



**T. C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SİMETRİK TERS İKİLİ TÜREVLİ HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Havva ÜNALAN
20189237005**

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Emine KOÇ SÖGÜTCÜ

**SİVAS
ARALIK 2021**

Havva ÜNALAN' ın hazırladığı ve “**SİMETRİK TERS İKİLİ TÜREVLİ HALKALAR**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Emine KOÇ SÖĞÜTCÜ**
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI**
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Doç. Dr. Adem ŞAHİN**
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Özlem Pelin CAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.



Bütün hakları saklıdır.
Kaynak göstermek koşuluyla alıntı ve gönderme yapılabilir.

© Havva ÜNALAN, 2021

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

24.12.2021

Havva ÜNALAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR.....	ix
SİMGELER DİZİNİ	x
GİRİŞ	1
1. GENEL KAVRAMLAR	3
2.YARIASAL HALKALARDA SİMETRİK TERS İKİLİ TÜREVLER.....	15
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

SİMETRİK TERS İKİLİ TÜREVLİ HALKALAR

Havva ÜNALAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Emine KOÇ SÖĞÜTCÜ

2021, 31+x sayfa

Tezin amacı halkanın değişimliliği ile ilgili yapılan bazı çalışmaları simetrik ters ikili türevli yarıasal halkalara taşımaktır. Birinci bölümünde tez konusuyla ilgili genel tanım, teorem ve kavramlardan bahsedilerek örnekler verilmiştir. İkinci bölümde ise R yarıasal halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan U bir Lie ideali, $D, G: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türevler ve d ve g sırasıyla D ve G nin izi olmak üzere her $x, y \in U$ için aşağıda verilen değişmeli olma koşulları araştırılmıştır:

- i) $[d(x), x] \in Z$,
- ii) $d(xy) + d(x)d(y) \pm xy \in Z$,
- iii) $d(xy) + d(x)d(y) \pm yx \in Z$,
- iv) $d(xy) - d(yx) \pm [x, y] \in Z$.

Ayrıca aşağıdaki koşullar ise I , R halkasının ideali olmak üzere her $x \in I$ için ele alınmıştır:

- v) $d(I) = (0)$,
- vi) D , I üzerinde sol veya sağ homomorfizma,
- vii) $D(d(x), x) = 0$,
- viii) $d(d(x)) = g(x)$.

Anahtar kelimeler: Yarıasal halka, Lie ideal, ideal, türev, simetrik ikili türev, ters türev, simetrik ters ikili türev.

ABSTRACT

RINGS WITH SYMMETRIC REVERSE BI-DERIVATIONS

Havva ÜNALAN

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Emine KOÇ SÖGÜTCÜ

2021, 31+x pages

The aim of the thesis is to carry some studies on the commutativity of the ring to symmetric reverse bi-derivation semiprime rings. In the first part, general definitions, theorems and concepts related to the thesis subject are mentioned and examples are given. In the second part, the following commutativity conditions are investigated for all $x, y \in U$, where U is a Lie ideal of R such that $u^2 \in U$ for all $u \in U$, $D, G: R \times R \rightarrow R$ symmetric reverse bi-derivations and d and g be the traces of D and G , respectively:

- i) $[d(x), x] \in Z$,
- ii) $d(xy) + d(x)d(y) \pm xy \in Z$,
- iii) $d(xy) + d(x)d(y) \pm yx \in Z$,
- iv) $d(xy) - d(yx) \pm [x, y] \in Z$.

In addition, the following conditions are considered for all $x \in I$, where I ideal of R :

- v) $d(I) = (0)$,
- vi) D acts as left or right homomorphism on I ,
- vii) $D(d(x), x) = 0$,
- viii) $d(d(x)) = g(x)$.

Keywords: Semiprime ring, Lie ideal, ideal, derivation, symmetric bi-derivation, reverse derivation, symmetric reverse bi-derivation.

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, kendisinden sürekli yararlandığım, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Emine KOÇ SÖĞÜTCÜ' ye ve canım kendime çok teşekkür ederim.

Havva ÜNALAN



SİMGELER DİZİNİ

$\in$	:	Elemanı
$\notin$	:	Elemanı değil
$\forall$	:	Her
$\subset$	:	Alt küme
$\supset$	:	Kapsama
$[x, y]$	:	x, y elemanlarının komutatör çarpımı
$\emptyset$	:	Boş küme
1_R	:	R halkasının birim elemanı

GİRİŞ

Türevler konusu matematik alanında son yıllarda aktif bir araştırma alanı olmuştur. Asal halkalar üzerinde türev tanımı literatürde ilk olarak 1957 yılında E. C. Posner tarafından yapılmıştır. Türevli asal halkalar teorisinin gelişimiyle birlikte daha sonraki yıllarda farklı türev kavramları yapılmış, halkalarda bu türevlerin sağladığı özellikler incelenmiştir. 1980 yılında Gy. Maksa tarafından kısmi türeve karşılık gelen simetrik ikili türev tanımı verilmiştir. Ayrıca Gy. Maksa 1987 yılındaki çalışmasında simetrik ikili türevlerin bazı fonksiyonel denklemlerin genel çözümü ile bağlantılı olduğunu göstermiştir. 1989 yılında M. Bresar ve J. Vukman tarafından ise ters türev tanımı verilmiştir. 2017 yılında ters türev ve simetrik ikili türev tanımları ele alınarak C. J. S. Reddy ve M. N. Naik tarafından simetrik ters ikili türev tanımı yapılmıştır. Bu tanımla birlikte literatürde olan simetrik ikili türevli halkalarla ilgili pek çok sonuç simetrik ters ikili türevler için ispatlanmıştır. Değişmeli bir halkada simetrik ikili türev ve simetrik ters ikili türev kavramlarının aynı olduğu bilinen bir gerçektir. Ancak halkası değişmeli halka değil iken bu iki kavram birbirinden farklıdır.

Merkezil dönüşümler ile ilgili ilk çalışma 1955 yılında N. Divinsky tarafından ele alınmıştır. Bu sonuç 1970 yılında J. Luh tarafından ise asal halkalar için incelenmiştir. 1957 yılında E. C. Posner tarafından Posner'in II. Teoremi olarak da bilinen merkezil türeve sahip olan bir asal halkanın değişmeli olduğu ispatlanmıştır. Bir taraftan R. Awtar 1973 yılında diğer taraftan ise P. H. Lee ve T. K. Lee tarafından 1983 yılında Posner'in II. Teoremi Lie idealler üzerinde incelemiştir. 2002 yılında N. Rehman tarafından bu koşul Lie ideali üzerinde genelleştirilmiş türev için incelenmiştir. Daha sonra 2011 yılında Ö. Gölbaşı ve E. Koç tarafından bu teoremdaki kare-kapalı koşulu kaldırılmıştır. Ayrıca, S. Huang, Ö. Gölbaşı ve E. Koç tarafından 2015 yılında bu koşul yarıasal halkalarda endomorfizmler için incelenmiştir. J. Vukman aynı koşulu 1989 yılında simetrik ikili türevli asal halkalar için incelemiştir. 1993 yılında ise bu teorem M. N. Yeşilgül ve N. Argaç tarafından halkanın ideali üzerinde genelleştirilmiştir. M. Ashraf ise Posner'in II. Teoremini 1999 yılında yarıasal halkada simetrik ikili türevler için incelemiştir. M. A. Öztürk ve M. Sapancı ise 1999 yılında bu koşulu simetrik ikili α -türev için incelemişlerdir.

1989 yılında H. E. Bell ve L. C. Kappe tarafından R asal halkasının d türevi için eğer d, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali üzerinde homomorfizm ise bu durumda $d = 0$ olduğu gösterilmiştir. Bu teorem 2003 yılında ise A. Asma, N. Rehman ve A. Shakir tarafından her $u \in U$ için $u^2 \in U$ sağlayan bir Lie ideali için genelleştirilmiştir. 2004 yılında Argaç ve E. Albaş aynı sonucu genelleştirilmiş türevli asal halka üzerinde araştırmıştır. 1993 yılında ise bu teorem M. N. Yeşilgül ve N. Argaç tarafından halkanın ideali üzerinde simetrik ikili türevler için genelleştirilmiştir.

