



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



GRİ SİSTEM TEORİSİ VE ENERJİ TÜKETİM MODELLEMESİNDE BİR UYGULAMA

Yüksek Lisans Tezi

Esra MAVİGÖZ

İstatistik Anabilim Dalı Adı

İzmir
2021

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

GRI SİSTEM TEORİSİ VE ENERJİ TÜKETİM MODELLEMESİNDE BİR UYGULAMA

Esra MAVİGÖZ

Danışman : Doç. Dr. Sevcan DEMİR ATALAY

İstatistik Anabilim Dalı
İstatistik Yüksek Lisans Programı

İzmir
2021

KABUL ONAY SAYFASI

Esra MAVİGÖZ tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “GRİ SİSTEM TEORİSİ VE ENERJİ TÜKETİM MODELLEMESİNDE BİR UYGULAMA” başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’ nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 26.11.2021 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oy birliği/oy çokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı :

.....

Raportör Üye :

.....

Üye :

.....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “GRİ SİSTEM TEORİSİ VE ENERJİ TÜKETİM MODELLEMESİNDE BİR UYGULAMA” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

26 / 11 / 2021

Esra MAVİGÖZ

ÖZET
GRI SİSTEM TEORİSİ VE ENERJİ TÜKETİM
MODELLEMESİNDE BİR UYGULAMA

MAVİGÖZ, Esra

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sevcan DEMİR ATALAY
Kasım 2021, 94 sayfa

Bu tez çalışmasında GVMCT ile adlandırılan gri Verhulst modeline sabit terimin eklenmesi ile oluşturulan model üzerinde çalışılmıştır. Modele ilişkin diferansiyel denklem çözülerek gri tahmin denklemi elde edilmiştir. Elde edilen tahmin denkleminin performansının değerlendirilmesi amacıyla enerji alanında bir uygulama çalışması yapılmıştır. Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (TERS), Ticari Sektörün Tükettiği Toplam Enerji (TECS) ve Sanayi Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (TEIS) değişkenlerine ilişkin veri setleri incelenmiştir. Veri setinin uygun olması nedeniyle ilgili değişkenler için hem zaman serileri analizi kullanılarak hem de gri modelleme (GM (1,1) modeli, Gri Verhulst Modeli ve GVMCT modeli) kullanılarak çeşitli tahmin denklemleri oluşturulmuştur. Elde edilen tahmin denklemlerinin performansı MSE, MAE ve RMSE performans ölçülerine göre kıyaslanmıştır. Elde edilen tahmin denklemleri kullanılarak iki dönem için öngörü yapılmış ve gerçek değerler ile kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: GVMCT, GM (1,1), Gri Verhulst Modeli, Performans Ölçüleri

ABSTRACT**GREY SYSTEM THEORY AND AN APPLICATION IN ENERGY
CONSUMPTION MODELLING**

MAVİGÖZ, Esra

MSc in Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Sevcan Demir ATALAY

November 2021, 94 pages

In this thesis, the model created by adding the constant term to the grey Verhulst model called GVMCT has been studied. The grey estimation equation has been obtained by solving the differential equation of the model. In order to evaluate the performance of the obtained estimation equation, an application study has been carried out in the field of energy. Data sets related to Total Energy Consumed by the Residential Sector (TERS), Total Energy Consumed by the Commercial Sector (TECS) and Total Energy Consumed by the Industrial Sector (TEIS) variables have been examined. Due to the convenience of the data set, various estimation equations have been created for the related variables using both time series analysis and grey modeling (GM (1,1) model, Grey Verhulst Model and GVMCT model). The performance of the estimation equations obtained has been compared according to MSE, MAE and RMSE performance measures. Forecasts have been made for two periods using the obtained estimation equations and compared with the actual values.

Keywords: GVMCT, GM (1,1), Grey Verhulst Model, Performance Measures

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne bağlı İstatistik Anabilim Dalı'nda hazırlanan bir yüksek lisans tezidir. Bu çalışmada zaman serileri analizi yöntemi ve klasik GM(1,1) ile gri verhulst modelinden yola çıkarak oluşturduğumuz sabit terimli gri verhulst modeli ele alınmış, söz konusu iki tahmin metoduna ilişkin tahmin sonuçları incelenmiştir. Uygulama bölümünde, enerji sektörüne ait değişkenler ele alınmış ve farklı yöntemler uygulanarak en uygun yöntem öngörüldüğü şekilde ortaya konmuştur. Çalışma konusunun belirlenmesinde, planlanmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini hep hissettiğim, doğru yönlendirmeleri ve tutumuyla yolumu aydınlatan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım danışmanım Doç. Dr. Sevcan DEMİR ATALAY'a, çalışma kapsamında desteklerini esirgemeyen ve bulundukları katkılarından dolayı Doç. Dr. Gülben ÇALIŞ ve Dr. Öğr. Üyesi Meltem ADIYAMAN hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma 21749 proje numarası ile Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

İZMİR

26/11/2021

Esra MAVİGÖZ

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	iii
EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI.....	v
ÖZET	vii
GRİ SİSTEM TEORİSİ VE ENERJİ TÜKETİM MODELLEMESİNDE BİR UYGULAMA	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
TABLolar DİZİNİ.....	xvi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xviii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	5
2.1. Bazı Belirsiz Sistem Modellerinin Karşılaştırılması.....	8
2.2. Gri Sistem Temelli Tahmin.....	13
2.2.1. Klasik GM(1,1)	16
2.2.2. Gri Verhulst Model.....	22
2.2.3. GM(1,1) Yuvarlama Modeli (Rolling Model).....	26
2.3. Zaman Serileri	30
2.3.1. Zaman serilerinin bileşenleri.....	32
2.4. Box-Jenkins Modelleri.....	36
2.5. Doğrusal Durağan Stokastik Modeller	38
2.5.1. Otoregresif süreç: AR (Autoregressive) (p)	39
2.5.2. Hareketli ortalama süreci: MA (MovingAverage) (q).....	40

2.5.3. Otoregresif hareketli ortalama süreci: ARMA (Autoregressive–Moving Average) (p,q)	41
2.5.3.1. Otokorelasyon fonksiyonu(ACF).....	41
2.5.3.2. Kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF).....	42
2.6. Birim Kök Testi	43
2.6.1. Dickey Fuller (DF) birim kök testi	43
2.6.2. Genişletilmiş Dickey Fuller (ADF) birim kök testi	44
2.7. Tahminlemede Hata Ölçüm İstatistikleri	45
3. GEREÇ ve YÖNTEM.....	47
3.1. Sabit Terimli Gri Verhulst Modeli (GVMCT).....	47
4. UYGULAMA	57
4.1. Zaman Serileri Analizi İle Uygun Modellerin Belirlenmesi.....	58
4.2. Uygun Gri Modeller.....	68
5.BULGULAR.....	73
5.1. Uygun Modellerin Performans Değerlendirmesi	73
6. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	77
KAYNAKÇA.....	81
TEŞEKKÜR.....	93
ÖZGEÇMİŞ	94
EKLER.....	

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2. 1.Belirsiz Sistem Teorileri Uygulama Alanları	7
Şekil 2. 2. Gri Sistem Teorisi Araştırma ve Uygulama Alanları	11
Şekil 2. 3. GM (1,1) Yuvarlama Modeli Uygulama	
Şekil 4. 1.Üç Değişken İçin Zaman Yolu Grafiği	57
Şekil 4. 2. Serinin Yapısına Uygun Muhtemel Modelin Belirlenebilmesi İçin Çizilen Korelogram	65
Şekil 4. 3. AR (1) Modeli İçin Residual-Actual-Fitted Grafiği.....	68
Akış Diyagramı (Zhao et al., 2016).....	29
Şekil 2. 4. Trend Doğrusuna İlişkin Grafik Örnekleri (Tüzen, 2012)	33
Şekil 2. 5.Mevsimlik Dalgalanma Hareketine İlişkin Grafik Örneği (Tüzen, 2012).....	34
Şekil 2. 6. Konjonktürel Dalgalanmalara İlişkin Grafik Örneği (Tüzen, 2012).....	35
Şekil 2. 7. Çalışmada Kullanılan Hata Ölçüm İstatistikleri.....	46
Şekil 4. 1.Üç Değişken İçin Zaman Yolu Grafiği	57
Şekil 4. 2. Serinin Yapısına Uygun Muhtemel Modelin Belirlenebilmesi İçin Çizilen Korelogram	65
Şekil 4. 3. AR (1) Modeli İçin Residual-Actual-Fitted Grafiği	68

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Açıklama</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1. Siyah-Gri-Beyaz Sistemlerin Karşılaştırılması	9
Tablo 2.2. Gri Sistem Teorisinin Diğer Belirsizlik Araştırma Yöntemleri ile Karşılaştırılması	10
Tablo 2.3. Literatürdeki Bazı Gri Sistem Çalışmaları	15
Tablo 3.1. Farklı Girdilerin Kullanıldığı Modeller	47
Tablo 4.1. İki Değişken İçin İstatistiksel Açıdan Anlamlı Model Denklemleri	58
Tablo 4.2. Belirtilen Hipotez Testi İçin E-Views Programı Çıktısı	59
Tablo 4.3. Kescmeli ve Trendsiz Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı	60
Tablo 4.4. Kescmeli ve Trendli Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı	61
Tablo 4.5. Serinin Bir Adım Farkı Alınarak Yapılan Birim Kök Testi Sonuçları E-Views Program Çıktısı	62
Tablo 4.6. Birinci Farklar İçin Kescmeli ve Trendsiz Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı	63
Tablo 4.7. Birinci Farklar İçin Kescmeli ve Trendli Model Kalıbına İlişkin Elde Edilen E-Views Program Çıktısı	64
Tablo 4.8. Muhtemel Modelin Belirlenmesine İlişkin Yapılan Karşılaştırmalı Tablo	65
Tablo 4.9. Serinin Yapısına Uygun Modelin Belirlenmesi Amacıyla Çeşitli Modellerden Elde Edilen Sonuçlara Dayalı Oluşturulan Özet	67

Tablo 4.10. TERS, TECS ve TEIS Değişkenleri İçin GM (1,1) ve Gri Verhulst Model Denklemler	68
Tablo 5.1. TERS Değişkeni İçin Performans Kriter Tablosu ($\hat{x}^{(1)}(k) _{k=1} = x^{(1)}(1)$ Başlangıç Koşulu Altında)	73
Tablo 5.2. TECS Değişkeni İçin Performans Kriter Tablosu ($\hat{x}^{(1)}(k) _{k=1} = x^{(1)}(1)$ Başlangıç Koşulu Altında)	74
Tablo 5.3. TEIS Değişkeni İçin Performans Kriter Tablosu ($\hat{x}^{(1)}(k) _{k=1} = x^{(1)}(1)$ Başlangıç Koşulu Altında)	74
Tablo 5.4. TERS Değişkeni İçin İki Farklı Başlangıç Koşulu Altında Performans Kriter Tablosu	75
Tablo 5.5. TECS Değişkeni İçin İki Farklı Başlangıç Koşulu Altında Performans Kriter Tablosu	75
Tablo 5.6. TEIS Değişkeni İçin İki Farklı Başlangıç Koşulu Altında Performans Kriter Tablosu	75
Tablo 5.7. TERS Değişkeni Tahmin Değerleri	76
Tablo 5.8. TECS Değişkeni Tahmin Değerleri	76
Tablo 5.9. TEIS Değişkeni Tahmin Değerleri	76

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$X^{(0)}$	Orijinal Veri Dizisi
$X^{(1)}$	Kümülatif Veri Dizisi
Z	Ortalama Seri
AGO	Kümülatif İşlem Operatörü
$IAGO$	Ters Kümülatif İşlem Operatörü
Y_t	t zamanındaki zaman serisi gözlem değeri
T_t	t zamanındaki trendin etkisi
M_t	t zamanındaki mevsimsel dalgalanmaların etkisi
C_t	t zamanındaki konjonktürel değişmelerin etkisi
ε_t	Hata Bileşeni
ϕ	Modelin Bilinmeyen Otoregresif Model Parametreleri
p veya q	Modelin Derecesi
μ	Sabit Terim
$\rho(k)$	Otokorelasyon Katsayısı
ϕ_{kk}	k. 1nci Dereceden Kısmi Otokorelasyon Katsayısı

<u>Kısaltmalar</u>	
<i>GST</i>	Gri Sistem Teorisi
<i>ABD</i>	Amerika Birleşik Devletleri
<i>Btu</i>	British Thermal Unit
<i>GM (1,1)</i>	Klasik Gri Model
<i>GVM</i>	Gri Verhulst Model
<i>GVMCT</i>	Sabit Terimli Gri Verhulst Modeli
<i>TERS</i>	Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji
<i>TECS</i>	Ticari Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji
<i>TEIS</i>	Sanayi Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji
<i>GSMH</i>	Gayri Safi Milli Hasıla
<i>ARIMA</i>	Otoregresif Entegre Hareketli Ortalama
<i>ACF</i>	Otokorelasyon Fonksiyonu
<i>PACF</i>	Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu
<i>MSE</i>	Ortalama Hata Kare
<i>MAE</i>	Ortalama Mutlak Hata
<i>RMSE</i>	Karekök Ortalama Hata Kare
<i>AR (p)</i>	p. dereceden Otoregresif Süreç
<i>MA (q)</i>	q. dereceden Hareketli Ortalama
<i>ARMA (p, q)</i>	Otoregresif Hareketli Ortalama

1. GİRİŞ

Bilim, teknoloji ve insanlığın gelişmesi ile birlikte belirsizlik içeren sistemlere ilişkin çalışmalar yeni bir anlam kazanmıştır. 20. yüzyılın ikinci yarısında, sistem bilimi ve sistem mühendisliği alanlarında çeşitli teoriler ve belirsiz sistemlere ilişkin metodolojiler ortaya konulmuştur. Bu konuda L.A. Zadeh 'in 1965 yılındaki Bulanık Mantık Teorisi ve Julong Deng' in 1982 yılındaki Gri Sistemler Teorisi önde gel çalışmalarıdır. Bir bakımdan bu çalışmalar belirsiz bilgileri tanımlamak ve ele almak için kuram ve metodolojileri sağlar.

1982'de Julong Deng tarafından ortaya konulan Gri Sistem Teorisi, küçük örneklem ve zayıf bilgi içeren problemlerin incelenmesine odaklanan yeni bir yöntemdir. Bu teori az sayıda ve eksik verilerden yararlanarak bilgi sunmayı amaç edinmiştir. Bu özelliği ile de dikkatleri üzerine çekmektedir. Bu teorinin ortaya çıkışındaki temel düşünce stokastik veya bulanık yöntemlerle üstesinden gelinemeyen belirsiz sistemlerin davranışlarını, az sayıda veri ile tahmin etmektir. Küçük örnekleme dayalı ve az bilgiye sahip belirsiz sistemler yaygın olduğundan gri sistem teorisi geniş uygulama alanlarına sahiptir. Gri sistem teorisi ortaya atıldığı günden bugüne endüstri, sosyal sistemler, ekolojik sistemler, ekonomi, trafik, yönetim, eğitim, çevre ve askeri gibi pek çok alanda başarı ile uygulanmıştır (Huang et al., 1997). Gri sistem teorisi alanında yapılan çalışmaları gri üretim, gri ilişki analizi, gri modelleme, gri tahmin, gri karar verme ve gri kontrol gibi başlıklar altında toplamak mümkündür.

Gri tahmin modelleri, az miktarda veri bulunması durumunda dahi belirsizlik içeren sistemlerin özelliklerini tanımlayabilme özelliği nedeniyle birçok tahmin ile ilgili uygulamalarda kullanılmıştır (Deng, 1989). Ayrıca, az sayıda veri bulunması durumunda dahi uygulanabilirlikleri nedeniyle, gri tahmin modelleri diğer yöntemlere göre daha güvenilir, kullanıcı dostu ve pratik olduğu düşünülmektedir. İstatistiksel modellere benzer olarak gri tahmin modelleri de bir tahmin modeller topluluğudur. Bu modeller topluluğu içerisinde GM (1,1) modeli ön plana çıkmaktadır. GM (1,1) modeline ilişkin olarak model parametrelerinin optimize edilmesi (Tan et al., 2015; Lin et al., 2012), hibrit GM (1,1) model

önerileri (Wang et al., 2017; Lin et al., 2012; Chang et al., 2017), GM(1,1) model açılımları (Xie and Liu, 2009; Ma and Liu, 2017, Yang and Xue, 2016) ve farklı başlangıç koşullarının önerilmesi (Deng, 2002; Dang and Liu, 2004) gibi farklı bakış açılarından birçok çalışma yapılmıştır.

Belirli bir değişkenin zamana bağlı olarak yapılan ölçüm veya gözlemleri bir zaman serisi oluşturur. Bu tanımlamaya bağlı olarak zaman serileri hemen hemen her alanda karşımıza çıkar ve dolayısıyla çok geniş bir uygulama alanı bulunmaktadır. Zaman serileri öngörü, tanımlama, açıklama ve kontrol gibi farklı amaçlarla analiz edilmektedir. Bu amaçların arasında en önemli olanı ise geleceğe yönelik öngörü için kullanılabilir olmasıdır. Zaman serileri analiz yöntemleri içerisinde Box – Jenkins yöntemi yaygın kullanımı ile ön plana çıkmaktadır. Box-Jenkins yöntemi, zaman serisinin yapısı veya eğilimi hakkında hiçbir ön bilgiye ihtiyaç duymadan tahmin yapılabilen bir yöntemdir. Bu özelliğe sahip olması dolayısı ile diğer yöntemlere kıyasla çok daha kullanışlı bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Diğer yöntemlerde serinin herhangi bir eğilime sahip olması ve bir ön bilgi istenirken Box-Jenkins modellerinde bu şekilde bir kullanım söz konusu değildir. Bu sebeple yöntem karmaşık zaman serileri problemlerine de uygulanabilmektedir. Box-Jenkins yöntemi, son geliştirilen tahmin yöntemlerinden biridir. Dolayısı ile diğer tekniklerde oluşan olumsuz yönlerin bu yöntemde iyileştirilmesi ve sorunların giderilmesi amaçlanmıştır. Günümüzde oldukça yaygın bir biçimde kullanılan Box-Jenkins yönteminin bu kadar popüler olmasının sebebi, serinin durağan olup olmamasıyla veya mevsimsel unsur içerip içermemesine bağlı olarak bağımsız olup mutlak bir çözüme kavuşturabilmesi niteliğinden kaynaklıdır. Zaman serilerine ilişkin literatürde çokça kaynak bulunmaktadır. (Sevüktekin ve Nargeleçekenler, 2007; Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., 1976).

Bu tez çalışmasında temel olarak gri tahmin modeli ve uygulaması üzerine bir çalışma yapılması amaçlanmaktadır. Çalışmada gri modelin girdisine katkıda bulunmak amacıyla gri Verhulst modeline sabit terim eklenerek bir model oluşturulmuştur. Modele ilişkin diferansiyel denklem çözülerek bir tahmin denklemi elde edilmiştir. Elde edilen tahmin denkleminin performansının

belirlenebilmesi amacıyla enerji alanında bir uygulama çalışması yapılmıştır. Çalışma kapsamında Amerika Birleşik Devletleri (ABD) Enerji Bilgi İdaresi tarafından hazırlanan Ocak 2020 Aylık Enerji Değerlendirmesi'nden elde edilen enerji tüketim veri seti kullanılmıştır. Bu veri seti "British thermal unit (Btu)" cinsinden ABD'deki ticaret ve sanayi sektörleri tarafından tüketilen birincil ve toplam enerji tüketim miktarlarını içermektedir. Bu veri setleri içerisinde üç tanesi bu tez çalışmasında kullanılmıştır:

- TERS: Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Residential Sector),
- TECS: Ticari Sektörün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Commercial Sector),
- TEIS: Sanayi Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Industrial Sector).

Veriler 1949-2018 yılları arasındaki yıllık verilerden oluşmaktadır. Öncelikle bu değişkenler için zaman serileri analizi yapılarak uygun model denklemleri elde edilmiştir. Sonrasında ilgili üç değişken için uygun gri model (GM (1,1) modeli, Gri Verhulst Modeli ve önerilen GVMCT modeli denklemleri oluşturulmuştur. Elde edilen tahmin denklemlerinin performansı, gerçek değerler ile denklemlerden elde edilen tahmin değerlerinin kıyaslanması ile ortaya konmaktadır. Bu amaçla MSE, MAE ve RMSE performans ölçüleri olarak belirlenmiş ve bu ölçülere bağlı olarak modellere ilişkin kıyaslamalar yapılmıştır. İlgili yorumlar verilerek önerilen modelin performansı değerlendirilmiştir. 2019-2020 yılları için öngörü değerleri elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümü çalışmada yer alan konulara ilişkin detayların bulunduğu Genel Bilgiler bölümünden oluşmaktadır. Gereç ve Yöntem başlığı ile verilen üçüncü bölümde, önerilen GVMCT modelinin detayları ve diferansiyel denklemin çözümü yer almaktadır. Dördüncü bölümde yapılan uygulama çalışması detaylıca verilmektedir. Beşinci bölümde çalışmaya ilişkin bulgular verilmekte ve son olarak altıncı bölüm ise çalışmanın Tartışma ve Sonuç bölümünü oluşturmaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

İstatistik, belirli bir amaca yönelik olarak seçilen kitleyi temsilen toplanan verilerin yapılan gözlem ve ölçümler sonucunda çeşitli teori ve kanunlara dayandırılarak analiz edilmesi ve farklı değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenerek nitel ve nicel olarak ölçülmesi sonucunda tablo ve grafikler yardımıyla tahmin ve öngörülerde bulunmaya yarayan ve bunun üzerinden karar vermeye olanak sağlayan bir veri bilimi ve tahminleme sanatıdır.

Günümüz dünyasındaki gelişmelerden doğan bununla birlikte bilim ve teknolojiye ilerlemelere paralel olarak ortaya çıkan çok sayıda, belirsiz bilgi ve bir o kadar da hızlı bir veri akışı söz konusudur. Bu verilerin kontrol edilmesi, aralarındaki bağıntıların çözümlenerek yorumlanabilmesi için çeşitli yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Özellikle büyük hacimli verilerin bilinen geleneksel yöntemlerle analiz edilip tahminlenmesi mümkünken, küçük hacimli verilere ilişkin belirsizliklerin yorumlanmasında çeşitli sistemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Buna istinaden belirtilen sistemlerin işleyişinin tespit edilmesinde ve ileriye yönelik tahminlemelerinin yapılabilmesinde söz konusu bu sistemlerin araştırılması ayrı bir önem kazanmaktadır.

Sistemler yapısal olarak bir soruya yanıt bulmak veya bir probleme çözüm üretebilmek için kendisini oluşturan öğeler ve arasındaki ilişkileri ulaşılmak istenen amaç çerçevesinde belirli bir tasarımla analiz etmesi bakımından bir mühendislik alt dalı olarak da günümüzde karşımıza çıkabilmektedir. Bununla birlikte bazen belirsiz ve karmaşık yapılar içermesi bakımından bazı sistemlerin analiz edilip yorumlanmasında çeşitli güçlükler ile karşılaşmıştır. Bu gibi sistemlerin modellenip belirsizliklerin ortadan kaldırılması için araştırmacılar ihtiyaç doğrultusunda az bilgi ile ilerleyebilmeye imkân tanıyan yeni çözüm yaklaşımları önermişlerdir. Yapılan çalışmalar incelendiğinde sistem kavramının çağdaş bilimlerin yorumlanmasında kullanılmaya başlanmasına paralel olarak belirsizliklerin tahminlenmesi alanındaki ilk atılımlar da 20. yüzyılın ikinci yarısında öne çıkmıştır. Bu çerçevede;

- Olasılık ve İstatistik,
- Gri Sistem Teorisi
- Bulanık Mantık

belirsiz sistemlerin incelenmesinde sıkça kullanılan araştırma yöntemleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle 'sistem mühendisliği' çerçevesinde incelenen belirsiz sistemler ve metodolojileri olarak ele alınan bu çalışmalardan en çok göze çarpanları; L.A. Zadeh 'in 1965 yılındaki Bulanık Mantık teorisi ve Profesör Julong Deng' in 1982 yılındaki Gri sistemler teorisidir. Belirsiz bilgileri tanımlamak ve incelemek üzere tasarlanan kuram ve yöntemlerin iskeletini oluşturan bu çalışmalar belirsiz sistem teorilerinin de temel yapı taşlarıdır. Bununla birlikte yukarıda belirtilen belirsiz sistem modelleri karşılaştırılacak olursa birtakım benzerlikler ve farklılıklardan söz edilebilir. Her üç metodolojinin de araştırma nesnelerinin tümünün çeşitli belirsizlikler içermesi ortak noktaları iken, araştırma nesnelerinin sahip olduğu belirsizlikler arasındaki farklılıklar bu yöntemleri birbirinden ayırmaktadır. Belirsiz (stokastik, bulanık, gri) sistemler üç açıdan sınıflandırılabilir:

- Belirsiz sistem teorilerinin matematiksel temeli,
- Belirsiz sistem modellemesi: Diğer ilgili yöntemlerle birleştirilen modelleme ve ilgili hesaplama yöntemleri de dahil olmak üzere belirsiz sistemlerin ve hesaplama şemalarının modellenmesi,
- Belirsiz sistem teorilerinin doğal ve sosyal bilimlerde geniş kapsamlı uygulamaları.

