2, 3$) γ 'nın s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonları olmak üzere γ , paralel taşıma çatısında (1,3) -tip slant helis olamaz.

İspat:

Farz edelim ki; γ , 4 boyutlu Öklid uzayı E^4 ' te paralel taşıma çatısına göre (1,3) -tip slant helis olsun. U sabit vektör alanı olmak üzere: U vektörünün tanımından

$$U = aT + u_2M_1 + bM_2 + u_2M_3 \quad (4.6)$$

yazabiliriz. Paralel taşıma çatısına göre türev alınır;

$$0 = aT' + u_2'M_1 + u_2M_1' + bM_2' + u_2'M_3 + u_2M_3' \quad (4.7)$$

3.24 eşitlikleri kullanılırsa

$$0 = -u_2k_1 - bk_2 - u_2k_3 \quad (4.8)$$

$$0 = ak_1 + u_2' \quad (4.9)$$

$$0 = ak_2 \quad (4.10)$$

$$0 = ak_3 + u_2' \quad (4.11)$$

k_1, k_2, k_3 'ler sıfırdan farklı olduğundan $a = 0$ elde edilir. $a = 0$ ise denklemden $u_2' = 0$ olur, bu da u_2 'nin sabit olduğunu gösterir. 4.8 denklemden

$$u_2(k_1 + k_3) + bk_2 = 0$$

olur. Buradan da, $b = 0$ bulunur. Dolayısıyla γ , paralel taşıma çatısına göre (1,3)-tip slant helis olamaz.

Teorem 4.1.3.

γ , regüler bir eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. U sabit bir vektör ve u_i 'ler de ($i = 1, 2, 3$) γ 'nın s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonları olmak üzere γ paralel taşıma çatısında (1,4) -tip slant helis olamaz.

İspat:

Farz edelim ki; γ , 4-boyutlu Öklid uzayı E^4 'te paralel taşıma çatısına göre (1,4)-tip slant helis olsun. U sabit vektör alanı olmak üzere: U denklemini tanımdan

$$U = aT + u_2M_1 + u_1M_2 + bM_3$$

yazabiliriz. U vektörünün paralel taşıma çatısına göre diferansiyelini alırsak

$$U' = aT' + u_2'M_1 + u_2M_1' + u_1'M_2 + u_1M_2' + bM_3' \quad (4.12)$$

$$0 = a(k_1M_1 + k_2M_2 + k_3M_3) + u_2'M_1 + u_2(-k_1T) + u_1'M_2 + u_1(-k_2T) + b(-k_3T) \quad (4.13)$$

$$0 = (-u_1k_2 - bk_3 - u_2k_1)T + (ak_1 + u_2')M_1 + (ak_2 + u_1')M_2 + (ak_3)M_3 \quad (4.14)$$

$\{T, M_1, M_2, M_3\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$0 = -u_1 k_2 - b k_3 - u_2 k_1 \quad (4.15)$$

$$0 = a k_1 + u_2' \quad (4.16)$$

$$0 = a k_2 + u_1' \quad (4.17)$$

$$0 = a k_3 \quad (4.18)$$

yazabiliriz. 4.16 ve 4.18 denklemlerinde $k_1 \neq 0$ ve $k_3 \neq 0$ olduğundan $a = 0$ bulunur.

$u_1' = -a k_2$ ve $u_2' = -a k_1$ burada $u_1' = 0$ $u_1 = \text{sabit}$ ve $u_2 = \text{sabit}$ bulunur.

$a = 0$ ve $b = 0$ olması Tanım 4.1.1 ile çelişir o halde; γ , (1,4)-tip slant helis değildir.

Sonuç 4.1.1.

γ , regüler bir eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. U sabit bir vektör ve u_i 'ler de ($i = 1, 2, 3$) γ 'nın s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonları olmak üzere γ paralel taşıma çatısında (1, k)- tip slant helis olamaz.

Teorem 4.1.4.

γ , regüler bir eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. U sabit bir vektör ve u_i 'ler de ($i = 1, 2$) γ 'nın s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonları olmak üzere γ paralel taşıma çatısında (2,3)-tip slant helis ise a ve b sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$u_2 = -\left(a \frac{k_1}{k_3} + b \frac{k_2}{k_3}\right)$$

dir.

