

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

EULER POLİNOMLARININ MATRİS
ÖZELLİKLERİ VE FONKSİYONEL
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULAMALARI

DENİZ ELMACI

Danışman: Prof. Dr. Fadime DAL

II. Danışman: Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Doktora Programı

İzmir

2022

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum "**Euler Polinomlarının Matris Özellikleri ve Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

24/01/2022

Deniz ELMACI

ÖZET

**EULER POLİNOMLARININ MATRİS ÖZELLİKLERİ VE
FONKSİYONEL İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULAMALARI**

ELMACI, Deniz

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fadime DAL

II. Danışman: Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

2022, 203 sayfa

Diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin birçok uygulamalı matematiksel bilimde önemli rol oynadıkları bilinmektedir. Bu bilimlerden bazıları; kuantum mekaniği, elektrodinamik, elektronik sistemler, kontrol problemleri, olasılık, sayılar teorisi, mekanik, astronomi, biyoloji, ekonomi, elektrostatik ve endüstridir. Bu tip denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek zor olduğu için sayısal yöntemlere gerek duyulmaktadır.

Bu tez çalışmasında, fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için, standart sıralama noktaları ile beraber diferansiyel ve integrasyonun işlemsel matrislerine dayalı bir matris yöntemi sunulmuştur. Bu amaç için, Euler polinomlarının matris formları hesaplanıp kullanılarak, fonksiyonel integro-diferansiyel denklem, uygun sayısal yöntemlerle çözülebilen, bilinmeyen Euler katsayılı iki farklı lineer cebirsel denklemler sistemine indirgenmiştir. Böylece problemin yaklaşık çözümünün, “Matris-Sıralama Yöntemi” kullanılarak, Euler polinomları cinsinden elde edilmesi hedeflenmiştir. Ayrıca sunulan yöntemin tutarlılığı, her bir problem tipine ait sayısal örneklerin yaklaşık çözümlerinin rezidüel (kalan) fonksiyona dayalı hata analizi yapıp, grafik ve tablolarla gösterilmiştir.

Tezin ilk bölümünde; diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin ortaya çıkışları ve literatürde bu denklemlerin çözümleri için ortaya atılan çözüm yöntemleri hakkında kısa bilgi verilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümde; Euler polinomlarını tanıtarak, temel matris bağıntıları kurulmuştur. Dördüncü bölümde; hata analizi için rezidüel fonksiyon tanımlanıp, hatanın yakınsaklığı gösterilmeye çalışılmıştır.

Tezin beşinci bölümünde; lineer (doğrusal) integro-diferansiyel denklem tiplerinden olan; Fredholm, Volterra, Volterra-Fredholm, gecikmeli, değişken gecikmeli ve denklem sistemlerinin çözümleri Euler matris yöntemiyle verilir, çeşitli örneklerle önerilen çözümün verimliliği ve uygulanabilirliği gösterilmiştir. Altıncı bölümde ise; lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlerin çözümü, lineer integro-diferansiyel denklemlerdeki sınıflandırmalar yapılarak verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

Tezin son bölümünde, elde edilen tüm sonuçlar ele alınmış ve yöntemin geçerliliği ve uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Euler polinomları, Matris sıralama yöntemi, İntegro-diferansiyel denklem ve sistemleri, Rezidüel hata analizi.



ABSTRACT

MATRIX PROPERTIES OF EULER POLYNOMIALS AND APPLICATIONS OF FUNCTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

ELMACI, Deniz

PhD in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Fadime DAL

Co-Supervisor: Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

2022, 203 pages

It is known that differential, integral and integro-differential equations play an important role in many applied mathematical sciences. Some of these sciences are; quantum mechanics, electrodynamics, electronic systems, control problems, probability, number theory, mechanics, astronomy, biology, economics, electrostatics and industry. Due to the difficulty obtaining analytical solutions of such equations, numerical methods are crucial.

In this thesis, a matrix method, based on operational matrices of differential and integration with standard collocation points, is presented to find approximate solutions of functional integro-differential equations. For this purpose, by calculating and using the matrix forms of Euler polynomials, the functional integro-differential equation is reduced to two different systems of linear algebraic equations with unknown Euler coefficients, which can be solved by suitable numerical methods. Thus, it is aimed to obtain the approximate solution of the problem in terms of Euler polynomials by using the "Matrix-Collocation Method". In addition, the consistency of the presented method is shown in graphs and tables by performing an error analysis based on the residual function of the approximate solutions of numerical examples of each problem type.

In the first part of the thesis, a brief information is given about the emergence of differential, integral and integro-differential equations and the solution methods put forward for the solutions of these equations in the literature. In the second and third sections, by Euler polynomials are

introduced and basic matrix relations are established. In the fourth chapter; the residual function was defined and the convergence of the error was tried to be shown for the error analysis.

In the fifth chapter, the solutions of different types of linear integro-differential equations, namely Fredholm, Volterra, Volterra-Fredholm, delayed, variable delay and their systems are given by using the Euler matrix method. The efficiency and applicability of the proposed solutions are shown with various examples. In the sixth section; the solution of nonlinear integro-differential equations is given by making classifications in linear integro-differential equations and supported with examples.

In the last chapter of the thesis, all the results obtained are discussed and the validity and applicability of the method are shown.

Keywords: Euler polynomials, Matrix collocation method, Integro-differential equations and their systems, Residual error analysis.

ÖNSÖZ

Bu tezin başlangıcından tamamlanıncaya kadar geçen süreçte karşılaştığım birçok zorlukta bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren değerli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Fadime DAL ve Sayın Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL'e, tecrübeleri ile beni aydınlatıp ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER ve Sayın Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI'ya, öğrenim hayatım boyunca beni destekleyen, hep yanımda olan ailem ve arkadaşlarım Sayın Doç. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR ve Doç. Dr. Çağrı Ceylan KOÇAK'a, tez yazım sürecinde benden desteğini esirgemeyen eşim Merve ELMACI'ya yürekten teşekkür ederim.

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından "2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında desteklenmiştir.

İZMİR

24/01/2022

Deniz ELMACI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇ KAPAK	ii
KABUL ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xxvii
1 GİRİŞ	1
2 GENEL BİLGİLER	7
2.1 EULER SAYILARI VE POLİNOMLARI	7
3 EULER POLİNOMLARININ TEMEL MATRİS ÖZELLİKLERİ	10
4 HATA ANALİZİ	13
5 LİNEER İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN EULER MATRİS SIRALAMA YÖNTEMİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ	14
5.1 Lineer Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemi	14
5.1.1 Model Problemler	16
5.2 Lineer Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemi	29
5.2.1 Model Problemler	30
5.3 Lineer Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemi	55
5.3.1 Model Problemler	56
5.4 Gecikmeli ve Değişken Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemler	66

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5.4.1 Model Problemler	68
5.5 Lineer Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemleri	97
5.5.1 Model Problemler	101
6 LİNEER OLMAYAN İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM- LERİN EULER MATRİS SIRALAMA YÖNTEMİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ	115
6.1 Lineer Olmayan Terim İçeren Fredholm İntegro-Diferansiyel Denk- lemi	115
6.1.1 Model Problemler	118
6.2 Lineer Olmayan Terim İçeren Volterra İntegro-Diferansiyel Denk- lemi	128
6.2.1 Model Problemler	130
6.3 Lineer Olmayan Terim İçeren Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemleri	149
6.3.1 Model Problemler	152
6.4 Lineer Olmayan Terim İçeren Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemleri	160
6.4.1 Model Problemler	165
7 SONUÇ	186
KAYNAKLAR DİZİNİ	188
TEŞEKKÜR	200
ÖZGEÇMİŞ	201

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Euler Polinomlarının Grafiği	9
5.1 Problem 5.1.2'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	21
5.2 Problem 5.1.2'nin $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği. . . .	21
5.3 Problem 5.1.2'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	22
5.4 Problem 5.1.2'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	23
5.5 Problem 5.1.3'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	25
5.6 Problem 5.1.3'ün $4 \leq N \leq 11$ için mutlak hatalarının grafiği. . . .	25
5.7 Problem 5.1.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	26
5.8 Problem 5.1.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tah- mini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	26
5.9 Problem 5.1.4'ün $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği. . . .	28
5.10 Problem 5.2.1'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	33
5.11 Problem 5.2.2'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	36
5.12 Problem 5.2.2'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	37
5.13 Problem 5.2.2'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	39
5.14 Problem 5.2.3'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	42

5.15 Problem 5.2.3'ün $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.	42
5.16 Problem 5.2.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	42
5.17 Problem 5.2.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	43
5.18 Problem 5.2.4'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	45
5.19 Problem 5.2.4'ün $3 \leq N \leq 6$ için mutlak hatalarının grafiği.	45
5.20 Problem 5.2.4'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	45
5.21 Problem 5.2.4'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	46
5.22 Problem 5.2.5'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	48
5.23 Problem 5.2.5'in $3 \leq N \leq 7$ için mutlak hatalarının grafiği.	48
5.24 Problem 5.2.5'in rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	48
5.25 Problem 5.2.5'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	49
5.26 Problem 5.2.6'nın tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	51
5.27 Problem 5.2.6'nın $5 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.	51
5.28 Problem 5.2.6'nın rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	51
5.29 Problem 5.2.6'nın yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	52
5.30 Problem 5.2.7'nin $5 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.	54
5.31 Problem 5.2.7'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	54
5.32 Problem 5.3.1'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	58
5.33 Problem 5.3.2'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	61

5.34	Problem 5.3.2'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	61
5.35	Problem 5.3.3'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	64
5.36	Problem 5.3.3'ün $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.	64
5.37	Problem 5.3.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	64
5.38	Problem 5.3.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	65
5.39	Problem 5.4.2'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	71
5.40	Problem 5.4.2'nin $2 \leq N \leq 7$ için mutlak hatalarının grafiği.	72
5.41	Problem 5.4.2'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	72
5.42	Problem 5.4.2'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	73
5.43	Problem 5.4.3'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	74
5.44	Problem 5.4.3'ün $4 \leq N \leq 9$ için mutlak hatalarının grafiği.	75
5.45	Problem 5.4.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	75
5.46	Problem 5.4.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	76
5.47	Problem 5.4.4'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	77
5.48	Problem 5.4.4'ün $4 \leq N \leq 13$ için mutlak hatalarının grafiği.	78
5.49	Problem 5.4.4'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	78
5.50	Problem 5.4.5'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	80
5.51	Problem 5.4.5'in $4 \leq N \leq 6$ için mutlak hatalarının grafiği.	80
5.52	Problem 5.4.5'in rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	81

5.53	Problem 5.4.5'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	82
5.54	Problem 5.4.7'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	84
5.55	Problem 5.4.7'nin mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.	84
5.56	Problem 5.4.7'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	85
5.57	Problem 5.4.7'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	85
5.58	Problem 5.4.9'un tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	88
5.59	Problem 5.4.9'un mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.	88
5.60	Problem 5.4.9'un rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	89
5.61	Problem 5.4.9'un yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	89
5.62	Problem 5.4.10'un tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	91
5.63	Problem 5.4.10'nun mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.	92
5.64	Problem 5.4.10'un rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	92
5.65	Problem 5.4.10'un yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	93
5.66	Problem 5.4.11'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.	95
5.67	Problem 5.4.11'in mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.	95
5.68	Problem 5.4.11'in rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	95
5.69	Problem 5.4.11'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	96

5.70	Problem 5.5.3'te $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ 'nin mutlak hatalarının grafiği.	106
5.71	Problem 5.5.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	107
5.72	Problem 5.5.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği.	108
5.73	Problem 5.5.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması grafiği.	108
5.74	Problem 5.5.4'te $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ 'nin mutlak hata grafiği.	110
5.75	Problem 5.5.4'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	111
5.76	Problem 5.5.5'te $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ 'nin mutlak hata grafiği.	114
5.77	Problem 5.5.5'in rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.	114
6.1	Problem 6.1.2'nin $2 \leq N \leq 9$ için mutlak hatalarının grafiği.	121
6.2	Problem 6.1.3'ün $2 \leq N \leq 9$ için mutlak hatalarının grafiği.	123
6.3	Problem 6.1.3'ün $2 \leq N \leq 9$ için rezidüel hatalarının grafiği.	123
6.4	Problem 6.1.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	124
6.5	Problem 6.1.4'ün $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.	126
6.6	Problem 6.1.4'ün $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.	126
6.7	Problem 6.1.4'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	127
6.8	Problem 6.2.2'nin tam çözüm $y(t) = e^t$ ve $N = 2, 3, 4, 5, 6$ için yaklaşık çözümlerin grafiği.	132
6.9	Problem 6.2.2'nin $2 \leq N \leq 6$ için rezidüel hatalarının grafiği.	132
6.10	Problem 6.2.2'nin $2 \leq N \leq 6$ için rezidüel hatalarının grafiği.	133

6.11 Problem 6.2.3'ün tam çözüm $y(t) = e^{-t}$ ve $N = 2, 3, 4, 5, 6$ için	
yaklaşık çözümlerin grafiği.	134
6.12 Problem 6.2.4'ün $2 \leq N \leq 10$ için rezidüel hatalarının grafiği. . . .	137
6.13 Problem 6.2.5'in $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.	138
6.14 Problem 6.2.5'in $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.	139
6.15 Problem 6.2.5'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini	
hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği. . .	140
6.16 Problem 6.2.6'nın $4 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.	141
6.17 Problem 6.2.6'nın $4 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.	142
6.18 Problem 6.2.6'nın yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a)	
tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması	
grafiği.	143
6.19 Problem 6.2.7'nin $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.	144
6.20 Problem 6.2.7'nin $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.	145
6.21 Problem 6.2.7'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a)	
tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması	
grafiği.	145
6.22 Problem 6.2.8'in $2 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.	147
6.23 Problem 6.2.8'in $2 \leq N \leq 10$ için rezidüel hatalarının grafiği.	148
6.24 Problem 6.2.8'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini	
hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği. . .	148
6.25 Problem 6.3.2'nin $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.	155
6.26 Problem 6.3.2'nin $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.	156
6.27 Problem 6.3.2'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a)	
tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması	
grafiği.	157

6.28	Problem 6.3.3'ün $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.	158
6.29	Problem 6.3.3'ün $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.	159
6.30	Problem 6.3.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.	160
6.31	Problem 6.4.1'in $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.	170
6.32	Problem 6.4.1'in $3 \leq N \leq 10$ için rezidüel hatalarının grafiği.	170
6.33	Problem 6.4.1'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile tahmini hataların karşılaştırılması grafiği.	171
6.34	Problem 6.4.1'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması grafiği. .	171
6.35	Problem 6.4.2'nin $3 \leq N \leq 6$ için mutlak hatalarının grafiği.	173
6.36	Problem 6.4.3'ün $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.	175
6.37	Problem 6.4.3'ün $3 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.	177
6.38	Problem 6.4.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile tahmini hataların karşılaştırılması grafiği.	178
6.39	Problem 6.4.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması grafiği.	178
6.40	Problem 6.4.4'ün $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.	181
6.41	Problem 6.4.4'ün $3 \leq N \leq 10$ için rezidüel hatalarının grafiği.	182
6.42	Problem 6.4.5'in $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.	184
6.43	Problem 6.4.5'in $3 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.	185

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge

Sayfa

5.1	Problem 5.1.2'nin $N = 3$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	20
5.2	Problem 5.1.2'nin $N = 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	20
5.3	Problem 5.1.2'nin $N = 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	21
5.4	Problem 5.1.4'ün $N = 2, N = 4$ ve $N = 6$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	28
5.5	Problem 5.1.4'ün $N = 8$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	28
5.6	Problem 5.2.1'in $N = 3, 7, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	33
5.7	Problem 5.2.2'nin $N = 3, 4$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	36
5.8	Problem 5.2.2'nin $N = 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	37
5.9	Problem 5.2.2'nin $N = 9, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	38
5.10	Problem 5.2.3'ün $N = 3, 6, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	41

5.11 Problem 5.2.4'ün $N = 3, 6$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	44
5.12 Problem 5.2.5'in $N = 3, 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	47
5.13 Problem 5.2.6'nın $N = 5, 7, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	50
5.14 Problem 5.2.7'nin $N = 5, 8, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	53
5.15 Problem 5.3.2'nin $N = 4, 8, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	60
5.16 Problem 5.3.3'ün $N = 3, 6, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	63
5.17 Problem 5.4.2'nin $N = 2, 3, 7$ için Euler yöntemiyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	71
5.18 Problem 5.4.3'ün $N = 4, 6, 9$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	74
5.19 Problem 5.4.4'ün $N = 4, 9, 13$ için Euler yöntemiyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	77
5.20 Problem 5.4.5'in $N = 4, 5, 6$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	80
5.21 Problem 5.4.7'nin $N = 4, 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	84
5.22 Problem 5.4.9'un $N = 4$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen mutlak hatalarının karşılaştırılması	87
5.23 Problem 5.4.9'un $N = 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen mutlak hatalarının karşılaştırılması	88

5.24	Problem 5.4.10'un çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümler ile tam çözümün bazı noktalardaki değerleri	91
5.25	Problem 5.4.10'un $N = 7$ ve $N = 8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hatalarının karşılaştırılması	91
5.26	Problem 5.4.11'in $N = 5$ ve $N = 8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hatalarının karşılaştırılması	94
5.27	Problem 5.5.3'te $y_1(t)$ 'nin $N = 7$ ve $N = 10$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması	106
5.28	Problem 5.5.3'te $y_2(t)$ 'nin $N = 7$ ve $N = 10$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması	106
5.29	Problem 5.5.4'te $y_1(t)$ 'nin $N = 3$ ve $N = 5$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması	110
5.30	Problem 5.5.4'te $y_2(t)$ 'nin $N = 3$ ve $N = 5$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması	110
5.31	Problem 5.5.5'te $y_1(t)$ 'nin $N = 8$ için mutlak hatalarının karşılaştı- rılması	112
5.32	Problem 5.5.5'te $y_2(t)$ 'nin $N = 8$ için mutlak hatalarının karşılaştı- rılması	113
5.33	Problem 5.5.5'te $y_3(t)$ 'nin $N = 8$ için mutlak hatalarının karşılaştı- rılması	113
6.1	Problem 6.1.1'in farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	119
6.2	Problem 6.1.2'nin farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuç- ların karşılaştırılması	121
6.3	Problem 6.1.3'ün farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçla- rın karşılaştırılması	124

6.4	Problem 6.1.4'te N 'in farklı değerleri için Euler Sıralama Yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	126
6.5	Problem 6.2.2'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması. . .	132
6.6	Problem 6.2.3'ün tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması. . .	134
6.7	Problem 6.2.4'ün farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	137
6.8	Problem 6.2.5'in farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	139
6.9	Problem 6.2.6'nın N 'in farklı değerleri için Euler Sıralama Yöntemi ve (MHPM) ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	142
6.10	Problem 6.2.7'nin N 'in farklı değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	144
6.11	Problem 6.2.8'in N 'in farklı değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	147
6.12	Problem 6.3.1'in farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	154
6.13	Problem 6.3.2'nin farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	156
6.14	Problem 6.3.3'ün farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	159
6.15	Problem 6.4.1'de $y_1(t)$ 'nin farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	169

6.16 Problem 6.4.1'de $y_2(t)$ 'nin farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen	
çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	170
6.17 Problem 6.4.2'de $y_1(t)$ 'nin $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için mutlak	
hatalarının karşılaştırılması.	173
6.18 Problem 6.4.2'de $y_2(t)$ 'nin $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için mutlak	
hatalarının karşılaştırılması.	174
6.19 Problem 6.4.3'te $y_1(t)$ 'nin $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının	
karşılaştırılması	176
6.20 Problem 6.4.3'te $y_2(t)$ 'nin $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının	
karşılaştırılması.	176
6.21 Problem 6.4.4'te $y_1(t)$ 'nin $5 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının	
karşılaştırılması.	180
6.22 Problem 6.4.4'te $y_2(t)$ 'nin $5 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının	
karşılaştırılması.	181
6.23 Problem 6.4.5'te $y_1(t)$ 'nin $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının	
karşılaştırılması.	183
6.24 Problem 6.4.5'te $y_2(t)$ 'nin $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının	
karşılaştırılması.	184

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$E_n(t)$	Euler polinomları
ϵ_n	Euler sayıları
$R_N(t)$	Rezidüel hata fonksiyonu
$y_N(t)$	Yaklaşık çözüm
$y(t)$	Tam çözüm
t_i	Sıralama noktaları
$ e_n(t) $	Gerçek mutlak hata fonksiyonu
FIDD	Fredholm integro-diferansiyel denklemi
VIDD	Volterra integro-diferansiyel denklemi
VFIDD	Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi
ADM	Adomian Ayrıştırma Yöntemi
VIM	Varyasyonel İterasyon Yöntemi
HPM	Homotopi Perturbasyon Yöntemi
LGCM	Legendre-Gauss Sıralama Yöntemi
LCM	Laguerre Sıralama Yöntemi
LMCM	Lucas-Matris Sıralama Yöntemi
SCM	Standart Sıralama Yöntemi
CGLCM	Chebyshev Gauss Lobatto Sıralama Yöntemi
FDM	Sonlu Farklar Yöntemi
MHPM	Modifiye Homotopi Perturbasyon Yöntemi
MVIM	Modifiye Varyasyonel İterasyon Yöntemi
DMT	Üçgen fonksiyonları kullanan Direkt Yöntem
BPFs	Block-pulse Fonksiyon Yöntemi

1 GİRİŞ

Bir sistemi meydana getiren bileşenler arasındaki ilişkilerin matematiksel yolla tarif edilmesi, matematiksel modeller yardımıyla olur. Doğa bilimleri ve mühendislik problemlerinin yanı sıra; iktisat, sosyoloji, siyaset bilimi gibi sosyal bilim problemleri için de matematiksel modeller oluşturulmuştur. Uçları sabit iki nokta arasında gerilmiş olan bir yayın zamana bağlı hareketi, bir bakteri popülasyonunun zamana göre değişimi, belirli bir sıvı yoğunluğundan başka bir sıvı yoğunluğuna geçen cismin durumu, matematiksel modellere verilebilecek örneklerdir. Matematiksel modeller, içinde çözüm fonksiyonunun zaman ya da konuma bağlı değişimini içeren dinamik modeller olduklarından literatürde önemli bir yer tutmaktadırlar. Eğer söz konusu değişim; hava sıcaklığı, parçacık hızı, ya da elektrik alanı gibi sürekli bir özellik taşıyorsa, bu değişimi ifade etmek için diferansiyel ve integral denklemlere ihtiyaç duyulur. Matematğin temel araştırma konularından biri de diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin hesaplanmasıdır. Doğrusal diferansiyel denklemler teorisinin yaklaşık iki yüz elli yıllık bir geçmişi vardır. Ancak bu teori, denklemin tam çözümlerine ulaşmayı her zaman mümkün kılmamaktadır. İntegral denklemler teorisi ve doğrusal olmayan denklemlerin çözüm yöntemlerine ilişkin bilinenler ise çok daha azdır. Özetle, gerçek dünyada karşımıza çıkan problemlerin matematiksel modeli olan diferansiyel ve integral denklemlerin tam çözümlerini elde etmek genellikle mümkün değildir. Diğer taraftan bu modeller oluşturulurken duyulan başlıca kaygı, modelin gerçeğe en yakın şekilde olmasıdır. Bu gerçeğe yakınlık da, modelin yaklaşık olarak çözülmesi sonucunda elde edilen tahminlerin deneysel verilerle uyumu ile ölçülür. Çözümlerin sayısal yöntemler aracılığıyla yaklaşık olarak elde edilmesi çok kullanılan bir uygulamadır. Sayısal yöntemlerin geliştirilmesi, uygulamalı matematiğin başlıca araştırma konuları arasına girmektedir. Sürekli fonksiyonlar cinsinden ifade edilen sonsuz bir doğaya sahip bir problemi, sonlu bir probleme dönüştürme sayısal yöntemlerin işidir. Ayırıklaştırma olarak adlandırılan bu dönüştürme işlemi sırasında izlenecek yol, sayısal yöntemi diğerinden ayıran en temel unsurdur.

Örneğin; bilinen en eski sayısal yöntemlerden olan Euler yöntemi, ayırıklaştırmayı birinci mertebeden bir diferansiyel denklemi bir fark denklemi olarak görerek yapar. Zamanla bazı matematik disiplinlerinde kaydedilen ilerlemeler,

bu konuda daha dolaylı ya da karmaşık yaklaşımları beraberinde getirmiştir. Bu bağlamda, özellikle Yaklaşım Teorisi'nin gelişimi, sayısal yöntemlerle ilgilenen araştırmacılara yeni olanaklar sağlamıştır. Örneğin; kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı sürekli bir fonksiyonun polinomlar aracılığıyla istenen yaklaşıklıkta temsil edilebileceğini ifade eden Weierstrass Yaklaşım Teoremi, polinomların yaklaşık çözümler olarak kullanılabilmesi için teorik bir dayanak hazırlamıştır. Böylece yeni matematiksel buluşlar, sayısal yöntemlere ilişkin literatürün zenginleşmesini sağlamaktadırlar.

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bu tanım yetersiz kalmaktadır. İntegral denklemlerin bütün türlerini kapsayacak teoriyi kurmak olanaksızdır. Bu nedenle, birbirinden ayrı nitelikteki integral denklemleri tek tek incelemek gerekmektedir (Tulga, 2006). Böylece geniş bir araştırma sahası açılmış olmakta ve konu bu oranda dağınık bir inceleme tarzı göstermektedir. İntegral denklemlerle yapılan ilk çalışmalar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı, bunun sonucunda da bir takım sonuçların alınmaya başlandığı izlenmektedir. ABEL'in 1823 yılında bir mekanik problemi incelediği sırada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak İntegral Denklem deyimini Du Bois REYMOND'un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır (Hardy, 1910). İntegral denklemlerle ilgili F. G. Tricomi (Tricomi, 1985), I. G. Petrovsky (Petrovskii, 1996) ve V. W. Lovitt (Lovitt, 2014)'e ait kaynaklar mevcuttur. Bilindiği gibi tabiat kanunları diferansiyel denklemler yardımı ile ifade edilebilirler. Bundan, yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli tabiat kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir. Belki de bu; büyük düşünür Albert Einstein'ın "Bu tabiatın en anlaşılabilir yönü anlaşılabilir olmasıdır" sözünün altında yatan gerçeklerden bir tanesidir (Bayın, 2004). İntegral denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiklerinden, global (evrensel) denklemlerdir. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi çok daha zor denklemlerdir. Diferansiyel denklemlerin

önemli bir özelliği, tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemeleridir. Onlara sınır şartlarının da ilave edilmesi gerekir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. İlave şartlara gerek yoktur. Ancak, sınır şartları da uzayın bütününde onların ilgilenilen bölgeye etkisinin dolaylı yoldan denklemlere dahil edilmesi olarak yorumlanabileceğinden, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilişki olması da doğaldır. Bu çalışmada görülebileceği gibi diferansiyel denklemler temelde integral denklemler olarak da ifade edilebilirler. Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemezler; ancak onun yerine birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların lineer birleşiminden oluşan integro-diferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilirler. Bu tip denklem sistemleri özellikle parçalı olanlar, birçok fizik ve mühendislik dalında ortaya çıkmaktadır. Örneğin, diferansiyel denklem sistemleri; Elastikiyet teorisi (Ezechiáš, 1988), Dinamik (Kant et al., 1990), Akışkanlar mekaniği (Agarwal et al., 1990), Devre problemleri (Zimmerman, 1996), Salınım problemleri (Pesterev and Bergman, 1997), Kuantum dinamiği (Greenspan, 1998) gibi konularda, integral ve integro-diferansiyel denklem sistemleri ise Elektromanyetik teori (Bloom, 1979), Termoelastikiyet (Kopeikin and Shishkin, 1984), Biyoloji (Holmâker, 1993), Mekanik (Yue and Selvadurai, 1995; Abedzadeh and Pak, 1995), Dalgaların kırınımı (Büyükaksoy and Alkumru, 1995) gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır. Sistemlerin çözümü için şu ana kadar sunulmuş genel bir yöntem yoktur. Bu nedenle fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan sistemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasının faydalı olacağı düşünülmüştür.

Bu tip denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek zor olduğu için sayısal yöntemlere gerek duyulmaktadır. Literatürde kullanılan bazı yöntemler:

- Fizikteki sınır problemlerinin çözümü için Adomian G. tarafından ortaya atılan Adomian Ayrıştırma Yöntemi (ADM) (Adomian, 1988, 2013), özellikle gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır (Evans and Raslan, 2005; Dehghan and Shakeri, 2008).

- Volterra integral denklemlerinin çözümü için Sezer M. tarafından ortaya atılan Taylor Polinom ve Sıralama Yöntemi (Sezer, 1994), yine Sezer ve ekibi tarafından yüksek mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denk-

lemelerin çözümünde (Akyüz Daşcıoğlu and Sezer, 2007), yüksek mertebeden lineer pantograf denklemlerin çözümünde (Gülsu and Sezer, 2011), yüksek mertebeden lineer olmayan Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde (Maleknejad and Mahmoudi, 2003) ve değişken gecikmelere sahip Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır (Baykuş Savaşaneril and Sezer, 2017).

- Cheon, G. S. nin Bernoulli ve Euler polinomları üzerine çalışması (Cheon, 2003) sonucu elde edilen Bernoulli Polinom Yaklaşım Yöntemi, lineer Fredholm integro-diferansiyel ve fark denklemlerin çözümünde (Erdem et al., 2013), ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde ve yakınsaklık analizinde (Tohidi et al., 2013), yüksek mertebeden genelleştirilmiş pantograf denklemlerinin çözümünde (Akyüz Daşcıoğlu and Sezer, 2015), ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılmıştır (Erdem Biçer and Sezer, 2019).

- Maleknejad ve ekibi lineer Fredholm integral denklemlerinin çözümü için Taylor ve Block-pulse Fonksiyonlar Yaklaşım Yöntemleri'ni kullanmışlardır (Maleknejad and Mahmoudi, 2004).

- Li, D. ve Liu, M. Z. çalışmasında çoklu pantograf gecikmeli denklemi için Runge-Kutta Yöntemi'ni önermişlerdir (Li and Liu, 2005).

- Dai, C. ve Zhang, J. diferansiyel ve fark denklemlerinin çözümü için Jacobian Eliptik Fonksiyonlar Yöntemi'ni uygulamışlardır (Dai and Zhang, 2006).

- Çelik, İ. çalışmasında, Chebyshev serileri için Sıralama Yöntemi (Çelik, 2006) sunmuş, Gülsu, M. ekibi, Sedaghat, S. ekibi ve Heydari, M. ekibi gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümünde Chebyshev Polinomları'nı kullanmışlardır (Gülsu et al., 2012; Sedaghat et al., 2012; Heydari et al., 2013).

- Wang, W.S. ve Li, S.F., lineer olmayan nötral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümünde One-leg Q-Yöntemi'ni kullanmışlardır (Wang and Li, 2007).

- Chen, X. ve Wang, orantılı gecikmeye sahip nötral fonksiyonel denklemlere Varyasyonel İterasyon Yöntemi'ni (VIM) uygulamışlardır (Chen and Wang, 2010).

- Biazar, J. ve Ghanbari, B., aynı tip denklemlere He'nin Homotopi Perturbasyon Yöntemi'ni (HPM) uygulamışlardır (Biazar and Ghanbari, 2012).
- Bhrawy, A.H. ve ekibi de, aynı tip denklemlere Legendre-Gauss Sıralama Yöntemi'ni (LGCM) uygulamışlardır (Bhrawy et al., 2013).
- Işık, O. R. ve ekibi, pantograf denkleminin çözümü için Bernstein Seri Yöntemi'ni kullanmışlardır (Işık et al., 2012).
- Laguerre Sıralama Yöntemi'ni (LCM), Gürbüz, B. ve ekibi Fredholm integro-diferansiyel denklemlere (Gürbüz et al., 2014), Yüzbaşı, Ş. de pantograf tipli Volterra integro-diferansiyel denklemlere uygulamışlardır (Yüzbaşı, 2014).
- Oğuz, C. ve Sezer, M. çalışmasında, karma fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için Chelyshkov Sıralama Yöntemi'ni sunmuşlardır (Oğuz and Sezer, 2015).
- Baykuş Savaşaneril, N. ve ekibi, Lucas Matris-Sıralama Yöntemi'ni (LMCM) yüksek mertebeden pantograf gecikmeli diferansiyel denklemlerin, nötral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin, değişken gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemlerin ve orantılı gecikmeli nötral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanmışlardır (Baykuş Savaşaneril and Sezer, 2017; Gümgüm et al., 2018)
- Şahin, N. ve ekibi, lineer Fredholm integro-diferansiyel ve fark denklemlerinin çözümünde Bessel Sıralama Yöntemi'ni kullanmışlardır (Şahin et al., 2011).
- Firouzdora, R. ve ekibi, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümü için B-spline Yöntemi'ni uygulamışlardır (Firouzdor et al., 2012).
- Üstel Yaklaşım Yöntemi'ni, Balcı, M.A. ve ekibi Fredholm integro-diferansiyel ve fark denklemlerine (Balcı and Sezer, 2015), Bahşı, M. M. ve ekibi gecikmeli pantograf diferansiyel denklemlere uygulamışlardır (Bahşı et al., 2015).
- Hibrit Euler-Taylor Yöntemi'ni Balcı, M.A. ve ekibi genelleştirilmiş lineer Fredholm integro-diferansiyel ve fark denklemlerine (Balcı and Sezer, 2016), Baykuş Savaşaneril, N. ve ekibi yüksek mertebeden pantograf gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulamışlardır (Baykuş Savaşaneril and Sezer, 2017).

- Kürkçü, Ö.K. ve ekibi, integro-diferansiyel ve fark denklemlerinin çözümü için Dickson Matris Yöntemi'ni uygulamış, hata analizi ve yakınsaklık analizini yapmışlardır (Kürkçü et al., 2016, 2018)

- Son yıllarda yapılan çalışmalardan biri de Tarakçı, M. ve ekibi tarafından ikinci ve üçüncü dereceden terimler içeren lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözümü için sunulan Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi'dir. (Tarakçı et al., 2020).

Bu tez çalışmasının amacı, fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin ve sistemlerinin yaklaşık veya mümkünse tam çözümlerini bulmak için, standart sıralama noktaları ile beraber diferansiyel ve integrasyonun işlemsel matrislerine dayalı Euler matris yöntemini kullanmaktır. Ayrıca, tam çözümleri elde edilemeyen problemler için hata analizi yapılarak, elde edilen yaklaşık çözüm veya çözümlerin doğruluğu incelenecek ve hata analizi yardımıyla bu çözümlerde iyileştirmeler yapılacaktır. Bunun yanı sıra hata fonksiyonlarının grafikleri yardımıyla, yöntemin geçerlik ve güvenilirliği gösterilmeye çalışılacaktır.

2 GENEL BİLGİLER

2.1 EULER SAYILARI VE POLİNOMLARI

18.yy'ın en büyük matematikçilerinden Leonhard Euler, Johann Bernoulli'den matematik eğitimi ve Basel Üniversitesi'nden de Yunanca, İbranice ve İlahiyat eğitimi almıştır. İlk makalesini 19 yaşında yayımlamış ve 20 yaşında gemi direklerinin dengeli düzenlenmesine ilişkin bir incelemesiyle Paris Bilimler Akademisi'nden derece almıştır. Euler'in 1728 yılında St. Petersburg'da fizik profesörü, 1733 yılında Basel Üniversitesi matematik kürsüsünde kıdemli akademisyen olarak görev aldığı, 25 yıl boyunca Frederick the Great of Prussia Berlin Akademisinde 380 tane makale yayımladığı ve 1773 yılında da hayatını kaybettiği bilinmektedir.

Euler, matematiğin hemen her dalıyla ilgilenmiş olsa da 29 ciltte toplanan matematik yapıtlarının yarısından fazlasının analize ayrılmış olmasından ilgisinin daha çok analiz üzerine yoğunlaştığını anlayabiliriz. Bernoulli Sayıları, Fourier Serileri, Venn Diyagramı, Euler Sayıları, e ve pi sabitleri, sürekli kesirler ve integrallerin pek çok uygulamasını tanımlamıştır. Kendisinden önce yapılmış çalışmaları sistemli bir yapıya kavuşturan Euler, 18.yy bilim düşüncesinin boyutlarını çağın ötesine götürmeyi başarmıştır.

Euler'in çalışmalarından birisi de secant serilerinin katsayılarını bulmaya yönelikti. Bu katsayılar, 1851'de Raabe tarafından Euler sayıları olarak adlandırıldı.

ϵ_n Euler sayıları, doğuran fonksiyon yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\frac{2}{e^t + e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n!} t^n, \quad (1)$$

Euler polinomlarına da ilk olarak Édouard Lucas'ın 1891 yılında yayımlanan kitabında yer verilmiştir (Lucas, 1891). Euler polinomlarının sonlu seri formu:

$$y(t) \cong y_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(t), \quad a \leq t \leq b \quad (2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$E_n(t)$ olarak gösterilen Euler-Taylor polinomları

$$\frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi \quad (3)$$

eşitliği ile verilir. Euler sayıları ve Euler polinomları arasındaki ilişki:

$$E_n(1/2) = 2^{-n} \epsilon_n \quad (4)$$

Euler polinomları Bernoulli polinomları ile ilişkilidir, bu nedenle rekürsif hesaplama

$$E_n(t) + \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} E_k(t) = 2t^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

formülü ile ifade edilebilirler.

Ayrıca $E_n(t)$ Euler polinomları, $n \geq 0$ olmak üzere

$$E'_m(t) = mE_{m-1}(t), \quad m \geq 1 \quad (6)$$

şartını sağlar. (4), (5) ve (6) daki denklemler kullanılarak elde edilen bazı Euler sayıları ve polinomları aşağıdaki gibidir.

$$\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = 0, \epsilon_4 = 5, \epsilon_5 = 0, \epsilon_6 = -61, \epsilon_7 = 0, \dots$$

$$E_0(t) = 1,$$

$$E_1(t) = t - \frac{1}{2},$$

$$E_2(t) = t^2 - t,$$

$$E_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4},$$

$$E_4(t) = t^4 - 2t^3 + t,$$

$$E_5(t) = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{2},$$

$$E_6(t) = t^6 - 3t^5 + 5t^3 - 3t,$$

$$E_7(t) = t^7 - \frac{7}{2}t^6 + \frac{35}{4}t^4 - \frac{21}{2}t^2 + \frac{17}{8},$$

$$E_8(t) = t^8 - 4t^7 + 14t^5 - 28t^3 + 17t,$$

$$E_9(t) = t^9 - \frac{9}{2}t^8 + 21t^6 - 63t^4 + \frac{153}{2}t^2 - \frac{31}{2},$$

$$E_{10}(t) = t^{10} - 5t^9 + 30t^7 - 126t^5 + 255t^3 - 155t,$$

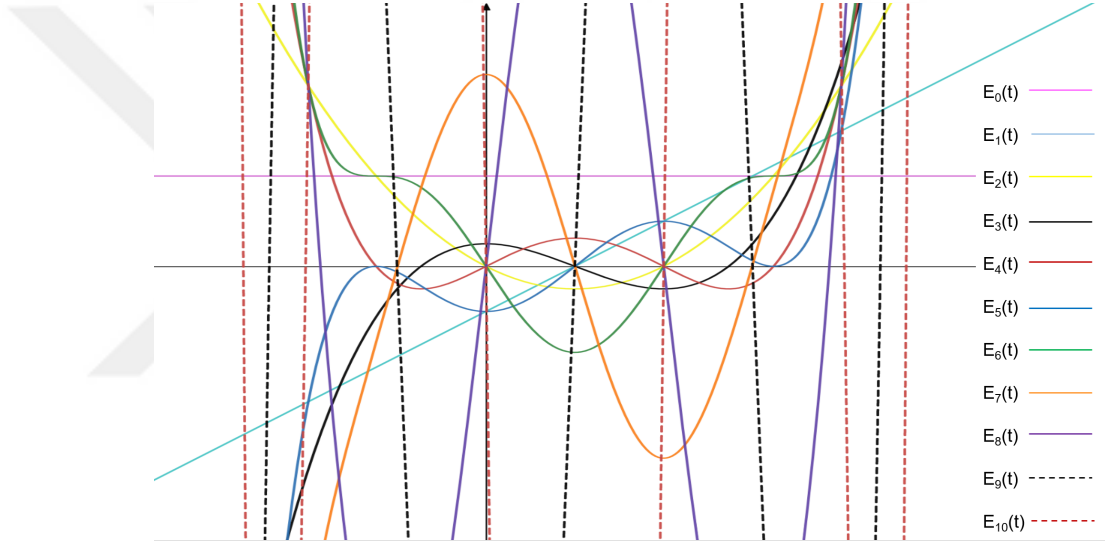
$$E_{11}(t) = t^{11} - \frac{11}{2}t^{10} + \frac{165}{4}t^8 - 231t^6 + \frac{2805}{4}t^4 - \frac{1705}{2}t^2 + \frac{691}{4},$$

$$E_{12}(t) = t^{12} - 6t^{11} + 55t^9 - 396t^7 + 1683t^5 - 3410t^3 + 2073t,$$

$$E_{13}(t) = t^{13} - \frac{13}{2}t^{12} + \frac{143}{2}t^{10} - \frac{1287}{2}t^8 + \frac{7293}{2}t^6 - \frac{22165}{2}t^4 + \frac{26949}{2}t^2 - \frac{5461}{2},$$

$$\vdots$$

$E_n(t)$ Euler polinomlarının katsayılarının n değerleri çiftken tamsayı şeklinde, tek olduğunda da genellikle kesirli geldiği görülebilir. Paydadaki değerlerin de her zaman 2'nin kuvvetleri şeklinde geleceği söylenebilir. Bunun yanı sıra, mevcut terimlerin katsayılarının işaretlerinin düzenli bir şekilde değiştiği rahatlıkla gözlemlenebilir (Spanier and Oldham, 1987).



Şekil 2.1: Euler Polinomlarının Grafiği

Şekil (2.1)'de ilk 11 Euler polinomunun grafiği çizdirilmiştir.

3 EULER POLİNOMLARININ TEMEL MATRİS ÖZELLİKLERİ

(2) de verilen denklemin $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için matris formu,

$$y(t) \cong y_N(t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{A} \quad (7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} E_0(t) & E_1(t) & \dots & E_N(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$$(\mathbf{S}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{E}(t)(\mathbf{S})^{-1} \Rightarrow \mathbf{E}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{S} \quad (8)$$

ise

$$y_N(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{S}\mathbf{A}$$

olarak ifade edilebilir.

$\mathbf{E}(t)$ matrisi ve türevi arasındaki ilişki:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere

$$\mathbf{E}'(t) = \mathbf{T}'(t)\mathbf{S} = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}\mathbf{S}$$

$$y^{(k)}(t) = y_N^k(t) = \mathbf{E}^k(t)\mathbf{A} = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^k\mathbf{S}\mathbf{A}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Fredholm tipi integralin çekirdek fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_f &= [k_{mn}^f], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \\ k_{mn}^f &= \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} \mathbf{K}_f(0, 0)}{\partial t^m \partial s^n} \\ \mathbf{K}_f(t, s) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_f\mathbf{T}(s)^T \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int_a^b \mathbf{K}_f(t, s) y(s) ds = \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_f\mathbf{Q}_f\mathbf{S}\mathbf{A} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}_f = [q_{mn}^f(t)] = \int_a^b \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) ds$$

$$m, n = 0, 1, \dots, N \quad q_{mn}^f(t) = \frac{b^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m + n + 1}$$

Volterra tipi integralin çekirdek fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_v &= [k_{mn}^v], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \\ k_{mn}^v &= \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} \mathbf{K}_v(0, 0)}{\partial t^m \partial s^n} \\ \mathbf{K}_v(t, s) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_v\mathbf{T}(s)^T \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_a^t \mathbf{K}_v(t, s) y(s) ds = \overline{\mathbf{T}}(t)\overline{\mathbf{K}}_v\overline{\mathbf{Q}}_v(t)\mathbf{S}\mathbf{A} \quad (13)$$

$$\mathbf{Q}_v(t) = [q_{mn}^v(t)] = \int_a^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) ds$$

$$m, n = 0, 1, \dots, N \quad q_{mn}^v(t) = \frac{t^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m + n + 1}$$

$p, q = 0, 1$ olmak üzere $y^{(p)}(t)y^{(q)}(t)$ nonlineer kısmın matris formu:

$$y^{(p)}(t)y^{(q)}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^p\mathbf{S}\overline{\mathbf{T}}(t)\overline{\mathbf{B}^q\mathbf{S}\mathbf{A}} = \mathbf{R}_{pq}(t)\overline{\mathbf{A}} \quad (14)$$

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t_1) & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{T}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\overline{\mathbf{B}^q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^q & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{B}^q \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{S} & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \text{diag} \left[a_0\mathbf{A} \quad a_1\mathbf{A} \quad \cdots \quad a_N\mathbf{A} \right]_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

$y^2(t)$ ve $y^3(t)$ nonlineer kısmın matris formu:

$$y^2(t) = \mathbf{E}(t)\overline{\mathbf{E}}(t)\mathbf{A} = \mathbf{T}(t)\mathbf{S}\overline{\mathbf{T}}(t)\overline{\mathbf{S}\mathbf{A}}$$

$$y^3(t) = \mathbf{E}(t)\overline{\mathbf{E}}(t)\overline{\overline{\mathbf{E}}}(t)\mathbf{A} = \mathbf{T}(t)\mathbf{S}\overline{\mathbf{T}}(t)\overline{\overline{\mathbf{S}\mathbf{T}}}(t)\overline{\overline{\mathbf{S}\mathbf{A}}}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{T}}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{T}}(t_1) & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{\mathbf{T}}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^3},$$

$$\overline{\overline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{S}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{\mathbf{S}} \end{bmatrix}_{(N+1)^3 \times (N+1)^3},$$

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \text{diag} \left[a_0\overline{\mathbf{A}} \quad a_1\overline{\mathbf{A}} \quad \cdots \quad a_N\overline{\mathbf{A}} \right]_{(N+1)^3 \times 1}^T$$

4 HATA ANALİZİ

Bu bölümde, yöntemin geçerliliği için verilen denklemin lineer ve nonlineer kısımlarını kullanarak rezidüel fonksiyonu tanımlayacağız (Kürkçü et al., 2017; Erdem et al., 2013; Yüzbaşı and Sezer, 2015)

$$R_N(t) = L[y_N(t)] + N[y_N(t)] - g(t) \cong 0, \quad t \in [a, b] \quad (15)$$

$l = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $t = t_l \in [a, b]$ için k_l herhangi bir pozitif tamsayı olmak koşuluyla

$$R_N(t_l) \leq 10^{-k_l}$$

olacaktır. h pozitif tamsayı olmak üzere $\max(10^{-k_l}) = 10^{-h}$ olarak alınırsa, N değeri $R_N(t_l)$ 'e kadar arttırıldığında her bir nokta belirtilen 10^{-h} 'den daha küçük olur Yüzbaşı and Sezer (2021).

Hata fonksiyonu $e_N(t)$, $y(t)$ verilen fonksiyonun tam çözümü olmak üzere,

$$e_N(t) = y(t) - y_N(t) \quad (16)$$

olarak tanımlanabilir. (15) ve (16) kullanılarak,

$$L[e_N(t)] + N[y_N(t) + e_N(t)] - N[y_N(t)] = -R_N(t)$$

olarak bulunur.

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b) \right) = 0, j = 0, 1, \dots, m-1$$

homojen koşulları altında, $e_N(t)$ hata fonksiyonuna 5. ve 6. bölümlerde belirtilen yöntemler kullanılarak $e_{N,M}(t)$ ($M \geq N$) yaklaşımı elde edilir.

Böylece $y_N(t)$ yaklaşık çözümü, $e_{N,M}(t)$ yaklaşık hata fonksiyonu yardımıyla

$$y_{N,M}(t) = y_N(t) + e_{N,M}(t) \quad (17)$$

şeklinde iyileştirilmiş olur. Sonuç olarak, düzeltilmiş hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(t) = y(t) - y_{N,M}(t) \quad (18)$$

şeklinde ifade edilir.

5 LİNEER İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN EULER MATRİS SIRALAMA YÖNTEMİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde $a \leq t \leq b$ olmak üzere, m . mertebeden lineer değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^m P_k(t)y^{(k)}(t) = g(t) + \lambda_1 \int_a^b K_f(t, s) y(s) ds + \lambda_2 \int_a^t K_v(t, s) y(s) ds \quad (19)$$

Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(k)}(b)) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (20)$$

karışık koşulları altında yaklaşık çözümü, Euler polinomları cinsinden kesilmiş Euler serisi formunda bulunacaktır.

Lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi $\lambda_2 = 0$ için lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleme, $\lambda_1 = 0$ içinse lineer Volterra integro-diferansiyel denkleme dönüşür.

5.1 Lineer Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemi

Lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin genel hali:

$$\sum_{k=0}^m P_k(t)y^{(k)}(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s) y(s) ds, \quad (21)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(k)}(b)) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (22)$$

koşulları altında verilsin.

$P_k(t)$, $g(t)$ ve $K(t, s)$ sürekli fonksiyonlar, $a \leq t \leq b$ aralığında a_{jk}, b_{jk} ve μ_j uygun sabitler, $y(t)$ de bilinmeyen çözüm fonksiyonu olarak tanımlansın. Denklem (21) ve (22)'de tanımlanan problemin çözümü için denklem (2)'de verilen Euler polinomlarının sonlu seri formunu ele alalım.

Sıralama noktaları;

$$t_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde ifade edilip, Bölüm (3)'teki $\mathbf{B}, \mathbf{B}^0, \mathbf{S}, \mathbf{K}_f, \mathbf{Q}_f$ ve $\mathbf{A}$ matris gösterimleri kullanılarak:

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(t_1) & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_k(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere matris denklemlerinin sistemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(t_i) \mathbf{T}(t_i) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = g(t_i) + \mathbf{T}(t_i) \mathbf{K} \mathbf{Q}(t_i) \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (23)$$

kısaca

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (24)$$

ile ifade edilebilir.

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (25)$$

arttırılmış matris sistemiyle ifade edilebilir. Ayrıca denklem (22)'deki başlangıç koşulu da:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{jk} \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_j]$$

veya

$$[\mathbf{U} : \mathbf{A}]$$

ile ifade edilir ve (25) formundaki sistemden m satır sayısı çıkarıldıktan sonra koşul matris formu (25) formunda yerine yazılır. Böylece, aşağıdaki arttırılmış matris sistemi elde edilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad [\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}]$$

Bu arttırılmış matris sistemi çözüldüğünde bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve bu katsayılar (7) çözüm formunda yerine yazıldığında Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

5.1.1 Model Problemler

Bu bölümde, bazı model problemler çözülüp elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla kıyaslanacaktır.

Problem 5.1.1. (ilhan, 2012) $y(0) = 7$, $y'(0) = -4$ başlangıç koşulları altında

$$y''(t) + ty'(t) - ty(t) = 8t^3 - \frac{25t}{3} + 7t^3 - 3t^4 + 4 + \int_{-1}^1 ty(s) ds$$

eşitliği ile verilen 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $-1 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = -t, P_1(t) = t, P_2(t) = 1,$$

$$g(t) = 8t^2 - \frac{25t}{3} + 7t^3 - 3t^4 + 4, K(t, s) = t$$

$N = 3$ için $y_3(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = -1, b = 1$ için $\{t_0 = -1, t_1 = \frac{-1}{3}, t_2 = \frac{1}{3}, t_3 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \mathbf{TKQSA}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \mathbf{TKQS}$$

ile ifade edilir.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{7}{2} & \frac{23}{3} & -\frac{71}{4} \\ 1 & -\frac{17}{8} & \frac{79}{27} & -\frac{1813}{324} \\ -1 & \frac{13}{8} & \frac{47}{27} & -\frac{355}{324} \\ -3 & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & \frac{15}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{31}{3} \\ \frac{199}{27} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{23}{3} \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşulları yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matris sistemi:

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{7}{2} & \frac{23}{3} & -\frac{71}{4} & : & \frac{31}{3} \\ 1 & -\frac{17}{8} & \frac{79}{27} & -\frac{1813}{324} & : & \frac{199}{27} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & : & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & -4 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilebilir. Denklem sistemi çözüldüğünde, denklemin tam çözümü olan $y(t) = 3t^3 + 2t^2 - 4t + 7$ 'nin elde edildiği görülecektir.

Problem 5.1.2. (Yüzbaşı, 2009; ilhan, 2012) $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında

$$y''(t) + ty'(t) - ty(t) = e^t - \sin t + \int_0^1 \sin te^{-s} y(s) ds$$

eşitliği ile verilen 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = -t, P_1(t) = t, P_2(t) = 1,$$

$$g(t) = e^t - \sin t, K(t, s) = \sin te^{-s}$$

$N = 3$ için $y_3(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 1$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Problemın temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S}$$

ile ifade edilir.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 & : & 1 \\ -\frac{697}{1296} & \frac{529}{1301} & \frac{585}{293} & -\frac{499}{392} & : & \frac{1749}{1637} \\ -\frac{341}{324} & \frac{1145}{1994} & \frac{1857}{763} & -\frac{1085}{1762} & : & \frac{335}{252} \\ -\frac{73}{48} & \frac{157}{288} & \frac{1333}{432} & -\frac{3368}{1045} & : & \frac{259}{138} \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşulları yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matris sistemi:

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 & : & 1 \\ -\frac{697}{1296} & \frac{529}{1301} & \frac{585}{293} & -\frac{499}{392} & : & \frac{1749}{1637} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & : & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilebilir. Buradan $N = 3$ için yaklaşık çözüm:

$$y_3(t) = 0.19456t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

şeklinde gelecektir.

Farklı N değerleri için elde edilen çözümler ise:

$$y_7(t) = 0.00028t^7 + 0.00129t^6 + 0.00839t^5 \\ + 0.04165t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{10}(t) = 4.152 * 10^{-7}t^{10} + 2.471 * 10^{-6}t^9 + 2.512 * 10^{-5}t^8 \\ + 1.982 * 10^{-4}t^7 + 1.389 * 10^{-3}t^6 + 0.00833t^5 \\ + 0.04166t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

Çözümler incelendiğinde elde edilen çözümlerin, denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^t$ 'nin Taylor seri açılımına yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

Çizelge (5.1), (5.2) ve (5.3)'te tam çözümün, N 'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılmaları verilmiştir. Karşılaştırmada yer alan çözümler, önermiş olduğumuz Euler Sıralama Yöntemi, Morgan Voyce Sıralama Yöntemi (ilhan, 2012) ve Bessel Sıralama Yöntemiyle (Yüzbaşı, 2009) elde edilmiş verilerden oluşmaktadır.

Çizelge (5.1), (5.2) ve (5.3)'ten de görülebileceği gibi N değeri büyüdükçe, tam çözüme giderek yaklaşılmaktadır. Bunun yanı sıra, daha önce uygulanmış olan yöntemlerden $N=10$ 'a gelindiğinde daha iyi sonuçlar elde edildiği gözlemlenmektedir. Buradan da, uygulanan Euler Sıralama Yöntemi'nin daha hızlı yakınsadığı söylenebilir.

Çizelge 5.1: Problem 5.1.2'nin $N = 3$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Euler Sıralama Yöntemi (N=3)	Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi (N=3)	Bessel Sıralama Yöntemi (N=3)
0	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000
0.1	1.10517091808	1.10519456459	1.10519456459	1.10519456459
0.2	1.22140275816	1.22155651675	1.22155651675	1.22155651675
0.3	1.34985880758	1.35025324404	1.35025324404	1.35025324404
0.4	1.49182469764	1.49245213403	1.49245213403	1.49245213403
0.5	1.64872127070	1.64932057427	1.64932057428	1.64932057428
0.6	1.82211880039	1.82202595234	1.82202595235	1.82202595235
0.7	2.01375270747	2.01173565580	2.01173565581	2.01173565581
0.8	2.22554092849	2.21961707221	2.21961707223	2.21961707223
0.9	2.45960311116	2.44683758915	2.44683758917	2.44683758917
1	2.71828182846	2.69456459416	2.69456459420	2.69456459420
Süre		1.052 s		

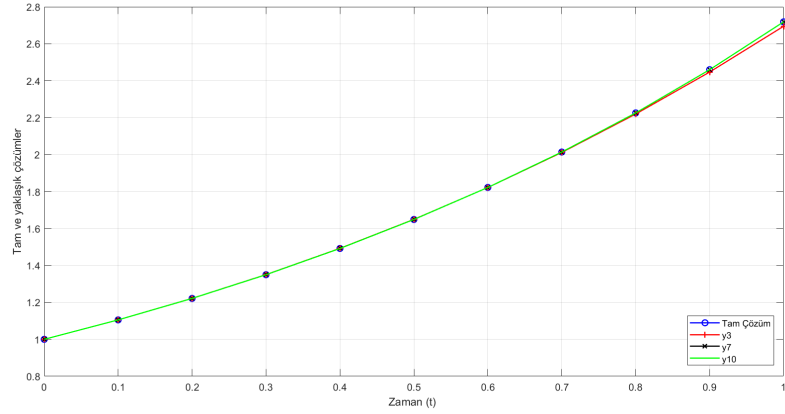
Çizelge 5.2: Problem 5.1.2'nin $N = 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Euler Sıralama Yöntemi (N=7)	Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi (N=7)	Bessel Sıralama Yöntemi (N=7)
0	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000
0.1	1.10517091808	1.10517091799	1.10517091799	1.10517091799
0.2	1.22140275816	1.22140275302	1.22140275302	1.22140275301
0.3	1.34985880758	1.34985878462	1.34985878462	1.34985878461
0.4	1.49182469764	1.49182463913	1.49182463913	1.49182463913
0.5	1.64872127070	1.64872115402	1.64872115403	1.64872115402
0.6	1.82211880039	1.82211859781	1.82211859782	1.82211859781
0.7	2.01375270747	2.01375238911	2.01375238911	2.01375238911
0.8	2.22554092849	2.22554045798	2.22554045799	2.22554045798
0.9	2.45960311116	2.45960239315	2.45960239316	2.45960239316
1	2.71828182846	2.71828051826	2.71828051827	2.71828051827
Süre		1.057 s		

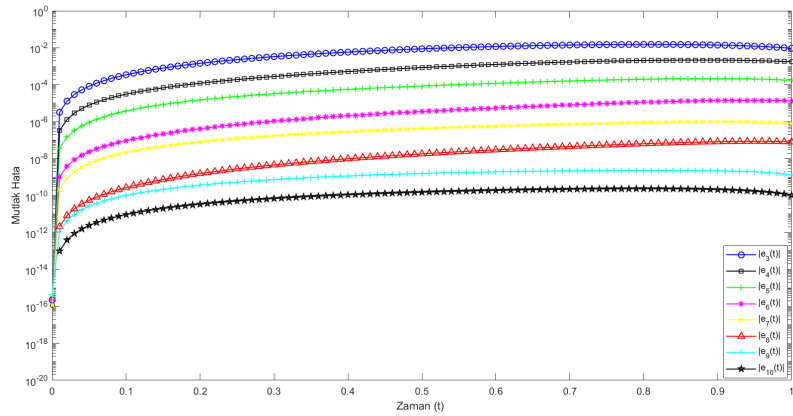
Ayrıca N değeri artmasına rağmen hesaplama süresinde önemli bir artış gözlemlenmemiş olması, hesaplama kolaylığına da bir örnek oluşturmıştır.

Çizelge 5.3: Problem 5.1.2'nin $N = 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Euler Sıralama Yöntemi (N=10)	Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi (N=10)	Bessel Sıralama Yöntemi (N=10)
0	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000
0.1	1.10517091808	1.10517091808	1.10517091799	1.10517091799
0.2	1.22140275816	1.22140275817	1.22140275302	1.22140275301
0.3	1.34985880758	1.34985880760	1.34985878462	1.34985878461
0.4	1.49182469764	1.49182469769	1.49182463913	1.49182463913
0.5	1.64872127070	1.64872127080	1.64872115403	1.64872115402
0.6	1.82211880039	1.82211880056	1.82211859782	1.82211859781
0.7	2.01375270747	2.01375270773	2.01375238911	2.01375238911
0.8	2.22554092849	2.22554092888	2.22554045799	2.22554045798
0.9	2.45960311116	2.45960311172	2.45960239316	2.45960239316
1	2.71828182846	2.71828183929	2.71828051827	2.71828051827
Süre		1.108 s		

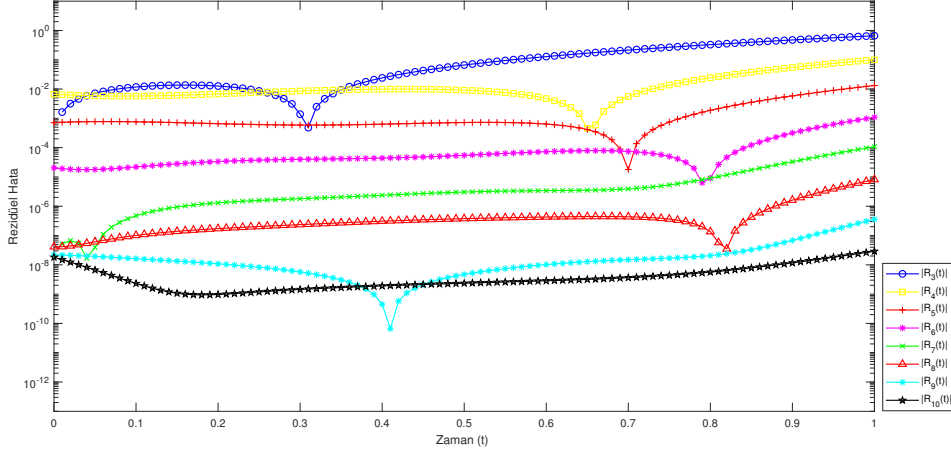


Şekil 5.1: Problem 5.1.2'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.2: Problem 5.1.2'nin $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.