Belirsiz (stokastik, bulanık, gri) sistemlerin teorik ve uygulama alanlarına ilişkin araştırmalar son derece aktif olmuştur. Fakat tüm bu çalışmalar teoriyi geliştirmeye ve yenilikçi yöntemler oluşturmaya yeterince çaba sarf edilmeden uygulamalara odaklanıldığını göstermiştir. Özellikle, mevcut belirsiz sistem teorileri arasındaki farklılıkları ve ortaklıkları araştırmak için yeterli dikkat gösterilmemiştir, böylece yeni ortaya çıkan belirsiz sistem teorileri ve yöntemleri ile geleneksel teori ve yöntemleri bir araya getirme konusunda yeterli çalışma yayınlanmamıştır. Bu durum belirsiz sistem teorilerinin gelişimini az çok

etkilemiştir. Nitekim, her geleneksel ya da yeni ortaya çıkan belirsiz sistem teorisi ve yöntemi birbirini tamamlar ve tam olarak birbirinden ayıramaz. Farklı belirsiz sistem teorileri ve yöntemleri, birbirlerini iten değil, birbirini tamamlayan kendi güçlü yönlerine sahiptir. Bununla birlikte klasik yöntemlerin de bugünkü bilgiye ulaşmamızdaki katkısı ortadadır. Bilimin ilerlemesi ve sağlıklı bir şekilde gelişmesi için klasik yöntemlerin yanı sıra farklı çalışma yöntemleri ve tekniklerinin birbirleri ile etkileşim içinde bulunması ve değişim sağlaması şarttır. Bu bağlamda araştırmacıların çeşitli klasik teorileri yeni geliştirilen belirsiz sistem teorileri ve yöntemleri gibi çalışmalar ile birleştirmesi yeni ve farklı keşiflere yol açacaktır.

Günümüzde belirsiz (stokastik, bulanık, gri) sistemlere ilişkin teorik çalışmalar çok farklı alanlarda karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmaların günlük hayatta önemli sosyal ve ekonomik faydalar sağladığına ilişkin yayınlar literatürde yer almakta olup buna ilişkin uygulama alanlarından bazıları Şekil 2.1.de sunulmuştur.



Şekil 2. 1. Belirsiz Sistem Teorileri Uygulama Alanları

2.1.Bazı Belirsiz Sistem Modellerinin Karşılaştırılması

Olasılık ve istatistik bilimi istatistik yasalarının ortaya çıkarılmasına vurgu yaparak stokastik belirsizlik olgusunu inceler. Stokastik belirsizliğin olası her sonucunun ortaya çıkma şansını araştırırlar. Başlangıç noktası, belirli bir dağılım biçimini sağlamak için büyük örneklem ölçüsü gereksinimidir.

Bulanık mantık; araştırma nesnelerinin kesin işlem ve belirsiz kapsam özelliğine sahip olduğu bilişsel belirsizlik ile ilgili problemlerin araştırılmasıyla ilgilenir. Örneğin, "genç insan" bulanık bir kavramdır. "Genç insan" denildiğinde herkes tarafından anlaşılabilir fakat genç olmanın ve genç olmamanın kesin aralığının belirtilmesi gerekiyorsa burada zorlanılabilir. Çünkü "genç insan" kavramının tam bir kapsamı yoktur. Bu tür bilişsel belirsizlik içeren problemler deneyim ve üyelik fonksiyonlarından yararlanılarak bulanık mantıkla ele alınır.

Gri sistemler teorisinin odak noktası; olasılıkla değerlendirilmesi zor olan, küçük örneklem ve zayıf bilgi içeren belirsizlik problemleridir. Gri sistemler teorisinin özelliklerinden biri de az miktarda veriyle modeller oluşturmaktır.

Burada üzerinde durulan temel nokta verilerin Siyah–Gri–Beyaz olarak sınıflandırılmasıdır. Bilginin niteliksel olarak ele alındığı bu sınıflandırmada;

- “Siyah” bilinmeyen bilgi,
- “Gri” kısmen bilinen/bilinmeyen bilgi,
- “Beyaz” tam bilinen bilgi olarak tanımlanmaktadır.

Bu aşamada yukarıda belirtilen ve Gri Sistem Teorisi açısından siyah – gri – beyaz sistemlerin doğru şekilde tanımlanması önem arz etmektedir. Buna ilişkin kavramların karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 2.1. de özetlenmiştir (Liu and Lin, 2006).

Tablo 2.1.Siyah-Gri-Beyaz Sistemlerin Karşılaştırılması.

	SİYAH	GİRİ	BEYAZ
Bilgi Türü	Bilinmiyor	Tamamlanmamış	Biliniyor
Görünüş	Koyu	Gri	Parlak
Süreç	Yeni	Eski yerine Yeni	Eski
Özellik	Kaos	Karmaşıklık	Düzen
Yöntem	Olumsuz	Geçiş	Olumlu
Tutum	Müşamaha içerir	Tolerans	Netlik
Çıkarım	Sonuç yok	Çoklu Çözüm	Tek Çözüm

Tablodan hareketle gri sistemler özellikleri bakımından kısmi olarak bilinen veya bilinmeyen bir diğer ifade ile tamamlanmamış bilgileri içeren bir takım karmaşık durumlara ilişkin belirli esneklik ve tolerans aralığında çeşitli çözüm önerileri ileri sürülebilen yöntemler olarak tanımlanabilir. Bununla birlikte herhangi bir duruma ilişkin gri bilgiden söz edildiği durumlarda burada ifade edilmek istenilenin aslında kısmi olarak bilinen veya bilinmeyen bir başka ifade ile tamamlanmamış bilgiden söz edildiği çıkarımı yapılabilir. Bu durumları içeren sistemler incelendiğinde tamamlanmamış bilgiye ilişkin dört farklı durum ön plana çıkmaktadır (Liu and Lin, 2010):

- Elemanlara (Parametrelere) ilişkin olarak tamamlanmamış; kısmi olarak bilinen – kısmi olarak bilinmeyen bilgi,
- Yapıya ilişkin olarak tamamlanmamış; kısmi olarak bilinen – kısmi olarak bilinmeyen bilgi,
- Sınırlara ilişkin olarak tamamlanmamış; kısmi olarak bilinen – kısmi olarak bilinmeyen bilgi,
- Davranışlara ilişkin olarak tamamlanmamış; kısmi olarak bilinen – kısmi olarak bilinmeyen bilgi olarak tanımlanmaktadır.

Gri sistem teorisi (GST) çalışmalarında yer alan konuların özellikleri karşılaştırılmak istendiğinde diğer belirsiz sistemler ile karşılaştırma mümkün olmaktadır. Bu sistemlerin Gri sistemler ile ilgili farkları ve gri sistemlerin genel özellikleri Tablo 2.2.' de özetlenmiştir (Liu and Lin, 2006).

Tablo 2.2. Gri Sistem Teorisinin Diğer Belirsizlik Araştırma Yöntemleri ile Karşılaştırılması.

KATEGORİ	Gri Sistem Teorisi	Olasılık ve İstatistik	Bulanık Matematik
Çalışma Alanı	Yetersiz Bilgi	İstatistiksel Belirsizlik	Dilsel Belirsizlik
Temel Küme	Gri Belirsiz Kümeler	Kantor Kümeler	Bulanık Kümeler
Yöntem	Bilgi Kapsamı	Olasılık Dağılımları	Üyelik Fonksiyonları
Prosedür	Gri Seriler	Frekans Dağılımları	Marjinal Örneklem
Gereksinim	Herhangi Bir Dağılım	Belirli Bir Dağılım	Tecrübe
Önem	Kapsam	Kapsam	Uzantı
Amaç	Gerçekçi Kurallar	İstatistiksel Kurallar	Dilsel İfadeler
Karakteristik	Küçük Örneklem	Büyük Örneklem	Tecrübe

Tabloya göre, GST' nin küçük örnekleme sahip yetersiz veya eksik bilgi olsa bile herhangi bir dağılım ya da dağılım ile ifade edilmeksizin çalışabilmesi, endüstriyel ve akademik araştırmalarda kullanımı açısından kolaylıklar sağlaması nedeniyle tercih edilmektedir. Ayrıca, her bir gri sistemde gri sayılar, sistem için en temel aşama olarak düşünülebilir. Bir gri sayı, değeri kesin olarak bilinmeyen fakat alabileceği değer için sınırları bilinen/tanımlanabilen bir sayıdır. Gri sayılar bir aralık ya da sayı kümesinden elde edilir.

Bu çalışmanın temelini oluşturan gri sistem teorisi, bir sistem teorisi ve disiplinler arası bir yaklaşım olmak üzere ilk olarak 1980'li yıllarda geliştirilmiştir. 1982 yılında Çinli profesör Julong Deng' in "The Control Problems of Gray Systems" adlı araştırma makalesinin "Systems & Control Letters" isimli uluslararası dergide yayımlanması ile birlikte istatistik bilimine kazandırılan bu teori aynı zamanda belirsizlik alanlarında tahminleme konusunda yapılan çalışmaların temelini oluşturmuştur (Aydemir et al., 2013). Aynı yıl, Journal of Huazhong University of Science and Technology, yine Julong Deng tarafından Çince gri sistemler teorisi üzerine ilk makaleyi yayınlamıştır. Bu makalelerin yayınlanması, disiplinler arası gri sistemler teorisinin resmi görünümüne işaret etmiştir.

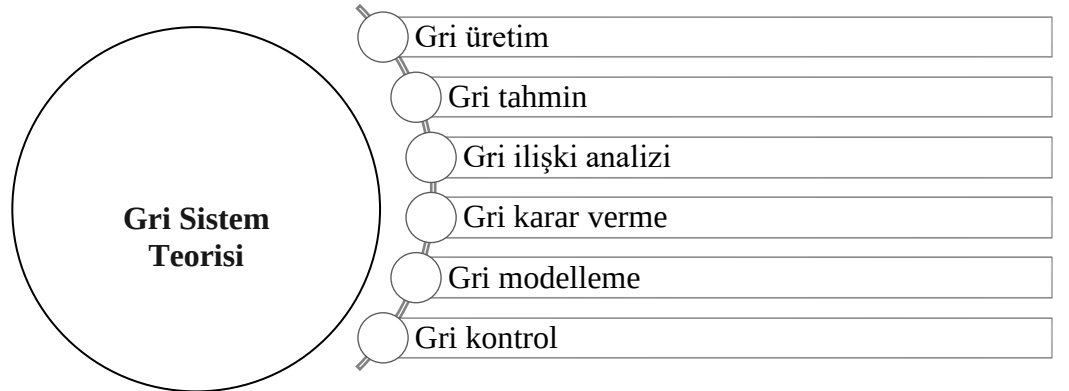
"The Control Problems of Gray Systems" adlı makalede Gri Sistem Teorisinden ilk defa bahsedilirken bu çalışmanın pek çok alandaki araştırmaya

yeni bir bakış açısı ve çözüm önerisi sunması ve bilim dünyasına sağladığı katkı ile gelecek araştırmacılara, okurlara ve bilim dünyasına öncülük ederek kısa vadede bu konuya önemli ölçüde popülerlik kazandırmıştır. Buna bağlı olarak da bu alanda çeşitli yeni teori geliştirme çalışmalarında önemli bir rol üstlenmiştir.

Yaklaşık kırk yıllık gelişim ile, sistem analizi, değerlendirme, modelleme, tahmin, karar verme, kontrol ve optimizasyon tekniklerinden oluşan teorik yapısı ile bilimsel bir disiplin olarak karşımıza çıkan Gri sistem teorisi:

- Endüstriyel sistemler
- Yönetim ve organizasyon sistemleri,
- Sosyal sistemler
- Eğitim sistemleri,
- Çevre ve ekolojik sistemler
- Trafik alanı uygulama sistemleri,
- Ekonomi sistemsel analizleri,
- Askeri sistemler, vb.

çeşitli alanlarda (Huang et al., 1997) uygulanmıştır ve sonuç olarak GST ana başlığı altında araştırma ve uygulama metodolojisi olarak altı temel alt başlıkta toplanmıştır (Chiou et al., 2004; Hsu, 2003; Xueliang et al., 2004; Lin and Yang, 1999; Chen and Tzeng, 2004; Yeh and Lu, 1996; Wu and Wen, 2001; Kayacan et al., 2010; Lin et al., 2001; Li et al., 2007; Akay and Kulak, 2007):



Şekil 2. 2. Gri Sistem Teorisi Araştırma ve Uygulama Alanları

Burada gri üretim az veri ile işletmelerin hammadde tedarikinden ürün çıktısına kadar olan süreç içindeki basamaklar göz önünde bulundurularak geleceğe yönelik üretim sürecinin planlanmasını ve gri tahminleme, kısıtlı veri kümelerinden yola çıkılarak gelecek dönemlere ait yeni verileri türetme işlemidir. Gri renk ile sembolize edilmektedir. Beyazlatma işlemi adım adım uygulanır. Gri ilişki analizinde ise genellikle sistemler oluşturulurken sisteme etki eden faktörler ve faktörlerin birbirlerine olan bağımlılıkları üzerinden analizler yapılmaktadır. Bu analizde, sahip olunan faktörlerin birbirleri arasındaki ilişkinin belirlenmesi ile birlikte, hangi faktörün öne çıktığı da önemlidir (Erden ve Ceviz, 2015). Gri tahminde de olduğu ve biraz önce açıklandığı üzere, buradaki gri ilişki analizinde de az sayıda bilgi ile oluşan faktörler ile iyi düzeyde sonuçlara ulaşılmaktadır. Gri karar alternatif farklı seçenekler arasından herhangi birinin seçilmesi olasılığı veya yeni bir karar verilmesi için karar verme sürecini oluşturmaktadır. Gri karar süreci kısaca gri renk ile sembolize edilen metot ve yöntemlerin kullanılması ile bir planın seçilmesi ve akabinde uygulanma adımlarının izlenmesidir. (Erden ve Ceviz, 2015). Gri modelleme, gri renk ile simgelenen varyasyon denklemi ve modelin beyazlaştırması olan gri diferansiyel denklemlerin oluşturulması ile yapılmaktadır (Tsai et al., 2003). Sembolize edilen gri renkli bilgilerin, bir takım matematiksel denklemler ve yöntemler ile beyazlaştırılma süreci olan gri modelleme, bilgi ihtiyacı bulunan öngörüler için tahminlemenin yapılabilmesi amacıyla gerekli adımları kapsamaktadır. Gri kontrolde ise bulanık ve karar verilemeyen durumlar için bir model oluşturulduğu düşünüldüğünde diğer yapay zekâ teknikleri ile birlikte çok disiplinli gri sistem teorisinin kullanımına dayanmaktadır.

Gri Sistem Teorisine ilişkin literatürde yer verilen bazı tanımlamalar aşağıdaki şekilde özetlenmeye çalışılmıştır.

Tanım 1. GST, küçük örnekleme dayalı veri gruplarında yaklaşım sağlayan ve herhangi bir dağılıma mensup olmayan olasılık temelli tahmin yöntemlerine nazaran az sayıda veri ile tahmin yeteneğine sahip olan disiplinler arası bir yaklaşımdır (Avcı, 2018).

Tanım 2. GST, Küçük örnekleme dayalı, kısıtlı bilgi yardımı ile gerçeğe yakın sonuçlar çıkaran net olmayan sistemlerin çözümüne odaklı yeni bir metodolojidir. Diğer disiplinler arası tüm teorilerin çoğunun aksine, güçlü ve başarılı sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Bu bağlamda gerçek hayata uygulanabilirliği açısından birçok uygulama bulmak mümkün olduğundan araştırmacılar için önemli bir alternatif haline gelmiştir (Yücesan, 2017).

2.2. Gri Sistem Temelli Tahmin

Gri modeller zaman serilerinin gelecek değerlerini tahmin ederler. Bu da tahminleyicinin çerçeve boyutuna bağlı olarak en yeni verilerin kümesi üzerinden temel alınarak mümkündür. Gri modellerinde kullanılan tüm veri değerlerinin pozitif olduğu varsayılır ve zaman serilerinin örneklem frekansı sabittir.

GST' nin temel görevi uygun veriyi kullanarak sistemin gerçekçi kanunlarını ortaya çıkarmaktır. Bu süreç gri dizilerin üretimi olarak bilinir. Çoğunlukla beyaz rakamlardan oluşan sistemin uygun verilerine rağmen aynı zamanda çok kompleks ve kaotik olmakla birlikte, birtakım kesin kanunlar içermektedirler. Verilerin rasgeleliği, Gri Sistem ile düzgün olarak sağlanırsa sistemin özel karakteristiklerini türetmek daha kolay olur.

Gri sistem teorisinde $GM(n,m)$ gri modeli ifade eder. Burada, n : diferansiyel denklem sayısını (n .mertebeden diferansiyel denklem sayısı) ve m : değişken sayısını göstermektedir.

Gri tahmin modelleri, az miktarda veri bulunması durumunda dahi belirsizlik içeren sistemlerin özelliklerini tanımlayabilme özelliği nedeniyle birçok tahmin ile ilgili uygulamalarda kullanılmıştır (Deng, 1989). Ayrıca, az sayıda veri bulunması durumunda dahi uygulanabilirlikleri nedeniyle, gri tahmin modellerinin diğer yöntemlere göre daha güvenilir, kullanıcı dostu ve pratik olduğu düşünülmektedir. İstatistiksel modellere benzer olarak gri tahmin modelleri de bir tahmin modeller topluluğudur. Bu modeller topluluğu içerisinde $GM(1,1)$ ön plana çıkmaktadır.

$GM(1,1)$ modeline ilişkin olarak model parametrelerinin optimize edilmesi (Tan vd., 2015, Lin et al., 2012), hibrit $GM(1,1)$ model önerileri (Wang et al., 2017; Lin et al., 2012; Chang et al., 2017) $GM(1,1)$ model açılımları (Xie and Liu, 2009; Ma and Liu, 2017; Yang and Xue, 2016) ve farklı başlangıç koşullarının önerilmesi (Deng, 2002; Dang and Liu, 2004) gibi farklı bakış açılarından birçok çalışma yapılmıştır. Gri tahmin yöntemi birçok uygulama da kullanılmıştır. $GM(1,1)$ hızla büyüyen Asya-Pasifikteki 10 ülke çifti arasındaki trafik akışını ve toplam yolcu sayısını tahmin etmek için kullanılmıştır (Hsu and Wen, 1998). Tayvan donanmasına ait malzeme ekipmanlarının planlanması amacıyla yedek parçaların stok kontrolü için yapılan çalışmada, talep miktarını belirlemek için gri tahmin modeli kullanılmıştır (Chiou et al., 2004). Akay ve Atak (2007), Türkiye'nin endüstriyel ve toplam elektrik tüketim talebi yuvarlanma mekanizması (Rolling mechanism) yaklaşımı kullanarak gri tahmin yöntemi ile belirlemişlerdir. Tayvan'daki ileri teknoloji endüstrisinin çıktı ve trendlerini tahmin etmek amacıyla gri teori ve genetik algoritmaların birlikte kullanımı Wang, Hung ve Hsu (2008) tarafından önerilmiştir. Lu et al. (2009), Tayvan'da 2007-2025 yılları arasındaki motorlu araç sayısı, taşıtların enerji tüketimi ve CO_2 emisyonlarının gelişim eğilimlerinin tahmini için $GM(1,1)$ modelini kullanmışlardır. Boran (2015) tarafından yapılan çalışmada gelecekte Türkiye'nin doğal gaz ihtiyacını tahmin etmek için yuvarlanma mekanizmalı gri tahmin yöntemi kullanılmıştır. Yılmaz ve Yılmaz (2013), Türkiye'deki CO_2 gazı emisyonlarını tahmin etmek amacıyla gri tahmin yöntemini kullanmışlardır. Literatürdeki örnek bazı çalışmalar, uygulama alanları ve yazarları aşağıda verilmektedir.

Tablo 2.3. Literatürdeki Bazı Gri Sistem Çalışmaları

Yayın Adı	Araştırmacı
Şahıs Tahmini	(Lin and Hsu, 2002)
Hisse Senedi Tahminlemesi ve Portföy Seçimi	(Huang and Jane, 2009)
Elektrik Enerjisi Tahminlemesi	(Huang and Jane, 2009)
Yedek Parçaların Tahmini	(Chiou et al., 2004)
Enerji Tüketiminin Tahmini	(Feng et al., 2012)
Kömür Madeninde Çökme Tahmini	(Xu et al., 2014)
Mezuniyet Not Tahmini	(Köse et al., 2015)
Proje Maliyet Tahmini	(Zhao, 2016)
Doğal Gaz Talep Tahmini	(Oruç ve Çelik, 2017)
Enerji Talebi Tahmini	(Hu, 2017)
Elektrik Talep Tahmini	(Yao et al., 2003)
Tank Tabanının Aşınma Tahmini	(Liu and Zhang, 2007)
Gri Tahmin Uygulama	(Tien, 2009)
Enerji Tüketim Tahmini	(Yu and Lu, 2012; Feng et al., 2012; Suo, 2017)
Gri Tahmin Modeli'nin Enerji Tedarik Yönetimi Mühendisliği'ne Uygulaması	(Chen and Wang, 2012)
İnternet İş Pazarlama Tahmini	(Huang et al., 2014)
Maliyet Tahmini	(Zhao ,2016; Ömürbek et al., 2016)
Lojistik Şirketlerinin Sürdürülebilirlik Performansı İçin Gri Tahmin	(Yu et al., 2016)
Doğal Gaz Talep Tahmini	(Oruç ve Çelik, 2017)
Turist Tahmini	(Hu, 2017)
Banka Karlılık Tahmini	(Ömürbek et al., 2018)

2.2.1. Klasik GM(1,1)

GM (1,1) sadece basit bir ilkeye sahip değildir, aynı zamanda daha az veri, kolay hesaplama, yüksek tahmin doğruluğu ve kolay denetim sağlar. Ek olarak, orijinal veriler ön işleme tabi tutulabilir, daha iyi pürüzsüzlük elde edilerek daha etkili bir tahmin elde etme özelliğine sahiptir. GM (1,1) literatürde geniş kullanım alanına sahip olup " Birinci Dereceden Tek Değişkenli Gri Model" olarak adlandırılır. GM (1,1) bir tür homojen üssel dağılım büyüme modelidir. En küçük kareler yöntemi ve birikimli sıralama temeline dayanan bir yöntemdir. Orijinal verilerin büyüme eğilimi tahminin kesinliği üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Orijinal veri dizisi düzgün bir şekilde üssel dağılım büyümesi gösterdikçe model daha yüksek tahmin doğruluğu üretebilir. Gri tahmin modeli veri sıralamasındaki düzgünlüğü arttırmak için orijinal verileri ön işleme tabi tutar ve böylece büyük ölçüde tahmininin tutarlılığı / hassasiyetini geliştirir ve ters dönüşüm yoluyla orijinal veri dizisinin tahmini değerleri elde edilir. Bu model bir zaman serisi tahmin modelidir. Gri Modele ait diferansiyel denklem zaman katsayısı içerir. Bir başka deyişle model yeni veriyi, tahmin modeli için yeniler. Gri Model sadece pozitif veri dizilerinde kullanılabilir. İşlem görmemiş ham veri kümelerinin dizi operatörlerinden yararlanarak sistemlerin gelecek dönemlerdeki belirsiz özelliklerini kavramak ve gelecek dönemlerdeki durumlarını tahminlemek için Gri Tahmin Yöntemi kullanılır (Liu and Lin, 2010).