M. N. Daif ve H. E. Bell tarafından 1992 yılında R bir yarıasal halkası üzerinde d türevi her $x, y \in R$ için $xy \pm d(xy) = yx \pm d(yx)$ koşulunu sağlıyor ise R halkasının değişmeli olduğu gösterilmiştir. 1990 yılında M. Ashraf aynı koşulu asal halka üzerinde simetrik ikili türev için ele almıştır. C. J. Reddy, G. V. B. Rao, ve K. M. Reddy tarafından ise 2015 yılında yarıasal halka için bu teorem genelleştirilmiştir.

2001 yılında M. Ashraf ve N. Rehman R bir asal halkasının I ideali üzerinde d türevi her $x, y \in R$ için $d(xy) - xy \in Z$ veya $d(xy) - yx \in Z$ koşullarından birini sağlıyor ise I değişmeli olduğunu göstermişlerdir.

Öte yandan J. Vukman 1990 yılında R yarıasal halka, D, R halkası üzerine simetrik ikili türev ve d, D simetrik ikili türevinin izi olmak üzere eğer her $x \in R$ için $D(d(x), x) = 0$ ve $d(d(x)) = g(x)$ ise bu durumda $D = 0$ olduğunu ispatlamıştır. 2017 yılında C. J. Reddy ve M. R. Naik yukarıdaki koşulları simetrik ters ikili türev için ele almışlardır.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen problemler bir yarıasal halkanın her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali ve ideali üzerinde simetrik ters ikili türevi için incelenmiştir.

I. GENEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1: Boş kümeden farklı bir G kümesi üzerinde

$$+: G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

işlemi tanımlansın. Buna göre

- i. Her $a, b, c \in G$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$
- ii. Her $a \in G$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olacak biçimde $0 \in G$ var
- iii. Her $a \in G$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak biçimde $-a \in G$ var

koşulları sağlanıyorsa $(G, +)$ ikilisine bir grup denir. İşlemin önemli olmadığı durumda $(G, +)$ ikilisi yerine sadece G gösterimi kullanılabilir.

Tanım 1.2: G bir grup ve $\emptyset \neq A \subset G$ olsun. Eğer A kümesi, G kümesi üzerinde tanımlı işleme göre kendi başına bir grup oluyorsa A kümesine G grubunun bir altgrubu denir.

Tanım 1.3: Bir grubun, birimden ve kendinden farklı altgrubuna öz altgrup denir.

Tanım 1.4: $(G, +)$ ve $(S, *)$ iki grup olmak üzere bir $f: G \rightarrow S$ fonksiyonu her $x, y \in G$ için

$$f(x + y) = f(x) * f(y)$$

koşulu sağlanıyorsa oluyorsa f fonksiyonuna bir grup homomorfizması denir.

Eğer f grup homomorfizması örten dönüşüm ise grup epimorfizması, $1 - 1$ dönüşüm ise grup monomorfizması ve $1 - 1$, örten dönüşüm ise grup izomorfizması olarak adlandırılır.

$\text{Ker} f = \{a \in G \mid f(a) = e_S\}$ olarak tanımlanan kümeye f grup homomorfizmasının çekirdeği denir.

Teorem 1.5: (Brauer's Trick) Herhangi bir grup iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat: $(G, *)$ bir grup olmak üzere K ve H öz altgrupları için $G = H \cup K$ olarak yazılsın. Kabul edelim ki $H \subsetneq K$ ve $K \subsetneq H$ olsun. Bu durumda $a \in H - K$ ve $a \in K - H$ olacak biçimde $a, b \in G$ vardır. G grup olduğu için $a * b \in G$ dir. $G = H \cup K$ olduğundan $a * b \in H$ veya $a * b \in K$ olur. $a * b \in H$ ise H bir grup ve $a \in H$ olduğu için $a^{-1} \in H$ dir.

Bu durumda $b = a^{-1} * a * b \in H$ olur. Oysa ki $b \notin H$ idi. Bu nedenle $a * b \in H$ olamaz. O halde $a * b \in K$ dır. Benzer şekilde K bir grup ve $b \in H$ olduğu için $b^{-1} \in K$ dır. Böylece $a = a * b * b^{-1} \in K$ olur. Bu ise $a \notin K$ olması ile çelişir. Çelişkilerin nedeni kabuldür. O halde $H \subset K$ veya $K \subset H$ dır. İlk olarak kabul edelim ki $K \subset H$ olsun. Bu durumda $H \cup K \subset H$ olur. Bu $G \subset H$ demektir. Yani $G = H$ olur. Bu ifade de K kümesinin öz altgrup olması ile çelişir. Tüm bu çelişkilerin nedeni başlangıçtaki kabuldür. Böylece $G = K \cup H$ olması durumunda $G = H$ veya $G = K$ dır.

Tanım 1.6: R , boş olmayan bir küme ve R üzerinde “+” ve “.” ikili işlemleri tanımlı olsun. Buna göre aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa R ye bir halka denir ve $(R, +, \cdot)$ ile gösterilir.

- i. $(R, +)$ değişmeli grup,
- ii. $\forall a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$,
- iii. $\forall a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$.

Ayrıca

- iv. $\forall a, b \in R$ için $ab = ba$ ise R halkasına değişmeli (komütatif) halka denir.
- v. $\forall a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa R halkasına birimli halka denir.

$(R, +, \cdot)$ üçlüsü R kümesi üzerinde tanımlanan “+” ve “.” işlemleri ile birlikte bir halkayı ifade eder. İşlemin önemli olmadığı durumlarda $(R, +, \cdot)$ yerine sadece R gösterimi kullanılabilir.

Tanım 1.7: R bir halka ve $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. Eğer A kümesi, R kümesi üzerinde tanımlı işlemlere göre kendi başına bir halka oluyorsa A kümesine R halkasının bir alt halkası denir.

Tanım 1.8: $(R, +, \cdot)$ ve $(S, *, \circ)$ iki halka olmak üzere bir $f: R \rightarrow S$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$$f(x + y) = f(x) * f(y)$$

ve

$$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$$

koşulları sağlıyorsa f fonksiyonuna bir halka homomorfizması denir.

Eğer f halka homomorfizması örten dönüşüm ise halka epimorfizması, $1 - 1$ dönüşüm ise halka monomorfizması ve $1 - 1$, örten dönüşüm ise halka izomorfizması olarak adlandırılır.

Özel olarak, $f: R \rightarrow R$ bir halka izomorfizması ise halka otomorfizması adını alır.

Tanım 1.9: R bir halka ve A , R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

$$C_R(A) = \{a \in R \mid xa = ax, \forall x \in A\} = \{a \in R \mid [x, a] = 0, \forall x \in A\}$$

kümesine A kümesinin R halkasındaki merkezleştiricisi denir.

Özel olarak, $C_R(R)$ kümesine R halkasının merkezi denir ve $Z(R)$ ile gösterilir.

Uyarı 1.10: Bir halkanın merkezi kendisinin althalkasıdır.

Uyarı 1.11: R bir halka, A ve B kümeleri R halkasının altgrupları olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere ab elemanları tarafından üretilen altgrup AB dir.

Tanım 1.12: R bir halka ve I , R halkasının bir alt halkası olsun.

- i. Her $r \in R$, $a \in I$ için $ra \in I$ ise I ya R halkasının sol ideali,
- ii. Her $r \in R$, $a \in I$ için $ar \in I$ ise I ya R halkasının sağ ideali denir.

I , R nin hem sol, hem de sağ ideali ise I ya R halkasının bir ideali denir.

Örnek 1.13: $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası verilsin. Bu durumda $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi R halkasının bir idealidir.

