BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER İLERİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyda YILDIRIM

Danışman
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman
Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekim 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER İLERİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Şeyda YILDIRIM

Danışman

Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman

Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKİM 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER
İLERİ FARK DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Şeyda YILDIRIM
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
İkinci Danışman: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan ve şimdiye dek yapılan bazı çalışmalardan söz edilmiştir. Üçüncü bölüm ise orijinal sonuçlara adanmıştır. Üçüncü bölümde, $1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 1 \text{ için } \tau_i(n) \geq n$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve geri fark operatörü

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere birinci mertebeden lineer ileri fark denklemi

$$\nabla x(n) - \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(\tau_i(n)) = 0$$

ve bu denklemin $m = 1$ için özel bir hali olan

$$\nabla x(n) - p(n) x\big(\tau(n)\big) = 0$$

ileri fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için yeni salınımlılık şartları elde edilmiştir. Son olarak tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2020, v+ 33 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, İleri fark denklemi, Monoton arguman, Monoton olmayan arguman, Salınımlı çözüm, Salınımlı olmayan çözüm.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

OSCILLATION OF SOLUTIONS OF
FIRST ORDER LINEAR ADVANCED
DIFFERENCE EQUATIONS

Şeyda YILDIRIM

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Mustafa Kemal YILDIZ

Co-Supervisor: Özkan ÖCALAN

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, we mention some basic notions and studies so far. Third chapter is devoted to our original results. In the third chapter, new oscillatory conditions are obtained for first order linear advanced difference equation given by

$$\nabla x(n) - \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(\tau_i(n)) = 0$$

and the special form of above equation for $m = 1$

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

where $\{p_i(n)\}$ are sequences of positive real numbers and $\{\tau_i(n)\}$ are sequences of integers and are not necessarily monotone for $1 \leq i \leq m$ such that

$$n \geq 1 \text{ for } \tau_i(n) \geq n$$

and backward difference operator is given by

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1).$$

Finally, the discussion and conclusion part is given.

2020, v + 33 pages

Keywords: Difference equation, Advanced difference equation, Monotone argument, Nonmonoton argument, Oscillatory solution, Nonoscillatory solution.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı değerli hocam sayın Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ’a, araştırma ve yazım sürecinde yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Özkan ÖCALAN’a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmanın her aşamasında maddi, manevi desteklerini esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan anneme, babama, kardeşlerime ve dostlarıma göstermiş oldukları sabır, duydukları güven için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Şeyda YILDIRIM

Afyonkarahisar 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^{+}$	Pozitif Reel sayılar
$\mathbb{R}^{-}$	Negatif Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{R}_{+}$	$[0, \infty)$
τ	Monoton olmayan argüman
h	Monoton argüman
Π	Çarpım sembolü
Σ	Toplam sembolü
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü
E	Öteleme (kaydırma) operatörü
C	Sürekli fonksiyonların kümesi

1 GİRİŞ

Gelişen teknoloji ile birlikte uygulamalı bilimlerde özellikle mühendislik, matematik fizik, kimya, biyoloji, ekonomi gibi bilim dallarında yaşanan gelişmeler beraberinde matematiksel problemleri de getirmektedir. Bu alanlarda ele alınan problemlerde bağımsız değişkenin sürekli olmadığı durumlar söz konusu olabilir. Bu gibi durumlarda ise karşımıza fark denklemleri çıkmaktadır. Çünkü fark denklemleri; bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bağıntılardır. Diferensiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlerine fonksiyonel denklemler de denir (Elaydi 2000).

Diğer taraftan fark denklemleri zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin doğal bir ifadesidir. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların birçoğu ayrık (kesikli) olduğu için bu tür denklemlere önemli matematiksel modellemelerde yer verilir. Daha da önemli olan nokta ise fark denklemleri diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma yöntemlerinin incelenmesinde karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bu tür denklemlere karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık bir benzeri olarak ele alınır. Ayrıca fark denklemleri, diferensiyel denklemlere göre daha geniş kapsamlı bir yapıya sahiptir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin ayrık bir benzeri olan bir fark denklemi ”ghost” çözümlere ya da kaotik yörüngelere sahip olabilmesine rağmen bu durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için geçerlidir. Böylece, fark denklemleri teorisinin diferensiyel denklemler teorisine göre daha zengin olduğu ve yakın gelecekte önemininin artacağını söyleyebiliriz.