Gri tahmin teorisi gri sistem teorisinin önemli bir yapıtaşdır. GM (1,1) tahmin modeli, söz konusu tahmin teorisinin ana modelidir, yani kısıtlı miktarda veri (en az dört veya daha fazla) ile oluşturulan fakat bakıldığında yine de yüksek hassasiyetli önemi yadsınamayacak sonuçlar alabilen tek değişkenli birinci dereceden gri modeldir (Xie and Liu, 2009; Liu and Lin, 2010; Mostafaei and Kordnoori, 2012; Xie and Liu, 2009; Liu and Lin, 2010; Shen and Lu, 2014).

GM(1,1) üç temel adımdan oluşmaktadır:

- (1) Birikimli üretim işlemi (Accumulated Generation Operation (AGO)),
- (2) Gri modelleme,

(3) Ters birikimli üretim işlemi (Inverse Accumulated Generation Operation (IAGO)).

Bu modelin kurulumu aşağıda verilen adımlardan oluşmaktadır (Akay et al., 2007; Lin et al., 2012; Wang et al., 2010). Burada;

- $X^{(0)}$: orijinal veri dizisini
- $X^{(1)}$: kümülatif veri dizisini
- Z : ortalama serisini
- AGO: kümülatif işlem operatörünü
- IAGO: Ters kümülatif işlem operatörünü

göstermektedir.

Adım 1:

$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, negatif olmayan, eşit zaman aralıklarında toplanmış ve en az dört veriden ($n \geq 4$) oluşan ham veri noktaları olsun.

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$$

dizisi ise k . elemanı $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ile elde edilen birikimli üretim işlemi (accumulated generating operation) dizisini oluşturmaktadır.

Adım 2:

Model parametreleri tahmin edilir. $GM(1,1)$ modelinin gri fark denklemi (grey difference equation)

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

(1)

şeklinde verilmektedir (Deng, 1989).

Burada $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ile tanımlanmaktadır. k 'nın değerleri (1) denkleminde yerine konulduğunda

$$x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) = b$$

$$x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) = b$$

$$\vdots$$

$$x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) = b$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler matris formunda $Y = Br$ şeklinde ifade edilebilir, burada

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Yukarıda matris formu verilen denklemler çözülerek a ve b 'nin en küçük kareler tahminleri $\hat{r} = [\hat{a}, \hat{b}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ ile elde edilir.

Adım 3:

Zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir. $GM(1,1)$ 'in beyazlaştırılmış denklemi (whitening equation)

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b$$

(2)

şeklinde verilmektedir. $\hat{r} = [\hat{a}, \hat{b}]^T$ parametreleri (2) denkleminde yerine konulup çözüldüğünde

$$\hat{x}^{(1)}(t) = Ce^{-\hat{a}t} + \hat{b}/\hat{a}$$

(3)

zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir. Burada C bir sabittir. $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu olarak seçilip, (3) denkleminde yerine konularak C değeri elde edilir.

Dolayısıyla $\hat{x}^{(1)}(k) = [x^{(1)}(1) - \hat{b}/\hat{a}]e^{-(k-1)} + \hat{b}/\hat{a}$, $k = 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir.

Adım 4:

Bu adımda ham verilere ait uyumu yapılmış ve tahmini değerler elde edilir. $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$ ifadesi kullanılarak

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \left[x^{(1)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right] (1 - e^{\hat{a}}) e^{-\hat{a}(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$$

sonucuna ulaşılır. $\hat{x}^{(0)}(k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) değerleri, uyumu yapılmış değerler (fitted values), $\hat{x}^{(0)}(k)$, ($k \geq n+1$) değerleri, tahmin edilmiş değerler (predicted values) olarak adlandırılmaktadır.

3. adımda verilen $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b$ denklemi birinci dereceden lineer bir diferansiyel denklemdir. Birinci dereceden lineer bir diferansiyel denklem,

$$y' + P(x)y = R(x) \quad (4)$$

formunda verilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü (Engin ve Çengel, 2008)'de ayrıntılı olarak aşağıdaki gibi verilmektedir:

Verilen P ve R fonksiyonları öngörülen çözüm aralığında x 'e bağlı sürekli fonksiyonlardır. Bu türden bir denklemin çözümü, eğer denklemin sol yanı tek bir terimin türevi şeklinde ifade edilebilirse sıradan bir işleme dönüşecektir. Bunun için denklemin sol tarafını bir terimin türevi haline getirebilecek bir çarpanın aranması gerekir. Denklemin her iki yanı $\mu(x)$ fonksiyonu ile çarpılırsa;

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)R(x)$$

(5)

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)y' + \mu'(x)y$$

(6)

olduğundan, (5) eşitliğinin sol tarafının $[\mu(x)y]'$ nin açılımı olabilmesi için $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$ şartı sağlanmalıdır. Bulmaya çalıştığımız çarpanın sıfırdan farklı olduğu durumda, bu denklemi entegre edersek $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x)$ veya $\frac{d}{dx}[\ln|\mu(x)|] = P(x)$ yazılarak $\ln|\mu(x)| = \int P(x) dx + C_1$ elde edilir. $\mu(x)$ çarpanı yalnız bırakılıp ve C_1 sabiti dikkate alınmayarak

$$|\mu(x)| = e^{\int P(x) dx}$$

(7)

elde edilir. İntegral sabitinin bu aşamada dahil edilmesi genel çözüm üzerinde bir değişikliğe yol açmayacaktır. Ayrıca (7) denkleminin sağ tarafı her koşulda pozitif olacağından denklem,

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

(8)

olarak da ifade edilebilir. (8) denklemiyle tanımlanan fonksiyona integral çarpanı denilmektedir. (4) denkleminin sol tarafı artık tek bir terimin türevi şeklinde ifade edildiğinden

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)R(x)$$

(9)

yazılarak $\mu(x)y = \int \mu(x)R(x) dx + C$ veya bağımlı değişkeni yalnız bırakarak diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x) R(x) dx + C \right] \quad (10)$$

olarak elde edilmiş olur. Birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemin (10) denklemine göre genel çözümünün bulunabilmesi için verilen diferansiyel denklemin kesinlikle (4) denkleminde verilen şekle getirilmesi gerekir.

Verilen açıklamalara bağlı olarak $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b$ birinci dereceden lineer diferansiyel denklemini için

$$\mu(x) = e^{\int a dx} = e^{ax}$$

ve

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \frac{1}{e^{ax}} \int e^{ax} b dx = \frac{1}{e^{ax}} \left[b \frac{e^{ax}}{a} + c \right]$$

$$\hat{x}^{(1)}(t) = c e^{-\hat{a}t} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}$$

şeklinde elde edilir. $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu alınarak $c = \left(x^{(1)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{\hat{a}}$ sabiti elde edilir. Bu sonuç son denklemden yerine yerleştirildiğinde

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(1)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{-\hat{a}(k-1)} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

genel çözümü elde edilmiş olur. Başlangıç koşulu $\hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n)$ alındığında ise sabit terim $c = \left(x^{(1)}(n) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{\hat{a}n}$ şeklinde elde edilir ve

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(1)}(n) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{-\hat{a}(k-n)} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

genel çözümü elde edilir.

2.2.2. Gri Verhulst Model

Verhulst Modeli aynı zamanda lojistik büyüme eğrisi olarak da karşımıza çıkmaktadır. Verhulst modeli genellikle belirli bir doygunluğa ulaşmış durumlarla süreçleri tahmin etmek ve tanımlamak için kullanılmaktadır (Es, 2020). Verhulst Modeli' nin en yaygın olarak kullanıldığı alan insan popülasyonunun tahminlenmesine ilişkin çalışmalardır ve bu aynı zamanda modelin ortaya atılmasının temelini oluşturur. Genellikle karesel yapıdaki verilerle çalışılırken başarılı sonuçların elde edildiği Verhulst Modeli ilk olarak, Alman biyolog Pierre Franois Verhulst tarafından literatüre kazandırılmıştır. (Zeng et al., 2013).

GM (1,1) modeli monoton değişim sürecini kapsayan zaman serilerinde daha yararlı iken Gri Verhulst Modeli monoton artmayan dalgalı hareketlenmeleri tahminlemede daha işlevsel sonuçlar vermektedir. Gri Verhulst modelinin çözümlenmesinde ikinci derece diferansiyel denklemlerin yardımıyla ulaşılmak istenen amaca ilişkin beyazlatılmış eşitlik bulunur. İnsan popülasyonunun, biyolojik büyümenin, heyelan, trafik kazaları, enerji, ürünlerin ekonomik ömrü vb. gibi durumların tahmininde başarılı sonuçlar vermektedir.

k değeri yeterli büyüklüğe ulaştığında $x_p^{(1)}(k + 1)$ ve $x_p^{(1)}(k)$ değerlerinin birbirine çok yakın değerler olduğu gözlemlenmektedir. Bu özelliğinden ötürü yukarıda da belirtildiği üzere Gri Verhulst Modelinin genel olarak bir doygunluk bölgesi içeren süreçlerin tanımlanmasında ve tahminlenmesinde kullanılmaktadır (Kayacan et al., 2010).

Başlangıç fonksiyonuna ilişkin büyüme üstel olarak karşımıza çıkarken sonrasında doyumun başlamasına paralel olarak büyüme yavaşlar, belirli bir denge ve olgunluğa ulaşıncaya da durur. Verhulst Modelinin temel amacı, gerçek bir sisteme ilişkin tüm gelişmeyi bir sınıra ulaştırmaktır. Bu sayede model, belirli bir doygunluk bölgesi içeren S- eğrisi gibi bazı artan süreçlerin açıklanmasında etkin bir anlam taşır (Kayacan et al., 2010).

Spesifik bir gri tahmin modeli olan Gri Verhulst Modeli, yaklaşık tek tepe özelliğine dayanarak küçük örnek veri kümelerine ilişkin simülasyonların ele alınarak yorumlanması üzerine geliştirilmiştir (Zeng et al., 2013).

Gri Verhulst Modelinin daha iyi bir simülasyon ve tahmin performansı sunabilmesi adına çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Gri Verhulst Modelinin geliştirilmesini ve iyileştirilmesini destekleyen bu araştırmalar başlangıç ve arka plan değerlerinin optimizasyonu, modelleme mekanizmasının analizi gibi çalışmaları içermektedir (Zeng et al., 2013). Bu modelin kurulumu aşağıda verilen adımlardan oluşmaktadır:

Adım 1:

$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, negatif olmayan, eşit zaman aralıklarında toplanmış ve en az dört veriden ($n \geq 4$) oluşan ham veri noktaları olsun.

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$$

dizisi ise k . elemanı $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$, $k = 1, 2, \dots, n$ olan birikimli üretim işlemi (accumulated generating operation) dizisini oluşturmaktadır.

Adım 2:

Model parametreleri tahmin edilir. *Verhulst* modelinin ikinci-dereceden gri fark denklemi

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^2 \quad (11)$$

şeklinde verilmektedir. Burada $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ile tanımlanmaktadır. k 'nın değerleri (11) denkleminde yerine

konulduğunda elde edilen denklemler matris formunda $Y = Br$ şeklinde ifade edilebilir, burada

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (z^{(1)}(2))^2 & -z^{(1)}(2) \\ (z^{(1)}(3))^2 & -z^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots \\ (z^{(1)}(n))^2 & -z^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix}.$$

Yukarıda matris formu verilen denklemler çözülerek a ve b'nin en küçük kareler tahmin edicileri $\hat{r} = [\hat{a}, \hat{b}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ ile elde edilir.

Adım 3:

Zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir. Verhulst modelinin beyazlaştırılmış denklemi

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b(x^{(1)}(t))^2 \quad (12)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu diferansiyel denklem Bernoulli diferansiyel denklemi olarak tanımlanmaktadır. $\hat{r} = [\hat{b}, \hat{a}]^T$ tahminleri (12) denkleminde yerine konulup $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu altında çözüldüğünde

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{ax^{(0)}(1)}{bx^{(0)}(1) + (a - bx^{(0)}(1))e^{ak}} \quad (13)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots$ zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir.

Adım 4:

Ham verilere ait uyumu yapılmış ve tahmin değerleri elde edilir.

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ ile sonuca ulaşılır. $\hat{x}^{(0)}(k), (k = 1, 2, \dots, n)$ değerleri uyumu yapılmış değerler (fitted values), $\hat{x}^{(0)}(k), (k \geq n+1)$ değerleri tahmin edilmiş değerler (predicted values) olarak adlandırılmaktadır.

Ayrıca $\hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n)$ başlangıç koşulu alınarak çözüm yapılırsa

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{ax^{(1)}(n)}{bx^{(1)}(n) + (a - bx^{(1)}(n))e^{a(k-n)}}$$

sonucu elde edilir.

3. adımda verilen diferansiyel denklemin çözümü için Engin ve Çengel' de (2008) şöyle bir açıklama verilmektedir. Bernoulli diferansiyel denklemi $y' + P(x)y = R(x)y^n, n \neq 1, n \neq 0$ formunda verilmektedir. $\begin{cases} u = y^{1-n} \\ du = (1-n)y^{-n}dy \end{cases}$ dönüşümü ile denklem lineer hale getirilir. Lineer denklemin genel hali $\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)R(x)$ şeklinde ifade edilmektedir.

Verilen açıklamaya bağlı olarak $\frac{dx^{(1)}}{dx} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^2$ denkleminde $u = (x^{(1)})^{1-2} = (x^{(1)})^{-1} = \frac{1}{x^{(1)}}$, $(\frac{du}{dx} = -\frac{1}{(x^{(1)})^2} * \frac{dx^{(1)}}{dx})$ dönüşümü denklemde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\frac{du}{dx} - au = -b$ şeklinde u 'ya bağlı lineer bir denklem elde edilir. $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int adx} = e^{-ax}$ olarak integral çarpanı bulunarak genel çözüm ifadesinde yazılırsa;

$$u = u(x) = \frac{1}{e^{-ax}} \int e^{-ax}(-b)dx = -be^{ax} \left(-\frac{e^{-ax}}{a} + c \right)$$

$$= \left(\frac{b - abce^{-ax}}{a} \right)$$

olur. Sonuç olarak $x^{(1)}(t) = \frac{a}{b-abce^{at}}$ ifadesi elde edilir.

$\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ başlangıç koşulu alınarak c çözülür ve $c = \frac{x^{(0)}(1)b-a}{x^{(0)}(1)abe^a}$ elde edilir. $x^{(1)}(t)$ ifadesinde c yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \frac{ax^{(0)}(1)}{bx^{(0)}(1) + (a-bx^{(0)}(1))e^{a(t-1)}}$$

çözümü elde edilmektedir. Bu sonuca göre

$$\hat{\hat{x}}_p^{(1)}(k+1) = \frac{ax^{(0)}(1)}{bx^{(0)}(1) + (a-bx^{(0)}(1))e^{ak}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

yazılabilmektedir.

2.2.3. GM(1,1) Yuvarlama Modeli (Rolling Model)

$GM(1,1)$ Modeli, verilerdeki detaylı dalgalanmayı göz ardı ettiğinden tahmin doğruluğunu arttırabilecek yönde bir alternatif yaklaşıma ihtiyaç duyar. Bu bağlamda karşımıza $GM(1,1)$ Yuvarlama Modeli (Rolling Model) çıkmaktadır. Bu yöntem kullanılırken daha iyi tahmin sonuçlarına ulaşabilmek adına en az dört adet geçmişe yönelik veriye ihtiyaç duyar. Her bir tahmine yönelik ardışık veri dizisinden bir sonraki veriye aktarılacak kaydıyla yeni model uygulanır. Bu aşama gelecek verilerin tahmin edilmesinde geçmiş gözlemlerin temel alındığı kritik bir basamak olarak nitelendirilmektedir. Her bir yeni veri girişi için yeni bir model dizisi oluşturulurken eski veri dizisindeki veri sayısı başlangıç noktasındaki veri çıkarılarak korunur (Yin and Tang, 2013).

Özetle, bir sistemin ne yönde gelişim gösterdiği yeni bilgilerin sürece dahil edilmesiyle tahmin edilirken, eski bilgilerin sistemden kademeli olarak çıkarılması da sistem modelleme dizisinin yeni özelliklere uyum sağlayabilmesi ve daha iyi yanıt verebilmesi açısından önem arz etmektedir. Burada amaçlanan eski verilerin sistemde oluşturacağı atıl etkinin uzaklaştırılmasıdır. Buna istinaden model yapılandırılmasında güncel veriler sürece dahil edilir. Yukarıda da bahsedildiği üzere GM (1,1) Rolling (Yuvarlama) Modeli geleneksel yaklaşımdaki GM (1,1) modelinin daha iyi tahmin sonuçları verebilmesi üzerine ileri sürülmüştür. GM (1,1) ve GM (1,1) Yuvarlama (Rolling) modeli arasındaki temel fark, GM(1,1) Yuvarlama modelinin her bir yeni veri noktası tahminlerken başlangıç noktası olarak kabul edilen eski veri noktasını analiz dışında bırakmasıdır (Güner ve Taçyıldız, 2017).

GM (1,1) Rolling (Yuvarlama) modelinin, pek çok alanda kullanıldığına dair güncel literatür mevcuttur. Bu kullanım alanları, bir sistemin çıktıları, spesifik bir ürünün fiyatlandırılması, su tüketimi tahmini, sosyal parametre ve finansal durumlarla ilgili trend analizleri şeklinde örneklendirilebilir (Kayacan et al., 2010). Su tüketim tahminlerine ilişkin bir başka literatür kaydında GM (1,1) Rolling (Yuvarlama) Modeli kullanımı basit bir algoritma olarak tanımlanmıştır. Bu modelin çalışmasında her bir parametreye ilişkin tahminlemede veriler birer adım kaydırılarak tekrar hesaplama yöntemi esas alınır. Bir başka ifadeyle 7. verisi tahmin edilmek istenen bir dizi setinde ilk 6 değer hesaplamaya dahil edilirken, 8.veri noktası tahmin edilmek istendiği takdirde ilk veri tahminden çıkarılırken, 2.veri başlangıç noktası olmak kaydıyla, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7. verilerle hesaplama yapılır. Sonraki verilerin tahminlemesinde de yeni model üzerinden tahminleme yapılır. Veri setindeki son elemana ulaşıldığında da tahmin süreci tamamlanır. Burada kullanılmak istenen veri miktarı deneme yanılma yöntemiyle seçilirken en düşük hata oranını veren model üzerinden uyarlama yapılır. Modelin geliştirilmesinde, temel alınan nokta tahmin edilmek istenen değerin kendisine en yakın verilere benzerlik gösterme ihtimalinin yüksek olduğu durumlarda bulunmasıdır (Başakın et al., 2019). p sayıda veri $GM(1,1)$ 'in girdi veri dizisi olarak kullanılırken, q sayıda veri her bir yuvarlama basamağında $GM(1,1)$

üzerinden tahmin edilir. Buna göre Rolling (Yuvarlama) $GM(1,1)$ Modeli tahmin basamakları aşağıda açıklanmıştır:

Adım 1:

$\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(p)\}$ orijinal veri dizisi $GM(1,1)$ 'in girdi dizisi olarak kullanılır. $GM(1,1)$ modeli kullanılarak $\{\hat{x}^{(0)}(p+1), \hat{x}^{(0)}(p+2), \dots, \hat{x}^{(0)}(p+q)\}$ tahmin dizisi elde edilir.

Adım 2:

Bu modelleme prosedüründe temel olarak güncel verinin baz alınması noktası üzerinde durulmaktadır. Bu nedenle her bir yeni tahmin sürecinde veri dizisi sayısı sabit tutulmak koşuluyla $GM(1,1)$ modeli p adet yeni ve gerçek veri ile yeniden kurulur. Dolayısıyla $\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(q)\}$ dizisi çıkarılarak ve $\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(p)\}$ dizisi, $GM(1,1)$ 'in yeniden kurulumu için güncel (en son) p elemana sahip $\{x^{(0)}(q+1), x^{(0)}(q+2), \dots, x^{(0)}(q+p)\}$ değerleri ile yer değiştirilerek $\{\hat{x}^{(0)}(p+q+1), \hat{x}^{(0)}(p+q+2), \dots, \hat{x}^{(0)}(p+2q)\}$ dizisi tahmin edilir.

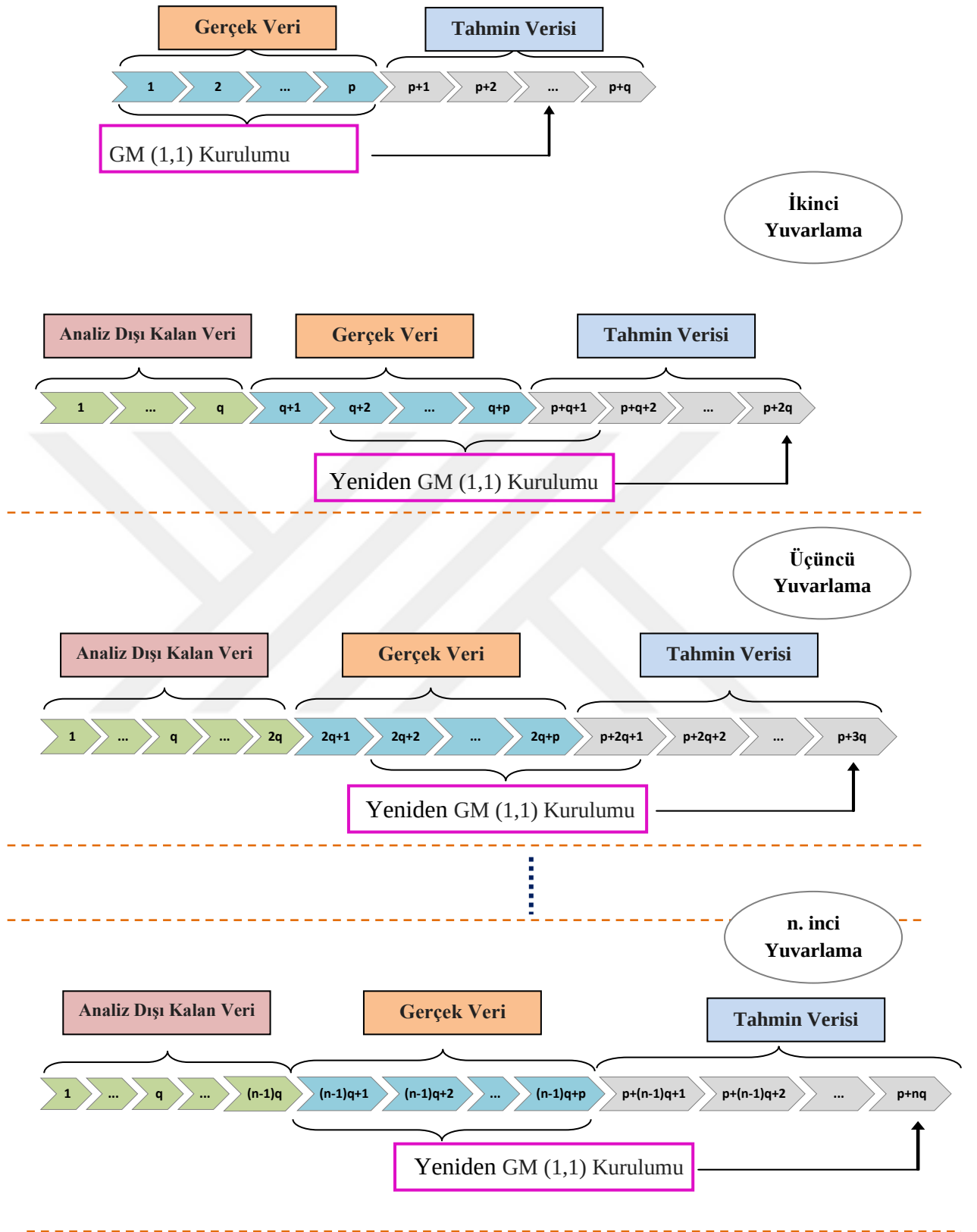
Adım 3:

Bir önceki seri çıkarılarak ve son p adet veri kullanılarak bir sonraki q verinin tahmin edilmesi için Adım 2 tekrar edilir.