Şekil (5.1)'de tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.2)'de de $3 \leq N \leq 10$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 5.3: Problem 5.1.2'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=3}^{\infty}$, ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (5.3)'te verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

Hata problemi $N = 3$, $N = 7$ ve $N = 10$ değerleri için

$$e_N''(t) + te_N'(t) - te_N(t) = -R_N(t) + \int_0^1 \sin te^{-s} e_N(s) ds$$

$$e(0) = 0, e'(0) = 0$$

şeklinde alınıp, çözüldüğünde:

$$e_{3,4}(t) = 0.05370t^4 - 0.03205t^3$$

$$e_{7,8}(t) = 0.00004t^8 - 0.00010t^7 + 0.00012t^6 - 0.00007t^5 + 0.00002t^4$$

$$- 1.299 * 10^{-6}t^3 - 8.132 * 10^{-20}t^2 + 7.253 * 10^{-20}$$

$$e_{10,10}(t) = -2.894 * 10^{-9}t^{10} + 8.060 * 10^{-9}t^9 - 1.015 * 10^{-8}t^8 + 7.316 * 10^{-9}t^7$$

$$- 3.282 * 10^{-9}t^6 + 1.054 * 10^{-9}t^5 - 1.406 * 10^{-10}t^4 - 8.190 * 10^{-10}t^3$$

$$+ 1.013 * 10^{-22}t^2 - 1.241 * 10^{-24}t + 3.154 * 10^{-24}$$

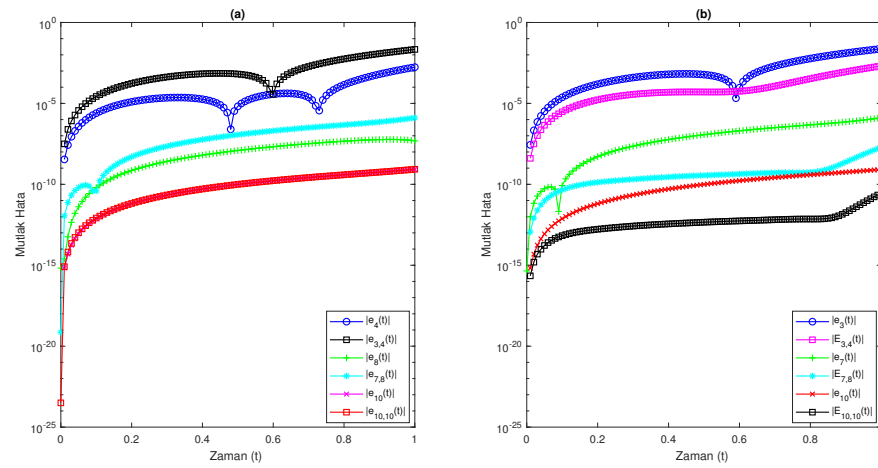
şeklinde gelecektir.

Buradan elde edilecek yaklaşık çözümler ise:

$$y_{3,4}(t) = 0.05370t^4 + 0.16251t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{7,8}(t) = 0.00004t^8 + 0.00018t^7 + 0.00140t^6 + 0.00833t^5 + 0.04167t^4 \\ + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{10,10}(t) = 4.123 * 10^{-7}t^{10} + 2.479 * 10^{-6}t^9 + 0.00003t^8 + 0.00020t^7 \\ + 0.0139t^6 + 0.00833t^5 + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 \\ + 0.5t^2 + t + 1$$



Şekil 5.4: Problem 5.1.2'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.4)(a)'da $y_4(t)$, $y_7(t)$, $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $e_{3,4}(t)$, $e_{7,8}(t)$, $e_{10,10}(t)$ tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. N değeri büyüdükçe tahmini hatanın tam çözüme yaklaştığı görülebilir. Şekil (5.4)(b)'de ise $y_3(t)$, $y_7(t)$, $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $E_{3,4}(t)$, $E_{7,8}(t)$, $E_{10,10}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hataların, gerçek hatalardan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.1.3. ilhan (2012) $y(0) = 3, y'(1) = e, y''(2) = e^2$ başlangıç koşulları altında

$$(t+1)y'''(t) - 2ty'(t) + \cos t y(t) = e^t(\cos t - t + 1) + 2\cos t - 2e^3 - 10 + \int_0^3 sy(s) ds$$

eşitliği ile verilen 3. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 3$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = \cos t, P_1(t) = -2t, P_2(t) = 0, P_3(t) = t + 1,$$

$$g(t) = e^t(\cos t - t + 1) + 2\cos t - 2e^3 - 10, K(t, s) = s$$

Problemin temel matris denklemini önceki örneklerde olduğu gibi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S}$$

ile ifade edilip, $N = 4$ için sistem çözüldüğünde,

$$y_4(t) = 0.09678t^4 - 0.07371t^3 + 1.81403t^2 - 1.07576t + 3$$

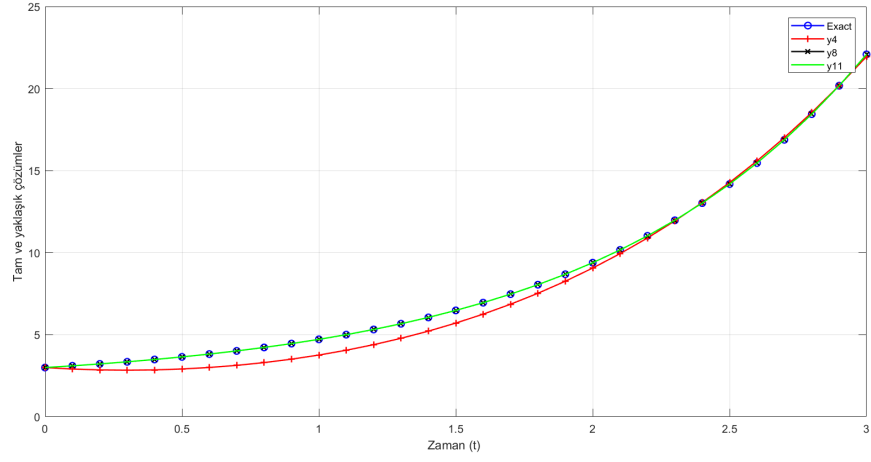
olarak elde edilebilir.

Farklı N değerleri için elde edilen diğer yaklaşık çözümler de:

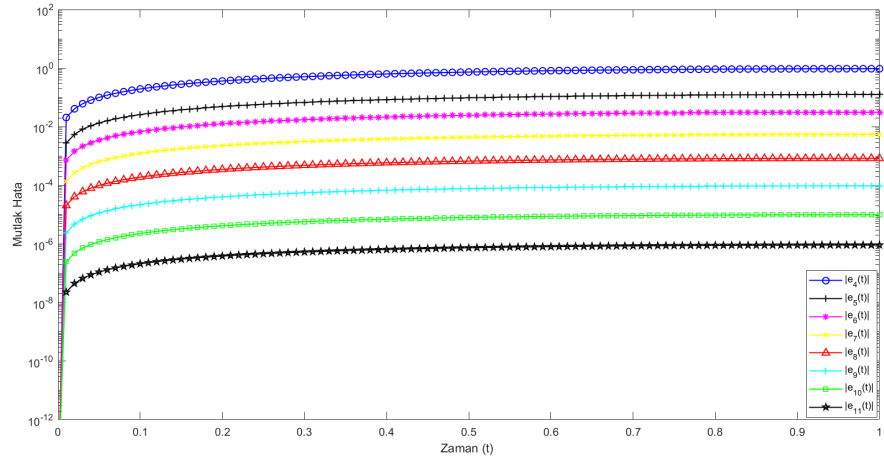
$$\begin{aligned} y_8(t) = & 0.00006t^8 + 0.00005t^7 + 0.00166t^6 + 0.00809t^5 \\ & + 0.04185t^4 + 0.16608t^3 + 0.50173t^2 + 0.99792t + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{11}(t) = & 7.64861 * 10^{-8}t^{11} - 7.17325 * 10^{-8}t^{10} + 3.97752 * 10^{-6}t^9 \\ & + 0.00002t^8 + 0.00020t^7 + 0.00139t^6 + 0.00833t^5 \\ & + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 3 \end{aligned}$$

Elde edilen çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^t + 2$ 'nin Taylor seri açılımlarına yaklaşık olduğu görülecektir.



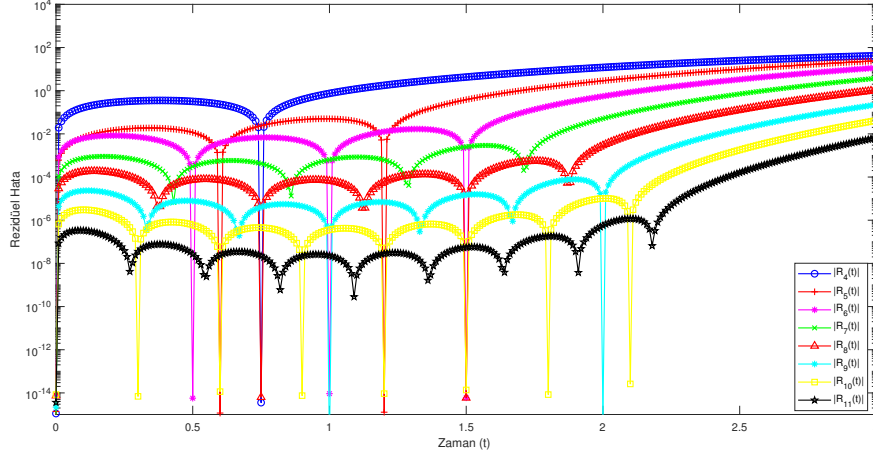
Şekil 5.5: Problem 5.1.3'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.6: Problem 5.1.3'ün $4 \leq N \leq 11$ için mutlak hatalarının grafiği.

Şekil (5.5)'te tam çözüm ile bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.6)'da da $4 \leq N \leq 11$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=4}^{\infty}$, ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (5.7)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.



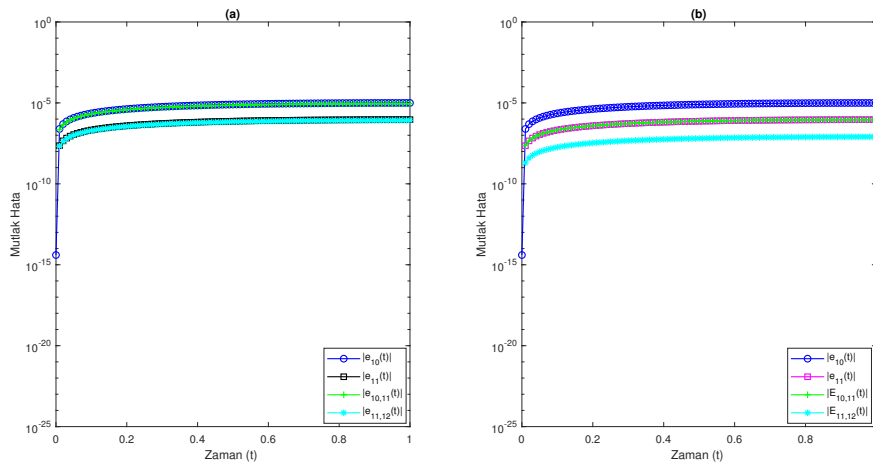
Şekil 5.7: Problem 5.1.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

$e_{11}(0) = 0$, $e'_{11}(1) = 0$, $e''_{11}(2) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$(t+1)e'''_{11}(t) - 2te'_{11}(t) + \cos t e_{11}(t) = -R_{11}(t) + \int_0^3 s e_{11}(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 12$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{11,12}(t) = & 6.583 * 10^{-9}t^{12} - 9.460 * 10^{-9}t^{11} + 4.158 * 10^{-7}t^{10} \\ & + 2.404 * 10^{-6}t^9 + 2.538 * 10^{-5}t^8 + 0.00020t^7 + 0.00139t^6 \\ & + 0.00833t^5 + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 3 \end{aligned}$$



Şekil 5.8: Problem 5.1.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.8)(a)'da $y_{10}(t), y_{11}(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $e_{10,11}(t), e_{11,12}(t)$ tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.8)(b)'de ise $y_{10}(t), y_{11}(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $E_{10,11}(t), E_{11,12}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hataların, gerçek hatalardan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.1.4. (Kurt and Sezer, 2008; Asady et al., 2005; Elmacı and Baykuş Savaşaneril, 2021b) $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında

$$y'(t) = y(t) + \frac{1 - e^{t+1}}{t+1} + \int_0^1 e^{ts} y(s) ds$$

eşitliği ile verilen 1. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında farklı N değerleri için Euler matris yöntemiyle elde edilen çözümleri:

$$y_2(t) = 0.60906t^2 + 0.96948t + 1$$

$$y_4(t) = 0.05947t^4 + 0.15469t^3 + 0.50165t^2 + 0.99900t + 1$$

$$y_6(t) = 0.00207t^6 + 0.00752t^5 + 0.04213t^4 + 0.16653t^3 + 0.5t^2 + 0.99999t + 1$$

$$\begin{aligned} y_8(t) = & 0.00004t^8 + 0.00018t^7 + 0.00141t^6 + 0.00832t^5 \\ & + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^t$ 'nin Taylor seri açılımına yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

Çizelge (5.4) ve (5.5)'te tam çözüm, farklı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi, Taylor Polinom Yöntemi (Kurt and Sezer, 2008), Hibrit Fourier-Block-pulse Fonksiyon Yöntemi ve Fourier Fonksiyon Yöntemleri'yle (Asady et al., 2005) elde edilen çözüm değerleri verilerek karşılaştırması yapılmıştır.

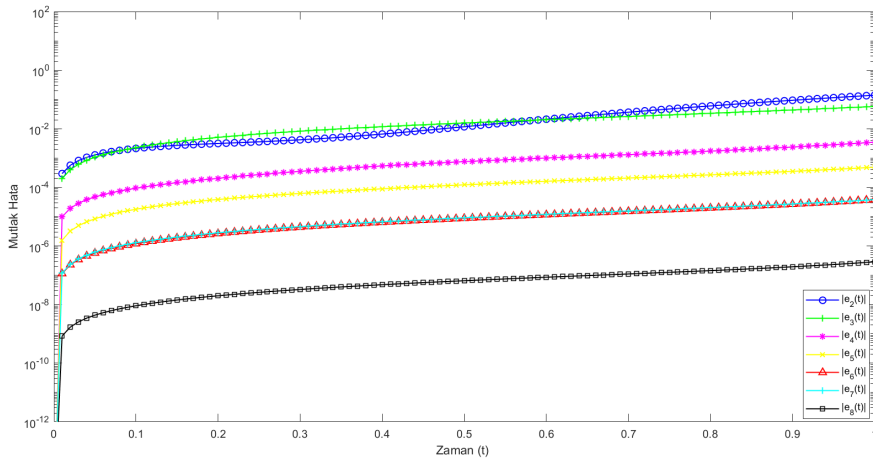
Şekil (5.9)'da da $2 \leq N \leq 8$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerinin mutlak hata karşılaştırma grafiği verilmiştir.

Çizelge 5.4: Problem 5.1.4'ün $N = 2, N = 4$ ve $N = 6$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Euler Sıralama Yöntemi (N=2)	Taylor Polinom Yöntemi (N=2)	Euler Sıralama Yöntemi (N=4)	Taylor Polinom Yöntemi (N=4)	Euler Sıralama Yöntemi (N=6)	Taylor Polinom Yöntemi (N=6)
0.05	1.04999	1.03866	1.05122	1.03866	1.05127	1.05139
0.15	1.15913	1.12035	1.16169	1.12035	1.16183	1.16224
0.25	1.28044	1.20788	1.28375	1.20788	1.28403	1.28475
0.35	1.41393	1.30125	1.41863	1.30125	1.41907	1.42018
0.45	1.55960	1.40047	1.56767	1.40047	1.56831	1.56986
0.55	1.71745	1.50553	1.73238	1.50553	1.73324	1.73531
0.65	1.88749	1.61642	1.91440	1.61642	1.91553	1.91819
0.75	2.06971	1.73316	2.11551	1.73316	2.11698	2.12031
0.85	2.26410	1.85574	2.33764	1.85574	2.33962	2.34371
0.95	2.47068	1.98416	2.58286	1.98416	2.58568	2.59061
Süre	1.020 s		1.009 s		1.016 s	

Çizelge 5.5: Problem 5.1.4'ün $N = 8$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Euler Sıralama Yöntemi (N=8)	Taylor Polinom Yöntemi (N=8)	Hibrit Fourier Block pulse	Fourier Fonksiyonları	Hata Taylor	Hata Euler
0.05	1.05127	1.05127	1.05132	1.05128	1.22238	2.20047×10^{-5}	4.35243×10^{-9}
0.15	1.16183	1.16183	1.16201	1.16184	1.08199	3.53323×10^{-5}	1.43054×10^{-8}
0.25	1.28403	1.28403	1.28434	1.28405	1.35045	6.35704×10^{-5}	2.61028×10^{-8}
0.35	1.41907	1.41907	1.41956	1.41908	1.35695	1.01215×10^{-4}	3.99067×10^{-8}
0.45	1.56831	1.56831	1.56901	1.56831	1.62870	1.54963×10^{-4}	5.60546×10^{-8}
0.55	1.73325	1.73325	1.73420	1.73326	1.67340	2.31844×10^{-4}	7.49678×10^{-8}
0.65	1.91554	1.91554	1.91678	1.91555	1.97601	3.39093×10^{-4}	9.75358×10^{-8}
0.75	2.11700	2.11700	2.11859	2.11703	2.05371	4.83948×10^{-4}	1.26045×10^{-7}
0.85	2.33965	2.33965	2.34165	2.33966	2.41389	6.73161×10^{-4}	1.66217×10^{-7}
0.95	2.58571	2.58571	2.58821	2.58572	2.42536	9.12919×10^{-4}	2.33085×10^{-7}
Süre		1.075 s					



Şekil 5.9: Problem 5.1.4'ün $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.

5.2 Lineer Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemi

Lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin genel hali:

$$\sum_{k=0}^m P_k(t) y^{(k)}(t) = g(t) + \int_a^t K(t, s) y(s) ds, \quad (26)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (27)$$

koşulları altında verilsin.

$P_k(t)$, $g(t)$ ve $K(t, s)$ sürekli fonksiyonlar, $a \leq t \leq b$ aralığında a_{jk}, b_{jk} ve μ_j uygun sabitler, $y(t)$ de bilinmeyen çözüm fonksiyonu olarak tanımlansın. Denklem (26) ve (27)'da tanımlanan problemin çözümü için denklem (2)'de verilen Euler polinomlarının sonlu seri formunu ele alalım.

Sıralama noktaları;

$$t_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde ifade edildiğinde, matris denklemlerinin sistemi lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminde olduğu gibi,

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(t_i) \mathbf{T}(t_i) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = g(t_i) + \overline{\mathbf{T}}(t_i) \overline{\mathbf{KQ}}(t_i) \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (28)$$

kısaca

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \overline{\mathbf{T}} \mathbf{KQ} \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (29)$$

ile gösterilebilir. Bu sistem de:

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \Leftrightarrow [\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (30)$$

arttırılmış matris sistemiyle ifade edilebilir. Ayrıca (27) daki başlangıç koşulu da:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{jk} \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_j]$$

veya

$$[\mathbf{U} : \mathbf{A}]$$

ile ifade edilir ve (30) formundaki sistemden m satır sayısı çıkarıldıktan sonra koşul matris formu (30) formunda yerine yazılır. Böylece, aşağıdaki arttırılmış matris sistemi elde edilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \left[\widetilde{\mathbf{W}}: \widetilde{\mathbf{G}} \right]$$

Bu arttırılmış matris sistemi çözüldüğünde bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve bu katsayılar (7) çözüm formunda yerine yazıldığında Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

5.2.1 Model Problemler

Bu bölümde, bazı model problemler çözümlüp elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla kıyaslanacaktır.

Problem 5.2.1. (ilhan, 2012) $y(1) = 4$, $y'(0) = 2$ başlangıç koşulları altında

$$(t^2+1)y''(t) + \frac{1}{2}y'(t) - 2y(t) = \frac{1}{3}\left(-\frac{55t^4}{4} - 8t^3 + \frac{45t^2}{2}\right) + t + 17 + \int_0^t (2t+s)y(s) ds$$

verilen 2. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 3$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = -2, P_1(t) = \frac{1}{2}, P_2(t) = t^2 + 1,$$

$$g(t) = \frac{1}{3}\left(-\frac{55t^4}{4} - 8t^3 + \frac{45t^2}{2}\right) + t + 17, K(t, s) = 2t + s$$

$N = 3$ için $y_3(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n E_n(t),$$

şeklinde ifade edildiğinde sıralama noktaları, $a = 0, b = 3$ değerleri için $\{t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \overline{\mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S} \mathbf{A}}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \overline{\mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S}}$$

ile ifade edilir. Eşitlikteki matrisler:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(0) \\ \mathbf{Q}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{Q}\left(\frac{2}{3}\right) \\ \mathbf{Q}(1) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & : & 17 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{7}{12} & \frac{59}{12} & \frac{131}{20} & : & \frac{73}{4} \\ -12 & -\frac{49}{6} & \frac{7}{2} & \frac{203}{5} & : & -\frac{137}{3} \\ -\frac{49}{2} & -\frac{117}{4} & -\frac{111}{4} & \frac{1343}{20} & : & -\frac{1423}{4} \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & : & 17 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{7}{12} & \frac{59}{12} & \frac{131}{20} & : & \frac{73}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & : & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilebilir. Buradan yaklaşık çözüm:

$$y_3(t) = -5.43740 * 10^{-17}t^3 + 5t^2 + 2t - 3$$

olarak elde edilir.

Farklı N değerleri için elde edilen çözümler:

$$y_7(t) = -3.16782 * 10^{-16}t^7 + 2.15842 * 10^{-15}t^6 - 5.28073 * 10^{-15}t^5 \\ + 5.58124 * 10^{-15}t^4 - 2.12724 * 10^{-15}t^3 + 5t^2 + 2t - 3$$

$$y_{10}(t) = -6.77126 * 10^{-16}t^{10} + 8.27939 * 10^{-15}t^9 - 4.27928 * 10^{-14}t^8 \\ + 1.21513 * 10^{-13}t^7 - 2.05648 * 10^{-13}t^6 + 2.09090 * 10^{-13}t^5 \\ - 1.20466 * 10^{-13}t^4 + 3.26180 * 10^{-14}t^3 + 5t^2 + 2t - 3$$

Elde edilen çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = 5t^2 + 2t - 3$ 'e yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

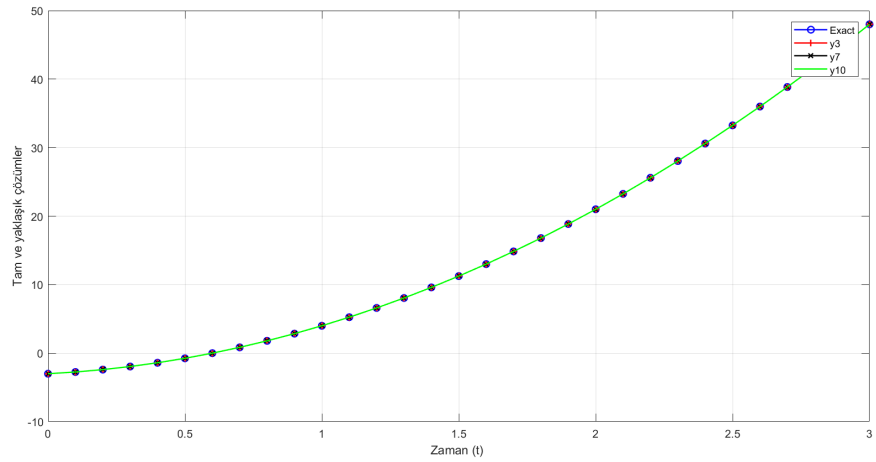
Çizelge (5.6)'da tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözüm değerleri ve Morgan Voyce Polinom Yöntemi'yle (ilhan, 2012) elde edilen çözüm değerleriyle karşılaştırılmıştır.

Çizelge (5.6)'dan da görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler Morgan Voyce Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümlere göre tam çözüme daha yakındır.

Şekil (5.10)'da tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilmiştir

Çizelge 5.6: Problem 5.2.1'in $N = 3, 7, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $5t^2 + 2t - 3$	Euler Yöntemi (N=3)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=3)	Euler Yöntemi (N=7)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=7)	Euler Yöntemi (N=10)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=10)
0	-3.00000000	-3.00000000	-2.87503063	-3.00000000	-2.996379877	-3.00000000	-2.996063228
0.2	-2.40000000	-2.40000000	-2.27203137	-2.40000000	-2.39604372	-2.40000000	-2.39576714
0.4	-1.40000000	-1.40000000	-1.27103161	-1.40000000	-1.39313716	-1.40000000	-1.39303016
0.6	0.00000000	0.00000000	0.11597158	0.00000000	0.01359786	0.00000000	0.01356027
0.8	1.80000000	1.76747614	1.80000000	1.71237502	1.80000000	1.71214196	1.80000000
1	4.00000000	4.00000000	4.00000000	4.00000000	4.00000000	4.00000000	4.00000000
1.2	6.60000000	6.60000000	6.47303112	6.60000000	6.52655385	6.60000000	6.52649550
1.4	9.60000000	9.60000000	9.28407743	9.60000000	9.34726197	9.60000000	9.34707759
1.6	13.00000000	13.00000000	12.42114188	13.00000000	12.39616968	13.00000000	12.39596808
1.8	16.80000000	16.80000000	15.87222739	16.80000000	15.59185939	16.80000000	15.59177194
2	21.00000000	21.00000000	19.62533693	21.00000000	18.83763750	21.00000000	18.83744193
2.2	25.60000000	25.60000000	23.66847341	25.60000000	22.02084947	25.60000000	22.02007358
2.4	30.60000000	30.60000000	27.98963979	30.60000000	25.01070308	30.60000000	25.01053924
2.6	36.00000000	36.00000000	32.57683901	36.00000000	27.65397943	36.00000000	27.66251397
2.8	41.80000000	41.80000000	37.41807400	41.80000000	29.76801162	41.80000000	29.80934796
3	48.00000000	48.00000000	42.50134771	48.00000000	31.13031079	48.00000000	31.25531366
Süre		1.060 s		1.078 s		1.103 s	



Şekil 5.10: Problem 5.2.1'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.

Problem 5.2.2. Yüzbaşı (2009); ilhan (2012) $y(0) = 1$, $y'(\pi) = -1$ başlangıç koşulları altında

$$y''(t) - ty'(t) + ty(t) = g(t) + 2 \int_0^t \sin t \cos sy(s) ds$$

verilen 2. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminde $g(t)$ fonksiyonu $g(t) = -\cos t - 2 \sin t + t \sin t + \sin t \cos t(\cos t - \sin t)$ olmak üzere, $0 \leq t, s \leq \pi$ aralığında problemin Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = t, P_1(t) = -t, P_2(t) = 1, K(t, s) = 2 \sin t \cos s$$

$N = 4$ için $y_4(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_4(t) = \sum_{n=0}^4 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = \pi$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{2\pi}{4}, t_3 = \frac{3\pi}{4}, t_4 = \pi\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \overline{\mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S} \mathbf{A}}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \overline{\mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{S}}$$

ile ifade edilir. Arttırılmış matris sistemi ve başlangıç koşulları yerine yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matris sistemi:

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ -\frac{593}{2808} & -\frac{616}{1423} & \frac{431}{269} & \frac{3799}{2017} & -\frac{2385}{1601} & -\frac{2659}{1698} \\ -\frac{862}{3001} & -\frac{409}{15120} & \frac{510}{2207} & \frac{407}{142} & \frac{2041}{266} & -\frac{97}{226} \\ \frac{3259}{1566} & \frac{1189}{562} & \frac{1007}{1009} & \frac{532}{933} & \frac{8609}{1086} & \frac{948}{569} \\ \frac{5997}{1139} & \frac{1051}{582} & -\frac{558}{1253} & -\frac{607}{85} & -\frac{14303}{628} & 1 \end{array} \right]$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ -\frac{593}{2808} & -\frac{616}{1423} & \frac{431}{269} & \frac{3799}{2017} & -\frac{2385}{1601} & -\frac{2659}{1698} \\ -\frac{862}{3001} & -\frac{409}{15120} & \frac{510}{2207} & \frac{407}{142} & \frac{2041}{266} & -\frac{97}{226} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{597}{113} & \frac{3290}{163} & \frac{12306}{187} & -1 \end{array} \right]$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan yaklaşık çözüm:

$$y_4(t) = 0.024220t^4 - 0.07370t^3 - 0.5t^2 + 1.31975t + 1$$

olarak elde edilir.

Farklı N değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler de:

$$y_3(t) = 0.02429t^3 - 0.5t^2 + 1.42225t + 1$$

$$y_7(t) = 0.00005t^7 - 0.00208t^6 + 0.00915t^5 + 0.04108t^4 \\ - 0.16721t^3 - 0.5t^2 + 0.99427t + 1$$

$$y_9(t) = -6.04982 * 10^{-7}t^9 + 4.01165 * 10^{-5}t^8 - 0.00024t^7 \\ - 0.00133t^6 + 0.00830t^5 + 0.04167t^4 - 0.16661t^3 \\ - 0.5t^2 + 1.00040t + 1$$

$$y_{10}(t) = 4.62266 * 10^{-7}t^{10} + 5.28698 * 10^{-6}t^9 + 5.98505 * 10^{-5}t^8 \\ - 0.00028t^7 - 0.00126t^6 + 0.00825t^5 + 0.04168t^4 \\ - 0.16660t^3 - 0.5t^2 + 1.00045t + 1$$

Elde edilen çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = \sin t + \cos t$ 'ye yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

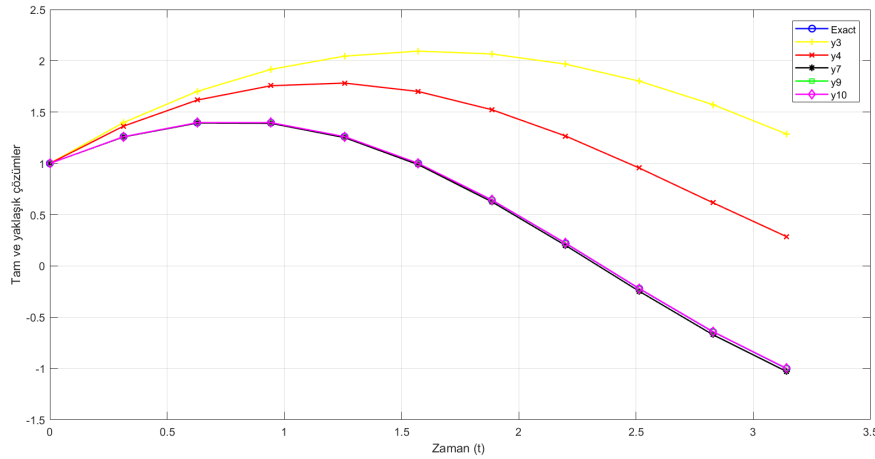
Çizelge (5.7), (5.8) ve (5.9)'da tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi, Bessel Polinom Yöntemi (Yüzbaşı, 2009), Morgan Voyce Polinom Yöntemi'nden (İlhan, 2012) elde edilen çözüm değerleri verilerek karşılaştırılma yapılmıştır.

Çizelge (5.7), (5.8) ve (5.9)'dan da görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler Bessel Sıralama ve Morgan Voyce Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler birbirlerine çok yakındır.

Şekil (5.11)'de tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilmiştir

Çizelge 5.7: Problem 5.2.2'nin $N = 3, 4$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $\sin t + \cos t$	Euler Yöntemi (N=3)	Bessel Yöntemi (N=3)	Euler Yöntemi (N=4)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=4)
0	1.0000000000	1.000000000	1.000000000	1.0000000000	1.0000000000
0.2	1.1787359086	1.26464462	1.26464462	1.2433995943	1.2433995943
0.4	1.3104793363	1.49045539	1.49045539	1.4438042716	1.4438042716
0.6	1.3899780883	1.67859846	1.67859846	1.5990716671	1.5990716671
0.8	1.4140628002	1.83024000	1.83024000	1.7079894736	1.7079894736
1	1.3817732906	1.94654614	1.94654614	1.7702754408	1.7702754408
1.2	1.2943968404	2.02868304	2.02868304	1.7865773757	1.7865773757
1.4	1.1554168729	2.07781686	2.07781686	1.7584731426	1.7584731426
1.6	0.9703740807	2.09511374	2.09511374	1.6884706630	1.6884706630
1.8	0.7466455362	2.08173984	2.08173984	1.5800079154	1.5800079154
2	0.4931505903	2.03886131	2.03886131	1.4374529359	1.4374529358
2.2	0.2199952866	1.96764430	1.96764430	1.2661038174	1.2661038174
2.4	-0.061930535	1.86925497	1.86925497	1.0721887104	1.0721887103
2.6	-0.341387382	1.74485947	1.74485947	0.8628658222	0.8628658221
2.8	-0.607234191	1.59562394	1.59562394	0.6462234177	0.6462234176
3	-0.848872489	1.42271455	1.42271455	0.4312798189	0.4312798186
π	-1.000000000	1.28662427	1.28662453	0.2855265652	0.2855268317
Süre		1.014 s		1.023 s	

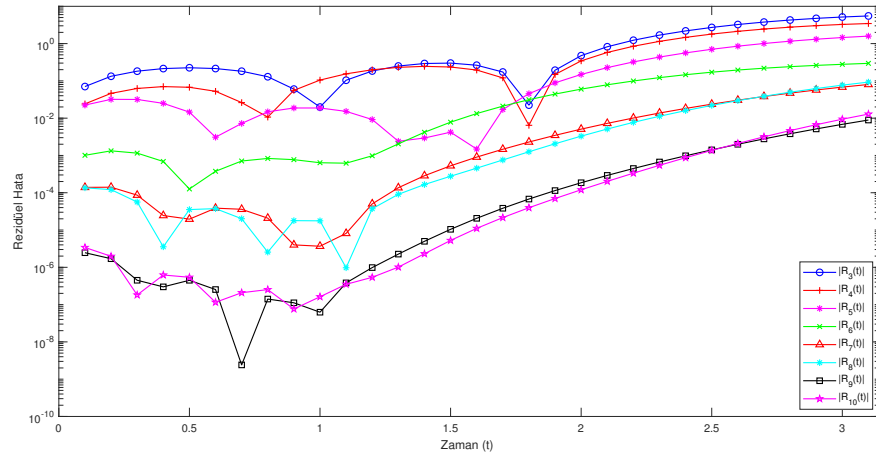


Şekil 5.11: Problem 5.2.2'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=3}^{\infty}$, ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (5.12)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

Çizelge 5.8: Problem 5.2.2'nin $N = 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $\sin t + \cos t$	Euler Yöntemi (N=7)	Bessel Yöntemi (N=7)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=7)
0	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000
0.2	1.1787359086	1.1775848450	1.17758484	1.1775848450
0.4	1.3104793363	1.3081433630	1.30814336	1.3081433630
0.6	1.3899780883	1.3863842573	1.38638426	1.3863842573
0.8	1.4140628002	1.4090948206	1.40909482	1.4090948206
1	1.3817732906	1.3752645219	1.37526452	1.3752645218
1.2	1.2943968404	1.2861232717	1.28612327	1.2861232716
1.4	1.1554168729	1.1450978138	1.14509781	1.1450978137
1.6	0.9703740807	0.9576896924	0.957689692	0.9576896922
1.8	0.7466455362	0.7312782439	0.731278244	0.7312782438
2	0.4931505903	0.4748520622	0.474852062	0.4748520620
2.2	0.2199952866	0.1986723854	0.198672385	0.1986723851
2.4	-0.061930535	-0.086128145	-0.0861281459	-0.086128146
2.6	-0.341387382	-0.368007908	-0.368007909	-0.368007909
2.8	-0.607234191	-0.635536453	-0.635536455	-0.635536455
3	-0.848872489	-0.877968938	-0.877968939	-0.877968939
π	-1.000000000	-1.029209479	-1.02920921	-1.029209214
Süre		1.047 s		



Şekil 5.12: Problem 5.2.2'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Çizelge 5.9: Problem 5.2.2'nin $N = 9, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $\sin t + \cos t$	Euler Yöntemi (N=9)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=9)	Euler Yöntemi (N=10)	Bessel Yöntemi (N=10)
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.00000000	1.00000000
0.2	1.1787359086	1.1788162888	1.1788162888	1.17882795	1.17882795
0.4	1.3104793363	1.3106427467	1.3106427468	1.31066646	1.31066646
0.6	1.3899780883	1.3902297367	1.3902297368	1.39026626	1.39026626
0.8	1.4140628002	1.4144107625	1.4144107626	1.41446126	1.41446126
1	1.3817732906	1.3822291771	1.3822291772	1.38229533	1.38229533
1.2	1.2943968404	1.2949763305	1.2949763306	1.29506042	1.29506042
1.4	1.1554168729	1.1561394719	1.1561394720	1.15624430	1.15624430
1.6	0.9703740807	0.9712614071	0.9712614072	0.971389917	0.971389917
1.8	0.7466455362	0.7477174972	0.7477174973	0.747871884	0.747871884
2	0.4931505903	0.4944190443	0.4944190443	0.494598845	0.494598845
2.2	0.2199952866	0.2214554699	0.2214554699	0.221654349	0.221654349
2.4	-0.061930535	-0.060309071	-0.060309071	-0.060107545	-0.060107545
2.6	-0.341387382	-0.339665865	-0.339665865	-0.339491201	-0.339491200
2.8	-0.607234191	-0.605496817	-0.605496818	-0.605387207	-0.605387206
3	-0.848872489	-0.847189931	-0.847189931	-0.847167531	-0.847167529
π	-1.000000000	-0.9983484021	-0.998348136	-0.998359710	-0.998359442
Süre		1.059 s		1.064 s	

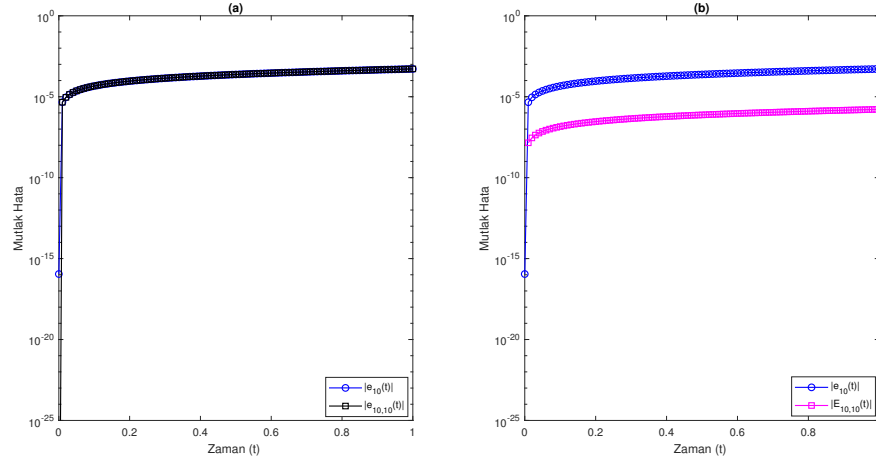
$e_{10}(0) = 0, e'_{10}(\pi) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$e''_{10}(t) - te'_{10}(t) + te_{10}(t) = -R_{10}(t) + 2 \int_0^t \sin(t) \cos(s) e_{10}(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 10$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{10,10}(t) = & -3.323 * 10^{-7} t^{10} - 2.482 * 10^{-6} t^9 + 2.677 * 10^{-5} t^8 \\ & -0.00020 t^7 - 0.00138 t^6 + 0.00832 t^5 + 0.04167 t^4 \\ & +0.16667 t^3 + 0.5 t^2 + t + 3 \end{aligned}$$

Şekil (5.13)(a)'da $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{10,10}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.13)(b)'de ise $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{10,10}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.



Şekil 5.13: Problem 5.2.2'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Problem 5.2.3. (ilhan, 2012) $y(0) = 1$, $y'(1) = e$ başlangıç koşulları altında

$$(t^2 + 1)y''(t) - ty'(t) - y(t) = e^t(t^2 - t - 1) + e^{2t}(\cos t - \sin t) + 2 \int_0^t e^s \sin sy(s) ds$$

verilen 2. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 4$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = -1, P_1(t) = -t, P_2(t) = t^2 + 1,$$

$$g(t) = e^t(t^2 - t - 1) + e^{2t}(\cos t - \sin t), K(t, s) = 2e^t \sin s$$

$N = 3$ için $y_3(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 4$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = \frac{8}{3}, t_3 = 4\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \overline{\mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q}} \mathbf{S} \mathbf{A}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \overline{\mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{Q}} \mathbf{S}$$

ile ifade edilir. Arttırılmış matris sistemi ve başlangıç koşulları yerine yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matris sistemi:

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{13}{4} & : & 0 \\ -\frac{1179}{182} & -\frac{4883}{1183} & \frac{1666}{555} & \frac{3254}{253} & : & -\frac{8287}{652} \\ -\frac{38477}{1238} & -\frac{2023}{73} & -\frac{3747}{221} & \frac{5003}{99} & : & -\frac{19265}{84} \\ \frac{1127}{9} & \frac{23016}{43} & \frac{55817}{32} & \frac{59848}{11} & : & \frac{79004}{87} \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{13}{4} & : & 0 \\ -\frac{1179}{182} & -\frac{4883}{1183} & \frac{1666}{555} & \frac{3254}{253} & : & -\frac{8287}{652} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & \frac{1457}{536} \end{bmatrix}$$

Denklem sistemi çözümlü, a_n katsayıları ile Euler polinomları çarpıldığında;

$$y_3(t) = 0.28662t^3 + 0.5t^2 + 0.85842t + 1$$

olarak elde edilir.

Farklı N değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_6(t) = 0.01710t^6 - 0.07816t^5 + 0.21281t^4 + 0.04370t^3 + 0.5t^2 + 1.02409t + 1$$

$$y_7(t) = -0.00098t^7 + 0.01155t^6 - 0.02247t^5 + 0.08368t^4 \\ + 0.14352t^3 + 0.5t^2 + 1.00289t + 1$$

$$y_{10}(t) = 0.00003t^{10} - 0.00040t^9 + 0.00231t^8 - 0.00704t^7 \\ + 0.01510t^6 - 0.00741t^5 + 0.05202t^4 \\ + 0.16349t^3 + 0.5t^2 + 1.00018t + 1$$

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^t$ 'ye yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

Çizelge (5.10)'da tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi ve Morgan Voyce Polinom Yöntemi'nden (ilhan, 2012) elde edilen çözüm değerleri verilerek karşılaştırma yapılmıştır.

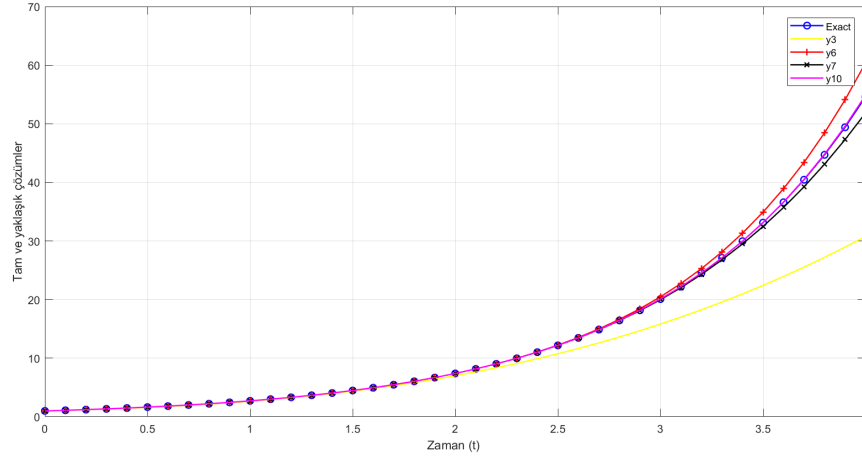
Çizelge 5.10: Problem 5.2.3'ün $N = 3, 6, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Euler Yöntemi (N=3)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=3)	Euler Yöntemi (N=6)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=6)	Euler Yöntemi (N=10)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=10)
0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.2	1.2214027582	1.1939769934	1.1939769934	1.2254851442	1.2254851441	1.2214256618	1.2214256619
0.4	1.4918246976	1.4417117738	1.4417117738	1.4971522567	1.4971522565	1.4918429693	1.4918429695
0.6	1.8221188004	1.7569621281	1.7569621281	1.8261963626	1.8261963623	1.8221302234	1.8221302237
0.8	2.2255409285	2.1534858431	2.1534858431	2.2276898797	2.2276898794	2.2255519974	2.2255519978
1	2.7182818285	2.6450407060	2.6450407060	2.7195519749	2.7195519745	2.7182938097	2.7182938102
1.2	3.3201169227	3.2453845035	3.2453845036	3.3223061241	3.3223061237	3.3201281932	3.3201281938
1.4	4.0551999668	3.9682750227	3.9682750228	4.0596258757	4.0596258752	4.0552114622	4.0552114629
1.6	4.9530324244	4.8274700504	4.8274700506	4.9596688175	4.9596688169	4.9530473949	4.9530473958
1.8	6.0496474644	5.8367273737	5.8367273739	6.0571987474	6.0571987469	6.0496678616	6.0496678627
2	7.3890560989	7.0098047794	7.0098047798	7.3964960477	7.3964960472	7.3890824654	7.3890824667
2.2	9.0250134994	8.3604600546	8.3604600545	9.0350562621	9.0350562617	9.0250508537	9.0250508552
2.4	11.0231763806	9.9024509860	9.9024509867	11.0480768774	11.0480768773	11.0232438382	11.0232438390
2.6	13.4637380350	11.6495353608	11.6495353620	13.5337323081	13.5337323083	13.4638941674	13.4638941690
2.8	16.4446467711	13.6154709658	13.6154709670	16.6192370845	16.6192370852	16.4451060475	16.4451060510
3	20.0855369232	15.8140155879	15.8140155890	20.4676972446	20.4676972460	20.0871056522	20.0871056570
3.2	24.5325301971	18.2589270141	18.2589270160	25.2857499294	25.2857499319	24.5378842222	24.5378842290
3.4	29.9641000474	20.9639630314	20.9639630330	31.3319911817	31.3319911856	29.9809222667	29.9809222790
3.6	36.5982344437	23.9428814267	23.9428814290	38.9261919485	38.9261919541	36.6459991733	36.6459991960
3.8	44.7011844933	27.2094399869	27.2094399890	48.4593022870	48.4593022950	44.8244985444	44.8244985870
4	54.5981500331	30.7773964989	30.7773965020	60.4042437741	60.4042437853	54.8911271359	54.8911272160
Süre		1.021 s		1.040 s		1.082 s	

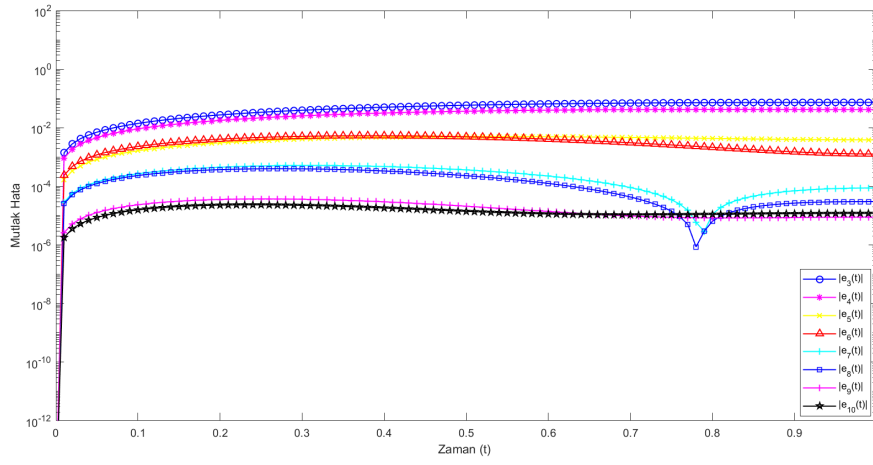
Çizelge (5.10)'dan da görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler, Morgan Voyce Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümlerle birbirine çok yakındır.

Şekil (5.14)'te tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.15)'te de $3 \leq N \leq 10$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.

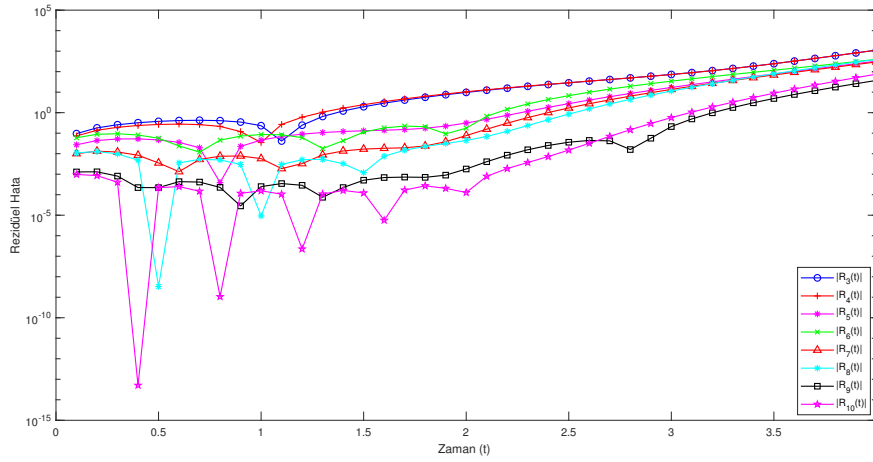
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=3}^{\infty}$, ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (5.16)'da verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.



Şekil 5.14: Problem 5.2.3'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.15: Problem 5.2.3'ün $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.



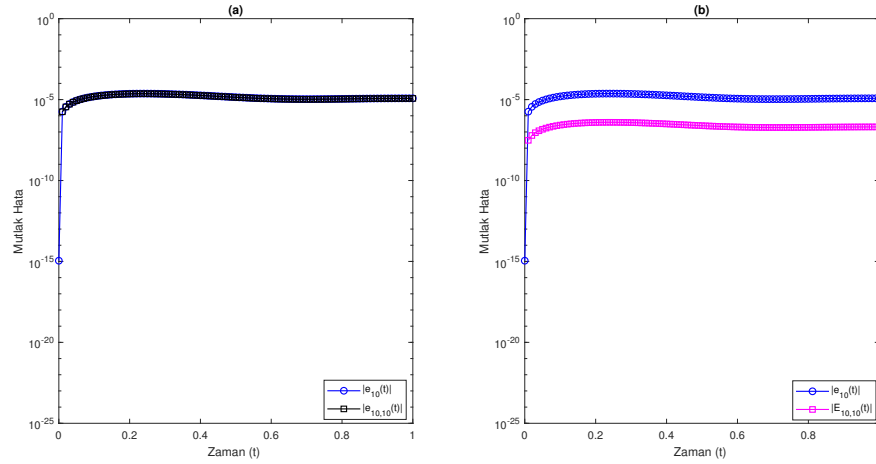
Şekil 5.16: Problem 5.2.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

$e_{10}(0) = 0, e'_{10}(1) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$(t^2 + 1)e''_{10}(t) - te'_{10}(t) - e_{10}(t) = -R_{10}(t) + 2 \int_0^t e^s \sin s e_{10}(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 10$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{10,10}(t) = & 1.438 * 10^{-6}t^{10} - 8.432 * 10^{-6}t^9 + 7.844 * 10^{-5}t^8 \\ & + 4.678 * 10^{-5}t^7 + 0.00166t^6 + 0.00804t^5 + 0.04185t^4 \\ & + 0.16661t^3 + 0.5t^2 + t + 1 \end{aligned}$$



Şekil 5.17: Problem 5.2.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.17)(a)'da $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{10,10}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.17)(b)'de ise $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{10,10}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.2.4. (Agbolade and Anake, 2017; Raftari, 2010) $y(0) = 10$, başlangıç koşulu altında

$$y'(t) + y(t) = (t^2 + 2t + 1)e^{-t} + 5t^2 + 8 - \int_0^t s y(s) ds$$

verilen 1. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin

$0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_3(t) = -0.32768t^3 + 0.94914t^2 - t + 10$$

$$y_6(t) = 0.00517t^6 - 0.03839t^5 + 0.16495t^4 \\ -0.49955t^3 + 0.99995t^2 - t + 10$$

olarak elde edilebilir. Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = 10 - te^{-t}$ 'nin Taylor açılımına yaklaşık olduğu görülecektir.

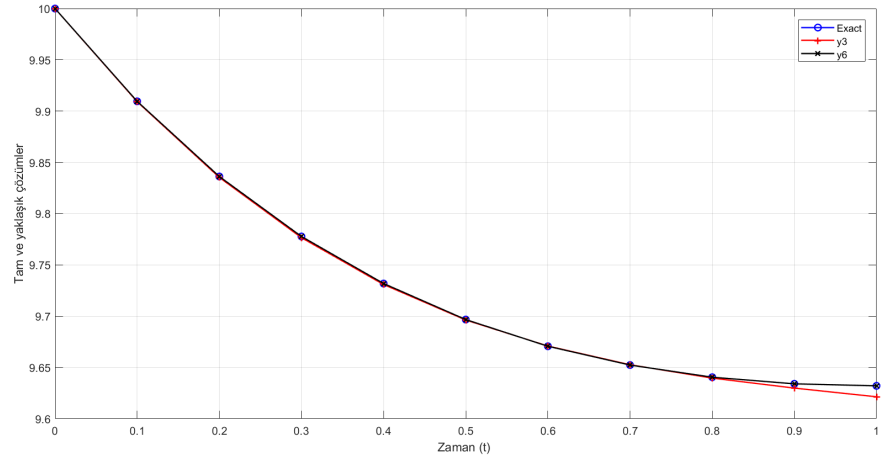
Çizelge (5.11)'de tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi, Standart Sıralama Yöntemi (SCM), Chebyshev-Gauss-Lobatto Sıralama Yöntemi (CGLCM)(Agbolade and Anake, 2017), Sonlu Farklar Yöntemi (FDM) ve Homotopi Perturbasyon Yöntemi'yle (HPM) (Raftari, 2010) elde edilen çözüm değerleri verilerek karşılaştırma yapılmıştır.

Çizelge 5.11: Problem 5.2.4'ün $N = 3, 6$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

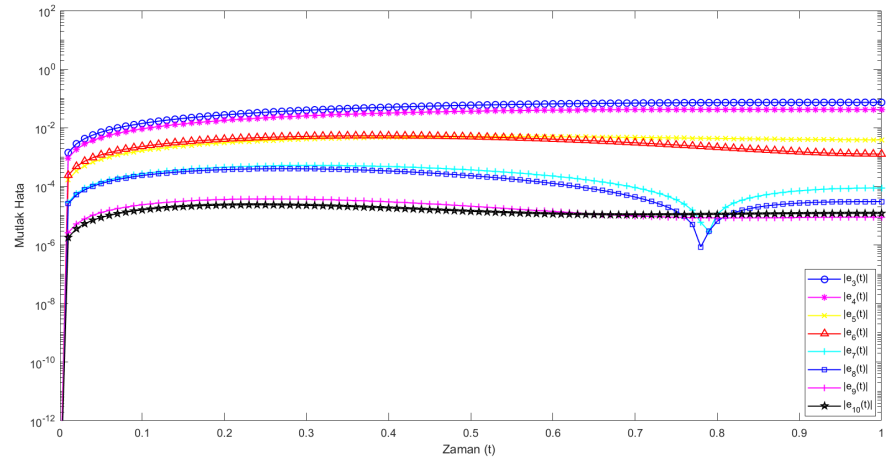
t	Tam Çözüm $10 - te^{-t}$	Euler Yöntemi (N=3)	Euler Yöntemi (N=6)	SCM (N=6)	CGLCM (N=6)	FDM (N=14)	HPM (N=4)
0.0000	10.0000000000	10.0000000000	10.0000000000	10.0000000000	10.0000000000	10.0000000000	10.000000
0.0714	9.9335202181	9.9333193834	9.9335201011	9.9334972400	9.9335014280	9.933780913	9.933495
0.1429	9.8761284570	9.8755255445	9.8761282535	9.8761622260	9.8761834110	9.876458584	9.876160
0.2143	9.8270371377	9.8260636586	9.8270369593	9.8270479750	9.8270952980	9.827589590	9.827049
0.2857	9.7852998702	9.7841311370	9.7852997458	9.7852938390	9.7853714140	9.785803615	9.785307
0.3571	9.7501362287	9.7490123297	9.7501361211	9.7501184640	9.7502239180	9.750832589	9.750163
0.4286	9.7208011972	9.7199548827	9.7208010710	9.7208131730	9.7209366980	9.721466032	9.720923
0.5000	9.6967346701	9.6963235900	9.6967345353	9.6967357700	9.6968602880	9.697552931	9.696975
0.5714	9.6773108455	9.6773580590	9.6773107439	9.6773047670	9.6774078090	9.678042251	9.677777
0.6429	9.6619853657	9.6623240447	9.6619853131	9.6619940380	9.6620519380	9.662857435	9.662846
0.7143	9.6503253880	9.6505471149	9.6503253208	9.6503278890	9.6503228990	9.651100634	9.651781
0.7857	9.6418775238	9.6412879940	9.6418773377	9.6418765600	9.6418074760	9.642739377	9.644241
0.8571	9.6362544452	9.6338310321	9.6362542433	9.6362521420	9.6361490630	9.637018786	9.639963
0.9286	9.6331041297	9.6274520839	9.6331048338	9.6331049220	9.6330487270	9.633929509	9.638737
1.0000	9.6321205588	9.6214525072	9.6321250527	9.6321201500	9.6322673000	9.632846912	9.640444
Süre		1.015 s	1.022 s				

Çizelge (5.11)'den de görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler; Standart Sıralama, Chebyshev-Gauss-Lobatto Sıralama, Sonlu Farklar ve Homotopi Perturbasyon yöntemleriyle elde edilen çözümlere kıyasla tam çözüme daha yakın sonuç vermektedir.

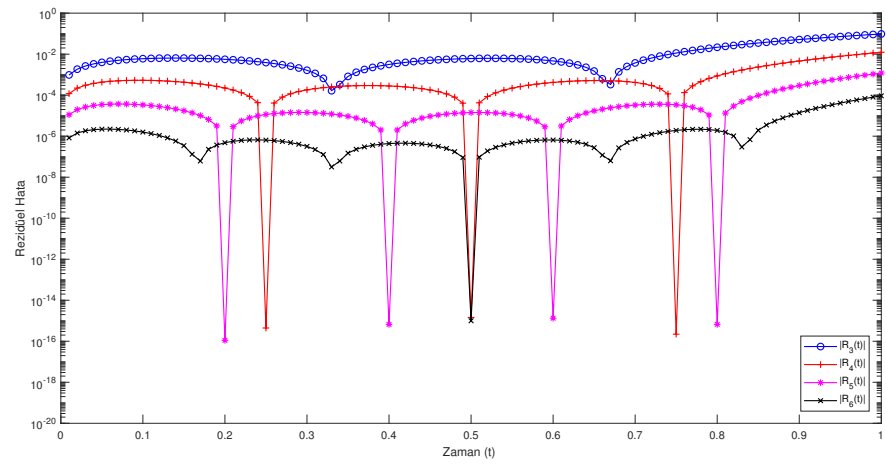
Şekil (5.18)'de tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.19)'da da $3 \leq N \leq 6$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.18: Problem 5.2.4'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.19: Problem 5.2.4'ün $3 \leq N \leq 6$ için mutlak hatalarının grafiği.



Şekil 5.20: Problem 5.2.4'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

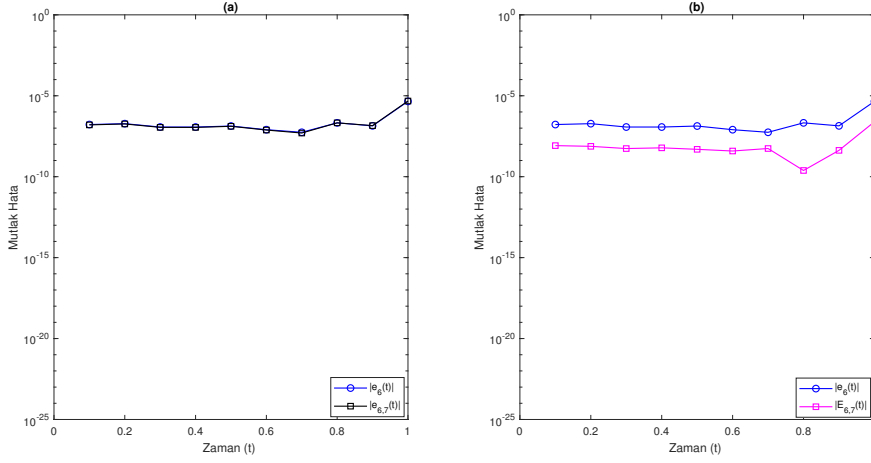
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=3}^{\infty}$, ilk dört değerinin grafiği Şekil (5.20)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_6(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$e'_6(t) + e_6(t) = -R_6(t) - \int_0^t s e_6(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 7$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{6,7}(t) = -0.00086t^7 + 0.00766t^6 - 0.04120t^5 + 0.16649t^4 \\ -0.16661t^3 + t^2 - t + 10$$



Şekil 5.21: Problem 5.2.4'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.21)(a)'da $y_6(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{6,7}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.21)(b)'de ise $y_6(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{6,7}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.2.5. (Agbolade and Anake, 2017; Raftari, 2010; Elmacı and Baykuş Savaşaneril, 2021b) $y(0) = 1$, başlangıç koşulu altında

$$y'(t) + y(t) = \int_0^t e^{s-t} y(s) ds$$

verilen 1. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= -0.36788t^3 + 0.91590t^2 - t + 1 \\ y_7(t) &= -0.00555t^7 + 0.03599t^6 - 0.12774t^5 + 0.33124t^4 \\ &\quad - 0.66625t^3 + 0.99996t^2 - t + 1 \end{aligned}$$

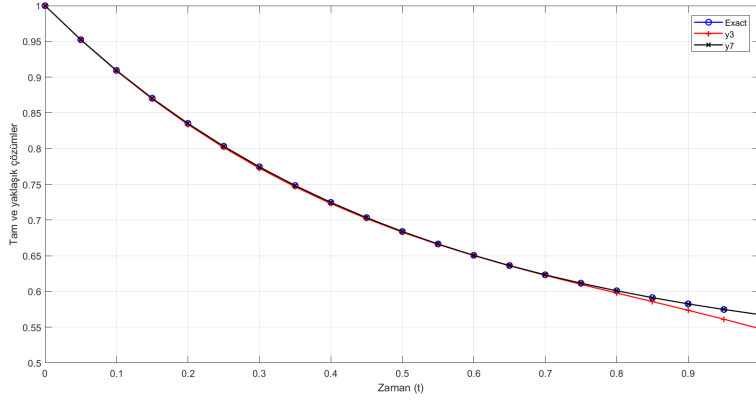
olarak elde edilebilir. Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^{-t} \cosh t$ 'nin Taylor açılımına yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

Çizelge (5.12)'de tam çözümün her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi, Standart Sıralama Yöntemi (SCM), Chebyshev-Gauss-Lobatto Sıralama Yöntemi (CGLCM) (Agbolade and Anake, 2017), Sonlu Farklar Yöntemi ve Homotopi Perturbasyon Yöntemi'yle(Raftari, 2010) elde edilen çözüm değerleriyle karşılaştırılması verilmiştir.