İspat:

Farz edelim ki; γ , 4 boyutlu Öklid uzayı E^4 'te paralel taşıma çatısına göre (2,3)-tip slant helis olsun. U sabit vektör alanı olmak üzere, U vektörünü Tanım 4.1.1'den

$$U = u_1 T + a M_1 + b M_2 + u_2 M_3 \quad (4.19)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin diferansiyeli alınırsa,

$$0 = u_1' T + T' u_1 + a M_1' + b M_2' + u_2' M_3 + u_2 M_3' \quad (4.20)$$

elde edilir. Buradan,

$$0 = u_1' T + u_1 (k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3) + b (-k_2 T) + u_2' M_3 + u_2 (-k_3 T)$$

$$0 = T(u_1' - b k_2 - u_2 k_3) + M_1(u_1 k_1) + M_2(u_1 k_2) + M_3(u_1 k_3 + u_2')$$

denklemleri düzenlersek,

$$0 = u_1' - a k_1 - b k_2 - u_2 k_3 \quad (4.21)$$

$$0 = u_1 k_1 \quad (4.22)$$

$$0 = u_1 k_2 \quad (4.23)$$

$$0 = u_1 k_3 + u_2' \quad (4.24)$$

4.22 ve 4.23 denklemlerinden eğrilikler sıfırdan farklı olduğu için $u_1 = 0$ ve $u_2 = \text{sabit}$ 4.21 denkleminde

$$u_2 = -\left(a \frac{k_1}{k_3} + b \frac{k_2}{k_3}\right) \quad (4.25)$$

$u_1 = 0$ ve $u_2' = 0$ olduğu için u_2 sabit olduğu anlaşılır o halde γ , paralel taşıma çatısında (2,3)-tip slant helis olması için $u_2 = -\left(a \frac{k_1}{k_3} + b \frac{k_2}{k_3}\right)$ eşitliği sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.5.

γ , regüler bir eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. U sabit bir vektör ve u_i 'ler de $(i = 1, 2)$ γ 'nın s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonları olmak üzere γ paralel taşıma çatısında (2,4)-tip slant helis ise a ve b sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$ak_1 + u_1k_2 + bk_3 = 0 \quad (4.26)$$

dir.

İspat:

Farz edelim ki; γ ; bir (2,4) -tip slant helis olsun. Bu takdirde U sabit vektörünü

$$U = u_1T + aM_1 + u_2M_2 + bM_3$$

şeklinde yazabiliriz. U sabit vektörünün paralel taşıma çatısına göre türevini alırsak;

$$U' = u_1'T + u_1T' + aM_1' + u_2'M_2 + u_2M_2' + bM_3' \quad (4.27)$$

$$0 = T(u_1 - ak_1 - u_2k_2 - bk_3) + M_1(u_1k_2) + M_2(u_1k_2 + u_2') + M_3(u_1k_3)$$

gerekli denklemler yerine yazılırsa $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$0 = u_1 - ak_1 - u_2k_2 - bk_3 \quad (4.28)$$

$$0 = u_1k_2 \quad (4.29)$$

$$0 = u_1k_2 + u_2' \quad (4.30)$$

$$0 = u_1k_3 \quad (4.31)$$

yazabiliriz. 4.29 ve 4.31 denkleminde $u_1 = 0$ ve $u_2 = \text{sabit}$ olup;

$$ak_1 + u_1k_2 + bk_3 = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.1.6 .

γ , regüler bir eğri olsun. γ 'nın paralel taşıma çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olsun. U sabit bir vektör ve u_i 'ler de $(i = 1, 2)$ γ 'nın s 'ye göre diferansiyelenebilir fonksiyonları olmak üzere γ paralel taşıma çatısında (3,4) -tip slant helis ise,

$$\frac{k_2}{k_3} = \text{sabit}$$

dir.

İspat:

Farz edelim ki; γ , bir (3,4)-tip slant helis olsun. Bu takdirde, U sabit vektörünü

$$U = u_1T + u_2M_1 + aM_2 + bM_3$$

yazabiliriz. U sabit vektörünün paralel taşıma çatısına göre türevini alırsak;

$$U' = u_1' T + T' u_1 + u_2' M_1 + u_2 M_1' + a M_2' + b M_3' \quad (4.32)$$

$$0 = (u_1' - u_1 k_1 - a k_2 - b k_3) \quad (4.33)$$

$$0 = (k_1 u_1 + u_2') \quad (4.34)$$

$$0 = (k_2 u_1) \quad (4.35)$$

$$0 = (k_3 u_1) \quad (4.36)$$

yazabiliriz. 4.36 ve 4.35 denkleminde $u_1 = 0$ olduğu için 4.34 denkleminde $u_2' = 0$ olup u_2 'nin sabit olduğunu gösterir denklem 4.33 'den $\frac{k_2}{k_3} = \text{sabit}$ elde edilir.

5. SONUÇLAR

Bu tezde, 4- boyutlu Öklid uzayında tip-3 slant helisler, k -tip slant helisler ve (k, m) -tip slant helisler incelenmiştir.