Adım 4:

Son q adet tahmin değeri elde edilir.

$GM(1,1)$ Yuvarlama Modeli' nin tahmin süreci aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir (Zhao et al., 2016).



Şekil 2. 3. GM (1,1) Yuvarlama Modeli Uygulama Akış Diyagramı (Zhao et al., 2016)

2.3. Zaman Serileri

Zaman serileri hemen hemen her alanda karşımıza çıkan ve oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olan; bir olguya ilişkin belirli bir zaman dilimi içerisinde ölçümlenen ve gözlemlenen değişkenler için kullanılan bir kavramdır. Bununla birlikte zaman serileri öngörü, tanımlama, açıklama ve kontrol gibi farklı amaçlarla analiz edilmektedir. Bu amaçların arasında en önemli olanı ise geleceğe yönelik öngörü için kullanılmasıdır.

Zaman dizileri zaman içerisinde düzenli aralıklarla toplanan kantitatif gözlemlere ilişkin ölçümlerin tarihsel olarak sıralanmış şekilde ele alındığı ve rasgele değişkenlerin bir araya gelmesiyle oluşan sekanslardır. Bir fabrikadan ithal edilen haftalık veya aylık ürün sayısı, yıllık enflasyon oranı, bir bölgede meydana gelen aylık kaza sayısı, bir şirketin yıllık ciro miktarı, bir ülkenin aylık elektrik tüketim miktarı, bir deneysel işlemin üzerine yapılan saatlik veya günlük gözlemler gibi veriler zaman serilerine örnek olarak verilebilir.

Geçmiş dönem değerlerinden etkilenme eğilimi gösteren zaman serileri verileri genel olarak stokastik verilerden oluşmaktadır. Stokastik (olasılıklı) süreçlerde bir seriye ilişkin geçmişten gelen değerler temel alınarak gelecek dönemdeki değerleri kısmen tanımlanabilir. Başka bir ifadeyle belirli zaman dilimlerinde rasgele alınmış olan bir değişkene ait değerleri önceden tahmin edebilmek çok mümkün değildir. Bununla birlikte gelecek zaman dilimindeki değerler geçmiş dönemde yer alan değerlerin bilgisinden yola çıkarak koşullandırılan bir olasılık dağılımına sahiptir. Zaman serilerinin analizi, bir zaman serisinin aynı zamanda bitişik gözlemlerin bağımlılığı olarak tanımlanan içsel karakteristiğine yönelik tekniklerle ilişkilendirilir. Bu bakımdan zaman serilerinin gözlemlerinin birbiri ile olan korelasyonu başka bir ifade ile bağımlılığı bu serileri diğer serilerden ayıran en önemli farktır.

Zaman serileri deterministik ve stokastik olmak üzere ikiye ayrılması da veri analizlerinde göz önünde bulundurulması gereken önemli bir konudur. Buradan yola çıkarak gözlemlenen değerlerin analiz tekniğine ilişkin deterministik zaman serileri matematiksel bir fonksiyon ile kesin olarak

belirlenen, stokastik zaman serileri ise bir olasılık dağılımı ile belirlenen seriler olarak tanımlanır.

Zaman serileri, yalnızca zamana bağlı olarak açıklanmazlar. Zamanın sadece deterministik olarak bir fonksiyonu değildirler, bunun dışında farklı değişkenlerin de etkisi altındadırlar. Geleceğe yönelik tahminleme yapılırken kullanılacak modele tüm değişkenlerin eklenmesi gerekir, ancak bu durumda elde edilen model uygulanabilir bir model olmayabilir. Tüm değişkenler her zaman sayısal olarak ifade edilemeyebilir. Zamana bağlı olan olaylar rasgele karakterli olması nedeniyle zaman serilerinin analizinde olasılık modellerinden yararlanır. Modelin stokastik kısmı zaman serisinin düzensiz bileşenler kısmında meydana gelmekte ve burada serinin rasgele yürüyüş (random walk) süreci izleyip izlemediği ile ilgilenilmektedir. Rasgele yürüyüş zaman serisinin zaman içindeki ilerleyişinin rasgele sebeplere bağlı olması anlamına gelmektedir (Tüzen, 2012; Kırçıl, 2013).

Zaman serilerinin uygulama alanları;

- Ekonomi
 - İşsizlik Oranı,
 - Faiz Oranları, vb.
- Ticaret
 - Envanter,
 - Satışlar,
 - Fiyat,
 - Hisse Senedi Fiyatları, vb.
- Sosyoloji
 - Suç Oranları,
 - Boşanma Oranları vb.
- Meteoroloji
 - Yağış Miktarı,
 - Sıcaklık,
 - Rüzgâr Hızı vb.
- Ekoloji
 - Çevre Kirliliği,
 - Su Kirliliği, vb.
- Astronomi
 - Güneş Hareketleri,
 - Yıldızların Parlaklığı, vb.
- Mühendislik
 - Fizik,
 - Çevre,
 - Gıda, vb.
- Tıp
 - Kan Değerleri,
 - Vücut Ağırlıkları,
 - Tansiyon, vb.
- Tarım
 - Hayvancılık,
 - Süt Verimi,
 - Bitkisel Üretim, vb.

konularında olabilmektedir (Oğhan, 2010).

2.3.1. Zaman serilerinin bileşenleri

İstatistiksel yöntemlerle incelenip, bir kural ile sıralanan veri kümelerine seri adı verilir. Bu esnada zaman kavramını da dikkate alarak günlük, aylık, yıllık, haftalık vb. gibi periyotlarla düzenlenen serilere zaman serisi adı verilir (Duru, 2007). Zaman periyodu içerisinde gözlemlerin davranışlarını ve eğilimlerini incelemek amacıyla uygulanan zaman serisi analizlerinde gözlenen hareketler farklı sebeplerden meydana gelebilir (Mann, 1995; Newbold et al., 2003). Bu tip düzenli veya düzensiz değişimleri içeren serilerde tahmin yapabilmek adına seriye dalgalanmalı, düzensiz ve monoton artmayan görüntü veren hareketlerin sebepleri, nereden kaynaklandığı araştırılıp ortaya konması gerekir (Köksal, 1985).

Zaman serileri modellerinde söz konusu dalgalanmaların dört ayrı tür hareketin aynı anda ve birlikte gösterdikleri etkiden kaynaklandığı öne sürülür (Duru, 2007). Zaman serisinin bileşenleri:

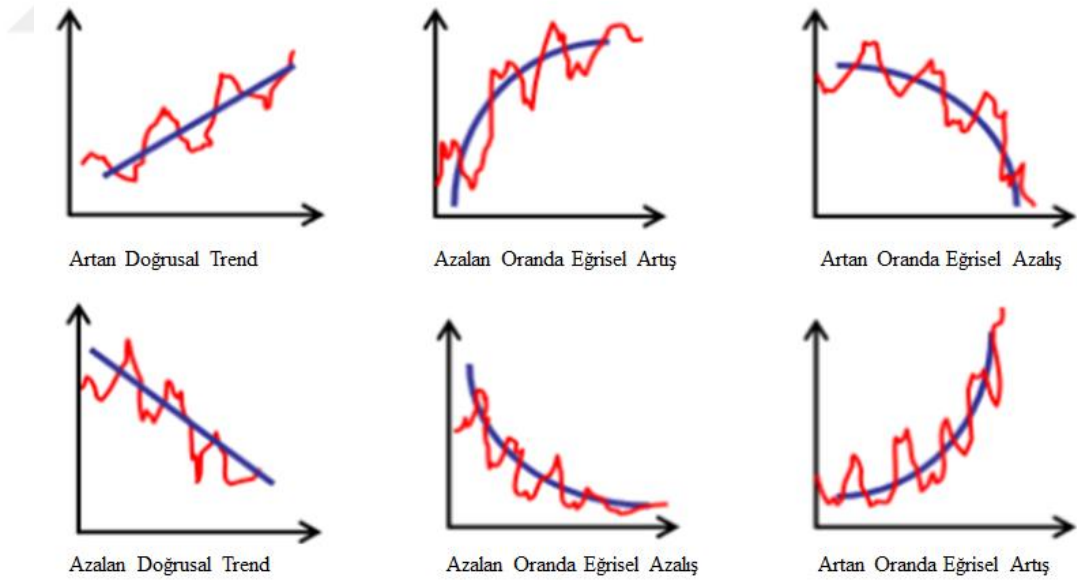
- Trend (T)
- Mevsimsel dalgalanmalar (S)
- Konjonktür dalgalanmalar (C)
- Düzensiz hareketler (I)

olarak adlandırılmaktadırlar.

Trend: Zaman serilerinde trend eğilimi gösteren kalıplar genellikle seride uzun vadeli artışlar veya azalışları göstermektedir. Trend herhangi bir zaman serisinde uzun dönemli hareketleri gösterdiğinden trendin ortaya çıkabilmesi için orta uzun vadeye (Örn:15-18 yıllık bir dönem) ihtiyaç olabilir. Bir trend döneminin 5 ile 8 yıllık konjonktür dalgalanmalarından en az 2 veya 3 konjonktür dalgalanmasını içermesi gerekmektedir. Dolayısıyla bu sürelerden daha kısa bir dönem incelediğinde trend yerine bir konjonktür döneminin ele alınması ihtimali ortaya çıkabilir.

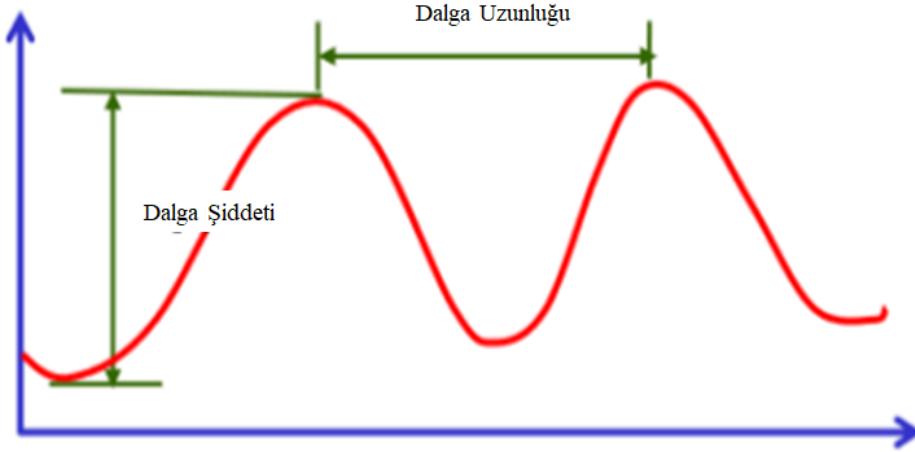
Uzun vadeyi kapsayan süreçlerdeki eğilimi veya herhangi değişimi gösteren eğriye trend eğrisi denir. Trend eğilimi artan, azalan ya da değişmez olabildiği üzere doğrusal ve doğrusal olmayan şeklinde bir kalıpla da ortaya çıkabilir. Genellikle bir seride trend eğilimi varsa özellikle ön raporlama yaparken başarılı sonuçlar ortaya çıkar. Uzun dönemli nüfustaki değişimler, çeşitli firmaların satış değerleri, gayri safi milli hasıla (GSMH) benzeri gibi birçok ekonomik göstergenin zaman boyunca seyri birer trend örneğidir (Sevüktekin ve Çınar, 2014).

Verideki hızlı artış ve azalışlarda kullanılan logaritmik model, verideki dalgalanmaları göstermekte kullanılan polinom model, zaman serisi kalıbında yüksek oranlarda artış veya düşme varsa kullanılan üssel model, veri yapısında meydana gelen dalgalanmaların giderilmesinde ve düzgün bir yapının elde edilmesinde yardımcı olan hareketli ortalamalar modeli doğrusal olmayan trend modelleri olarak kullanılmaktadır (Adanacıoğlu, 2016).



Şekil 2. 4. Trend Doğrusuna İlişkin Grafik Örnekleri (Tüzen, 2012)

Mevsimsel Dalgalanmalar: Haftalık, aylık veya mevsimlik olmak üzere kısa süreli görülen dalgalanmalar belli zaman aralıklarında meydana gelen değişimlerdir. Mevsim dalgalanmalarının uzunlukları hep aynı şekildedir ve bu dalgalanmalar iktisadi bir olayın oluşumunda faktör niteliğindeki doğal olaylar, sosyal adet ve alışkanlıkların tek bir sene içinde normal bir dağılım göstermemiş olmalarından meydana gelir (Duru, 2007). Ramazan ayı alışverişlerindeki artışlar, her yıl aynı günde kutlanan özel günler, elektrik enerjisi tüketimi, belirli mevsimlerde soğuk içecek talebinin artması veya azalması, yaz mevsiminde soğutucu cihazların satışlarında meydana gelen artışlar vb. mevsimlik dalgalanmalara örnek oluşturmaktadır. Mevsim dalgalanma hareketleri sabit olabileceği gibi değişkende olabilmektedir. Mevsim dalgalanmalarının ölçülmesinde ve belirlenmesinde en fazla kullanılan yöntem hareketli ortalamalar yöntemidir.

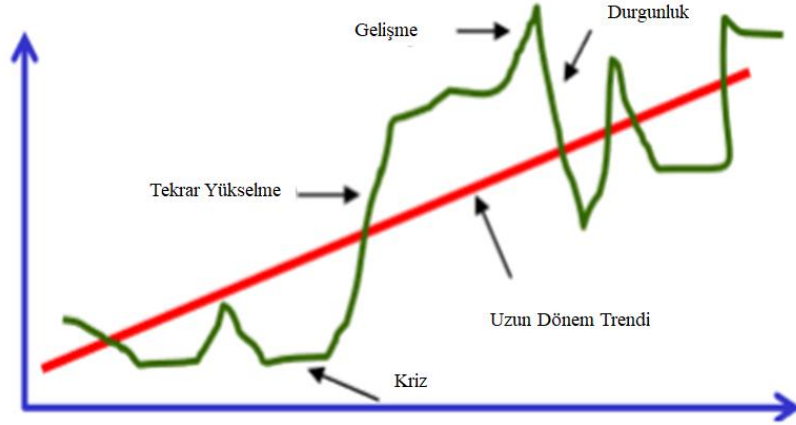


Şekil 2. 5.Mevsimlik Dalgalanma Hareketine İlişkin Grafik Örneği
(Tüzen, 2012)

Konjonktür Dalgalanmalar: Uzun vadede bir trend etrafındaki artma veya azalma şeklinde tekrarlanan değişimler olarak tanımlanmaktadır. Ekonomik kriz dönemlerinde ortaya çıkan gelişmeleri gösterir. Bir başka deyişle, gelişme dönemi ile düşüş dönemlerinin birbirini takip ettiği dalgalanmalara “konjonktür dalgalanmalar” denir. Konjonktürel hareketler daha çok ekonomi ile ilgilidir. Piyasaların refah ya da ekonomik kriz dönemlerini içeren değişimlerdir. Genel

anlamda konjonktürel hareketler periyodik değildirler fakat 5 ila 8 yıllık dalgalanmalar ile tekrarlanır. Seriden trendin, mevsimsel dalgalanmaların ve tesadüfi hareketlerin paylarının çıkarılmasından sonra geriye kalan kısım konjonktür dalgalanmalarıdır. Bu nedenle belirli bir noktaya kadar tahmin edilmesi söz konusu olabilir (Duru, 2007).

Mevsimsel ve konjonktürel dalgalanmalara bakılacak olursa aralarında kısmen bir benzerlik olmasına rağmen belirgin farklılıklar vardır. Mevsimsel hareketlerde dönemler nispeten düzenli ve periyodik iken, konjonktürel hareketlerde dönemler düzensiz ve periyodik olmayan bir yapı şeklinde karşımıza çıkar. Konjonktürel dalgalanmaların ortalama uzunlukları mevsimsel dalgalanmalara nazaran daha uzun olduğu görülmektedir ve bunun yanında konjonktür dalgasının genişliği mevsimselliğe oranla daha fazla değişkenlik gösterir denilebilir (Sevüktekin ve Çınar, 2014).



Şekil 2. 6. Konjonktürel Dalgalanmalara İlişkin Grafik Örneği
(Tüzen, 2012)

Düzensiz Hareketler: Daha çok yatay veya çizgi kalıplar olarak da literatürde bilinen rassal kalıplar, verilerin genel olarak sabit bir ortalama etrafında dalgalandığı kalıplardır. Rassal serileri oluşturan verilerin belirli bir başka özelliği ise sistematik bir yapısının olmayışdır. Daha çok kısa dönem tahminlemelerinde kullanılan bu yöntem daha ziyade sezgilere dayalıdır (Kadırlar, 2005). Önceden tahmin edilemedikleri için bu hareketler sistematik değildirler. Doğal ve sosyal

beklenmeyen olaylar tesadüfî hareketlerin oluşumunda etken faktörlerdir. Savaş, deprem, don olayları, siyasi gelişmeler vb. örnek olarak gösterilebilir.

Zaman serisi trend, konjonktürel dalgalanmalar, mevsimsel bileşenler, düzensiz hareketlerin bir fonksiyonu olup $Y_t = f(T_t, C_t, S_t, I_t)$ şeklinde ifade edilmektedir. Bu bileşenlerin seri üzerindeki etkileri toplamsal ve çarpımsal model olmak üzere ifade edilen iki model ile incelenmektedir. Toplamsal model; zaman serilerinin bileşenlerin toplamından oluştuğunu kabul eder ve $Y_t = T_t + M_t + C_t + \varepsilon_t$ şeklinde ifade edilir. Burada;

Y_t = t zamanındaki gözlem

T_t = t zamanındaki trendin etkisi

M_t = t zamanındaki mevsimsel dalgalanmaların etkisi

C_t = t zamanındaki konjonktürel değişmelerin etkisi

ε_t = hata bileşenidir.

Mevsimsel bileşenin dalga uzunluğunun konjonktürel hareketlerle değiştiği serilerin oluşturduğu model çarpımsal modeldir ve bu model $Y_t = T_t \times M_t \times C_t \times \varepsilon_t$ olarak ifade edilmektedir. Toplamsal ve çarpımsal modellerden elde edilen hata kareler ortalaması değeri (HKO) en küçük olan modelin seri için daha uyumlu olduğu ortadadır (Kadılar, 2005).

2.4. Box-Jenkins Modelleri

Literatürde sıkça karşımıza çıkan ve ARIMA olarak isimlendirilen başka bir deyişle Box ve Jenkins Modelleri gelecek tahmini yapmakta yaygın olarak kullanılan ve başarıya ulaştıran yöntemlerdir. Box-Jenkins yöntemi tek değişkenli zaman serilerinin gelecek dönem tahmini yapılırken kullanılır. Eşit periyodik zaman aralıklarından elde edilen gözlem değerleri sonucu oluşan kesikli ve durağan zaman serilerinin geleceğe odaklı tahmin modellerinin kurulmasında ve tahminlerin yapılmasında sistemli yaklaşım göstermektedir. Box ve Jenkins yönteminin önemli varsayımı eşit periyodik zaman aralıkları sonucu meydana gelen gözlem değerlerinden oluşan serinin kesikli ve durağan olmasıdır. Diğer

yöntemler ön bilgiye ihtiyaç duyarken bu yöntem zaman serisinin genel eğilimi ve gelişimi yönünde herhangi bir bilgiye ihtiyaç duymaksızın başarılı sonuçlar üretmektedir. Bu özelliği ile daha karmaşık zaman serileri verilerinde de uygulanabilir. Bu yöntemin önemli bir püf noktası da geçmiş dönem gözlem değerlerini açıklayıcı bir değişken gibi kullanır. Bu yöntem, incelenen değişken için davranışsal olarak açıklama getirmediğinden teorik anlamda tam açıklama mümkün olmayabilir, bu nedenle zaman dizisi verilerinin yapısındaki iç dinamiğini ele alır.

Deneyisel deneme yanılma süreci olan Box Jenkins tahmin yöntemleri farklı seçenekleri ve özellikleri ile de model için en uygun seçeneğin belirlenmesi için imkân tanır, bunun yanı sıra her aşamanın takibi ve incelenmesine olanak tanır. Bu anlamda oldukça kullanışlı ve verimli yapısıyla son dönemlerde dikkatleri üzerine çekmiştir. Durağan zaman serilerine bakıldığında zaman serisi unsurlarından (trend, mevsimsel dalgalanmalar gibi) en az birini veya birkaçını içermektedirler. Durağan olmayan zaman serilerine bakıldığında gelecek dönem tahmininde Box Jenkins yönteminin uygulanabilmesi için önce durağanlığı bozan zaman serisi bileşenleri çeşitli dönüşüm yöntemleri yardımıyla durağan hale getirilir, daha sonra yöntem uygulanır. Doğrusal stokastik modeller incelenen zaman serilerinin (stokastik süreçlerin) durağan olup olmaması durumuna göre doğrusal durağan stokastik modeller ve durağan olmayan doğrusal stokastik modeller olarak iki sınıfa ayrılır. Otoregresif entegre hareketli ortalama (ARIMA) modelleri olarak bilinen durağan olmayan doğrusal stokastik modeller ayrıca zaman serilerinin mevsim unsuru içerip içermemesi durumuna göre “mevsimsel ARIMA” ve “mevsimsel olmayan ARIMA” modelleri olarak sınıflandırılır. Box-Jenkins yaklaşımında kullanılan adımlar aşağıda verilmektedir (Sevüktekin ve Nargeleçekenler, 2007):

SAFHA 1: Tanımlama

Veri Hazırlama:
• Varyansı sabitleştirmek için verilere dönüştürme işlemi uygulanır. • Durağan seriyi bulmak için verilerin farkı alınır.
Model Seçimi:
➤ Potansiyel modelleri teşhis edebilmek için ACF ve PACF hesaplanır.



SAFHA 2: Tahmin ve Test Yapma

Tahmin:
➤ Potansiyel modellerdeki parametrelerin tahminleri yapılır. ➤ Uygun kriterler kullanılarak en iyi model seçilir.
Ayırt Edici (Tanı) Kontrol:
➤ Kalıntıların ACF\PACF 'leri kontrol edilir. ➤ Kalıntıların Portmanteau testleri yapılır. ➤ Kalıntılar temiz-dizi midir? ➤ Model yeterli midir?



SAFHA 3: Uygulama

Ön raporlama:
➤ Ön raporlama ve kontrol amacıyla model kullanılır.



2.5. Doğrusal Durağan Stokastik Modeller

Doğrusal durağan stokastik modeller

- Otoregresif Süreç (AR-Auto Regressive)
- Hareketli Ortalama Süreci (MA-Moving Average)
- Otoregresif Hareketli Ortalama Süreci (ARMA-Autoregressive-Moving Average)

ile ifade edilmektedir.

2.5.1. Otoregresif süreç: AR (Autoregressive) (p)

Zaman serisinin kendi gecikmeli değerlerinin bir fonksiyonu şeklinde ifade edilebilmesine otoregresif süreç adı verilir (Tüzen,2012). Bir başka deyişle zaman serisinin şimdiki değerinin geçmiş dönemdeki değerleri ile arasında doğrusal bir ilişki olduğu belirlendiğinde, sistemin kalıntıları rassal değişkenin özelliğini taşıyacaktır. Buna olanak sağlayan sürece de otoregresif süreç adı verilir.