Tanım 1.14: R bir halka ve A ve B , R halkasının idealleri olsun. n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$AB = \{ \sum_{sonlu} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B \}$$

ve

$$A^n = \{ \sum_{sonlu} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j} \mid a_{i_j} \in A \}$$

dir.

Tanım 1.15: R bir halka ve $P \neq R$ olan R nin bir ideali olsun. A ve B , R halkasının herhangi iki ideali olmak üzere

$$“ AB \subseteq P \text{ ise } A \subseteq P \text{ veya } B \subseteq P ”$$

önermesi doğru ise P idealine R halkasının asal ideali denir.

Tanım 1.16: (0) ideali asal ideal olan halkaya asal halka denir.

Örnek 1.17: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamsayılar halkası bir asal halkadır.

Önerme 1.18: Bir R halkasının asal halka olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ olmak üzere $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

Tanım 1.19: R bir halka ve I , R halkasının bir ideali olsun. $I^n = (0)$ olacak biçimde $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ varsa I idealine R halkasının nilpotent ideali denir.

Tanım 1.20: R bir halka, A ve Q , R halkasının iki ideali olsun. $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise Q idealine R halkasının yarıasal ideali denir.

Tanım 1.21: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya yarıasal halka denir.

Önerme 1.22: Bir R halkasının yarıasal halka olması için gerek ve yeter koşul $a \in R$ olmak üzere $aRa = (0)$ olduğunda $a = 0$ olmasıdır.

Uyarı 1.23: Her asal halka bir yarıasal halkadır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Tanım 1.24: R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $na = 0$ sağlayan n pozitif tamsayılarının en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve $char R = n$ ile gösterilir.

Tanım 1.25: R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. Her $a \in R$ için $ma = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına m -torsion free halka denir.

Uyarı 1.26: Bir 2 – torsion free halka ise R halkasının karakteristiği ikiden farklıdır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Uyarı 1.27: R bir asal halka olmak üzere R halkasının karakteristiği ikiden farklı ise R halkası 2 – torsion free bir halkadır.

İspat: R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka olsun. Kabul edelim ki $x \in R$ için $2x = 0$ olsun. Bu durumda her $a, b \in R$ için

$$2(xab) = 0 \Rightarrow xab + xab = 0 \Rightarrow xa(b + b) = 0 \Rightarrow xa(2b) = 0$$

olur. Bu ise her $b \in R$ için $2b = 0$ elde edilir. Bu durumda halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğu için $x = 0$ olur. Böylece R halkası bir 2 – torsion free halkadır.

Sonuç 1.28: R bir asal halka olmak üzere $char R \neq 2$ olması ile 2 – torsion free olması aynı anlama gelir.

Tanım 1.29: R bir halka olsun. $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesine x ile y elemanlarının komütatör çarpımı denir ve $[x, y]$ ile gösterilir.

Özellikler: Her $x, y, z \in R$ için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

- i. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$
- ii. $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$
- iii. $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$
- iv. $[x, y], z] + [y, z], x] + [z, x], y] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

Tanım 1.30: R bir halka ve U , R halkasının toplamsal alt grubu olsun. $\forall u \in U$ ve $\forall r \in R$ için $ur - ru \in U$ oluyorsa U idealine R halkasının bir Lie ideali denir.

Örnek 1.31: $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ halka, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi R halkasının alt kümesi olsun. U , R halkasının Lie idealidir, fakat bir ideali değildir.

Tanım 1.32: R bir halka, $d: R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulu sağlanıyor ise d dönüşümüne R halkasında bir türev denir. (Posner, 1957)

Örnek 1.33: R bir halka ve $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ olsun. S kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen işlemler ile bir halkadır. Bu durumda $d: S \rightarrow S$, $d \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile tanımlı dönüşüm S kümesi üzerinde bir türevdir.

Çözüm: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ alalım.

i) $d(A + B) = d(A) + d(B)$ olduğunu gösterelim.

$$d(A + B) = d \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = d \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Öte yandan

$$d(A) = d \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$d(B) = d \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$d(A) + d(B) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$d(A+B) = d(A) + d(B)$$

elde edilir. Yani d toplamsal bir dönüşümdür.

ii) $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$ olduğunu gösterelim.

$$d(AB) = d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Ayrıca

$$d(A)B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Ad(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$d(A)B + Ad(B) = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$d(AB) = d(A)B + Ad(B)$$

elde edilir. O halde d , R halkası üzerinde bir türevidir.

Tanım 1.34: R bir halka, $D: R \times R \rightarrow R$ bir dönüşümü için eğer

i. Her $x, y \in R$ için $D(x, y) = D(y, x)$,

ii. Her $x, y, z \in R$ için

$$D(x+y, z) = D(x, z) + D(y, z) \quad (D(x, y+z) = D(x, y) + D(x, z))$$

koşulları sağlanıyorsa D ye R üzerinde simetrik ikili toplamsal dönüşüm denir.

Tanım 1.35: $D: R \times R \rightarrow R$ bir simetrik ikili toplamsal dönüşümü her $x, y, z \in R$ için

$$D(xy, z) = D(x, z)y + xD(y, z) \quad (D(x, yz) = D(x, y)z + yD(x, z))$$

ise D ye R üzerinde simetrik ikili türev denir. Ayrıca her $x \in R$ için $d(x) = D(x, x)$ biçiminde tanımlanan $d: R \rightarrow R$ dönüşümüne D nin izi denir. (Maksa, 1980)

Örnek 1.36: $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ bir halka, $D: R \times R \rightarrow R$,

$D \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olarak tanımlı dönüşüm bir simetrik ikili türevdir.

Ayrıca D 'nin izi, $d \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Çözüm:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ alalım.

i) $D(A, B) = D(B, A)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} D(A, B) &= D \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ca \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= D \left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = D(B, A) \end{aligned}$$

olduğundan D simetrik dönüşümdür.

ii) $D(A + B, C) = D(A, C) + D(B, C)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} D(A + B, C) &= D \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= D \left(\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & (a+c)e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Öte yandan

$$\begin{aligned} D(A, C) + D(B, C) &= D \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + D \left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ae \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ce \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ae + ce \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$D(A + B, C) = D(A, C) + D(B, C)$$

elde edilir. Ayrıca D simetrik dönüşüm olduğundan $D(A, B + C) = D(A, B) + D(A, C)$ bulunur. Böylece D simetrik ikili toplamsal dönüşümdür.

iii) $D(AB, C) = D(A, C)B + AD(B, C)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} D(AB, C) &= D\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= D\left(\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & ace \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Öte yandan

$$\begin{aligned} D(A, C)B + AD(B, C) &= D\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ae \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ce \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ace \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ace \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Yani $D(AB, C) = D(A, C)B + AD(B, C)$ elde edilir. D simetrik dönüşüm olduğundan $D(A, BC) = D(A, B)C + BD(A, C)$ bulunur. Yani D simetrik ikili türevidir. Ayrıca D nin izi d ,

$$d\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Not: R bir halka ve $D: R \times R \rightarrow R$ simetrik ikili türev olsun. $y \in R$ sabit eleman olmak üzere, $d: R \rightarrow R, x \mapsto D(x, y)$ ile tanımlanan dönüşüm bir türevidir. Dolayısıyla simetrik ikili türev kavramı türev kavramından daha geneldir.

Tanım 1.37: R bir halka, $d: R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(y)x + yd(x)$$

koşulu sağlanıyor ise d dönüşümüne R halkasında bir ters türev denir. (Bresar, 1989)

Örnek 1.38: R bir değişmeli halka ve $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$ olsun. S kümesi

matrisler halkası üzerinde bilinen işlemler ile bir halkadır. Bu durumda $d: S \rightarrow S$,

$$d\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a - c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ile tanımlı fonksiyon } S \text{ kümesi üzerinde bir ters}$$

türevidir.