Bağımsız değişkenin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkenin değişimi, $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$,... türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in ayrık (discrete) değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Burada devreye içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri girer. Diferensiyel denklemlerde fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Fakat 20. yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilmeyeceğini göstermiştir. Böylece fark denklemleri kullanılarak diferensiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide arz ve talep denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamada yaygın olarak kullanılmaktadır (Tollu 2009).

Ayrıca fark denklemleri uygulamalı bilim dallarının birçoğunda da uygulama alanı bulmaktadır. Bu alanlardan bazıları ise kontrol teoride kararlılık durumlarının incelenmesi, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesi, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesi, biyolojide canlı populasyon sayısının araştırılması olduğunu söyleyebiliriz.

Fark denklemleri tam olarak bilinmemekle birlikte M.Ö. 2000'li yıllara Babiller'in kök bulma çabalarına dayanır. Ayrıca M.S. 400-1200 yılları arası matematik adına sönük bir dönemdir. Avrupa'da bu dönemde etkileyici bir çalışma olmamıştır. Ancak Ortadoğu'da yapılan çalışmalarda öne çıkan isim Ömer Hayyam olmuştur. Kesin olarak bilinmemekle birlikte 1000-1100 yılları civarında, Chia Hsien ve Ömer Hayyam en eski fark denklemi örneklerinden olan,

$$b_{n+1,r} = b_{n,r} + b_{n,r-1}$$

eşitliği üzerine çalışmışlardır (Lakshmikhantham ve Trigiante 2002).

1202 yılında Fibonacci dizisinin temeli olan "tavşan problemini" Fibonacci olarak da bilinen Leonardo di Pisa isimli ünlü İtalyan matematikçi ortaya atmıştır. Aslında bu bazı kaynaklarda fark denklemlerinin başlangıcı olarak düşünülür.

1600-1700 yılları arasında fark denklemleri ve yinelemeli sayma üzerine çalışmalar yapan matematikçiler; Francesco Maurolica, Fermat, Pascal, Sir Thomas Harriet, Henry Briggs, Leibniz, Newton ve Euler'dir. Bu kişiler arasında en önemli çalışmayı Newton, günümüzde "Newton Metodu" olarak bilinen kök bulma formülünü (nümerik analizde yer alan)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklindeki fark denklemi ile ifade etmiştir (Kulenovic vd. 2000).

18. yy'da temel lineer fark denklemleri teorisini geliştiren matematikçiler Moivre, Euler,

Lagrange, Laplace, Simson, Cotes olmuştur. Yine bu dönemde Riccati'nin de çalışmaları olmuştur. "Riccati fark denklemi" olarak bilinen denklem aşağıda belirtilmiştir.

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

1850 li yıllardan sonra herhangi bir canlı türünün gelecekteki durumuyla ilgili tahminler yapılırken, bu türün çoğalmasını etkileyebilecek tüm iç, dış ve çevresel faktörler göz önüne alınması gerektiğinden fark denklemlerinden yararlanılmaya başlanmıştır.

19. yy'da ise lineer fark denklemleri Bessel fonksiyonunun hesaplanmasında Miller'in algoritması aracılığıyla kullanılmıştır. 1950'den bu zamana kadar yapılan araştırmalardaki bilgiler 1950'li yıllardan sonraki matematikçilerin lineer olmayan sabit katsayılı fark denklemleri ile ilgili çalışmaları için bir zemin oluşturmuştur. Bu çalışmalardan bazıları 1995-2000 yılları arasında Ladas tarafından yapılmıştır (Karagöz 2019).

Fark denklemlerinin çözümü, pek çok matematikçinin yakın ilgisini çekmiş ve özellikle son 40 yıl içerisinde yapılan çalışmalar sonucunda da bu konuda zengin bir literatür ortaya çıkmıştır. Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle salınımlı olması ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır.