Otoregresif modeller sahip oldukları\içerdikleri geçmiş dönem gözlem sayısına göre adlandırılır. Bu bağlamda, bir AR modeli bir adet geçmiş dönem gözlem değeri içeriyorsa birinci dereceden AR (1) modeli, iki adet geçmiş dönem gözlem değeri içeriyorsa ikinci dereceden AR (2) modeli olarak isimlendirilir. Genel olarak p tane geçmiş dönem gözlem değeri barındırıyorsa da p'inci dereceden AR (p) modeli olarak isimlendirilir (Naylor et al., 1972; Çevik, 1999; Duru, 2007; Gözcü, 2009). Otoregresif modelin genel ifadesi aşağıda verilmektedir (Sevüktekin ve Nargeleçekenler, 2007):

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T,$$

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$$

- Y_t : Zaman serisinin gözlenen değeri
- Φ : Modelin bilinmeyen otoregresif model parametreleri
- p: Modelin derecesi
- ε_t : Hata terimi

Otoregresif (AR) modelinin tespit edilmesinde otokorelasyon fonksiyonu (ACF) ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF) kullanılır. Grafiğinde, p. değer sonrasında otokorelasyon azalıyor ve kısmi otokorelasyon da belirlenen sınırlar içerisinde kalıyorsa otoregresif model kullanılır. Verilere uygun model bulmanın kolay olması ve belirli programlarla hızlı sonuca ulaştırmasından kaynaklı olarak kullanımı oldukça popülerdir (Horasan, 2011; Dönmez, 2014).

2.5.2. Hareketli ortalama süreci: MA (MovingAverage) (q)

Bir zaman serisinin herhangi bir dönemindeki gözlem değerini aynı dönemdeki hata terimi ve daha önceki belirli sayıda dönemin hatasıyla ilişkilen modellerdir. Hareketli ortalama modeli modelde yer alan geçmiş dönem hata terimi sayısına göre adlandırılır. Bunlar; birinci dereceden, ikinci dereceden ve genel olarak q' inci dereceden MA modelleri olarak ifade edilir. MA modelleri durağanlık koşulunu sağlarlar. MA modelinin genel ifadesi aşağıda verilmektedir:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Burada;

- μ : sabit terim
- ε_t : kolerasyonsuz hata terimi (Ortalaması 0 ve varyansı sabit)
- θ : Modelin bilinmeyen parametreleri
- Y_t : t'inci döneme ait gözlem değeri
- q: Modelin derecesi

dir. Bir MA(q) süreci, q tane durağan, sıfır ortalama ve sabit varyansa sahip hata teriminin ortalaması olduğu için her hareketli ortalama süreci durağan olmaktadır. ACF grafiklerinden sürecin derecesinin belirlenmesinde yararlanılmaktadır. Sıfırdan farklı olan ve gecikme uzunluğu çok olmayan modellerde ACF' ler bu sürecin derecesini belirlemede yardımcı olur. Eğer MA (1) süreci ise birinci gecikmedeki ACF değeri sıfırdan farklı bir değer alırken diğer ACF' ler sıfır değerini alacaktır. Benzer olarak MA (2) sürecinde ise ilk iki gecikmedeki ACF değeri sıfırdan farklı bir değer alırken daha yüksek gecikmelerde ise ACF sıfır değerini alacaktır (Tüzen, 2012).

2.5.3. Otoregresif hareketli ortalama süreci: ARMA (Autoregressive–Moving Average) (p,q)

Bu zaman serisi modeli p terimli AR ve q terimli MA' nın bir birleşimidir. Başka deyişle, otoregresif hareketli ortalama modeller AR ve MA modellerinin kombinasyonudur. ARMA modeli p+q tane terim barındırmakta ve ARMA (p, q) şeklinde gösterilmektedir (Duru, 2007). Zaman modellenmesinde farklı olanak sağlamak ve hesaplanacak parametre sayısını en aza indirmek için tasarlanmıştır (Box and Jenkins, 1976). Durağanlık, burada otoregresif kısım ile ilişkilidir. Modelin tersine çevrilebilmesi de modelin hareketli ortalamalar bölümüyle ilgilidir. ARMA sürecinde derece belirlerken de ACF ve PACF fonksiyonları birlikte ele alınmaktadır (Tüzen, 2012). ARMA (p, q) modeli

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

şeklinde ifade edilir (Sevüktekin ve Nargeleçekenler, 2007). Kesme terimi δ , Y_t 'nin ortalaması ile ilgilidir. Hatalar ε_t ve korelasyonsuz rassal değişkenlerdir. Ortalamaları 0, varyansları sabittir. Burada modelin otokorelasyon fonksiyonu (ACF) ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF) basamak basamak aşamalı olarak azalmaktadır denebilir.

2.5.3.1. Otokorelasyon fonksiyonu(ACF)

Korelasyon iki değişken arasındaki ilişkinin yönünü ve derecesini gösterir. Söz konusu değişkenin değerleriyle çeşitli gecikme değerleri arasındaki ilişkiye ise otokorelasyon adı verilir. Bu ilişkinin derecesinin ölçülmesinde kullanılan katsayıya “otokorelasyon katsayısı” denir ve $\rho(k)$ ile gösterilir (Özmen, 1986). Otokorelasyon yüksek ise söz konusu değişkenin geçmiş dönem değerleriyle ilişkili olduğu söylenebilir. Tam tersi bu katsayı düşük ise değişkenin rassal olduğundan söz edilebilir.

Otokorelasyon 1 ile -1 arasında değer alır ve $-1 \leq \rho(k) \leq 1$ ile ifade edilir (Box et al., 1970). Gecikmenin simetrik bir fonksiyonu olan otokorelasyon

fonksiyonu korelasyon değerinin pozitif ve negatif yer değiştirmeleri için bir fark yoktur, hepsi için aynıdır yani $\rho(k) = \rho(-k)$ 'dır. $1 = \rho_0$, otokorelasyon (ACF) katsayısının 0 noktasında tam 1 olduğu anlamına gelmektedir. Otokorelasyon serisi daima tam pozitifdir (Sharawei, 2005).

Bir serinin durağan olup olmadığının belirlenmesinde, durağan değil ise durağanlığı bozan sebeplerin tespit edilmesinde, ARMA modellerinin uygunluğu ve model belirlenmesinde otokorelasyon fonksiyonu oldukça önemlidir. ACF Katsayısı;

$$\rho_k(k) = \frac{E[(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+1} - \bar{Y})]}{E[(Y_t - \bar{Y})^2]}$$

ile hesaplanır(Sharawei, 2005).

2.5.3.2. Kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF)

Kısmi otokorelasyonlar diğer zaman gecikmelerinin etkisi ($t=1, 2, \dots, k-1$) yok edildiğinde (yani giderildiğinde) Y_t ile Y_{t-k} arasındaki birlikteliğin derecesini ölçmede kullanılır ve k. dereceden kısmi otokorelasyon katsayısı ϕ_{kk} ile gösterilir. Otokorelasyon katsayısında olduğu gibi, kısmi otokorelasyon katsayısı da $(-1 \leq \phi_{kk} \leq 1)$ arasında değer alır ve aynı şekilde otokorelasyon katsayısı gibi yorumlanır, $k=1,2,3, \dots$ değerleri için $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots, \phi_{kk}$ sembolleri ile gösterilmektedir (Box and Jenkins, 1976). Kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF), gecikme zamanı arttıkça sıfıra doğru hızlı bir sapma eğilimi gösterir veya belli sayıdaki (k) gecikme zamanı sonrasında tamamen kesilir (Anderson, 1942). PACF katsayısı, sıfır noktasında bire eşit olur, yani $\phi_{00} = 1$ dir. $\phi_{kk} = 0$ ise herhangi bir zaman dilimi ile değişken arasında kısmi doğrusal bir ilişki yoktur (Sharawei, 2005).

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_j}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_j} \quad j = 1,2,3, \dots, k-1, \quad k=1,2,3, \dots$$

ile hesaplanmaktadır.

2.6. Birim Kök Testi

Bir serinin durağan olup olmadığı ya da durağanlık derecesinin belirlenmesinde kullanılan en yaygın ve geçerliliği yüksek yöntem birim kök testidir. Çoğunlukla ekonomi ve finans alanındaki zaman serisi verilerinin analizlerinde ve durağanlık durumunun belirlenmesinde kullanılan yöntemdir. Zaman serileri genel olarak birim köke sahiptir. Bir seride birim kök varsa o seri durağan değildir anlamına gelir. Birim kök sayısı seri durağan bir seri olana kadar alınan fark sayısına eşittir. Bu bağlamda seri birinci farkı alındığı takdirde durağan hale gelebiliyorsa bu seri rassal yürüyüş (orjinal dizi) yani birinci dereceden entegre seri olarak adlandırılır yani 1. dereceden durağandır denir ve $I(1)$ şeklinde gösterilmektedir. Orijinal veri setinin iki kez farkı alındığında seri durağan hale dönüşüyorsa, bu dizi ikinci dereceden entegre edilmiş seri olarak adlandırılır ve $I(2)$ şeklinde gösterilir. Bir serinin d kez farkı alındığında durağanlaşıyorsa d ' ninci dereceden entegredir yani d . dereceden durağandır denir ve $I(d)$ biçiminde tanımlanır. Eğer $d=0$ ise veya $I(0)$ ise bu seri durağan bir seridir. (Sevüktekin ve Nargeleçekenler, 2007). Birim kök testlerinin en yaygın ve uygulamalarda sıkça kullanılanları şu şekilde sıralanabilir:

- a) Dickey Fuller (DF) Birim Kök Testi
- b) Genişletilmiş Dickey Fuller (ADF) Birim Kök Testi.

Bu testlere ek olarak da Phillips-Perron (PP) birim kök testi, KPSS birim kök testi (Kwiatkowski – Phillips – Schmidt Shin), ADF-GLS birim kök testi, N-G Perron birim kök testleri de kullanılmaktadır.

2.6.1. Dickey Fuller (DF) birim kök testi

Serinin birim köke sahip olup olmadığını görmek amacıyla kullanılan, aynı zamanda zaman serilerinin durağanlık özelliklerinin araştırılmasında, durağanlığın tespitinde kullanılmak amacıyla Dickey ve Fuller (1979) tarafından geliştirilen Dickey-Fuller testi (DF) ilk birim kök testi olma özelliğini taşımaktadır. Söz konusu test, $\rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde tanımlanan ve Y_t değişkeninin t döneminde aldığı değeri, geçen dönemde aldığı değer olan Y_{t-1} ile olan ilişkisini ifade eden bu

denklem yardımı ile açıklamaktadır. Buradaki modelde bulunan hata terimi ε_t , sıfır ortalamalı ve sabit varyanslıdır. Y_{t-1} ' in katsayısı (ρ) 1'e eşitse birim kök vardır, denir. Yani buradaki Y değişkeni bir önceki dönemdeki değerleri ile ilişkili olduğundan seri durağan değildir. Fakat ρ katsayısı değeri 1'den küçük çıktığında geçmiş dönemde oluşan şoklar bir süre zarfında etkisini gösterse dahi bu etki zamanla azalıp yok olacaktır. Dickey Fuller birim kök testinde kullanılan modeller şöyle sıralanabilir:

- i. Sabit Terimsiz Model: $\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- ii. Sabit Terimli Model: $\Delta Y_t = \beta_0 + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- iii. Sabit Terimli ve Trendli Model: $\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_t + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Test istatistiği τ (tau) istatistiğidir. Burada en küçük kareler tahmincisi normal dağılıma uymadığından standart t ve F dağılımları geçersizdir. τ istatistiklerinin değerlendirilmesinde t testi bu sebepten kaynaklı yapılamaz. MacKinnon kritik değerleri ile τ istatistikleri karşılaştırılması yapılır. Mutlak değerce τ istatistiği MacKinnon kritik değerinin mutlak değerinden küçükse yokluk hipotezi reddedilemez yani serinin birim kök içerdiğini söylenir dolayısıyla da serinin durağan olmadığı sonucuna varılır. Aksi durumda ise yokluk hipotezi reddedilir, seri birim kök içermez yani durağandır denir (Yıldıztan, 2010; Horasan, 2011; Torun, 2015).

2.6.2. Genişletilmiş Dickey Fuller (ADF) birim kök testi

Birim kök testleri sadece birinci dereceden otoregresif süreçlere uygulanmaz, bunun yanında daha yüksek dereceden otoregresif süreçlere de uygulanabilir. Dickey-Fuller testi esnasında hata teriminin (ε_t) otokorelasyonsuz ve sabit varyanslı olduğu varsayılmaktadır. Kullanılan serinin hata teriminde otokorelasyon mevcut ise Dickey-Fuller testinden elde edilen τ istatistiği güvenilir olmaz. Genişletilmiş Dickey Fuller Birim Kök Testi, hata teriminin otokorelasyonlu olduğu varsayımı kabul edilerek yapılır (Kaya, 2019). ADF testi uygulanırken Dickey-Fuller testinde kullanılan üç denklem baz alınır. Kullanılan denklemler aşağıda verilmektedir:

i. Sabit Terimsiz Model:

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \beta_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

ii. Sabit Terimli Model:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \beta_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

iii. Sabit Terimli ve Trendli Model:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_t + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \beta_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Bağımlı değişken olan Y_t 'nin gecikmeli değerleri modele bağımsız değişken olarak eklenmektedir. Böylece hata terimlerindeki otokorelasyonu ortadan kaldırmaya yetecek kadar gecikmeli fark terimini modele eklenmiş olur. Bu aşamada söz konusu otokorelasyon hangi gecikme sayısında yok olmuşsa, o gecikme sayısı optimum gecikme sayısı olarak kabul edilir (Kaya, 2019). Yani seçilecek gecikme sayısı doğrudan örneklem hacmi ile bağıntılı olacaktır. Optimum gecikme sayısının seçiminde en yaygın Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Schwarz Bilgi Kriteri (SIC) kullanılmaktadır. DF Testinde de olduğu gibi test istatistikleri MacKinnon kritik değerleri ile karşılaştırılır. Üç modelin en az birisi durağanlık testinden geçmiş ise ve yokluk hipotezi reddedilmişse, seri durağandır denilmektedir (Yıldıztan, 2010; Horasan, 2011; Torun, 2015).

2.7. Tahminlemede Hata Ölçüm İstatistikleri

Hata ölçümü istatistikleri, tahmin doğruluğunu izlemek, istisnaları gözlemlemek ve tahmin sürecini kıyaslamada kritik bir rol oynar. Bu istatistiklerin yorumlanması, özellikle düşük hacimli verilerle çalışırken veya birden fazla öge (örneğin, lokasyonlar, müşteriler vb.) vasıtasıyla doğruluğu değerlendirmeye çalışırken zor olabilir (Adhikari and Agrawal, 2013).

Bu tez çalışmasında kullanılan ve modellerin tahmin performansının ölçümünde kullanılan istatistikler aşağıda verilmektedir:

MSE: Hata kareler ortalaması olarak bilinen MSE, modelin ve tahminleyicinin performansı ölçülmek istendiğinde faydalanan performans

kriterlerinden biridir. Regresyon eğrisinin bir dizi noktaya ne kadar yakınlıkta olduğunu gösterir. MSE değerinin sıfıra yakın olması, tahminleyicilerin çok daha iyi bir performans gösterdiğini niteler. Daima pozitif değer alır.

RMSE: Hata kareler ortalamasının karekökü olarak adlandırılan ve literatürde tahmin performansını ölçmede yararlanılan bu istatistiğin kullanımı oldukça yaygındır. RMSE istatistiği tahmin hatalarının standart sapması olarak tanımlanabilir. Bir istatistiğe göre RMSE, çalışmalarda en çok kullanılan iki ölçüm metodundan biridir. RMSE değeri 0 ile $+\infty$ arasında değer alabilir. Fakat diğer kriterde olduğu gibi RMSE' nin en küçük değere sahip olması arzu edilir.

MAE: Ortalama mutlak hata olarak bilinen MAE, iki sürekli değişken arasındaki farkın ölçüsüdür. MAE değeri kolay ifade edilebilirliği ve yorumlanabilmesi dolayısıyla zaman serileri tahminlerinde ve regresyonda yaygın kullanılan bir performans kriteridir. 0 ile $+\infty$ aralığında değer alır. Olabildiğince düşük seviyede değer alması istenir.

Yukarıda bahsedilen performans kriterlerini hesaplamada kullanılan formüller Şekil 2.7.' de verilmiştir.

PERFORMANS KRİTERLERİ	MSE	$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) ^2}{n}$
	MAE	$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) }{n}$
	RMSE	$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i - \hat{y}_i ^2}{n}}$

Şekil 2. 7. Çalışmada Kullanılan Hata Ölçüm İstatistikleri

3. GEREÇ ve YÖNTEM

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümü çalışmada kullanılan Sabit Terimli Gri Verhulst Modeli (GVMCT)'ne ilişkin diferansiyel denklem çözümünü ve uygulama adımlarını içermektedir.

3.1. Sabit Terimli Gri Verhulst Modeli (GVMCT)

Klasik $GM(1,1)$ modeli birçok alanda uygulandığı ve zayıf bilgi ile tahmin problemlerinin çözümünde bir hayli başarı sağlamış olmasına rağmen, modelin tahmin doğruluğunu artırmak ve uygulama aralığını genişletmek için hala iyileştirmeye gereksinimi vardır. Gri girdinin optimizasyonu, klasik gri modelin doğruluğunu arttırmak için en önemli ölçülerden biridir (Zhang et al., 2019). Gri modelin girdisi geliştirilerek çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu modellerden bazıları aşağıdaki tabloda verilmiştir (Zhang et al., 2019).

Tablo 3.1. Farklı Girdilerin Kullanıldığı Modeller

Gri Model	Notasyon	Gri Modelin Girdisi
Non-homogeneous grey model	NGM (1,1, k)	bk
Self-adapting intelligent grey model	SAIGM	$bk + c$
Grey model with time power	GM (1,1, t^α)	$bt^\alpha + c$
Exponential optimization grey model	EOGM	be^{at}
Grey model with full-order time power terms	FOTP-GM	$\sum_{i=0}^h b_i k^i, (h \geq 1)$
Grey Verhulst model	GVM	$b(x^{(1)}(t))^2$
Nonlinear grey Bernoulli model	NGBM	$b(x^{(1)}(t))^n$
Incomplete gamma grey model	IGGM	$b\gamma(\mu, t) + c$

Bu tez çalışmasında Gri modelin girdisine katkıda bulunmak amacıyla aşağıdaki model denklemini göz önüne alınmıştır. Bu model gri Verhulst modeline sabit terimin eklenmesi ile oluşturulmuştur.

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^2 + c \quad (14)$$

Burada $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ile tanımlanmaktadır. k 'nın değerleri yukarıdaki denklemde yerine konulduğunda elde edilen denklemler matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^2 & 1 \\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Yukarıda matris formu verilen denklemler çözülerek a , b ve c 'nin en küçük kareler tahmin edicileri $\hat{r} = [\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{c}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ denkleminde elde edilir. Modele ait beyazlaştırılmış denklem (whitening equation)

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \left(x^{(1)}(t) \right)^2 + c \quad (15)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Dolayısıyla $GM(1,1)$ modelinin ikinci-dereceden gri diferansiyel denklemi gözönüne alınmıştır. $\hat{r} = [\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{c}]^T$ parametreleri son denklemde yerine konulup çözülerek zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin ayrıntılı çözümü aşağıda verilmektedir. Diferansiyel denklemin çözümünden elde edilen sonuç $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ ve $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=n} = x^{(1)}(n)$ olmak üzere iki farklı başlangıç koşulu için çözülerek zamana bağlı tahmin denklemi elde edilebilmektedir. Son olarak $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$ ifadesi ile de $\hat{x}^{(0)}(k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ tahmin değerleri elde edilebilmektedir.

Diferansiyel Denklemin Çözümü:

Öncelikle (15) ile verilen diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + by + c \quad (16)$$

formatında yazılacak olursa okuyucu açısından kolaylık olacaktır. Dolayısı ile (15) denkleminde yer alan $x^{(1)}(t)$ yerine (16) denkleminde y , (15) denkleminde yer alan t yerine (16) denkleminde x , (15) denkleminde yer alan b yerine (16) denkleminde a ve (15) denkleminde yer alan a yerine (16) denkleminde $(-b)$ kullanılmış olmaktadır.

(16) diferansiyel denklemi ayrılabilir diferansiyel denklem tipindedir. Bu tipteki diferansiyel denklemler diferansiyelleri formatında yazılıp integralleri alınarak çözülmektedir. Fakat bunun için öncelikle sağ taraftaki ikinci dereceden polinomun kökleri incelenmelidir. $ay^2 + by + c = 0$ için $\Delta = b^2 - 4ac$ 'dir. Δ 'nın alabileceği değerlere göre üç ayrı durum ortaya çıkmaktadır:

1.Durum: $\Delta > 0$ ise bu durumda polinomun iki kökü vardır;

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ve } y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.Durum: $\Delta = 0$ ise; bu durumda tek kök olur: $y_3 = -\frac{b}{2a}$

3.Durum: $\Delta < 0$ ise polinomun reel kökü yoktur.

Üç duruma bağlı olarak diferansiyel denklem çözümleri aşağıda verilmektedir:

$$\textbf{1.Durum: } \Delta = b^2 - 4ac > 0 \text{ yani } y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ve } y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olacak şekilde polinomun iki kökü vardır. Başka bir deyişle $ay^2 + by + c = a(y - y_1)(y - y_2)$, $y \neq y_1$ ve $y \neq y_2$ olsun. Bu durumda diferansiyel denklemi, diferansiyelleri formatında

$$\frac{1}{ay^2 + by + c} dy = dx$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın integrali alınır,

- $\int \frac{1}{ay^2 + by + c} dy = \int dx \rightarrow x + K_1$, K_1 keyfi sabit

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ay^2 + by + c} dy &= \int \frac{1}{a(y - y_1)(y - y_2)} dy \\ &= \frac{1}{a(y_1 - y_2)} \int \left(\frac{1}{(y - y_1)} - \frac{1}{(y - y_2)} \right) dy \\ &= \frac{1}{a(y_1 - y_2)} (\ln|y - y_1| - \ln|y - y_2|) \\ &= \frac{1}{a \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)} \ln \left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| \\ &= \frac{1}{\Delta} \ln \left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| \end{aligned}$$

olur.

$$\frac{A}{(y - y_1)} + \frac{B}{(y - y_2)} = \frac{1}{(y - y_1)(y - y_2)}$$

$$(A + B)y - By_1 - Ay_2 = 1$$

$$A + B = 0 \text{ ise } A = -B$$

$$Ay_1 - Ay_2 = 1$$

$$A = \frac{1}{y_1 - y_2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{-1}{y_1 - y_2}$$

olur.

- ' da yerine konursa;

$$= \frac{1}{\Delta} \ln \left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| = x + K_1$$

$$= \ln \left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| = \Delta x + \Delta K_1$$

K_1 keyfi sabit, $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| = e^{\Delta x + \Delta K_1}$$

$$\left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| = e^{\Delta K_1} e^{\Delta x}$$

$e^{\Delta K_1} \rightarrow K_2$ diyelim. $K_2 = e^{\Delta K_1}$, $K_2 > 0$ olur. $\frac{y - y_1}{y - y_2} = K_3 e^{\Delta x}$, mutlak değerden $\mp$ olarak çıkacağından $K_3 = \mp K_2$ olur. Yani $K_3 \neq 0$ keyfi sabit. Biraz daha düzenlenirse, $y \neq y_2$ olduğundan $(y - y_1) = (y - y_2) K_3 e^{\Delta x}$ ve $y(1 - K_3 e^{\Delta x}) = y_1 - y_2 K_3 e^{\Delta x}$ olur.

$$y = \frac{y_1 - y_2 K_3 e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}{1 - K_3 e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}$$

elde edilir. “ $(y = y_1)$ ya da $(y = y_2)$ olsaydı ne olurdu?” sorusu için

$$y = y_1 \text{ için } \frac{dx}{dy} = 0 \quad ay^2 + by + c = a(y - y_1)(y - y_2) = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda

$$y = y_1, \quad \frac{dx}{dy} = ay^2 + by + c$$

$$0 = 0$$

diferansiyel denklemini sağlayacağından bir çözüm olur. Aynı işlemler $y = y_2$ için de yapılırsa, $y = y_2$ 'nin de bir çözüm olduğu görülür. Yani $y = y_1$ ve $y = y_2$ kayıp çözümler olarak karşımıza çıkar. Bu $y = y_1$ ve $y = y_2$ çözümleri yukarıda bulunan

$$y(x) = \frac{y_1 - y_2 K_3 e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}{1 - K_3 e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}, \quad K_3 \neq 0$$

keyfi sabit çözümüne dahil edebilmek amacıyla eğer K_3 yerine 0 koyulursa $y(x) = y_1$ çözümü bulunur. Bu durumda;

$$y(x) = \frac{y_1 - y_2 K e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}{1 - K e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}, \quad K \text{ keyfi sabit}$$

$$y(x) = \frac{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} K e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}{1 - K e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}$$

$$y(x) = \frac{1}{2a} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (b + \sqrt{b^2 - 4ac}) K e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}{1 - K e^{\sqrt{b^2 - 4ac} x}}$$

olmak üzere verilen diferansiyel denklemin 1. durumdaki genel çözümü elde edilmiş olur. Fakat $y = y_2$ çözümü genel çözümdeki hangi K değeri yazılırsa yazılsın elde edilemez. Bu durumda $y(x) = y_2$, 1. durum için tekil çözümdür.