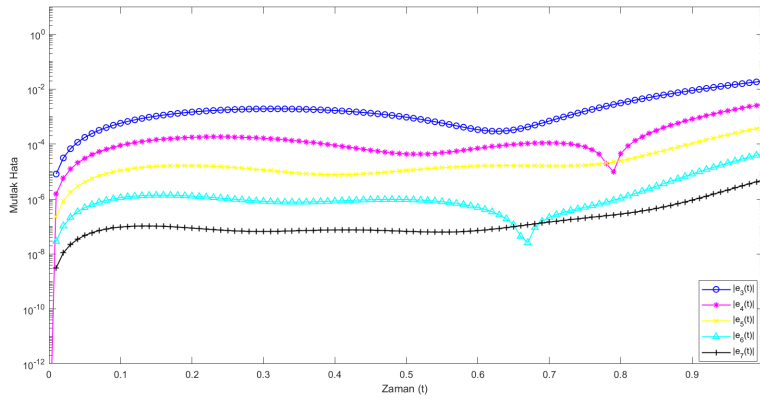
Çizelge 5.12: Problem 5.2.5'in $N = 3, 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $e^{-t} \cosh t$	Euler Yöntemi (N=3)	Euler Yöntemi (N=7)	SCM (N=7)	CGLCM (N=7)	FDM (N=12)	HPM (N=10)
0.0000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
0.0833	0.9232690794	0.9228426752	0.9232689953	0.9232506225	0.9232870060	0.9409611903	0.9232408643
0.1667	0.8582417717	0.8570476203	0.8582416719	0.8582754765	0.8583412480	0.8560967849	0.8582656556
0.3333	0.7567256740	0.7548250835	0.7567256055	0.7567163057	0.7567494510	0.7521848166	0.7567085596
0.4167	0.7172846181	0.7157176390	0.7172845427	0.7173066673	0.7172784860	0.7379172201	0.7172991016
0.5000	0.6839397206	0.6829898866	0.6839396536	0.6839470433	0.6838513720	0.6768034806	0.6839397209
0.5833	0.6557119924	0.6553148118	0.6557119265	0.6557084119	0.6555702120	0.6667601409	0.6557016132
0.6667	0.6317897828	0.6313896701	0.6317896704	0.6318047191	0.6316803000	0.6235899136	0.6317985685
0.7500	0.6115650801	0.6099947459	0.6115648759	0.6115707282	0.6115303710	0.6149784301	0.6115650814
0.8333	0.5944440975	0.5898235275	0.5944437182	0.5944432050	0.5945257900	0.5862745171	0.5944378021
0.9167	0.5799345439	0.5695753808	0.5799333384	0.5799451069	0.5800719570	0.5770459174	0.5799398782
1.0000	0.5676676416	0.5480217726	0.5676626272	0.5676724400	0.5675052000	0.5643959592	0.5676676511
Süre		0.984 s	1.021 s				

Çizelge (5.12)'den de görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler; Standart Sıralama, Chebyshev-Gauss-Lobatto Sıralama, Sonlu Farklar ve Homotopi Perturbasyon yöntemleriyle elde edilen çözümlerden tam çözüme daha yakındır.

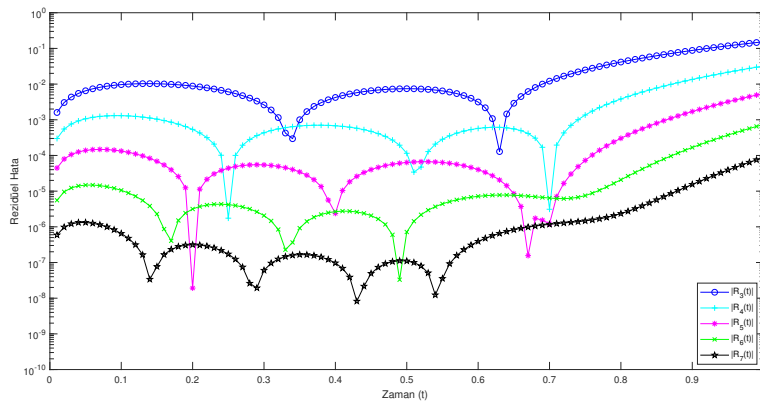


Şekil 5.22: Problem 5.2.5'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.23: Problem 5.2.5'in $3 \leq N \leq 7$ için mutlak hatalarının grafiği.

Şekil (5.22)'de tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.23)'te de $3 \leq N \leq 7$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.24: Problem 5.2.5'in rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

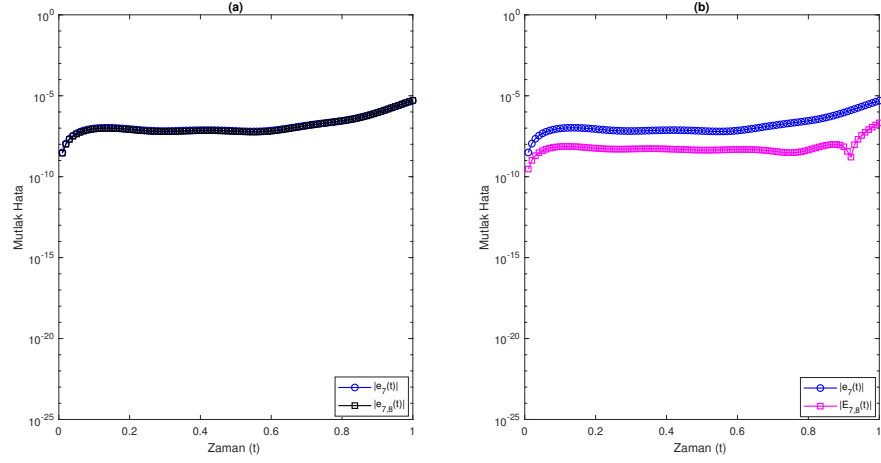
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=3}^{\infty}$, ilk beş değerinin grafiği Şekil (5.24)'te verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_7(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$e_7'(t) + e_7(t) = \int_0^t e^{s-t} e_7(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 8$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{7,8}(t) = 0.00135t^8 - 0.01015t^7 + 0.04236t^6 - 0.13231t^5 + 0.33303t^4 - 0.66662t^3 + t^2 - t + 1$$



Şekil 5.25: Problem 5.2.5'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.25)(a)'da $y_7(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{7,8}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.25)(b)'de ise $y_7(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{7,8}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.2.6. (Yalçınbaş and Sezer, 2000) $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$y'(t) = 1 - \int_0^t y(s) ds$$

verilen 1. mertebeden Volterra integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_5(t) = 0.00747t^5 + 0.00105t^4 - 0.16713t^3 + 0.000073t^2 + t$$

$$y_8(t) = 1.07977 * 10^{-5}t^8 - 0.00022t^7 + 1.60487 * 10^{-5}t^6 + 0.00832t^5 \\ + 2.56859 * 10^{-6}t^4 - 0.16667t^3 + 3.11575 * 10^{-8}t^2 + t$$

$$y_{10}(t) = -1.21821 * 10^{-7}t^{10} + 3.01703 * 10^{-6}t^9 - 3.20499 * 10^{-7}t^8 \\ - 0.00020t^7 - 1.23119 * 10^{-7}t^6 + 0.00833t^5 \\ - 8.11796 * 10^{-9}t^4 - 0.16667t^3 - 5.05397 * 10^{-11}t^2 + t$$

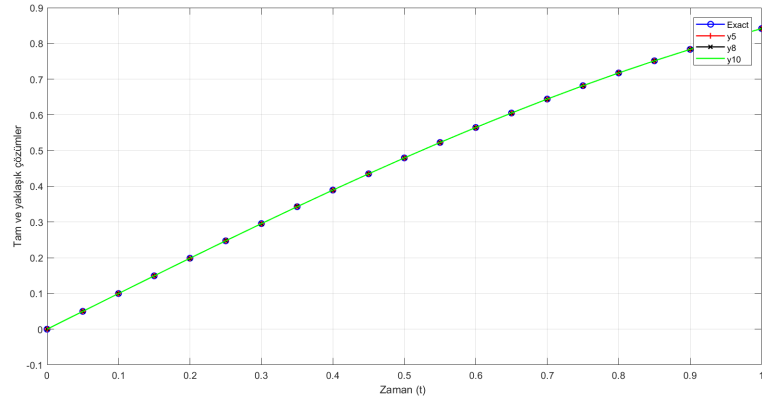
olarak elde edilebilir. Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = \sin t$ 'nin Taylor açılımına yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

Çizelge (5.13)'te tam çözümün her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi ve Taylor Yöntemi'yle (Yalçınbaş and Sezer, 2000) elde edilen çözüm değerleriyle karşılaştırılması verilmiştir.

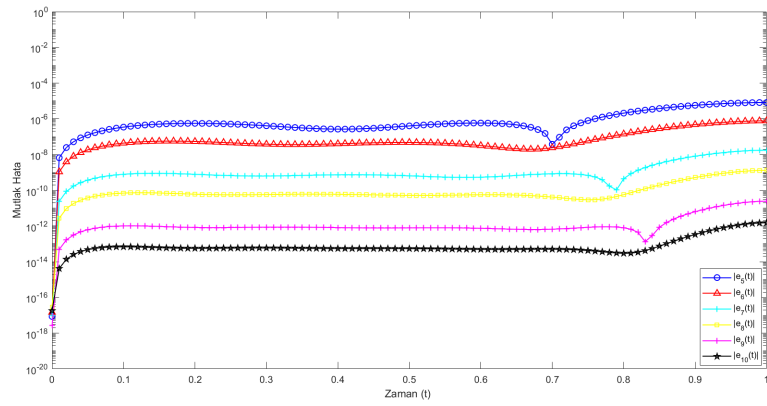
Çizelge 5.13: Problem 5.2.6'nın $N = 5, 7, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $\sin t$	Euler Yöntemi (N=5)	Taylor Yöntemi (N=5)	Euler Yöntemi (N=7)	Taylor Yöntemi (N=7)	Euler Yöntemi (N=10)	Taylor Yöntemi (N=10)
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.198669	0.198670	0.198669	0.198669	0.198669	0.198669	0.198669
0.4	0.389418	0.389419	0.389418	0.389418	0.389418	0.389418	0.389418
0.6	0.564642	0.564643	0.564647	0.564642	0.564642	0.564642	0.564642
0.8	0.717356	0.717354	0.717397	0.717356	0.717355	0.717356	0.717356
1.0	0.841471	0.841463	0.841666	0.841471	0.841468	0.841471	0.841471
Süre		0.970 s		0.995 s		1.031 s	

Çizelge (5.13)'ten de görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen ve Taylor Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler birbirlerine çok yakın gelmiştir. Hesaplama sürelerinin az olmasına karşın tam çözüme yakın çözümler elde edilebilmiş olması yöntemin uygulanabilirliğine örnek oluşturmuştur.

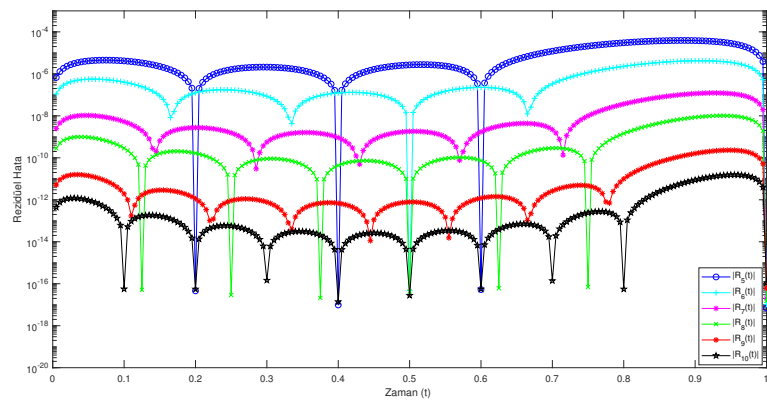


Şekil 5.26: Problem 5.2.6'nın tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.27: Problem 5.2.6'nın $5 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.

Şekil (5.26)'da tam çözüm ve bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.27)'de de $5 \leq N \leq 10$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.28: Problem 5.2.6'nın rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

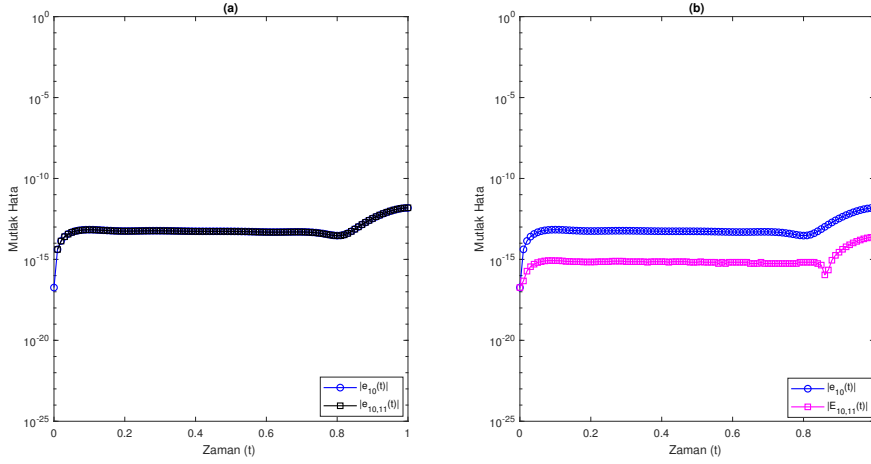
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=5}^{\infty}$, ilk beş değerinin grafiği Şekil (5.28)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_{10}(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$e'_{10}(t) = -R_{10}(t) - \int_0^t e_{10}(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 11$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{10,11}(t) = & -2.233 * 10^{-8} t^{11} - 8.791 * 10^{-9} t^{10} + 2.770 * 10^{-6} t^9 \\ & -1.323 * 10^{-8} t^8 - 0.00019 t^7 - 3.420 * 10^{-9} t^6 + 0.00833 t^5 \\ & -1.650 * 10^{-10} t^4 - 0.16667 t^3 - 7.932 * 10^{-13} t^2 + t \end{aligned}$$



Şekil 5.29: Problem 5.2.6'nın yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.29)(a)'da $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{10,11}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.29)(b)'de ise $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{10,11}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.2.7. (Afrouzi et al., 2011; Elmacı and Baykuş Savaşaneril, 2021b) $y(0) = 1, y(1) = 1 + e, y''(0) = 2, y''(1) = 3e$ sınır koşulları altında

$$y^{(4)}(t) = t(1 + e^t) + 3e^t + y(t) - \int_0^t y(s) ds$$

verilen 4. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin

$0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_5(t) = 0.04685t^5 + 0.16667t^4 + 0.53630t^3 + t^2 + 0.96847t + 1$$

$$y_8(t) = 0.00026t^8 + 0.00133t^7 + 0.00836t^6 + 0.04166t^5 \\ + 0.16667t^4 + 0.50004t^3 + t^2 + 0.99996t + 1$$

$$y_{10}(t) = 3.84290 * 10^{-6}t^{10} + 2.32063 * 10^{-5}t^9 + 0.00020t^8 \\ + 0.00139t^7 + 0.00833t^6 + 0.04167t^5 \\ + 0.16667t^4 + 0.5t^3 + t^2 + t + 1$$

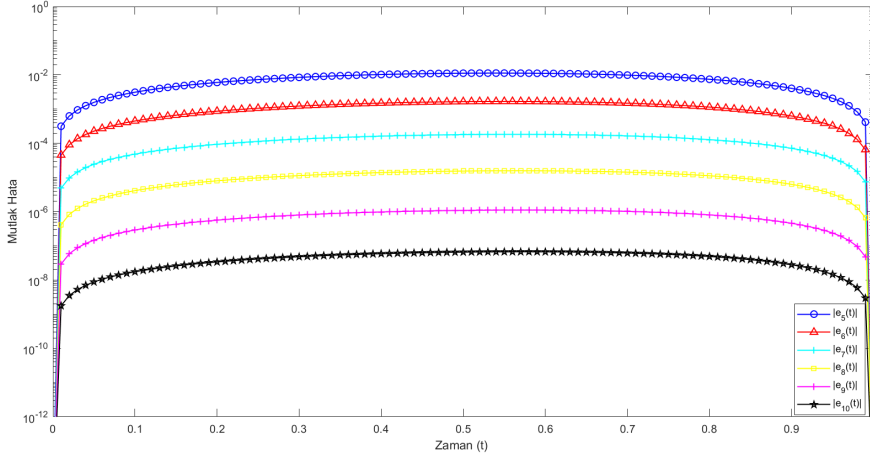
olarak elde edilebilir. Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = 1 + te^t$ 'nin Taylor açılımına yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

Çizelge 5.14: Problem 5.2.7'nin $N = 5, 8, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

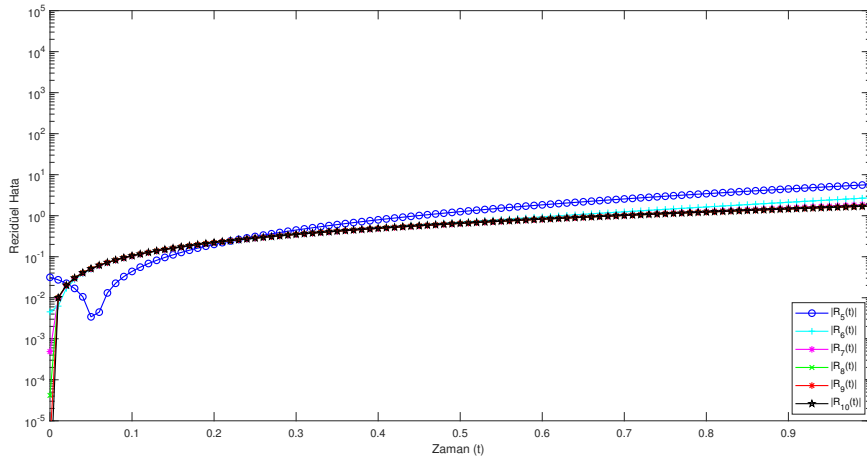
t	Tam Çözüm $1 + te^t$	Euler Yöntemi (N=5)	MHPM Yöntemi (N=5)	Euler Yöntemi (N=8)	Euler Yöntemi (N=10)
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000020	1.0000000000	1.0000000000
0.1	1.1105170918	1.1074000871	1.0935634760	1.1105129699	1.1105170744
0.2	1.2442805516	1.2382653321	1.2118714860	1.2442725686	1.2442805178
0.3	1.4049576423	1.3964837842	1.3599468470	1.4049463190	1.4049575943
0.4	1.5967298791	1.5864559419	1.5431213900	1.5967159959	1.5967298201
0.5	1.8243606354	1.8131509775	1.7670419720	1.8243452311	1.8243605698
0.6	2.0932712802	2.0821629618	2.0376764570	2.0932556515	2.0932712134
0.7	2.4096268952	2.3997670887	2.3613197190	2.4096125911	2.4096268337
0.8	2.7804327428	2.7729758999	2.7445996270	2.7804215274	2.7804326939
0.9	3.2136428000	3.2095955095	3.1944830470	3.2136364934	3.2136427721
Süre		1.049 s		1.052 s	1.062 s

Çizelge (5.14)'de tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi ve Modifiye Homotopi Perturbasyon Yöntemi'yle (MHPM) (Afrouzi et al., 2011) elde edilen çözüm değerleri verilerek karşılaştırması yapılmıştır.

Çizelge (5.14)'ten de görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler Modifiye Homotopi Perturbasyon Yöntemi'yle elde edilen çözüme göre tam çözüme daha yakındır.



Şekil 5.30: Problem 5.2.7'nin $5 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.



Şekil 5.31: Problem 5.2.7'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=5}^{\infty}$, ilk beş değerinin grafiği Şekil (5.31)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

5.3 Lineer Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemi

Lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin genel hali:

$$\sum_{k=0}^m P_k(t) y^{(k)}(t) = g(t) + \int_a^b K_f(t, s) y(s) ds + \int_a^t K_v(t, s) y(s) ds \quad (31)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (32)$$

koşulları altında verilsin.

$P_k(t)$, $g(t)$, $K_f(t, s)$ ve $K_v(t, s)$ sürekli fonksiyonlar, $a \leq t \leq b$ aralığında a_{jk} , b_{jk} ve μ_j uygun sabitler, $y(t)$ de bilinmeyen çözüm fonksiyonu olarak tanımlansın. Denklem (31) ve (32)'de tanımlanan problemin çözümü için denklem (2)'de verilen Euler polinomlarının sonlu seri formunu ele alalım.

Sıralama noktaları;

$$t_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde ifade edildiğinde, matris denklemlerinin sistemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(t_i) \mathbf{T}(t_i) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = g(t_i) + \mathbf{T}(t_i) \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f(t_i) \mathbf{S} \mathbf{A} + \overline{\mathbf{T}}(t_i) \overline{\mathbf{K}_v \mathbf{Q}_v}(t_i) \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (33)$$

kısaca

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \mathbf{T} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f \mathbf{S} \mathbf{A} + \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_v \mathbf{Q}_v} \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (34)$$

ile gösterilebilir. $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{B}^k$, $\mathbf{S}$, $\overline{\mathbf{T}}$, $\overline{\mathbf{K}}$ ve $\overline{\mathbf{Q}}$ önceki bölümlerde tanımlandığı şekliyle olmak üzere,

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - (\mathbf{T} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f + \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_v \mathbf{Q}_v}) \mathbf{S}$$

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Leftrightarrow [\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (35)$$

arttırılmış matris sistemiyle ifade edilebilir. Ayrıca denklem (32)'deki başlangıç koşulu da:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{jk} \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_j]$$

veya

$$\left[\mathbf{U} : \mathbf{A} \right]$$

ile ifade edilir ve denklem (35)'deki uygun bir satıra yazarak sonuç matris denklemini aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \left[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}} \right]$$

Sistem çözülerek bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

$$y_N(t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{A} = \mathbf{T}(t)\mathbf{S}\mathbf{A}$$

5.3.1 Model Problemler

Bu bölümde, bazı model problemler çözülüp elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla kıyaslanacaktır.

Problem 5.3.1. (ilhan, 2012) $y(0) = 3$, $y'(1) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$ty''(t) - \frac{t}{2}y'(t) + y(t) = g(t) + \frac{1}{7} \int_0^2 (t^2 - s)y(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t sy(s) ds$$

verilen 2. mertebeden Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$0 \leq t, s \leq 2$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = -\frac{t}{2}, \quad P_2(t) = t,$$

$$g(t) = -\frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{12}t^2 + t + \frac{11}{3},$$

$$K_f(t, s) = \frac{t^2 - s}{7}, \quad K_v(t, s) = \frac{s}{2}$$

$N = 3$ için $y_3(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 2$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{2}{3}, t_2 = \frac{4}{3}, t_3 = 2\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemini

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{B}^k \mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{G} + (\mathbf{T}\mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f + \overline{\mathbf{T}\mathbf{K}_v} \overline{\mathbf{Q}_v}) \mathbf{S}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{B}^k \mathbf{S} - (\mathbf{TK}_f \mathbf{Q}_f + \overline{\mathbf{TK}}_v \overline{\mathbf{Q}}_v) \mathbf{S}$$

ile ifade edilir.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} & -\frac{11}{42} & \frac{4}{21} & \frac{53}{140} \\ \frac{22}{21} & \frac{8}{567} & \frac{95}{81} & \frac{889}{1032} \\ \frac{1}{3} & -\frac{25}{1134} & \frac{382}{189} & \frac{4229}{730} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{2}{3} & \frac{15}{7} & \frac{191}{14} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{34}{9} \\ \frac{233}{81} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir. Başlangıç koşulları yerine yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matris sistemi:

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} & -\frac{11}{42} & \frac{4}{21} & \frac{53}{140} & : & \frac{11}{3} \\ \frac{22}{21} & \frac{8}{567} & \frac{95}{81} & \frac{889}{1032} & : & \frac{34}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & : & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

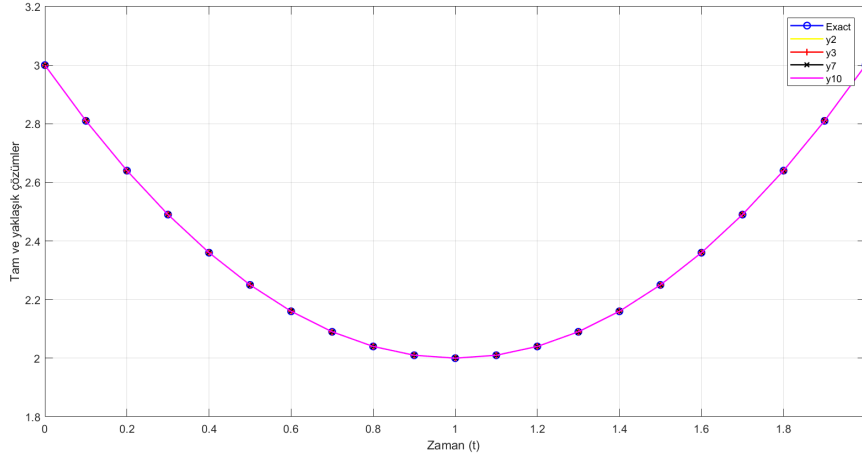
Denklem sistemi çözüldüğünde, $y_3(t) = 1.34840 * 10^{-16}t^3 + t^2 - 2t + 3$ 'nin elde edildiği görülecektir.

Farklı N değerleri için elde edilen çözümler:

$$y_2(t) = t^2 - 2t + 3$$

$$\begin{aligned} y_7(t) = & 5.71393 * 10^{-15}t^7 - 3.41843 * 10^{-14}t^6 + 8.27914 * 10^{-14}t^5 \\ & -1.04290 * 10^{-13}t^4 + 7.31236 * 10^{-14}t^3 + t^2 - 2t + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{10}(t) = & -2.13831 * 10^{-14}t^{10} + 1.94531 * 10^{-13}t^9 - 7.68252 * 10^{-13}t^8 \\ & +1.72628 * 10^{-12}t^7 - 2.42961 * 10^{-12}t^6 + 2.22147 * 10^{-12}t^5 \\ & -1.32471 * 10^{-12}t^4 + 5.04605 * 10^{-13}t^3 + t^2 - 2t + 3 \end{aligned}$$



Şekil 5.32: Problem 5.3.1'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = t^2 - 2t + 3$ 'nin elde edilebileceği görülecektir.

Problem 5.3.2. (ilhan, 2012) $y(0) = 1$, $y'(1) = -e$, $y''(0) = -2$ başlangıç koşulları altında

$$\cos ty'''(t) + \sin ty''(t) = g(t) + 4 \int_0^4 te^s y(s) ds + 2 \int_0^t \sin sy(s) ds$$

verilen 3. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 4$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 0, \quad P_1(t) = 0, \quad P_2(t) = \sin t, \quad P_3(t) = \cos t,$$

$$g(t) = t(3 + 5e^8) - 2e^t(t \cos t + \sin t) - 2,$$

$$K_f(t, s) = 4te^s, \quad K_v(t, s) = \sin s$$

$N = 4$ için $y_4(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_4(t) = \sum_{n=0}^4 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 4$ için $\{t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemini önceki örnekteki gibi ifade edildikten sonra, arttırılmış matris sistemi:

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & : & -2 \\ -\frac{10103}{60} & -\frac{7829}{19} & -\frac{38453}{35} & -\frac{57153}{19} & -\frac{58126}{7} & : & \frac{104288}{7} \\ -\frac{1688}{5} & -\frac{37156}{45} & -\frac{26405}{12} & -\frac{36137}{6} & -\frac{182750}{11} & : & \frac{268312}{9} \\ -\frac{10093}{20} & -\frac{27201}{22} & -\frac{188066}{57} & -\frac{171744}{19} & -\frac{174752}{7} & : & 44835 \\ -\frac{9968}{15} & -\frac{73112}{45} & -\frac{56284}{13} & -\frac{71117}{6} & -\frac{196525}{6} & : & \frac{179992}{3} \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & : & -2 \\ -\frac{10103}{60} & -\frac{7829}{19} & -\frac{38453}{35} & -\frac{57153}{19} & -\frac{58126}{7} & : & \frac{104288}{7} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & : & -\frac{1457}{536} \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & : & -2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan $N = 4$ için yaklaşık çözüm:

$$y_4(t) = -0.71500t^4 - 0.33333t^3 - t^2 + 3, 14172t + 1$$

olarak elde edilir.

Farklı N değerleri için elde edilen çözümler ise:

$$y_3(t) = -0.33333t^3 - t^2 + 0.28172t + 1$$

$$y_8(t) = -0.00494t^8 + 0.04034t^7 - 0.14383t^6 + 0.17736t^5 - 0.25689t^4 \\ -0.33333t^3 - t^2 + 1.04258t + 1$$

$$\begin{aligned}
y_{10}(t) = & -0.00349t^{10} + 0.04782t^9 - 0.26928t^8 \\
& + 0.79498t^7 - 1.32912t^6 + 1.17673t^5 - 0.59868t^4 \\
& - 0.33333t^3 - t^2 + 0.96148t + 1
\end{aligned}$$

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = (1-t)e^t$ 'ye yaklaşık çözümler olduğu görülecektir.

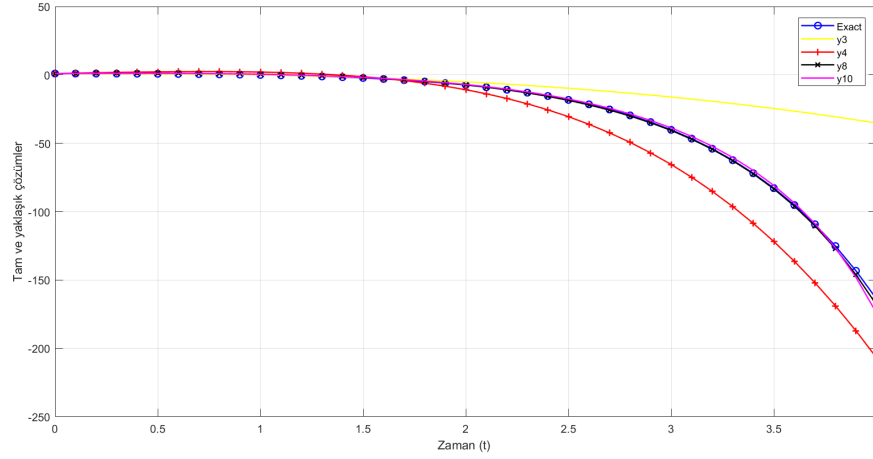
Çizelge (5.15)'te tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümü ve bunun yanı sıra Morgan Voyce Polinom çözümü (İlhan, 2012) değerleriyle karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.15: Problem 5.3.2'nin $N = 4, 8, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

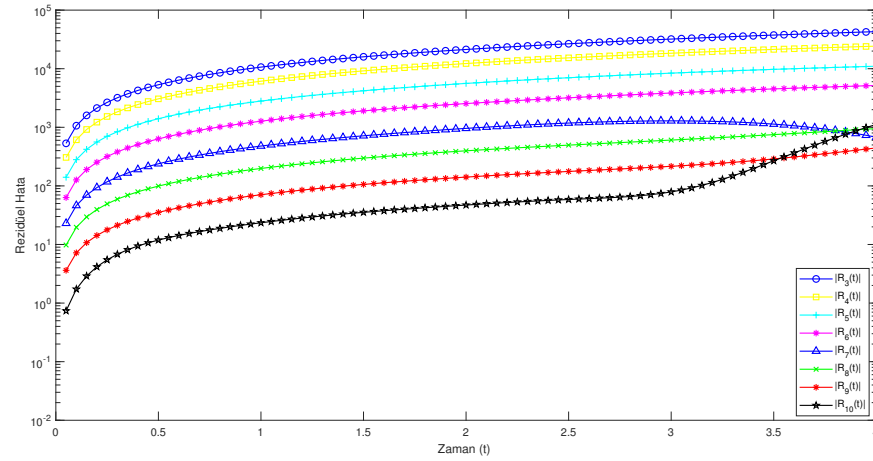
t	Tam Çözüm (1-t)e ^t	Euler Yöntemi (N=4)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=4)	Euler Yöntemi (N=8)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=8)	Euler Yöntemi (N=10)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=10)
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
0.2	0.9771222065	1.5845326798	1.5842430391	1.1654865584	1.1651273218	1.1489719395	1.1487984877
0.4	0.8950948186	2.0570493676	2.0564782124	1.2304124759	1.2297217106	1.1956752457	1.1954393714
0.6	0.7288475202	2.3603660844	2.3595424367	1.1683825182	1.1674235492	1.1149807009	1.1148230575
0.8	0.4451081857	2.4098428645	2.4088305731	0.9462195960	0.9450812965	0.8780496768	0.8780196793
1	0.0000000000	2.0933837566	2.0922954272	0.5212884069	0.5200830628	0.4470954272	0.4471297392
1.2	-0.6640233845	1.2714368229	1.2704477491	-0.1624225432	-0.1635438144	-0.2285053538	-0.2285701000
1.4	-1.6220799867	-0.2230058605	-0.2236437666	-1.1786424072	-1.1794637701	-1.2143374385	-1.2148032992
1.6	-2.9718194546	-2.5844082035	-2.5843524810	-2.6232746561	-2.6234957114	-2.5939667750	-2.5953722372
1.8	-4.8397179715	-6.0346901023	-6.0334938106	-4.6191704783	-4.6184110919	-4.4755399576	-4.4787472725
2	-7.3890560989	-10.8232274393	-10.8203252275	-7.3219303034	-7.3197735803	-7.0029275917	-7.0091108347
2.2	-10.8300161993	-17.2268520828	-17.2215462593	-10.9279546778	-10.9240290921	-10.3702049979	-10.3807035849
2.4	-15.4324469329	-25.5498518876	-25.5412984892	-15.6864755560	-15.6805575021	-14.8369406853	-14.8530427910
2.6	-21.5419808560	-36.1239706944	-36.1111655559	-21.9178089162	-21.9098998994	-20.7425852667	-20.7653826001
2.8	-29.6003641880	-49.3084083302	-49.2901731535	-30.0405794421	-30.0308778013	-28.5225185225	-28.5529174107
3	-40.1710738464	-65.4898206081	-65.4647890319	-40.6111778612	-40.5998232815	-38.7373177310	-38.7759486480
3.2	-53.9715664336	-85.0823193272	-85.0489229965	-54.3792213609	-54.3656415248	-52.1418537113	-52.1877974910
3.4	-71.9138401138	-108.5274722731	-108.4839269079	-72.3632973513	-72.3449298611	-69.8431998413	-69.8889070728
3.6	-95.1554095536	-136.2943032173	-136.2385946828	-95.9517806789	-95.9218798837	-93.6273511739	-93.6445929503
3.8	-125.1633165812	-168.8792919174	-168.8091622928	-127.0340242366	-126.9781918036	-126.5756932389	-126.4835257959
4	-163.7944500994	-206.8063741174	-206.7193077657	-168.1677327560	-168.0587327387	-174.1443307491	-173.7445208778
Süre		1.060 s		1.105 s		1.137 s	

Çizelge (5.15)'ten de görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler Morgan Voyce Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümlerle birbirine çok yakındır.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=3}^{\infty}$, ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (5.34)'te verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.



Şekil 5.33: Problem 5.3.2'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.34: Problem 5.3.2'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Problem 5.3.3. (ilhan, 2012; Elmacı and Baykuş Savaşaneril, 2021b)

$y(0) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = -1$ başlangıç koşulları altında verilen

$$ty''(t) - e^t y'(t) + y(t) = -t \cos t - \frac{1}{2} \sin^2 t - \frac{1}{2} \int_0^\pi s \cos ty(s) ds + \int_0^t (e^t + \sin s) y(s) ds$$

2. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$0 \leq t, s \leq \pi$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = -e^t, \quad P_2(t) = t,$$

$$g(t) = -t \cos t - \frac{1}{2} \sin^2 t,$$

$$K_f(t, s) = -\frac{s \cos t}{2}, \quad K_v(t, s) = e^t + \sin s$$

$N = 3$ için $y_3(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = \pi$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{3}, t_2 = \frac{2\pi}{3}, t_3 = \pi\}$ şeklinde bulunur. Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + (\mathbf{T} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f + \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_v} \overline{\mathbf{Q}_v}) \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - (\mathbf{T} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f + \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_v} \overline{\mathbf{Q}_v}) \mathbf{S}$$

ile ifade edilir.

Arttırılmış matris sistemi ve başlangıç koşulları yerine yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matris sistemi:

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \frac{3776}{1089} & \frac{959}{394} & \frac{2851}{356} & \frac{4582}{347} & : & 0 \\ -\frac{849}{652} & -\frac{518}{755} & \frac{2617}{959} & \frac{3195}{367} & : & -\frac{1090}{1213} \\ -\frac{828}{47} & -\frac{2407}{120} & -\frac{3755}{109} & -\frac{5719}{106} & : & \frac{1661}{2471} \\ -\frac{26841}{494} & -\frac{2257}{27} & -\frac{13732}{65} & -\frac{59954}{103} & : & \frac{355}{113} \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \frac{3776}{1089} & \frac{959}{394} & \frac{2851}{356} & \frac{4582}{347} & : & 0 \\ -\frac{849}{652} & -\frac{518}{755} & \frac{2617}{959} & \frac{3195}{367} & : & -\frac{1090}{1213} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & : & 1 \\ 0 & 1 & \frac{242}{113} & \frac{581}{216} & : & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan yaklaşık çözüm:

$$y_3(t) = 0.17110t^3 - 0.80992t^2 + 0.27795t + 1$$

olarak elde edilir.

Farklı N değerleri için elde edilen çözümler de:

$$y_6(t) = -0.00069t^6 - 0.00259t^5 + 0.04578t^4 - 0.00145t^3 \\ -0.50533t^2 + 0.00683t + 1$$

$$y_{10}(t) = -2.19418 * 10^{-7}t^{10} - 5.56683 * 10^{-8}t^9 + 2.38468 * 10^{-5}t^8 \\ +4.34396 * 10^{-6}t^7 - 0.00140t^6 + 9.56652 * 10^{-6}t^5 + 0.04166t^4 \\ +5.07526 * 10^{-6}t^3 - 0.5t^2 + 0.00001t + 1$$

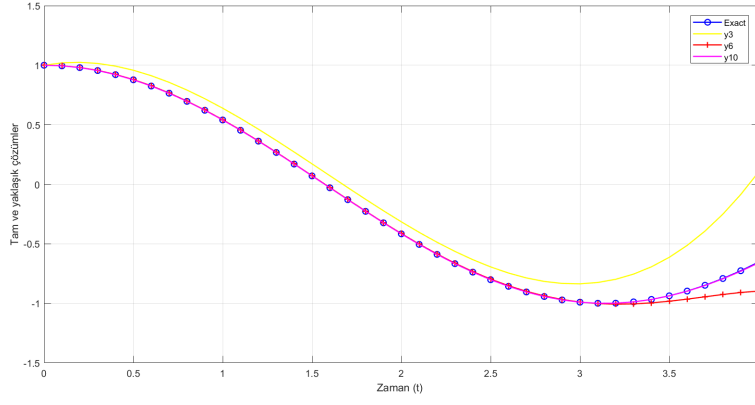
Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = \cos t$ 'nin Taylor açılımına yaklaşık olduğu görülecektir.

Çizelge (5.16)'da tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözüm ve Morgan Voyce Polinomu çözüm (ilhan, 2012) değerleriyle karşılaştırılmıştır.

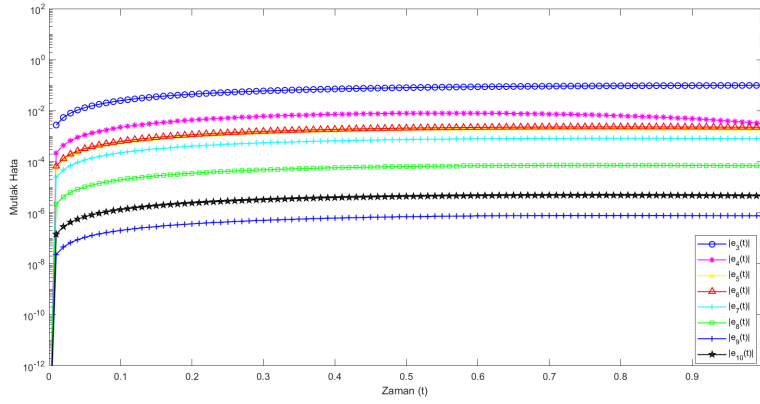
Çizelge 5.16: Problem 5.3.3'ün $N = 3, 6, 10$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $\cos t$	Euler Yöntemi (N=3)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=3)	Euler Yöntemi (N=6)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=6)	Euler Yöntemi (N=10)	Morgan-Voyce Yöntemi (N=10)
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
0.2	0.9800665778	1.0245616407	1.0245616407	0.9812142117	0.9812142117	0.9800689974	0.9800689975
0.4	0.9210609940	0.9925423385	0.9925423386	0.9229300335	0.9229300335	0.9210649297	0.9210649297
0.6	0.8253356149	0.9121547116	0.9121547116	0.8275664812	0.8275664812	0.8253403142	0.8253403142
0.8	0.6967067093	0.7916113780	0.7916113780	0.6990329952	0.6990329952	0.6967115818	0.6967115818
1	0.5403023059	0.6391249557	0.6391249557	0.5425508934	0.5425508934	0.5403069334	0.5403069334
1.2	0.3623577545	0.4629080630	0.4629080629	0.3644431664	0.3644431664	0.3623619070	0.3623619070
1.4	0.1699671429	0.2711733177	0.2711733176	0.1718926144	0.1718926145	0.1699708176	0.1699708176
1.6	-0.0291995223	0.0721333381	0.0721333380	-0.0273316732	-0.0273316731	-0.0291960266	-0.0291960266
1.8	-0.2272020947	-0.1259992577	-0.1259992580	-0.2251794972	-0.2251794971	-0.2271980643	-0.2271980643
2	-0.4161468365	-0.3150118518	-0.3150118522	-0.4136563853	-0.4136563852	-0.4161410050	-0.4161410050
2.2	-0.5885011173	-0.4866918260	-0.4866918265	-0.5851920867	-0.5851920866	-0.5884916028	-0.5884916028
2.4	-0.7373937155	-0.6328265623	-0.6328265629	-0.7330407254	-0.7330407252	-0.7373783992	-0.7373783991
2.6	-0.8568887534	-0.7452034425	-0.7452034433	-0.8517126105	-0.8517126102	-0.8568671187	-0.8568671187
2.8	-0.9422223407	-0.8156098486	-0.8156098496	-0.9374377054	-0.9374377051	-0.9422011457	-0.9422011457
3	-0.9899924966	-0.8358331625	-0.8358331637	-0.9886607546	-0.9886607541	-0.9900001218	-0.9900001217
π	-1.0000000000	-0.8153284787	-0.8153285481	-1.0045871731	-1.0045871576	-1.0000723499	-1.0000723496
Süre		1.027 s		1.052 s		1.104 s	

Çizelge (5.16)'dan da görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler Morgan Voyce Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümlerle birbirine çok yakındır.

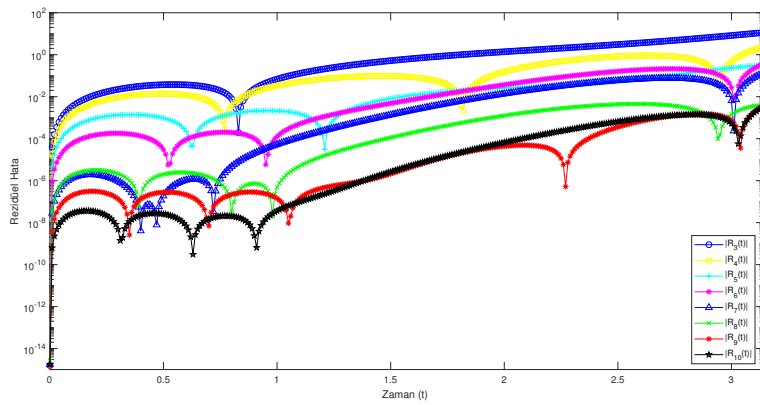


Şekil 5.35: Problem 5.3.3'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.36: Problem 5.3.3'ün $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.

Şekil (5.35)'de tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.36)'de de $3 \leq N \leq 10$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.37: Problem 5.3.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=3}^{\infty}$, ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (5.37)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_{10}(0) = 0$, $e'_{10}(\pi/2) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$e''_{10}(t) - e^t e'_{10}(t) + e_{10}(t) = -R_{10}(t)$$

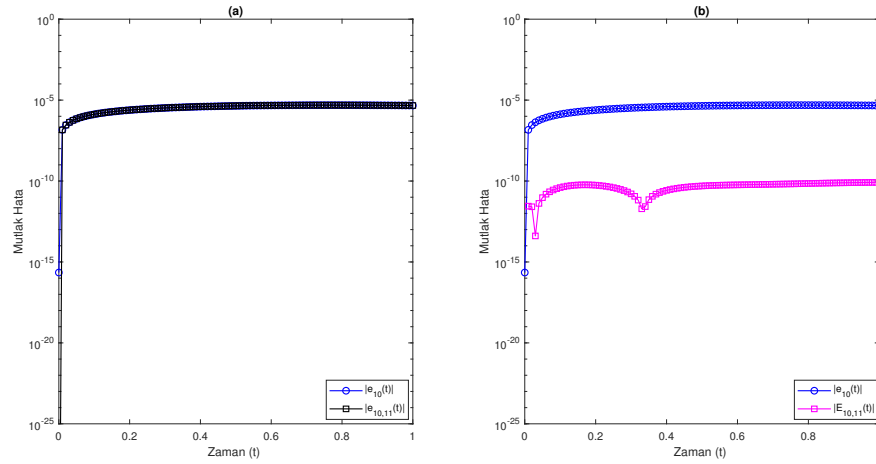
$$-\frac{1}{2} \int_0^{\pi} s \cos t e_{10}(s) ds + \int_0^t (e^t + \sin s) e_{10}(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 11$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{10,11}(t) = 2.353 * 10^{-8} t^{11} - 4.075 * 10^{-7} t^{10} + 4.559 * 10^{-7} t^9$$

$$+ 2.376 * 10^{-5} t^8 + 1.639 * 10^{-6} t^7 - 0.00139 t^6 + 1.267 * 10^{-6} t^5$$

$$+ 0.04167 t^4 + 1.577 * 10^{-7} t^3 + 0.5 t^2 + 4.617 * 10^{-10} t + 1$$



Şekil 5.38: Problem 5.3.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.38)(a)'da $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{10,11}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.38)(b)'de ise $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{10,11}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.3.4. (Yalçınbaş and Sezer, 2000)

$y(0) = 1$, $y'(0) - 2y(1) + 2y(0) = 1$ başlangıç koşulları altında verilen

$$ty''(t) - ty'(t) + 2y(t) = g(t) + \int_0^1 (t+s)y(s) ds + \int_0^t (t-s)y(s) ds$$

2. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminde $g(t)$ fonksiyonu

$$g(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{13}{6}t + \frac{17}{12}$$

olarak verildiğinde, $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

N=2 olarak seçildiğinde, problemin tam çözümü olan

$$y_2(t) = -t^2 + t + 1$$

elde edilir.

N=3 olarak seçildiğinde, ise

$$y_3(t) = -4.24978 * 10^{-15}t^3 - t^2 + t + 1$$

elde edildiği gözlemlenmiştir.

5.4 Gecikmeli ve Değişken Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemler

Günümüzde fen ve mühendislik problemlerinin modellenmesinin gerektirdiği hassasiyet; sistemin sadece şu anki durumuna bağlı olmayıp, geçmişteki durumuna da bağlı olması integro-diferansiyel denklemlere gecikme terimlerinin de eklenmesine sebep olmuştur.

Değişken gecikmeli lineer integro-diferansiyel denkleminin genel hali:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m P_k(t)y^{(k)}(t) + \sum_{r=0}^{m_1} Q_r(t)y^{(r)}(\alpha_r t + \beta_r(t)) &= g(t) \\ + \sum_{j=0}^{m_2} \int_{u_j(t)}^{v_j(t)} K_j(t, s) y^{(j)}(\lambda_j s + \mu_j) ds & \end{aligned} \quad (36)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(k)}(b)) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (37)$$

koşulları altında verilsin.

$P_k(t)$, $Q_r(t)$, $\beta_r(t)$, $g(t)$, $K_j(t, s)$, $u_j(t)$ ve $v_j(t)$ ($m_1 \leq m$, $u_j(t) < v_j(t)$) fonksiyonları $a \leq t, s \leq b$ aralığında sürekli fonksiyonlar, a_{jk} , b_{jk} , α_r , β_r , λ_j ve μ_j uygun sabitler, $y(t)$ de bilinmeyen çözüm fonksiyonu olarak tanımlansın. Denklem (36) ve (37)'de tanımlanan problemin çözümü için denklem (2)'de verilen Euler polinomlarının sonlu seri formunu ele alalım.

Sıralama noktaları;

$$t_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde ifade edildiğinde, $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{B}^k$, $\mathbf{S}$, $\overline{\mathbf{T}}$, $\overline{\mathbf{K}}$ ve $\overline{\mathbf{Q}}$ önceki bölümlerde tanımlandığı şekliyle olmak üzere ve denklem (9)'dan yararlanarak

$$y^{(r)}(t) = y_N^r(t) = \mathbf{E}^r(t)\mathbf{A} = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^r\mathbf{S}\mathbf{A}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

olarak ifade edilebilir.

t yerine $(\alpha_r t + \beta_r(t))$ yazılırsa,

$$y^{(r)}(\alpha_r t + \beta_r(t)) = \mathbf{T}(\alpha_r t + \beta_r(t))\mathbf{B}^r\mathbf{S}\mathbf{A}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

$$\mathbf{T}(\alpha_r t + \beta_r(t)) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(\alpha_r, \beta_r(t)) \quad (39)$$

$$B(\alpha_r, \beta_r(t)) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_r^0 \beta_r^0(t) & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_r^0 \beta_r^1(t) & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_r^0 \beta_r^2(t) & \dots & \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_r^0 \beta_r^N(t) \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_r^1 \beta_r^0(t) & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_r^1 \beta_r^1(t) & \dots & \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_r^1 \beta_r^{N-1}(t) \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \alpha_r^2 \beta_r^0(t) & \dots & \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} \alpha_r^2 \beta_r^{N-2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \begin{pmatrix} N \\ N \end{pmatrix} \alpha_r^N \beta_r^0(t) \end{bmatrix}$$

olmak üzere, matris denklemlerinin sistemi

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(t_i) \mathbf{T}(t_i) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} \\ & + \sum_{r=0}^{m_1} \mathbf{Q}_r(t_i) \overline{\mathbf{T}}(t_i) \overline{\mathbf{B}}(\alpha_r, \beta_r(t_i)) \mathbf{B}^r \mathbf{S} \mathbf{A} = \\ & g(t_i) + \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{T}(t_i) \mathbf{K}_j \mathbf{Q}(t_i) \mathbf{B}(\lambda_j, \mu_j) \mathbf{B}^j \mathbf{S} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (40)$$

haline dönüştürülebilir. Buradan $\mathbf{W}$ aşağıdaki gibi alınarak denklem sistemi:

$$\mathbf{W} = \left(\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k + \sum_{r=0}^{m_1} \mathbf{Q}_r \overline{\mathbf{T}} \mathbf{B}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{B}^r - \sum_{j=0}^{m_2} (\mathbf{T} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f + \overline{\mathbf{T}} \mathbf{K}_v \overline{\mathbf{Q}}_v) \mathbf{B}(\lambda_j, \mu_j) \mathbf{B}^j \right) \mathbf{S}$$

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (41)$$

arttırılmış matris sistemiyle ifade edilebilir. Ayrıca denklem (37)'daki başlangıç koşulu da:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{jk} \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_j]$$

veya

$$\left[\mathbf{U} : \mathbf{A} \right]$$

ile ifade edilir ve denklem (41)' taki uygun bir satıra yazarak sonuç matris denklemini aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \left[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}} \right]$$

Sistem çözümlere bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

$$y_N(t) = \mathbf{E}(t) \mathbf{A} = \mathbf{T}(t) \mathbf{S} \mathbf{A}$$

5.4.1 Model Problemler

Problem 5.4.1. (Elmacı et al., 2019) $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$y'(t) - t^4 y'(t - t^2) = 1 - 2t^3 + 2 \int_{t-t^2}^t y(s) ds$$

verilen 1. mertebeden değişken gecikmeli nötral tipteki integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 0, \quad P_1(t) = 1, \quad R_0(t) = 0, \quad R_1(t) = -t^4$$

$$\tau(t) = t^2, \quad g(t) = 1 - 2t^3, \quad K_f(t, s) = 0, \quad K_v(t, s) = 2$$

$N = 2$ için $y_2(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_2(t) = \sum_{n=0}^2 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 1$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Problemnin temel matris denklemi

$$(\mathbf{P}_1 \mathbf{TBS} + \mathbf{R}_1 \overline{\mathbf{TB}}(-\tau) \mathbf{BS} - \overline{\mathbf{TK}_v \mathbf{Q}_v} \mathbf{S}) \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 \mathbf{TBS} + \mathbf{R}_1 \overline{\mathbf{TB}}(-\tau) \mathbf{BS} - \overline{\mathbf{TK}_v \mathbf{Q}_v} \mathbf{S}$$

ile ifade edilir.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(-\tau(t)) = \begin{bmatrix} 1 & -t^2 & t^4 \\ 0 & 1 & -2t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}}(-\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(-\tau(0)) \\ \mathbf{B}(-\tau(\frac{1}{2})) \\ \mathbf{B}(-\tau(1)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(0) \\ \mathbf{Q}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{Q}(1) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} : \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & : & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{48} & : & \frac{3}{4} \\ -2 & 0 & \frac{7}{3} & : & -1 \end{bmatrix} \quad [\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & : & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & : & 0 \\ -2 & 0 & \frac{7}{3} & : & -1 \end{bmatrix}$$

Denklem sistemi çözüldüğünde, denklemin tam çözümü olan $y(t) = t$ 'nin elde edildiği görülecektir.

Problem 5.4.2. (Elmacı et al., 2019) $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında

$$y'(t) - 2e^{t^2} y'(t - t^2) = -e^{t-t^2} - \int_{t-t^2}^t y(s) ds$$

verilen 1. mertebeden değişken gecikmeli nötral tipteki integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 0, \quad P_1(t) = 1, \quad R_0(t) = 0, \quad R_1(t) = -2e^{t^2}$$

$$\tau(t) = t^2, \quad g(t) = -e^{t-t^2}, \quad K_f(t, s) = 0, \quad K_v(t, s) = -1$$

$N = 2$ için $y_2(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_2(t) = \sum_{n=0}^2 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 1$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Problemın temel matris denklemi

$$(\mathbf{P}_1 \mathbf{TBS} + \mathbf{R}_1 \overline{\mathbf{TB}}(-\tau) \mathbf{BS} - \overline{\mathbf{TK}_v \mathbf{Q}_v} \mathbf{S}) \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 \mathbf{TBS} + \mathbf{R}_1 \overline{\mathbf{TB}}(-\tau) \mathbf{BS} - \overline{\mathbf{TK}_v \mathbf{Q}_v} \mathbf{S}$$

ile ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} : \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & : & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{64e^{\frac{1}{4}}+31}{32} & \frac{192e^{\frac{1}{4}}-11}{192} & : & -e^{\frac{3}{4}} \\ 1 & 1 & \frac{5}{6} & : & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & : & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{64e^{\frac{1}{4}}+31}{32} & \frac{192e^{\frac{1}{4}}-11}{192} & : & -e^{\frac{3}{4}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_2(t) = 0.24125t^2 + t + 1$$

olarak elde edilebilir.

Farklı N değerleri için elde edilen çözümler:

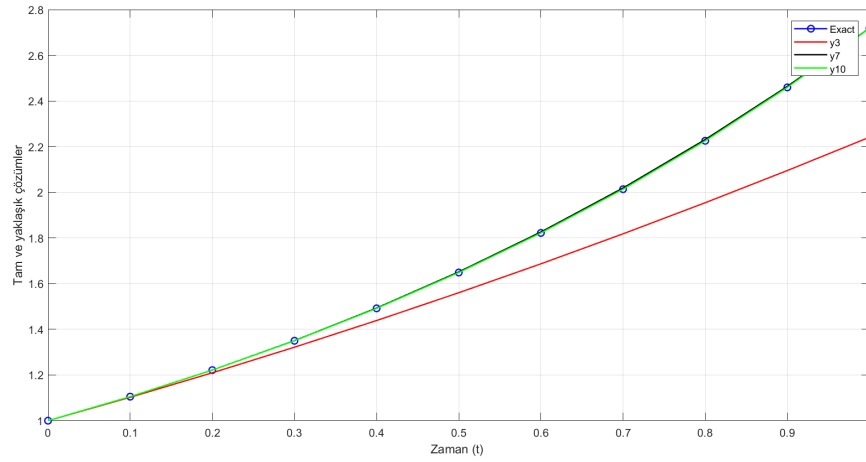
$$y_3(t) = 0.22571t^3 + 0.49323t^2 + t + 1$$

$$\begin{aligned} y_7(t) &= 3.02413 * 10^{-4}t^7 + 1.24009 * 10^{-3}t^6 + 0.00844t^5 \\ &+ 0.04163t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^t$ 'nin Taylor seri açılımlarına yaklaşık olduğu görülebilir.

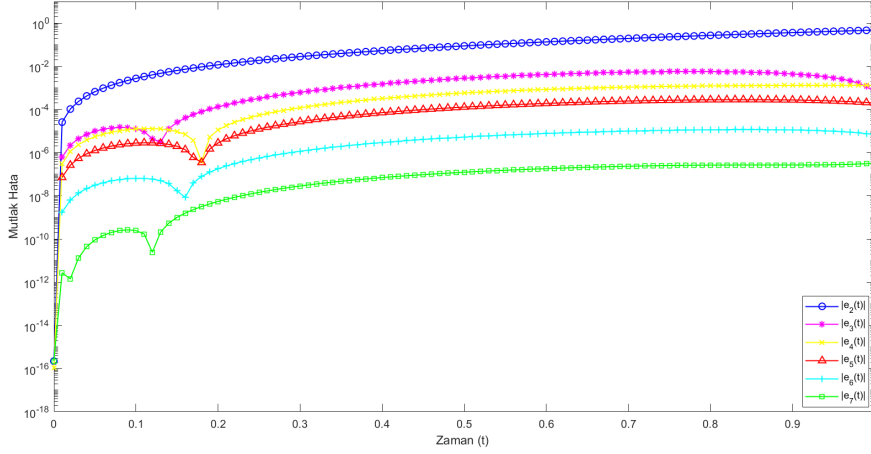
Çizelge 5.17: Problem 5.4.2'nin $N = 2, 3, 7$ için Euler yöntemiyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Euler Yöntemi (N=2)	Euler Yöntemi (N=3)	Euler Yöntemi (N=7)
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
0.1	1.1051709181	1.1024124606	1.1051580193	1.1051709183
0.2	1.2214027582	1.2096498424	1.2215349224	1.2214027527
0.3	1.3498588076	1.3217121454	1.3504849774	1.3498587789
0.4	1.4918246976	1.4385993695	1.4933624524	1.4918246273
0.5	1.6487212707	1.5603115149	1.6515216154	1.6487211465
0.6	1.8221188004	1.6868485814	1.8263167343	1.8221186178
0.7	2.0137527075	1.8182105691	2.0191020774	2.0137524724
0.8	2.2255409285	1.9543974781	2.2312319125	2.2255406629
0.9	2.4596031112	2.0954093082	2.4640605078	2.4596028425
1	2.7182818285	2.2412460595	2.7189421312	2.7182815041
Süre		1.008 s	1.017 s	1.101 s

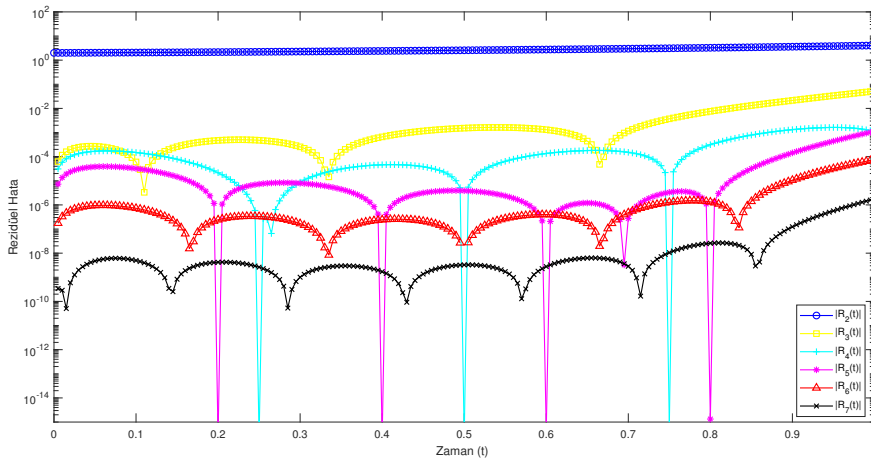


Şekil 5.39: Problem 5.4.2'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.

Şekil (5.39)'ta tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.40)'de de $2 \leq N \leq 7$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.40: Problem 5.4.2'nin $2 \leq N \leq 7$ için mutlak hatalarının grafiği.