Çözüm: $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ alalım.

i) $d(A + B) = d(A) + d(B)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d(A + B) &= d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= d\begin{pmatrix} 0 & a + d & b + e \\ 0 & 0 & c + f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (a + d) - (c + f) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$d(A) = d\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a - c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$d(B) = d\begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d - f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$d(A) + d(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a - c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & d - f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a - c + d - f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$d(A + B) = d(A) + d(B)$$

elde edilir.

ii) $d(AB) = d(B)A + Bd(A)$ olduğunu gösterelim.

$$d(AB) = d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = d\begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$d(B)A = d \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d-f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Bd(A) = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$d(B)A + Bd(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$d(BA) = d(B)A + Bd(A)$$

elde edilir. O halde d , R halkası üzerinde bir ters türevidir. Yani d toplamsal bir dönüşümdür.

Tanım 1.40: R bir halka olsun. $D: R \times R \rightarrow R$ bir dönüşümü için eğer

i. Her $x, y \in R$ için $D(x, y) = D(y, x)$,

ii. Her $x, y, z \in R$ için

$$D(x + y, z) = D(x, z) + D(y, z) \quad (D(x, y + z) = D(x, y) + D(x, z)),$$

iii. Her $x, y, z \in R$ için

$$D(xy, z) = D(y, z)x + yD(x, z) \quad (D(x, yz) = D(x, z)y + zD(x, y)),$$

ise D ye R üzerinde simetrik ters ikili türev denir. (Reddy ve Naik, 2017)

Örnek 1.41: $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ bir halka, $D: R \times R \rightarrow R$,

$$D \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix} \text{ olarak tanımlı dönüşüm bir simetrik ters ikili}$$

türevidir. Ayrıca D nin izi, $d \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Çözüm:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \in R \text{ alalım.}$$

i) $D(A, B) = D(B, A)$ olduğunu gösterelim.

$$D(A, B) = D \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ca & 0 \end{pmatrix} = D \left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right) \\ = D(B, A)$$

olduğundan D simetrik dönüşümdür.

ii) $D(A + B, C) = D(A, C) + D(B, C)$ olduğunu gösterelim.

$$D(A + B, C) = D \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right) \\ = D \left(\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ b+d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (a+c)e & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Öte yandan

$$D(A, C) + D(B, C) = D \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right) + D \left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ae & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ce & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ae + ce & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$D(A + B, C) = D(A, C) + D(B, C)$$

elde edilir. Ayrıca D simetrik dönüşüm olduğundan $D(A, B + C) = D(A, B) + D(A, C)$ bulunur. Yani D simetrik ikili toplamsal dönüşümdür.

iii) $D(AB, C) = D(B, C)A + BD(A, C)$ olduğunu gösterelim.

$$D(AB, C) = D \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right) = D \left(\begin{pmatrix} ac & 0 \\ bc & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ace & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Öte yandan

$$D(B, C)A + BD(A, C) \\ = D \left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} D \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ce & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ae & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ace & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ace & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Yani $D(AB, C) = D(A, C)B + AD(B, C)$ elde edilir. D simetrik dönüşüm olduğundan $D(A, BC) = D(A, C)B + CD(A, B)$ bulunur. Yani D simetrik ters ikili türevidir.

Ayrıca D nin izi d ,

$$d \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = D \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Tanım 1.42: R bir halka, S, R nin boştan farklı bir alt kümesi ve f, R üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in S$ için $[f(x), x] = 0$ koşulu sağlanıyor ise f ye S üzerinde komüting (commuting) dönüşüm denir.

Tanım 1.43: R bir halka, S, R nin boştan farklı bir alt kümesi ve f, R üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in S$ için $[f(x), x] \in Z$ koşulu sağlanıyor ise f ye S üzerinde merkezil (centralizing) dönüşüm denir.

Önerme 1.44: R bir 2 – torsion free yarıasal halka, U, R halkasının merkezil olmayan her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan Lie ideali olsun. Bu durumda R halkasının $I \subseteq U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı I ideali vardır. (Bedir ve Gölbaşı, 2020, Teorem 1.3)

Önerme 1.45: Eğer R bir yarıasal halka ise R nin sıfırdan farklı idealinin merkezi R halkasının merkezi tarafından kapsanır. (Daif ve Bell, 1992, Lemma 2 (b))

Tanım 1.46: R bir halka ve $D: R \times R \rightarrow R$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, r \in R$ için

i) $D(rx, y) = D(x, y)r$ ve $D(x, ry) = D(x, y)r$

sağlanıyorsa D ye R üzerinde sağ homomorfizma

ii) $D(xr, y) = rD(x, y)$ ve $D(x, yr) = rD(x, y)$

sağlanıyorsa D ye R üzerinde sol homomorfizma denir.

II. YARIASAL HALKALARDA SİMETRİK TERS İKİLİ TÜREVLER

Merkezil ve komüting dönüşümler konusuna E. C. Posner'ın iyi bilinen Posner'ın II. Teoremi olarak da adlandırılan merkezil türeve sahip olan bir asal halkanın değişmeli halka olduğunu gösterdiği teorem ile giriş yapılmıştır. Pek çok yazar bu konuyla ilgili halkanın uygun bir alt kümesini ve farklı türevler alarak genelleştirmeler yapmıştır. Toplamsal komüting dönüşüm kavramı ikili türev kavramı ile yakından ilgilidir. Her $F: R \rightarrow R$ toplamsal komüting dönüşümü ikili türeve dönüştürülebilir. Yani $[F(x), x] = 0$ ifadesinde x yerine $x + y$ yazılırsa $[F(x), y] + [F(y), x] = 0$ elde edilir. $(x, y) \rightarrow [F(x), y]$ bir ikili türevdir. Bu çalışmalardan yola çıkarak bu tez çalışmasında yariasal halkanın her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan Lie ideali üzerinde merkezil simetrik ters ikili türev dönüşümü incelenmiştir.

Diğer taraftan ise çeşitli yazarlar tarafından ele alınan $D, G: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türevler ve d ve g sırasıyla D ve G nin izi olmak üzere

- i) $d(xy) + d(x)d(y) \pm xy \in Z$,
- ii) $d(xy) + d(x)d(y) \pm yx \in Z$,
- iii) $d(xy) - d(yx) \pm [x, y] \in Z$,

koşulları simetrik ters ikili türevli yariasal halkanın her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan Lie ideali için incelenmiştir.

Ayrıca aşağıdaki koşullar ise I , R halkasının ideali olmak üzere $x \in I$ için ele alınmıştır:

- v) $d(I) = (0)$,
- vi) D , I üzerinde sol veya sağ homomorfizma,
- vii) $D(d(x), x) = 0$,
- viii) $d(d(x)) = g(x)$.

Not: R bir halka ve U R halkasının bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulu, U idealinin R halkasının bir ideali olması kabulüne yakın gözükse bile, bu özelliği sağlayan ve R halkasının ideali olmayan Lie idealler bulunabilir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası olsun. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie idealidir. Fakat U, R halkasının bir ideali değildir.

Gerçekten; her $u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$ için

$$u^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + ba \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \in U$$

olur. Aynı zamanda her $u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$ ve $r = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{aligned} [u, r] &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & af \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} da & db + ea \\ 0 & fa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & bf - db \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda U Lie idealdir. Fakat her $u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$ ve $r = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R$ için

$$ur = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & af \end{pmatrix} \notin U$$

$$ru = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da & db + ea \\ 0 & fa \end{pmatrix} \notin U$$

olur. Dolayısıyla U, R halkasının bir ideali değildir.

Lemma 2.1: R bir 2 –torsion free yarıasal halka ve I, R halkasının sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer $[I, I] \subseteq Z$ ise bu durumda R halkası merkez tarafından kapsanan ideal içerir.