2.durum: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ yani $y_3 = \frac{-b}{2a}$ olmak üzere tek kök bulunmaktadır. Bu durumda

$$\frac{dx}{dy} = ay^2 + by + c = a(y - y_3)^2$$

$y \neq y_3$ için diferansiyel formatta yazılırsa:

$$\frac{1}{a(y - y_3)^2} dy = dx$$

olur. Her iki tarafın integrali alındığında;

$$\int \frac{1}{a(y - y_3)^2} dy = \int dx$$

$$-\frac{1}{a} \frac{1}{y - y_3} = x + K_4, K_4 \text{ keyfi sabit}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y - y_3} = -ax - aK_4, K_5 = -a K_4 \text{ olmak üzere keyfi sabit}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y - y_3} = -ax + K_5$$

$$\Rightarrow y - y_3 = \frac{1}{-ax + K_5} \Rightarrow y(x) = y_3 + \frac{1}{-ax + K_5}$$

ya da

$$y(x) = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{-ax + K_5}$$

verilen diferansiyel denklemin 2. durumdaki genel çözümüdür. Yine $y = y_3$ olma durumu incelenirse;

$$y = y_3 = -\frac{b}{2a} \text{ için } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ve } a(y - y_3)^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = a(y - y_3)^2$$

$$0 = 0$$

Bu durumda $y(x) = -\frac{b}{2a}$ 2.durum için diferansiyel denklemin çözümüdür.

Hiçbir K sabiti için genel çözüme dahil edilemeyeceğinden tekil çözümdür.

3.durum: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Bu durumda polinomun reel kökü yoktur. Diferansiyel formatta yazılırsa diferansiyel denklem,

$$\frac{1}{ay^2 + by + c} dy = dx$$

olur. Her iki tarafın integrali alınır

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ay^2 + by + c} dy &= \int \frac{1}{a \left(y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} \right)} dy \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dy}{\left(y + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + \alpha^2} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\alpha} \arctan \left(\frac{t}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}}} \arctan \left(\frac{y + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{-b^2 + 4ac}} \arctan \left(\frac{2ay + b}{\sqrt{-b^2 + 4ac}} \right) \end{aligned}$$

olur. İntegral eşitliğinde yerine koyulduğunda,

$$\frac{2}{\sqrt{-b^2 + 4ac}} \arctan \left(\frac{2ay + b}{\sqrt{-b^2 + 4ac}} \right) = x + K_6$$

olur.

$$\Rightarrow \arctan \left(\frac{2ay + b}{\sqrt{-b^2 + 4ac}} \right) = \frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2} x + K_7, \quad K_7 = \frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2} K_6 \quad \text{keyfi}$$

sabiti

$$\Rightarrow \frac{2ay + b}{\sqrt{-b^2 + 4ac}} = \tan\left(\frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2}x + K_7\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \tan\left(\frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2}x + K_7\right),$$

K_7 keyfi sabit olmak üzere, diferansiyel denklemin 3.durumdaki genel çözümüdür. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa:

1.Durumda; ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$)

$X \in R$ ve K keyfi sabit olmak üzere genel çözümü

$$y(x) = \frac{1}{2a} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})Ke^{\sqrt{b^2 - 4ac}x}}{1 - Ke^{\sqrt{b^2 - 4ac}x}} \quad (17)$$

olup burada

$$K = \frac{(b - \sqrt{b^2 - 4ac} + 2ay_0)e^{-x_0\sqrt{b^2 - 4ac}}}{b + \sqrt{b^2 - 4ac} + 2ay_0}$$

dir ve

$$y(x) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ise tekil çözümdür.

2.Durumda; ($\Delta = b^2 - 4ac = 0$)

$X \in R$, K_5 keyfi sabit olmak üzere genel çözüm;

$$y(x) = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{-ax + K_5} \quad (18)$$

olup burada

$$K_5 = ax_0 + \frac{2a}{b + 2ay_0}$$

dir ve

$$y(x) = -\frac{b}{2a}$$

ise tekil çözümdür.

3.Durumda; ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$)

$X \in R$ ve K_7 keyfi sabit olmak üzere genel çözüm

$$y(x) = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a} \tan \left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2} x + K_7 \right)$$

(19)

olur ve burada

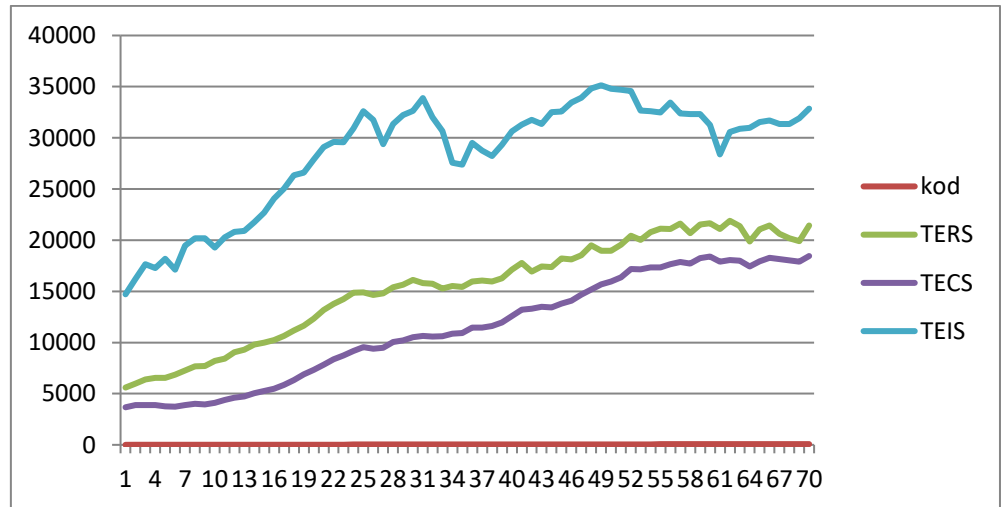
$$K_7 = -\frac{1}{2}x_0 + \sqrt{-b^2 + 4ac} + \arctan \left(\frac{b + 2ay_0}{\sqrt{-b^2 + 4ac}} \right)$$

4. UYGULAMA

Ülkelerin enerji tüketim verileri, ileride oluşacak enerji taleplerini karşılamak için oluşturulacak enerji politikalarında büyük rol oynamaktadır. Doğru tahmin modelleri, enerji tüketim trendlerinin belirlenmesi ve enerji yatırımlarının planlanması için fayda sağlamaktadır. Bu bağlamda çalışma kapsamında yapılacak uygulama çalışmasının enerji alanında olabileceği düşünülmüştür. Çalışma kapsamında Amerika Birleşik Devletleri (ABD) Enerji Bilgi İdaresi tarafından hazırlanan Ocak 2020 Aylık Enerji Değerlendirmesi'nden elde edilen enerji tüketim veri seti kullanılabilir durumdadır. Bu veri seti "British thermal unit" (Btu) cinsinden ABD'deki ticaret ve sanayi sektörleri tarafından tüketilen birincil ve toplam enerji tüketim miktarlarını içermektedir. Bu veri setleri içerisinde üç tanesi bu tez çalışmasında kullanılmıştır. Veriler 1949-2018 yılları arasındaki yıllık verilerden oluşmaktadır. Kullanılan değişkenler şunlardır:

- **TERS:** Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Residential Sector)
- **TECS:** Ticari Sektörün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Commercial Sector)
- **TEIS:** Sanayi Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Industrial Sector)

Bu değişkenlere ait zaman yolu grafiği aşağıda verilmektedir:



Şekil 4. 1.Üç Değişken İçin Zaman Yolu Grafiği

Bu grafikten TERS ve TECS değişkenlerinin benzer yapıda oldukları ve yukarı yönlü bir trend eğiliminde oldukları söylenebilir. Ancak TEIS değişkeninin yapısı diğer iki değişkenin yapısına göre farklı olduğu açıkça görülmektedir. Bu üç değişken için hem klasik zaman serisi analizi ile uygun modeller belirlenmiş hem de çeşitli gri modellere uyum yapılarak değişkenin yapısına uygun gri modeller belirlenmiştir. Bu model uyumu aşamaları ayrı başlıklar halinde aşağıda verilmektedir.

4.1. Zaman Serileri Analizi İle Uygun Modellerin Belirlenmesi

Şekil 4.1’de üç değişkene ilişkin zaman yolu grafiği verilmiştir. Bu grafik incelendiğinde TERS ve TECS değişkenlerinin yukarı yönlü bir trend eğiliminde oldukları görülmektedir. Bu nedenle bu iki değişken için hem doğrusal (lineer) hem de karesel (quadratic) trend için model uyumu yapılmış ve istatistiksel açıdan anlamlı model denklemleri aşağıdaki Tablo 4.1.’ de verilmiştir.

Tablo 4.1. İki Değişken İçin İstatistiksel Açıdan Anlamlı Model Denklemleri.

Doğrusal Trend denklemi	Parabolik trend denklemi
$\widehat{TERS}_t = 6967.957 + 237.193t$	$\widehat{TERS}_t = 4581.350 + 436.077t - 2.801t^2$
$\widehat{TECS}_t = 6967.957 + 237.193t$	$\widehat{TECS}_t = 1806.420 + 304.617t - 0.724t^2$
$\widehat{TEIS}_t = 20846.848 + 215.742t$	$\widehat{TEIS}_t = 14445.406 + 749.195t - 7.513t^2$

TEIS değişkeninin zaman yolu grafiği incelendiğinde serinin ortalamasının zamana göre sabit olmadığı görülmekte dolayısıyla bu değişkenin durağan olmayan bir yapı gösterdiği söylenmektedir. Trend bileşenin de seri üzerinde etkili olabileceği düşünülebilir.

Serinin durağan olup olmadığının belirlenmesi amacıyla birim kök testi yapılmıştır. Bu amaçla ilk olarak serinin düzey değerleri üzerinden birim kök testi sonuçları elde edilmiştir. Birim kök testi belirli model kalıpları üzerinden yapılmaktadır. Bunlar kesmesiz ve trendsiz model, kesmeli ve trendsiz model ve kesmeli ve trendli model olarak ifade edilmektedir. Öncelikle kesmesiz ve

trendsiz model için inceleme yapılmıştır. İlgili hipotez aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

$$H_0: \delta \geq 0 (\varphi_1 \geq 1) (\text{Durağan dışı})$$

$$H_1: \delta < 0 (\varphi_1 < 1) (\text{Durağan})$$

Burada $\delta = \varphi_1 - 1$ dir. Bu hipotez testi için E-Views programı kullanılarak Tablo 4.2. elde edilmiştir.

Tablo 4.2. Belirtilen Hipotez Testi İçin E-Views Programı Çıktısı.

Augmented Dickey-Fuller test statistic			t-Statistic	Prob.*
			1.408680	0.9592
Test critical values:	1% level		-2.598907	
	5% level		-1.945596	
	10% level		-1.613719	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	0.006666	0.004732	1.408680	0.1635

$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ya da $\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde ifade edilen trendsiz ve kesmesiz modelin tahmini $\Delta Y_t = 0.006666 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde elde edilmiş olur. Test istatistiğinin değeri $t_{\hat{\delta}} = 1.40868$ olup %1 (-2.598907), %5 (-1.945596) ve %10 (-1.613719) anlamlılık seviyelerinde $t_{\hat{\delta}} > \tau$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemez sonucuna varılır. Dolayısıyla seri durağan dışıdır ve birim köke sahiptir şeklinde yorum yapılabilir.

Tablo 4.3. Kescmeli ve Trendsiz Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı.

Augmented Dickey-Fuller test statistic			t-Statistic	Prob.*
			-2.658351	0.0866
Test critical values:	1% level		-3.528515	
	5% level		-2.904198	
	10% level		-2.589562	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.063090	0.023733	-2.658351	0.0098
C	2057.280	687.3729	2.992960	0.0039

Kescmeli ve trendsiz model kalıbı için de benzer şekilde yokluk ve alternatif hipotez kurulur. Program çıktısı Tablo 4.3.' teki gibi elde edilmektedir. Buna göre $Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ya da $\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde ifade edilen trendsiz ve kescmeli modelin tahmini $\Delta Y_t = 2057.280 - 0.063090 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde elde edilmiş olur. Test istatistiğinin değeri $t_{\delta} = -2.658351$ olup, %10 (-2.589562) anlamlılık seviyelerinde $t_{\delta} > \tau_{\mu}$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemez sonucuna varılır. Dolayısıyla seri durağan dışıdır ve birim köke sahiptir şeklinde yorum yapılabilir.

Tablo 4.4. Kesmeli ve Trendli Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı.

Augmented Dickey-Fuller test statistic			t-Statistic	Prob.*
			-1.943366	0.6211
Test critical values:	1% level		-4.096614	
	5% level		-3.476275	
	10% level		-3.165610	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.077481	0.039870	-1.943366	0.0562
C	2294.065	868.4387	2.641597	0.0103
@TREND("1949")	4.929673	10.93782	0.450700	0.6537

Kesmeli ve trendli model kalıbına ilişkin elde edilen sonuçlar Tablo 4.4' de verilmektedir. $Y_t = \mu + \beta t + \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ya da $\Delta Y_t = \mu + \beta t + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde ifade edilen trendli ve kesmeli modelin tahmini $\Delta Y_t = 2294.065 + 4.929673t - 0.077481Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde elde edilmiş olur. Test istatistiğinin değeri $t_{\hat{\delta}} = -1.943366$ olup %1 (-4.096614), %5 (-3.476275) ve %10 (-3.165610) anlamlılık seviyelerinde $t_{\hat{\delta}} > \tau_{\tau}$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemez sonucuna varılır. Dolayısıyla seri seri durağan dışıdır ve birim köke sahiptir şeklinde yorum yapılabilir.

Bu sonuçlara bağlı olarak serinin düzey değerleri için seri birim köke sahiptir.

Tablo 4.5. Serinin Bir Adım Farkı Alınarak Yapılan Birim Kök Testi Sonuçları E-Views Program Çıktısı.

Augmented Dickey-Fuller test statistic			t-Statistic	Prob.*
			-7.333292	0.0000
Test critical values:	1% level		-2.599413	
	5% level		-1.945669	
	10% level		-1.613677	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(SER01(-1))	-0.882618	0.120358	-7.333292	0.0000

Serinin bir adım farkı alınarak elde edilen birim kök testi sonuçları Tablo 4.5.'te verilmektedir. $\Delta^2 Y_t = \delta \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde ifade edilen trendsiz ve kesmesiz modelin tahmini $\Delta^2 Y_t = -0.882618 (\Delta Y_{t-1}) + \varepsilon_t$ şeklinde elde edilmiş olur. Test istatistiğinin değeri $t_{\hat{\delta}} = -7.333292$ olup %1 (-2.599413), %5 (-1.945669) ve %10 (-1.613677) anlamlılık seviyelerinde $t_{\hat{\delta}} < \tau$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir sonucuna varılır. Dolayısıyla seri durağandır yani birim kök yoktur şeklinde yorum yapılabilir.

Tablo 4.6. Birinci Farklar İçin Kesmeli ve Trendsiz Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı.

Augmented Dickey-Fuller test statistic			t-Statistic	Prob.*
			-7.592394	0.0000
Test critical values:	1% level		-3.530030	
	5% level		-2.904848	
	10% level		-2.589907	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(SER01(-1))	-0.925813	0.121940	-7.592394	0.0000
C	225.6545	140.1419	1.610186	0.1121

Birinci farklar için kesmeli ve trendsiz model kalıbı için $\Delta^2 Y_t = \mu + \delta \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde ifade edilen trendsiz ve kesmeli modelin tahmini $\Delta^2 Y_t = 225.6545 - 0.925813 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde elde edilir. Test istatistiğinin değeri $t_{\hat{\delta}} = -7.592394$ olup, %1 (-3.53003), %5 (-2.904848) ve %10 (-2.589907) anlamlılık seviyelerinde $t_{\hat{\delta}} < \tau_{\mu}$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir ve seri durağandır yani birim kök yoktur sonucuna varılır.

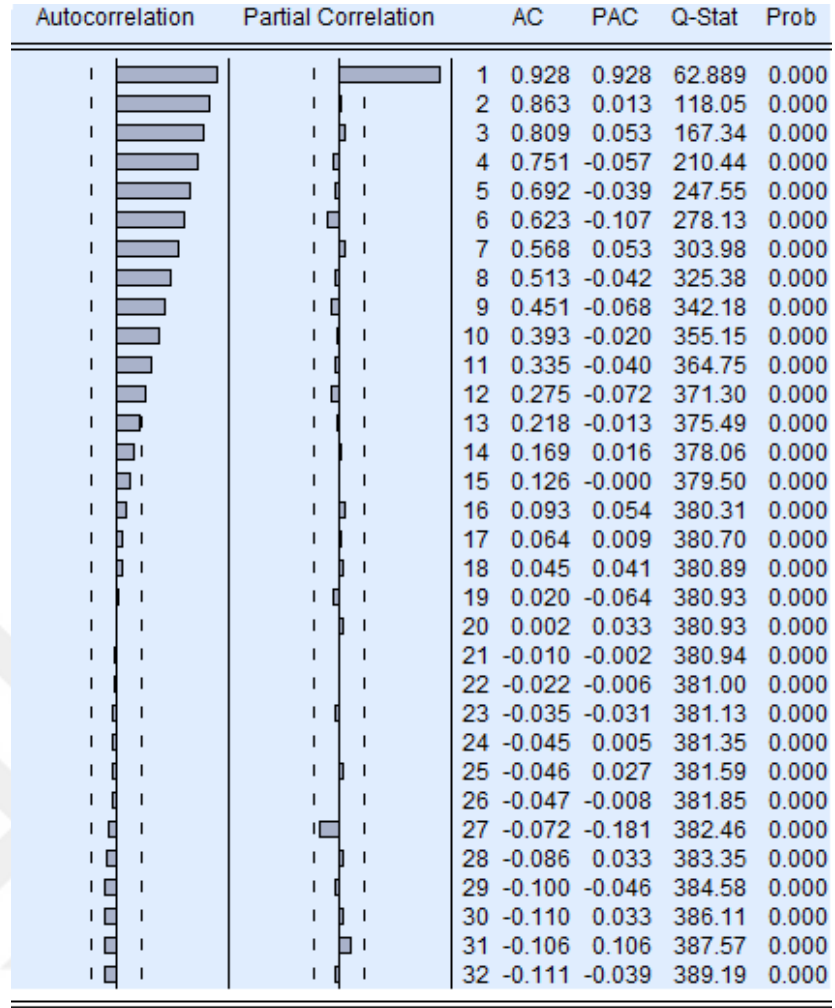
Tablo 4.7. Birinci Farklar İçin Kescmeli ve Trendli Model Kalıbına İlişkin Elde Edilen E-Views Program Çıktısı.

Augmented Dickey-Fuller test statistic			t-Statistic	Prob.*
			-7.796721	0.0000
Test critical values:	1% level		-4.098741	
	5% level		-3.477275	
	10% level		-3.166190	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(SER01(-1))	-0.969673	0.124369	-7.796721	0.0000
C	612.2402	294.4383	2.079350	0.0415
@TREND ("1949")	-10.57736	7.103833	-1.488965	0.1413

Birinci farklar için kesmeli ve trendli model kalıbına ilişkin elde edilen sonuçlar Tablo 4.7.' de verilmektedir. $\Delta^2 Y_t = \mu + \beta t + \delta \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde ifade edilen trendli ve kesmeli modelin tahmini $\Delta^2 Y_t = 612.2402 - 10.57736t - 0.969673\Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde elde edilmiştir. Test istatistiğinin değeri $t_{\hat{\delta}} = -7.796721$ olup %1 (-4.098741), %5 (-3.477275) ve %10 (-3.166190) anlamlılık seviyelerinde $t_{\hat{\delta}} < \tau_{\tau}$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. Dolayısıyla seri durağandır yani birim köke sahip değildir şeklinde yorum yapılabilir.

Birim kök testi sonuçlarına göre serinin birinci dereceden farkı alındığında birim kök olmadığı dolayısıyla durağan hale geldiği görülmektedir. Dolayısıyla serinin I. dereceden entegre yani I (1) bir seri olduğu sonucuna varılır.

Serinin yapısına uygun muhtemel modelin belirlenebilmesi amacıyla korelogramı çizilmiş ve aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. 2. Serinin Yapısına Uygun Muhtemel Modelin Belirlenebilmesi İçin Çizilen Korelogram

Korelograma bakılarak muhtemel modelin belirlenmesinde Tablo 4.8.' de kullanılmaktadır. (Sevüktekin ve Nargeleçekenler, 2007)

Tablo 4.8. Muhtemel Modelin Belirlenmesine İlişkin Yapılan Karşılaştırmalı Tablo

MODEL	Otokorelasyon Fonksiyonu	Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu
AR(p)	Azalarak kaybolur.	q-gecikme sonra kesilir.
MA(q)	p-gecikme sonra kesilir.	Azalarak kaybolur.
ARMA(p, q)	Azalarak kaybolur ve p-gecikme sonra kesilir.	Azalarak kaybolur ve q-gecikme sonra kesilir.

Korelogram otokorelasyon değerlerinin giderek azalan bir yapıda olduğunu göstermektedir. Kısmi otokorelasyon değerlerinde ise birinci gecikme değerinin yüksek olduğu ve bundan sonra kesildiği görülmektedir. Bu durum modelin tipik bir otoregresif yapıda olduğunu ve derecesinin de " 1 " olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla serinin yapısına uygun muhtemel modelin AR (1) yapısında olabileceği düşünülebilir.

Serinin yapısına uygun modelin belirlenmesi amacıyla çeşitli modellere uyum yapılmış ve bu modellerden elde edilen sonuçlara dayalı olarak aşağıda verilen özet Tablo 4.9 oluşturulmuştur. Model seçim kriterlerine bakıldığında a) Model katsayılarının anlamlı olması, b) R^2 değerinin yüksek olması, c) F istatistiğinin anlamlı olması, d) Akaike ve Schwarz bilgi kriterlerinin küçük olması beklenir.

Tablo 4.9. kullanılarak model uyumunda aranan özellikleri sağlayan ve **en basit modelin** AR (1) modeli olduğu görülmektedir. Dolayısıyla

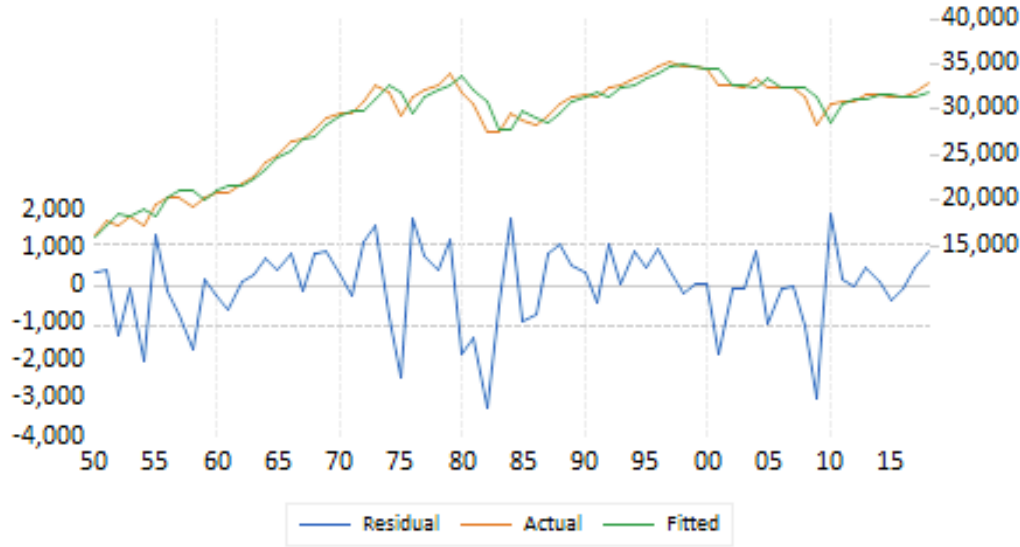
$$Y_t = 32608.46 + 0.936910Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

denklemini seriye ilişkin genel tahmin denklemi olarak kullanılabilir. Modelin AR (1) yapısında olması ile birlikte birim kök testinde durağan olmadığı sonucunun ortaya çıkma sebebi φ_1 katsayısının "1" e çok yakın olmasından kaynaklanmaktadır sonucuna varılabilir.