Şekil 5.41: Problem 5.4.2'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

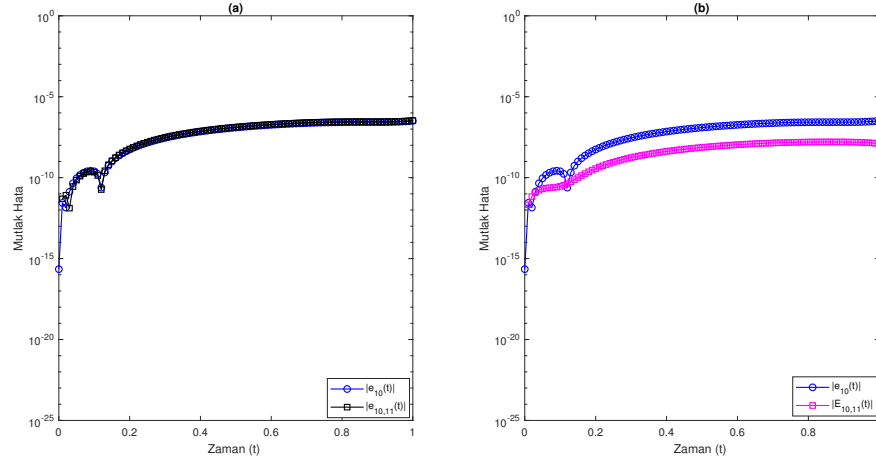
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=2}^{\infty}$, ilk altı değerinin grafiği Şekil (5.41)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_7(0) = 0$, başlangıç koşulu altında

$$e_7'(t) - 2e^{t^2} e_7'(t - t^2) = -R_7(t) - \int_{t-t^2}^t e_7(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 8$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{7,8}(t) = & 3.962 * 10^{-5} t^8 + 0.00017 t^7 + 0.00142 t^6 + 0.00832 t^5 \\ & + 0.04167 t^4 + 0.16667 t^3 + 0.5 t^2 + t + 1 \end{aligned}$$



Şekil 5.42: Problem 5.4.2'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.42)(a)'da $y_7(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{7,8}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.42)(b)'de ise $y_7(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{7,8}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.4.3. (Rihan et al., 2009; Gökmen et al., 2018) $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında

$$y'(t) = y(t-1) + \int_{t-1}^t y(s) ds$$

verilen 1. mertebeden değişken gecikmeli nötral tipteki integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_4(t) = 0.06433t^4 + 0.16081t^3 + 0.48646t^2 + 1.0051t + 1$$

$$y_6(t) = 0.00205t^6 + 0.00819t^5 + 0.04067t^4 \\ + 0.16736t^3 + 0.50026t^2 + 0.99974t + 1$$

$$y_9(t) = 0.000003.93974t^9 + 0.00002.46234t^8 + 0.00019t^7 + 0.00139t^6 \\ + 0.00834t^5 + 0.04166t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

şeklinde elde edilmiştir.

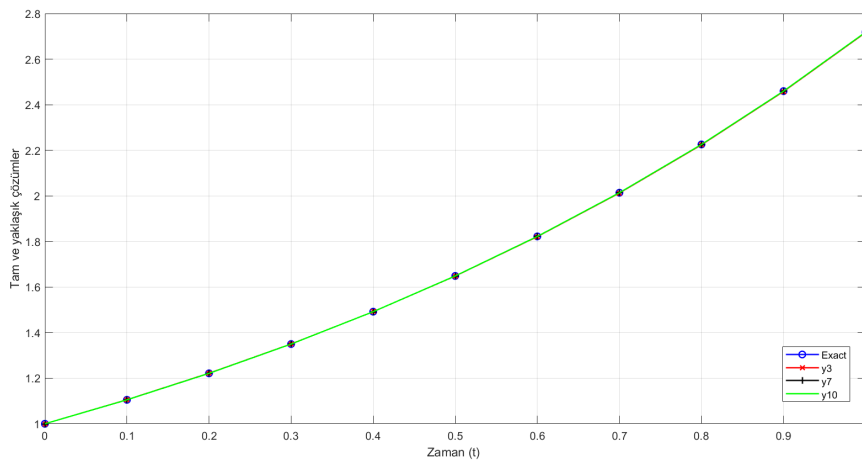
Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^t$ 'nin Taylor seri açılımlarına yaklaşık olduğu görülecektir.

Çizelge 5.18: Problem 5.4.3'ün $N = 4, 6, 9$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Euler Yöntemi (N=4)	Taylor Yöntemi (N=4)	Euler Yöntemi (N=6)	Taylor Yöntemi (N=6)	Euler Yöntemi (N=9)	Taylor Yöntemi (N=9)
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105171	1.105541	1.104943	1.105148	1.105166	1.105171	1.105171
0.2	1.221403	1.221867	1.220837	1.221364	1.221400	1.221403	1.221403
0.3	1.349859	1.350173	1.348912	1.349814	1.349864	1.349859	1.349860
0.4	1.491825	1.491810	1.490522	1.491781	1.491841	1.491825	1.491825
0.5	1.648721	1.648285	1.647139	1.648683	1.648749	1.648722	1.648722
0.6	1.822119	1.821255	1.820355	1.822089	1.822156	1.822119	1.822119
0.7	2.013753	2.012537	2.011883	2.013731	2.013798	2.013753	2.013753
0.8	2.225541	2.224096	2.223556	2.225524	2.225593	2.225541	2.225542
0.9	2.459603	2.458058	2.457327	2.459588	2.459659	2.459604	2.459604
1	2.718282	2.716698	2.715270	2.718266	2.718338	2.718282	2.718283
Süre		1.012 s		1.026 s		1.048 s	

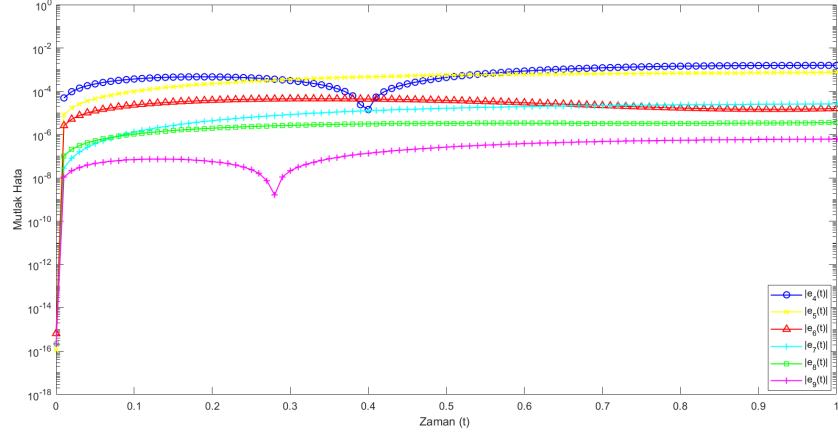
Çizelge (5.18)'de tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözüm ve Taylor Polinomu çözüm (Gökmen et al., 2018) değerleriyle karşılaştırılmıştır.

Çizelge (5.18)'den de görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerle Taylor Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümler birbirine çok yakındır.



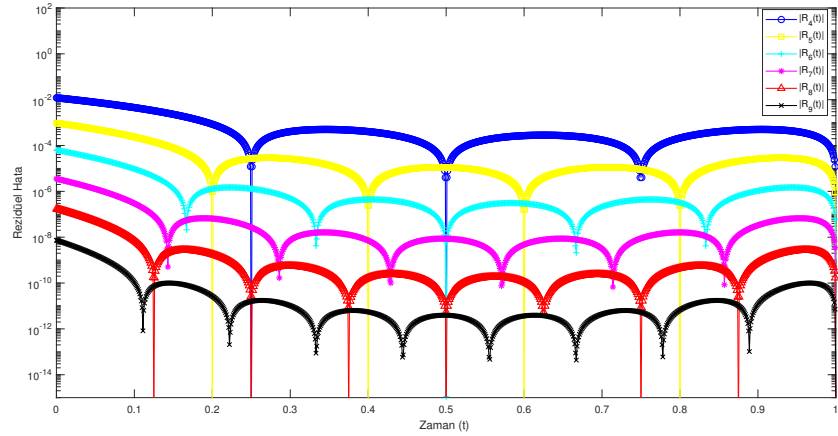
Şekil 5.43: Problem 5.4.3'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.

Şekil (5.43)'te tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.44)'te de



Şekil 5.44: Problem 5.4.3'ün $4 \leq N \leq 9$ için mutlak hatalarının grafiği.

$4 \leq N \leq 9$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.45: Problem 5.4.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

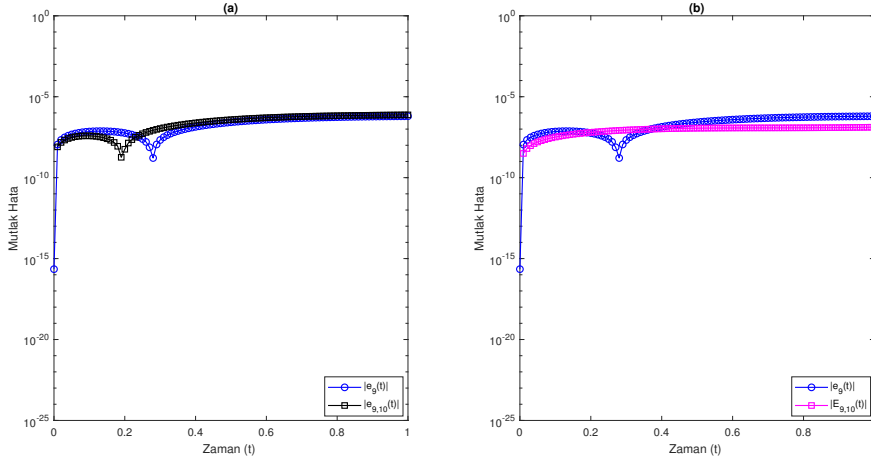
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=4}^{\infty}$, ilk altı değerinin grafiği Şekil (5.45)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_9(0) = 0$, başlangıç koşulu altında

$$e'_9(t) = e_9(t-1) + \int_{t-1}^t e_9(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 10$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{9,10}(t) = & 3.543 * 10^{-7}t^{10} + 2.834 * 10^{-6}t^9 + 2.434 * 10^{-5}t^8 + 0.00020t^7 \\ & + 0.00139t^6 + 0.00833t^5 + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1 \end{aligned}$$



Şekil 5.46: Problem 5.4.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.46)(a)'da $y_9(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{9,10}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.46)(b)'de ise $y_9(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{9,10}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.4.4. (Rihan et al., 2009; Gökmen et al., 2018) $y(0) = e$ başlangıç koşulu altında

$$y'(t) + (6 + \sin(t))y(t) - y(t - \pi/4) = 5e^{\cos(t)} - \int_{t-\pi/4}^t \sin(s)y(s) ds$$

verilen 1. mertebeden değişken gecikmeli nötral tipteki integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_4(t) = 0.31519t^4 + 0.02670t^3 - 1.32115t^2 - 0.01024t + 2.71828$$

$$y_9(t) = -0.00557t^9 + 0.01967t^8 + 0.01367t^7 - 0.11947t^6 - 0.01011t^5 \\ + 0.45935t^4 + 0.00151t^3 - 1.36111t^2 + 0.00030t + 2.71828$$

$$y_{13}(t) = -0.00013t^{13} + 0.00045t^{12} + 0.00081t^{11} - 0.00464t^{10} \\ - 0.00195t^9 + 0.02667t^8 + 0.00182t^7 - 0.11942t^6 - 0.00009t^5 \\ + 0.45445t^4 - 0.00051t^3 - 1.35931t^2 + 0.00009t + 2.71828$$

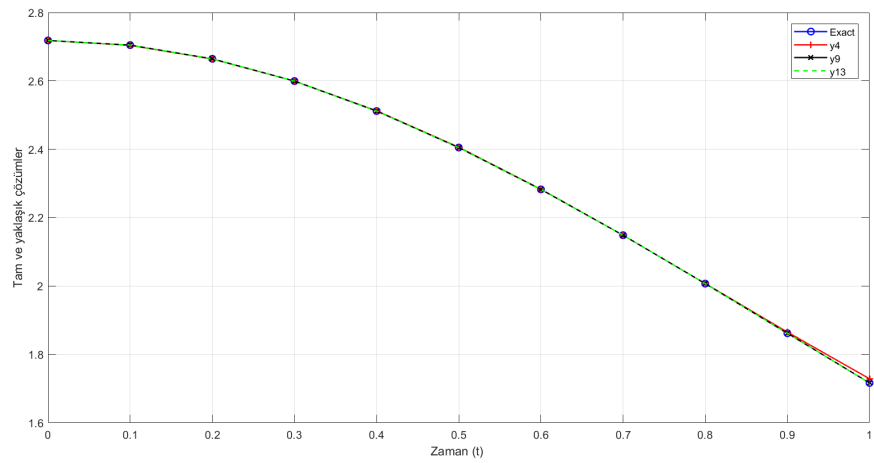
şeklinde elde edilebilir.

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^{\cos(t)}$ 'nin Taylor seri açılımlarına yaklaşık olduğu görülecektir.

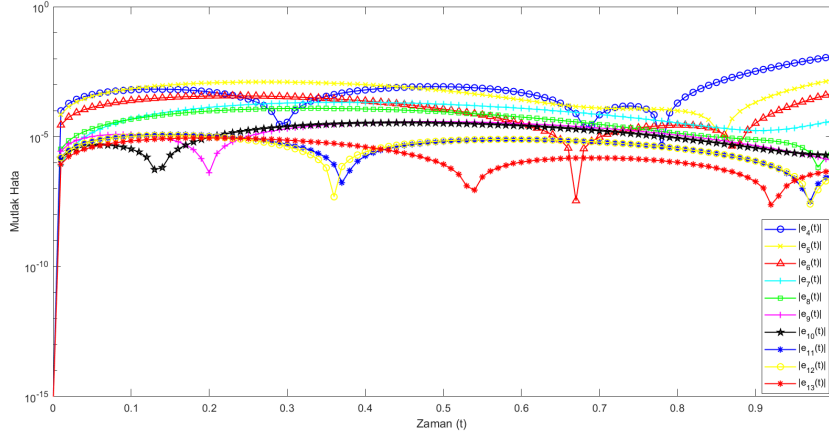
Çizelge (5.19)'de tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümleri verilmiştir.

Çizelge 5.19: Problem 5.4.4'ün $N = 4, 9, 13$ için Euler yöntemiyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $e^{\cos(t)}$	Euler Yöntemi (N=4)	Euler Yöntemi (N=9)	Euler Yöntemi (N=13)
0	2.7182818285	2.7182818285	2.7182818285	2.7182818285
0.1	2.7047356072	2.7041047572	2.7047476818	2.7047423988
0.2	2.6646336416	2.6641061164	2.6646332340	2.6646425622
0.3	2.5995451544	2.5995807885	2.5995250314	2.5995524642
0.4	2.5119541449	2.5125801098	2.5119198974	2.5119581323
0.5	2.4050785446	2.4059118696	2.4050408692	2.4050793909
0.6	2.2826467271	2.2831403106	2.2826148578	2.2826456832
0.7	2.1486552628	2.1485861290	2.1486337215	2.1486537417
0.8	2.0071317429	2.0073264742	2.0071202955	2.0071307168
0.9	1.8619232675	1.8651949490	1.8619187590	1.8619230820
1	1.7165256995	1.7287816096	1.7165245308	1.7165262044
Süre		1.032 s	1.078 s	1.136 s

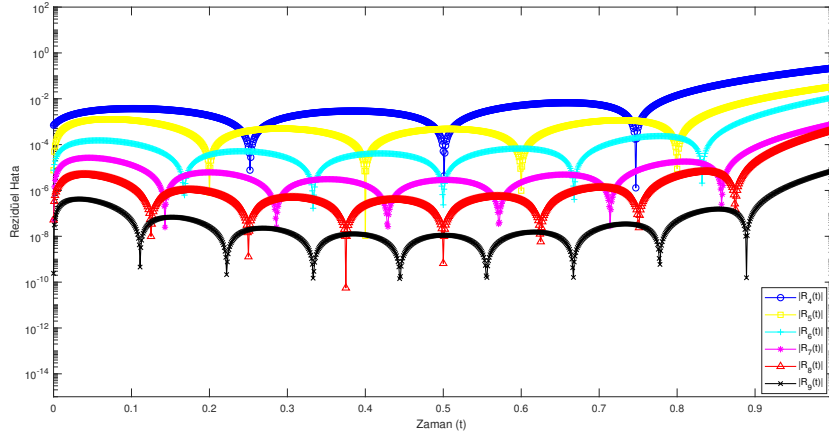


Şekil 5.47: Problem 5.4.4'ün tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.48: Problem 5.4.4'ün $4 \leq N \leq 13$ için mutlak hatalarının grafiği.

Şekil (5.47)'de tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.48)'da da $4 \leq N \leq 13$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.49: Problem 5.4.4'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=4}^{\infty}$, ilk altı değerinin grafiği Şekil (5.49)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

Problem 5.4.5. (Gülsu and Sezer, 2011) $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında

$$y'(t) - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}y\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}y(t) = -et + t - 2 - te^t + e^t + \int_0^1 (t+s)y(s)ds + \int_0^t sy(s)ds$$

verilen 1. mertebeden oransal gecikmeli Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = -\frac{1}{2}, \quad Q_0(t) = -\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}, \quad P_1(t) = 1, \quad Q_1(t) = 0,$$

$$g(t) = -et + t - 2 - te^t + e^t, \quad K_f(t, s) = t + s, \quad K_v(t, s) = s$$

$N = 4$ için $y_4(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_4(t) = \sum_{n=0}^4 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 1$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{2}{4}, t_3 = \frac{3}{4}, t_4 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} + \sum_{r=0}^{m_1} \mathbf{Q}_r \overline{\mathbf{T} \mathbf{B}} (\alpha_r, \beta_r) \mathbf{B}^r \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \sum_{j=0}^{m_2} \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_j} \mathbf{Q} \mathbf{B} (\lambda_j, \mu_j) \mathbf{B}^j \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_0 \mathbf{T} \mathbf{S} + \mathbf{P}_1 \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{S} + \mathbf{Q}_0 \mathbf{T} \mathbf{B} (\alpha_r, \beta_r) \mathbf{S} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{T} \mathbf{B} (\alpha_r, \beta_r) \mathbf{B} \mathbf{S}$$

$$- \mathbf{T} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f \mathbf{S} - \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_v} \mathbf{Q}_v \mathbf{S}$$

ile ifade edilir. Sistem çözüldüğünde,

$$y_4(t) = 0.06123t^4 + 0.15383t^3 + 0.50279t^2 + t + 1$$

elde edilir.

Farklı N değerleri için elde edilen çözümler:

$$y_5(t) = 0.01253t^5 + 0.03772t^4 + 0.16822t^3 + 0.49978t^2 + t + 1$$

$$y_6(t) = 0.00212t^6 + 0.00744t^5 + 0.04218t^4 + 0.16653t^3 + 0.50002t^2 + t + 1$$

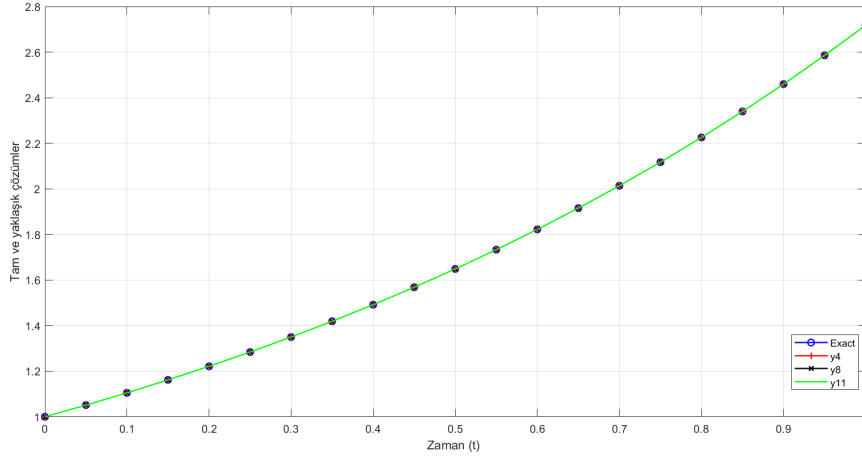
elde edilir.

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^t$ 'nin Taylor açılımına yaklaşık olduğu görülecektir.

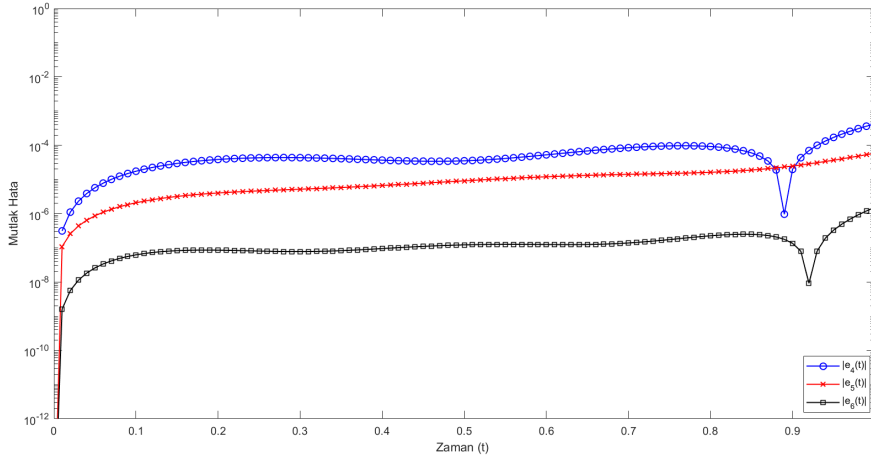
Çizelge (5.20)'de tam çözüm, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözüm ve Taylor Polinom çözümü (Gülsu and Sezer, 2011) değerleriyle karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.20: Problem 5.4.5'in $N = 4, 5, 6$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Euler Yöntemi (N=4)	Taylor Yöntemi (N=4)	Euler Yöntemi (N=5)	Taylor Yöntemi (N=5)	Euler Yöntemi (N=6)	Taylor Yöntemi (N=6)
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105171	1.105188	1.105188	1.105169	1.105168	1.105171	1.105170
0.2	1.221403	1.221441	1.221441	1.221399	1.221398	1.221403	1.221402
0.3	1.349859	1.349902	1.349902	1.349854	1.349853	1.349859	1.349858
0.4	1.491825	1.491861	1.491861	1.491818	1.491818	1.491825	1.491824
0.5	1.648721	1.648756	1.648756	1.648712	1.648712	1.648721	1.648721
0.6	1.822119	1.822171	1.822171	1.822107	1.822106	1.822119	1.822118
0.7	2.013753	2.013838	2.013837	2.013739	2.013738	2.013753	2.013752
0.8	2.225541	2.225633	2.225633	2.225525	2.225524	2.225541	2.225541
0.9	2.459603	2.459583	2.459583	2.459578	2.459578	2.459603	2.459603
1	2.718282	2.717860	2.717860	2.718223	2.718223	2.718280	2.718280
Süre		1.058 s		1.077 s		1.080 s	



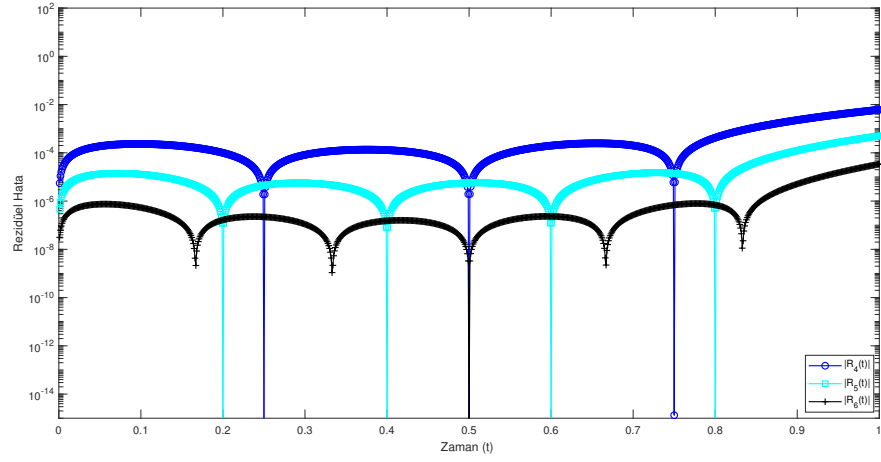
Şekil 5.50: Problem 5.4.5'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.51: Problem 5.4.5'in $4 \leq N \leq 6$ için mutlak hatalarının grafiği.

Çizelge (5.20)'den de görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler Taylor Polinomu Yöntemi'yle elde edilen çözümlerle birbirine çok yakındır.

Şekil (5.50)'de tam çözümle, bazı N değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin grafiği verilirken; Şekil (5.51)'de de $4 \leq N \leq 6$ aralığındaki her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.52: Problem 5.4.5'in rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=4}^{\infty}$, ilk altı değerinin grafiği Şekil (5.52)'te verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

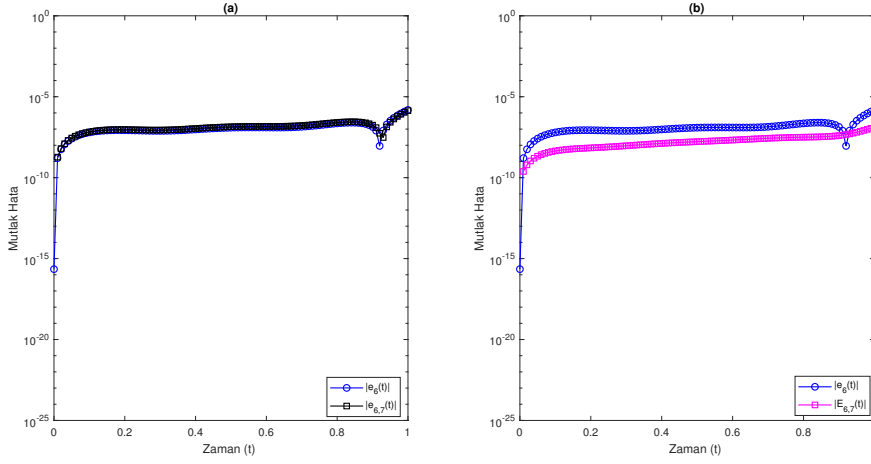
$e_6(0) = 0$, başlangıç koşulu altında

$$\begin{aligned} e'_6(t) - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}e_6\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}e_6(t) &= -R_6(t) \\ &+ \int_0^1 (t+s)e_6(s)ds + \int_0^t se_6(s)ds \end{aligned}$$

hata fonksiyonu ve $M = 7$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{6,7}(t) &= 0.00031t^7 + 0.00123t^6 + 0.00845t^5 \\ &+ 0.04162t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

Şekil (5.53)(a)'da $y_6(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{6,7}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.53)(b)'de ise



Şekil 5.53: Problem 5.4.5'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

$y_6(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{6,7}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.4.6. (Gümgüm et al., 2018) $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$y''(t) - y'(t) + 2y' \left(\frac{t}{2} - \sin t \right) - 2ty(t) = g(t) + \int_t^{e^{t+1}} 3t^2 s^2 y(s) ds$$

verilen 2. mertebeden değişken gecikmeli fonksiyonel integro-diferansiyel denklemin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = -2t, \quad Q_0(t) = 0, \quad P_1(t) = -1, \quad Q_1(t) = 2, \quad P_2(t) = 1$$

$$g(t) = 2 - t^2 \left(\frac{3e^{5t+5}}{5} + 2t - \frac{3t^5}{5} \right) - 4 \sin t, \quad K_v(t, s) = 3t^2 s^2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_1(t) = -\sin t, \quad u_0(t) = t, \quad v_0(t) = e^{t+1}$$

$N = 2$ için $y_2(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_2(t) = \sum_{n=0}^2 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 1$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Sistem çözüldüğünde, tam çözüm olan $y_2(t) = t^2$ elde edilir.

Problem 5.4.7. (Gümgüm et al., 2018) $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$t^2 y''(t) - 2y'(t+1) - 2ty \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \right) = g(t) - \int_{t^2}^t t s y \left(\frac{s}{2} + 1 \right) ds$$

verilen 2. mertebeden değişken gecikmeli fonksiyonel integro-diferansiyel denklemin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 0, \quad Q_0(t) = -2t, \quad P_1(t) = 0, \quad Q_1(t) = -2, \quad P_2(t) = t^2$$

$$g(t) = -t^2 \cos t + 2 \sin(t+1) - t \cos \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \right) - 2t^3 \sin \left(\frac{t^2+2}{2} \right) \\ - 4t \cos \left(\frac{t^2+2}{2} \right) + 2t^2 \sin \left(\frac{t+2}{2} \right) + 4t \cos \left(\frac{t+2}{2} \right)$$

$$K_v(t, s) = ts \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \beta_0(t) = -\frac{t^2}{2}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1(t) = 1,$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \mu_0 = 1, \quad u_0(t) = t^2, \quad v_0(t) = t$$

$$y_4(t) = 0.0259313t^4 + 0.0317765t^3 - 0.520263t^2 + 1.73472 * 10^{-16}t + 1$$

$$y_7(t) = 0.000103t^7 - 0.00146t^6 - 0.000287t^5 + 0.0422993t^4 \\ - 0.00045757t^3 - 0.499899t^2 + 9.73614 * 10^{-17}t + 1$$

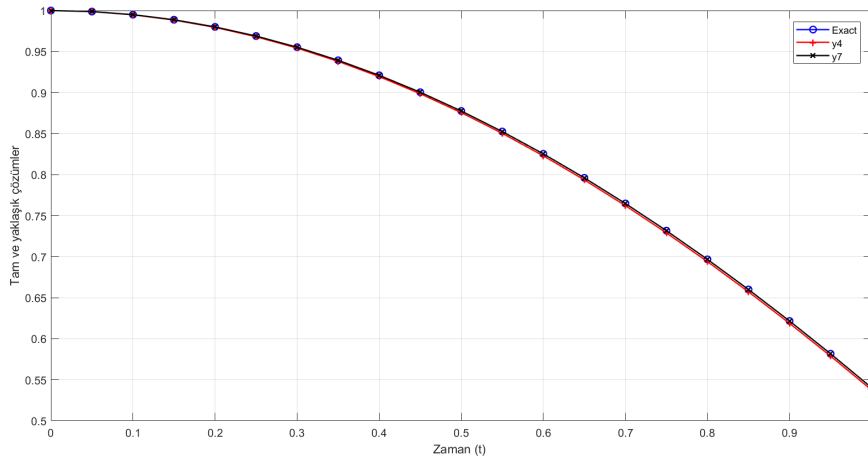
Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = \cos t$ 'nin Taylor seri açılımlarına yaklaşık olduğu görülecektir.

Çizelge (5.21)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Gümgüm ve ekibinin Lucas Polinomları yöntemiyle yapmış oldukları Standart Sıralama ve Chebyshev-Lobatto Sıralama Yöntemi'yle elde ettikleri mutlak hatalar karşılaştırılmıştır (Gümgüm et al., 2018).

Çizelge (5.21)'den de görülebileceği gibi $N = 4$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler, Lucas Standart Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümle aynı olup, Chebyshev-Lobatto Sıralama Yöntemi gerçek çözüme daha yakın sonuç vermiştir. $N = 7$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler ise, Lucas Standart Sıralama ve Lucas Chebyshev-Lobatto Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümlerden daha iyidir.

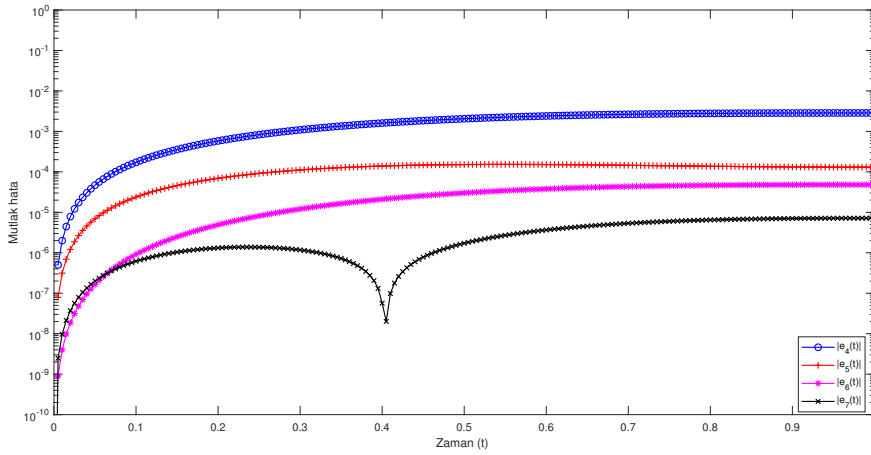
Çizelge 5.21: Problem 5.4.7'nin $N = 4, 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Euler $ e_4(t_i) $	Lucas SSN $ e_4(t_i) $	Lucas CLSN $ e_4(t_i) $	Euler $ e_7(t_i) $	Lucas SSN $ e_7(t_i) $	Lucas CLSN $ e_7(t_i) $
0	3.47e-17	2.22e-16	2.22e-16	0	0	0
0.2	0.000581	0.000581	0.000528	1.32e-06	1.16e-06	1.04e-06
0.4	0.00161	0.00161	0.00144	5.68e-08	3.03e-07	1.43e-05
0.6	0.00241	0.00241	0.00213	3.66e-06	4.12e-06	3.10e-05
0.8	0.00278	0.00278	0.00243	6.48e-06	6.95e-06	4.02e-05
1	0.00286	0.00286	0.00248	7.17e-06	7.63e-06	4.18e-05

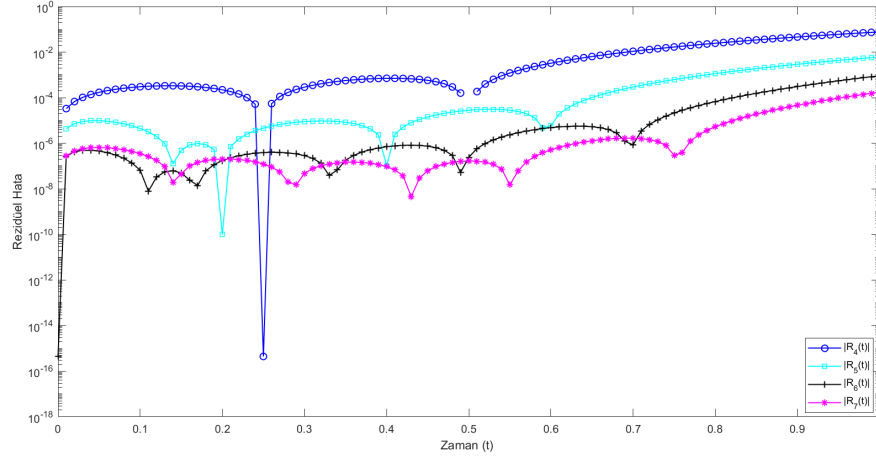


Şekil 5.54: Problem 5.4.7'nin tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.

$0 < t < 1$ aralığında elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata fonksiyonlarının grafiği Şekil (5.55)'de verilmiştir.



Şekil 5.55: Problem 5.4.7'nin mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.



Şekil 5.56: Problem 5.4.7'nin rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

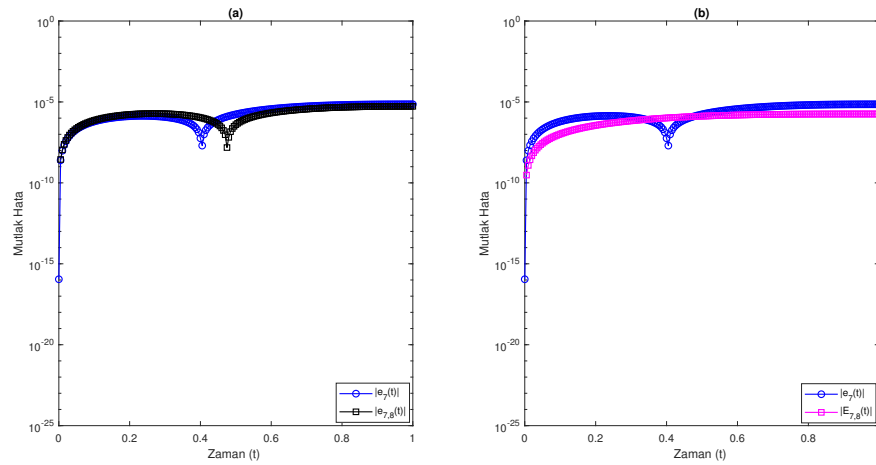
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=4}^{\infty}$, ilk dört değerinin grafiği Şekil (5.56)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_7(0) = 0$ ve $e_7'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$t^2 e_7''(t) - 2e_7'(t+1) - 2te_7\left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}\right) = -R_7(t) - \int_{t^2}^t tse_7\left(\frac{s}{2} + 1\right) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 8$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{7,8}(t) = 1.577 * 10^{-5}t^8 + 0.00004t^7 - 0.00145t^6 + 0.00004t^5 + 0.04164t^4 + 0.00002t^3 + 0.50001t^2 + 9.736 * 10^{-17}t + 1$$



Şekil 5.57: Problem 5.4.7'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.57)(a)'da $y_7(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{7,8}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.57)(b)'de ise $y_7(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{7,8}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.4.8. (Kürkçü et al., 2016; Karaçayır, 2018; Elmacı and Baykuş Savaşaneril, 2021a)

$y(0) = -1$ ve $y'(1) = 3$ başlangıç koşulları altında

$$(t^2 + 1)y''(0.2t) + ty'(t-1) - (t-1)y(t+2) + y(t) = g(t) + 2 \int_0^1 ty'(s) ds + \int_0^{\frac{t}{2}+1} (ts^2 + st^2)y''(s) ds$$

$$g(t) = 6 - \frac{14t}{3} - t^2 - \frac{5t^3}{2} - \frac{t^4}{3} + 2$$

olarak verilen 2. mertebeden gecikmeli fonksiyonel integro-diferansiyel denklemin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$y_2(t) = t^2 + t - 1$$

$$y_4(t) = -1.65026 * 10^{-16}t^4 + 4.85633 * 10^{-16}t^3 + t^2 + t - 1$$

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = t^2 + t - 1$ 'in elde edildiği görülecektir.

Problem 5.4.9. (Oğuz and Sezer, 2015; Kürkçü et al., 2016; Karaçayır, 2018; Elmacı and Baykuş Savaşaneril, 2021a) $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında

$$y'(t) + 2y'(t-0.5) - y(t) + (t^2 - t)y(0.5t-1) = g(t) + \int_0^t te^{-s}y(s) ds + \int_0^{\frac{t}{2}} (t^2 - 2s - 2)y'(s) ds$$

verilen 1. mertebeden gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemindeki $g(t)$ fonksiyonu:

$$g(t) = (t^2 - t)e^{0.5t-1} + 2e^{t-0.5} - t^2e^{0.5t} + te^{0.5t}$$

olmak üzere, denklemin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_4(t) = 0.06016t^4 + 0.164606t^3 + 0.494345t^2 + 1.000633t + 1$$

$$y_7(t) = 0.00025t^7 + 0.00140t^6 + 0.00830t^5 \\ + 0.04164t^4 + 0.16668t^3 + 0.50001t^2 + t + 1$$

olarak bulunabilir.

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = e^t$ 'nin açılımının elde edildiği görülecektir.

Çizelge (5.22) ve (5.23)'te Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Chelyskov Sıralama, Dickson Sıralama ve Galerkin tipi yöntemlerle elde edilen mutlak hatalar karşılaştırılmıştır (Oğuz and Sezer, 2015; Kürkcü et al., 2016; Karaçayır, 2018).

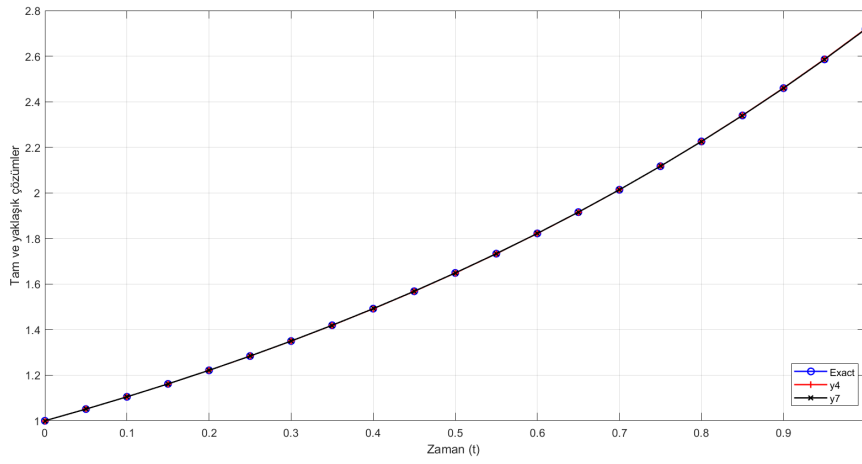
Çizelge 5.22: Problem 5.4.9'un $N = 4$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Euler $ e_4(t_i) $	Chelyskov $ e_4(t_i) $	Dickson $ e_4(t_i) $	Galerkin $ e_4(t_i) $
0.2	8.925e-05	2.926e-04	1.738e-04	2.619e-04
0.4	4.015e-04	2.704e-04	5.303e-04	4.195e-04
0.6	4.235e-04	4.497e-04	4.756e-04	9.470e-05
0.8	2.648e-04	1.740e-03	8.732e-04	6.680e-04
1	1.458e-03	2.432e-03	5.833e-04	8.687e-04

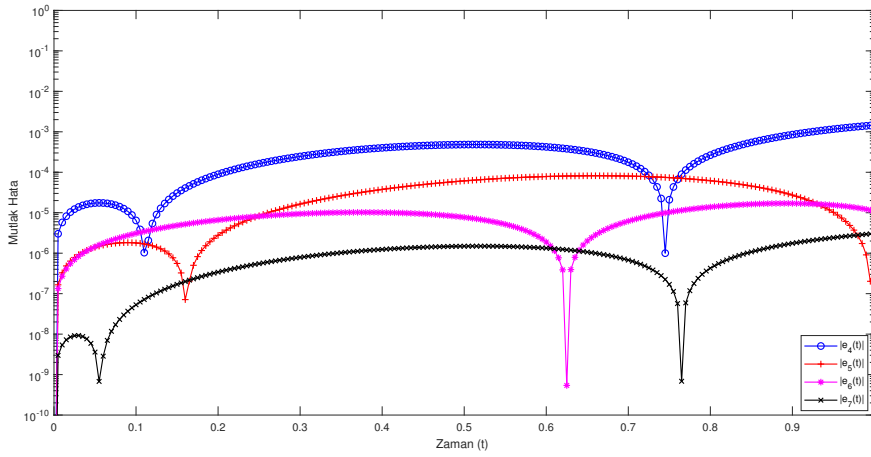
Çizelge (5.22) ve (5.23)'ten görülebileceği gibi $N = 4$ ve $N = 7$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler, Chelyskov Sıralama, Dickson Sıralama ve Galerkin tipi yöntemlerle elde edilen çözümlere göre tam çözüme daha yakındır.

Çizelge 5.23: Problem 5.4.9'un $N = 7$ için farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen mutlak hatalarının karşılaştırılması

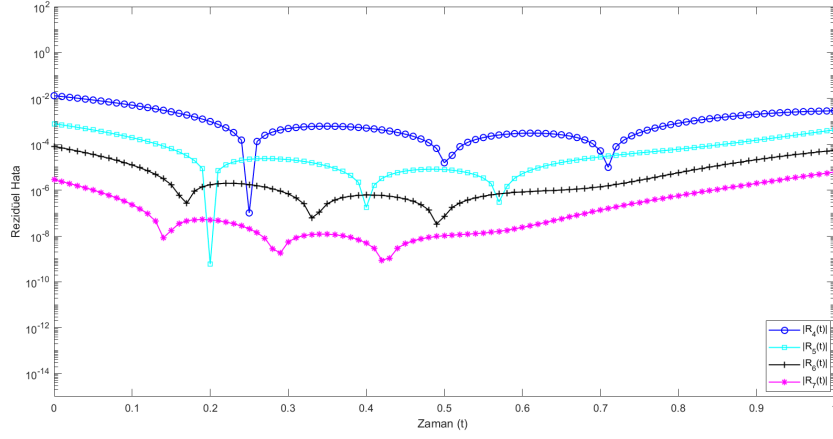
t	Euler $ e_7(t_i) $	Chelyskov $ e_7(t_i) $	Dickson $ e_7(t_i) $	Galerkin $ e_7(t_i) $
0.2	3.397e-07	7.378e-06	7.414e-07	5.775e-07
0.4	1.240e-06	1.773e-06	1.355e-06	1.746e-06
0.6	1.331e-06	1.851e-05	4.143e-07	1.685e-06
0.8	4.252e-07	2.969e-05	1.903e-06	7.401e-07
1	3.067e-06	2.117e-06	3.347e-06	3.357e-06



Şekil 5.58: Problem 5.4.9'un tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.59: Problem 5.4.9'un mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.



Şekil 5.60: Problem 5.4.9'un rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

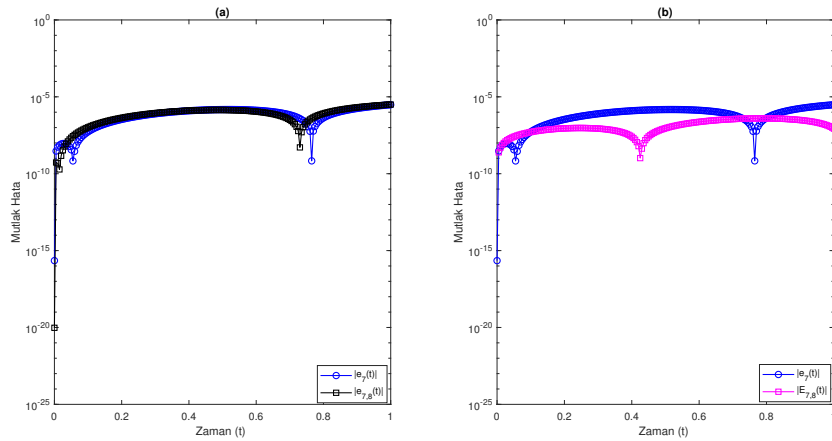
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=4}^{\infty}$, ilk dört değerinin grafiği Şekil (5.60)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_7(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$e_7'(t) + 2e_7'(t - 0.5) - e_7(t) + (t^2 - t)e_7(0.5t - 1) = -R_7(t) + \int_0^t te^{-s}e_7(s)ds + \int_0^{\frac{t}{2}}(t^2 - 2s - 2)e_7'(s)ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 8$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{7,8}(t) = 3.233 * 10^{-5}t^8 + 0.00020t^7 - 0.00138t^6 + 0.00833t^5 + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$



Şekil 5.61: Problem 5.4.9'un yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.61)(a)'da $y_7(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{7,8}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.61)(b)'de ise $y_7(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{7,8}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.4.10. Gülsu and Sezer (2011); Yüzbaşı (2014); Karaçayır (2018); Elmacı and Baykuş Savaşaneril (2021a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında

$$y''(t) - \frac{3}{4}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{11}{4}\sin t + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t\cos t + \int_0^t ty(s)ds$$

verilen 2. mertebeden gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_4(t) = 0.01026t^4 - 0.17007t^3 + t$$

$$y_5(t) = 0.00792t^5 + 0.00033t^4 - 0.16675t^3 + t$$

$$y_6(t) = -0.00045t^6 + 0.00872t^5 - 0.00015t^4 - 0.16664t^3 + t$$

$$y_7(t) = -0.00019t^7 - 0.00002t^6 + 0.00835t^5$$

$$-3.85053 * 10^{-6}t^4 - 0.16667t^3 + t$$

$$y_8(t) = 9.04859 * 10^{-6}t^8 - 0.00021t^7 + 9.04145 * 10^{-6}t^6$$

$$+0.00833t^5 + 8.40882 * 10^{-7}t^4 - 0.16667t^3 + t$$

olarak elde edilebilir.

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = \sin t$ 'nin açılımının elde edildiği görülecektir.

Çizelge (5.24)'te Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerle tam çözümün bazı noktalardaki değerlerini göstermektedir. Çizelge (5.25)'te $N = 7$ ve $N = 8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hataların diğer üç yöntemle karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge (5.25)'ten görülebileceği gibi $N = 7$ ve $N = 8$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler, Taylor ve Laguerre Yöntemleri'nden

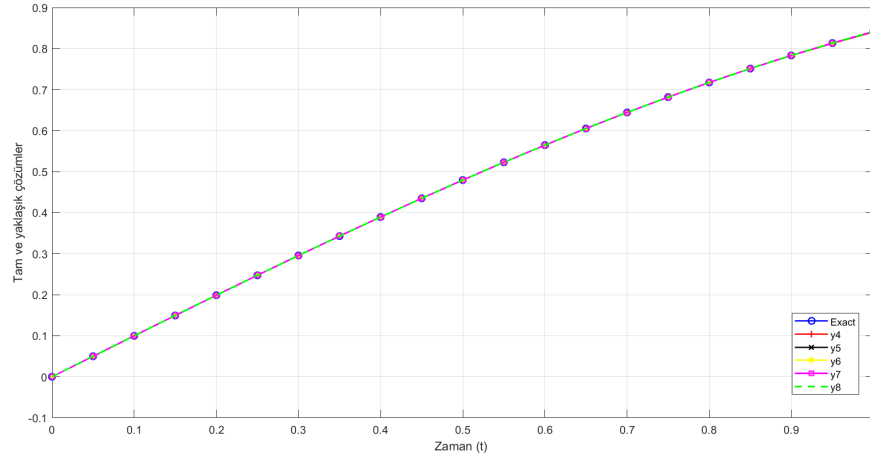
Çizelge 5.24: Problem 5.4.10'un çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümler ile tam çözümün bazı noktadaki değerleri

t	$\sin t$	$y_4(t)$	$y_5(t)$	$y_6(t)$	$y_7(t)$	$y_8(t)$
0.2	0.1986693308	0.1986558233	0.1986690957	0.1986693798	0.1986693315	0.1986693307
0.4	0.3894183423	0.3893779227	0.3894178144	0.3894184466	0.3894183439	0.3894183421
0.6	0.5646424734	0.5645937486	0.5646415410	0.5646426458	0.5646424758	0.5646424731
0.8	0.7173560909	0.7171247598	0.7173566510	0.7173563956	0.7173560941	0.7173560905
1	0.8414709848	0.8401864237	0.8415046851	0.8414760090	0.8414708784	0.8414709736

Çizelge 5.25: Problem 5.4.10'un $N = 7$ ve $N = 8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hatalarının karşılaştırılması

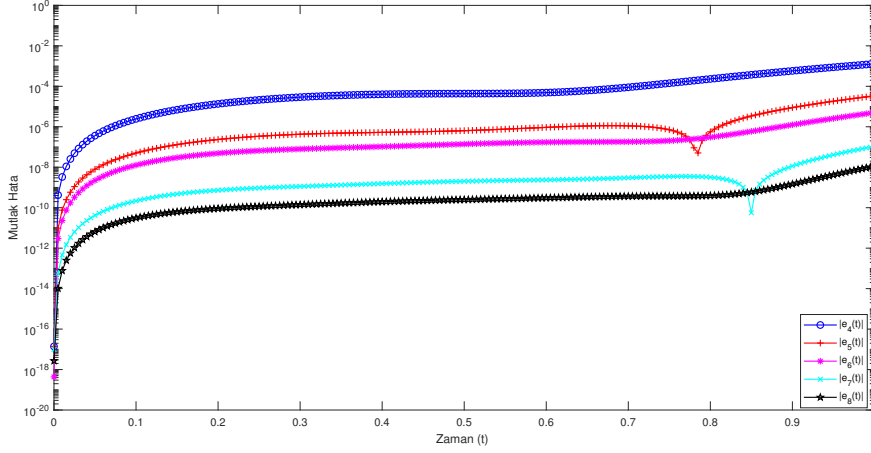
t	Euler $e_7(t)$	Euler $e_8(t)$	Galerkin $e_7(t)$	Galerkin $e_8(t)$	Taylor $e_7(t)$	Taylor $e_{10}(t)$	Laguerre $e_{10}(t)$
0.2	7.301e-10	9.104e-11	6.402e-10	4.941e-11	2.35e-07	7.00e-10	2.346e-10
0.4	1.546e-09	1.963e-10	3.366e-10	6.526e-11	5.27e-07	1.50e-09	5.137e-09
0.6	2.372e-09	3.047e-10	4.694e-10	6.589e-11	9.32e-07	2.40e-09	8.339e-09
0.8	3.201e-09	3.945e-10	7.173e-10	3.531e-11	5.60e-07	3.00e-09	1.152e-08
1	1.064e-07	1.119e-08	3.819e-11	6.221e-11	3.37e-05	1.06e-07	3.640e-09

daha iyi sonuç verirken; Galerkin Yöntemi'nin bu soruda daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

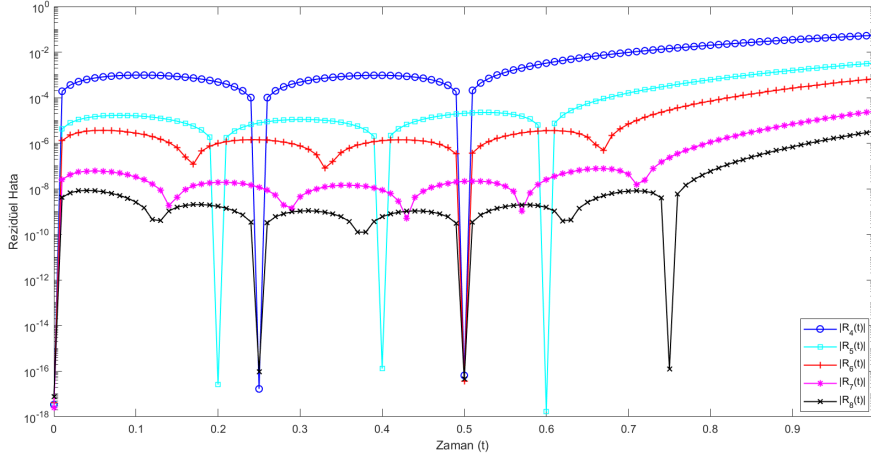


Şekil 5.62: Problem 5.4.10'un tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.

$0 < t < 1$ aralığında elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata fonksiyonlarının grafiği Şekil (5.63)'te verilmiştir.



Şekil 5.63: Problem 5.4.10'nun mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.



Şekil 5.64: Problem 5.4.10'un rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

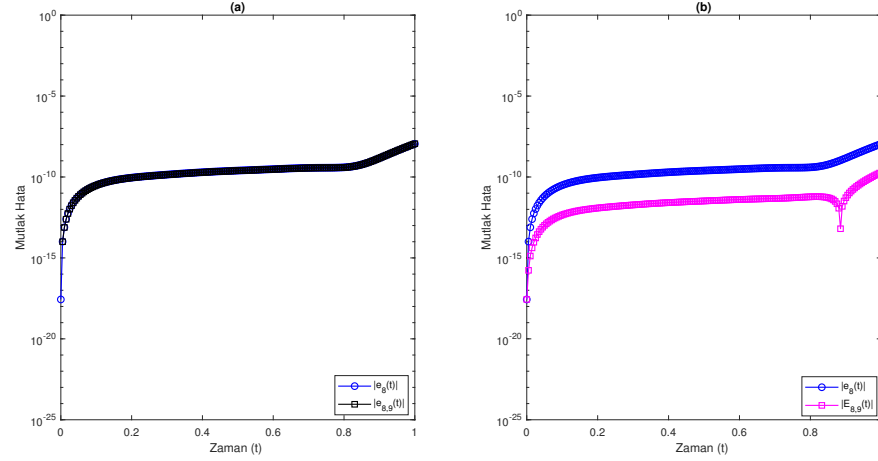
Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=4}^{\infty}$, ilk beş değerinin grafiği Şekil (5.64)'te verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_8(0) = 0$ ve $e'_8(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$e_8''(t) - \frac{3}{4}e_8(t) + e_8\left(\frac{t}{2}\right) = -R_8(t) + \int_0^t te_8(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 9$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{8,9}(t) = & 2.541 * 10^{-5}t^9 + 4.675 * 10^{-7}t^8 - 0.00020t^7 + 2.685 * 10^{-7}t^6 \\ & + 0.00833t^5 + 1.693 * 10^{-8}t^4 - 0.16667t^3 \\ & - 3.392 * 10^{-19}t^2 + t + 2.714 * 10^{-18} \end{aligned}$$



Şekil 5.65: Problem 5.4.10'un yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.65)(a)'da $y_8(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{8,9}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.65)(b)'de ise $y_8(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{8,9}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.4.11. (Yüzbaşı et al., 2013; Karaçayır, 2018; Elmacı and Baykuş Savaşaneril, 2021a)

$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = -1$ başlangıç koşulları altında

$$\begin{aligned} y^{(4)}(t) - y''(t-1) + ty(t+0.5) = g(t) + \\ \int_0^1 [t \cos(s)y'(s+1) + t \sin(s)y''(s-0.5)] ds \end{aligned}$$

4. mertebeden Fredholm integro-diferansiyel denklemindeki $g(t)$ fonksiyonu:

$$\begin{aligned} g(t) = & \sin(t) + \sin(t-1) + t \sin(t+0.5) + 0.25t \sin(1) - 0.5t \cos(1) \\ & - 0.25t \sin(3) - 0.25t \sin(0.5) + 0.5t \cos(0.5) - 0.25t \sin(1.5) \end{aligned}$$

olarak verildiğinde, $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_5(t) = 0.00657t^5 + 0.00225t^4 - 0.16667t^3 + t$$

$$y_8(t) = 9.41179 * 10^{-6}t^8 - 0.0002t^7 - 0.00009t^6 + 0.00868t^5 \\ - 0.00075t^4 - 0.16667t^3 + t$$

şeklinde bulunacaktır.

Çözümler incelendiğinde denklemin tam çözümü olan $y(t) = \sin t$ 'nin açılımının elde edildiği görülecektir.

Çizelge (5.26)'da Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Müntz-Legendre ve Galerkin Yöntemleri'yle elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması verilmiştir.

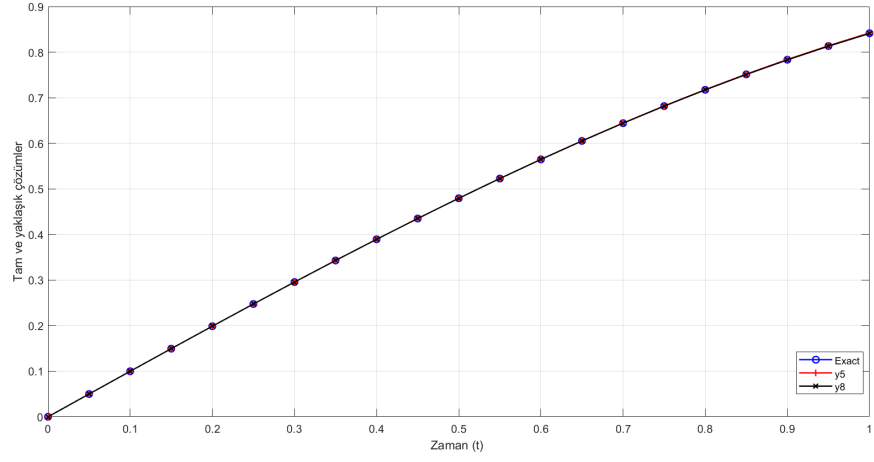
Çizelge 5.26: Problem 5.4.11'in $N = 5$ ve $N = 8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Euler $e_5(t)$	Euler $e_8(t)$	Müntz-Legendre $e_5(t)$	Müntz-Legendre $e_8(t)$	Galerkin $e_5(t)$	Galerkin $e_8(t)$
0.2	3.047e-06	1.102e-06	1.202e-05	9.251e-07	3.386e-06	3.407e-06
0.4	4.003e-05	1.616e-05	1.681e-04	1.901e-05	5.474e-05	5.239e-05
0.6	1.609e-04	7.530e-05	7.266e-04	1.194e-04	2.824e-04	2.587e-04
0.8	3.882e-04	2.200e-04	1.891e-03	4.545e-04	9.209e-04	8.003e-04
1	6.907e-04	4.991e-04	3.589e-03	1.304e-03	2.354e-03	1.937e-03

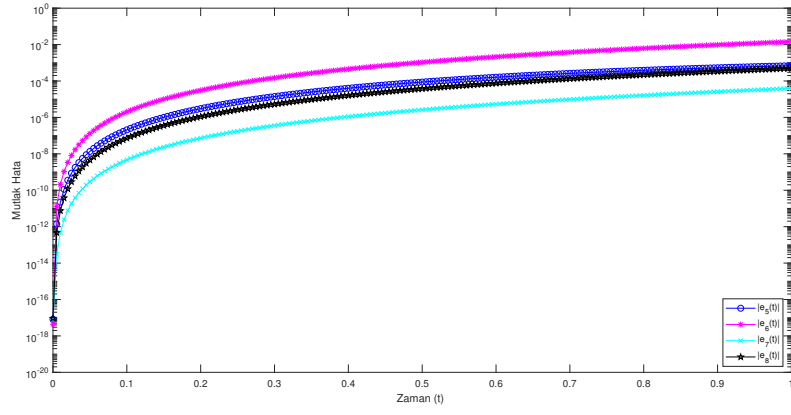
Çizelge (5.26)'dan görülebileceği gibi $N = 5$ ve $N = 8$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler, Müntz-Legendre ve Galerkin Yöntemi'yle elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç verdiği görülebilir.

$0 < t < 1$ aralığında elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata fonksiyonlarının grafiği Şekil (5.67)'de verilmiştir.

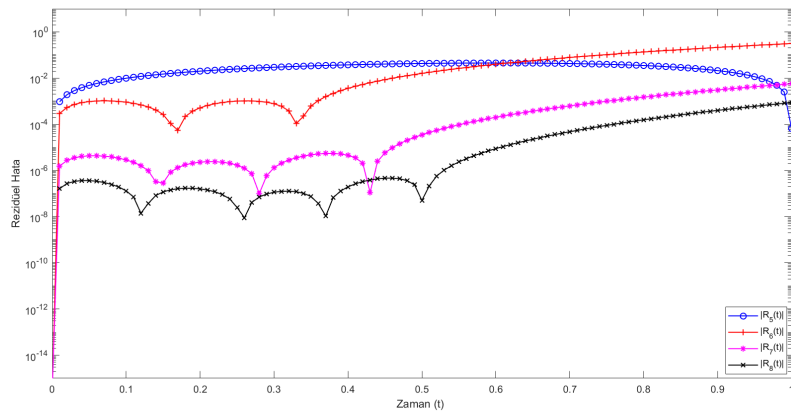
Şekil (5.67)'den de görülebileceği gibi N 'in tek değerlerinin tam çözüme daha yakın olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 5.66: Problem 5.4.11'in tam ve nümerik çözümlerinin grafiği.