İspat: Hipotezden her $x, y \in I$ için

$$[x, y] \in Z$$

dir. Bu ifadede y yerine yx yazılırsa ve komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$$Z \ni [x, yx] = [x, y]x + y[x, x]$$

dir. Yani

$$[x, y]x \in Z$$

bulunur. Son ifade $r \in R$ ile komüte edilirse

$$[[x, y]x, r] = 0, \forall x, y \in I, r \in R$$

olur. Buradan

$$0 = [[x, y], r]x + [x, y][x, r]$$

dir. Son eşitlikte hipotez kullanılırsa

$$[x, y][x, r] = 0, \forall x, y \in I, r \in R$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte r yerine ry yazılır ve bu eşitlik kullanılırsa

$$0 = [x, y][x, ry] = [x, y]r[x, y] + [x, y][x, r]y = [x, y]r[x, y]$$

dir. Yani

$$[x, y]R[x, y] = (0), \forall x, y \in I$$

dir. R bir yarıasal halka olduğundan

$$[x, y] = 0, \forall x, y \in I$$

dir. Yani, $[I, I] = (0)$ bulunur. Önerme 1.45 kullanılırsa $I \subseteq Z$ elde edilir. Sonuç olarak R halkası merkez tarafından kapsanan ideal içerir.

Teorem 2.2: R bir 2 – torsion free yarıasal halka, I, R halkasının bir ideali ve $D: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türev, $D(R, R) \subset I$ ve d, D nin izi olsun. Eğer $d(I) = (0)$ ise bu durumda $D = 0$ dır.

İspat: Hipotezden

$$d(x) = 0, \forall x \in I$$

olur. Bu ifadede x yerine $x + y, y \in I$ yazılırsa

$$0 = d(x + y)$$

$$= D(x + y, x + y)$$

$$= D(x, x) + D(x, y) + D(y, x) + D(y, y)$$

olur. Burada d, D nin izi ve $D(x, y) = D(y, x)$ olduğu kullanılırsa

$$d(x) + d(y) + 2D(x, y) = 0$$

bulunur. Hipotezden

$$2D(x, y) = 0$$

dir. $R, 2$ –torsion free yarıasal halka olduğu kullanılırsa

$$D(x, y) = 0, \forall x, y \in I \quad [2.1]$$

elde edilir. Bu eşitlikte x yerine $xr, r \in R$ yazılırsa ve D nin simetrik ters ikili türev olduğu kullanılırsa

$$0 = D(xr, y)$$

$$= rD(x, y) + D(r, y)x$$

olur. Burada [2.1] eşitliği kullanılırsa

$$D(r, y)x = 0, \forall x, y \in I, r \in R$$

bulunur. Burada y yerine $ys, s \in R$ yazılırsa ve D nin simetrik ters ikili türev olduğu kullanılırsa

$$0 = D(r, ys)x$$

$$= D(r, s)yx + sD(r, y)x$$

$$= D(r, s)yx$$

elde edilir. Yani

$$D(r, s)yx = 0, \forall x, y \in I, r, s \in R$$

elde edilir. Son eşitlikte x yerine $tD(r, s)y$, $t \in R$ yazılırsa

$$D(r, s)ytD(r, s)y = 0, \forall y \in I, r, s, t \in R$$

dir. Dolayısıyla

$$D(r, s)yRD(r, s)y = (0), \forall y \in I, r, s \in R$$

elde edilir. R yarıasal halka olduğundan

$$D(r, s)y = 0, \forall y \in I, r, s \in R$$

dir. Buradan

$$D(r, s)Ry = (0), \forall y \in I, r, s \in R$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte y yerine $D(r, s)$ yazılırsa

$$D(r, s)RD(r, s) = (0), \forall r, s \in R$$

dir. R nin yarıasal halka olduğu kullanılırsa

$$D(r, s) = 0, \forall r, s \in R$$

dir. Dolayısıyla $D = 0$ elde edilir.

Teorem 2.3: R bir 2 –torsion free yarıasal halka, U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali ve $D: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türev ve d, D nin izi olsun. Eğer her $x, y \in U$ için $d(xy) + d(x)d(y) \pm xy \in Z$ ise halkası merkez tarafından kapsanan ideal içerir.

İspat: Önerme 1.44 ten R halkasının $I \subset U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Hipotezden her $x, y \in I$ için

$$d(xy) + d(x)d(y) \pm xy \in Z$$

dir. Bu ifadede y yerine $y + z$, $z \in I$ yazılırsa

$$Z \ni d(x(y + z)) + d(x)d(y + z) \pm x(y + z)$$

$$= d(xy + xz) + d(x)d(y + z) \pm xy \pm xz$$

$$= D(xy + xz, xy + xz) + d(x)D(y + z, y + z) \pm xy \pm xz$$

$$= D(xy, xy) + D(xy, xz) + D(xz, xy) + D(xz, xz) + d(x)(D(y, y) + D(y, z) +$$

$$D(z, y) + D(z, z)) \pm xy \pm xz$$

olur. Burada d, D nin izi ve $D(x, y) = D(y, x)$ olduğu kullanılırsa

$$d(xy) + d(xz) + d(x)d(y) + d(x)d(z) + 2D(xy, xz)$$

$$+ 2d(x)D(y, z) \pm xy \pm xz \in Z$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede hipotez kullanılırsa

$$Z \ni 2D(xy, xz) + 2d(x)D(y, z)$$

$$= 2(D(xy, xz) + d(x)D(y, z))$$

elde edilir. R halkasının 2 –torsion free olduğu kullanılırsa

$$D(xy, xz) + d(x)D(y, z) \in Z, \forall x, y, z \in I$$

olur. Son ifadede z yerine y yazılırsa

$$D(xy, xy) + d(x)D(y, y) \in Z, \forall x, y \in I$$

dir. Burada d, D nin izi olduğu kullanılırsa

$$d(xy) + d(x)d(y) \in Z, \forall x, y \in I$$

elde edilir. Bu ifade hipotezde kullanılırsa

$$xy \in Z, \forall x, y \in I \quad [2.2]$$

elde edilir. [2.2] ifadesi $r, r \in R$ ile komüte edilirse

$$[xy, r] = 0, \forall x, y \in I, r \in R \quad [2.3]$$

elde edilir. Komütatör çarpımın özelliğinden

$$[x, r]y + x[y, r] = 0, \forall x, y \in I, r \in R$$

olur ve burada y yerine $yz, z \in I$ yazılırsa ve [2.3] eşitliği kullanılırsa

$$0 = [x, r]yz + x[yz, r]$$

$$= [x, r]yz$$

ifadesi elde edilir. Son eşitlikte z yerine $[x, r]$ yazılırsa

$$[x, r]y[x, r] = 0, \forall x, y \in I, r \in R$$

olur. Yani

$$[x, r]Ry[x, r]y = (0), \forall x \in I, r \in R$$

elde edilir. Son eşitlikte R nin yarıasal olduğu kullanılırsa

$$[x, r]y = 0, \forall x \in I, r \in R$$

olur. Burada y yerine $t[x, r], t \in R$ yazılırsa

$$[x, r]t[x, r] = 0, \forall x \in I, r, t \in R$$

bulunur. Yani,

$$[x, r]R[x, r] = (0), \forall x \in I, r \in R$$

Tekrar R halkasının yarıasal olduğu kullanılırsa

$$[x, r] = 0, \forall x \in I, r \in R$$

dir. Dolayısıyla $I \subset Z$ dir. Sonuç olarak R halkası merkez tarafından kapsanan ideal içerir.

Teorem 2.4: R bir 2 –torsion free yarıasal halka, U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali ve $D: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türev ve d, D nin izi olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $d(xy) + d(x).d(y) \mp yx \in Z$ ise bu durumda R halkası merkez tarafından kapsanan ideal içerir.