Tablo 4.9. Serinin Yapısına Uygun Modelin Belirlenmesi Amacıyla Çeşitli Modellerden Elde Edilen Sonuçlara Dayalı Oluşturulan Özet Tablo

	AR (1)	MA (1)	ARMA (1,1)	AR (2)	MA (2)	ARMA (2,2)	Trendli AR (1)	Trendli MA (1)	Trendli MA (2)	Trendli MA (3)
Kesme (Prob)	32608,46 (0,000)	28599,76 (0,000)	32478,07 (0,000)	32596,85	28775,06 (0,000)	32513,45 (0,000)	28850,39	21146,06 (0,000)	21405,77 (0,000)	21503,21 (0,000)
Φ_1 (Prob)	0,936910 (0,000)		0,934617 (0,000)	0,982561 (0,000)		0,086673 (0,6560)	0,922519			
θ_1 (Prob)		0,880177 (0,000)	0,059967 (0,6347)		1,451440 (0,000)	0,975800 (0,0000)		0,808778 (0,000)	1,185886 (0,000)	1,275544 (0,0000)
Φ_2 (Prob)				-0,04174 (0,7267)		0,797755 (0,000)				
θ_2 (Prob)					0,744053 (0,000)	0,110213 (0,3909)			0,583721 (0,000)	0,999423 (0,000)
β (Prob)							63,62389	213,3808 (0,000)	207,2927 (0,000)	204,2809 (0,000)
θ_3 (Prob)										0,378685 (0,0019)
R^2	0,95878	0,680348	0,958893	0,955190	0,858824	0,957254	0,958907	0,864417	0,922450	0,938424
$AdjR^2$	0,95817	0,675647	0,957647	0,953812	0,854609	0,954540	0,957662	0,860370	0,918925	0,934635
F (Prob)	1558,454 (0,000)	144,7315 (0,000)	769,7822 (0,000)	692,7910 (0,0000)	203,7916 (0,000)	352,7073 (0,000)		213,5817 (0,000)	261,6872 (0,000)	247,6528 (0,000)
AIC	16,83058	18,96116	16,85684	16,87142	18,17251	16,88309	16,85649	18,13208	17,60200	17,39991
SIC	16,89534	19,02540	16,95397	16,96934	18,26887	17,04629	16,95363	18,22845	17,73048	17,56052
SSR	7773673	6,65E+08	1083,800	77424295	2,94E+08	73858346	77498216	2051,130	1,61E+08	1,28E+08
LR	-578,655	-661,641	-578,561	-570,6281	-633,038	-569,025	-578,549	-631,6228	-612,0699	-603,9969

AR (1) modeli için residual-actual-fitted grafiği elde edilmiş ve aşağıda verilmiştir. grafikten gerçek ve tahmin değerlerinin birbiri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 4. 3. AR (1) Modeli İçin Residual-Actual-Fitted Grafiği

4.2. Uygun Gri Modeller

İlgilenilen değişkenlerin zaman yolu grafiği incelendiğinde bir trend yapısının varlığı göze çarpmaktadır. Bu durumda literatürde lineer trend yapısının varlığı durumunda en çok kullanılan gri model klasik GM (1,1)'dir. Bu nedenle ilgili değişkenlere ilişkin GM (1,1) modelleri elde edilmiştir. Ancak trend yapısının lineer olması yanında karesel formu da değerlendirilmelidir. Bu nedenle literatürde yer alan gri Verhulst modeline de uyum yapılmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 4.10.' de verilmiştir.

Tablo 4.10. TERS, TECS ve TEIS Değişkenleri İçin GM (1,1) ve Gri Verhulst Model Denklemleri.

	GM (1,1) model denklemleri
TERS	$x_p^{(1)}(k+1) = \left[5599,404 - \frac{9236,541}{(-0,014)} \right] e^{-(0,014)k} + \frac{9236,541}{(-0,014)}$
TECS	$x_p^{(1)}(k+1) = \left[3668,856 - \frac{5315,246}{(-0,021)} \right] e^{-(0,021)k} + \frac{5315,246}{(-0,021)}$
TEIS	$x_p^{(1)}(k+1) = \left[14709,664 - \frac{22576,022}{(-0,007)} \right] e^{-(0,007)k} + \frac{22576,022}{(-0,007)}$

(devam ediyor)

Tablo 4.10. TERS, TECS ve TEIS Değişkenleri İçin GM (1,1) ve Gri Verhulst Model Denklemleri (devamı).

	Gri Verhulst model denklemleri
TERS	$x_p^{(1)}(k+1) = \frac{-0,059(5599,404)}{(-0,0000000394)(5599,404) + ((-0,059) - (-0,0000000394)5599,404)e^{-0,059k}}$
TECS	$x_p^{(1)}(k+1) = \frac{-0,061(3668,856)}{(-0,000000005)(3668,856) + ((-0,061) - (-0,000000005)3668,856)e^{-0,061k}}$
TEIS	$x_p^{(1)}(k+1) = \frac{-0,061(14709,66)}{(-0,0000000248)(14709,66) + ((-0,061) - (-0,0000000248)14709,66)e^{-0,061k}}$

Bu tez çalışmasında önerilen Gri Verhulst modeline sabit terimin eklenmesi ile oluşturulan GVMCT modeline uyum yapılmıştır. Her bir değişken için bu modele uyumun detayları aşağıda verilmektedir.

GVMCT modeline ilişkin tahmin denkleminin oluşturulabilmesi için 3. bölümde detayları verilen matrislerin oluşturulması ve bu matrisler kullanılarak (14) denkleminin katsayılarının en küçük kareler yöntemi ile elde edilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla TERS değişkeni için matrisler oluşturulduktan sonra (14) denkleminin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$b = -0,00000001747940823991,$$

$$a = -0,03159471554303960000,$$

$$c = 6684,84612360998$$

(15) denkleminde yer alan b yerine (16) denkleminde a ve (15) denkleminde yer alan a yerine (16) denkleminde $(-b)$ kullanıldığından

$$a = -0,00000001747940823991, \quad b = 0,03159471554303960000,$$

$$c = 6684,84612360998$$

alınarak $\Delta = 0,00146561466790790$ ($\sqrt{\Delta} = 0,038283347$) elde edilmiştir. $\Delta > 0$ olduğundan (17) denklemi kullanılarak TERS değişkeni için $\hat{x}^{(1)}(k+1)$, $k = 1,2,3, \dots$ değerleri elde edilir. (17) denkleminde K keyfi sabittir ve değeri başlangıç koşuluna bağlı olarak hesaplanmaktadır. $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ ($\hat{x}^{(0)}(1) = y(x_0)$, $x^{(0)}(1) = y_0$), başlangıç koşulu altında $K = -0.10$ olarak hesaplanmıştır. $\hat{x}^{(0)}(k)$ serisinin değerleri $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ olmak üzere aşağıdaki IAGO işlemi ile elde edilmiştir.

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

Benzer şekilde TECS değişkeni için matrisler oluşturulduktan sonra (14) denkleminin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$b = -0,00000002915793996,$$

$$a = -0,041778649,$$

$$c = 3247,872752$$

(15) denkleminde yer alan b yerine (16) denkleminde a ve (15) denkleminde yer alan a yerine (16) denkleminde $(-b)$ kullanıldığından

$$a = -0,00000002915793996, \quad b = 0,041778649,$$

$$c = 3247,872752$$

alınarak $\Delta = 0,00212$ ($\sqrt{\Delta} = 0,046089702$) elde edilmiştir. $\Delta > 0$ olduğundan (17) denklemi kullanılarak TECS değişkeni için $\hat{x}^{(1)}(k+1)$, $k = 1,2,3, \dots$ değerleri elde edilir. (17) denkleminde K keyfi sabittir ve değeri başlangıç koşuluna bağlı olarak hesaplanmaktadır. $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ ($\hat{x}^{(0)}(1) = y(x_0)$, $x^{(0)}(1) = y_0$), başlangıç koşulu altında $K = -0,049297954$ olarak hesaplanmıştır. $\hat{x}^{(0)}(k)$ serisinin değerleri $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ olmak üzere aşağıdaki IAGO işlemi ile elde edilmiştir.

Benzer şekilde TEIS değişkeni için matrisler oluşturulduktan sonra (14) denkleminin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$b = -0,000000009255854,$$

$$a = -0,024523777,$$

$$c = 17251,58389$$

(15) denkleminde yer alan b yerine (16) denkleminde a ve (15) denkleminde yer alan a yerine (16) denkleminde $(-b)$ kullanıldığından

$$a = -0,000000009255854, \quad b = 0,024523777,$$

$$c = 17251,58389$$

alınarak $\Delta = 0,00124$ ($\sqrt{\Delta} = 0,035215454$) elde edilmiştir. $\Delta > 0$ olduğundan (17) denklemini kullanarak TEIS değişkeni için $\hat{x}^{(1)}(k+1)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ değerleri elde edilir. (17) denkleminde K keyfi sabittir ve değeri başlangıç koşuluna bağlı olarak hesaplanmaktadır. $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ ($\hat{x}^{(0)}(1) = y(x_0)$, $x^{(0)}(1) = y_0$), başlangıç koşulu altında $K = -0,177991286$ olarak hesaplanmıştır. $\hat{x}^{(0)}(k)$ serisinin değerleri $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ olmak üzere aşağıdaki IAGO işlemi ile elde edilmiştir.

5.BULGULAR

5.1. Uygun Modellerin Performans Değerlendirmesi

Tez çalışmasında üç değişken ile ilgili hem zaman serileri analizi hem de gri modelleme kullanılarak bir takım tahmin denklemleri elde edilmiştir. Bu tahmin denklemlerinin performansı gerçek değerler ile denklemlerden elde edilen tahmin değerlerinin kıyaslanması ile ortaya konmaktadır. Bu amaçla MSE, MAE ve RMSE performans ölçüleri olarak belirlenmiş ve bu ölçülere bağlı olarak bu kıyaslama yapılmıştır. Bu ölçüler aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|^2}{n}}, \quad MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}, \quad MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}.$$

Burada n zaman periyodunu, y_i gözlenen değerleri ve $\hat{y}_i$ modelden elde edilen tahmin değerlerini göstermektedir $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Bu performans ölçüleri belirlenen tahmin modelleri için elde edilmiş ve aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5.1. TERS Değişkeni İçin Performans Kriter Tablosu ($\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ Başlangıç Koşulu Altında).

	Lineer Trend	GM (1,1)	Parabolik Trend	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	1547026,003	3027041,828	2702787	142553595,6	711201,2553
MAE	1004,623451	1468,349424	1281,799	11531,44185	721,3727193
RMSE	1243,795001	1739,839598	1644,0154	11939,58105	843,3274899

TERS değişkeni için performans tablosu incelendiğinde tüm kriterlere göre (MSE, MAE, RMSE) önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Zaman serisi modellerinden (lineer ve parabolik trend) lineer trend denkleminin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Gri modeller içerisinde (GM (1,1), Gri Verhulst ve GVMCT) Gri Verhulst modeli hep daha kötü bir performans göstermektedir.

Tablo 5.2. TECS Değişkeni İçin Performans Kriter Tablosu
 $(\hat{x}^{(1)}(k))|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ Başlangıç Koşulu Altında).

	Lineer Trend	GM (1,1)	Parabolik Trend	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	601309,1667	2447341,914	873691,2	81403143,18	266685,5521
MAE	633,8923189	1184,59042	672,2548	8472,077807	437,6890676
RMSE	775,4412722	1564,398259	934,71453	9022,369045	516,4160649

TECS değişkeni için performans tablosu incelendiğinde tüm kriterlere göre (MSE, MAE, RMSE) önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Zaman serisi modellerinden lineer trend denkleminin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Gri modeller içerisinde (GM (1,1), Gri Verhulst ve GVMCT) Gri Verhulst modeli hep daha kötü bir performans göstermektedir.

Tablo 5.3. TEIS Değişkeni İçin Performans Kriter Tablosu
 $(\hat{x}^{(1)}(k))|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ Başlangıç Koşulu Altında).

	Lineer Trend	GM (1,1)	Parabolik Trend	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	10699110,5	11664525,8	25062466	392999620	3802758,659
MAE	2822,9276	2921,63146	3865,451	18376,3498	1585,982762
RMSE	3270,94948	3415,33686	5006,2437	19824,218	1950,066322

TEIS değişkeni için performans tablosu incelendiğinde tüm kriterlere göre (MSE, MAE, RMSE) önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Zaman serisi modellerinden (lineer trend denkleminin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Gri modeller içerisinde (GM (1,1), Gri Verhulst ve GVMCT) Gri Verhulst modeli hep daha kötü bir performans göstermektedir.

İlgilenilen üç değişken içinde benzer sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca gri modele ait diferansiyel denklem belirli bir başlangıç koşuluna bağlı olarak çözülmektedir. Başlangıç koşulunun değiştirilmesi durumunda elde edilecek

sonuçlar da farklı olmaktadır. Literatürde farklı başlangıç koşulu önerileri bulunmaktadır. Başlangıç koşulunun tahmin denkleminin performansını ne kadar etkilediğinin görülebilmesi amacıyla $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=n} = x^{(1)}(n)$ başlangıç koşulu alınarak hesaplamalar tekrarlanmıştır. Değişkenlere ilişkin elde edilen performans kriter tabloları yeniden hazırlanmış ve aşağıda verilmiştir.

Tablo 5.4. TERS Değişkeni İçin İki Farklı Başlangıç Koşulu Altında Performans Kriter Tablosu.

	$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=1} = x^{(1)}(1)$			$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=n} = x^{(1)}(n)$		
	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	3027041,83	142553595,6	711201,255	102285356,00	4886151,507	709150,350
MAE	1468,349	11531,442	721,373	9478,099	1960,4168	711,3552
RMSE	1739,84	11939,581	843,327	10113,622	2210,464	842,111

Tablo 5.5. TECS Değişkeni İçin İki Farklı Başlangıç Koşulu Altında Performans Kriter Tablosu.

	$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=1} = x^{(1)}(1)$			$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=n} = x^{(1)}(n)$		
	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	2447341,914	81403143,18	266685,5521	90573267,9412	1280607,0235	265323,4427
MAE	1184,59042	8472,077807	437,6890676	8569,039	959,24906	433,0486
RMSE	1564,398259	9022,369045	516,4160649	9516,998894	1131,639087	515,0955666

Tablo 5.6. TEIS Değişkeni İçin İki Farklı Başlangıç Koşulu Altında Performans Kriter Tablosu.

	$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=1} = x^{(1)}(1)$			$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=n} = x^{(1)}(n)$		
	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	11664525,8	392999620	3802758,659	124520576,6631	28133115,4575	3802919,2205
MAE	2921,63146	18376,3498	1585,982762	10444,625	4723,7229	1583,019
RMSE	3415,33686	19824,218	1950,066322	11158,87883	5304,065936	1950,107489

Bu üç tablo incelendiğinde yine önerilen GVMCT modelinin daha iyi performans gösterdiği söylenebilir. Ancak iki farklı başlangıç koşulu sonuçlarda büyük bir fark yaratmamaktadır.

Buraya kadar yapılan analizler incelenen değişkenlerin 1949-2018 yılları arasındaki yıllık verilerine dayanmaktadır. Bundan sonraki iki dönem için çalışma kapsamında göz önüne alınan modellerden tahmin değerleri elde edilmiş, oluşan gerçek değerler ile birlikte Tablo 5.7., Tablo 5.8. ve Tablo 5.9' da verilmiştir.

Tablo 5.7. TERS Değişkeni Tahmin Değerleri.

	Gerçekleşen Değer	Lineer Trend	Quadratic Trend	GM (1,1)	Verhulst	GVMCT
2019	21068,989	23808,66	21422,976	24646,30378	13300,65464	20346,38363
2020	20803,162	24045,853	21458,51	24993,77868	13797,10508	20206,2345

Tablo 5.8. TECS Değişkeni Tahmin Değerleri.

	Gerçekleşen Değer	Lineer Trend	Quadratic Trend	GM (1,1)	Verhulst	GVMCT
2019	18010,899	20401,032	19784,543	23207,81086	10646,17181	17954,037
2020	16762,815	20654,239	19985,628	23700,32822	11073,1943	17846,392

Tablo 5.9. TEIS Değişkeni Tahmin Değerleri.

	Gerçekleşen Değer	Lineer Trend	Quadratic Trend	GM (1,1)	Verhulst	GVMCT
2019	32701,065	36164,53	29765,218	36890,01696	31192,95062	29123,82674
2020	31073,074	36380,272	29440,054	37149,153	31960,93266	28747,96952

TERS ve TECS değişkenleri için önerilen GVMCT modeli oldukça iyi performans göstermiş ve 2019-2020 yılları için oldukça yakın öngörü değerleri elde edilmesini sağlamıştır. TEIS değişkeni için ise klasik Verhulst modeli ile en iyi öngörü değerleri elde edilmektedir. Ancak burada zaten TEIS değişkeninin yapısı tam bir trend eğilimi içinde olmadığından bu sonucun ortaya çıktığı düşünülebilir.

6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Gri modeller, istatistik alanında literatürde çokça kullanılmayan bir teoridir. Bu bağlamda yapılan çalışmalar kısıtlıdır. Bununla birlikte belirsiz sistemlerle ilgilenen ve az bilgi ile önemli sonuçlar elde eden Gri Sistem Teorisi, bulanık mantık yaklaşımına alternatif bir yöntem olarak literatürde karşımıza çıkmaktadır (Aydemir et al., 2013). Gri Sistem Teorisi, belirsizliğin ve eksik bilginin olduğu durumlarla ilişkilendirilen, stokastik veya bulanık yöntemlerle üstesinden gelinemeyen durumlarda belirsiz sistemlerin çıktılarını genel istatistik yöntemlerin yanı sıra sınırlı sayıda veri ile gerçeğe yakın tahminleme yeteneği ile dikkatleri üzerine çekmektedir (Liu and Lin, 2006).

Gri model ile ilgili çalışmalar incelendiğinde çoğu araştırmada kullanımına en sık rastlanan modelin GM (1,1) modeli olduğu görülmektedir. Bu model doğrusal trend yapısının varlığında doğru sonuçlar üretebilmektedir. Ancak, ilgilenilen veri yapısının doğrusal olmadığı durumlar ile çoğunlukla karşılaşmakta ve bu durumlar gerçeğe daha uygun görünmektedir. Dolayısıyla farklı veri yapılarına uygun modellere ilişkin tahmin denklemlerinin oluşturulması literatüre katkı açısından önemlidir. Bu bakış açısıyla bu çalışma doğrusal olmayan veri yapılarının modellenenebilmesine katkı sağlamaktadır.

Gri modelleme ile ilgili çoğu çalışmada çeşitli algoritmalar ile yaklaşık çözümlerin elde edilmesi yoluna da gidilmiştir. Ancak bu tür çalışmalar elde edilen sonuçların kontrolü ve okuyucular tarafından kullanımı anlamında etkin olamamaktadır. Bu bakış açısıyla bir tahmin denkleminin elde edilmesi diğer okuyucuların kullanımı anlamında önemlidir.

Gri modellerin tahmin denklemlerinin oluşturulması sırasında ilgili diferansiyel denklemin çözülmesi gerekmektedir. Klasik GM (1,1) ve Gri Verhulst modellerine ait diferansiyel denklemlerin çözümü zor olmamakla beraber farklı modeller göz önüne alındığında ilgili diferansiyel denklemin çözümü daha fazla matematik bilgisi gerektirmektedir. Bu nedenle bu çalışmada

ilgilenilen GVMCT modeline ait diferansiyel denklemin çözümü ile farklı bir model için daha tahmin denkleminin elde edilmesi mümkün olmuştur.

Bu çalışmada günlük hayatta önemli bir yere sahip enerji alanında kullanılabilecek uygun gri model denklemleri elde edilmiştir.

Enerji sektörü baz alınarak yapılan uygulamamızda üç değişken ele alınmıştır. Bunlar;

- TERS (Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji),
- TECS (Ticari Sektörün Tükettiği Toplam Enerji),
- TEIS (Sanayi Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji).

TERS değişkeni için performans kriterleri RMSE, MAE, MSE değerleri sırasıyla $(\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu altında) 711201.2553, 721.3727193, 843.3274899 elde edilmiştir. Buna göre diğer modellerin performans kriterleri değerlerine göre küçük olması dolayısıyla önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir.

TECS değişkeni için performans kriterleri RMSE, MAE, MSE değerleri sırasıyla $(\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu altında) 266685.5521, 437.6890676, 516.4160649 elde edilmiştir. Buna göre diğer modellerin performans kriterleri değerlerine göre küçük olması dolayısıyla önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir.

TEIS değişkeni aynı kritere göre incelendiğinde performans ölçütleri kapsamında, 3802758.659, 1585.982762, 1950.066322 değerleri ile diğer modellerin değerlerinden küçük olması sebebi ile GVMCT modelinin performansının iyi olduğunu ortaya koymaktadır.

Zaman serileri analizi yapabilmemiz için veri kümesinin oldukça geniş olması gerekmektedir. Bu çalışmada amaçlanan temel hedef, az veri ile çalışan gri sistem baz alınarak bir model geliştirmek, sonrasında geliştirilen bu modelin ilgili

alana ilişkin sonuçların daha gerçekçi ve destekleyici olması açısından zaman serileri ile birlikte değerlendirerek en elverişli yöntemi belirlemektir. Bu nedenle bu tez çalışması kapsamında gerçekleştirilen uygulamalar sonucunda elde edilen denklemlerin performansı veri kümesi büyüklüğünün uygun olması nedeniyle zaman serisi analizi ile elde edilen denklemlerle kıyaslanabilmiş ve elde edilen denklemlerin performansının yukarıda belirtildiği üzere iyi olduğu görülmüştür. Yani kullanışlı bir gri model geliştirildiği ifade edilebilir. Dolayısıyla, bu uygulama alanında ve veri kümesi büyüklüğünün sınırlı olduğu durumlarda kullanılabilecek, iyi performans gösteren tahmin denklemi alternatifi bu çalışma ile ortaya konulmuştur.

Tüm bu detaylar çalışmanın önemini ortaya koymakta ve dolayısıyla verilen detaylar açısından konuya katkı sağlamaktadır.

KAYNAKÇA

- Akay, D. and Kulak, O.**, 2007, Evaluation of Product Design Concepts Using Grey-Fuzzy Information Axiom, *The Journal of Grey System*, 3: 221-234 pp.
- Akay, D. and Atak, M.**, 2007, Grey Prediction With Rolling Mechanism For Electricity Demand Forecasting of Turkey. *Energy*, 32:1670–1675 pp.
- Anderson, R.I.**, 1942, Distribution of Serial Correlation Coefficient, *Ann. Math. Statist.*, 13: 1-13 pp.
- Adhikari R. and Agrawal R.K.**, 2013, An Introductory Study on Time Series Modeling and Forecasting, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, 77 p.
- Aydemir, E., BEDİR, F. ve ÖZDEMİR, G.**, 2013, Gri Sistem Teorisi ve Uygulamaları: Bilimsel Yazın Taraması, *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 18(3):187-200 s.
- Adanacioğlu H.**, 2016, “Trend Analizi” <https://slideplayer.biz.tr/slide/2750197/>(Erişim tarihi: 30 Ekim 2021).
- Avci, S.**, 2018, Temizlik Kağıdı Sektöründe Gri Sistem Teorisi Temelli Stok Kontrol Uygulaması Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, 165 s (yayımlanmış).
- Başakın E.E., Özger M. ve Ünal N.E.**, 2019, “Gri Tahmin Yöntemi ile İstanbul Su Tüketiminin Modellenmesi”, *Politeknik Dergisi*, 22(3): 755-761 s.
- Boran, F.E.**, 2015, Forecasting Natural Gas Consumption in Turkey Using Grey Prediction, *Energy Sources, Part B: Economics, Planning, and Policy*, Ankara, 10(2):208-213 pp.