Şekil 5.67: Problem 5.4.11'in mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.



Şekil 5.68: Problem 5.4.11'in rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonunun $\{|R_N|\}_{N=5}^{\infty}$, ilk dört değerinin grafiği Şekil (5.68)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görü-

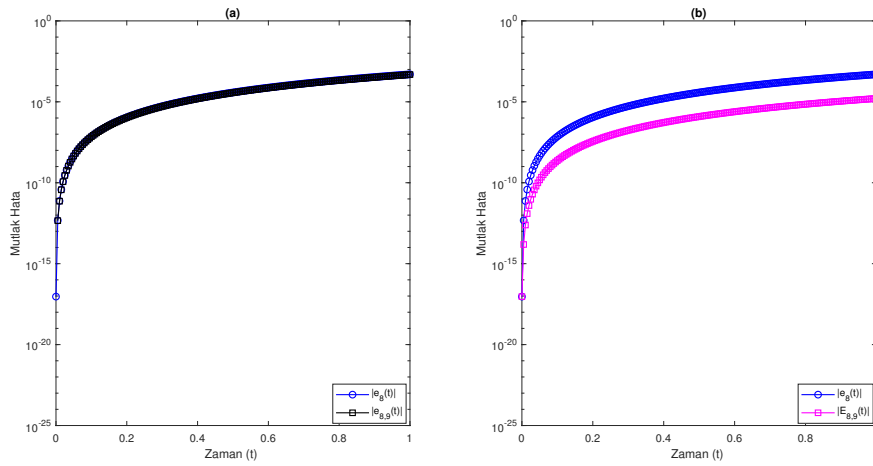
lebilir.

$e_8(0) = 0$, $e'_8(0) = 0$, $e''_8(0) = 0$ ve $e^{(3)}_8(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$e_8^{(4)}(t) - e''_8(t-1) + te_8(t+0.5) = -R_8(t) + \int_0^1 [t \cos(s)e'_8(s+1) + t \sin(s)e''_8(s-0.5)] ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 9$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{8,9}(t) = 2.612 * 10^{-6}t^9 + 3.365 * 10^{-7}t^8 - 0.00020t^7 - 3.110 * 10^{-6}t^6 + 0.00834t^5 - 2.456 * 10^{-5}t^4 - 0.16667t^3 + 3.672 * 10^{-18}t^2 + t + 9.206 * 10^{-18}$$



Şekil 5.69: Problem 5.4.11'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (5.69)(a)'da $y_8(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_8(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.69)(b)'de ise $y_8(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{8,9}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

5.5 Lineer Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler Sistemleri

Lineer Volterra - Fredholm integro-diferansiyel denklem sisteminin $i = 1, 2, \dots, n$ ve $m = \max \{m_1, m_2, m_3\}$, $a \leq t, s \leq b$ olmak üzere genel hali:

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=1}^J P_{ij}^k(t) y_j^{(k)}(t) = g_i(t) + \int_a^b \sum_{r=0}^{m_2} \sum_{j=1}^J K_{fij}^r(t, s) y_j^{(r)}(s) ds + \int_a^t \sum_{l=0}^{m_3} \sum_{j=1}^J K_{vij}^l(t, s) y_j^{(l)}(s) ds \quad (42)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{ij}^k y_j^{(k)}(a) + b_{ij}^k y_j^{(k)}(b) \right) = \mu_{ij}, \quad j = 1, \dots, J, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (43)$$

koşulları altında verilsin.

n bilinmeyen fonksiyondan oluşan ve aynı sayıda denklemden oluşan bu sistemde, $P_{ij}^k(t)$ ve $g_i(t)$ fonksiyonları $a \leq t \leq b$ aralığında a_{ij} , b_{ij} ve μ_{ij} uygun sabitler, $y_j(t)$ de bilinmeyen çözüm fonksiyonu olarak tanımlansın. Denklem (42) ve (43)'de tanımlanan problemin çözümü için denklem (2)'de verilen Euler polinomlarının sonlu seri formunu denklem sistemi haline dönüştürerek uygulayalım.

$$y_j(t) \cong y_{jN}(t) = \sum_{n=0}^N a_{jn} E_n(t), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (44)$$

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} E_0(t) & E_1(t) & \dots & E_N(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{1N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2N} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} a_{J0} \\ a_{J1} \\ \vdots \\ a_{JN} \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklem (44)'ün matris formu

$$y_j(t) = \mathbf{E}(t) \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

ile ifade edilebilir. $\mathbf{E}(t)$ ve türevleri yerine diğer bölümlerde olduğu gibi,

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{S}$$

$$\mathbf{E}^k(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{S}$$

yazılırsa

$$y_j(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{S}\mathbf{A}_j$$

$$y_j^{(k)}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^k\mathbf{S}\mathbf{A}_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir. $j = 1, 2, \dots, J$ için matris formu

$$\mathbf{Y}^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} y_1^{(k)}(t) \\ y_2^{(k)}(t) \\ \vdots \\ y_J^{(k)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^k\mathbf{S}\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^k\mathbf{S}\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^k\mathbf{S}\mathbf{A}_J \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{T}}(t)\overline{\mathbf{B}^k}\overline{\mathbf{S}}\mathbf{A}$$

şeklinde ifade edilebilir. İntegral kısmın içerisindeki $\mathbf{K}_{fij}^r(t, s)$ ve $\mathbf{K}_{vij}^l(t, s)$ çekirdek fonksiyonları da:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{fij}^r(t, s) &= [k_{mn}^f], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \\ k_{mn}^f &= \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} \mathbf{K}_{fij}^r(0, 0)}{\partial t^m \partial s^n} \\ \mathbf{K}_{fij}^r(t, s) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{fij}^r\mathbf{T}(s)^T \end{aligned} \quad (45)$$

$$\int_a^b K_{fij}^r(t, s) y_j^{(r)}(s) ds = \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{fij}^r\mathbf{Q}_f\mathbf{B}^r\mathbf{S}\mathbf{A}_j = \mathbf{F}_{ij}^r(t)\mathbf{A}_j \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ij}^r(t) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{fij}^r\mathbf{Q}_f\mathbf{B}^r\mathbf{S} \\ \mathbf{Q}_f &= [q_{mn}] = \int_a^b \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) ds \\ m, n = 0, 1, \dots, N \quad q_{mn} &= \frac{b^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m+n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{vij}^l(t, s) &= [k_{mn}^v], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \\ k_{mn}^v &= \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} \mathbf{K}_{vij}^l(0, 0)}{\partial t^m \partial s^n} \\ \mathbf{K}_{vij}^l(t, s) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{vij}^l\mathbf{T}(s)^T \end{aligned} \quad (47)$$

$$\int_a^t K_{vij}^l(t, s) y_j^{(l)}(s) ds = \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{vij}^l\mathbf{Q}_v\mathbf{B}^l\mathbf{S}\mathbf{A}_j = \mathbf{V}_{ij}^l(t)\mathbf{A}_j \quad (48)$$

$$\mathbf{V}_{ij}^l(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{K}_{vij}^l \mathbf{Q}_v(t) \mathbf{B}^l \mathbf{S}$$

$$\mathbf{Q}_v(t) = [q_{mn}(t)] = \int_a^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) ds$$

$$m, n = 0, 1, \dots, N \quad q_{mn}(t) = \frac{t^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m+n+1}$$

ile gösterilip, tüm elde edilen eşitlikler denklem (42)'de yerine yazılırsa:

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=1}^J P_{ij}^k(t) \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A}_j = g_i(t) + \sum_{r=0}^{m_2} \sum_{j=1}^J \mathbf{F}_{ij}^r(t) \mathbf{A}_j + \sum_{l=0}^{m_3} \sum_{j=1}^J \mathbf{V}_{ij}^l(t) \mathbf{A}_j \quad (49)$$

elde edilir.

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_{11}^k & P_{12}^k & \cdots & P_{1J}^k \\ P_{21}^k & P_{22}^k & \cdots & P_{2J}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{J1}^k & P_{J2}^k & \cdots & P_{JJ}^k \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{T}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_J \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{B}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}^k \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{S} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_J(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_r(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}^r(t) & \mathbf{F}_{12}^r(t) & \cdots & \mathbf{F}_{1J}^r(t) \\ \mathbf{F}_{21}^r(t) & \mathbf{F}_{22}^r(t) & \cdots & \mathbf{F}_{2J}^r(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{J1}^r(t) & \mathbf{F}_{J2}^r(t) & \cdots & \mathbf{F}_{JJ}^r(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_l(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^l(t) & \mathbf{V}_{12}^l(t) & \cdots & \mathbf{V}_{1J}^l(t) \\ \mathbf{V}_{21}^l(t) & \mathbf{V}_{22}^l(t) & \cdots & \mathbf{V}_{2J}^l(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{V}_{J1}^l(t) & \mathbf{V}_{J2}^l(t) & \cdots & \mathbf{V}_{JJ}^l(t) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(t) \overline{\mathbf{T}}(t) \overline{\mathbf{B}}^k \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} = \mathbf{G}(t) + \sum_{r=0}^{m_2} \mathbf{F}_r(t) \mathbf{A} + \sum_{l=0}^{m_3} \mathbf{V}_l(t) \mathbf{A}$$

şeklinde ifade edilebilir. Sıralama noktaları da

$$t_u = a + \frac{b-a}{N}u, \quad u = 0, 1, \dots, N$$

yerine yazıldıktan sonra oluşan matris denklem sistemleri:

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(t_u) \overline{\mathbf{T}}(t_u) \overline{\mathbf{B}^k} \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} = \mathbf{G}(t_u) + \sum_{r=0}^{m_2} \mathbf{F}_r(t_u) \mathbf{A} + \sum_{l=0}^{m_3} \mathbf{V}_l(t_u) \mathbf{A} \quad (50)$$

ile ifade edilirken,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{P}_k]_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad \overline{\mathbf{T}}_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad \overline{\mathbf{B}^k}_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad \overline{\mathbf{S}}_{J(N+1) \times J(N+1)}, \\ & \mathbf{G}_{J(N+1) \times 1}, \quad [\mathbf{F}_r]_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad [\overline{\mathbf{V}}_l]_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad \mathbf{A}_{J(N+1) \times 1}. \end{aligned}$$

olmak üzere temel matris formu:

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \overline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{B}^k} \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \sum_{r=0}^{m_2} \mathbf{F}_r \mathbf{A} + \sum_{l=0}^{m_3} \overline{\mathbf{V}}_l \mathbf{A} \quad (51)$$

ile gösterilebilir.

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \overline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{B}^k} \mathbf{S} - \sum_{r=0}^{m_2} \mathbf{F}_r - \sum_{l=0}^{m_3} \overline{\mathbf{V}}_l$$

olarak seçilirse kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (52)$$

ile ifade edilir. Ayrıca denklem (43)'deki başlangıç koşulları da,

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik}^j \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{ik}^j \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_{jk}]$$

veya

$$\left[\mathbf{U}_k : \mu_k \right], \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

ile ifade edilir ve (52) deki denklemdeki herhangi bir satıra yazarak sonuç matris denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \left[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}} \right]$$

Sistem çözülerek bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

$$y_j(t) \cong y_{jN}(t) = \sum_{n=0}^N a_{jn} E_n(t), \quad a \leq t \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

5.5.1 Model Problemler

Bu bölümde bazı model problemler çözülüp, elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla kıyaslanacaktır.

Problem 5.5.1. (Karaçayır, 2018; Elmacı et al., 2022)

$$y_1(0) = -1, y_1(2) = 1, y_1'(0) = 1,$$

$$y_2(0) = 2, y_2(2) = 8, y_2'(0) = -3$$

koşulları altında verilen

$$\begin{aligned} y_1'''(t) + ty_2''(t) - y_1'(t) + 2ty_2(t) &= g_1(t) + \int_0^2 ((ts^2)y_1'(s) + tsy_1''(s) - (ts^2)y_2'(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t ((t^2s^3)y_1'''(s) - tsy_2''(s) + (2t^3s)y_2'''(s)) ds \\ y_2'''(t) + ty_1''(t) - ty_2'(t) - y_1(t) &= g_2(t) + \int_0^2 ((ts^2)y_1'(s) + t^2sy_1''(s) - (2ts)y_2'''(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t ((3t^3s)y_1(s) - t^3s^2y_2''(s)) ds \end{aligned}$$

3. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem sisteminde g_1 ve g_2 fonksiyonları:

$$g_1(t) = 5 + \frac{218}{15}t + 3t^2 - 3t^3 + 8t^4 - 12t^5 - \frac{3}{2}t^6$$

$$g_2(t) = 13 + \frac{602}{15}t + 2t^2 - 7t^3 + \frac{3}{2}t^5 - \frac{5}{3}t^6 + \frac{9}{2}t^7 - \frac{3}{5}t^8$$

iken denklem sisteminin $0 \leq t, s \leq 2$ aralığında $N=3$ için Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix}, \quad P_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix}, \quad P_3(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_0(2/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0(4/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_0(2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} P_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(2/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1(4/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_1(2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} P_2(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2(2/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2(4/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2(2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} P_3(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_3(2/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3(4/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_3(2) \end{bmatrix}$$

$$K_{f0}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_{f1}(t) = \begin{bmatrix} ts^2 & -ts^2 \\ ts^2 & 0 \end{bmatrix}, K_{f2}(t) = \begin{bmatrix} ts & 0 \\ t^2s & 0 \end{bmatrix}, K_{f3}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2ts \end{bmatrix}$$

$$K_{v0}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t^3s & 0 \end{bmatrix}, K_{v1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_{v2}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -ts \\ 0 & -t^3s^2 \end{bmatrix}, K_{v3}(t) = \begin{bmatrix} t^2s^3 & 2t^3s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{16}{9} & \frac{64}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{16}{9} & \frac{64}{27} \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^3 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_f & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_f \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(0) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}(\frac{2}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}(\frac{2}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}(\frac{4}{3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}(\frac{4}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}(2) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{g}(\frac{2}{3}) \\ \mathbf{g}(\frac{4}{3}) \\ \mathbf{g}(2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{9106}{607} \\ \frac{2526}{65} \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} -\frac{1489}{134} \\ \frac{12035}{154} \end{bmatrix}, \mathbf{g}(2) = \begin{bmatrix} -\frac{4949}{15} \\ 409 \end{bmatrix}$$

Temel matris denkleminin arttırılmış matris formu ve başlangıç ve sınır koşulları yazılarak elde edilen yeni arttırılmış matris formu aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 5 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 6 & : & 13 \\ -16 & -\frac{917}{45} & -\frac{943}{45} & -\frac{4013}{340} & \frac{4}{3} & 2 & \frac{140}{27} & -\frac{451}{405} & : & \frac{9106}{607} \\ 1073 & 10043 & 3426 & 5222 & 0 & -2 & 538 & 202 & : & 2526 \\ -\frac{81}{1789} & -\frac{739}{1789} & -\frac{263}{1931} & -\frac{407}{1883} & 8 & 52 & \frac{2187}{424} & \frac{9}{14809} & : & \frac{65}{1489} \\ -32 & -\frac{45}{1789} & -\frac{45}{1931} & -\frac{29}{1883} & 3 & 9 & \frac{27}{424} & -\frac{82}{14809} & : & -\frac{134}{1489} \\ -\frac{7633}{81} & -\frac{5679}{80} & -\frac{252}{5} & -\frac{13559}{436} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8018}{289} & \frac{2841}{35} & : & \frac{12035}{154} \\ -48 & -\frac{887}{15} & -\frac{973}{15} & -\frac{15324}{35} & 4 & \frac{34}{3} & \frac{116}{3} & -\frac{7273}{5} & : & -\frac{4949}{15} \\ -529 & -\frac{15133}{30} & -\frac{6658}{15} & -\frac{43443}{140} & 0 & -2 & \frac{1006}{3} & 1066 & : & 409 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U} : \lambda] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & : & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{4} & : & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & : & -3 \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 5 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 6 & : & 13 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & : & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{4} & : & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & : & -3 \end{bmatrix}$$

Sistem çözüldüğünde bilinmeyen Euler katsayı matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

olarak bulunur ve sistemin tam çözümü olan $y_{1,3}(t) = t^3 - 2t^2 + t - 1$,
 $y_{2,3}(t) = 2t^3 - t^2 - 3t + 2$ elde edilir.

Problem 5.5.2. (Gölsu and Sezer, 2006)

$$y_1(0) = -1, y_1(2) = 1, y_1'(0) = 1,$$

$$y_2(0) = 2, y_2(2) = 8, y_2'(0) = -3$$

koşulları altında verilen

$$\begin{aligned} -y_1''(t) + y_2'(t) + ty_1(t) + y_2(t) &= -t^4 + 6t^2 + t + 4 \\ &+ \int_{-1}^1 (sy_1(s) - s^3y_2(s)) ds + \int_{-1}^t (ty_2(s)) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ty_1''(t) - y_2''(t) + y_1(t) - t^2y_2(t) &= -3t^4 - t^3 - t^2 - 3t - 8 \\ &+ \int_{-1}^1 ((s+2)y_1(s) - sy_2(s)) ds + \int_{-1}^t (sy_1(s)) ds \end{aligned}$$

2. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem sisteminin $-1 \leq t, s \leq 1$ aralığında $N = 3$ için Euler matris yöntemiyle çözümü yukarıdaki örnekteki adımlar MATLAB yardımıyla uygulandıktan sonra yaklaşık çözümler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$y_{1,3}(t) = -2.05489 * 10^{-16}t^3 + 3.30047 * 10^{-16}t^2 + 3t + 2$$

$$y_{2,3}(t) = -6.90792 * 10^{-16}t^3 + 3t^2 - 1.72698 * 10^{-16}$$

Problem 5.5.3. (Biazar, 2005; Yusufoglu, 2007; Yüzbaşı, 2015; Elmacı et al., 2022)

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = -1$$

başlangıç koşulları altında verilen

$$y_1'(t) + y_2(t) = 1 + t + t^2 + \int_0^t (-y_1(s) - y_2(s)) ds$$

$$y_2'(t) - y_1(t) = -1 - t + \int_0^t (-y_1(s) + y_2(s)) ds$$

1. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin

$0 \leq t, s \leq 1$ aralığında $N = 3, N = 7$ ve $N = 10$ için Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_{1,3}(t) = 0.23699t^3 + 0.47415t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,3}(t) = -0.23252t^3 - 0.47802t^2 - 1$$

$$y_{1,7}(t) = 0.00031t^7 + 0.00123t^6 + 0.00845t^5 + 0.04162t^4 \\ + 0.16668t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,7}(t) = -0.00031t^7 - 0.00123t^6 - 0.00845t^5 - 0.04162t^4 \\ - 0.16668t^3 - 0.5t^2 - 1$$

$$y_{1,10}(t) = 4.34159 * 10^{-7}t^{10} + 2.38798 * 10^{-6}t^9 + 2.52686 * 10^{-5}t^8 \\ + 1.98047 * 10^{-4}t^7 + 0.00139t^6 + 0.00833t^5 + 0.04167t^4 \\ + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,10}(t) = -4.34159 * 10^{-7}t^{10} - 2.38798 * 10^{-6}t^9 - 2.52686 * 10^{-5}t^8 \\ - 1.98047 * 10^{-4}t^7 - 0.00139t^6 + 0.00833t^5 - 0.04167t^4 \\ - 0.16667t^3 - 0.5t^2 - 1$$

elde edilir.

Çözümler incelendiğinde denklem sisteminin tam çözümü olan $y_1(t) = t + e^t$, $y_2(t) = t - e^t$ 'nin açılımının elde edildiği görülecektir.

Çizelge (5.27) ve (5.28)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Adomian Ayrıştırma (ADM), Homotopi Perturbasyon (HPM) ve Bessel Sıralama Yöntemleri'yle elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması verilmiştir. Ayrıca Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması Şekil (5.70)'de verilmiştir.

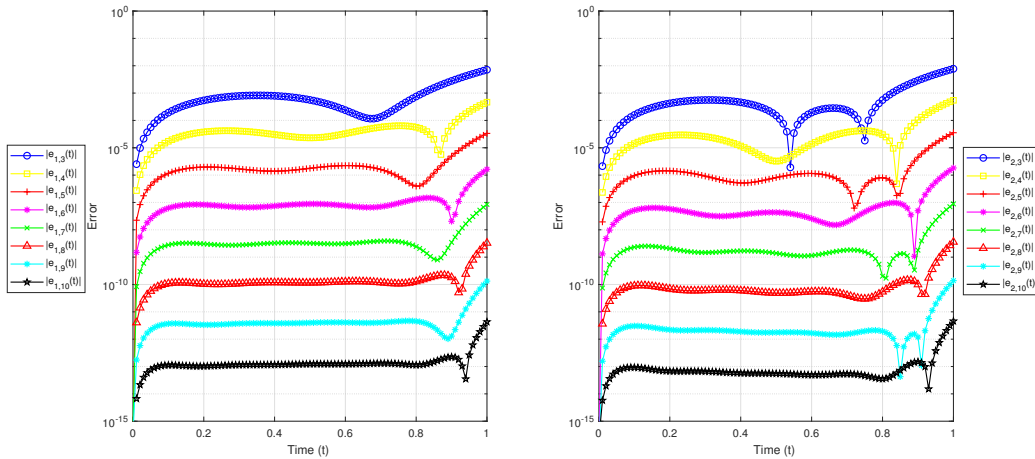
Çizelge (5.27) ve (5.28)'den görülebileceği gibi $N = 7$ ve $N = 10$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin, Adomian Ayrıştırma, Homotopi Perturbasyon ve Bessel Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç verdiği görülebilir.

Çizelge 5.27: Problem 5.5.3'te $y_1(t)$ 'nin $N = 7$ ve $N = 10$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	ADM $ e_{1,7}(t) $	HPM $ e_{1,7}(t) $	Bessel $ e_{1,7}(t) $	Euler $ e_{1,7}(t) $	Bessel $ e_{1,10}(t) $	Euler $ e_{1,10}(t) $
0	0	0	0	0	0	0
0.2	3.0e-009	3.0e-009	3.0530e-009	3.0530e-009	1.1569e-013	1.0303e-013
0.4	3.20e-007	3.20e-007	3.2758e-009	3.2759e-009	1.6609e-013	1.168e-013
0.6	5.364e-006	5.364e-006	3.1170e-009	3.1173e-009	2.3115e-013	1.2346e-013
0.8	3.909e-005	3.909e-005	2.4377e-009	2.4382e-009	2.9798e-013	1.1324e-013
1	1.79861e-004	1.79861e-004	8.4851e-008	8.4852e-008	4.0115e-012	4.289e-012

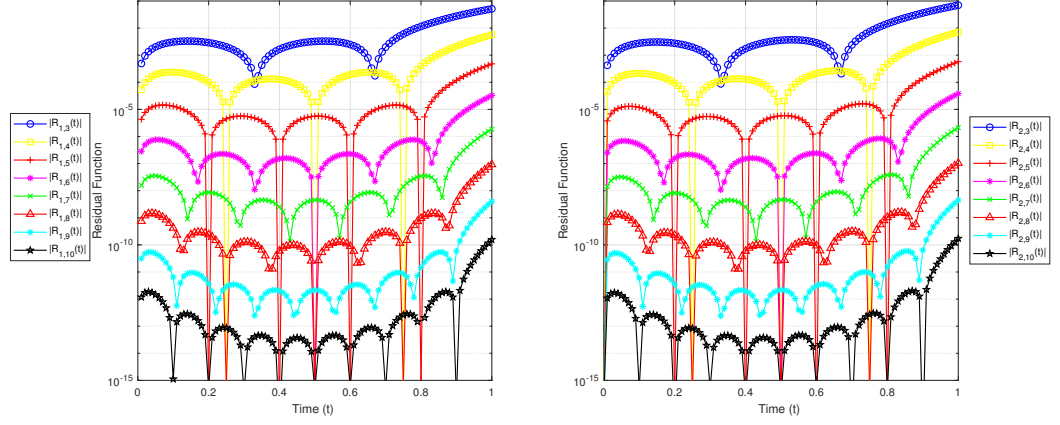
Çizelge 5.28: Problem 5.5.3'te $y_2(t)$ 'nin $N = 7$ ve $N = 10$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	ADM $ e_{2,7}(t) $	HPM $ e_{2,7}(t) $	Bessel $ e_{2,7}(t) $	Euler $ e_{2,7}(t) $	Bessel $ e_{2,10}(t) $	Euler $ e_{2,10}(t) $
0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.0e-009	2.0e-009	2.0681e-009	2.0681e-009	5.3069e-014	6.6835e-014
0.4	3.20e-007	3.20e-007	1.6889e-009	1.6890e-009	2.6645e-015	5.6399e-014
0.6	5.359e-006	5.359e-006	1.1459e-009	1.1461e-009	6.7946e-014	4.8406e-014
0.8	3.9028e-005	3.9028e-005	2.0071e-010	2.0118e-010	1.6120e-013	3.4417e-014
1	1.79279e-004	1.79279e-004	8.8769e-008	8.8770e-008	4.8770e-012	4.5959e-012



Şekil 5.70: Problem 5.5.3'te $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ 'nin mutlak hatalarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonlarının, $\{|R_{1,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ve $\{|R_{2,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (5.71)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.



Şekil 5.71: Problem 5.5.3'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

$$e_{1,10}(0) = 0, e_{2,10}(0) = 0$$

başlangıç koşulları altında verilen

$$e'_{1,10}(t) + e_{2,10}(t) = -R_{1,10} + \int_0^t (-e_{1,10}(s) - e_{2,10}(s)) ds$$

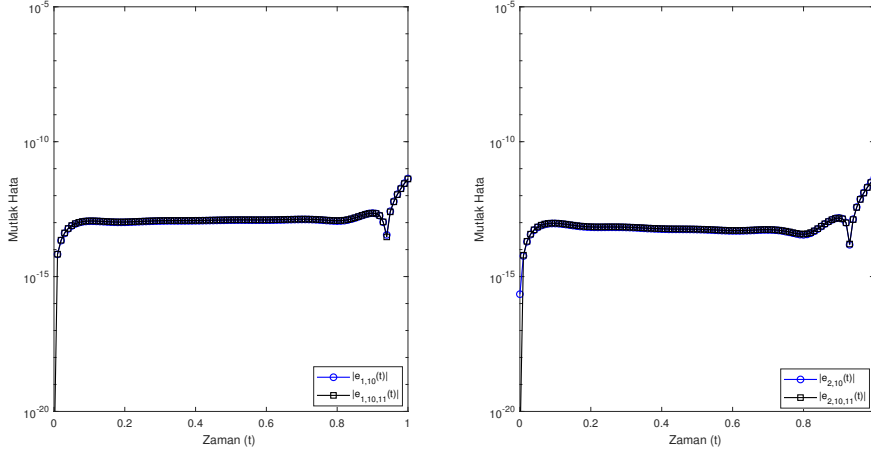
$$e'_{2,10}(t) - e_{1,10}(t) = -R_{2,10} + \int_0^t (-e_{1,10}(s) + e_{2,10}(s)) ds$$

hata fonksiyon sistemi ve $M = 11$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

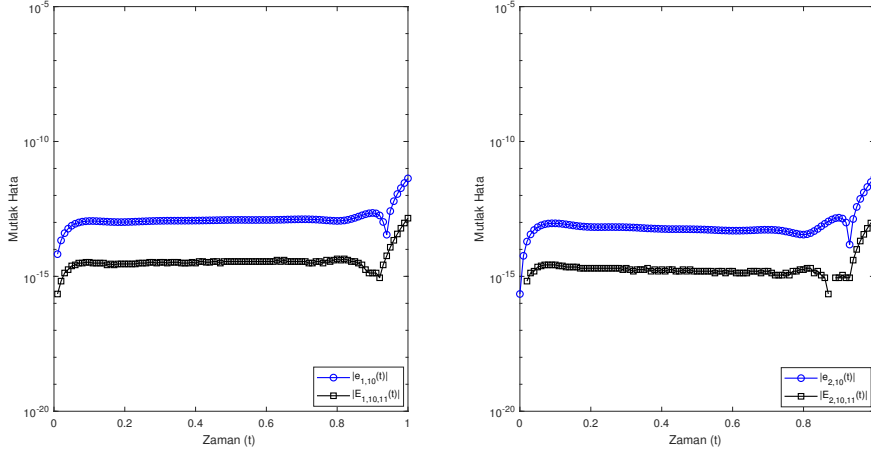
$$y_{1,10,11}(t) = 3.96186 * 10^{-8}t^{11} + 2.37857 * 10^{-7}t^{10} + 2.81013 * 10^{-6}t^9 \\ + 2.47521 * 10^{-5}t^8 + 1.98442 * 10^{-4}t^7 + 0.00139t^6 + 0.00833t^5 \\ + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,10,11}(t) = -3.96 * 10^{-8}t^{11} - 2.37954 * 10^{-7}t^{10} - 2.80990 * 10^{-6}t^9 \\ - 2.47524 * 10^{-5}t^8 - 1.98442 * 10^{-4}t^7 - 0.00139t^6 - 0.00833t^5 \\ - 0.04167t^4 - 0.16667t^3 - 0.5t^2 - 1$$

Şekil (5.72)'de $y_{1,10}(t)$ ve $y_{2,10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{1,10,11}(t)$ ve $e_{2,10,11}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (5.73)'te ise $y_{1,10}(t)$ ve $y_{2,10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{1,10,11}(t)$ ve $E_{2,10,11}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği



Şekil 5.72: Problem 5.5.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği.



Şekil 5.73: Problem 5.5.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması grafiği.

verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 5.5.4. Pour-Mahmoud et al. (2005); Al-Faour and Saeed (2006); Maleknejad et al. (2012); Elmacı et al. (2022)

$$y_1(0) + y_1'(0) = 1, \quad y_1(1) + y_1'(1) = 10$$

$$y_2(0) + y_2'(0) = 1, \quad y_2(1) + y_2'(1) = 7$$

koşulları altında verilen

$$y_1''(t) + y_2'(t) = 8 + 3/10t + 3t^2 - \int_0^1 ((2ts)y_1(s) - 6tsy_2(s)) ds$$

$$y_1'(t) + y_2''(t) = 4/5 + 21t - \int_0^1 ((6t + 3s^2)y_1(s) - (12t + 6s^2)y_2(s)) ds$$

2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklem sisteminin

$0 \leq t, s \leq 1$ aralığında $N=3$, $N=5$ ve $N=10$ için Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_{1,3}(t) = 4.47868 * 10^{-16}t_1^3 + 3t^2 + 1$$

$$y_{2,3}(t) = t^3 + 2t - 1$$

$$\begin{aligned} y_{1,5}(t) = & -5.05746 * 10^{-16}t^5 + 4.47393 * 10^{-16}t^4 - 1.33923 * 10^{-16}t^3 \\ & + 3t^2 - 8.16972 * 10^{-16}t + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2,5}(t) = & -5.45078 * 10^{-17}t^5 + 1.49225 * 10^{-15}t^4 \\ & + t^3 - 1.36269 * 10^{-16}t^2 + 2t - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1,10}(t) = & -6.144 * 10^{-13}t^{10} + 2.54006 * 10^{-12}t^9 - 4.47711 * 10^{-12}t^8 \\ & + 4.36821 * 10^{-12}t^7 - 2.54574 * 10^{-12}t^6 + 8.79425 * 10^{-13}t^5 \\ & - 1.63915 * 10^{-13}t^4 + 1.37065 * 10^{-14}t^3 + 3t^2 + 6.16325 * 10^{-15}t + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2,10}(t) = & -4.9156 * 10^{-13}t^{10} + 2.26969 * 10^{-12}t^9 - 4.38513 * 10^{-12}t^8 \\ & + 4.58254 * 10^{-12}t^7 - 2.79685 * 10^{-12}t^6 + 1.0034 * 10^{-12}t^5 \\ & - 2.00272 * 10^{-13}t^4 + t^3 + 5.06064 * 10^{-15}t^2 + 2t - 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Çözümler incelendiğinde denklem sisteminin tam çözümü olan

$y_1(t) = 3t^2 + 1$, $y_2(t) = t^3 + 2t - 1$ 'nin açılımının elde edildiği görülecektir.

Çizelge (5.29) ve (5.30)'da Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Tau Yöntemi, Spektral Yöntem ve Bernstein Yöntemleri'yle elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması verilmiştir.

Ayrıca Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması Şekil (5.74)'te verilmiştir.

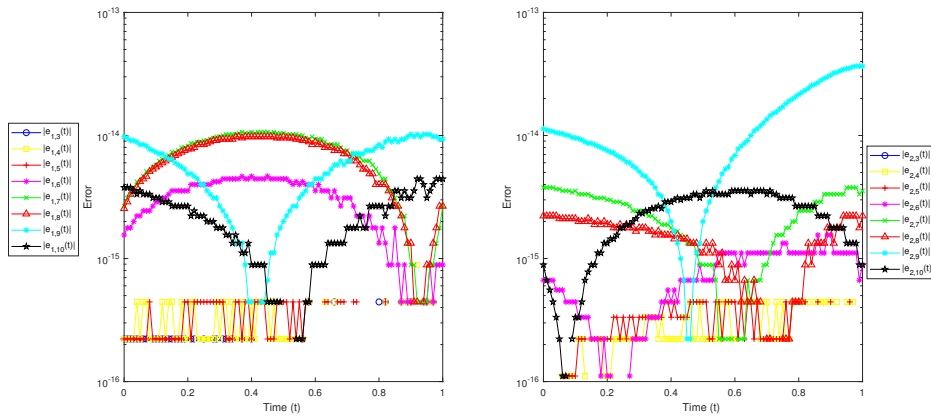
Çizelge (5.29) ve (5.30)'dan görülebileceği gibi $N = 3$ ve $N = 5$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin, Tau Yöntemi, Spektral ve Bernstein Yöntemi'yle elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç verdiği görülebilir.

Çizelge 5.29: Problem 5.5.4'te $y_1(t)$ 'nin $N = 3$ ve $N = 5$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Tau $ e_{1,3}(t) $	Bernstein $ e_{1,3}(t) $	Euler $ e_{1,3}(t) $	Spektral $ e_{1,5}(t) $	Bernstein $ e_{1,5}(t) $	Euler $ e_{1,5}(t) $
0	3.e-14	3.55271e-15	0	0.0e-9	8.88178e-16	9.99201e-16
0.2	3.e-14	3.10862e-15	4.4409e-16	9.1e-8	1.36470e-6	1.33227e-15
0.4	3.e-14	2.66454e-15	1.3323e-15	6.031e-6	2.42077e-6	1.33227e-15
0.6	3.e-14	2.22045e-15	3.5527e-15	7.08e-5	3.31536e-6	1.33227e-15
0.8	3.e-14	1.33227e-15	6.2172e-15	4.10261e-4	1.21331e-5	1.77636e-15
1	3.e-14	1.33227e-15	9.77e-15	1.61516e-3	1.29523e-4	1.77636e-15

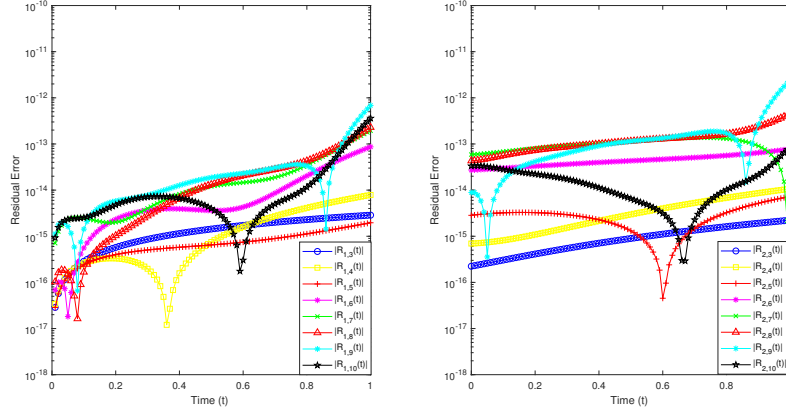
Çizelge 5.30: Problem 5.5.4'te $y_2(t)$ 'nin $N = 3$ ve $N = 5$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Tau $ e_{2,3}(t) $	Bernstein $ e_{2,3}(t) $	Euler $ e_{2,3}(t) $	Spektral $ e_{2,5}(t) $	Bernstein $ e_{2,5}(t) $	Euler $ e_{2,5}(t) $
0	3.1e-14	1.77636e-15	0	0.0e-9	7.77156e-16	9.99201e-16
0.2	2.7e-14	1.55431e-15	0	2.0e-9	2.8736e-7	9.99201e-16
0.4	2.4e-14	1.22125e-15	0	3.25e-7	4.54527e-7	7.77156e-16
0.6	2.3e-14	1.05471e-15	0	5.527e-6	5.63863e-7	5.55112e-16
0.8	2.0e-14	8.88178e-16	0	4.1242e-5	2.69271e-6	0
1	2.0e-14	6.66134e-16	0	1.95682e-4	3.35922e-5	8.88178e-16



Şekil 5.74: Problem 5.5.4'te $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ 'nin mutlak hata grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonlarının, $\{\overline{|R_{1,N}|}\}_{N=3}^{\infty}$ ve $\{\overline{|R_{2,N}|}\}_{N=3}^{\infty}$ ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (5.75)'te verilmiştir.



Şekil 5.75: Problem 5.5.4'ün rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Problem 5.5.5. (Issa et al., 2020; Elmacı et al., 2022)

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 2$$

koşulları altında verilen

$$y_1'(t) = -2 + t^2 - t^4 + \frac{3t^5}{20} + 2t^6 + \frac{t^7}{5} - \frac{t^8}{8} + \int_0^t ((s^3 - t^2)y_1(s) + (12s^2 - t)y_2(s)) ds$$

$$y_2'(t) = 4 - 8t - \frac{t^3}{3} + 2t^4 - \frac{8t^5}{5} + \frac{t^6}{30} - 4e^t + \int_0^t ((s - t)y_1(s) + 8(1 - s)y_2(s) + 2y_3(s)) ds$$

$$y_3'(t) = 3 - \frac{7t^2}{2} + \frac{4t^3}{3} + \frac{6t^5}{5} - \frac{7t^6}{30} + \int_0^t ((2t - s)y_1(s) + 6sy_2(s) + 2y_3(s)) ds$$

1. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında $N=3$ ve $N=8$ için Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümleri:

$$y_{1,3}(t) = 1.33512t^3 - 0.44503t^2 - 2t$$

$$y_{2,3}(t) = -0.99908t^3 - 0.00096t^2 + 1$$

$$y_{3,3}(t) = 0.46547t^3 + 0.95226t^2 + 3t + 2$$

$$\begin{aligned} y_{1,8}(t) = & -1.43534 * 10^{-11}t^8 + 7.10806 * 10^{-11}t^7 - 3.71604 * 10^{-12}t^6 \\ & + 2.13106 * 10^{-11}t^5 + t^4 + 1.95871 * 10^{-12}t^3 - 1.45595 * 10^{-13}t^2 \\ & - 2t + 2.35502 * 10^{-15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2,8}(t) = & 1.72905 * 10^{-10}t^8 + 6.44961 * 10^{-10}t^7 - 2.96804 * 10^{-9}t^6 \\
& + 3.97823 * 10^{-9}t^5 - 2.50223 * 10^{-9}t^4 - t^3 + 1.9207 * 10^{-11}t^2 \\
& - 3.07188 * 10^{-16}t + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{3,8}(t) = & 7.71779 * 10^{-5}t^8 + 0.00035t^7 + 0.00282t^6 + 0.01664t^5 \\
& + 0.08334t^4 + 0.33333t^3 + t^2 + 3t + 2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Çözümler incelendiğinde denklem sisteminin tam çözümü olan

$y_1(t) = t^4 - 2t$, $y_2(t) = 1 - t^3$, $y_3(t) = t + 2e^t$ 'nin açılımının elde edildiği görülecektir.

Çizelge 5.31: Problem 5.5.5'te $y_1(t)$ 'nin $N = 8$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Sinc Sıralama $ e_{1,8}(t) $	Chebyshev wavelet $ e_{1,8}(t) $	Euler $ e_{1,8}(t) $
0	0	2.690833666996184e-13	2.355018829071e-15
0.1	1.358996248868038e-9	2.293998324631729e-13	2.026157019941e-15
0.2	4.693820221390865e-9	1.593725151849412e-13	2.664535259100e-15
0.3	7.953928582438152e-8	4.383160501220118e-13	1.976196983833e-14
0.4	2.280309290281224e-7	9.818812429784884e-13	1.424416140594e-13
0.5	3.156846541951807e-7	2.298161660974074e-13	6.540323838067e-13
0.6	1.91852210118526e-7	4.305888978706207e-12	2.228883744237e-12
0.7	1.10596880320557e-7	1.162048235414658e-11	6.223244142234e-12
0.8	3.562425212599862e-7	2.287792177924075e-11	1.506839097942e-11
0.9	3.857868307033385e-7	4.14988043928588e-11	3.277045301786e-11

Çizelge (5.31), (5.32) ve (5.33)'te Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Sinc Sıralama Yöntemi ve Chebyshev Wavelet Yöntemi'yle elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması verilmiştir.

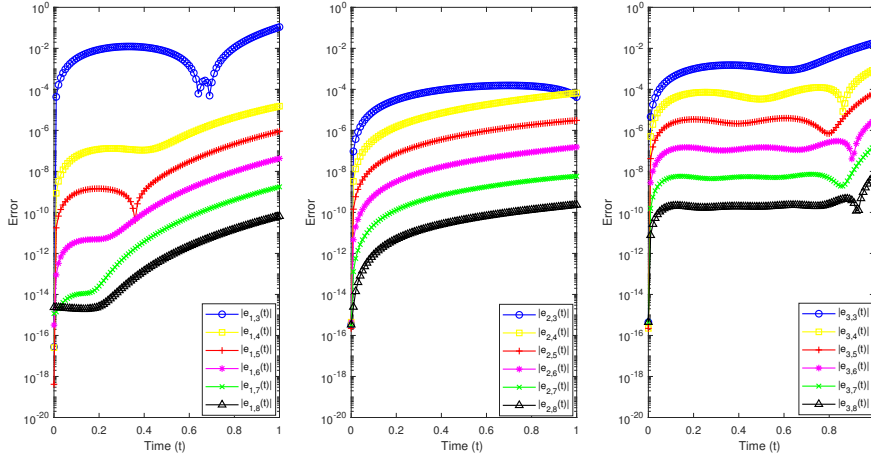
Çizelge 5.32: Problem 5.5.5'te $y_2(t)$ 'nin $N = 8$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Sinc Sıralama $ e_{2,8}(t) $	Chebyshev wavelet $ e_{2,8}(t) $	Euler $ e_{2,8}(t) $
0	-1	4.568290190576363e-11	9,99200722163e-16
0.1	3.83559517480592e-10	7.276357294472291e-11	8,644196469731e-13
0.2	1.268595006820305e-9	9.451994742448733e-12	4,949485266081e-12
0.3	2.160990852928535e-8	9.397482791939638e-12	1,305766605952e-11
0.4	6.159458376675531e-8	6.947387110045611e-11	2,551714395338e-11
0.5	8.588650235452633e-8	1.311859509911528e-10	4,291345057084e-11
0.6	5.673403202788307e-8	1.191982068604602e-10	6,599165658372e-11
0.7	1.572101726576846e-8	7.294698178839099e-11	9,529710354172e-11
0.8	7.177556560211684e-8	9.545503276697787e-11	1,311921682401e-10
0.9	7.297406701134435e-8	2.184930569804066e-11	1,749609346291e-10

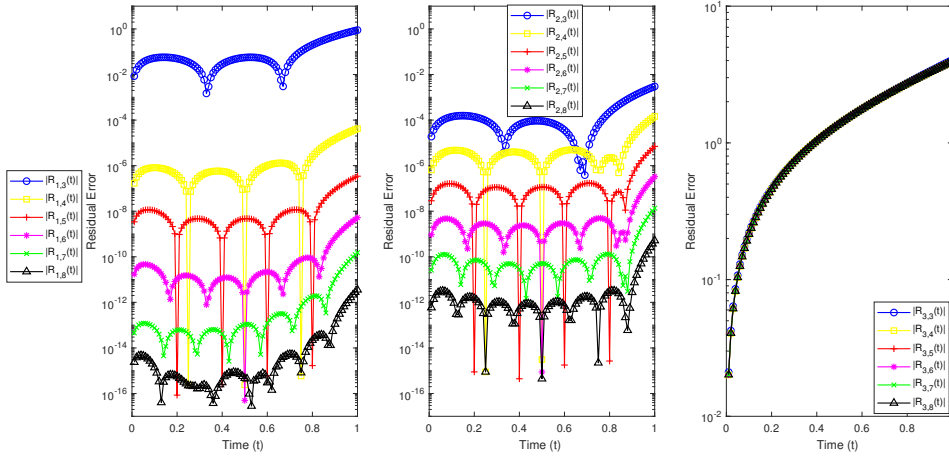
Çizelge 5.33: Problem 5.5.5'te $y_3(t)$ 'nin $N = 8$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Sinc Sıralama $ e_{3,8}(t) $	Chebyshev wavelet $ e_{3,8}(t) $	Euler $ e_{3,8}(t) $
0	0	2.517951624980696e-9	9,992007221626e-15
0.1	7.60110641095935e-10	9.565157554902726e-10	1,987414677274e-10
0.2	2.659342968058808e-9	1.156512219324668e-9	1,767723745161e-10
0.3	4.452058366410938e-8	2.494912720862885e-9	1,767754831405e-10
0.4	1.274582408505864e-7	2.886766381493544e-10	1,936295568328e-10
0.5	1.781702421155273e-7	2.470650795061146e-9	1,877165090036e-10
0.6	1.161282012773767e-7	8.319567257331073e-12	2,17974971406e-10
0.7	3.939668680175146e-8	2.555123224112776e-9	2,100888352174e-10
0.8	1.624219851947828e-7	8.62669047307918e-10	2,572271284862e-10
0.9	1.710572963276035e-7	1.0369349823236e-9	3,843192430963e-10

Çizelge (5.31), (5.32) ve (5.33)'ten görülebileceği gibi $N = 8$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler, Sinc Sıralama Yöntemi ve Chebyshev Wavelet Yöntemi'yle elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç verdiği görülebilir. Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması Şekil (5.76)'da verilmiştir.



Şekil 5.76: Problem 5.5.5'te $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ 'nin mutlak hata grafiği.



Şekil 5.77: Problem 5.5.5'in rezidüel hata fonksiyonlarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonlarının, $\{|R_{1,N}|\}_{N=3}^{\infty}$, $\{|R_{2,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ve $\{|R_{3,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ilk altı değerinin grafiği Şekil (5.77)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

6 LİNEER OLMAYAN İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN EULER MATRİS SIRALAMA YÖNTEMİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

6.1 Lineer Olmayan Terim İçeren Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemi

Lineer olmayan terim içeren Fredholm integro-diferansiyel denkleminin genel hali:

$$\sum_{k=0}^m P_k(t) y^{(k)}(t) = g(t) + \int_a^b \sum_{p=1}^3 K_p(t, s) [y(s)]^p ds, \quad (53)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (54)$$

koşulları altında verilsin.

$P_k(t)$, $g(t)$, $K_p(t, s)$ fonksiyonları $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli fonksiyonlar, a_{jk}, b_{jk} ve μ_j uygun sabitler, $y(t)$ de bilinmeyen çözüm fonksiyonu olarak tanımlansın. Denklem (53) ve (54)'te tanımlanan problemin çözümü için denklem (2)'de verilen Euler polinomlarının sonlu seri formunu ele alalım.

Sıralama noktaları;

$$t_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde ifade edildiğinde, Bölüm (3)'teki gerekli eşitlikler kullanılarak,

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(t_1) & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P_k(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{S}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\int_a^b \sum_{p=1}^3 \mathbf{K}_p(t, s) [y(s)]^p ds = \int_a^b \sum_{p=1}^3 \mathbf{K}_p(t, s) [y(s)]^{p-1} y(s) ds \quad (55)$$

$\mathbf{K}_p(t, s)$ denklem (10)'da verildiği gibi ve $y^2(t)$ 'nin matris formu:

$$y^2(t) = \mathbf{E}(t) \bar{\mathbf{E}}(t) \mathbf{A} = \mathbf{T}(t) \mathbf{S} \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

olmak üzere,

$$\int_a^b (\mathbf{K}_1(t, s) y(s) + \mathbf{K}_2(t, s) y(s) y(s) + \mathbf{K}_3(t, s) y^2(s) y(s)) ds = \mathbf{T}(t) \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{T}(t) \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{T}(t) \mathbf{K}_3 \mathbf{Q}_3 \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (56)$$

$$\mathbf{K}_p = [k_{mn}] = \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} \mathbf{K}_p(0, 0)}{\partial t^m \partial s^n}$$

$$\mathbf{Q}_1 = [q_{mn}] = \int_a^b \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) ds$$

$$m, n = 0, 1, \dots, N \quad q_{mn} = \frac{b^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m+n+1}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \int_a^b \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds$$

$$\mathbf{Q}_3 = \int_a^b \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \bar{\mathbf{T}}(s) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t_1) & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{T}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{S} & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \text{diag} \left[a_0 \mathbf{A} \quad a_1 \mathbf{A} \quad \cdots \quad a_N \mathbf{A} \right]_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(t_0) \\ G(t_1) \\ \vdots \\ G(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}.$$

olmak üzere matris denklemlerinin sistemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(t_i) \mathbf{T}(t_i) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = g(t_i) + \sum_{p=1}^3 \mathbf{T}(t_i) \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (57)$$

kısaca

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \sum_{p=1}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (58)$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \sum_{p=0}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p \mathbf{S}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (59)$$

arttırılmış matris sistemiyle ifade edilebilir. Ayrıca (54)'teki başlangıç koşulu da:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{jk} \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_j]$$

veya

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} : \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir ve denklem (59)'deki uygun bir satıra yazarak sonuç matris denklemini aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}} \end{bmatrix}$$

Sistem çözülerek bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

$$y_N(t) = \mathbf{E}(t) \mathbf{A} = \mathbf{T}(t) \mathbf{S} \mathbf{A}$$

6.1.1 Model Problemler

Bu bölümde bazı model problemler çözülüp, elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla kıyaslanacaktır.

Problem 6.1.1. (Kumbinarasaiah and Mundewadi, 2021; Hamoud et al., 2019; Mahmoodi et al., 2013; Shahsavaran and Shahsavaran, 2012; Mirzaee, 2011)

$y(0) = 0$ koşulu altında verilen

$$y'(t) = \frac{5}{4} - \frac{1}{3}t^2 + \int_0^1 (t^2 - s)y^2(s)ds$$

1. mertebeden lineer olmayan terim içeren Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 0, \quad P_1(t) = 1, \quad g(t) = \frac{5}{4} - \frac{1}{3}t^2, \quad K_1(t, s) = 0, \quad K_2(t, s) = t^2 - s$$

$N = 2$ için $y_2(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_2(t) = \sum_{n=0}^2 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 1$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \sum_{p=1}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \sum_{p=1}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p \mathbf{S}$$

ile ifade edilir.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \int_0^1 \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds, \quad \mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{12} - \frac{a_2}{12} & \frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{24} - \frac{a_2}{120} + 1 & \frac{a_2}{60} - \frac{a_1}{120} - \frac{a_0}{12} - 1 \\ \frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{12} - \frac{a_2}{24} & \frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{48} - \frac{a_2}{120} + 1 & \frac{a_2}{120} - \frac{a_1}{120} - \frac{a_0}{24} \\ \frac{a_1}{12} - \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{12} & \frac{a_0}{12} - \frac{a_1}{24} - \frac{a_2}{120} + 1 & \frac{a_0}{12} - \frac{a_1}{120} - \frac{a_2}{60} + 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{11}{12} \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{12} - \frac{a_2}{12} & \frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{24} - \frac{a_2}{120} + 1 & \frac{a_2}{60} - \frac{a_1}{120} - \frac{a_0}{12} - 1 & : & \frac{5}{4} \\ \frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{12} - \frac{a_2}{24} & \frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{48} - \frac{a_2}{120} + 1 & \frac{a_2}{120} - \frac{a_1}{120} - \frac{a_0}{24} & : & \frac{7}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Denklem sistemi çözüldüğünde, denklemin tam çözümü olan $y(t) = t$ 'nin elde edildiği görülecektir.

Çizelge (6.1)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Hermite Wavelet Yöntemi, RHF's Yöntemi, Modifiye Varyasyonel İterasyon Yöntemi (MVIM) ve B-spline Sıralama Yöntemleri'yle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 6.1: Problem 6.1.1'in farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm t	Mutlak Hata Euler (N=2)	Mutlak Hata Hermite	Mutlak Hata RHF (k=32)	Mutlak Hata B-spline (N=27)	Mutlak Hata MVIM
0.1	0.1	0	0	2.0e-05	1.94e-14	1.3e-04
0.2	0.2	0	0	8.0e-05	3.83e-14	2.6e-04
0.3	0.3	0	0	7.0e-05	5.05e-14	3.8e-04
0.4	0.4	0	0	8.0e-05	6.77e-14	4.9e-04
0.5	0.5	0	0	1.0e-05	8.37e-14	5.9e-04
0.6	0.6	0	0	1.0e-05	9.30e-14	6.6e-04
0.7	0.7	0	0	2.0e-05	1.05e-13	7.2e-04
0.8	0.8	0	0	8.0e-05	1.14e-13	7.5e-04
0.9	0.9	0	0	9.0e-05	1.21e-13	7.4e-04
Süre		2.45 s				

Çizelge (6.1)'den görülebileceği gibi $N = 2$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözüm, Hermite Wavelet Yöntemi'nde olduğu gibi tam çözüme ulaştırırken, RHF's Yöntemi, B-spline Yöntemi ve Modifiye Varyasyonel İterasyon Yöntemi'yle (MVIM) elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç verdiği görülebilir.

Problem 6.1.2. (Kumbinarasaiah and Mundewadi, 2021; Shahsavaran and Shahsavaran, 2012; Mirzaee, 2011)

Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren 1. mertebeden Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y'(t) = -\frac{1}{2}e^{t+2} + \frac{3}{2}e^t + \int_0^1 e^{t-s}y^3(s)ds, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = e^t$ iken, N'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 0.502896t^2 + 0.989878t + 1$$

$$y_3(t) = 0.19553t^3 + 0.516675t^2 + 1.039927t + 1$$

$$y_4(t) = 0.047537t^4 + 0.164612t^3 + 0.498473t^2 + 0.996739t + 1$$

$$y_5(t) = 0.009665t^5 + 0.0412t^4 + 0.16689t^3 + 0.500467t^2 + 1.000934t + 1$$

$$y_6(t) = 0.001618t^6 + 0.008219t^5 + 0.041684t^4 + 0.166655t^3 + 0.499962t^2 + 0.999924t + 1$$

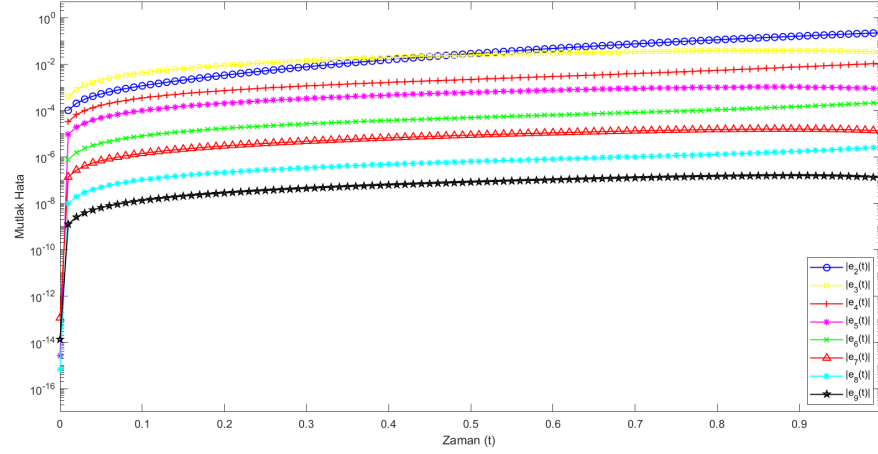
$$y_7(t) = 0.000232t^7 + 0.001369t^6 + 0.008338t^5 + 0.041668t^4 + 0.166668t^3 + 0.500007t^2 + 1.000013t + 1$$

$$y_8(t) = 0.000029t^8 + 0.000195t^7 + 0.00139t^6 + 0.008334t^5 + 0.041666t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_9(t) = 0.000003t^9 + 0.000025t^8 + 0.000198t^7 + 0.00139t^6 + 0.008333t^5 + 0.041667t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

Şekil (6.1)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.

Çizelge (6.2)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Hermite Wavelet Yöntemi, RHF's Yöntemi ve Lagrange İnterpolasyon Yöntemleri'yle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 6.1: Problem 6.1.2'nin $2 \leq N \leq 9$ için mutlak hatalarının grafiği.

Çizelge 6.2: Problem 6.1.2'nin farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm e^t	Mutlak Hata Euler (N=9)	Mutlak Hata Hermite(N=9)	Mutlak Hata RHF	Mutlak Hata Lagrange
0.1	1.1051709181	1.3e-08	2.43e-09	1.91e-05	6.0e-06
0.2	1.2214027582	2.74e-08	2.33e-09	4.72e-05	1.0e-05
0.3	1.3498588076	4.33e-08	4.75e-09	1.12e-05	2.0e-05
0.4	1.4918246976	6.09e-08	2.99e-09	1.53e-05	3.0e-05
0.5	1.6487212707	8.03e-08	2.77e-10	6.87e-05	4.0e-05
0.6	1.8221188004	1.01e-07	4.26e-09	1.20e-06	5.0e-05
0.7	2.0137527075	1.24e-07	4.73e-09	2.27e-05	6.0e-05
0.8	2.2255409285	1.44e-07	1.25e-09	2.09e-05	7.0e-05
0.9	2.4596031112	1.54e-07	4.52e-09	8.69e-05	9.0e-05
Süre		10.178 s			

Çizelge (6.2)'den görülebileceği gibi $N = 9$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümün mutlak hatasının, RHF's Yöntemi ve Lagrange Yöntemi'yle elde edilen çözümlerden daha az olduğu görülebilirken, Hermite Wavelet Yöntemi'yle elde edilen çözümün daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

Problem 6.1.3. (Kumbinarasaiah and Mundewadi, 2021; Shahsavar and Shahsavar, 2012)

Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında, 1. mertebeden Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y'(t) = \cos(t) - \frac{2}{3} \sin(t) + \frac{1}{2} \sin(t-1) + \frac{1}{4} \sin(t+1) - \frac{1}{12} \sin(t-3) + \int_0^1 \cos(t-s)y^2(s) ds$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = \sin(t)$ iken, N'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 1.031365t - 0.054114t^2$$

$$y_3(t) = 0.990859t - 0.006264t^2 - 0.156606t^3$$

$$y_4(t) = 0.999895t + 0.001265t^2 - 0.175398t^3 + 0.014707t^4$$

$$y_5(t) = 1.00023t + 0.000101t^2 - 0.166969t^3 + 0.000623t^4 + 0.007787t^5$$

$$y_6(t) = 1.000002t - 0.16658t^3 - 0.000324t^4 + 0.008929t^5 - 0.00054t^6$$

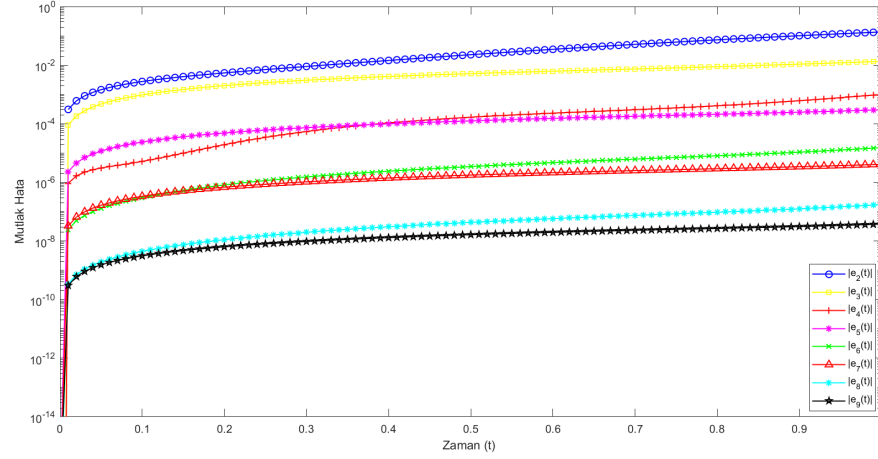
$$y_7(t) = -0.000184t^7 - 0.000027t^6 + 0.008355t^5 - 0.000009t^4 - 0.166664t^3 + 0.999997t$$

$$y_8(t) = 0.00001t^8 - 0.000215t^7 + 0.000014t^6 + 0.008326t^5 + 0.000002t^4 - 0.166667t^3 + t$$

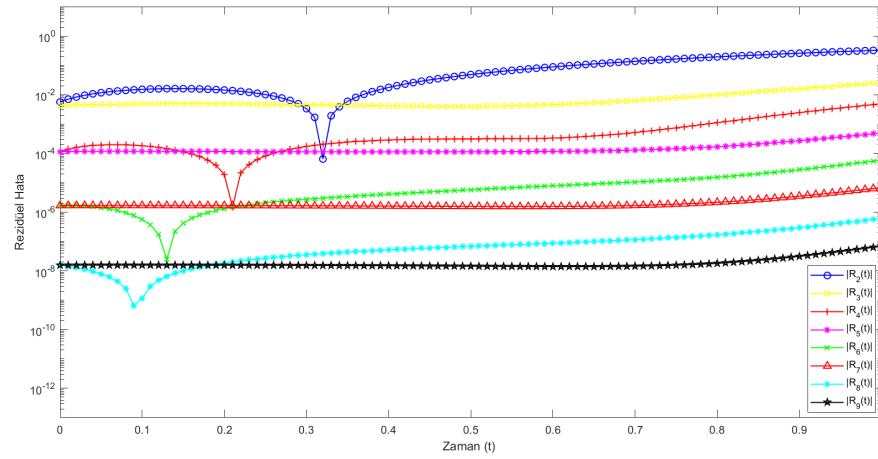
$$y_9(t) = 0.000003t^9 + 0.000001t^8 - 0.000199t^7 + 0.008333t^5 - 0.166667t^3 + t$$

Şekil (6.2)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılırken Şekil (6.3)'te de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.