İspat: Önerme 1.44 ten R halkasının $I \subset U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Hipotezden her $x, y \in I$ için

$$d(xy) + d(x)d(y) \pm yx \in Z$$

dir. Bu ifadede y yerine $y + z, z \in I$ yazılırsa

$$\begin{aligned} Z \ni & d(x(y+z)) + d(x)d(y+z) \pm (y+z)x \\ &= D(xy+xz, xy+xz) + d(x)D(y+z, y+z) \pm (y+z)x \\ &= D(xy, xy) + D(xy, xz) + D(xz, xy) + D(xz, xz) + d(x)D(y, y) \\ &+ d(x)D(y, z) + d(x)D(z, y) + d(x)D(z, z) \pm (y+z)x \end{aligned}$$

dir. Burada $D(x, y) = D(y, x)$ ve d, D nin izi olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & d(xy) + d(xz) + d(x)d(y) + d(x)d(z) \\ & + 2D(xy, xz) + 2d(x)D(y, z) \pm yx \pm zx \in Z \end{aligned}$$

bulunur. Burada hipotez kullanılırsa

$$Z \ni 2D(xy, xz) + 2d(x)D(y, z) = 2(D(xy, xz) + d(x)D(y, z))$$

elde edilir. R bir 2-torsion free halka olduğu kullanılırsa

$$D(xy, xz) + d(x)D(y, z) \in Z, \forall x, y, z \in I$$

olur. Son ifadede z yerine y yazılırsa

$$Z \ni D(xy, xy) + d(x)D(y, y) = d(xy) + d(x)d(y)$$

elde edilir. Bu ifade hipotezde kullanılırsa

$$yx \in Z, \forall x, y \in I$$

elde edilir. Bu ifade Teorem 2.3 te [2.2] eşitliği ile aynıdır. Teorem 2.3 te kullanılan metotla R halkası merkez tarafından kapsanan ideal içerir.

Teorem 2.5: R bir 2-torsion free yarıasal halka, U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali ve $D: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türev ve d, D nin izi olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $d(xy) - d(yx) \pm [x, y] \in Z$ ise R halkası merkez tarafından kapsanan ideal içerir.

İspat: Önerme 1.44 ten R halkasının $I \subset U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Hipotezden her $x, y \in I$ için

$$d(xy) - d(yx) \pm [x, y] \in Z$$

olur. Yukarıdaki ifadede y yerine $y + z, z \in I$ yazılırsa

$$d(x(y+z)) - d((y+z)x) \pm [x, y+z] \in Z$$

dir. D simetrik ters ikili türev ve d, D nin izi olduğu kullanılırsa

$$Z \ni d(xy+xz) - d(yx+zx) \pm [x, y+z]$$

$$= D(xy + xz, xy + xz) - D(yx + zx, yx + zx) \pm [x, y + z] \in Z$$

$$= D(xy, xy) + D(xy, xz) + D(xz, xy) + D(xz, xz)$$

$$- D(yx, yx) - D(yx, zx) - D(zx, yx) - D(zx, zx) \pm [x, y + z]$$

dir. $D(x, y) = D(y, x)$ ve d, D nin izi olduğu kullanılırsa

$$d(xy) + d(xz) + 2D(xy, xz) - d(yx) - d(zx) - 2D(yx, zx) \pm [x, y] \pm [x, z] \in Z$$

olur. Bu ifadede hipotez kullanılırsa

$$2D(xy, xz) - 2D(yx, zx) \in Z$$

elde edilir. $R, 2$ -torsion free yarıasal halka olduğundan

$$D(xy, xz) - D(yx, zx) \in Z, \forall x, y, z \in I$$

dir. Yukarıda z yerine y yazılırsa

$$D(xy, xy) - D(yx, yx) \in Z, \forall x, y \in I$$

bulunur. d, D nin izi olduğu kullanılırsa

$$d(xy) - d(yx) \in Z, \forall x, y \in I$$

elde edilir. Bu ifade hipotezde kullanılırsa

$$[x, y] \in Z, \forall x, y \in I$$

olur. Yani $[I, I] \subseteq Z$ dir. Sonuç olarak Lemma 2.1 den R halkası merkez tarafından kapsanan ideal içerir.

Teorem 2.6 : R bir 2 -torsion free yarıasal halka, I, R halkasının bir ideali ve $D: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türev, $D(R, R) \subset I$ ve d, D nin izi olsun. Eğer D, I üzerinde sol (sağ) homomorfizm ise $D = 0$ dir.

İspat: D, I üzerinde sol homomorfizm olsun. Tanım 1.46 kullanılırsa

$$D(x, yz) = zD(x, y), \forall x, y, z \in I$$

dir. Diğer taraftan D simetrik ters ikili türev olduğundan

$$D(x, yz) = D(x, z)y + zD(x, y), \forall x, y, z \in I$$

olur. Burada hipotez kullanılırsa

$$D(x, z)y = 0, \forall x, y, z \in I$$

elde edilir. Bu ifadede y yerine $rD(x, z)$ yazılırsa

$$D(x, z)rD(x, z) = 0, \forall x, y, z \in I$$

dir. Yani

$$D(x, z)RD(x, z) = (0), \forall x, z \in I$$

elde edilir. R yarıasal halka olduğu kullanılırsa $D(x, z) = 0, \forall x, z \in I$ olur. Burada z yerine x yazılırsa

$$D(x, x) = 0, \forall x \in I$$

dir. d, D nin izi olduğundan

$$d(x) = 0, \forall x \in I$$

olur. Burada Teorem 2.2 kullanılırsa $D = 0$ olur.

Diğer taraftan eğer D, I üzerinde sağ homomorfizm ise de benzer tekniklerle ispat yapılır.

Not: R bir halka ve $D: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türev ve d, D nin izi olsun. Buna göre her $x, y \in R$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $D(0, y) = 0 = D(x, 0),$

ii) $D(-x, y) = -D(x, y)$ ve $D(x, -y) = -D(x, y),$

iii) $d(-x) = d(x).$

Gerçekten,

i) $D(0, y) = D(0 + 0, y) = D(0, y) + D(0, y)$

dir. Buradan

$$D(0, y) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $D(x, 0) = 0$ bulunur.

ii) $0 = D(0, y) = D(x + (-x), y) = D(x, y) + D(-x, y)$

dir. Buradan

$$D(-x, y) = -D(x, y)$$

elde edilir. Benzer şekilde $D(x, -y) = -D(x, y)$ olduğu elde edilir.

ii) $d(-x) = D(-x, -x) = -D(x, -x) - D(x, x) = D(x, x) = d(x)$

bulunur.

Teorem 2.7: R bir 2 -torsion free yarıasal halka, I, R halkasının bir ideali ve $D: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türev, $D(R, R) \subset I$ ve d, D nin izi olsun. Eğer her $x \in I$ için $D(d(x), x) = 0$ ise bu durumda $D = 0$ dir.

İspat: Hipotezden

$$D(d(x), x) = 0, \forall x \in I$$

dır. Yukarıda x yerine $x + y, y \in I$ yazılırsa ve d, D nin izi, $D(x, y) = D(y, x)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= D(d(x + y), x + y) \\
&= D(D(x + y, x + y), x + y) \\
&= D(D(x, x) + D(x, y) + D(y, x) + D(y, y), x + y) \\
&= D(d(x) + D(x, y) + D(x, y) + d(y), x + y) \\
&= D(d(x) + d(y) + 2D(x, y), x + y) \\
&= D(d(x), x) + D(d(x), y) + D(d(y), x) + D(d(y), y) \\
&\quad + 2D(D(x, y), x) + 2D(D(x, y), y)
\end{aligned}$$

olur. Burada hipotez kullanılırsa

$$D(d(x), y) + D(d(y), x) + 2D(D(x, y), x) + 2D(D(x, y), y) = 0$$

elde edilir. Burada x yerine $-x$ yazılırsa ve $D(-x, y) = -D(x, y), d(-x) = d(x)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= D(d(-x), y) + D(d(y), -x) + 2D(D(-x, y), -x) + 2D(D(-x, y), y) \\
&= D(d(x), y) - D(d(y), x) + 2D(D(x, y), x) - 2D(D(x, y), y)
\end{aligned}$$