- Box, G.E.P. and Jenkins, G.M.,** 1976, Time Series Analysis Forecasting and Control, Revised Edition, Holden Day Inc., California, 575 p.
- Box, G.E.P. and Pierce, D.A.,** 1970, Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive Integrated Moving Average Time Series Models, *Journal of The American Statistical Association*, 65:332, 1509-1526 pp.
- Chang, C-J., Lin, J-Y. and Jin, P.,** 2017, A Grey Modeling Procedure Based On The Data Smoothing Index For Short-Term Manufacturing Demand Forecast, *Computational and Mathematical Organization Theory*, 23:409-422 pp.
- Chen, M.F. and Tzeng, G.H.,** 2004, Combining Grey Relation and TOPSIS Concepts for Selecting an Expatriate Host Country, *Mathematical and Computer Modeling*, 40(13):1473-1490 pp.
- Chen, T. and Wang, Y-C.,** 2012, Long-Term Load Forecasting By A Collaborative Fuzzy-Neural Approach. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems* 43(1):454-464 pp.
- Chiou, H.K., Tzeng, G.H., Cheng, C.K. and Liu G.S.,** 2004, Grey Prediction Model for Forecasting the Planning Material of Equipment Spare Parts in Navy of Taiwan, *Automation Congress*, 17: 315-320 pp.
- Çevik, O.,** 1999, Zaman Serileri Analizinde Box-Jenkins Yöntemi ve Turizm Verileri Üzerine Bir Uygulama Doktora Tezi. Kırıkkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Anabilim Dalı, 194 s (yayınlanmış).
- Dang, Y.G. and Liu, S.F.,** 2004, The GM Models That $X(N)$ Be Taken As Initial Value. *Kybernetes*; 33(2):247-254 pp.
- Deng J.L.,** 1982, Control Problems Of Grey Systems, *Syst Contr Lett*; 1(5):288-294 pp.

- Deng J.L.**, 1989, Introduction To Grey System Theory, *J Grey Syst*; 1(1):1-24 pp.
- Deng J.L.**, 2002, Basis On Grey System Theory. Wuhan. Huazhong University Of Science And Technology Press.
- Dönmez S.**, 2014, Sağlamcı Arıma Modelleri ve Yapay Sinir Ağlarının Karşılaştırmalı İncelenmesi: Turizm Örneği, Yüksek Lisans, Tezi Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 90 s. (yayımlanmış).
- Duru Ö.**, 2007, Zaman Serileri Analizinde ARIMA Modelleri ve Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi. İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalı, 103 s. (yayımlanmış).
- Engin T., Çengel Y.**, 2008, Mühendisler İçin Diferansiyel Denklemler. Sakarya Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü. Sakarya, 168 s.
- Erden, C. ve Ceviz, E.**, 2015, Gri Sistem Teorisi Kullanılarak Türkiye'nin Büyüme Oranı Faktörlerinin Analizi. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 19 (3): 361-369 s.
- Es, H.A.**, 2020, Gri Tahmin Modelleri ile Toplam Enerji Talep Tahmini: Türkiye Örneği. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. GÜFBED/GUSTIJ* 10 (3): 771-782 s.
- Feng S.J., Ma Y.D., Song Z.L. and Ying J.**, 2012, Forecasting the Energy Consumption of China by the Grey Prediction Model, *Energy Sources, Part B: Economics, Planning and Policy*, 7(4):376-389 pp.
- Gözcü O.**, 2009, Türkiye'de Hava Ulaşım Talebinin ARIMA Modelleri ile Tahminlenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, 91 s. (yayımlanmış).
- Güner, B., Taçyıldız, E.**, 2017 Türkiye'deki Trafik Kazalarının Yuvarlanma

GM(1,1) Mekanizması ile Tahmini, *Selçuk Üniversitesi Sosyal ve Teknik Araştırmalar Dergisi*. 13: 59-71 s.

Horasan E. B., 2011, Box-Jenkins Modelleri ile Bağımsız Denetim Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Anabilim Dalı Muhasebe Denetimi Bilim Dalı, 276 s. (yayınlanmış).

Hsu, C-I. and Wen, Y-H., 1998, Improved Grey Prediction Models for The Trans-Pacific Air Passenger Market, *Transportation Planning and Technology*, 22(2):87-107 pp.

Hsu, L.C., 2003, Applying The Grey Prediction Model To The Global Integrated Circuit Industry, *Technological Forecasting & Social Change*, 70(6): 563–574 pp.

Huang, T.L, Wen, K.L. and Deng J.L., 1997, The Documents of Grey System Theory, 2nd National Conference of Grey Theory and Applications, 1-32 pp.

Huang, K.Y. and Jane., C.J., 2009, A Hybrid Model for Stock Market Forecasting and Portfolio Selection Based on ARX, Grey System and RS Theories, *Expert Systems with Applications*, 36(3):5387-5392 pp.

Huang, C., Kuo, C., Kao Y., Lu H. and Chiang, P. 2014, Forecasting The Internet Of Things Market By Using The Grey Prediction Model Based Forecast Method, International Conference on Economic Management and Trade Cooperation, 337-345 pp.

Hu Y-C., 2017, A Genetic-Algorithm-Based Remnant Grey Prediction Model for Energy Demand Forecasting, PLoS ONE 12(10): pone0185478, 11 p.

Kadılar, C., 2005, SPSS Uygulamalı Zaman Serileri Analizine Giriş, Hacettepe Üniversitesi, Bizim Büro Basımevi, Ankara.380 s.

- Kaya E.**, 2019, Zaman Serileri Analizinde Box-Jenkins Yöntemi ile Savunma Sanayi Verileri Üzerine Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 194 s. (yayımlanmış).
- Kayacan, E., Ulutas, B. and Kaynak, O.**, 2010, Grey System Theory-Based Models in Time Series Prediction, *Expert Systems with Applications*, 37: 1784 –1789 pp.
- Kırçıl M.**, 2013, Box-Jenkins Yöntemi İle Konut Doğalgaz Talebinin Tahminlenmesi: İzmir İli Örneği. Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalı, 89 s. (yayımlanmış).
- Köksal, Aloba, Bilge.**, 1985, İstatistik Analiz Metodları, Genişletilmiş 3.Baskı, İstanbul.
- Köse E., Aplak H.S. ve Kabak, M.**, 2015, Yetersiz Veri Ortamında Tahminler İçin Örnek Bir Uygulama: Gri Tahmin Yöntemi. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 31(1) 82-88 s.
- Li, G.D., Yamaguchi, D. and Nagai, M.**, 2007, A Grey-Based Decision-Making Approach to the Supplier Selection Problem, *Mathematical and Computer Modeling*, 46: 573-581 pp.
- Lin, C.T. and Yang, S.Y.**, 1999, Selection of Home Mortgage Loans Using Grey Relational Analysis, *The Journal of Grey System*, 11(4): 359-368 pp.
- Lin, C.B., Su, S.F. and Hsu, Y.T.**, 2001, High-Precision Forecast Using Grey Models, *International Journal of Systems Science*, 32: 609-617 pp.
- Lin, C.T. and Hsu, P.F.**, 2002, Forecast of Non-Alcoholic Beverage Sales in Taiwan Using The Grey Theory. *Asia-Pacific Journal of Marketing and Logistics*, 14(4):3-12 pp.

- Lin Z, Zhang Q. and Liu H.**, 2012, Parameters Optimization of GM (1, 1) Model based on Artificial fish swarm algorithm. *Grey Syst Theor Appl*; 2(2):166-177 pp.
- Lin YH, Chiu CC, Lee PC, et al.**, 2012, Applying Fuzzy Grey Modification Model On İnflow Forecasting. *Engappl Artif intell*; 25(4):734-743 pp.
- Liu, Sifeng and Yi Lin.**, 2006, Grey Information, Springer, Berlin Heidelberg, 512 p.
- Liu, S. and Yi Lin.**, 2010, Grey Systems Theory and Applications, Springer - Verlag, Berlin Heidelberg, 391 p.
- Liu, S.M. and Zhang, G.Y.**, 2007, An Improved Grey Model For Corrosion Prediction of Tank Bottom, *Protection of Metals*, 43(4), 407-412 pp.
- Lu, I.J., Lewis C. and Lin, S.J.**, 2009, The forecast of motor vehicle, energy demand and CO2 emission from Taiwan's road transportation sector. *Energy Policy*, 37(8): 2952-2961 pp.
- Ma. and Liu Z.B.**, 2017, Application Of A Novel Time-Delayed Polynomial Grey Model To Predict The Natural Gas Consumption in China. *J Comput appl. Math*; 324:17-24 pp.
- Mann, S.P.**, 1995, Statistics For Business and Economics, Wiley, USA, 879 p.
- Mostafaei, H. and Kordnoori, S.**, 2012, Hybrid Grey Forecasting Model for Iran's Energy Consumption and Supply. *International Journal of Energy Economics and Policy*, 2(3):97-102 pp.
- Mohammadalrezaei, K.**, 2019, Gri Sistem Teorisi ile Tahminleme ve Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, T.C. İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa Lisansüstü Eğitim Enstitüsü. Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, 96 s. (yayınlanmış).

- Naylor, T.H., Seaks, T.H. and Wichern, D.W.**, 1972, Box Jenkins Methods: An Alternative to Econometrics Models, *International Statistical Review*, 40 (2): 123-137 pp.
- Newbold, P., Carlson, W.L. and Thorne, B.M.**, 2003, Statistics For Business and Economics, Pearson Education Inc., Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 792 p.
- Oğhan, S.**, 2010, Zaman Serisi Analiz Yöntemlerinin Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Zootečni Anabilim Dalı, 98 s. (yayımlanmış).
- Oruç, K. O. ve Çelik Eroğlu, Ş.**, 2017, Isparta İli İçin Doğal Gaz Talep Tahmini. *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 22(1):31-42 s.
- Özer Keçe, F., Ömürbek, V. ve Acar, D.**, 2016, Gri Temelli Maliyet Tahmini. *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi* 21(2):453-461 s.
- Özmen, A.**, 1986, Zaman Serisi Analizinde Box-Jenkins Yöntemi ve Banka Mevduat Tahmininde Uygulama Denemesi, Anadolu Üniversitesi Yayın No:207, Eskişehir, 110 s.
- Ömürbek, V., Akçakanat, Ö. ve Aksoy, E.**, 2018, Kamu Sermayeli Mevduat Bankalarının Karlılıklarının Gri Tahmin Yöntemi ile Değerlendirilmesi, *Journal of Social And Humanities Sciences Research*, 5(29): 3455-3468 s.
- Sevüktekin, M. ve Nargeleçekenler, M.**, 2007, Ekonometrik Zaman Serileri Analizi EViews Uygulamalı, Nobel Basımevi, Ankara. 494 s.
- Sevüktekin, M. ve Nargeleçekenler, M.**, 2010, Ekonometrik Zaman Serileri Analizi EViews Uygulamalı. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 592 s.

- Sevüktekin, M. ve Çınar M.**, 2014, Ekonometrik Zaman Serileri Analizi, EViews Uygulamalı. Dora Yayıncılık, Bursa, 667 s.
- Sharawei, S.**, 2005, Zaman Serilerinin Modern Analizine Giriş, Kral Abdulaziz Üniversitesi.
- Shen, X. and Lu, Z.**, 2014, The Application of Grey Theory Model in the Predication of Jiangsu Province's Electric Power Demand”, *AASRI Procedia*, 7:81-87 pp.
- Suo R.**, 2017, The Energy Consumption Prediction Model Based On Grey Markov Model. Xi'an University of Science and Technology. *International Journal of Academic Research and Reflection* Vol. 5, No. 5 : 41- 46 pp.
- Tan L.Z., Ouyang A.J., Peng X.Y., et al.**, 2015, A Fast And Stable Forecasting Model To Forecast Powerload. *Int J Pattern Recogn Artifintell*; 29(03):1559-1564 pp.
- Tien, T.L. ,** 2009, The Deterministic Grey Dynamic Model With Convolution Integral DGDMC(1, n) *Appl. Math. Modelling*, 33(8):3498-3510 pp.
- Torun N.**, 2015, Birim Kök Testlerinin Performanslarının Karşılaştırılması. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalı, 101 s. (yayımlanmış).
- Tsai, C. H., Chang, C.L., Chen, L.**, 2003, Applying Grey Relational Analysis to the Vendor Evaluation Model, *International Journal of The Computer, The Internet and Management*, 11(3):45-53 pp.
- Tüzen F. T.**, 2012, Türkiye Turizm Gelirinin Öngörüsünde Zaman Serilerinin Bileşenlerine Ayırıştırılarak Yapay Sinir Ağları ve Box-Jenkins Yöntemleri İle Karşılaştırmalı Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Anabilim Dalı, 155 s. (yayımlanmış).

- Wang, Chao-Hung and Li-Chang Hsu.,** 2008, Using Genetic Algorithms Grey Theory to Forecast High Technology Industrial Output, *Applied Mathematics and Computation*, 195(1):256-263 pp.
- Wang, Chao-Hung Hsu, Li-Chang, and Fang, Shyh-Rong** 2008, The Determinants of Internationalization: *Evidence From The Taiwan Hightechnology Industry. Technological Forecasting & Social Change* 75:1388–1395 pp.
- Wang, H. T. and Mu, S. R.,** 2010, Study On The Energy Consumption Structure And Carbon Emissions Trend In Beijing.
- Wang ZX, Li Q. and Pei LL.,** 2017, Grey Forecasting Method Of Quarterly Hydropower Production In China Based On A Data Grouping Approach. *Appl Math Model*; 51:302-316 pp.
- Wu, H.J. and Wen, K.L.,** 2001, Rolling Error in GM (1,1) Modeling, *Journal of Grey System*, 13: 77-80 pp.
- Xie N. M. and Liu S.F.,** 2009, Discrete Grey Forecasting Model and Its Optimization. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2):1173-1186 pp.
- Xueliang, P., Rurong, Z. and Shenglan L.,** 2004, Two-Dimensional Data Sequence and Its Grey Generation, *Systems, Man and Cybernetics*, 2004 IEEE International Conference, 3:2425-2430 pp.
- Xu, Huafeng, Liu, Bin. and Fang, Zhigeng.,** 2014, New Grey Prediction model and Its Application in Forecasting Land Subsidence in Coal Mine. *Natural Hazards*, 71:1181-1194 pp.
- Yao, Albert W. L.; Chi, S. C. and Chen, J. H.,** 2003, An Improved Grey-Based Approach For Electricity Demand Forecasting, *Electric Power Systems Research*, 67(3):217-224 pp.

- Yang, Y. and Xue, D.**, 2016, Continuous Fractional-Order Grey Model and Electricity Prediction Research Based on the Observation Error Feedback. *Energy*; 115:722-733 pp.
- Yeh, M.F. and Lu, H.C.**, 1996, A New Modified Grey Model, *Journal of Grey System*, 1(8): 209-216 pp.
- Yıldirtan, D.Ç.**, 2010, EvIEWS Uygulamalı Temel Ekonometri Makro Ekonomik Verilerle. Türkmen Kitabevi, İstanbul 292 s.
- Yılmaz, H. and Yılmaz, M.**, 2013, Forecasting CO2 Emissions For Turkey By Using The Grey Prediction Method. *Journal of Engineering and Natural Sciences Sigma* 31, 141-148 pp.
- Yin, M-S. and Tang, W.V.**, 2013 On The Fit And Forecasting Performance Of Grey Prediction Models For China's Labor Formation, *Mathematical and Computer Modelling*, 57 (3-4), 357-365 pp.
- Yu, X. and Lu Z.**, 2012, Prediction of Energy Consumption Based on Grey Model - GM (1,1), In: Lei J., Wang F.L., Deng H., Miao D. (eds) Artificial Intelligence and Computational Intelligence. AICI, Lecture Notes in Computer Science, 7530. Springer, Berlin, Heidelberg ,192-199 pp.
- Yu, M.C., Wang, C.N. and Ho, N. N. Y.**, 2016, Grey Forecasting Approach for the Sustainability Performance of Logistics Companies. *Sustainability*, 8, 866 s
- Yücesan, Z.**, 2017, Akran Grup Oyunlarının Gri Sistem Teorisi ile Modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik Ana Bilim Dalı, 72 s.
- Zeng, B., Li, C., Chen G. and Zhang, W.**, 2013, Verhulst Model of Interval Grey Number Based on Information Decomposing and Model Combination

Hindawi Publishing Corporation *Journal of Applied Mathematics* Volume,
Article ID 472065, 8 pages

Zhang, P., Ma, X. and She, K., 2019, Forecasting Japan's Solar Energy Consumption Using a Novel Incomplete Gamma Grey Model. *Sustainability*, 11: 5921 p.

Zhao, H. and Guo S., 2016, An Optimized Grey Model For Annual Power Load Forecasting. *Energy*, 107:272-286 pp.

Zhao, J., 2016, A Project Cost Forecasting Method Based on Grey System Theory. *Journal of the Italian Association of Chemical Engineering Chemical Engineering Transactions*, 51:367-372 pp.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma 21749 proje numarası ile Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederiz.

Bu çalışma süresince özellikle kıymetli görüşlerinden yararlandığım, sabır ve anlayışıyla daima yanımda olan ve yakın ilgisini esirgemeyen, daima beni çalışmaya teşvik eden, büyük katkıları ve emeği olan sayın danışmanım Doç. Dr. Sevcan DEMİR ATALAY'a, teşekkürü bir borç bilirim.

Bugünlere gelmemde emek ve çabasıyla her zaman yanımda olan en büyük destekçim, sevgisiyle beni büyüten, inancımı, motivasyonumu her zaman arttıran, maddi ve manevi daima yanımda olan ve şu an beni uzaklarda da olsa izlediğine inandığım kalbimdeki canım anneme ve bu süreçte her zaman sevgi ve sabrıyla yanımda olan, yolumu aydınlatan ve maddi manevi desteğini üzerimde hep hissettiğim sevgili canım ablam, kuzenim Elif Nur DAVASLIOĞLU' na teşekkür ederim.

26 / 11/ 2021

Esra MAVİGÖZ

ÖZGEÇMİŞ

2013 yılında Selma Yiğitalp Anadolu Lisesi' nde orta öğrenimini tamamladıktan hemen sonra Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde lisans öğrenimine başlamıştır. 2018 yılında da lisans öğrenimini tamamlayarak kendi alanında uzmanlık kazanmak üzere Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başvurmuş ve öğrenim görmeye hak kazanmıştır.



EKLER

E-Views programı çıktıları

Tablo 4.2.'de Belirtilen Hipotez Testi İçin E-Views Programı Çıktısı.

		t-Statistic	Prob.*	
Augmented Dickey-Fuller test statistic		1.408680	0.9592	
Test critical values:	1% level	-2.598907		
	5% level	-1.945596		
	10% level	-1.613719		
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	0.006666	0.004732	1.408680	0.1635
R-squared	-0.025531	Meandependent var		262.8116
Adjusted R-squared	-0.025531	S.D. dependent var		1124.173
S.E. of regression	1138.433	Akaikeinfocriterion		16.92708
Sumsquaredresid	88130031	Schwarzcriterion		16.95946
Loglikelihood	-582.9843	Hannan-Quinn criter.		16.93993
Durbin-Watson stat	1.795088			

Tablo 4.3.'teki Kesmeli ve Trendsiz Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı.

		t-Statistic	Prob.*	
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-2.658351	0.0866	
Test critical values:	1% level	-3.528515		
	5% level	-2.904198		
	10% level	-2.589562		
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.063090	0.023733	-2.658351	0.0098
C	2057.280	687.3729	2.992960	0.0039
R-squared	0.095412	Meandependent var		262.8116
Adjusted R-squared	0.081910	S.D. dependent var		1124.173
S.E. of regression	1077.149	Akaikeinfocriterion		16.83058
Sumsquaredresid	77736734	Schwarzcriterion		16.89534
Loglikelihood	-578.6550	Hannan-Quinn criter.		16.85627
F-statistic	7.066828	Durbin-Watson stat		1.897366
Prob(F-statistic)	0.009811			

Tablo 4.4.'teki Kesmeli ve Trendli Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı.

		t-Statistic	Prob.*	
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.943366	0.6211	
Test critical values:	1% level	-4.096614		
	5% level	-3.476275		
	10% level	-3.165610		
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.077481	0.039870	-1.943366	0.0562
C	2294.065	868.4387	2.641597	0.0103
@TREND("1949")	4.929673	10.93782	0.450700	0.6537
R-squared	0.098187	Meandependent var		262.8116
Adjusted R-squared	0.070859	S.D. dependent var		1124.173
S.E. of regression	1083.612	Akaikeinfocriterion		16.85649
Sumsquaredresid	77498216	Schwarzcriterion		16.95363
Loglikelihood	-578.5490	Hannan-Quinncrier.		16.89503
F-statistic	3.592954	Durbin-Watson stat		1.876033
Prob(F-statistic)	0.033025			

Tablo 4.5.'teki Serinin Bir Adım Farkı Alınarak Yapılan Birim Kök Testi
Sonuçları E-Views Program Çıktısı.

			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-7.333292	0.0000
Test critical values:	1% level	-2.599413		
	5% level	-1.945669		
	10% level	-1.613677		
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(SER01(-1))	-0.882618	0.120358	-7.333292	0.0000
R-squared	0.445242	Meandependent var		-8.426471
Adjusted R-squared	0.445242	S.D. dependent var		1531.439
S.E. of regression	1140.647	Akaikeinfocriterion		16.93118
Sumsquaredresid	87172105	Schwarzcriterion		16.96382
Loglikelihood	-574.6600	Hannan-Quinn criter.		16.94411
Durbin-Watson stat	2.006764			

Tablo 4.6.'daki Birinci Farklar İçin Kesmeli ve Trendsiz Model Kalıbı İçin E-Views Program Çıktısı.

			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-7.592394	0.0000
Test critical values:	1% level		-3.530030	
	5% level		-2.904848	
	10% level		-2.589907	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(SER01(-1))	-0.925813	0.121940	-7.592394	0.0000
C	225.6545	140.1419	1.610186	0.1121
R-squared	0.466211	Meandependent var		-8.426471
Adjusted R-squared	0.458124	S.D. dependent var		1531.439
S.E. of regression	1127.327	Akaikeinfocriterion		16.92206
Sumsquaredresid	83877132	Schwarzcriterion		16.98734
Loglikelihood	-573.3499	Hannan-Quinncrier.		16.94792
F-statistic	57.64444	Durbin-Watson stat		2.001505
Prob(F-statistic)	0.000000			

Tablo 4.7.'deki Birinci Farklar İçin Kesmeli ve Trendli Model Kalıbına İlişkin Elde Edilen E-Views Program Çıktısı.

		t-Statistic	Prob.*	
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-7.796721	0.0000	
Test critical values:	1% level	-4.098741		
	5% level	-3.477275		
	10% level	-3.166190		
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(SER01(-1))	-0.969673	0.124369	-7.796721	0.0000
C	612.2402	294.4383	2.079350	0.0415
@TREND ("1949")	-10.57736	7.103833	-1.488965	0.1413
R-squared	0.483817	Meandependent var	-8.426471	
Adjusted R-squared	0.467935	S.D. dependent var	1531.439	
S.E. of regression	1117.075	Akaikeinfocriterion	16.91793	
Sumsquaredresid	81110616	Schwarzcriterion	17.01585	
Loglikelihood	-572.2096	Hannan-Quinncrier.	16.95673	
F-statistic	30.46220	Durbin-Watson stat	1.988838	
Prob(F-statistic)	0.000000			