1990 yılında Ladas,

$$x_{n+1} - x_n + px_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.1}$$

$p \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}^+$ lineer otonom gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart vermiştir. 1989 yılında Erbe ve Zhang

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.2}$$

p_n negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ lineer otonom gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. 1989 yılında, Ladas, Philos ve Sficas yukarıdaki otonom olmayan fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart elde etmişlerdir. Ayrıca diferensiyel denklemler ile fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı arasında ilginç benzerlikler söz konusudur. Ancak bu durum her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin,

$$x'(t) + p(t)x(t - k) = 0 \tag{1.3}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (1.2) fark denklemi (1.3) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. $k = 0$ için (1.3) diferensiyel denklemi

$$x(t) = x(t_0) \exp \left(- \int p(s) ds \right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm hiç bir zaman salınımlı değildir. Ancak (1.2) fark denklemi ise $k = 0$ için

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 - p_j) \right] x_{n_0}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla bu çözüm her $j \geq n_0$ için $1 - p_j < 0$ olduğunda salınımlı bir çözüme sahiptir.

Fark denklemleri ile diferensiyel denklemler arasında büyük benzerlikler bulunmaktadır. Fark denklemleri sayesinde diferensiyel denklemlerdeki süreksizlik durumları ortadan kaldırılabilmektedir. Hatta birçok diferensiyel denklem, fark denklemleri kullanılarak kolaylıkla çözülebilmektedir. Bu nedenle yukarıda verilen bilgiler ışığında bu yüksek lisans tez çalışmasında birinci mertebeden lineer ileri fark denklemleri çalışılmış ve bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için yeni şartlar elde edilmiş ve örneklere yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak diferensiyel denklemler ve fark denklemleri ile ilgili genel bir literatür bilgisine yer verilmiştir.
Ayrıca $1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 1 \text{ için } \tau_i(n) \geq n$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve geri fark operatörü

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere birinci mertebeden lineer ileri fark denklemi

$$\nabla x(n) - \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(\tau_i(n)) = 0$$

ve bu denklemin $m = 1$ için özel bir hali olan

$$\nabla x(n) - p(n) x(\tau(n)) = 0$$

ileri fark denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için yeni yeter şartlar elde edilmiştir. Son olarak ise tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezimizde ihtiyaç duyulacak literatürde yer alan bilgilere yer verilecektir. İlk olarak fark analizi tanıtılacak ardından diferensiyel denklemler ve fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1 Fark Analizi

Tanım 2.1.1 E öteleme (kaydırma) operatörü, x sürekli bir değişken ve ayrık noktalar kümesi üzerinde sırasıyla

$$Ey(x) = y(x+h), \; Ex_n = x_{n+1} \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. İkinci mertebeden E operatörü

$$E^2y(x) = E[Ey(x)] = E[y(x+h)] = y(x+2h)$$

şeklinde bulunur. Benzer işlem adımları devam ettirildiğinde

$$E^k y(x) = y(x+kh), \; E^k x_n = x_{n+k}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, E^k operatörü k. dereceden bir öteleme operatörünü tanımlar.

Tanım 2.1.2 y reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere ileri fark operatörü Δ,

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x), \; \Delta x_n = x_{n+1} - x_n \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada h herhangi bir sabit x ise bağımsız değişkendir.

Özel olarak $y(x) = x$ olarak alnırsa $\Delta x = (x+h) - x = h$ ya da $h = \Delta x$ bulunur. Bu nedenle h fonksiyon aralığı olarakta adlandırılır.

Tanım 2.1.3 Geri fark operatörü ∇

$$\nabla y(x) = y(x) - y(x-h), \; \nabla x_n = x_n - x_{n-1} \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\nabla y(x) = \Delta E^{-1}[y(x)] = (1 - E^{-1})y(x)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

∇ ve E nin temel özellikleri, ∇y ve Ey değerlerini hesaplamak için önemlidir. c_1 ve c_2 keyfi sabitler, y_1 ve y_2 farklı iki fonksiyon olmak üzere;