olur. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$2D(d(x), y) + 4D(D(x, y), x) = 0$$

dir. Burada R nin 2 -torsion free yarıasal halka olduğu kullanılırsa

$$D(d(x), y) + 2D(D(x, y), x) = 0 \quad [2.4]$$

elde edilir. [2.4] eşitliğinde y yerine yx yazılırsa ve D nin simetrik ters ikili türev olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= D(d(x), yx) + 2D(D(x, yx), x) \\
&= D(d(x), x)y + xD(d(x), y) + 2D(xD(x, y) + D(x, x)y, x) \\
&= D(d(x), x)y + xD(d(x), y) + 2D(xD(x, y) + d(x)y, x) \\
&= D(d(x), x)y + xD(d(x), y) + 2D(D(x, y), x)x + 2D(x, y)D(x, x) \\
&\quad + 2yD(d(x), x) + 2D(y, x)d(x)
\end{aligned}$$

olur. Hipotezden

$$xD(d(x), y) + 2D(D(x, y), x)x + 2D(x, y)D(x, x) + 2D(y, x)d(x) = 0$$

dır. d, D nin izi ve $D(x, y) = D(y, x)$ olduğu kullanılırsa

$$xD(d(x), y) + 2D(D(x, y), x)x + 4D(x, y)d(x) = 0$$

bulunur. [2.4] eşitliği sağdan x ile çarpılırsa

$$D(d(x), y)x + 2D(D(x, y), x)x = 0$$

olur. Son iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$0 = xD(d(x), y) + 2D(D(x, y), x)x + 4D(x, y)d(x)$$

$$-D(d(x), y)x - 2D(D(x, y), x)x$$

$$= xD(d(x), y) + 4D(x, y)d(x) - D(d(x), y)x$$

elde edilir. Burada komütatör çarpım tanımı kullanılırsa

$$[x, D(d(x), y)] + 4D(x, y)d(x) = 0 \quad [2.5]$$

bulunur. [2.5] eşitliğinde y yerine yx yazılırsa ve D nin simetrik ters ikili türev olduğu kullanılırsa

$$0 = [x, D(d(x), yx)] + 4D(x, yx)d(x)$$

$$= [x, xD(d(x), y) + D(d(x), x)y] + 4(xD(x, y) + D(x, x)y)d(x)$$

$$= [x, xD(d(x), y)] + [x, D(d(x), x)y] + 4xD(x, y)d(x) + 4D(x, x)y d(x)$$

$$= [x, x]D(d(x), y) + x[x, D(d(x), y)] + [x, D(d(x), x)]y + D(d(x), x)[x, y]$$

$$+ 4xD(x, y)d(x) + 4D(x, x)y d(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikte [2.5] eşitliği ve komütatör çarpım tanımı kullanılırsa

$$[x, D(d(x), x)]y + D(d(x), x)[x, y] + 4D(x, x)y d(x) = 0$$

bulunur. d, D nin izi olduğu ve hipotez kullanılırsa

$$4d(x)y d(x) = 0$$

bulunur. $R, 2$ -torsion free halka olduğu kullanılırsa

$$d(x)y d(x) = 0, \forall x, y \in I$$

olur. Yani,

$$d(x)y R d(x)y = 0, \forall x, y \in I$$

dir. Burada R halkasının yarıasal olduğu kullanılırsa

$$d(x)y = 0, \forall x, y \in I$$

elde edilir. Son eşitlikte y yerine $rd(x)$, $r \in R$ yazılırsa

$$d(x)rd(x) = 0, \forall x \in I$$

dir. Tekrar R halkasının yarıasal olduğu kullanılırsa $d(x) = 0, \forall x \in I$ dir. Teorem 2.2 kullanılırsa $D = 0$ olur.

Teorem 2.8: R bir 2 –torsion free ve 3 –torsion free yarıasal halka, I, R halkasının bir ideali ve $D, G: R \times R \rightarrow R$ simetrik ters ikili türevler, $G(R, R) \subset I$ ve d, g sırasıyla D, G nin izleri olsun. Eğer her $x \in I$ için $d(d(x)) = g(x)$ ise bu durumda $G = 0$ dir.

İspat: Hipotezden

$$d(d(x)) = g(x), \forall x \in I$$

dir. Burada x yerine $x + y, y \in I$ yazılırsa

$$d(d(x + y)) = g(x + y)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} d(x + y) &= D(x + y, x + y) \\ &= D(x, x) + D(x, y) + D(y, x) + D(y, y) = d(x) + D(x, y) + D(x, y) + d(y) \\ &= d(x) + d(y) + 2D(x, y) \end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa

$$D(d(x) + d(y) + 2D(x, y), d(x) + d(y) + 2D(x, y)) = g(x) + g(y) + 2G(x, y)$$

dir. D simetrik ters ikili türev olduğundan

$$\begin{aligned} &D(d(x), d(x)) + D(d(x), d(y)) + 2D(d(x), D(x, y)) + D(d(y), d(x)) \\ &+ D(d(y), d(y)) + 2D(d(y), D(x, y)) + 2D(D(x, y), d(x)) + 2D(D(x, y), d(y)) \\ &+ 4D(D(x, y), D(x, y)) = g(x) + g(y) + 2G(x, y) \end{aligned}$$

dir. d, D nin izi, D nin simetrik olduğu ve hipotez kullanılırsa

$$\begin{aligned} &2D(d(x), d(y)) + 4D(d(x), D(x, y)) + 4D(d(y), D(x, y)) \\ &+ 4d(D(x, y)) - 2G(x, y) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. R bir 2 – torsion free yarıasal halka olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} &D(d(x), d(y)) + 2D(d(x), D(x, y)) + 2D(d(y), D(x, y)) \\ &+ 2d(D(x, y)) - G(x, y) = 0 \end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte x yerine $-x$ yazılırsa ve $D(-x, y) = -D(x, y), d(-x) = d(x)$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= D(d(-x), d(y)) + 2D(d(-x), D(-x, y)) + 2D(d(y), D(-x, y)) + \\ &2d(D(-x, y)) - G(-x, y) \\ &= D(d(x), d(y)) - 2D(d(x), D(x, y)) - 2D(d(y), D(x, y)) + 2d(D(x, y)) + G(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki ifade taraf tarafa çıkarılırsa

$$4D(d(x), D(x, y)) + 4D(d(y), D(x, y)) = 2G(x, y)$$

dir. R bir 2-torsion free halka olduğu kullanılırsa

$$2D(d(x), D(x, y)) + 2D(d(y), D(x, y)) = G(x, y), \forall x, y \in I \quad [2.6]$$

bulunur. [2.6] eşitliğinde x yerine $2x$ yazılırsa

$$2D(d(2x), D(2x, y)) + 2D(d(y), D(2x, y)) = G(2x, y)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(2x) &= (2x, 2x) = D(x + x, x + x) = D(x, x) + D(x, x) + D(x, x) + D(x, x) \\ &= d(x) + d(x) + d(x) + d(x) = 4d(x), \end{aligned}$$

$$D(2x, y) = D(x + x, y) = D(x, y) + D(x, y) = 2D(x, y)$$

ve

$$D(x, 2y) = D(x, y + y) = D(x, y) + D(x, y) = 2D(x, y)$$

dir. Bu ifadeler son eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 2D(4d(x), 2D(x, y)) + 2D(d(y), 2D(x, y)) - 2G(x, y) \\ &= 16D(d(x), D(x, y)) + 4D(d(y), D(x, y)) - 2G(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede [2.6] eşitliği kullanılırsa

$$12D(d(x), D(x, y)) = 0, \forall x, y \in I$$

bulunur. Burada R , 2 –torsion free ve 3 –torsion free yarıasal halka olduğu kullanılırsa

$$D(d(x), D(x, y)) = 0, \forall x, y \in I$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte y yerine x yazılırsa

$$0 = D(d(x), D(x, x))$$

$$= D(d(x), d(x))$$

dir. d, D nin izi olduğundan

$$d(d(x)) = 0, \forall x \in I$$

olur ve bu ifade hipotezde kullanılırsa $g(x) = 0, \forall x \in I$ bulunur. Dolayısıyla Teorem

2.2 kullanılırsa $G = 0$ elde edilir.