Çizelge (6.3)'te Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Hermite Wavelet Yöntemi ve Lagrange İnterpolasyon Yöntemleri'yle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 6.2: Problem 6.1.3'ün $2 \leq N \leq 9$ için mutlak hatalarının grafiği.



Şekil 6.3: Problem 6.1.3'ün $2 \leq N \leq 9$ için rezidüel hatalarının grafiği.

Çizelge (6.3)'ten görülebileceği gibi $N = 9$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümün mutlak hatasının, Lagrange Yöntemi'yle elde edilen çözümlerden daha az olduğu görülebilirken, Hermite Wavelet Yöntemi'yle elde edilen çözüme çok yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

$e_9(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

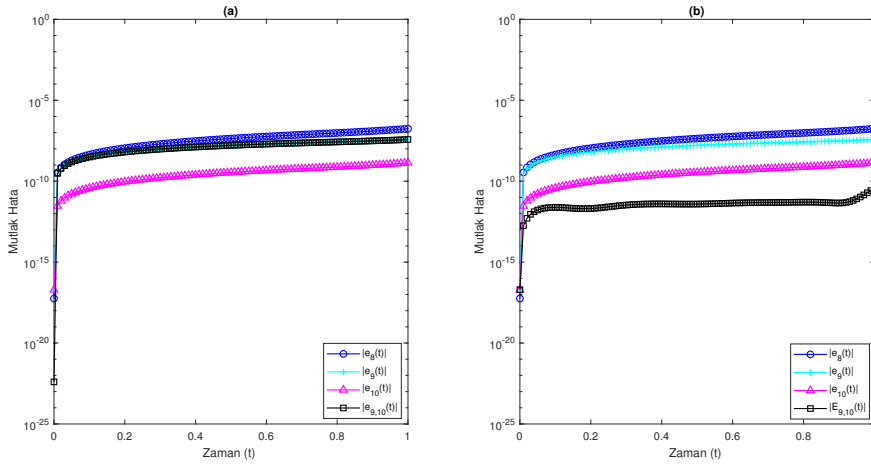
$$e_9'(t) = -R_9 + \int_0^1 \cos(t-s)(e_9(s) + y_9(s))^2 ds - \int_0^1 \cos(t-s)(y_9(s))^2 ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 10$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{9,10}(t) = 1.286 * 10^{-7} t^{10} + 1.834 * 10^{-6} t^9 + 2.061 * 10^{-6} t^8 - 0.00020 t^7 + 0.008333 t^5 - 0.166667 t^3 + t$$

Çizelge 6.3: Problem 6.1.3'ün farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm $\sin(t)$	Mutlak Hata Euler (N=9)	Mutlak Hata Hermite(N=9)	Mutlak Hata Lagrange
0.1	0.0998334166	3.1e-09	1.07e-09	2.0e-06
0.2	0.1986693308	6.32e-09	1.54e-09	6.0e-06
0.3	0.2955202067	9.62e-09	3.61e-09	1.0e-05
0.4	0.3894183423	1.3e-08	6.16e-09	1.0e-05
0.5	0.4794255386	1.64e-08	8.22e-09	2.0e-05
0.6	0.5646424734	1.97e-08	5.53e-10	2.0e-05
0.7	0.6442176872	2.31e-08	1.79e-09	3.0e-05
0.8	0.7173560909	2.67e-08	1.57e-09	4.0e-05
0.9	0.7833269096	3.1e-08	5.17e-11	4.0e-05
Süre		4.101 s		



Şekil 6.4: Problem 6.1.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.4)(a)'da $y_8(t)$, $y_9(t)$ ve $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $e_{9,10}(t)$ tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (6.4)(b)'de ise $y_8(t)$, $y_9(t)$ ve $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $E_{9,10}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hataların, gerçek hatalardan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş

yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 6.1.4. (Amin et al., 2021)

Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren $y(0) = y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında 2. mertebeden Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y''(t) = e^t + \frac{1}{4}(e^2 - 2)t + \frac{1}{2} \int_0^1 t(s - y^2(s))ds$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = e^t$ iken, N'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 1 + t + 0.5t^2$$

$$y_3(t) = 1 + t + 0.5t^2 + 0.198666t^3$$

$$y_4(t) = 1 + t + 0.5t^2 + 0.162549t^3 + 0.05378t^4$$

$$y_5(t) = 1 + t + 0.5t^2 + 0.167095t^3 + 0.039756t^4 + 0.011305t^5$$

$$y_6(t) = 1 + t + 0.5t^2 + 0.166633t^3 + 0.041877t^4 + 0.007816t^5 + 0.001947t^6$$

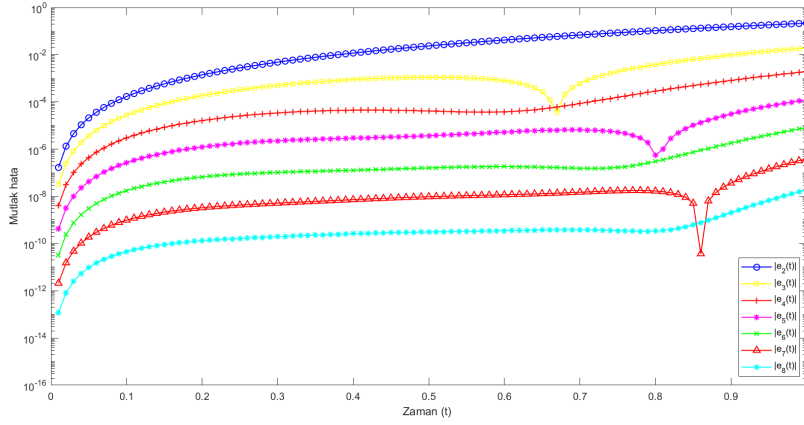
$$y_7(t) = 0.000285t^7 + 0.001285t^6 + 0.008394t^5 + 0.041649t^4 + 0.166669t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_8(t) = 0.000036t^8 + 0.000182t^7 + 0.001402t^6 + 0.008328t^5 + 0.041668t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

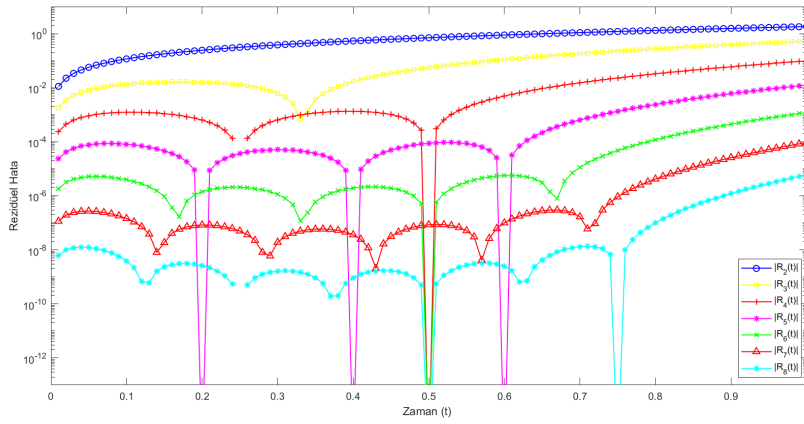
Şekil (6.5)'te, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılırken, Şekil (6.6)'da da, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.

Çizelge (6.4)'te Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen N'in farklı değerleri için yaklaşık çözümlerin mutlak hataları verilmiştir.

Çizelge (6.4) ve Amin ve ekibinin Haar Wavelet yöntemiyle yapmış oldukları çalışmadaki (Amin et al., 2021) 6. tablo da incelendiğinde Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümün mutlak hatasının, tam çözüme daha yakın olduğu görülebilir.



Şekil 6.5: Problem 6.1.4'ün $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.



Şekil 6.6: Problem 6.1.4'ün $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.

Çizelge 6.4: Problem 6.1.4'te N 'in farklı değerleri için Euler Sıralama Yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

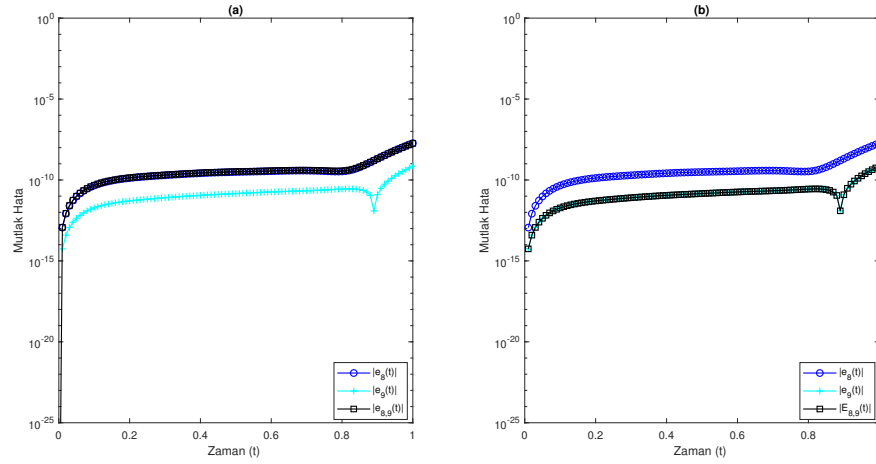
t	Tam Çözüm e^t	Mutlak Hata Euler (N=5)	Mutlak Hata Euler (N=6)	Mutlak Hata Euler (N=7)	Mutlak Hata Euler (N=8)
0.1	1.1051709181	2.66e-07	1.74e-08	9.85e-10	4.56e-11
0.2	1.2214027582	1.23e-06	6.64e-08	3.3e-09	1.32e-10
0.3	1.3498588076	2.26e-06	1.04e-07	5.16e-09	1.96e-10
0.4	1.4918246976	2.93e-06	1.28e-07	7.23e-09	2.61e-10
0.5	1.6487212707	3.7e-06	1.61e-07	9.64e-09	3.11e-10
0.6	1.8221188004	5.29e-06	1.82e-07	1.17e-08	3.5e-10
0.7	2.0137527075	6.54e-06	1.55e-07	1.49e-08	3.79e-10
0.8	2.2255409285	5.5e-07	3.04e-07	1.68e-08	3.38e-10
0.9	2.4596031112	3.09e-05	1.82e-06	3.68e-08	2.05e-09
Süre		2.775 s	2.915 s	2.923 s	3.113 s

$e_8(0) = e'_8(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$e''_8(t) = -R_8 + \frac{1}{2} \int_0^1 t(s - (e_8(s) + y_8(s))^2) ds - \frac{1}{2} \int_0^1 t(s - y_8^2(s)) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 9$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned} y_{8,9}(t) = & 4.080 * 10^{-6}t^9 + 2.248 * 10^{-5}t^8 + 0.00020t^7 + 0.00138t^6 \\ & + 0.008333t^5 + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1 \end{aligned}$$



Şekil 6.7: Problem 6.1.4'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.7)(a)'da $y_8(t)$ ve $y_9(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $e_{8,9}(t)$ tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (6.7)(b)'de ise $y_8(t)$ ve $y_9(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $E_{8,9}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hataların, gerçek hatalardan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

6.2 Lineer Olmayan Terim İçeren Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemi

Lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denkleminin genel hali için:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (60)$$

koşulları altında verilen,

$$\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p Q_{pq}(t) y^{(p)}(t) y^{(q)}(t) = g(t) + \int_a^t K(t, s) y(s) ds, \quad (61)$$

ve

$$\sum_{k=0}^m P_k(t) y^{(k)}(t) = g(t) + \int_a^t \sum_{p=1}^3 K_p(t, s) [y(s)]^p ds, \quad (62)$$

denklemleri incelenecektir.

Denklem (61) ile verilen lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümü için:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{pq} &= \text{diag} \left[\mathbf{Q}_{pq}(t_0) \quad \mathbf{Q}_{pq}(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{Q}_{pq}(t_N) \right], \\ \mathbf{R}_{pq} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) \mathbf{B}^p \mathbf{S}^T(t_0) \overline{\mathbf{B}^q \mathbf{S}} \\ \mathbf{T}(t_1) \mathbf{B}^p \mathbf{S}^T(t_1) \overline{\mathbf{B}^q \mathbf{S}} \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t_N) \mathbf{B}^p \mathbf{S}^T(t_N) \overline{\mathbf{B}^q \mathbf{S}} \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathbf{Q}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t_0) \\ \mathbf{Q}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere, denklem(61)'in düzenlenmiş hali:

$$\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq}(t_i) \mathbf{R}_{pq}(t_i) \overline{\mathbf{A}} = g(t_i) + \overline{\mathbf{T}}(t_i) \overline{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{Q}}(t_i) \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (63)$$

ve temel matris formu:

$$\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq} \overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{Q}} \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{W} = -\overline{\mathbf{TKQS}}, \quad \mathbf{V} = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq} \overline{\mathbf{A}}$$

olmak üzere kısaca:

$$\mathbf{WA} + \mathbf{V}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W}; \mathbf{V} : \mathbf{G}] \quad (64)$$

Ayrıca, denklem(60)'da verilen koşullar daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere bulunup, arttırılmış matrisin herhangi bir satırına yerleştirerek aşağıdaki sonuç matrisi elde edilebilir.

$$\left[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{V}} : \widetilde{\mathbf{G}} \right] \quad \text{or} \quad \widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{V}} \overline{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad (65)$$

Denklem (62) ile verilen lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümü için ise:

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(t_i) \mathbf{T}(t_i) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = g(t_i) + \sum_{p=1}^3 \mathbf{T}(t_i) \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (66)$$

kısaca

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \sum_{p=1}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (67)$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \sum_{p=0}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p \mathbf{S}$$

olmak üzere

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (68)$$

arttırılmış matris sistemiyle ifade edilebilir. Ayrıca (60)'daki başlangıç koşulu da:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{jk} \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_j]$$

veya

$$\left[\mathbf{U} : \mathbf{A} \right]$$

ile ifade edilir ve (59)'deki denklemdeki herhangi bir satıra yazarak sonuç matris denklemini aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \left[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}} \right]$$

Sistem çözülerek bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

$$y_N(t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{A} = \mathbf{T}(t)\mathbf{S}\mathbf{A}$$

6.2.1 Model Problemler

Problem 6.2.1. (Elmacı et al., 2021) İlk olarak aşağıdaki lineer olmayan terim içeren 1. mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y'(t)y(t) + t^2y^2(t) = t^4 + t - \frac{t^3}{2} + \int_0^t ty(s)ds, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$Q_{00}(t) = t^2, \quad Q_{10}(t) = 1, \quad g(t) = t^4 + t - \frac{t^3}{2}, \quad K(t, s) = t$$

Denklemin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında $N = 2$ için Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$y(t) \cong y_2(t) = \sum_{n=0}^2 a_n E_n(t),$$

$a = 0, b = 1$ ve $N = 2$ için, sıralama noktaları: $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1\}$

Denklem (58)'den, temel matris denklemi:

$$\sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq} \overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{TKQSA}} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{W} = -\overline{\mathbf{TKQS}}, \quad \mathbf{V} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq}$$

şeklinde alındığında arttırılmış matris:

$$[\mathbf{W} ; \mathbf{V} : \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{16} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazıldığında, $N=2$ için sistemin tam çözümü olan $y(t) = t$ 'nin elde edildiği görülecektir.

$$[\tilde{W} ; \tilde{V} : \tilde{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{16} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problem 6.2.2. (Elmacı et al., 2021) Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren 1. mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y'(t)y(t) + t^2 e^{-t} y^2(t) = e^{2t} - t^2 + \int_0^t t^2 y(s) ds, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Koşullar yerine yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matris:

$$[\tilde{W} ; \tilde{V} : \tilde{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{32} & \frac{1}{48} & \frac{e^{-1/2}}{4} & 0 & -\frac{e^{-1/2}}{16} & 1 & 0 & 0 & -\frac{e^{-1/2}}{16} & 0 & \frac{e^{-1/2}}{64} & e^{-\frac{1}{4}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Denklemin tam çözümü $y(t) = e^t$ iken, N'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 1 + t + 0.71016t^2$$

$$y_3(t) = 1 + t + 0.43955t^2 + 0.39765t^3$$

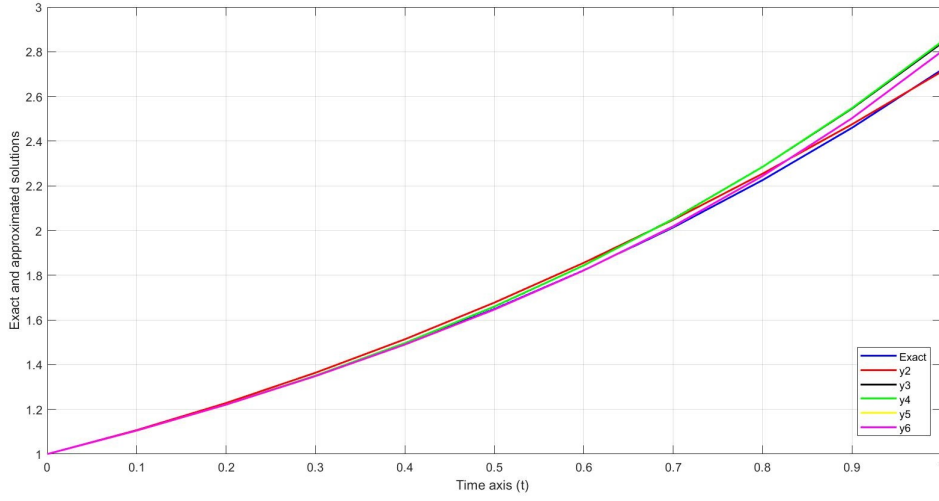
$$y_4(t) = 1 + t + 0.47655t^2 + 0.28812t^3 + 0.07882t^4$$

$$y_5(t) = 1 + 0.97528t + 0.65680t^2 - 0.29397t^3 + 0.51493t^4 - 0.05329t^5$$

$$y_6(t) = 1 + t + 0.50165t^2 + 0.15133t^3 - 0.15109t^4 + 0.44798t^5 - 0.14987t^6$$

Şekil (6.8) ve çizelge (6.5)'te tam çözümün, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerle karşılaştırılması verilmiştir.

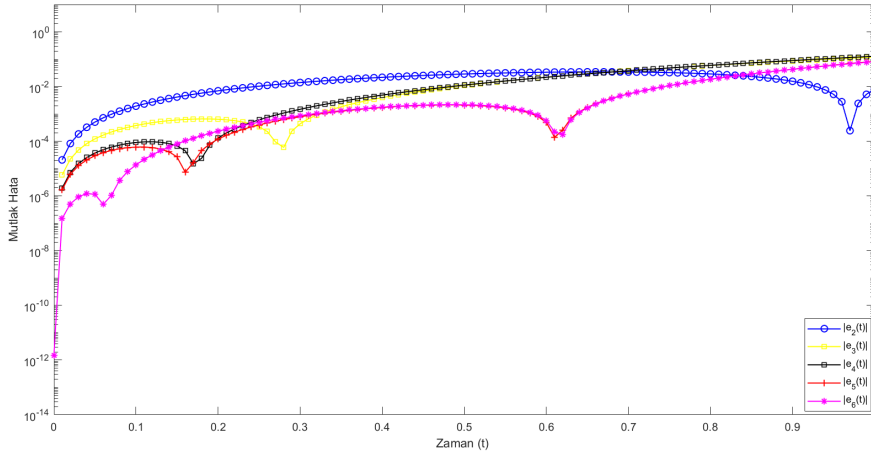
Şekil (6.9)'da, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılmaları verilirken, Şekil (6.10)'da da rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.



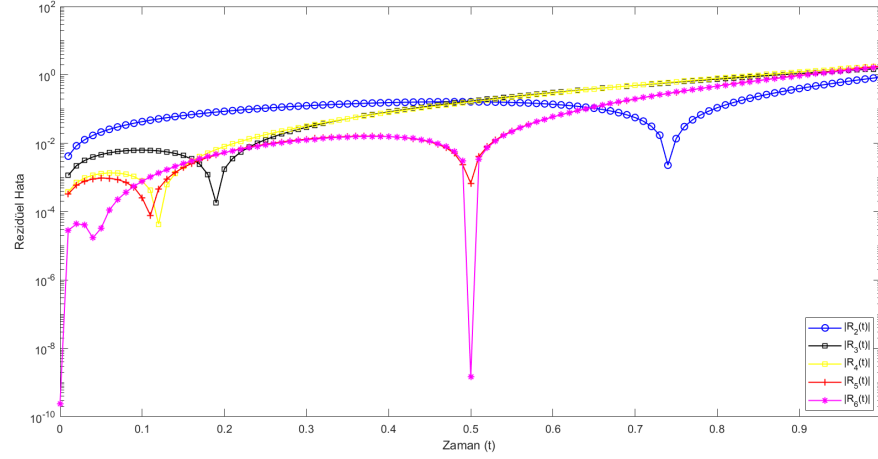
Şekil 6.8: Problem 6.2.2'nin tam çözüm $y(t) = e^t$ ve $N = 2, 3, 4, 5, 6$ için yaklaşık çözümlerin grafiği.

Çizelge 6.5: Problem 6.2.2'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.

t	Tam çözüm	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	1.1052	1.1071	1.1048	1.1051	1.1052	1.1052	4.30e-02	-6.32e-03	-7.91e-04	2.51e-04	-7.77e-04
0.2	1.2214	1.2284	1.2208	1.2215	1.2213	1.2212	8.61e-02	1.77e-03	8.01e-03	-5.31e-03	-5.34e-03
0.3	1.3499	1.3639	1.3503	1.3513	1.3491	1.3490	1.25e-01	2.93e-02	3.22e-02	-1.32e-02	-1.26e-02
0.4	1.4918	1.5136	1.4958	1.4967	1.4901	1.4901	1.55e-01	8.30e-02	8.00e-02	-1.57e-02	-1.57e-02
0.5	1.6487	1.6775	1.6596	1.6601	1.6466	1.6465	1.64e-01	1.71e-01	1.62e-01	6.79e-04	-1.48e-09
0.6	1.8221	1.8557	1.8441	1.8440	1.8216	1.8215	1.38e-01	3.04e-01	2.95e-01	5.92e-02	5.91e-02
0.7	2.0138	2.0480	2.0518	2.0515	2.0191	2.0191	5.67e-02	4.93e-01	4.97e-01	1.97e-01	1.99e-01
0.8	2.2255	2.2545	2.2849	2.2856	2.2441	2.2442	-1.10e-01	7.54e-01	7.96e-01	4.71e-01	4.71e-01
0.9	2.4596	2.4752	2.5459	2.5495	2.5027	2.5024	-4.00e-01	1.0988	1.2234	9.69e-01	9.46e-01
1.0	2.7183	2.7102	2.8372	2.8468	2.8023	2.8000	-8.64e-01	1.5422	1.8205	1.8192	1.7093



Şekil 6.9: Problem 6.2.2'nin $2 \leq N \leq 6$ için rezidüel hatalarının grafiği.



Şekil 6.10: Problem 6.2.2'nin $2 \leq N \leq 6$ için rezidüel hatalarının grafiği.

Problem 6.2.3. (Elmacı et al., 2021) Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren 1. mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$(y'(t))^2 + y'(t)y(t) = 1 + e^{-t} + \int_0^t (t-s)y(s)ds, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Koşullar yerine yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matris:

$$[\tilde{W} ; \tilde{V} : \tilde{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{64} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Denklemin tam çözümü $y(t) = e^{-t}$ iken, N'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 1 - t + 0.50741t^2$$

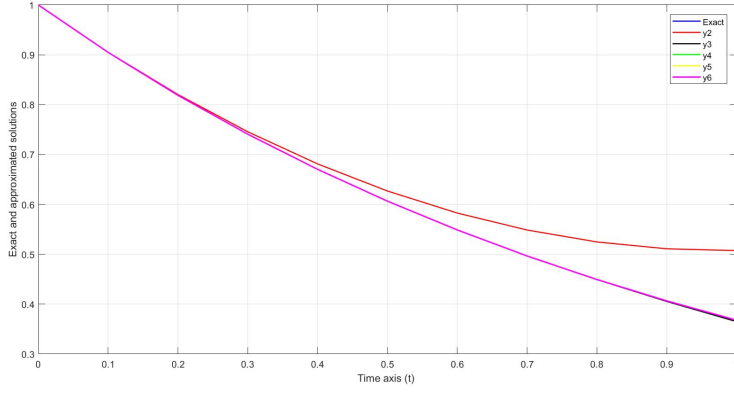
$$y_3(t) = 1 - t + 0.48647t^2 - 0.12156t^3$$

$$y_4(t) = 1 - t + 0.49864t^2 - 0.15956t^3 + 0.02901t^4$$

$$y_5(t) = 1 - t + 0.49989t^2 - 0.16588t^3 + 0.03950t^4 - 0.00564t^5$$

$$y_6(t) = 1 - t + 0.49999t^2 - 0.16655t^3 + 0.04126t^4 - 0.00767t^5 + 0.00085t^6$$

Şekil (6.11) ve çizelge (6.6)'da tam çözümün, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerinin karşılaştırılması ve-
rilmiştir.



Şekil 6.11: Problem 6.2.3'ün tam çözüm $y(t) = e^{-t}$ ve $N = 2, 3, 4, 5, 6$ için yaklaşık çözümlerin grafiği.

Çizelge 6.6: Problem 6.2.3'ün tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.

t	Tam Çözüm	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.9048	0.9051	0.9047	0.9048	0.9048	0.9048	-5.89e-03	1.46e-03	1.02e-04	5.36e-06	2.16e-07
0.2	0.8187	0.8203	0.8185	0.8187	0.8187	0.8187	-1.85e-02	1.24e-03	3.92e-05	-3.00e-09	-5.96e-08
0.3	0.7408	0.7457	0.7405	0.7408	0.7408	0.7408	-3.49e-02	3.31e-04	-2.90e-05	-1.89e-06	-3.57e-08
0.4	0.6703	0.6812	0.6701	0.6703	0.6703	0.6703	-5.19e-02	-5.79e-04	-4.08e-05	-3.16e-08	4.45e-08
0.5	0.6065	0.6269	0.6064	0.6065	0.6065	0.6065	-6.64e-02	-1.02e-03	4.75e-08	1.49e-06	0.0000
0.6	0.5488	0.5827	0.5489	0.5488	0.5488	0.5488	-7.56e-02	-7.10e-04	5.01e-05	-6.41e-08	-5.46e-08
0.7	0.4966	0.5486	0.4967	0.4966	0.4966	0.4966	-7.64e-02	5.17e-04	4.53e-05	-2.99e-06	5.58e-08
0.8	0.4493	0.5247	0.4491	0.4493	0.4493	0.4493	-6.60e-02	2.75e-03	-8.62e-05	4.98e-09	1.31e-07
0.9	0.4066	0.5110	0.4054	0.4066	0.4066	0.4066	-4.15e-02	6.07e-03	-4.13e-04	2.18e-05	-8.73e-07
1	0.3679	0.5074	0.3649	0.3681	0.3679	0.3679	2.37e-07	1.06e-02	-9.94e-04	8.01e-05	-5.24e-06

Çizelge (6.6)'dan da görülebileceği gibi N değerleri büyüdükçe tam çözüme yaklaşılmaktadır.

Problem 6.2.4. (Türkyılmazoğlu, 2014; Babolian et al., 2009; Sepehrian and Razzaghi, 2004; Avudainayagam and Vani, 2000)

$y(0) = 0$ koşulu altında verilen

$$y'(t) = -1 + \int_0^t y^2(s) ds$$

1. mertebeden lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 0, \quad P_1(t) = 1, \quad g(t) = -1, \quad K_1(t, s) = 0, \quad K_2(t, s) = 1$$

$N = 2$ için $y_2(t)$ yaklaşık çözümü,

$$y(t) \cong y_2(t) = \sum_{n=0}^2 a_n E_n(t),$$

sıralama noktaları $a = 0, b = 1$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \sum_{p=1}^3 \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p} \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \sum_{p=1}^3 \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_p} \mathbf{S}$$

ile ifade edilir.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \int_0^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds, \quad \mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{K}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{Q}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2(0) \\ \mathbf{Q}_2(1/2) \\ \mathbf{Q}_2(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{a_1}{8} - \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{12} & \frac{a_0}{8} - \frac{a_1}{24} - \frac{a_2}{64} + 1 & \frac{a_0}{12} - \frac{a_1}{64} - \frac{a_2}{60} \\ \frac{a_2}{6} - a_0 & 1 - \frac{a_1}{12} & \frac{a_0}{6} - \frac{a_2}{30} + 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & : & -1 \\ \frac{a_1}{8} - \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{12} & \frac{a_0}{8} - \frac{a_1}{24} - \frac{a_2}{64} + 1 & \frac{a_0}{12} - \frac{a_1}{64} - \frac{a_2}{60} & : & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Bu örneğin kesin çözümü, diferansiyel denkleme indirgenerek analitik olarak bulunabilir ancak, analitik çözüm temel fonksiyonlarla temsil edilmez.

N'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 0.040414t^2 - t$$

$$y_3(t) = 0.107732t^3 - 0.035287t^2 - t$$

$$y_4(t) = 0.073876t^4 + 0.008349t^3 - 0.00196t^2 - t$$

$$y_5(t) = -0.01894t^5 + 0.108127t^4 - 0.011457t^3 + 0.001827t^2 - t$$

$$y_6(t) = -0.010161t^6 + 0.010616t^5 + 0.077781t^4 + 0.001452t^3 - 0.000156t^2 - t$$

$$y_7(t) = -0.002274t^7 - 0.003461t^6 + 0.002937t^5 + 0.082067t^4 + 0.000276t^3 - 0.000025t^2 - t$$

$$y_8(t) = 0.001305t^8 - 0.006720t^7 + 0.002673t^6 - 0.001446t^5 + 0.083782t^4 - 0.000075t^3 + 0.000006t^2 - t$$

$$y_9(t) = 0.000530t^9 - 0.000782t^8 - 0.003293t^7 - 0.000369t^6 + 0.000129t^5 + 0.083305t^4 + 0.000004t^3 - 2.09 * 10^{-7}t^2 - t$$

$$y_{10}(t) = 0.000005t^{10} + 0.000505t^9 - 0.000726t^8 - 0.003361t^7 - 0.000319t^6 + 0.000107t^5 + 0.083311t^4 + 0.000003t^3 - 1.41 * 10^{-7}t^2 - t$$

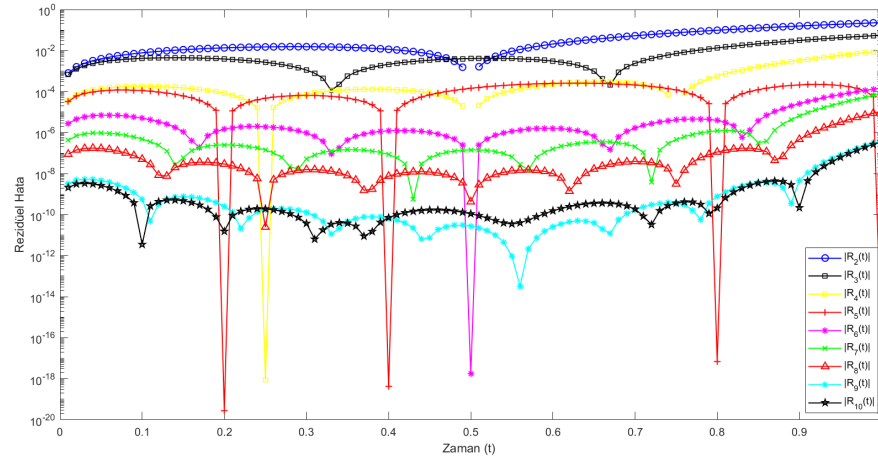
Çizelge (6.7)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ile, Kuvvet Seri Açılım Yöntemi, Üçgen Fonksiyonları kullanan Direkt Yöntem (DMT), Tek Terimli Walsh Serisi Yöntemi(STWS) ve Galerkin-Wavelet Yöntemleri'yle elde edilen çözüm değerlerinin karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 6.7: Problem 6.2.4'ün farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen sonuçların karşılaştırılması

t	Tam Çözüm	Euler Yöntemi (N=10)	Kuvvet Seri Açılımı (N=10)	DMT Yöntem (N=64)	STWS Yöntemi (N=60)	Galerkin Wavelet Yöntemi
0.125	-0.12497965680	-0.12497965703	-0.12497965663	-0.12498	-0.12498	-0.1250
0.25	-0.24967472120	-0.24967472138	-0.24967472093	-0.24967	-0.24967	-0.2497
0.375	-0.37335618000	-0.37335618014	-0.37335617973	-0.37335	-0.37336	-0.3734
0.5	-0.49482250800	-0.49482250814	-0.49482250766	-0.49481	-0.49482	-0.4948
0.625	-0.61243068160	-0.61243068182	-0.61243068141	-0.61242	-0.61243	-0.6124
0.75	-0.72415334810	-0.72415334834	-0.72415334786	-0.72413	-0.72415	-0.7242
0.875	-0.82766744290	-0.82766744329	-0.82766744272	-0.82764	-0.82766	-0.8277
1	-0.92047571070	-0.92047570106	-0.92047571047	-0.92044	-0.92047	-0.9205
Süre		9.531 s				

Çizelge (6.7)'den görülebileceği gibi $N = 10$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözüm, Kuvvet Seri Açılım Yöntemi'ndeki gibi $O(10^{-10})$ doğruluk ile elde edilirken, diğer yöntemle elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç vermiştir.

Şekil (6.12)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.12: Problem 6.2.4'ün $2 \leq N \leq 10$ için rezidüel hatalarının grafiği.

Problem 6.2.5. (Yüzbaşı, 2016; Türkyılmazoğlu, 2014; Babolian et al., 2009, 2008; Maleknejad and Hadizadeh, 1997)

Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında, 1. mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y'(t) = \sin(2t) - \int_0^t 3 \cos(t-s) y^2(s) ds$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = \cos(t)$ iken, N 'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 1 - 0.486953t^2$$

$$y_3(t) = 1 - 0.525658t^2 + 0.073621t^3$$

$$y_4(t) = 1 - 0.500126t^2 + 0.00068t^3 + 0.040539t^4$$

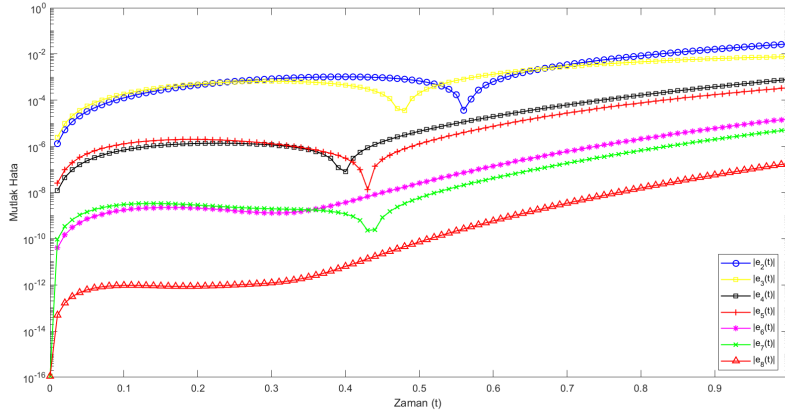
$$y_5(t) = 1 - 0.499725t^2 - 0.001887t^3 + 0.046382t^4 - 0.004814t^5$$

$$y_6(t) = 1 - 0.5t^2 + 0.000003t^3 + 0.041658t^4 + 0.000005t^5 - 0.001379t^6$$

$$y_7(t) = 0.000125t^7 - 0.001581t^6 + 0.000144t^5 - 0.041609t^4 - 0.000012t^3 - 0.500001t^2 + 1$$

$$y_8(t) = 0.000025t^8 - 0.001388t^6 + 0.041667t^4 - 0.5t^2 + 1$$

Şekil (6.13)'te, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.13: Problem 6.2.5'in $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.

Çizelge (6.8)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Bernstein Sıralama, Üçgen fonksiyonları kullanan Direkt Yöntem (DMT), Block-pulse Fonksiyon Yöntemi (BPFs) ve Adomian Ayrıştırma Yöntemleri'yle (ADM) elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

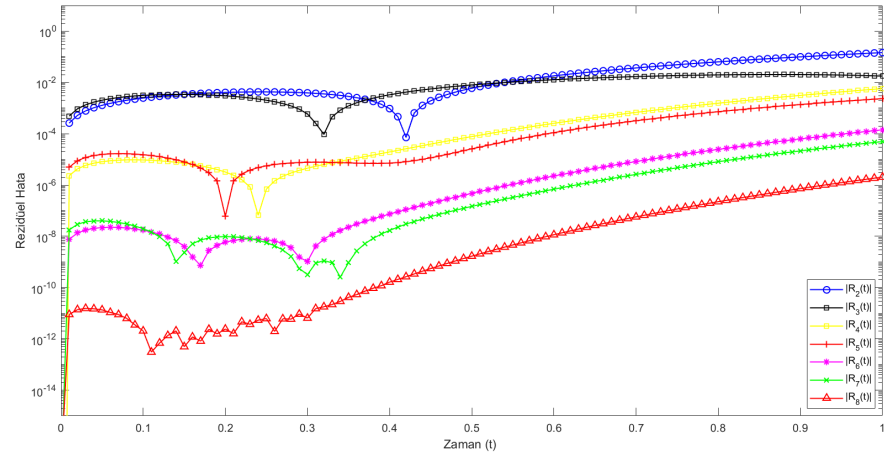
Çizelge (6.8)'den görülebileceği gibi $N = 7$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümün mutlak hatasının, Bernstein Sıralama,

Çizelge 6.8: Problem 6.2.5'in farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Mutlak Hata Euler (N=8)	Mutlak Hata Euler (N=7)	Mutlak Hata Bernstein(N=7)	Mutlak Hata DMT(m=8)	Mutlak Hata BPFs(m=16)	Mutlak Hata ADM
0	0	0	0	0	0	0
0.2	8.7141e-13	2.8549e-09	1.6708e-06	1.5706e-03	4.2825e-03	2.3642e-04
0.4	6.3624e-12	1.1766e-09	6.4898e-07	2.1999e-04	2.6179e-03	1.0400e-04
0.6	5.9174e-10	4.1758e-08	1.0778e-07	7.3438e-04	3.6278e-03	2.7396e-03
0.8	1.5652e-08	6.6540e-07	5.8822e-07	1.3022e-03	1.3711e-02	2.8967e-02
1	1.8313e-07	5.2809e-06	1.2002e-05	3.1892e-03	2.6615e-02	1.7550e-01
Süre	5.904	5.076 s				

(DMT), (BPFs) ve (ADM) elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının elde edilen çözümlerden daha azdır. N değerini arttırtıkça tam çözüme yaklaşıldığı da $N = 8$ için elde edilen çözümün mutlak hatasının daha küçük gelmesinden anlaşılabilir.

Şekil (6.14)'te, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.



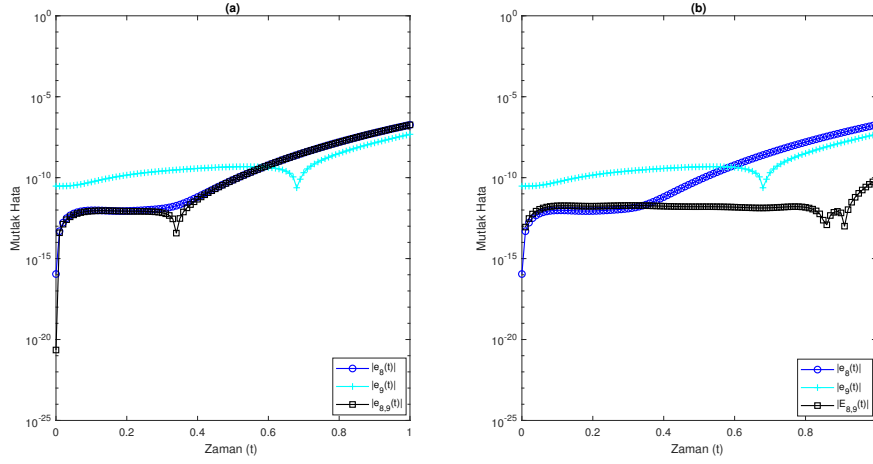
Şekil 6.14: Problem 6.2.5'in $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.

$e_8(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$e'_8(t) = -R_8 - \int_0^t 3 \cos(t-s)(e_8(s) + y_8(s))^2 ds + \int_0^t 3 \cos(t-s)y_8^2(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 9$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{8,9}(t) = -1.170 * 10^{-6}t^9 + 2.696 * 10^{-5}t^8 - 2.219 * 10^{-6}t^7 - 0.00138t^6 \\ - 5.431 * 10^{-7}t^5 + 0.04167t^4 - 1.733 * 10^{-8}t^3 - 0.5t^2 + 1$$



Şekil 6.15: Problem 6.2.5'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.15)(a)'da $y_8(t)$ ve $y_9(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $e_{8,9}(t)$ tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (6.15)(b)'de ise $y_8(t)$ ve $y_9(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $E_{8,9}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hataların, gerçek hatalardan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 6.2.6. (Afrouzi et al., 2011) Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 1, y'''(0) = -1$ başlangıç koşulları altında, 4. mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y^{(4)}(t) = e^{-t} + e^{-3t} - 1 + 3 \int_0^t y^3(s) ds$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = e^{-t}$ iken, N 'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_4(t) = 1 - t + 0.5t^2 - 0.166667t^3 + 0.041667t^4$$

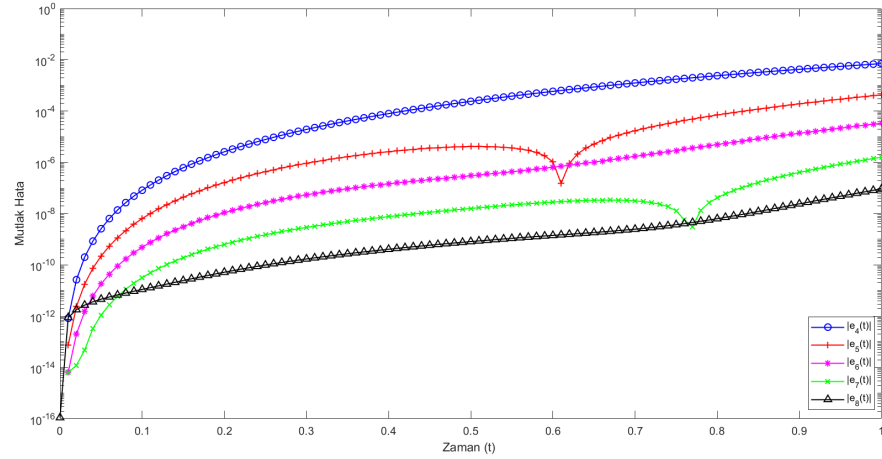
$$y_5(t) = 1 - t + 0.5t^2 - 0.166667t^3 + 0.041667t^4 - 0.007553t^5$$

$$y_6(t) = 1 - t + 0.5t^2 - 0.166667t^3 + 0.041667t^4 - 0.008265t^5 + 0.001178t^6$$

$$y_7(t) = -0.000161t^7 + 0.001367t^6 - 0.008328t^5 + 0.041667t^4 - 0.166667t^3 + 0.5t^2 - t + 1$$

$$y_8(t) = 0.000019t^8 - 0.000194t^7 + 0.001387t^6 - 0.008333t^5 + 0.041667t^4 - 0.166667t^3 + 0.5t^2 - t + 1$$

Şekil (6.16)'da, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.16: Problem 6.2.6'nın $4 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.

Çizelge (6.9)'da Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Modifiye Homotopi Perturbasyon Yöntemi'yle (MHPM) elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

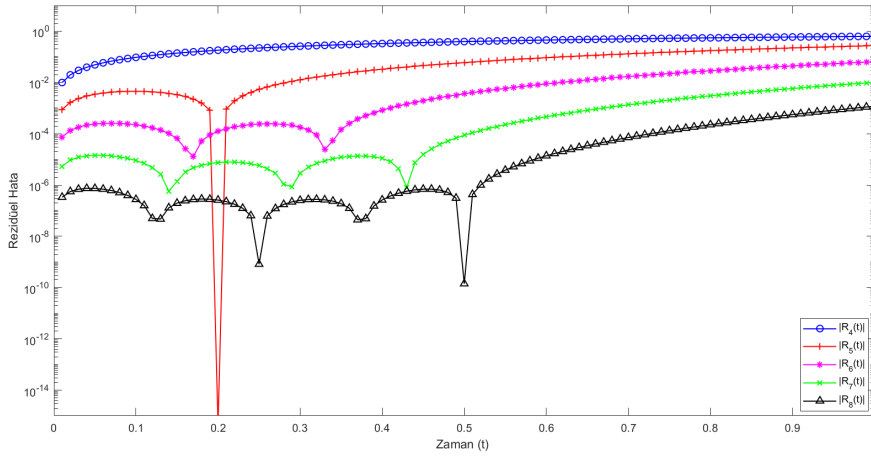
Çizelge (6.9)'dan görülebileceği gibi $N \geq 4$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları, Modifiye Homotopi Perturbasyon Yöntemi'yle elde edilen çözümün mutlak hatasından daha azdır.

Şekil (6.17)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.

Çizelge 6.9: Problem 6.2.6'nın N 'in farklı değerleri için Euler Sıralama Yöntemi ve (MHPM)

ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Mutlak Hata Euler (N=4)	Mutlak Hata Euler (N=5)	Mutlak Hata Euler (N=6)	Mutlak Hata Euler (N=7)	Mutlak Hata Euler (N=8)	Mutlak Hata MHPM
0	0	0	0	0	0	0
0.04	8.476768176e-10	7.426148585e-11	6.156186672e-12	4.399813847e-13	2.708944180e-14	0.212300000e-04
0.08	2.694669754e-08	2.197408144e-09	1.724912435e-10	1.171518438e-11	6.846745393e-13	0.169065600e-03
0.12	2.032828426e-07	1.534292626e-08	1.139102035e-09	7.357248144e-11	4.102052031e-12	0.568149900e-03
0.16	8.510337887e-07	5.905652811e-08	4.144274257e-09	2.549701561e-10	1.361299962e-11	0.134130310e-02
0.2	2.580255351e-06	1.633325594e-07	1.083710743e-08	6.370720618e-10	3.275080207e-11	0.260984490e-02
0.24	6.378933447e-06	3.648561244e-07	2.293108636e-08	1.294494179e-09	6.454559109e-11	0.449388590e-02
0.28	1.369854427e-05	6.997534369e-07	4.184110247e-08	2.284731404e-09	1.114568438e-10	0.711259400e-02
0.32	2.653625964e-05	1.192987305e-06	6.844083711e-08	3.650100888e-09	1.758009294e-10	0.105844384e-01
0.36	4.751392897e-05	1.844529304e-06	1.030720567e-07	5.431174843e-09	2.602866811e-10	0.150274129e-01
Süre	2.719 s	4.620 s	7.269 s	14.967 s	26.606 s	

**Şekil 6.17:** Problem 6.2.6'nın $4 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.

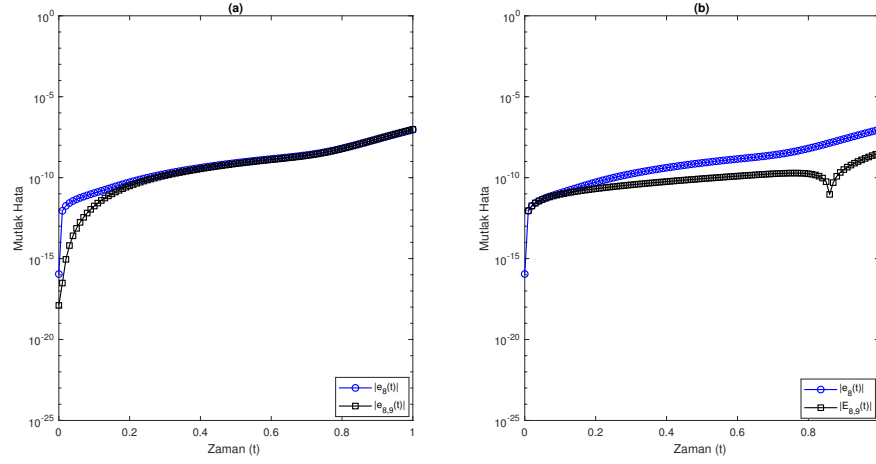
$e_8(0) = e'_8(0) = e''_8(0) = e'''_8(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$e_8^{(4)}(t) = -R_8 - 3 \int_0^t (e_8(s) + y_8(s))^3 ds + 3 \int_0^t y_8^3(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 9$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{8,9}(t) = -2.093 * 10^{-6}t^9 + 2.409 * 10^{-5}t^8 - 1.980 * 10^{-4}t^7 + 0.00139t^6 \\ - 0.00833t^5 + 0.04167t^4 - 0.16667t^3 - 0.5t^2 - t + 1$$

Şekil (6.18)(a)'da $y_8(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{8,9}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (6.18)(b)'de ise $y_8(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{8,9}(t)$ düzeltilmiş hatasının



Şekil 6.18: Problem 6.2.6'nın yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 6.2.7. (Amin et al., 2021) Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren $y(0) = 0, y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında, 2. mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y''(t) = \sinh(t) + \frac{1}{2}(t - \cosh(t) \sinh(t)) + \int_0^t y^2(s) ds$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = \sinh(t)$ iken, N 'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = t$$

$$y_3(t) = t + 0.169772t^3$$

$$y_4(t) = t + 0.16312t^3 + 0.010576t^4$$

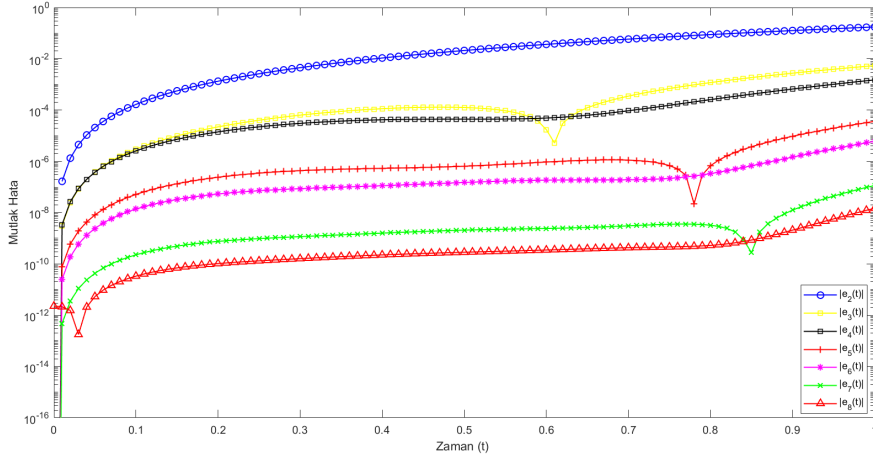
$$y_5(t) = t + 0.166748t^3 - 0.000338t^4 + 0.008755t^5$$

$$y_6(t) = t + 0.16664t^3 + 0.000167t^4 + 0.007914t^5 + 0.000474t^6$$

$$y_7(t) = 0.000212t^7 - 0.000021t^6 + 0.008346t^5 - 0.000004t^4 + 0.166667t^3 + t$$

$$y_8(t) = 0.000001t^8 + 0.000185t^7 + 0.00001t^6 + 0.008329t^5 + 0.000001t^4 + 0.166667t^3 + t$$

Şekil (6.19)'da, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.19: Problem 6.2.7'nin $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.

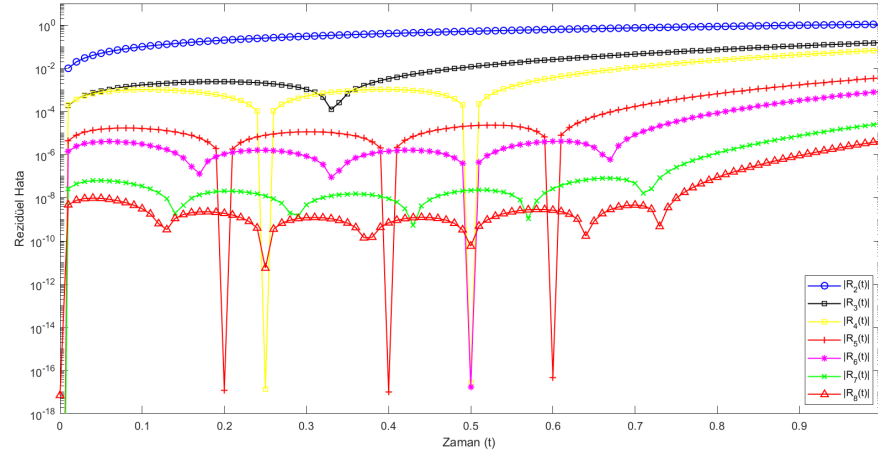
Çizelge (6.10)'da Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları verilmiştir.

Çizelge 6.10: Problem 6.2.7'nin N 'in farklı değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Mutlak Hata Euler (N=2)	Mutlak Hata Euler (N=3)	Mutlak Hata Euler (N=4)	Mutlak Hata Euler (N=5)	Mutlak Hata Euler (N=6)	Mutlak Hata Euler (N=7)	Mutlak Hata Euler (N=8)
0.1	0.00017	3.02e-06	2.57e-06	5.16e-08	1.39e-08	2.27e-10	3.35e-11
0.2	0.00134	2.22e-05	1.41e-05	2.41e-07	5.34e-08	7.58e-10	1.03e-10
0.3	0.00452	6.36e-05	3.04e-05	4.36e-07	8.64e-08	1.16e-09	1.61e-10
0.4	0.01075	0.00011	4.19e-05	5.36e-07	1.13e-07	1.59e-09	2.25e-10
0.5	0.02110	0.00013	4.43e-05	6.48e-07	1.50e-07	2.08e-09	2.86e-10
0.6	0.03665	1.72e-05	4.91e-05	9.44e-07	1.85e-07	2.42e-09	3.50e-10
0.7	0.05858	0.00035	9.43e-05	1.12e-06	1.92e-07	3.06e-09	4.29e-10
0.8	0.08811	0.00118	0.00026	6.75e-07	3.34e-07	3.24e-09	5.29e-10
0.9	0.12652	0.00275	0.00066	9.55e-06	1.47e-06	1.25e-08	2.08e-09
1	0.17520	0.00543	0.00151	3.63e-05	6.05e-06	1.15e-07	1.48e-08
Süre	1.496 s	1.697 s	1.915 s	2.436 s	4.283 s	5.225 s	6.045 s

Modifiye homotopi perturbasyon yöntemiyle elde edilen çözümün mutlak hataları $N = 2$ için $4.7839e - 3$, $N = 128$ için $1.4255e - 6$ olarak verilmiştir. Çizelge (6.10)'dan da görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen sonuçlar tam çözüme daha yakındır.

Şekil (6.20)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.



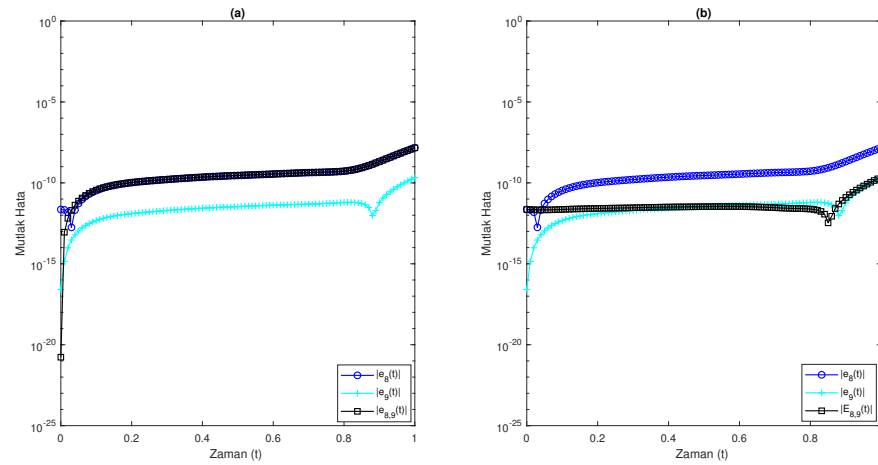
Şekil 6.20: Problem 6.2.7'nin $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.

$e_8(0) = e'_8(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$e''_8(t) = -R_8 + \int_0^t (e_8(s) + y_8(s))^2 ds - \int_0^t y_8^2(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 9$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{8,9}(t) = 2.977 * 10^{-6}t^9 - 4.853 * 10^{-7}t^8 + 1.989 * 10^{-4}t^7 - 2.805 * 10^{-7}t^6 + 0.00833t^5 - 1.774 * 10^{-8}t^4 + 0.16667t^3 - 3.812 * 10^{-21}t^2 + t$$



Şekil 6.21: Problem 6.2.7'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.21)(a)'da $y_8(t)$ ve $y_9(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $e_{8,9}(t)$ tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (6.21)(b)'de ise $y_8(t)$ ve $y_9(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $E_{8,9}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hataların, gerçek hatalardan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 6.2.8. Šmarda et al. (2013); Abazari and Abazari (2009)

Aşağıdaki 1. mertebeden lineer olmayan pantograf tipli $y(0) = 0$ başlangıç koşulları altında verilen Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y'(t) + \left(\frac{1}{2}t - 2\right)y(t) = 1 + 2 \int_0^t y^2\left(\frac{s}{2}\right) ds$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = te^t$ iken, N 'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 1.618714t^2 + t$$

$$y_3(t) = 0.798889t^3 + 0.878806t^2 + t$$

$$y_4(t) = 0.27152t^4 + 0.428582t^3 + 1.016467t^2 + t$$

$$y_5(t) = 0.068229t^5 + 0.141028t^4 + 0.510398t^3 + 0.99837t^2 + t$$

$$y_6(t) = 0.013687t^6 + 0.035015t^5 + 0.170535t^4 + 0.498907t^3 + 1.000128t^2 + t$$

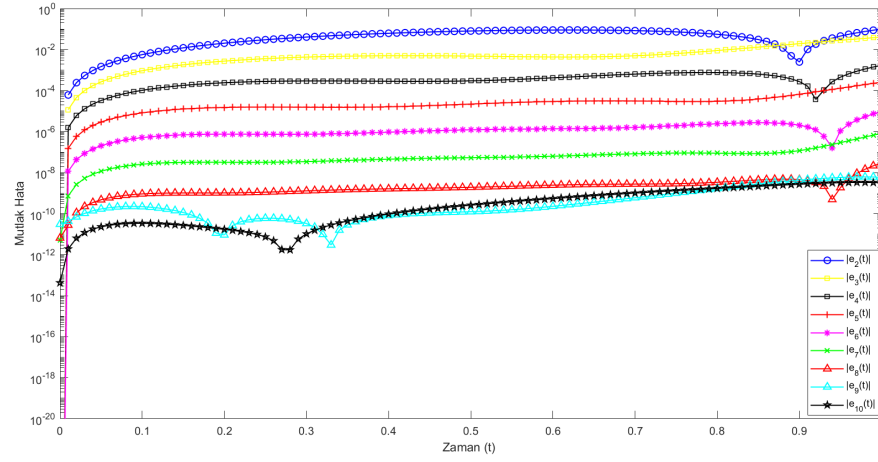
$$y_7(t) = 0.002284t^7 + 0.006975t^6 + 0.042692t^5 + 0.166248t^4 + 0.500089t^3 + 0.999992t^2 + t$$

$$y_8(t) = 0.000324t^8 + 0.001167t^7 + 0.008535t^6 + 0.041561t^5 + 0.166699t^4 + 0.499995t^3 + t^2 + t$$

$$y_9(t) = 0.000051t^9 + 0.000125t^8 + 0.001495t^7 + 0.008245t^6 + 0.041711t^5 + 0.166654t^4 + 0.500002t^3 + t^2 + t$$

$$y_{10}(t) = 0.000009t^{10} - 0.000002t^9 + 0.000246t^8 + 0.001339t^7 + 0.008365t^6 + 0.041654t^5 + 0.16667t^4 + 0.5t^3 + t^2 + t$$

Şekil (6.22)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.22: Problem 6.2.8'in $2 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.

Çizelge (6.11)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları verilmiştir.

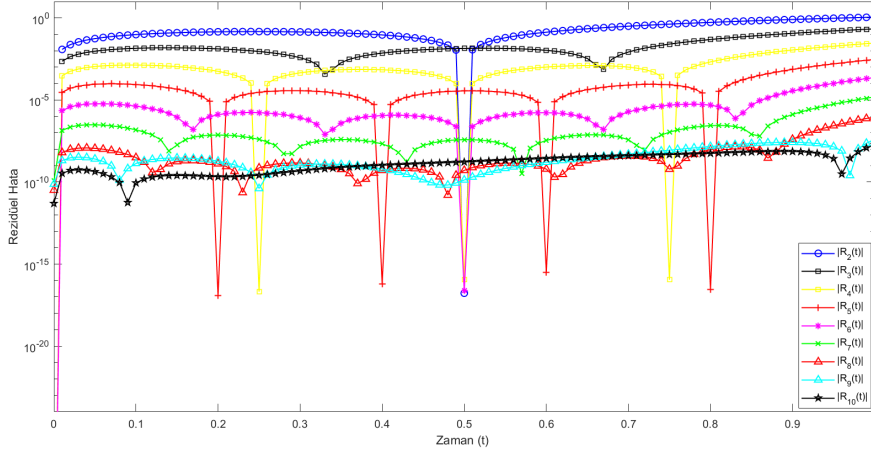
Çizelge 6.11: Problem 6.2.8'in N 'in farklı değerleri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Mutlak Hata Euler (N=4)	Mutlak Hata Euler (N=5)	Mutlak Hata Euler (N=6)	Mutlak Hata Euler (N=7)	Mutlak Hata Euler (N=8)	Mutlak Hata Euler (N=9)	Mutlak Hata Euler (N=10)
0.1	1.03e-04	8.21e-06	5.10e-07	2.58e-08	9.17e-10	2.19e-10	3.38e-11
0.2	2.41e-04	1.51e-05	7.52e-07	3.19e-08	1.03e-09	9.22e-12	1.72e-11
0.3	2.95e-04	1.55e-05	7.47e-07	3.45e-08	1.29e-09	3.30e-11	1.03e-11
0.4	2.85e-04	1.63e-05	9.35e-07	4.53e-08	1.63e-09	8.12e-11	9.51e-11
0.5	2.99e-04	2.20e-05	1.23e-06	5.34e-08	1.93e-09	1.24e-10	2.59e-10
0.6	4.19e-04	2.95e-05	1.37e-06	6.32e-08	2.46e-09	2.28e-10	5.41e-10
0.7	6.37e-04	3.12e-05	1.61e-06	8.32e-08	2.77e-09	5.96e-10	1.01e-09
0.8	7.54e-04	3.01e-05	2.42e-06	8.87e-08	3.39e-09	1.68e-09	1.70e-09
0.9	2.76e-04	6.63e-05	2.06e-06	1.18e-07	4.55e-09	4.30e-09	2.71e-09
1	1.71e-03	2.57e-04	9.56e-06	8.24e-07	3.03e-08	5.90e-09	3.20e-09
Süre	3.364 s	5.706 s	6.418 s	7.459 s	10.532 s	12.707 s	14.366 s

Şekil (6.23)'te, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.