Bu çalışmaların, dört boyutlu uzayı E^4 ' te Bishop çatısına göre karşılıkları araştırılarak, (k, m) - tip slant helisler için bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

Bu tip slant helisler farklı uzaylarda ve farklı çatılara göre araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Takeuchi N., İzumiya S. (2004). New Special Curves and Developable Surfaces, Turk. J.Math cilt 28, pp153-163.
- [2] Zıplar E., Şenol A., Yaylı Y. , (2012) On Daboux helices in Euclidean 3-space, Global J Sci Front Res Mathem Decision Sci, cilt 12, no. 13, pp. 73-80.
- [3] İlarslan K. , Yıldırım M., (2018) On Darboux helices in Euclidean 4-space, Mathematical Methods in The Applied Sciences, cilt 42, no. 16, pp. 5184-5189.
- [4] Ali A.T., Lopez R., (2009) Slant Helices in Euclidean 4-space, arXiv: 0901.3324v1.
- [5] Forterre Y., Duamaj J., (2011) Generating Helices in Nature, Science, cilt 333, no. 6050, pp. 1715-1716.
- [6] Kula L., Ekmekci N. , Yaylı Y. (2009) Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space, Truk. J. Math., no. 33, pp. 1-13.
- [7] Yang X., (2003) High Accuracy Approximation of Helices by Quintic Curve, Comput Aided Geometric Design,, no. 20, pp. 303-317.
- [8] Bishop L.R. ,(1975) There is no more than one way to frame a curve, Mathematical, cilt 82, no. 3, pp. 246-251.
- [9] Körpınar. B. (2011) On characterization inextensible flows of curves according to Bishop frame in E^3 , Revista Notas de Matematica, cilt 7(1), no. 32, pp. 37-45.
- [10] Bükcü B. , Karacan M.K. (2009) The Slant Helices According to Bishop Frame, International Scholarly and Scientific Research & Innovation, cilt 3, no. 11, pp. 1010-1013.
- [11] Yılmaz S. , Özyılmaz E. , Turgut M. (2010) New Spherical Indicatrices and Their Characterizations, An. gt. Univ. Ovidius Constanta, cilt 18, no. 2, pp. 337-354.
- [12] Macit N. , Döldül M. (2014) Some new associated curves of a Frenet curve in E^3 and E^4 , Turkish J. Math, no. 38, pp. 1023-1037.
- [13] Buyukkutuk S. , Öztürk G. (2015) Constant ratio curves according to parallel transport frame in Euclidean 4-space E^4 , New Trends in Mathematica Sci, cilt 3, no. 4, pp. 171-178.
- [14] Elzawy M. (2017) Smarandache Curves İn Euclidean 4-space, Journal Of The Egptian Mathematical Society.
- [15] Choi J.H., Kim Y.H. (2012) Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications, Applied Mathematics and Computation, no. 218.
- [16] Körpınar T. , Sarıaydın M.T. (2013) Associated Curves According To Bishop Frame In Euclidean 3-Space, Advanced Modeling and Optimization.
- [17] Bulut F., (2021). Slant Helices of (k, m)-Type According to the ED-frame in Minkowski 4-Space. Symmetry, cilt13, no.11 ,2185
- [18] Bulut F., Bektaş M.,(2021). Special Helices on Equiform Differential Geometry of Timelike Curves in E_1^4 Cumhuriyet Science Journal ,cilt 42 no.4, 906-915.
- [19] Bulut F., Tartık F. (2021). (k,m)-type Slant Helices According to Parallel Transport Frame İn Euclidean 4- Space , Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, cilt 13 no.2, pp. 261-269.

- [20] Yıldırım Yılmaz M., Bektaş M. (2018) Slant helices of (k,m) -type in E_4 , Acta Univ.Sapientiae, Mathematica, cilt 10, pp. 395-401.
- [21] Sabuncuoğlu A. (2004) Diferansiyel Geometri, Ankara: Nobel.
- [22] Sabuncuoğlu A. (2001) Diferansiyel Geometri, Ankara, Nobel dağıtım.
- [23] Hacısalihoğlu H.H. (2000) Diferansiyel Geometri, Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.
- [24] Sabuncuoğlu A. (2016) Diferansiyel Geometri, Ankara: Nobel basımevi.
- [25] Özdemir Z., Gök İ. , Ekmekci F.N. , Yaylı Y. (2015) A New Approach on Type-3 Slant Helices in E_4 , Gen. math. notes, cilt 28, no. 1, pp. 40-49.
- [26] Ünlütürk Y. , Tozak H. , Ekici C. (2020) On k -Type Slant Helices Due to Bishop Frame in Euclidean 4-Space, International J.Math. Combin, pp. 01-09.
- [27] Camcı. Ç. , Hacısalihoğlu H.H. , Gök İ. (2009) V_n -Slant Helices in Euclidean n -Space, Mathematical Communications, cilt 2, no. 14, pp. 317-329.