Teorem 2.10: R bir 2 –torsion free ve 3 –torsion free yarıasal halka, U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali ve $D: R \times R \rightarrow$

R simetrik ters ikili türev ve d, D nin izi olsun. Eğer her $x \in I$ için $[d(x), x] \in Z$ ise bu durumda d, I üzerinde komüting dönüşümdür.

İspat: Önerme 1.44 ten R halkasının $I \subset U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır.

Hipotezden her $x \in I$ için

$$[d(x), x] \in Z$$

sağlanır. Burada x yerine $x + y$, $y \in I$ yazılırsa

$$Z \ni [d(x + y), x + y]$$

$$= [D(x + y, x + y), x + y]$$

$$= [D(x, x) + D(x, y) + D(y, x) + D(y, y), x + y]$$

$$= [d(x) + D(x, y) + D(x, y) + d(y), x + y]$$

$$= [d(x) + d(y) + 2D(x, y), x + y]$$

$$= [d(x), x] + [d(x), y] + [d(y), x] + [d(y), y] + 2[D(x, y), x] + 2[D(x, y), y]$$

dir. Burada hipotez kullanılırsa

$$[d(x), y] + [d(y), x] + 2[D(x, y), x] + 2[D(x, y), y] \in Z$$

elde edilir. Yukarıda x yerine $-x$ yazılırsa ve $D(-x, y) = -D(x, y)$, $d(-x) = d(x)$

olduğu kullanılırsa

$$[d(x), y] - [d(y), x] + 2[D(x, y), x] - 2[D(x, y), y] \in Z$$

olur. Son iki ifade taraf tarafa toplanırsa

$$2[d(x), y] + 4[D(x, y), x] \in Z$$

dir. Burada R nin 2 -torsion free halka olduğu kullanılırsa

$$[d(x), y] + 2[D(x, y), x] \in Z$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede y yerine x^2 yazılırsa ve D nin simetrik ters ikili türev

olduğu kullanılırsa

$$Z \ni [d(x), x^2] + 2[D(x, x^2), x]$$

$$= [d(x), x^2] + 2[xD(x, x) + D(x, x)x, x]$$

$$= [d(x), x^2] + 2[xd(x) + d(x)x, x]$$

$$= [d(x), x]x + x[d(x), x] + 2x[d(x), x] + 2[x, x]d(x) + 2d(x)[x, x]$$

$$+ 2[d(x), x]x$$

dir. Burada hipotez kullanılırsa

$$6[d(x), x]x \in Z$$

olur. R , 2 -torsion ve 3 -torsion free halka olduğundan

$$[d(x), x]x \in Z$$

bulunur. Bu ifade $z \in R$ ile komüte edilirse ve hipotez kullanılırsa

$$0 = [[d(x), x]x, z]$$

$$= [d(x), x][x, z] + [[d(x), x], z]$$

$$= [d(x), x][x, z]$$

bulunur. Bu ifade soldan $r \in R$ ile çarpılırsa

$$r[d(x), x][x, z] = 0$$

dir. Burada $[d(x), x] \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$[d(x), x]r[x, z] = 0$$

elde edilir. Burada z yerine $d(x)$ yazılırsa

$$[d(x), x]r[x, d(x)] = 0$$

olur. R yarıasal halka olduğu kullanılırsa

$$[d(x), x] = 0, \forall x \in I$$

bulunur. Sonuç olarak d, I üzerinde komüting dönüşümdür.

KAYNAKLAR

- [1] **Ali, A., Rehman, N. ve Shakir, A.** (2003). On Lie ideals with as homomorphisms and anti-homomorphisms, *Acta Math. Hungar.*, 101 (1-2), 79-82.
- [2] **Argaç, N. ve Albaş, E.** (2004). Generalized derivations of prime rings, *Algebra Coll.*, 11 (3), 399-410.
- [3] **Ashraf, M. ve Rehman, N.** (2001). On derivations and commutativity in prime rings, *East-West J. Math.*, 3(1), 87-91.
- [4] **Ashraf, M.** (1999). On symmetric bi-derivations in rings, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, XXXI, 25-36.
- [5] **Awtar, R.** (1973). Lie and Jordan structure in prime rings with derivations, *Bull. Inst. Of Math. Academia Sinica II*, 75-79.
- [6] **Bell, H. E. ve Kappe, L. C.** (1989). Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions, *Acta Math. Hungarica*, 53, 339-346.
- [7] **Bresar, M. ve Vukman, J.** (1989). On some additive mappings in rings with involution, *Aequationes Mathematicae*, 38, 178-185.
- [8] **Bedir, Z. ve Gölbaşı, Ö.** (2020). Some ommutativity on Lie ideals on semiprime rings, *Adıyaman University Journal of Science*, 10(2), 548-556.
- [9] **Daif, M.N. ve Bell, H.E.** (1992). Remarks on derivations on semiprime rings, *Internat J. Math. Math. Sci.*, 15(1), 205-206.
- [10] **Divinsky, N.** (1955). On commuting automorphisms of rings, *Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III*, 49, 19-52.
- [11] **Gölbaşı, Ö. ve Koç, E.** (2011). Generalized derivations on Lie ideals in prime rings, *Turk J. Math.*, 35, 23-28.
- [12] **Huang, S., Gölbaşı, Ö. ve Koç, E.** (2015). On centralizing and strong commutativity preserving maps of semiprime rings, *Ukrainian Mathematical Journal*, 67 (2), 323-331.
- [13] **Lee, P. H., Lee, T. K.** (1983). Lie ideals of prime rings with derivations, *Bull. Inst. of Math. Academia Sinica II*, 75-79.
- [14] **Luh, J.** (1970). A note on commuting automorphisms of rings, *Amer. Math. Monthly* 77, 61-62.
- [15] **Maksa, Gy.** (1980). A remark on symmetric biadditive functions having non-negative diagonalization, *Glasnik. Mat.*, 15 (35), 279-282.
- [16] **Maksa, Gy.** (1987). On the trace of symmetric biderivations , *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 9, 303-307.

- [17] **Öztürk, M. A. ve Sapancı, M.** (1999). On generalized symmetric bi- derivations in prime rings, East Asian Math. J. 15(2), 165-176.
- [18] **Reddy, C.J., Rao, G. V. B. ve Reddy, K.M.** (2015). Symmetric Left Bi-Derivations in Semiprime Rings, IOSR Journal of Mathematics, 11(5), 25-26.
- [19] **Reddy, C. J. ve Naik, M. R.** (2017). Symmetric Reverse Bi-Derivations in Semiprime Rings, International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology, 6(13).
- [20] **Rehman, N.** (2002). On commutativity of rings with generalized derivations, Math. J. of Okayama Univ., 44, 43-49.
- [21] **Samman, M. S. ve Thaheem, A. B.** (2003). Derivations and reverse derivations in semiprime rings, Int. Math. Forum, 2(39), 1895-1902.
- [22] **Vukman, J.** (1989). Symmetric biderivations on prime and semiprime rings, Aequationes Math., 38, 245-254.
- [23] **Vukman, J.** (1990). Two results concerning symmetric biderivations on prime rings, Aequationes Math., 40, 181-189.
- [24] **Posner, E. C.** (1957). Derivations in prime rings, Proc Amer. Math. Soc., 8, 1093-1100.
- [25] **Yeşilgül, M. Ş. ve Argaç, N.** (1993.) Idelas and symmetric bi-derivations of prime semiprime ring, Math. J. Okayama Univ., 189-192.