$e_{10}(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

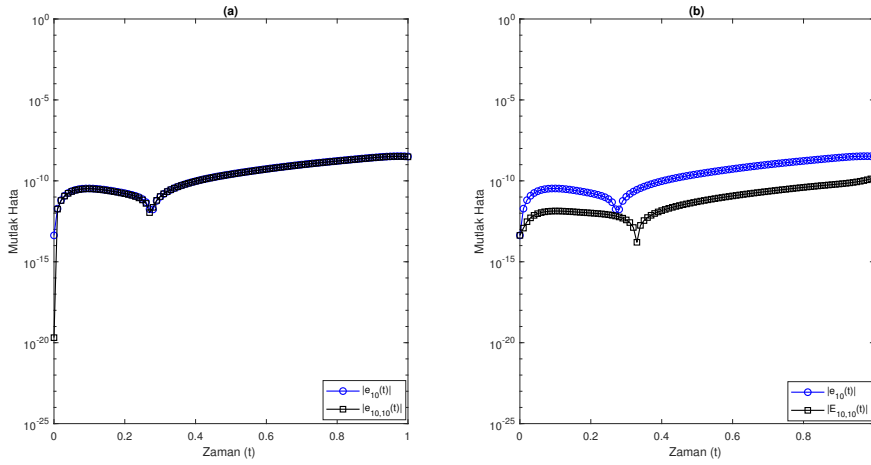
$$e'_{10}(t) + \left(\frac{1}{2}t - 2\right)e_{10}(t) = -R_{10} + 2 \int_0^t \left(e_{10}\left(\frac{s}{2}\right) + y_{10}\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 ds - 2 \int_0^t y_{10}^2\left(\frac{s}{2}\right) ds$$



Şekil 6.23: Problem 6.2.8'in $2 \leq N \leq 10$ için rezidüel hatalarının grafiği.

hata fonksiyonu ve $M = 10$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{10,10}(t) = 4.543 * 10^{-6}t^{10} + 2.062 * 10^{-5}t^9 + 2.037 * 10^{-4}t^8 + 0.00138t^7 \\ + 0.00834t^6 + 0.04167t^5 + 0.16667t^4 + 0.5t^3 + t^2 + t$$



Şekil 6.24: Problem 6.2.8'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.24)(a)'da $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{10,10}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (6.24)(b)'de ise $y_{10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{10,10}(t)$ düzeltilmiş hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların

azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

6.3 Lineer Olmayan Terim İçeren Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemi

Lineer olmayan terim içeren Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin genel hali:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m P_k(t) y^{(k)}(t) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p Q_{pq}(t) y^{(p)}(t) y^{(q)}(t) = g(t) \\ + \int_a^b \sum_{p_1=1}^3 K_{p_1}^f(t, s) [y(s)]^{p_1} ds + \int_a^t \sum_{p_2=1}^3 K_{p_2}^v(t, s) [y(s)]^{p_2} ds \end{aligned} \quad (69)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (70)$$

koşulları altında verilsin.

$P_k(t)$, $g(t)$, $K_{p_1}^f(t, s)$ ve $K_{p_2}^v(t, s)$ fonksiyonları $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli fonksiyonlar; a_{jk}, b_{jk} ve μ_j uygun sabitler; $y(t)$ de bilinmeyen çözüm fonksiyonu olarak tanımlansın. Denklem (69) ve (70)'te tanımlanan problemin çözümü için denklem (2)'de verilen Euler polinomlarının sonlu seri formunu ele alalım.

Sıralama noktaları;

$$t_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde ifade edildiğinde, matris denklemlerinin sistemi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(t_1) & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P_k(t_N) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{pq} = \text{diag} \left[\mathbf{Q}_{pq}(t_0) \quad \mathbf{Q}_{pq}(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{Q}_{pq}(t_N) \right], \\ \mathbf{R}_{pq} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) \mathbf{B}^p \mathbf{S}^T(t_0) \overline{\mathbf{B}^q \mathbf{S}} \\ \mathbf{T}(t_1) \mathbf{B}^p \mathbf{S}^T(t_1) \overline{\mathbf{B}^q \mathbf{S}} \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t_N) \mathbf{B}^p \mathbf{S}^T(t_N) \overline{\mathbf{B}^q \mathbf{S}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{S}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\int_a^b \sum_{p_1=1}^3 \mathbf{K}_{p_1}^f(t, s) [y(s)]^{p_1} ds = \int_a^b \sum_{p_1=1}^3 \mathbf{K}_{p_1}^f(t, s) [y(s)]^{p_1-1} y(s) ds$$

$$\int_a^t \sum_{p_2=1}^3 \mathbf{K}_{p_2}^v(t, s) [y(s)]^{p_2} ds = \int_a^t \sum_{p_2=1}^3 \mathbf{K}_{p_2}^v(t, s) [y(s)]^{p_2-1} y(s) ds$$

$\mathbf{K}_{p_1}^f(t, s)$, $\mathbf{K}_{p_2}^v(t, s)$ denklem (10)'da verildiği gibi ve $y^2(t)$ 'nin matris formu:

$$y^2(t) = \mathbf{E}(t) \bar{\mathbf{E}}(t) \mathbf{A} = \mathbf{T}(t) \mathbf{S} \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

olmak üzere,

$$\int_a^b \left(\mathbf{K}_1^f(t, s) y(s) + \mathbf{K}_2^f(t, s) y(s) y(s) + \mathbf{K}_3^f(t, s) y^2(s) y(s) \right) ds =$$

$$\mathbf{T}(t) \mathbf{K}_1^f \mathbf{Q}_1^f \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{T}(t) \mathbf{K}_2^f \mathbf{Q}_2^f \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{T}(t) \mathbf{K}_3^f \mathbf{Q}_3^f \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\int_a^t \left(\mathbf{K}_1^v(t, s) y(s) + \mathbf{K}_2^v(t, s) y(s) y(s) + \mathbf{K}_3^v(t, s) y^2(s) y(s) \right) ds =$$

$$\bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{K}}_1^v \bar{\mathbf{Q}}_1^v \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{K}}_2^v \bar{\mathbf{Q}}_2^v \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{K}}_3^v \bar{\mathbf{Q}}_3^v \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{K}_{p_1}^f = \mathbf{K}_{p_2}^v = [k_{mn}] = \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} \mathbf{K}_{p_i}(0, 0)}{\partial t^m \partial s^n}$$

$$\mathbf{Q}_1^f = [q_{mn}^f] = \int_a^b \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) ds, \quad \mathbf{Q}_1^v = [q_{mn}^v] = \int_a^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) ds$$

$$m, n = 0, 1, \dots, N \quad q_{mn}^f = \frac{b^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m+n+1}, \quad q_{mn}^v = \frac{t^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m+n+1}$$

$$\mathbf{Q}_2^f = \int_a^b \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds \quad \mathbf{Q}_2^v = \int_a^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds$$

$$\mathbf{Q}_3^f = \int_a^b \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \overline{\mathbf{T}}(s) \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds, \quad \mathbf{Q}_3^v = \int_a^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \overline{\mathbf{T}}(s) \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds$$

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t_1) & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{T}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{S} & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_i^v(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i^v(t_0) \\ \mathbf{Q}_i^v(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_i^v(t_N) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{K}}_i^v = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i^v & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_i^v & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{K}_i^v \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \text{diag} \left[a_0 \mathbf{A} \quad a_1 \mathbf{A} \quad \dots \quad a_N \mathbf{A} \right]_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(t_0) \\ G(t_1) \\ \vdots \\ G(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}.$$

olmak üzere matris denklemlerinin sistemi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(t_i) \mathbf{T}(t_i) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq}(t_i) \mathbf{R}_{pq}(t_i) \overline{\mathbf{A}} = \\ g(t_i) + \sum_{p_1=1}^3 \mathbf{T}(t_i) \mathbf{K}_{p_1}^f \mathbf{Q}_{p_1}^f \mathbf{S} \mathbf{A} + \sum_{p_2=1}^3 \overline{\mathbf{T}}(t_i) \overline{\mathbf{K}}_{p_2}^v \overline{\mathbf{Q}}_{p_2}^v \mathbf{S} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (71)$$

kısaca

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq} \overline{\mathbf{A}} = \\ \mathbf{G} + \sum_{p_1=1}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_{p_1}^f \mathbf{Q}_{p_1}^f \mathbf{S} \mathbf{A} + \sum_{p_2=1}^3 \overline{\mathbf{T}} \mathbf{K}_{p_2}^v \overline{\mathbf{Q}}_{p_2}^v \mathbf{S} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \sum_{p_1=1}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_{p_1}^f \mathbf{Q}_{p_1}^f \mathbf{S} - \sum_{p_2=1}^3 \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_{p_2}^v \mathbf{Q}_{p_2}^v} \mathbf{S}$$

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{V} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W} \quad ; \quad \mathbf{V} \quad : \quad \mathbf{G}] \quad (73)$$

arttırılmış matris sistemiyle ifade edilebilir. Ayrıca (70)'daki başlangıç koşulu da:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{jk} \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_j]$$

veya

$$\left[\mathbf{U} \quad ; \quad \mathbf{O} \quad : \quad \mathbf{A} \right]$$

ile ifade edilir ve (73)'de verilen denklemdeki uygun bir satıra yazarak sonuç matris denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{V}} \overline{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \left[\widetilde{\mathbf{W}} \quad ; \quad \widetilde{\mathbf{V}} \quad : \quad \widetilde{\mathbf{G}} \right]$$

Sistem çözülerek bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

$$y_N(t) = \mathbf{E}(t) \mathbf{A} = \mathbf{T}(t) \mathbf{S} \mathbf{A}$$

6.3.1 Model Problemler

Bu bölümde bazı model problemler çözülüp, elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla kıyaslanacaktır.

Problem 6.3.1. (Berenguer et al., 2013; Babolian et al., 2009)

$y(0) = 0$ koşulu altında verilen

$$y'(t) + y(t) = 2t + t^2 + \frac{1}{10}t^6 - \frac{1}{32} + \int_0^1 \frac{1}{4}sy^3(s)ds - \int_0^t \frac{1}{2}ty^2(s)ds$$

lineer olmayan terim içeren 1. mertebeden Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında Euler matris yöntemiyle çözümü:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = 1, \quad g(t) = 2t + t^2 + \frac{1}{10}t^6 - \frac{1}{32},$$

$$K_1^f(t, s) = 0, \quad K_2^f(t, s) = 0, \quad K_2^f(t, s) = \frac{1}{4}s$$

$$K_1^v(t, s) = 0, \quad K_2^v(t, s) = -\frac{1}{2}t, \quad K_2^v(t, s) = 0$$

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \sum_{p_1=1}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_{p_1}^f \mathbf{Q}_{p_1}^f \mathbf{S} \mathbf{A} + \sum_{p_2=1}^3 \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_{p_2}^v \mathbf{Q}_{p_2}^v} \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{S} - \sum_{p_1=1}^3 \mathbf{T} \mathbf{K}_{p_1}^f \mathbf{Q}_{p_1}^f \mathbf{S} - \sum_{p_2=1}^3 \overline{\mathbf{T} \mathbf{K}_{p_2}^v \mathbf{Q}_{p_2}^v} \mathbf{S}$$

ile ifade edilir.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_3^f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_3^f = \int_0^1 \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \overline{\mathbf{T}}(s) \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds, \quad \mathbf{T}(s) = [1 \quad s \quad s^2],$$

$$\overline{\mathbf{T}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s & s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & s^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2^v = \int_0^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) ds, \quad \overline{\mathbf{A}} = \text{diag} [a_0 \mathbf{A} \quad a_1 \mathbf{A} \quad \dots \quad a_N \mathbf{A}]^T$$

$$\overline{\mathbf{K}}_2^v = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_2^v & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_2^v \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{Q}}_2^v = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2^v(0) \\ \mathbf{Q}_2^v(\frac{1}{2}) \\ \mathbf{Q}_2^v(1) \end{bmatrix}$$

Denklem sistemi çözüldüğünde, denklemin tam çözümü olan $y(t) = t^2$ 'nin elde edildiği görülecektir.

Çizelge (6.12)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Schauder tabanlı Yaklaşım Yöntemi ve Üçgen Fonksiyonları kullanan Direkt Yöntemleri'yle (DMT) elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 6.12: Problem 6.3.1'in farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Tam Çözüm t	Mutlak Hata Euler (N=2)	Mutlak Hata Schauder (j=17)	Mutlak Hata DMT (m=16)	Mutlak Hata DMT (m=32)
0.1	0.01	0	2.95e-05	9.78e-04	1.66e-04
0.2	0.04	0	1.22e-05	7.02e-04	2.54e-04
0.3	0.09	0	8.97e-05	7.36e-04	2.62e-04
0.4	0.16	0	3.12e-04	1.07e-03	1.91e-04
0.5	0.25	0	1.09e-04	1.64e-04	4.1e-05
0.6	0.36	0	1.04e-03	1.12e-03	2.02e-04
0.7	0.49	0	1.98e-03	8.19e-04	2.83e-04
0.8	0.64	0	2.88e-03	8.19e-04	2.83e-04
0.9	0.81	0	1.08e-03	1.11e-03	2.02e-04
Süre		1.735 s			

Çizelge (6.12)'den görülebileceği gibi $N = 2$ için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözüm tam çözümü verdiğinden, Schauder tabanlı Yaklaşım Yöntemi ve Üçgen Fonksiyonları kullanan Direkt Yöntemleri'yle (DMT) elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç vermiştir.

Problem 6.3.2. (Babolian et al., 2009, 2008; Maleknejad and Mahmoudi, 2003)

Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren $y(0) = 1$ başlangıç koşuluyla verilen, 1. mertebeden Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y'(t) + 2ty(t) = \left(-\frac{2}{3}t + \frac{1}{9}\right)e^{3t} + (2t + 1)e^t + \left(\frac{4}{3} - e\right)t + \frac{8}{9} + \int_0^1 (t-s)y(s)ds + \int_0^t (t+s)y^3(s)ds$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = e^t$ iken, N'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 1 + 1.00237t + 0.654027t^2$$

$$y_3(t) = 1 + 1.000663t + 0.476498t^2 + 0.233293t^3$$

$$y_4(t) = 1 + 1.000004t + 0.502593t^2 + 0.154152t^3 + 0.061097t^4$$

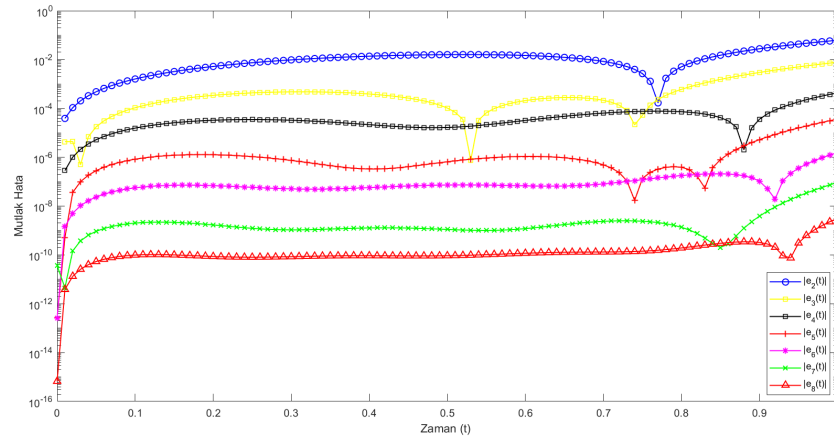
$$y_5(t) = 1 + 1.000002t + 0.499781t^2 + 0.168173t^3 + 0.037801t^4 + 0.012489t^5$$

$$y_6(t) = 1 + t + 0.500015t^2 + 0.166529t^3 + 0.042167t^4 + 0.007452t^5 + 0.002117t^6$$

$$y_7(t) = 1 + t + 0.499999t^2 + 0.166676t^3 + 0.04162t^4 + 0.008451t^5 + 0.00123t^6 + 0.000305t^7$$

$$y_8(t) = 1 + t + 0.5t^2 + 0.166666t^3 + 0.04167t^4 + 0.008321t^5 + 0.001411t^6 + 0.000174t^7 + 0.000038t^8$$

Şekil (6.25)'te, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.25: Problem 6.3.2'nin $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.

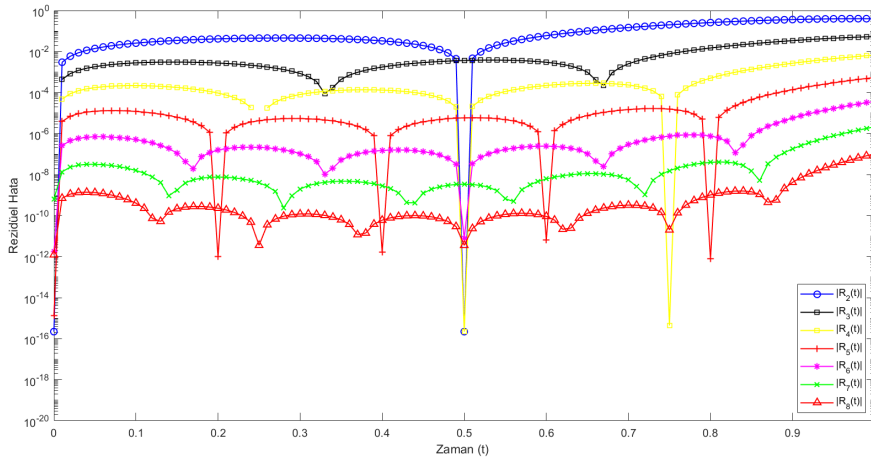
Çizelge (6.13)'te Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Üçgen Fonksiyonları kullanan Direkt Yöntem (DMT), Block-pulse Yöntemi (BPFs) ve Taylor Polinom Yöntemi'nden elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge (6.13)'ten, Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının Üçgen Fonksiyonları kullanan Direkt Yöntem (DMT), Block-pulse Yöntemi(BPFs) ve Taylor Polinom Yöntemi'nden elde edilen çözümün mutlak hatasından daha az olduğu görülebilir.

Çizelge 6.13: Problem 6.3.2'nin farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Mutlak Hata Euler (N=7)	Mutlak Hata Euler (N=8)	Mutlak Hata DMT (m=16)	Mutlak Hata DMT (m=32)	Mutlak Hata BPFs (m=32)	Mutlak Hata Taylor(N=7)
0.1	2.02e-09	9.86e-11	3.77e-04	5.21e-05	1.05e-02	-
0.2	1.69e-09	8.65e-11	1.75e-04	9.12e-05	3.97e-03	2.42e-07
0.3	1.06e-09	8.48e-11	2.29e-04	1.12e-04	4.04e-03	-
0.4	1.27e-09	9.26e-11	6.69e-04	1.08e-04	1.37e-02	3.02e-07
0.5	1.10e-09	9.27e-11	2.86e-04	7.37e-05	2.63e-02	-
0.6	1.20e-09	1.17e-10	1.75e-03	3.65e-04	1.76e-02	1.20e-06
0.7	2.37e-09	1.32e-10	2.56e-03	7.12e-04	6.99e-03	-
0.8	1.36e-09	1.93e-10	4.41e-03	1.18e-03	5.91e-03	1.07e-06
0.9	3.89e-09	3.23e-10	8.22e-03	1.90e-03	2.13e-02	-
1	9.33e-08	3.16e-09	1.32e-02	3.22e-03	3.95e-02	8.28e-07
Süre	15.493 s	27.162 s				

Şekil (6.26)'da, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.



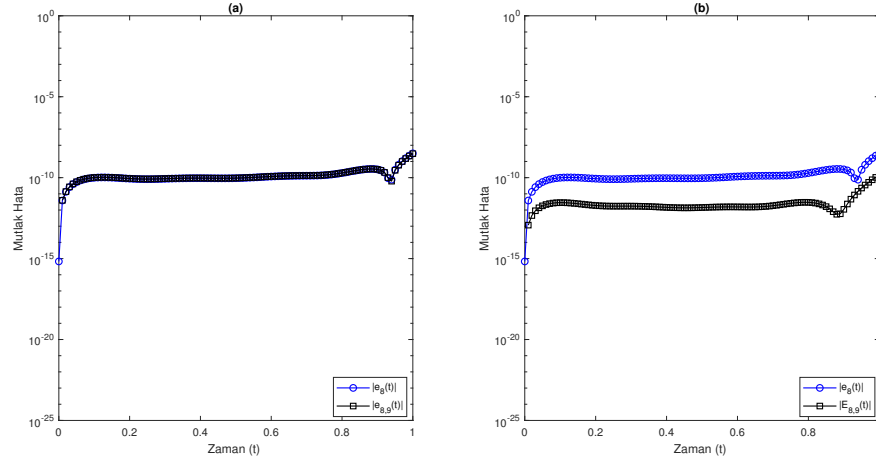
Şekil 6.26: Problem 6.3.2'nin $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.

$e_8(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$\begin{aligned}
 e'_8(t) + 2te_8(t) &= -R_8 + \int_0^1 (t-s)e_8(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t (t+s)(e_8(s) + y_8(s))^3 ds - \int_0^t (t+s)y_8^3(s) ds
 \end{aligned}$$

hata fonksiyonu ve $M = 9$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$\begin{aligned}
 y_{8,9}(t) &= 4.312 * 10^{-6}t^9 + 2.163 * 10^{-5}t^8 + 0.00020t^7 + 0.00139t^6 \\
 &\quad + 0.00833t^5 + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + t + 1
 \end{aligned}$$



Şekil 6.27: Problem 6.3.2'nin yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.27)(a)'da $y_8(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{8,9}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (6.27)(b)'de ise $y_8(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{8,9}(t)$ düzeltilmiş hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 6.3.3. (Hamoud and Ghadle, 2021),

Aşağıdaki lineer olmayan terim içeren $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ başlangıç koşullarıyla verilen, 2. mertebeden Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y''(t) + y'(t) - y(t) = e^{t-1} - e^t - 1 + \int_0^1 e^{t+s} y^2(s) ds + \int_0^t y(s) ds$$

Denklemin tam çözümü $y(t) = e^{-t}$ iken, N 'in farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_2(t) = 1 - t + 0.548963t^2$$

$$y_3(t) = 1 - t + 0.496752t^2 - 0.143166t^3$$

$$y_4(t) = 1 - t + 0.0499943t^2 - 0.163878t^3 + 0.032676t^4$$

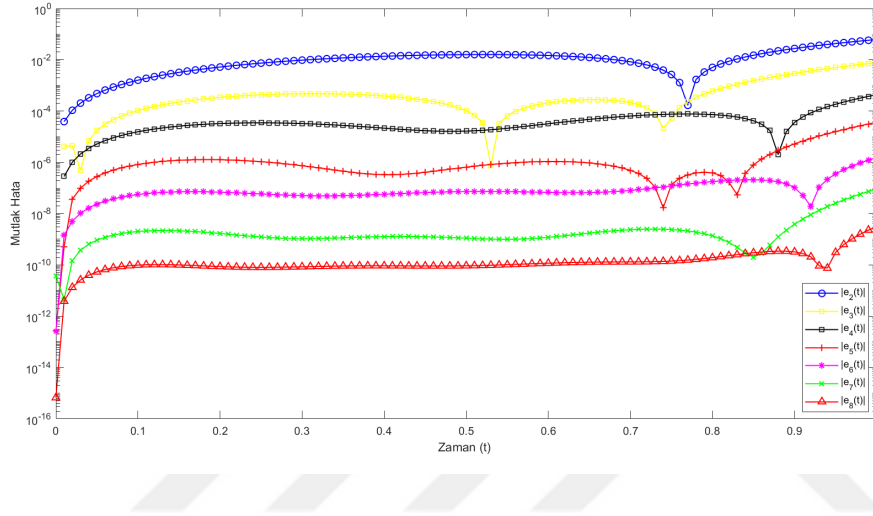
$$y_5(t) = 1 - t + 0.499961t^2 - 0.166424t^3 + 0.040484t^4 - 0.006257t^5$$

$$y_6(t) = 1 - t + 0.499996t^2 - 0.166647t^3 + 0.041542t^4 - 0.008008t^5 + 0.000995t^6$$

$$y_7(t) = 1 - t + 0.5t^2 - 0.166666t^3 + 0.041657t^4 - 0.008301t^5 + 0.001329t^6 - 0.000141t^7$$

$$y_8(t) = 1 - t + 0.5t^2 - 0.166667t^3 + 0.041666t^4 - 0.00833t^5 + 0.001382t^6 - 0.000188t^7 + 0.000017t^8$$

Şekil (6.28)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.28: Problem 6.3.3'ün $2 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.

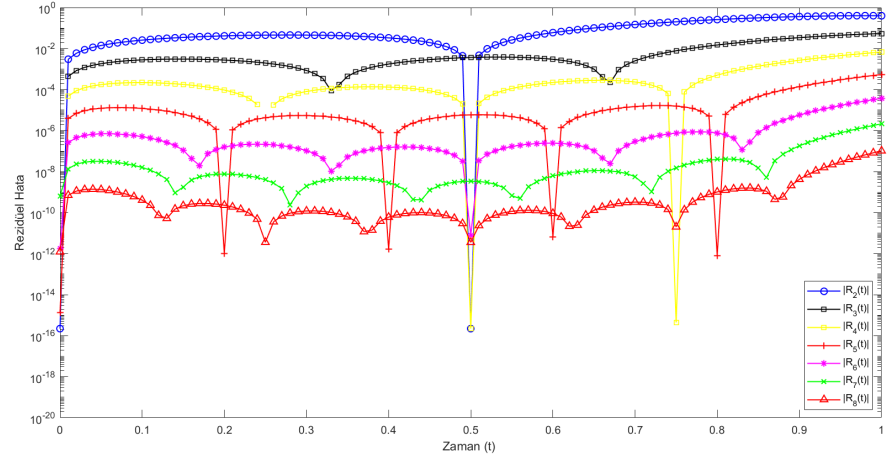
Çizelge (6.14)'te Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Adomian Ayrıştırma Yöntemi(ADM) ve Varyasyonel İterasyon Yöntemi'nden (VIM) elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge (6.14)'ten görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler, Adomian Ayrıştırma Yöntemi (ADM) ve Varyasyonel İterasyon Yöntemi'ne (VIM) göre tam çözüme daha yakın sonuçlar vermektedir.

Şekil (6.29)'da, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin rezidüel hataları karşılaştırılmıştır.

Çizelge 6.14: Problem 6.3.3'ün farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Mutlak Hata Euler (N=5)	Mutlak Hata Euler (N=6)	Mutlak Hata Euler (N=7)	Mutlak Hata Euler (N=8)	Mutlak Hata ADM	Mutlak Hata VIM
0.1	2.45e-07	2.60e-08	3.93e-09	3.84e-10	8.68e-03	4.87e-04
0.2	9.26e-07	1.07e-07	1.62e-08	1.57e-09	3.51e-02	1.70e-03
0.3	2.45e-06	2.70e-07	3.79e-08	3.62e-09	8.01e-02	3.41e-03
0.4	5.07e-06	5.17e-07	6.93e-08	6.56e-09	0.144557	5.55e-03
0.5	8.62e-06	8.41e-07	1.11e-07	1.05e-08	0.229424	8.20e-03
0.6	1.30e-05	1.27e-06	1.65e-07	1.54e-08	0.335861	1.15e-02
0.7	1.91e-05	1.86e-06	2.33e-07	2.17e-08	0.465101	1.59e-02
0.8	3.08e-05	2.57e-06	3.25e-07	3.01e-08	0.618484	2.15e-02
0.9	5.70e-05	3.01e-06	4.84e-07	4.15e-08	0.797450	2.88e-02
1	1.15e-04	1.91e-06	8.45e-07	5.49e-08	1.003553	3.82e-02
Süre	2.986 s	3.056 s	3.310 s	3.459 s		



Şekil 6.29: Problem 6.3.3'ün $2 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.

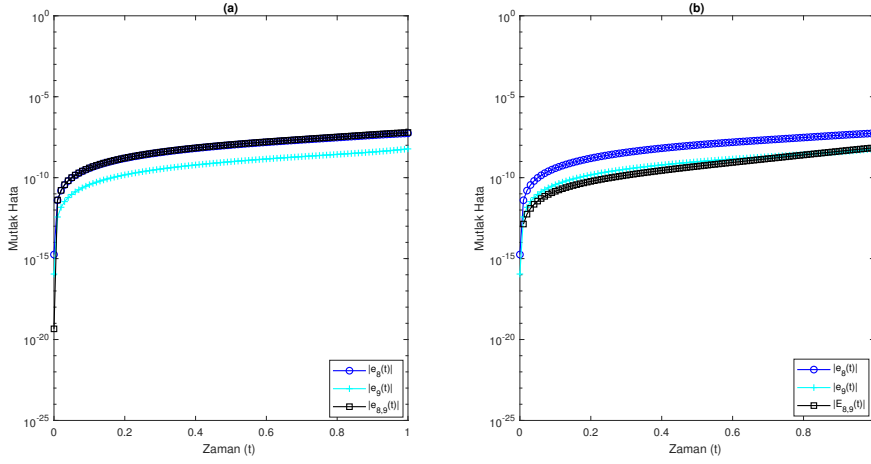
$e_8(0) = 0$ başlangıç koşulu altında

$$e_8''(t) + e_8'(t) - e_8(t) = -R_8 + \int_0^1 e^{t+s} (e_8(s) + y_8(s))^2 ds + \int_0^t e_8(s) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 9$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{8,9}(t) = -1.873 * 10^{-6} t^9 + 2.345 * 10^{-5} t^8 - 0.00020 t^7 + 0.00139 t^6 \\ - 0.00833 t^5 + 0.04167 t^4 - 0.16667 t^3 + 0.5 t^2 - t + 1$$

Şekil (6.30)(a)'da $y_8(t)$ ve $y_9(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $e_{8,9}(t)$ tahmini hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir.



Şekil 6.30: Problem 6.3.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile (a) tahmini hatalarının (b) düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.30)(b)'de ise $y_8(t)$ ve $y_9(t)$ yaklaşık çözümlerin mutlak hataları ile $E_{8,9}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hataların, gerçek hatalardan daha iyi olduğu görülebilir. Düzeltilmiş hatalarda M değeri arttıkça hataların azalacağı söylenebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

6.4 Lineer Olmayan Terim İçeren Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemleri

$i = 1, 2, \dots, n$ ve $m = \max\{m_1, m_2, m_3\}$, $a \leq t, s \leq b$ olmak üzere genel hali:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=1}^J P_{ij}^k(t) y_j^{(k)}(t) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \sum_{j=1}^J Q_{ij}^{pq}(t) y_j^{(p)}(t) y_j^{(q)}(t) = g_i(t) \\ + \int_a^b \sum_{r=0}^{m_2} \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J K_{fij}^r(t, s) y_{j_1}^{(r)}(s) y_{j_2}^{(r)}(s) ds \\ + \int_a^t \sum_{l=0}^{m_3} \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J K_{vij}^l(t, s) y_{j_1}^{(l)}(s) y_{j_2}^{(l)}(s) ds \quad (74) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{ij}^k y_j^{(k)}(a) + b_{ij}^k y_j^{(k)}(b) \right) = \mu_{ij}, \quad j = 1, \dots, J, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (75)$$

koşulları altında verilsin.

n bilinmeyen fonksiyondan oluşan ve aynı sayıda denklemden oluşan bu sistemde, $P_{ij}^k(t)$, $Q_{ij}^{pq}(t)$ ve $g_i(t)$ fonksiyonları $a \leq t \leq b$ aralığında a_{ij}^k, b_{ij}^k ve μ_{ij} uygun sabitler, $y_j(t)$ de bilinmeyen çözüm fonksiyonu olarak tanımlansın. Denklem (74) ve (75)'te tanımlanan problemin çözümü için denklem (2)'de verilen Euler polinomlarının sonlu seri formunu denklem sistemi haline dönüştürerek uygulayalım.

$$y_j(t) \cong y_{jN}(t) = \sum_{n=0}^N a_{jn} E_n(t), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (76)$$

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} E_0(t) & E_1(t) & \dots & E_N(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{1N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2N} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} a_{J0} \\ a_{J1} \\ \vdots \\ a_{JN} \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklem (76)'ün matris formu

$$y_j(t) = \mathbf{E}(t) \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

ile ifade edilebilir. $\mathbf{E}(t)$ ve türevleri yerine diğer bölümlerde olduğu gibi,

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{S}$$

$$\mathbf{E}^k(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{S}$$

yazılırsa

$$y_j(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{S} \mathbf{A}_j$$

$$y_j^{(k)}(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A}_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir. $j = 1, 2, \dots, J$ için matris formu

$$\mathbf{Y}^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} y_1^{(k)}(t) \\ y_2^{(k)}(t) \\ \vdots \\ y_J^{(k)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A}_J \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{T}}(t) \overline{\mathbf{B}^k} \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

şeklinde ifade edilebilir. Türev kısmının lineer olmayan parçasındaki $y_j^{(p)}(t)y_j^{(q)}(t)$ fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{Y}}^{(p)}(t)\mathbf{Y}^{(q)}(t) &= \begin{bmatrix} y_1^{(p)}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2^{(p)}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_J^{(p)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(q)}(t) \\ y_2^{(q)}(t) \\ \vdots \\ y_J^{(q)}(t) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}_{pq}(t)\overline{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{pq}(t) = \overline{\mathbf{T}}(t)\overline{\mathbf{B}}^p\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{T}}(t)\overline{\mathbf{B}}^q\overline{\mathbf{S}},$$

İntegral kısmın içerisindeki $\mathbf{K}_{fij_1j_2}^r(t, s)$ ve $\mathbf{K}_{vij_1j_2}^l(t, s)$ çekirdek fonksiyonları da:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{fij_1j_2}^r(t, s) &= [k_{mn}^f], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \\ k_{mn}^f &= \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} \mathbf{K}_{fij_1j_2}^r(0, 0)}{\partial t^m \partial s^n} \\ \mathbf{K}_{fij_1j_2}^r(t, s) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{fij_1j_2}^r\mathbf{T}(s)^T \end{aligned} \quad (77)$$

$$\int_a^b K_{fij_1j_2}^r(t, s) y_{j_1}^{(r)}(s) y_{j_2}^{(r)}(s) ds = \overline{\mathbf{T}}(t)\mathbf{K}_{fij_1j_2}^r\mathbf{Q}_{f_r}\mathbf{S}\mathbf{A}_j = \mathbf{F}_{ij_1j_2}^r(t)\mathbf{A}_j \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ij_1j_2}^r(t) &= \overline{\mathbf{T}}(t)\mathbf{K}_{fij_1j_2}^r\mathbf{Q}_{f_r}\mathbf{S} \\ \mathbf{Q}_{f_r} &= \int_a^b \mathbf{T}^T(s)\mathbf{T}(s)\mathbf{B}^r\mathbf{S}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}(s)\mathbf{B}^r ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{vij_1j_2}^l(t, s) &= [k_{mn}^v], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \\ k_{mn}^v &= \frac{1}{m!n!} \cdot \frac{\partial^{m+n} \mathbf{K}_{vij_1j_2}^l(0, 0)}{\partial t^m \partial s^n} \\ \mathbf{K}_{vij_1j_2}^l(t, s) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{vij_1j_2}^l\mathbf{T}(s)^T \end{aligned} \quad (79)$$

$$\int_a^t K_{vij_1j_2}^l(t, s) y_{j_1}^{(l)}(s) y_{j_2}^{(l)}(s) ds = \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{vij_1j_2}^l\mathbf{Q}_{vl}(t)\mathbf{S}\mathbf{A}_j = \mathbf{V}_{ij_1j_2}^l(t)\mathbf{A}_j \quad (80)$$

$$\mathbf{V}_{ij_1j_2}^l(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_{vij_1j_2}^l\mathbf{Q}_{vl}(t)\mathbf{S}$$

$$\mathbf{Q}_v(t) = \int_a^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \mathbf{B}^l \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{T}(s) \mathbf{B}^l ds$$

ile gösterilip, tüm elde edilen eşitlikler denklem (74)'te yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=1}^J P_{ij}^k(t) \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{S} \mathbf{A}_j + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \sum_{j=1}^J Q_{ij}^{pq}(t) \mathbf{R}_{pq}(t) \overline{\mathbf{A}}_j = g_i(t) \\ + \sum_{r=0}^{m_2} \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J \mathbf{F}_{ij_1 j_2}^r(t) \mathbf{A}_{j_1} + \sum_{l=0}^{m_3} \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J \mathbf{V}_{ij_1 j_2}^l(t) \mathbf{A}_{j_1} \end{aligned} \quad (81)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \begin{bmatrix} P_{11}^k & P_{12}^k & \cdots & P_{1J}^k \\ P_{21}^k & P_{22}^k & \cdots & P_{2J}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{J1}^k & P_{J2}^k & \cdots & P_{JJ}^k \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{T}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_J \end{bmatrix} \\ \overline{\mathbf{B}}^k &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}^k \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{S} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_J(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_r(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}^r(t) & \mathbf{F}_{12}^r(t) & \cdots & \mathbf{F}_{1J}^r(t) \\ \mathbf{F}_{21}^r(t) & \mathbf{F}_{22}^r(t) & \cdots & \mathbf{F}_{2J}^r(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{J1}^r(t) & \mathbf{F}_{J2}^r(t) & \cdots & \mathbf{F}_{JJ}^r(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_l(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^l(t) & \mathbf{V}_{12}^l(t) & \cdots & \mathbf{V}_{1J}^l(t) \\ \mathbf{V}_{21}^l(t) & \mathbf{V}_{22}^l(t) & \cdots & \mathbf{V}_{2J}^l(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{V}_{J1}^l(t) & \mathbf{V}_{J2}^l(t) & \cdots & \mathbf{V}_{JJ}^l(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(t) \overline{\mathbf{T}}(t) \overline{\mathbf{B}}^k \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq}(t) \mathbf{R}_{pq}(t) \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{G}(t) + \sum_{r=0}^{m_2} \mathbf{F}_r(t) \mathbf{A} + \sum_{l=0}^{m_3} \mathbf{V}_l(t) \mathbf{A}$$

şeklinde ifade edilebilir. Sıralama noktaları da

$$t_u = a + \frac{b-a}{N} u, \quad u = 0, 1, \dots, N$$

yerine yazıldıktan sonra oluşan matris denklem sistemleri:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(t_u) \overline{\mathbf{T}}(t_u) \overline{\mathbf{B}^k} \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} &+ \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq}(t_u) \mathbf{R}_{pq}(t_u) \overline{\mathbf{A}} \\ &= \mathbf{G}(t_u) + \sum_{r=0}^{m_2} \mathbf{F}_r(t_u) \mathbf{A} + \sum_{l=0}^{m_3} \overline{\mathbf{V}}_l(t_u) \mathbf{A} \end{aligned} \quad (82)$$

ile ifade edilirken,

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_k]_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad \overline{\mathbf{T}}_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad \overline{\mathbf{B}^k}_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad \overline{\mathbf{S}}_{J(N+1) \times J(N+1)}, \\ [\mathbf{Q}_{pq}]_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad [\mathbf{R}_{pq}]_{J(N+1) \times J(N+1)^2}, \quad \overline{\mathbf{A}}_{J(N+1)^2 \times 1}, \\ \mathbf{G}_{J(N+1) \times 1}, \quad [\mathbf{F}_r]_{J(N+1) \times J(N+1)}, \quad [\overline{\mathbf{V}}_l]_{J(N+1)^2 \times J(N+1)}, \quad \mathbf{A}_{J(N+1) \times 1}. \end{aligned}$$

olmak üzere temel matris formu:

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \overline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{B}^k} \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{G} + \sum_{r=0}^{m_2} \mathbf{F}_r \mathbf{A} + \sum_{l=0}^{m_3} \overline{\mathbf{V}}_l \mathbf{A} \quad (83)$$

ile gösterilebilir.

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \overline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{B}^k} \overline{\mathbf{S}} - \sum_{r=0}^{m_2} \mathbf{F}_r - \sum_{l=0}^{m_3} \overline{\mathbf{V}}_l$$

ve

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq}$$

olarak seçilirse kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{V} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W}; \mathbf{V} : \mathbf{G}] \quad (84)$$

ile ifade edilir. Ayrıca denklem (75)'teki başlangıç koşulları da,

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\alpha_{ik}^j \mathbf{T}(a) \mathbf{B}^k \mathbf{S} + b_{ik}^j \mathbf{T}(b) \mathbf{B}^k \mathbf{S}) \mathbf{A} = [\mu_{jk}]$$

veya

$$\left[\mathbf{U}_k : \overline{\mathbf{O}} : \mu_k \right], \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

ile ifade edilir ve denklem (84) teki herhangi bir satıra yazarak sonuç matris denklemini aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\widetilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{V}} \overline{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \left[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{V}} : \widetilde{\mathbf{G}} \right]$$

Sistem çözülerek bilinmeyen Euler katsayılar matrisi belirlenir ve Euler polinom çözümü elde edilmiş olur.

$$y_j(t) \cong y_{jN}(t) = \sum_{n=0}^N a_{jn} E_n(t), \quad a \leq t \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

6.4.1 Model Problemler

Bu bölümde bazı model problemler çözülüp, elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla kıyaslanacaktır.

Problem 6.4.1. (Parand and Delkhosh, 2018; Ebadian and Khajehnasiri, 2014; Rashidinia and Tahmasebi, 2012; Abbasbandy and Taati, 2009; Biazar et al., 2009; Arıkoğlu and Özkol, 2008)

$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 2, y_2(0) = -1, y_2'(0) = 0$ koşulları altında verilen

$$y_1''(t) + \frac{1}{2}y_2^2(t) = 1 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2} \int_0^t (y_1^2(s) + y_2^2(s)) ds$$

$$y_2''(t) + ty_1(t) = -1 + t^2 + \frac{1}{4} \int_0^t (y_1^2(s) - y_2^2(s)) ds$$

lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında $N=3$ için Euler matris yöntemiyle çözümü: sıralama noktaları $a = 0, b = 1$ için $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1\}$ şeklinde bulunur.

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \overline{\mathbf{T}} \mathbf{B}^k \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{G} + \sum_{p_2=1}^3 \overline{\mathbf{T}} \mathbf{K}_{p_2}^v \mathbf{Q}_{p_2}^v \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \overline{\mathbf{T}} \mathbf{B}^k \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A} - \sum_{p_2=1}^3 \overline{\mathbf{T}} \mathbf{K}_{p_2}^v \mathbf{Q}_{p_2}^v \overline{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{R}_{pq} \overline{\mathbf{A}}$$

ile ifade edilir.

$$\mathbf{P}_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{10}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_0(1/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0(2/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_0(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} P_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(1/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1(2/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_1(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} P_2(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2(1/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2(2/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{10} = \begin{bmatrix} Q_{10}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{10}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{10}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{10}(1) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} Q_{11}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{11}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{11}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{pq} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{T}}(t_0) \overline{\mathbf{B}^p} \widetilde{\mathbf{S}} \widetilde{\mathbf{T}}(t_0) \overline{\mathbf{B}^q} \widetilde{\mathbf{S}} \\ \widetilde{\mathbf{T}}(t_1) \overline{\mathbf{B}^p} \widetilde{\mathbf{S}} \widetilde{\mathbf{T}}(t_1) \overline{\mathbf{B}^q} \widetilde{\mathbf{S}} \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{T}}(t_N) \overline{\mathbf{B}^p} \widetilde{\mathbf{S}} \widetilde{\mathbf{T}}(t_N) \overline{\mathbf{B}^q} \widetilde{\mathbf{S}} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}(t_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_i) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t_i) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}^p} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^p & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^p \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad K_{v0}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{T}}}(t_i) = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{T}}(t_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{T}}(t_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{T}}(t_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{T}}(t_i) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\overline{\mathbf{B}^p}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{B}^p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{B}^p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{B}^p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{B}^p} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\overline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{S}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{S}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{S}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{S}} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(0) \\ \mathbf{T}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{T}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}\left(\frac{2}{3}\right) \\ \mathbf{T}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(1) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{Q}_0^v} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0^v(0) \\ \mathbf{Q}_0^v\left(\frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{Q}_0^v\left(\frac{2}{3}\right) \\ \mathbf{Q}_0^v(1) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(0) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_0^v = \int_0^t \mathbf{T}^T(s) \mathbf{T}(s) \bar{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{T}(s) ds,$$

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 a_0 \\ \mathbf{A}_1 a_1 \\ \mathbf{A}_1 a_2 \\ \mathbf{A}_1 a_3 \\ \mathbf{A}_2 b_0 \\ \mathbf{A}_2 b_1 \\ \mathbf{A}_2 b_2 \\ \mathbf{A}_2 b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{g}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{g}\left(\frac{2}{3}\right) \\ \mathbf{g}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{80}{81} \\ -\frac{8}{9} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{73}{81} \\ -\frac{5}{9} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olmak üzere, temel matris denkleminin arttırılmış matris formu ve başlangıç ve sınır koşulları yazılarak elde edilen arttırılmış matris formu elde edilip, farklı N değerleri için elde edilen yaklaşık çözümler aşağıda verilmiştir.

$$y_{1,3}(t) = 0.19715t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1,$$

$$y_{2,3}(t) = -0.197896t^3 - 0.5t^2 - 1$$

$$y_{1,4}(t) = 0.053681t^4 + 0.162545t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,4}(t) = -0.053775t^4 - 0.162459t^3 - 0.5t^2 - 1$$

$$y_{1,5}(t) = 0.01129t^5 + 0.039775t^4 + 0.167085t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,5}(t) = -0.011305t^5 - 0.039757t^4 - 0.167092t^3 - 0.5t^2 - 1$$

$$y_{1,6}(t) = 0.001945t^6 + 0.00782t^5 + 0.041875t^4 + 0.166633t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,6}(t) = -0.001947t^6 - 0.007816t^5 - 0.041877t^4 - 0.166633t^3 - 0.5t^2 - 1$$

$$y_{1,7}(t) = 0.000285t^7 + 0.001285t^6 + 0.008394t^5 + \\ 0.041649t^4 + 0.166669t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,7}(t) = -0.000285t^7 - 0.001285t^6 - 0.008394t^5 - \\ 0.041649t^4 - 0.166669t^3 - 0.5t^2 - 1$$

$$y_{1,8}(t) = 0.000036t^8 + 0.000182t^7 + 0.001402t^6 + 0.008328t^5 + \\ 0.041668t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,8}(t) = -0.000036t_1^8 - 0.000182t^7 - 0.001402t^6 - 0.008328t^5 - \\ 0.041668t^4 - 0.166667t^3 - 0.5t^2 - 1$$

$$y_{1,9}(t) = 0.000004t^9 + 0.000023t^8 + 0.000201t^7 + 0.001388t^6 + 0.008334t^5 + \\ 0.041667t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,9}(t) = -0.000004t^9 - 0.000022t^8 - 0.000201t^7 - 0.001388t^6 - 0.008334t^5 - \\ 0.041667t^4 - 0.166667t^3 - 0.5t^2 - 1$$

$$y_{1,10}(t) = 4.12 * 10^{-7}t^{10} + 0.000002t^9 + 0.000025t^8 + 0.000198t^7 + 0.001389t^6 + \\ 0.008333t^5 + 0.041667t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,10}(t) = -4.12 * 10^{-7}t^{10} - 0.000002t^9 - 0.000025t^8 - 0.000198t^7 - 0.001389t^6 - \\ 0.008333t^5 - 0.041667t^4 - 0.166667t^3 - 0.5t^2 - 1$$

Elde edilen bu yaklaşık çözümler de, sistemin tam çözümü olan

$y_1(t) = t + e^t$ ve $y_2(t) = t - e^t$ 'nin Taylor açılımına karşılık gelir.

Çizelge 6.15: Problem 6.4.1’de $y_1(t)$ ’nin farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Euler $ e_{1,10}(t) $	Block-pulse $ e_{1,32}(t) $	HPM	DTM $ e_{1,10}(t) $	Tau $ e_{1,10}(t) $	Modifiye Tau $ e_{1,10}(t) $
0.1	1.80e-13	1.00e-05	0	7.56e-11	2.22e-16	6.66e-16
0.2	5.97e-13	-	0	1.60e-10	4.44e-16	4.44e-16
0.3	1.16e-12	1.73e-03	0	4.24e-10	4.55e-14	6.66e-16
0.4	1.81e-12	-	0	3.59e-10	1.09e-12	4.44e-16
0.5	2.50e-12	7.51e-03	1.00e-09	3.00e-10	1.28e-11	1.33e-15
0.6	3.214e-12	-	5.00e-09	3.91e-10	9.57e-11	1.77e-15
0.7	3.97e-12	7.51e-03	4.30e-08	4.70e-10	5.26e-10	2.66e-15
0.8	4.80e-12	-	2.35e-07	2.49e-09	2.30e-09	3.11e-15
0.9	6.84e-12	7.40e-04	5.90e-08	8.16e-09	8.49e-09	3.55e-15
1	3.49e-11	-	4.09e-06	2.75e-08	2.73e-08	4.44e-15
Süre	17.873 s					

Çizelge (6.15) ve çizelge (6.16)’te; Euler Sıralama Yöntemi’yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Block-pulse Yöntemi, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DTM), Homotopi Perturbasyon Yöntemi (HPM), Operasyonel Tau Yöntemi ve Modifiye Operasyonel Tau Yöntemleri’yle elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması verilmiştir.

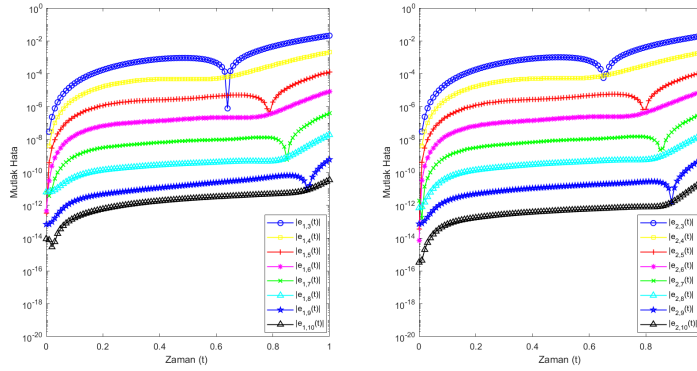
Çizelge (6.15) ve (6.16)’dan görülebileceği gibi $N = 10$ için Euler Sıralama Yöntemi’yle elde edilen yaklaşık çözümler, Diferansiyel Dönüşüm, Homotopi Perturbasyon ve Operasyonel Tau Yöntemi’yle elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç verirken, Modifiye Tau Yöntemi’yle elde edilen sonuçlar tam çözüme daha yakındır.

Şekil (6.31)’de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi’yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.

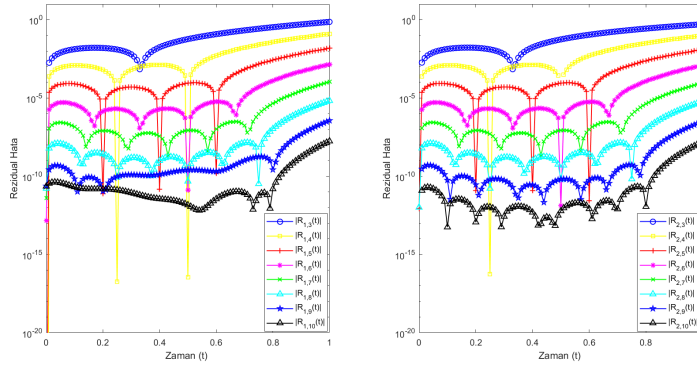
Rezidüel hata fonksiyonlarının, $\{|R_{1,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ve $\{|R_{2,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (6.32)’de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0’a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

Çizelge 6.16: Problem 6.4.1’de $y_2(t)$ ’nin farklı yaklaşım yöntemleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Euler $ e_{2,10}(t) $	Block-pulse $ e_{2,32}(t) $	HPM	DTM $ e_{2,10}(t) $	Tau $ e_{2,10}(t) $	Modifiye Tau $ e_{2,10}(t) $
0.1	7.02e-14	1.84e-03	0	7.56e-11	0	4.44e-16
0.2	1.74e-13	-	0	1.60e-10	6.66e-16	4.44e-16
0.3	2.73e-13	1.00e-05	0	4.24e-10	4.55e-14	6.66e-16
0.4	3.73e-13	-	0	3.59e-10	1.09e-12	6.66e-16
0.5	4.73e-13	1.47e-03	1.00e-09	3.00e-10	1.28e-11	8.88e-16
0.6	5.75e-13	-	1.00e-09	3.91e-10	9.57e-11	1.11e-15
0.7	6.86e-13	5.40e-04	1.00e-09	4.70e-10	5.26e-10	2.00e-15
0.8	7.70e-13	-	2.00e-09	2.49e-09	2.30e-09	3.11e-15
0.9	1.84e-12	5.10e-04	1.30e-08	8.16e-09	8.49e-09	4.22e-15
1	2.78e-11	-	6.00e-08	2.75e-08	2.73e-08	6.00e-15
Süre	17.873 s					



Şekil 6.31: Problem 6.4.1’in $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.



Şekil 6.32: Problem 6.4.1’in $3 \leq N \leq 10$ için rezidüel hatalarının grafiği.

$e_{1,10}(0) = e'_{1,10}(0) = e_{2,10}(0) = e'_{2,10}(0) = 0$ koşulları altında verilen

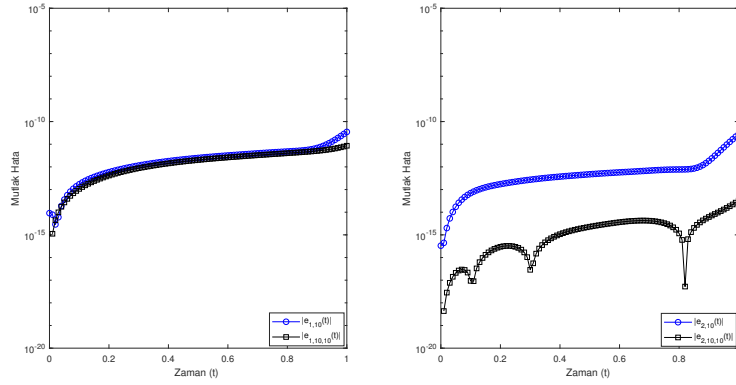
$$e''_{1,10}(t) + \frac{1}{2}e_{2,10}^2(t) = 1 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2} \int_0^t (e_{1,10}^2(s) + e_{2,10}^2(s)) ds$$

$$e''_{2,10}(t) + te_{1,10}(t) = -1 + t^2 + \frac{1}{4} \int_0^t (e_{1,10}^2(s) - e_{2,10}^2(s)) ds$$

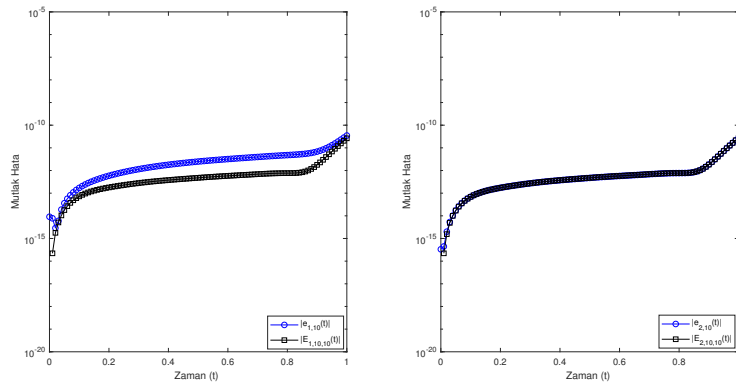
hata fonksiyonu ve $M = 10$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

$$y_{1,10,10}(t) = 4.138 * 10^{-7}t^{10} + 2.473 * 10^{-6}t^9 + 2.512 * 10^{-5}t^8 + 0.00020t^7 \\ + 0.00139t^6 + 0.00833t^5 + 0.04167t^4 + 0.16667t^3 + 0.5t^2 + 2t + 1$$

$$y_{2,10,10}(t) = -4.127 * 10^{-7}t^{10} - 2.477 * 10^{-6}t^9 - 2.511 * 10^{-5}t^8 - 0.00020t^7 \\ - 0.00139t^6 - 0.00833t^5 - 0.04167t^4 - 0.16667t^3 - 0.5t^2 - 1$$



Şekil 6.33: Problem 6.4.1'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile tahmini hataların karşılaştırılması grafiği.



Şekil 6.34: Problem 6.4.1'in yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.33)'de $y_{1,10}(t)$ ve $y_{2,10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{1,10,11}(t)$ ve $e_{2,10,11}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir. Şekil (6.34)'te ise $y_{1,10}(t)$ ve $y_{2,10}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{1,10,11}(t)$ ve $E_{2,10,11}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 6.4.2. (Rashidinia and Tahmasebi, 2012; Zarebnia and Abadi, 2010) $y_1(0) = 0, y_1(1) = 0, y_2(0) = 0, y_2(1) = 0$ sınır koşulları altında verilen

$$y_1''(t) + \frac{t}{2}y_2'(t) + y_2^2(t) = g_1(t) + \int_0^t ((t-s)y_2(s) + y_1(s)y_2(s)) ds$$

$$y_2''(t) + y_1^2(t) = g_2(t) + \int_0^t ((t-s)y_1(s) - y_2^2(s) + y_1^2(s)) ds$$

$$g_1(t) = \frac{7t^6}{6} - \frac{49t^5}{20} + \frac{4t^4}{3} + \frac{3t^3}{2} - t^2 - 2$$

$$g_2(t) = \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{19}{12}t^4 - \frac{5}{2}t^3 + t^2 + 6t - 2$$

lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında N'in farklı değerleri için Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_{1,3}(t) = 2.12 * 10^{-14}t^3 - t^2 + t$$

$$y_{2,3}(t) = t^3 - t^2 + 1.12 * 10^{-17}$$

$$y_{1,4}(t) = -4.37 * 10^{-16}t^4 + 1.55 * 10^{-16}t^3 - t^2 + t$$

$$y_{2,4}(t) = -4.32 * 10^{-15}t^4 + t^3 - t^2 - 4.32 * 10^{-15}t + 2.17 * 10^{-17}$$

$$y_{1,5}(t) = -2.75 * 10^{-14}t^5 + 4.20 * 10^{-14}t^4 - 1.66 * 10^{-14}t^3 - t^2 + t$$

$$y_{2,5}(t) = -1.20 * 10^{-14}t^5 + 1.89 * 10^{-14}t^4 + t^3 - t^2 + 5.45 * 10^{-15}t - 1.67 * 10^{-15}$$

$$y_{1,6}(t) = 4.77 * 10^{-10}t^6 - 1.05 * 10^{-9}t^5 + 7.20 * 10^{-10}t^4 + 3.51 * 10^{-11}t^3 - t^2 + t$$

$$y_{2,6}(t) = -8.18 * 10^{-10}t^6 + 1.71 * 10^{-9}t^5 - 1.21 * 10^{-9}t^4 + t^3 - t^2 - 1.48 * 10^{-10}t - 3.60 * 10^{-13}$$

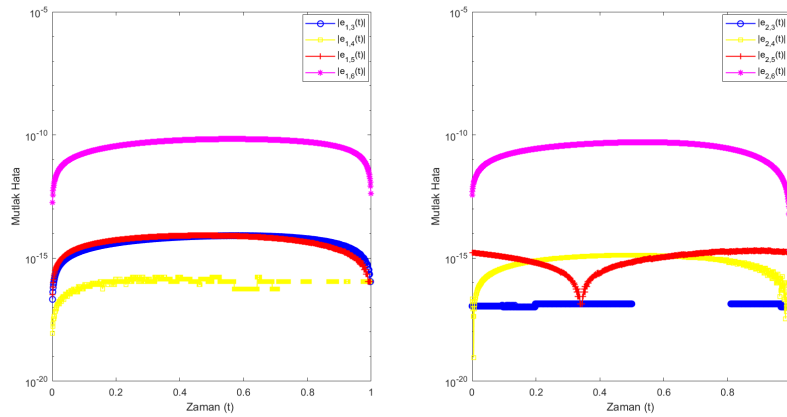
olarak elde edilir. Elde edilen bu yaklaşık çözümler de, sistemin tam çözümü olan $y_1(t) = t - t^2$ ve $y_2(t) = t^3 - t^2$ 'ye çok yakın olduğu görülebilir.

Çizelge (6.17) ve (6.18)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarıyla, Sinc Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 6.17: Problem 6.4.2'de $y_1(t)$ 'nin $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması.

t	Euler $ e_{1,3}(t) $	Euler $ e_{1,4}(t) $	Euler $ e_{1,5}(t) $	Sinc $ e_{1,15}(t) $	Sinc $ e_{1,30}(t) $
0.05	1.09e-15	0	1.60e-15	1.93e-05	8.18e-08
0.15	3.22e-15	0	4.33e-15	4.23e-06	4.15e-08
0.25	5.11e-15	0	6.36e-15	1.86e-05	3.01e-09
0.35	6.66e-15	0	7.66e-15	5.27e-06	5.67e-08
0.45	7.74e-15	0	8.27e-15	1.19e-06	3.82e-08
0.55	8.27e-15	0	8.05e-15	5.71e-07	3.16e-08
0.65	8.05e-15	0	7.11e-15	6.47e-06	6.06e-08
0.75	6.88e-15	2.22e-16	5.55e-15	1.90e-05	9.64e-09
0.85	4.88e-15	4.44e-16	3.33e-15	4.66e-06	4.55e-08
0.95	1.78e-15	5.55e-16	1.11e-15	1.95e-05	8.32e-08
Süre	4.338 s	4.870 s	6.419 s		

Çizelge (6.17) ve (6.18)'den görülebileceği gibi Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümler, Sinc Sıralama Yöntemi'yle elde edilen çözümlerden daha iyi sonuç vermiştir.



Şekil 6.35: Problem 6.4.2'nin $3 \leq N \leq 6$ için mutlak hatalarının grafiği.

Çizelge 6.18: Problem 6.4.2’de $y_2(t)$ ’nin $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması.

t	Euler $ e_{2,3}(t) $	Euler $ e_{2,4}(t) $	Euler $ e_{2,5}(t) $	Sinc $ e_{2,15}(t) $	Sinc $ e_{2,30}(t) $
0.05	1.13e-17	1.94e-16	1.40e-15	3.16e-05	1.71e-07
0.15	0	6.31e-16	8.74e-16	1.87e-05	5.20e-08
0.25	0	1.08e-15	3.82e-16	5.17e-05	1.53e-07
0.35	0	1.54e-15	0	3.57e-05	1.83e-07
0.45	0	2.10e-15	5.27e-16	4.02e-05	6.42e-07
0.55	0	2.75e-15	9.71e-16	4.11e-05	6.19e-07
0.65	0	3.55e-15	1.44e-15	4.09e-05	1.38e-07
0.75	0	4.61e-15	1.75e-15	3.47e-05	1.53e-07
0.85	0	5.87e-15	1.97e-15	1.48e-05	1.19e-08
0.95	0	7.63e-15	1.96e-15	1.28e-05	9.11e-08
Süre	4.338 s	4.870 s	6.419 s		

Şekil (6.35)’te, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi’yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır. Tam çözümü polinom olan fonksiyonlarda polinomun derecesiyle eşit alınan N değeriyle elde edilen yaklaşık çözümün tam çözüme daha yakın olduğu görülmüştür.

Problem 6.4.3. (Parand and Delkhosh, 2018; Ebadian and Khajehnasiri, 2014; Rashidinia and Tahmasebi, 2012; Abbasbandy and Taati, 2009; Biazar et al., 2009)

$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ başlangıç koşulları altında verilen

$$y_1'(t) + \frac{1}{2}y_2^2(t) = 1 + \int_0^t ((t-s)y_2(s) + y_2(s)y_1(s)) ds$$

$$y_2'(t) = 2t + \int_0^t ((t-s)y_1(s) - y_2^2(s) + y_1^2(s)) ds$$

lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında N ’in farklı değerleri için Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_{1,3}(t) = 0.177437t^3 - 0.004788t^2 + t$$

$$y_{2,3}(t) = 0.057011t^3 + 0.481066t^2 + 1$$

$$y_{1,4}(t) = 0.016113t^4 + 0.156689t^3 + 0.002062t^2 + t$$

$$y_{2,4}(t) = 0.044985t^4 + 0.002655t^3 + 0.500596t^2 + 1$$

$$y_{1,5}(t) = 0.009072t^5 - 0.000856t^4 + 0.167029t^3 - 0.000055t^2 + t$$

$$y_{2,5}(t) = 0.003445t^5 + 0.038606t^4 + 0.001176t^3 + 0.499831t^2 + 1$$

$$y_{1,6}(t) = 0.000599t^6 + 0.007643t^5 + 0.000384t^4 + 0.166562t^3 + 0.000011t^2 + t$$

$$y_{2,6}(t) = 0.00152t^6 - 0.000197t^5 + 0.041788t^4 - 0.000035t^3 + 0.500004t^2 + 1$$

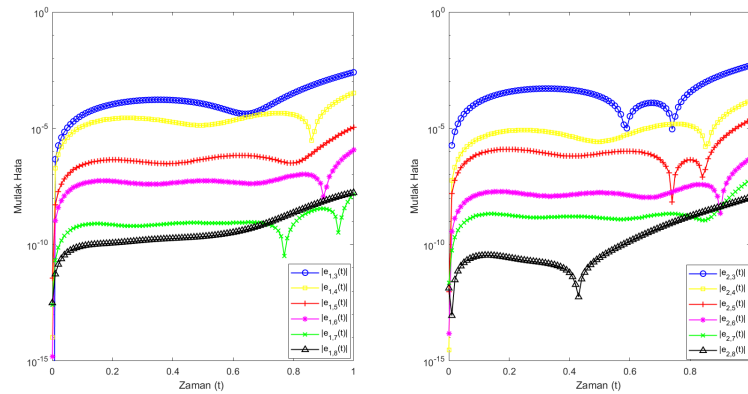
$$y_{1,7}(t) = 0.000218t^7 - 0.000036t^6 + 0.008363t^5 - 0.000012t^4 + 0.166669t^3 - 2.35 * 10^{-7}t^2 + t$$

$$y_{2,7}(t) = 0.000088t^7 + 0.001264t^6 + 0.000091t^5 + 0.041631t^4 + 0.000007t^3 - 0.5t^2 + 1$$

$$y_{1,8}(t) = 0.000011t^8 + 0.000181t^7 + 0.000015t^6 + 0.008326t^5 + 0.000002t^4 + 0.166666t^3 + t$$

$$y_{2,8}(t) = 0.000027t^8 - 0.000006t^7 + 0.001395t^6 - 0.000003t^5 + 0.041668t^4 - 1.91 * 10^{-7}t^3 + 0.5t^2 + 1$$

elde edilir. Elde edilen bu yaklaşık çözümler de, sistemin tam çözümü olan $y_1(t) = \sinh(t)$ ve $y_2(t) = \cosh(t)$ 'nin Taylor seri açılımlarına çok yakın olduğu görülebilir.



Şekil 6.36: Problem 6.4.3'ün $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.

Çizelge (6.19) ve (6.20)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 6.19: Problem 6.4.3'te $y_1(t)$ 'nin $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması

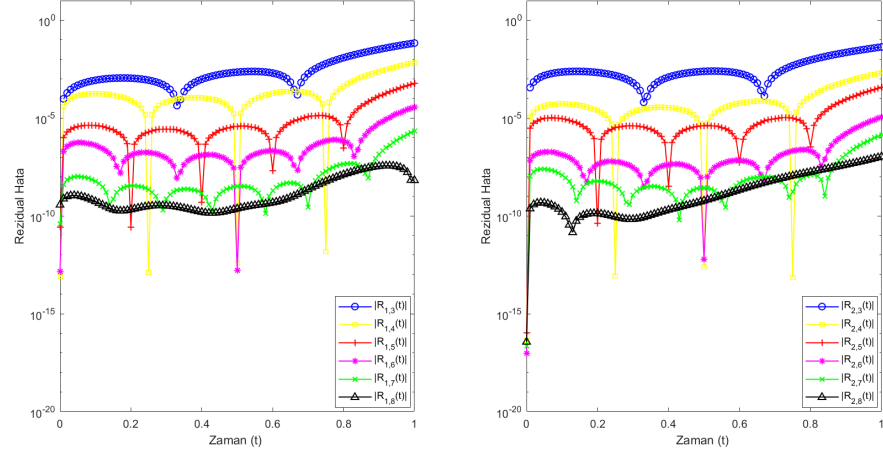
t	Euler $ e_{1,3}(t) $	Euler $ e_{1,4}(t) $	Euler $ e_{1,5}(t) $	Euler $ e_{1,6}(t) $	Euler $ e_{1,7}(t) $	Euler $ e_{1,8}(t) $
0.1	3.72e-05	1.22e-05	2.66e-07	4.25e-08	6.96e-10	8.68e-11
0.2	1.08e-04	2.58e-05	4.40e-07	5.32e-08	7.20e-10	1.16e-10
0.3	1.60e-04	2.64e-05	3.58e-07	4.04e-08	6.42e-10	1.50e-10
0.4	1.63e-04	1.82e-05	3.06e-07	4.50e-08	8.13e-10	1.83e-10
0.5	1.13e-04	1.35e-05	4.66e-07	5.53e-08	8.59e-10	2.22e-10
0.6	5.11e-05	2.19e-05	6.72e-07	4.74e-08	8.62e-10	3.33e-10
0.7	6.92e-05	3.99e-05	5.72e-07	4.61e-08	8.45e-10	7.33e-10
0.8	3.23e-04	3.86e-05	3.23e-07	9.35e-08	7.33e-10	2.33e-09
0.9	1.04e-03	4.82e-05	1.91e-06	1.13e-08	3.54e-09	7.26e-09
1	2.55e-03	3.37e-04	1.12e-05	1.17e-06	1.54e-08	1.71e-08
Süre	4.245 s	4.964 s	6.429 s	7.512 s	11.213 s	16.285 s

Çizelge 6.20: Problem 6.4.3'te $y_2(t)$ 'nin $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması.

t	Euler $ e_{2,3}(t) $	Euler $ e_{2,4}(t) $	Euler $ e_{2,5}(t) $	Euler $ e_{2,6}(t) $	Euler $ e_{2,7}(t) $	Euler $ e_{2,8}(t) $
0.1	1.36e-04	3.63e-06	7.92e-07	1.47e-08	1.87e-09	3.29e-11
0.2	3.68e-04	7.81e-06	1.26e-06	1.82e-08	1.86e-09	2.72e-11
0.3	5.03e-04	7.79e-06	9.37e-07	1.28e-08	1.47e-09	1.75e-11
0.4	4.53e-04	4.64e-06	6.40e-07	1.37e-08	1.64e-09	6.20e-12
0.5	2.33e-04	2.66e-06	8.19e-07	1.70e-08	1.43e-09	2.77e-11
0.6	3.29e-05	5.84e-06	1.03e-06	1.31e-08	1.28e-09	1.41e-10
0.7	1.08e-04	1.32e-05	4.54e-07	1.24e-08	1.98e-09	5.42e-10
0.8	3.63e-04	1.29e-05	4.41e-07	3.33e-08	1.60e-09	1.66e-09
0.9	1.86e-03	2.45e-05	2.95e-06	2.26e-09	3.99e-09	4.27e-09
1	5.00e-03	1.55e-04	2.35e-05	5.39e-07	6.43e-08	1.06e-08
Süre	4.245 s	4.964 s	6.429 s	7.512 s	11.213 s	16.285 s

Çizelge (6.19) ve (6.20)'ten de görüleceği gibi N değeri büyüdükçe tam çözüme daha çok yaklaşmıştır.

Şekil (6.36)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.37: Problem 6.4.3'ün $3 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonlarının, $\{|R_{1,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ve $\{|R_{2,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (6.37)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

$e_{1,8}(0) = e_{2,8}(0) = 0$ koşulları altında verilen

$$e'_{1,8}(t) + \frac{1}{2}e_{2,8}^2(t) = 1 + \int_0^t ((t-s)e_{2,8}(s) + e_{2,8}(s)e_{1,8}(s)) ds$$

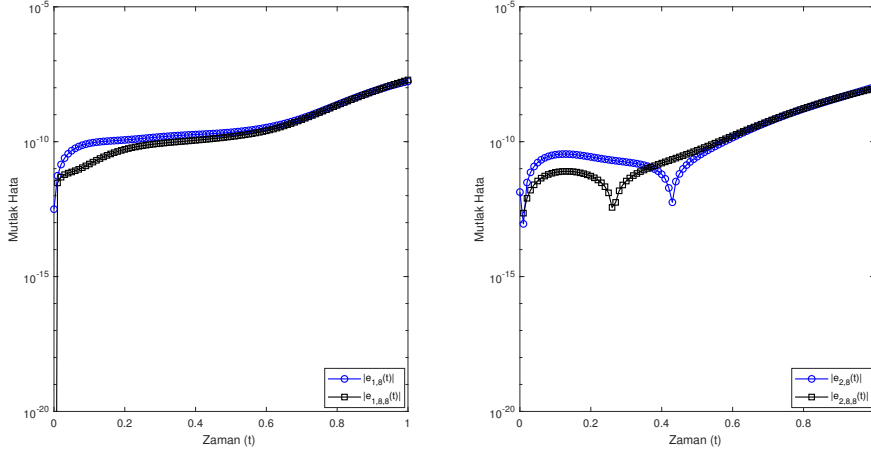
$$e'_{2,8}(t) = 2t + \int_0^t ((t-s)e_{1,8}(s) - e_{2,8}^2(s) + e_{1,8}^2(s)) ds$$

hata fonksiyonu ve $M = 8$ yardımıyla elde edilecek yaklaşık çözüm:

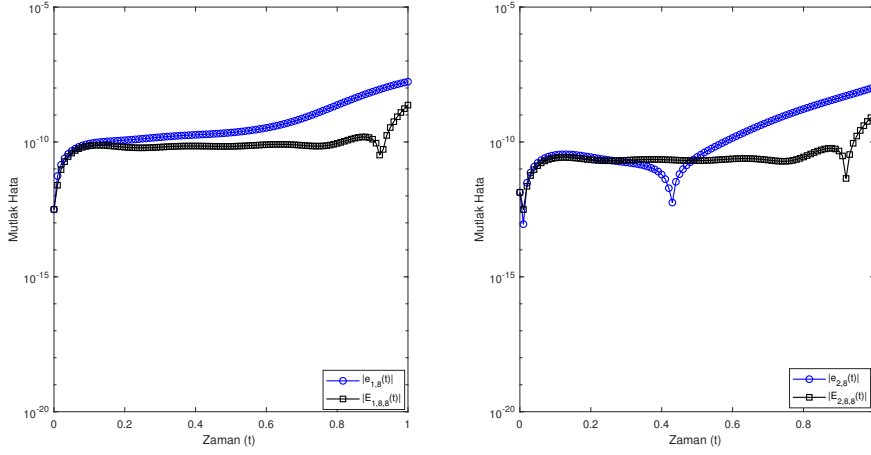
$$\begin{aligned} y_{1,8,8}(t) = & 1.125 * 10^{-5}t^8 + 0.00018t^7 + 1.686 * 10^{-5}t^6 + 0.00832t^5 \\ & + 2.675 * 10^{-6}t^4 + 0.16667t^3 + 3.223 * 10^{-8}t^2 + t - 3.149 * 10^{-13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2,8,8}(t) = & 2.734 * 10^{-5}t^8 - 5.555 * 10^{-6}t^7 + 0.00139t^6 \\ & - 3.051 * 10^{-6}t^5 + 0.04167t^4 - 1.629 * 10^{-7}t^3 + 0.5t^2 + 1 \end{aligned}$$

Şekil (6.38)'de $y_{1,8}(t)$ ve $y_{2,8}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $e_{1,8,8}(t)$ ve $e_{2,8,8}(t)$ tahmini hatasının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Tahmini hata ile yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının aynı geldiği görülebilir.



Şekil 6.38: Problem 6.4.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile tahmini hataların karşılaştırılması grafiği.



Şekil 6.39: Problem 6.4.3'ün yaklaşık çözümlerinin mutlak hatası ile düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması grafiği.

Şekil (6.39)'te ise $y_{1,g}(t)$ ve $y_{2,g}(t)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ile $E_{1,g,g}(t)$ ve $E_{2,g,g}(t)$ düzeltilmiş hatalarının karşılaştırılması grafiği verilmiştir. Düzeltilmiş hatanın, gerçek hatadan daha iyi olduğu görülebilir. Buradan da, düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi sonuç verdiği sonucuna varılabilir.

Problem 6.4.4. (Parand and Delkhosh, 2018; Eltayeb et al., 2014)

$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 2$ başlangıç koşulları altında verilen

$$y_1''(t) = \frac{7}{3}e^t - e^{2t} - \frac{1}{3}e^{4t} + \int_0^t e^{t-s} (y_1^2(s) + y_2^2(s)) ds$$

$$y_2''(t) = \frac{2}{3}e^t + 3e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} + \int_0^t e^{t-s} (y_1^2(s) - y_2^2(s)) ds$$

lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında N'in farklı değerleri için Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_{1,3}(t) = 0.199542t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{2,3}(t) = 1.893617t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

$$y_{1,4}(t) = 0.052275t^4 + 0.163033t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{2,4}(t) = 1.12356t^4 + 1.168314t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

$$y_{1,5}(t) = 0.011155t^5 + 0.040031t^4 + 0.167018t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{2,5}(t) = 0.495704t^5 + 0.512047t^4 + 1.368488t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

$$y_{1,6}(t) = 0.001922t^6 + 0.007841t^5 + 0.041856t^4 + 0.166637t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{2,6}(t) = 0.176376t^6 + 0.181249t^5 + 0.702288t^4 + 1.32749t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

$$y_{1,7}(t) = 0.000263t^7 + 0.001326t^6 + 0.008365t^5 + 0.041659t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{2,7}(t) = 0.05278t^7 + 0.053999t^6 + 0.287568t^5 + 0.660422t^4 + 1.334127t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

$$y_{1,8}(t) = 0.000011t^8 + 0.000181t^7 + 0.000015t^6 + 0.008326t^5 + 0.000002t^4 + 0.166666t^3 + t$$

$$y_{2,8}(t) = 0.000036t^8 + 0.000182t^7 + 0.001401t^6 + 0.008328t^5 + 0.041668t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{1,9}(t) = 0.000003t^9 + 0.000024t^8 + 0.000198t^7 + 0.001389t^6 + 0.008333t^5 + 0.041667t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{2,9}(t) = 0.003116t^9 + 0.003172t^8 + 0.02844t^7 + 0.087196t^6 + 0.267226t^5 + 0.666562t^4 + 1.333342t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

$$y_{1,10}(t) = 3.09 * 10^{-7}t^{10} + 0.000003t^9 + 0.000024t^8 + 0.000198t^7 + 0.001389t^6 \\ + 0.008333t^5 + 0.041667t^4 + 0.166667t^3 + 0.5t^2 + t + 1$$

$$y_{2,10}(t) = 0.000635t^{10} + 0.000653t^9 + 0.007207t^8 + 0.024812t^7 + 0.089139t^6 \\ + 0.2666t^5 + 0.666677t^4 + 1.333333t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

elde edilir. Elde edilen bu yaklaşık çözümler de, sistemin tam çözümü olan $y_1(t) = e^t$ ve $y_2(t) = e^{2t}$ 'nin Taylor seri açılımlarına çok yakın olduğu görülebilir.

Çizelge (6.21) ve (6.22)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

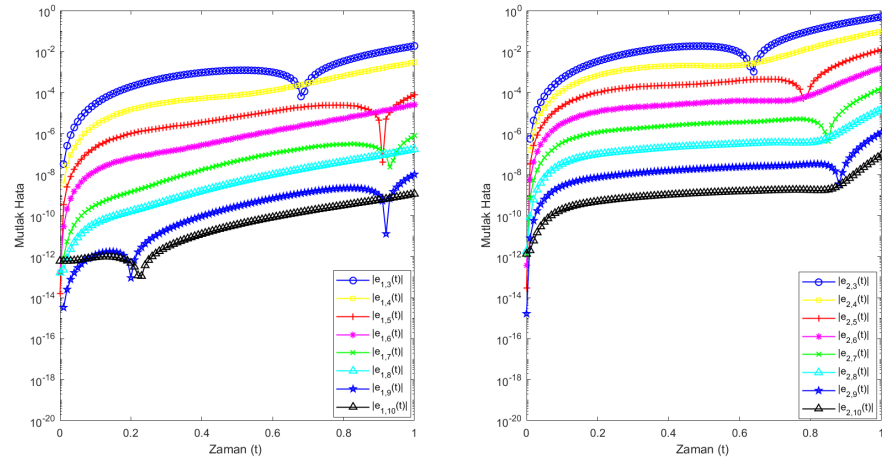
Çizelge 6.21: Problem 6.4.4'te $y_1(t)$ 'nin $5 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması.

t	Euler $ e_{1,5}(t) $	Euler $ e_{1,6}(t) $	Euler $ e_{1,7}(t) $	Euler $ e_{1,8}(t) $	Euler $ e_{1,9}(t) $	Euler $ e_{1,10}(t) $
0.1	2.14e-07	1.56e-08	3.22e-10	4.15e-11	1.24e-12	9.15e-13
0.2	1.00e-06	6.38e-08	1.44e-09	1.62e-10	9.35e-14	4.84e-13
0.3	2.03e-06	1.31e-07	5.17e-09	5.09e-10	2.01e-11	2.87e-12
0.4	3.47e-06	2.74e-07	1.71e-08	1.57e-09	9.41e-11	1.26e-11
0.5	6.51e-06	6.24e-07	4.66e-08	4.18e-09	2.86e-10	3.58e-11
0.6	1.25e-05	1.35e-06	1.07e-07	9.83e-09	6.91e-10	8.22e-11
0.7	2.08e-05	2.73e-06	2.07e-07	2.10e-08	1.40e-09	1.67e-10
0.8	2.44e-05	5.53e-06	3.02e-07	4.22e-08	2.16e-09	3.16e-10
0.9	4.50e-06	1.18e-05	1.80e-07	8.32e-08	9.79e-10	5.81e-10
1	7.74e-05	2.61e-05	7.99e-07	1.71e-07	1.04e-08	1.15e-09
Süre	7.845 s	8.439 s	9.189 s	12.686 s	17.238 s	23.524 s

Çizelge (6.21) ve (6.22)'den görülebileceği gibi N değeri büyüdükçe tam çözüme daha çok yaklaşmıştır.

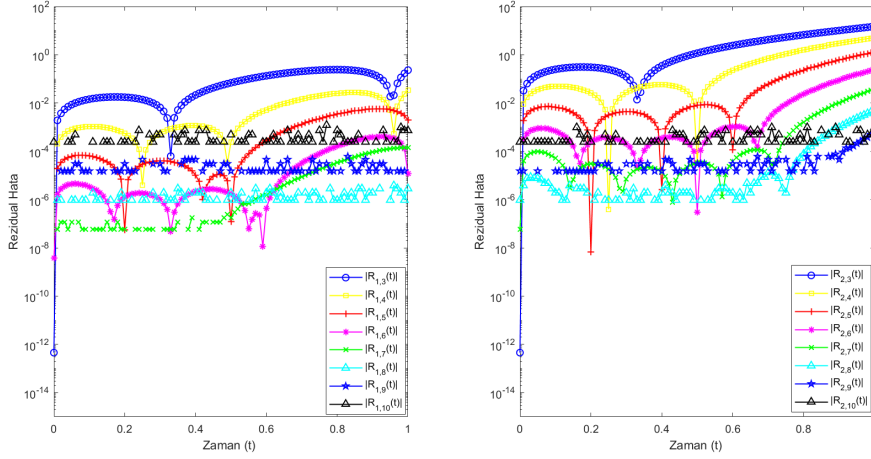
Çizelge 6.22: Problem 6.4.4'te $y_2(t)$ 'nin $5 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması.

t	Euler $ e_{2,5}(t) $	Euler $ e_{2,6}(t) $	Euler $ e_{2,7}(t) $	Euler $ e_{2,8}(t) $	Euler $ e_{2,9}(t) $	Euler $ e_{2,10}(t) $
0.1	2.19e-05	3.05e-06	3.47e-07	3.32e-08	2.76e-09	1.96e-10
0.2	1.01e-04	1.18e-05	1.15e-06	9.76e-08	7.38e-09	4.84e-10
0.3	1.83e-04	1.90e-05	1.77e-06	1.50e-07	1.14e-08	7.56e-10
0.4	2.27e-04	2.46e-05	2.42e-06	2.08e-07	1.57e-08	1.02e-09
0.5	2.73e-04	3.27e-05	3.13e-06	2.60e-07	1.97e-08	1.27e-09
0.6	3.84e-04	3.96e-05	3.59e-06	3.11e-07	2.37e-08	1.50e-09
0.7	4.47e-04	3.86e-05	4.41e-06	3.61e-07	2.668e-08	1.70e-09
0.8	2.00e-04	7.27e-05	4.53e-06	3.62e-07	3.27e-08	1.73e-09
0.9	3.36e-03	3.77e-04	1.75e-05	1.77e-06	3.47e-08	4.97e-09
1	1.28e-02	1.65e-03	1.59e-04	1.54e-05	1.17e-06	9.16e-08
Süre	7.845 s	8.439 s	9.189 s	12.686 s	17.238 s	23.524 s

Şekil 6.40: Problem 6.4.4'ün $3 \leq N \leq 10$ için mutlak hatalarının grafiği.

Şekil (6.40)'de, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.

Rezidüel hata fonksiyonlarının, $\{|R_{1,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ve $\{|R_{2,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (6.41)'de verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.



Şekil 6.41: Problem 6.4.4'ün $3 \leq N \leq 10$ için rezidüel hatalarının grafiği.

Problem 6.4.5. (Parand and Delkhosh, 2018; Rashidinia and Tahmassebi, 2012) $y_1(0) = y_1''(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0, y_2''(0) = -1$ başlangıç koşulları altında verilen

$$y_1'''(t) + y_1'(t) = e^t(e^t - 1) - \int_0^t e^{t+s} (y_1''(s) + y_2''(s)) ds$$

$$y_2'''(t) = \sin t(1 + \frac{1}{2} \sin t) + \int_0^t y_1''(s)y_2(s) ds$$

lineer olmayan terim içeren Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin $0 \leq t, s \leq 1$ aralığında N'in farklı değerleri için Euler matris yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler:

$$y_{1,3}(t) = -0.166667t^3 + t$$

$$y_{2,3}(t) = -0.5t^2 + 1$$

$$y_{1,4}(t) = 0.005161t^4 - 0.166667t^3 + t$$

$$y_{2,4}(t) = 0.04126t^4 - 0.5t^2 + 1$$

$$y_{1,5}(t) = 0.008143t^5 + 0.000085t^4 - 0.166667t^3 + t$$

$$y_{2,5}(t) = -0.00165t^5 + 0.042215t^4 - 0.5t^2 + 1$$

$$y_{1,6}(t) = -0.000342t^6 + 0.008541t^5 - 0.000047t^4 - 0.166667t^3 + t$$

$$y_{2,6}(t) = -0.001341t^6 - 0.000038t^5 + 0.041676t^4 - 0.5t^2 + 1$$

$$y_{1,7}(t) = -0.00019t^7 - 0.00001t^6 + 0.008338t^5 - 0.000047t^4 - 0.166667t^3 + t$$

$$y_{2,7}(t) = 0.000056t^7 - 0.001437t^6 + 0.00002t^5 + 0.041663t^4 - 0.5t^2 + 1$$

$$y_{1,8}(t) = 0.000008t^8 - 0.000207t^7 + 0.00005t^6 + 0.008331t^5 - 0.166667t^3 + t$$

$$y_{2,8}(t) = 0.000024t^8 + 0.000002t^7 - 0.001390t^6 + 0.041667t^4 - 0.5t^2 + 1$$

elde edilir. Elde edilen bu yaklaşık çözümler de, sistemin tam çözümü olan $y_1(t) = \sin t$ ve $y_2(t) = \cos t$ 'nin Taylor seri açılımlarına çok yakın olduğu görülebilir.

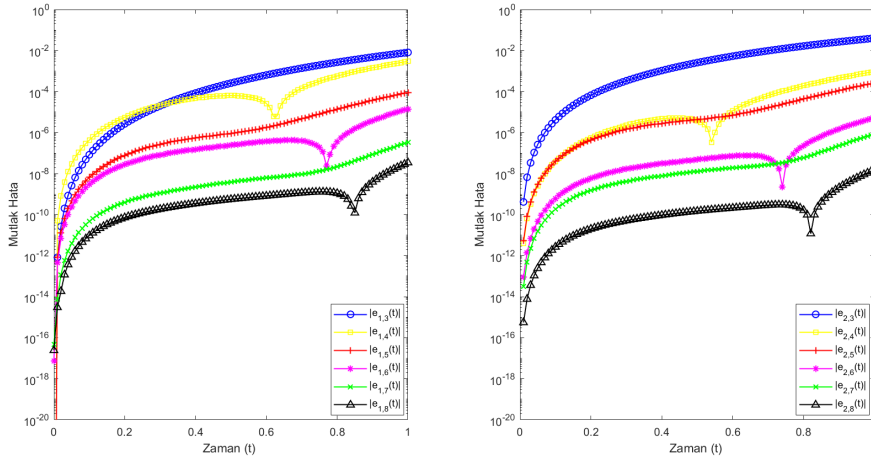
Çizelge (6.23) ve (6.24)'de Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 6.23: Problem 6.4.5'te $y_1(t)$ 'nin $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması.

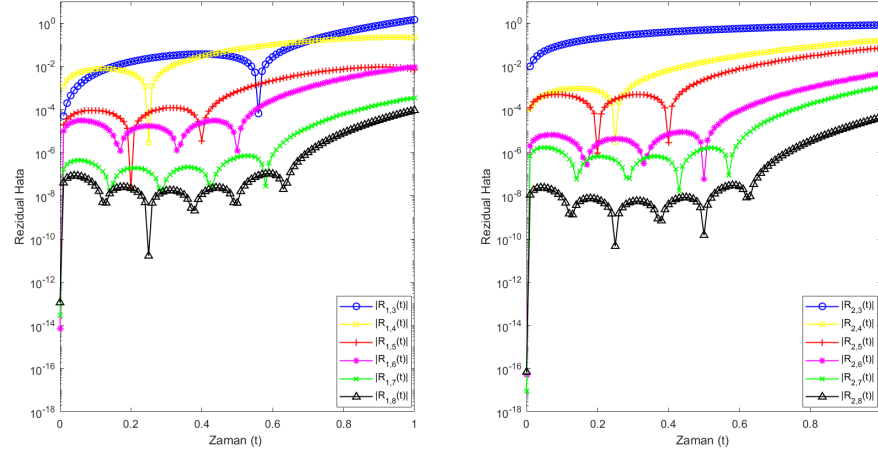
t	Euler $ e_{1,3}(t) $	Euler $ e_{1,4}(t) $	Euler $ e_{1,5}(t) $	Euler $ e_{1,6}(t) $	Euler $ e_{1,7}(t) $	Euler $ e_{1,8}(t) $
0.1	8.33e-08	4.33e-07	6.62e-09	2.94e-09	4.67e-11	9.59e-12
0.2	2.66e-06	5.59e-06	7.77e-08	2.80e-08	4.03e-10	7.22e-11
0.3	2.02e-05	2.16e-05	2.70e-07	8.17e-08	1.13e-09	1.86e-10
0.4	8.50e-05	4.71e-05	5.55e-07	1.52e-07	2.21e-09	3.49e-10
0.5	2.59e-04	6.37e-05	9.21e-07	2.46e-07	3.90e-09	5.62e-10
0.6	6.42e-04	2.64e-05	1.77e-06	3.73e-07	6.18e-09	8.18e-10
0.7	1.38e-03	1.45e-04	4.71e-06	3.93e-07	9.45e-09	1.16e-09
0.8	2.69e-03	5.76e-04	1.38e-05	3.68e-07	2.22e-08	1.11e-09
0.9	4.83e-03	1.44e-03	3.75e-05	3.83e-06	8.58e-08	3.98e-09
1	8.14e-03	2.98e-03	9.07e-05	1.42e-05	3.34e-07	3.45e-08
Süre	2.643 s	2.858 s	6.189 s	7.121 s	7.643 s	11.677 s

Çizelge 6.24: Problem 6.4.5'te $y_2(t)$ 'nin $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması.

t	Euler $ e_{2,3}(t) $	Euler $ e_{2,4}(t) $	Euler $ e_{2,5}(t) $	Euler $ e_{2,6}(t) $	Euler $ e_{2,7}(t) $	Euler $ e_{2,8}(t) $
0.1	4.17e-06	3.93e-08	3.97e-08	6.14e-10	1.83e-10	2.67e-12
0.2	6.66e-05	5.62e-07	4.38e-07	5.94e-09	1.54e-09	2.00e-11
0.3	3.36e-04	2.29e-06	1.44e-06	1.72e-08	4.17e-09	5.13e-11
0.4	1.06e-03	4.74e-06	2.81e-06	3.09e-08	7.85e-09	9.48e-11
0.5	2.58e-03	3.83e-06	4.31e-06	4.86e-08	1.29e-08	1.50e-10
0.6	5.34e-03	1.16e-05	7.14e-06	7.27e-08	1.90e-08	2.13e-10
0.7	9.84e-03	6.43e-05	1.63e-05	5.66e-08	2.70e-08	2.90e-10
0.8	1.67e-02	1.93e-04	4.39e-05	2.36e-07	6.08e-08	1.64e-10
0.9	2.66e-02	4.61e-04	1.13e-04	1.51e-06	2.31e-07	2.11e-09
1	4.03e-02	9.57e-04	2.63e-04	5.44e-06	8.76e-07	1.53e-08
Süre	2.643 s	2.858 s	6.189 s	7.121 s	7.643 s	11.677 s

Şekil 6.42: Problem 6.4.5'in $3 \leq N \leq 8$ için mutlak hatalarının grafiği.

Şekil (6.42)'da, her bir N değeri için Euler Sıralama Yöntemi'yle elde edilen yaklaşım çözümlerin mutlak hataları karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.43: Problem 6.4.5'in $3 \leq N \leq 8$ için rezidüel hatalarının grafiği.

Rezidüel hata fonksiyonlarının, $\{|R_{1,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ve $\{|R_{2,N}|\}_{N=3}^{\infty}$ ilk sekiz değerinin grafiği Şekil (6.43)'te verilmiştir. N değeri arttıkça hatanın 0'a yaklaştığı rahatlıkla görülebilir.

7 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, genellikle fen ve mühendislik alanında karşılaşılan lineer ve lineer olmayan integro-diferansiyel denklem ve sistemlerinin geniş bir yelpazesinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için polinom tabanlı bir matris sıralama yöntemi uygulanmıştır. Euler polinomlarına ve sıralama noktalarına dayanan sistemin çalışma prensibi; söz konusu integro-diferansiyel denklem veya sistemi cebirsel bir sisteme indirgeyerek, matematiksel bir program yardımıyla çözülecek hale getirip, çözümden elde edilen katsayılar yardımıyla kesilmiş Euler polinomlarının bir serisi şeklinde ifade etmeye dayanır.

Tez çalışması 7 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde diferansiyel, integral, integro-diferansiyel denklem ve çeşitlerinden bahsedilmiştir ve bunların hangi alanlarda karşımıza çıktığı ile ilgili bazı örnekler verilmiştir. Ayrıca integro-diferansiyel denklem ve sistemlerinin literatürde hangi yöntemler kullanılarak çözülebildiği hakkında kısa bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümünde ise Euler sayıları ve polinomları hakkında bilgi verilerek, üçüncü bölümde Euler polinomlarının matris özellikleri üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde yapılan çözümlerin geçerliliği için rezidüel hata fonksiyonu tanımlanarak hata analizi sunulmuştur.

Beşinci bölümde lineer integro-diferansiyel denklemleri ve sistemi alt gruplara ayrılarak, matris bağıntıları yardımıyla çözüm şemaları oluşturulmuştur. Yöntemin geçerliliği daha önceden farklı yöntemlerle çözümü yapılmış model problemler ele alınarak farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Hata analizi, mutlak hata ve rezidüel hata grafikleri ve çizelgelerle desteklenmiştir. Eğer denklemin çözümü polinom şeklindeyse önerdiğimiz yöntemin tam çözüme bizi ulaştırdığını, polinom şeklinde olmadığında da diğer yöntemlere kıyasla tam çözüme yakın sonuç verdiği gösterilmiştir. Ayrıca hesaplama süresinin de düşük olması yöntemin kullanılabilirliği açısından önemlidir.

Altıncı bölümde, beşinci bölümde uygulananlar lineer olmayan terim içeren integro-diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Euler polinomuna dayalı matris sıralama yöntemi; şu ana kadar yapılmış en genel yapıdaki lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlerin çözülmesinde kullanılarak literatüre önemli katkıda bulunulmuştur.

Beşinci ve altıncı bölümlerde ele alınan tam çözümleri polinom haricinde olan model problemler, hata fonksiyonu yardımıyla hata problemine dönüştürülerek çözülmüş ve düzeltilmiş yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık, tahmini ve düzeltilmiş yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının grafikleri de eklenerek, hatanın yakınsaması hakkında yorum yapılabilmektedir. Yaklaşık çözümler Matlab, Mathematica ve Maple gibi bilgisayar programları yardımıyla hesaplanabilir. Bu çalışmadaki model problemlerin çözümleri Matlab 2017b programında yazılan kodlar çalıştırılarak elde edildi. Bu kodlar sayesinde yaklaşık çözümler kısa sürede bulundu ve tablolarda hesaplama süresi bilgisi verildi. Ayrıca bu taablolarda bu problemlerin farklı metotlarla elde edilen çözümlerine yer verildi. Yapılan karşılaştırmalar sonucunda uygulanan yöntemin oldukça etkin olduğu gözlemlenebilir.

Sonuç olarak yapılan çalışmaları göz önüne aldığımızda şunları söyleyebiliriz:

- Lineer problemleri çözerken karşılaşılabilecek tek problem başlangıç koşulları yerine yazıldıktan sonra elde edilen arttırılmış matrisin singüler olmasıdır. Böyle bir durumla karşılaşılsa singülere neden olan satırların silinmesi ve bunların uygun denklem(ler)e karşılık gelen satırlarla değiştirilmesi gerekmektedir.
- Lineer olmayan problemleri çözerken karşılaşılabilecek problem ise N değerinin büyümesine bağlı olarak büyük boyutlu matrislerle işlem yapmak sonucunda da hesaplama süresinin uzamasıdır.

Bu olumsuzluklara rağmen, N değeri küçük olsa bile son derece hızlı çözümler elde edilebilmektedir. Sunulan yöntemin; bilim, teknoloji çalışma alanlarına çözüm ve kolaylık getirdiği görülmektedir. Gelecekte, ele alınacak daha ileri yapıdaki karmaşık problemler için yöntemin yapısındaki ufak düzenleme veya düzenlemelerle mümkün olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abazari, N.** and **Abazari, R.**, 2009, Solution of nonlinear second-order pantograph equations via differential transformation method, in *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, volume 58, pages 1052–1056, Citeseer.
- Abbasbandy, S.** and **Taati, A.**, 2009, Numerical solution of the system of nonlinear Volterra integro-differential equations with nonlinear differential part by the operational Tau method and error estimation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 231(1), 106–113.
- Abedzadeh, F.** and **Pak, R.**, 1995, Horizontal translation and rocking rotation of a rigid tubular foundation, *Geotechnique*, 45(1), 83–94.
- Adomian, G.**, 1988, A review of the decomposition method in applied mathematics, *Journal of mathematical analysis and applications*, 135(2), 501–544.
- Adomian, G.**, 2013, *Solving frontier problems of physics: the decomposition method*, volume 60, Springer Science & Business Media.
- Afrouzi, G.**, **Ganji, D.**, **Hosseinzadeh, H.**, and **Talarposhti, R.**, 2011, Fourth order Volterra integro-differential equations using modified homotopy-perturbation method, *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 3(2), 179–191.
- Agarwal, R.**, **Bhargava, R.**, and **Balaji, A.**, 1990, Finite element solution of nonsteady three-dimensional micropolar fluid flow at a stagnation-point, *International journal of engineering science*, 28(8), 851–857.
- Agbolade, O.A.** and **Anake, T.A.**, 2017, Solutions of first-order volterra type linear integrodifferential equations by collocation method, *Journal of Applied Mathematics*, 2017.
- Akyüz Daşcıoğlu, A.** and **Sezer, M.**, 2007, A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations in the most general form, *International Journal of Computer Mathematics*, 84(4), 527–539.

- Akyüz Daşcıoğlu, A.** and **Sezer, M.**, 2015, Bernoulli collocation method for high-order generalized pantograph equations, *New Trends in Mathematical Sciences*, 3(2), 96.
- Al-Faour, O.M.** and **Saeed, R.K.**, 2006, Solution of a system of linear Volterra integral and integro-differential equations by spectral method, *Journal for Al-Nahrain University Science*, 6(2), 30–46.
- Amin, R.**, **Mahariq, I.**, **Shah, K.**, **Awais, M.**, and **Elsayed, F.**, 2021, Numerical solution of the second order linear and nonlinear integro-differential equations using Haar wavelet method, *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, 28(1), 11–19.
- Arikoğlu, A.** and **Özkol, I.**, 2008, Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method, *Computers & Mathematics with Applications*, 56(9), 2411–2417.
- Asady, B.**, **Kajani, M.T.**, **Vencheh, A.H.**, and **Heydari, A.**, 2005, Direct method for solving integro differential equations using hybrid Fourier and block-pulse functions, *International Journal of Computer Mathematics*, 82(7), 889–895.
- Avudainayagam, A.** and **Vani, C.**, 2000, Wavelet–Galerkin method for integro–differential equations, *Applied Numerical Mathematics*, 32(3), 247–254.
- Babolian, E.**, **Masouri, Z.**, and **Hatamzadeh, S.**, 2008, New direct method to solve nonlinear Volterra-Fredholm integral and integro-differential equations using operational matrix with block-pulse functions, *Progress in Electromagnetics Research*, 8, 59–76.
- Babolian, E.**, **Masouri, Z.**, and **Hatamzadeh-Varmazyar, S.**, 2009, Numerical solution of nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations via direct method using triangular functions, *Computers & Mathematics with applications*, 58(2), 239–247.
- Bahşı, M.M.**, **Çevik, M.**, and **Sezer, M.**, 2015, Orthoexponential polyno-

mial solutions of delay pantograph differential equations with residual error estimation, *Applied Mathematics and Computation*, 271, 11–21.

Balcı, M.A. and Sezer, M., 2016, Hybrid Euler–Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 273, 33–41.

Balcı, M.A. and Sezer, M., 2015, A Numerical approach based on exponential polynomials for solving of Fredholm Integro-Differential-Difference equations, *New Trends in Mathematical Sciences*, 3(2), 44.

Baykuş Savaşaneril, N. and Sezer, M., 2017, Hybrid Taylor-Lucas collocation method for numerical solution of high-order Pantograph type delay differential equations with variables delays, *Appl. Math. Inf. Sci.*, 11(6), 1795–1801.

Bayın, S., 2004, *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler*, Ders Kitapları A.Ş.

Berenguer, M.I., Gámez, D., and Linares, A.L., 2013, Fixed point techniques and Schauder bases to approximate the solution of the first order nonlinear mixed Fredholm–Volterra integro-differential equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 252, 52–61.

Bhrawy, A.H., Assas, L.M., Tohidi, E., and Alghamdi, M.A., 2013, A Legendre-Gauss collocation method for neutral functional-differential equations with proportional delays, *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 1–16.

Biazar, J., Ghazvini, H., and Eslami, M., 2009, He’s homotopy perturbation method for systems of integro-differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3), 1253–1258.

Biazar, J., 2005, Solution of systems of integral–differential equations by Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 1232–1238.

- Biazar, J. and Ghanbari, B.**, 2012, The homotopy perturbation method for solving neutral functional-differential equations with proportional delays, *Journal of King Saud University-Science*, 24(1), 33–37.
- Bloom, F.**, 1979, Asymptotic Bounds for Solutions to a System of Damped Integro-differential Equations of Electromagnetic Theory., Technical report, South Carolina Univ Columbia Dept of Mathematics Computer Science and Statistics.
- Büyükaksoy, A. and Alkumru, A.**, 1995, Multiple diffraction of plane waves by a soft/hard strip, *Journal of engineering mathematics*, 29(2), 105–120.
- Çelik, İ.**, 2006, Collocation method and residual correction using Chebyshev series, *Applied Mathematics and Computation*, 174(2), 910–920.
- Chen, X. and Wang, L.**, 2010, The variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays, *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2696–2702.
- Cheon, G.S.**, 2003, A note on the Bernoulli and Euler polynomials, *Applied Mathematics Letters*, 16(3), 365–368.
- Dai, C. and Zhang, J.**, 2006, Jacobian elliptic function method for nonlinear differential-difference equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(4), 1042–1047.
- Dehghan, M. and Shakeri, F.**, 2008, The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics, *Physica Scripta*, 78(6), 065004.
- Ebadian, A. and Khajehnasiri, A.A.**, 2014, Block-pulse functions and their applications to solving systems of higher-order nonlinear Volterra integro-differential equations, *Electr. J. Differ. Equ.*, 54, 1–9.
- Elmacı, D. and Baykuş Savaşaneril, N.**, 2021a, Delay integro differential equations solutions with Euler polynomials method, *New Trends in Mathematical Sciences*, 9(3), 7–20.

- Elmacı, D.** and **Baykuş Savaşaneril, N.**, 2021b, Euler polynomials method for solving linear integro differential equations, *New Trends in Mathematical Sciences*, 9(3), 21–34.
- Elmacı, D.**, **Baykuş Savaşaneril, N.**, **Dal, F.**, and **Sezer, M.**, 2021, Euler and Taylor polynomials method for solving Volterra type integro differential equations with nonlinear terms, *Journal of Science and Arts*, 21(2), 395–406.
- Elmacı, D.**, **Baykuş Savaşaneril, N.**, **Dal, F.**, and **Sezer, M.**, 2022, On the application of Euler’s method to linear integro differential equations and comparison with existing methods, *Turkish Journal of Mathematics*, 46(1), 99–122, doi:10.3906/mat-2106-83.
- Elmacı, D.**, **Baykuş Savaşaneril, N.**, and **Sezer, M.**, 2019, Euler Polynomial Solutions of First Order Neutral Type Integro Differential Equations with Variable Delays, in *9th International European Conference on Mathematics, Engineering, Natural Medical Sciences*.
- Eltayeb, H.**, **Kılıçman, A.**, and **Mesloub, S.**, 2014, Application of Sumudu decomposition method to solve nonlinear system Volterra integrodifferential equations, in *Abstract and Applied Analysis*, volume 2014, Hindawi.
- Erdem, K.**, **Yalçınbaş, S.**, and **Sezer, M.**, 2013, A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-differential-difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 19(10), 1619–1631.
- Erdem Biçer, K.** and **Sezer, M.**, 2019, A computational method for solving differential equations with quadratic nonlinearity by using Bernoulli polynomials, *Thermal Science*, 23(Suppl. 1), 275–283.
- Evans, D.J.** and **Raslan, K.**, 2005, The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 82(1), 49–54.
- Ezechiáš, J.**, 1988, Contribution to the calculation of thick arcs with respect to shearing strain and extension of the centroid axis, *Computers & structures*, 29(4), 645–656.

- Firouzdor, R., Heidarnejad Khoob, A., and Mollaramezani, Z.**, 2012, Numerical solution of functional integral equations by using B-splines, *Journal of Linear and Topological Algebra (JLTA)*, 1(01), 45–53.
- Gökmen, E., Gürbüz, B., and Sezer, M.**, 2018, A numerical technique for solving functional integro-differential equations having variable bounds, *Computational and Applied Mathematics*, 37(5), 5609–5623.
- Greenspan, D.**, 1998, Dynamical simulation of the simplest hydrides, *Computers & Mathematics with Applications*, 35(10), 55–62.
- Gülsu, M., Öztürk, Y., and Sezer, M.**, 2012, A new Chebyshev polynomial approximation for solving delay differential equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(6), 1043–1065.
- Gülsu, M. and Sezer, M.**, 2006, Taylor collocation method for solution of systems of high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 83(4), 429–448.
- Gülsu, M. and Sezer, M.**, 2011, A taylor collocation method for solving high-order linear pantograph equations with linear functional argument, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(6), 1628–1638.
- Gümgüm, S., Baykuş Savaşaneril, N., Kürkçü, Ö.K., and Sezer, M.**, 2018, A numerical technique based on Lucas polynomials together with standard and Chebyshev-Lobatto collocation points for solving functional integro-differential equations involving variable delays, *Sakarya University Journal of Science*, 22(6), 1659–1668.
- Gürbüz, B., Sezer, M., and Güler, C.**, 2014, Laguerre collocation method for solving Fredholm integro-differential equations with functional arguments, *Journal of Applied Mathematics*, 2014.
- Hamoud, A. and Ghadle, K.**, 2021, A Comparative Study of VIM and ADM for Solving Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations, *Preprints 2021*.

- Hamoud, A.A., Dawood, L.A., Ghadle, K., and Atshan, S.,** 2019, Usage of the modified variational iteration technique for solving Fredholm integro-differential equations, *International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development*, 9(2), 895–902.
- Hardy, G.,** 1910, An Introduction to the Study of Integral Equations. M. Bôcher.(Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 10.), *The Mathematical Gazette*, 5(84), 208–209.
- Heydari, M., Loghmani, G., and Hosseini, S.,** 2013, Operational matrices of Chebyshev cardinal functions and their application for solving delay differential equations arising in electrodynamics with error estimation, *Applied Mathematical Modelling*, 37(14-15), 7789–7809.
- Holmâker, K.,** 1993, Global asymptotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24(1), 116–128.
- İlhan, O.,** 2012, *Lineer Diferansiyel, İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Morgan-Voyce Polinom Çözümleri*, Master's thesis, Muğla Üniversitesi.
- Issa, A., Qatanani, N., and Daraghmeh, A.,** 2020, Approximation Techniques for Solving Linear Systems of Volterra Integro-Differential Equations, *Journal of Applied Mathematics*, 2020.
- Işık, O.R., Güney, Z., and Sezer, M.,** 2012, Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(3), 357–374.
- Kant, T., Varaiya, J., and Arora, C.,** 1990, Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes, *Computers & structures*, 36(3), 401–420.
- Karaçayır, M.,** 2018, *Diferansiyel, Fonksiyonel Diferansiyel ve İntegro-Diferansiyel Denklemler ve Sistemleri İçin Galerkin-Tipi Bir Sayısal Yöntem*, Ph.D. thesis, Akdeniz Üniversitesi.

- Kopeikin, I.D.** and **Shishkin, V.**, 1984, Integral form of the general solution of equations of steady-state thermoelasticity, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 48(1), 117–119.
- Kumbinarasaiah, S.** and **Mundewadi, R.**, 2021, The new operational matrix of integration for the numerical solution of integro-differential equations via Hermite wavelet, *SeMA Journal*, pages 1–18.
- Kürkçü, Ö.K., Aslan, E., and Sezer, M.**, 2016, A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential–difference equations using Dickson polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 276, 324–339.
- Kürkçü, Ö.K., Aslan, E., and Sezer, M.**, 2017, A numerical method for solving some model problems arising in science and convergence analysis based on residual function, *Applied Numerical Mathematics*, 121, 134–148.
- Kürkçü, Ö.K., Aslan, E., Sezer, M., and İlhan, Ö.**, 2018, A numerical approach technique for solving generalized delay integro-differential equations with functional bounds by means of Dickson polynomials, *International Journal of Computational Methods*, 15(05), 1850039.
- Kurt, N.** and **Sezer, M.**, 2008, Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients, *Journal of the Franklin Institute*, 345(8), 839–850.
- Li, D.** and **Liu, M.**, 2005, Runge–Kutta methods for the multi-pantograph delay equation, *Applied mathematics and computation*, 163(1), 383–395.
- Lovitt, W.V.**, 2014, *Linear integral equations*, Courier Corporation.
- Lucas, É.**, 1891, *Théorie des nombres. Tome I: Le calcul des nombres entiers, le calcul des nombres rationnels, la divisibilité arithmétique*, Gauthier-Villars, Paris.
- Mahmoodi, Z., Rashidinia, J., and Babolian, E.**, 2013, B-Spline collocation method for linear and nonlinear Fredholm and Volterra integro-differential equations, *Applicable Analysis*, 92(9), 1787–1802.

- Maleknejad, K.** and **Hadizadeh, H.**, 1997, The numerical analysis of Adomian decomposition method for nonlinear Volterra integral and integro-differential Equations, *International Journal of Engineering Science*.
- Maleknejad, K., Basirat, B., and Hashemizadeh, E.**, 2012, A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3-4), 1363–1372.
- Maleknejad, K. and Mahmoudi, Y.**, 2003, Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 145(2-3), 641–653.
- Maleknejad, K. and Mahmoudi, Y.**, 2004, Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block-pulse functions, *Applied Mathematics and Computation*, 149(3), 799–806.
- Mirzaee, F.**, 2011, The RHF's for solution of nonlinear Fredholm integro-differential equations, *Applied Mathematical Sciences*, 5(69-72), 3453–3464.
- Oğuz, C. and Sezer, M.**, 2015, Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 259, 943–954.
- Parand, K. and Delkhosh, M.**, 2018, Systems of nonlinear Volterra integro-differential equations of arbitrary order, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 36(4), 33–54.
- Pesterev, A.V. and Bergman, L.A.**, 1997, Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator, *Journal of engineering mechanics*, 123(8), 878–884.
- Petrovskii, I.G.**, 1996, *Lectures on the theory of integral equations*, Courier Corporation.
- Pour-Mahmoud, J., Rahimi-Ardabili, M.Y., and Shahmorad, S.**, 2005, Numerical solution of the system of Fredholm integro-differential equations by the Tau method, *Applied Mathematics and Computation*, 168(1), 465–478.

- Raftari, B.**, 2010, Numerical solutions of the linear volterra integro-differential equations: homotopy perturbation method and finite Difference method, *World Applied Sciences Journal*, 9(07-12).
- Rashidinia, J.** and **Tahmasebi, A.**, 2012, Systems of nonlinear Volterra integro-differential equations, *Numerical Algorithms*, 59(2), 197–212.
- Rihan, F.A., Doha, E.H., Hassan, M., and Kamel, N.**, 2009, Numerical treatments for Volterra delay integro-differential equations, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 9(3), 292–318.
- Şahin, N., Yüzbaşı, Ş., and Sezer, M.**, 2011, A Bessel polynomial approach for solving general linear Fredholm integro-differential–difference equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 88(14), 3093–3111.
- Sedaghat, S., Ordokhani, Y., and Dehghan, M.**, 2012, Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12), 4815–4830.
- Sepehrian, B. and Razzaghi, M.**, 2004, Single-term Walsh series method for the Volterra integro-differential equations, *Engineering analysis with boundary elements*, 28(11), 1315–1319.
- Sezer, M.**, 1994, Taylor polynomial solutions of Volterra integral equations, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(5), 625–633.
- Shahsavaran, A. and Shahsavaran, A.**, 2012, Application of Lagrange interpolation for nonlinear integro differential equations, *Applied Mathematical Sciences*, 18, 887–892.
- Šmarda, Z., Diblík, J., and Khan, Y.**, 2013, Extension of the differential transformation method to nonlinear differential and integro-differential equations with proportional delays, *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 1–12.
- Spanier, J. and Oldham, K.B.**, 1987, *An atlas of functions*, Hemisphere publishing corporation New York.

- Tarakçı, M., Özel, M., and Sezer, M.**, 2020, Solution of nonlinear ordinary differential equations with quadratic and cubic terms by Morgan-Voyce matrix-collocation method, *Turkish Journal of Mathematics*, 44(3), 906–918.
- Tohidi, E., Bhrawy, A., and Erfani, K.**, 2013, A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation, *Applied Mathematical Modelling*, 37(6), 4283–4294.
- Tricomi, F.G.**, 1985, *Integral equations*, volume 5, Courier corporation.
- Tulga, I.**, 2006, *İntegral Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri*, Master's thesis, Süleyman Demirel Üniversitesi.
- Türkyilmazoğlu, M.**, 2014, High-order nonlinear Volterra–Fredholm–Hammerstein integro-differential equations and their effective computation, *Applied Mathematics and Computation*, 247, 410–416.
- Wang, W.S. and Li, S.F.**, 2007, On the one-leg θ -methods for solving nonlinear neutral functional differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 193(1), 285–301.
- Yalçınbaş, S. and Sezer, M.**, 2000, The approximate solution of high-order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 112(2-3), 291–308.
- Yue, Z. and Selvadurai, A.**, 1995, Contact problem for saturated poroelastic solid, *Journal of engineering mechanics*, 121(4), 502–512.
- Yusufoğlu, E.**, 2007, An efficient algorithm for solving integro-differential equations system, *Applied Mathematics and Computation*, 192(1), 51–55.
- Yüzbaşı, Ş.**, 2014, Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 232, 1183–1199.
- Yüzbaşı, Ş.**, 2015, Numerical solutions of system of linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation, *Applied Mathematics and Computation*, 250, 320–338.

- Yüzbaşı, Ş.**, 2016, A collocation method based on Bernstein polynomials to solve nonlinear Fredholm–Volterra integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 273, 142–154.
- Yüzbaşı, Ş., Gök, E., and Sezer, M.**, 2013, Müntz-Legendre polynomial solutions of linear delay Fredholm integro-differential equations and residual correction, *Mathematical and Computational Applications*, 18(3), 476–485.
- Yüzbaşı, Ş. and Sezer, M.**, 2015, Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, 39(21), 6529–6542.
- Yüzbaşı, Ş. and Sezer, M.**, 2021, On solutions of linear functional integral and integro-differential equations via Lagrange polynomials, *Journal of Science and Arts*, 21(3), 707–720.
- Yüzbaşı, Ş.**, 2009, *Lineer Diferansiyel, İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Bessel Polinom Çözümleri*, Master’s thesis, Muğla Üniversitesi.
- Zarebnia, M. and Abadi, M.A.**, 2010, Numerical solution of system of nonlinear second-order integro-differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 60(3), 591–601.
- Zimmerman, W.R.**, 1996, Time domain solutions to partial differential equations using SPICE, *IEEE Transactions on Education*, 39(4), 563–573.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde öncelikle beni kendi çalışma grubuna dahil ederek bana yol gösteren hocam Sayın Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL'e; bilgi, görüş ve tecrübelerinden yararlandığım doktora tez danışmanlarım Sayın Prof. Dr. Fadime DAL ve Sayın Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL'e; tez aşaması boyunca değerli vakitlerini ayıran tez izleme komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Seval ÇATAL ve Sayın Prof. Dr. Fatma Serap TOPAL'a; ayrıca değerli tez savunma jürisi üyeleri Sayın Doç. Dr. Şerife FAYDAOĞLU ve Sayın Doç. Dr. Erbil ÇETİN 'e teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, "BİDEB-2211 Yurt İçi Doktora Burs Program" adı altında finansal olarak TÜBİTAK tarafından desteklendiği için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Son olarak bana verdikleri büyük desteklerinden dolayı ailem ve eşime teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Deniz ELMACI

Eğitim Durumu

Lise : Ödemiş Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, 2004
Lisans : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü,
2009 (GNO: 3.03/4.00)
Yüksek Lisans : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fen ve
Matematik Alanlar Eğitimi (Tezsiz), 2010 (GNO: 84.15/100)
Yüksek Lisans : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik
Anabilim Dalı, 2017 (GNO: 4.00/4.00)
Doktora : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik
Anabilim Dalı, 2022 (GNO: 4.00/4.00)

Mesleki Deneyim

Dokuz Eylül Üniversitesi (Öğretim Görevlisi) 2018 -

Yayınları

SCI/SSCI/AHCI İndekslerinde Taranan Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Elmacı, D , Baykuş Savaşaneril, N., Dal, F., Sezer, M., (2022), On the application of Euler's method to linear integro-differential equations and comparison with existing methods, Turkish Journal of Mathematics, 46(1), 99-122, <https://doi.org/10.3906/mat-2106-83>. .

e-SCI İndeksinde Taranan Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Elmacı, D , Baykuş Savaşaneril, N., Dal, F., Sezer, M., (2021), Euler and Taylor Polynomials Method for Solving Volterra Type Integro-Differential Equations with Nonlinear Terms, Journal of Science and Arts, 2(55), 395-406, <https://doi.org/10.46939/J.Sci.Arts-21.2-a07>.

Ulusal Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1.Elmacı, D., Baş Çatak, N., (2019), Higher Dimensional Chaotic Linear Transformations of Colored Image Encryptions, Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 12 (2), 687-694, <https://doi.org/10.18185/erzifbed.477525>.

Diğer İndekslerde Taranan Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Elmacı, D., Bas Catak, N., (2018), An Efficient Image Encryption Algorithm for the Period of Arnold's CAT Map, International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering, 6(1), 80-84, <https://doi.org/10.18201/ijisae.2018637935>.

2. Elmacı, D , Baykuş Savaşaneril, N., (2021), Delay Integro-Differential Equations Solutions with Euler Polynomials Method, New Trends in Mathematical Sciences.

3. Elmacı, D , Baykuş Savaşaneril, N., (2021), Euler Polynomials Method for Solving Linear Integro-Differential Equations, New Trends in Mathematical Sciences.

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında (Proceedings) Basılan Bildiriler

1. Deniz ELMACI, Nurcan BAYKUS SAVASANERIL, Mehmet SEZER (2019), *An Euler Matrix Technique for Solving Nonlinear Duffing Differential Equation by Using Euler Polynomials*, 3rd International Student Science Congress, 386-393.

2. Deniz ELMACI, Nurcan BAYKUS SAVASANERIL, Mehmet SEZER (2019), *Euler-Taylor Matrix Technique for Solving a Class of High Order Delay Differential Equations with Nonlinear Terms*, 3rd International Student Science Congress, 394-401.

3. Deniz ELMACI, Nurcan BAYKUS SAVASANERIL, Mehmet SEZER (2019), *Euler Polynomial Approach for Solving System of Linear Delay Differential Equations with Variable Coefficients*, Uluslararası 30 Ağustos Bilimsel Araştırmalar Sempozyumu, 301-310.
4. Deniz ELMACI, Nurcan BAYKUS SAVASANERIL, Mehmet SEZER (2019), *Euler Matrix Method Based on Residual Function for Solving Abel-Type Nonlinear Differential Equations*, Uluslararası 30 Ağustos Bilimsel Araştırmalar Sempozyumu, 295-300.
5. Deniz ELMACI, Nurcan BAYKUS SAVASANERIL, Mehmet SEZER (2019), *Euler Polynomial Solutions of First Order Neutral Type Integro-Differential Equations with Variable Delays*, 9th International European Conference on Mathematics, Engineering, Natural Medical Sciences, 87-95.
6. Deniz ELMACI, Nurcan BAYKUS SAVASANERIL, Mehmet SEZER (2019), *A Computational Method for Solving a Class of Volterra Type Integro-Differential Equations with Nonlinear Terms by means of Euler And Taylor Polynomials*, 9th International European Conference on Mathematics, Engineering, Natural Medical Sciences, 1-9.

Ödüller

1. TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı Bursiyerliği, *Eylül* 2017