(a) $E\left[y_1(k)+y_2(k)\right]=Ey_1(k)+Ey_2(k)$,

(b) $E\left[cy_1(k)\right]=cEy_1(k)$,

(c) $E^r[E^s y_1(k)]=E^{r+s}y_1(k)$,

(d) $E^0 y_1(k)=y_1(k)$,

(e) $\nabla\left[y_1(k)+y_2(k)\right]=\nabla y_1(k)+\nabla y_2(k)$,

(f) $\nabla\left[cy_1(k)\right]=c\nabla y_1(k)$,

(g) $\nabla\left[c_1y_1(k)+c_2y_2(k)\right]=c_1\nabla y_1(k)+c_2\nabla y_2(k)$,

(h) $y_1, y_2, ..., y_n$; n-tane fonksiyon ve $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitler olsunlar. O halde

$$\nabla\left[c_1y_1(k)+c_2y_2(k)+...+c_ny_n(k)\right]=c_1\nabla y_1(k)+c_2\nabla y_2(k)+...+c_n\nabla y_n(k)$$

yazılır.

(ı) k bir tamsayı olmak üzere $y(k), y$ fonksiyonunun k daki değerini göstermek üzere, a, b $(b \geq a)$ şeklinde herhangi iki tamsayı ise

$$y(a)+y(a+1)+...+y(b)=\sum_{k=a}^{b}y(k)$$

şeklinde ifade edilir.

Toplam operatörü ile ilgili bazı kurallar ise aşağıdaki şekildedir.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{m}=mc$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{m}cy(k)=c\sum\limits_{k=1}^{m}y(k)$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{m}[y(k)\pm z(k)]=\sum\limits_{k=1}^{m}y(k)\pm\sum\limits_{k=1}^{m}z(k)$,

(d) $(A+B)^n=\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1.2...k}A^kB^{n-k}$ veya $(A+B)^n=\sum\limits_{k=0}^{m}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)A^kB^{n-k}$.

Tanım 2.1.4 $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere, x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n,\ x_{n+1}, ..., x_{n+k} \tag{2.1.4}$$

ifadelerini içeren bir bağıntıya k. mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.5 Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x_{n+3} - x_{n+1} + 4x_n = 0$ denklemi üçünü mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.6 Eğer (2.1.4) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.1.5}$$

formunda verilirse k. mertebeden olan (2.1.4) fark denklemine lineerdir denir. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise bu durumda (2.1.5) fark denklemine homojen olmayan lineer fark denklemi denir.

Eğer (2.1.5) fark denklemi

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0 \tag{2.1.6}$$

şeklinde verilirse (2.1.6) fark denklemine homojen lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

2.2 İleri Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı

Bu bölümde ileri diferensiyel denklemler ve ileri diferensiyel denklemlerin ayrık benzeri olan ileri fark denklemleri ile ilgili bilinen bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

İlk olarak $1 \leq i \leq m$ için $\tau_i(t) \geq t$ ve $p_i \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}\right]$ olmak üzere, birinci mertebeden bir lineer ileri diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$x'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t) x(\tau_i(t)) = 0 \tag{2.2.1}$$

$m = 1$ için (2.2.1) denklemi

$$x'(t) - p(t)x(\tau(t)) = 0 \tag{2.2.2}$$

denklemine dönüşür.

T pozitif bir reel sayı ve p, $[t_0, \infty)$ üzerinde tanımlı negatif olmayan reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\tau(t) = t + T$ alınırsa (2.2.2) denklemi

$$x'(t) - p(t)x(t+T) = 0, \ t \geq t_0 \tag{2.2.3}$$

sabit gecikmeli bir diferensiyel denkleme dönüşür.

Tanım 2.2.1 $1 \leq i \leq m$ için $\tau_i \in \mathbb{R}^+$, $\tau_i(t) = t - \tau_i$ ve $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m\}$ olmak üzere $t \geq t_1$ için x, $[t_1, \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve x, (2.2.1) denklemini sağlıyorsa $x \in C\left[[t_1 - \tau, \infty), \mathbb{R}\right]$ fonksiyonu (2.2.1) denkleminin bir çözümüdür ve bu çözüm $[t_1, \infty)$ üzerinde bir çözüm olarak adlandırılır.

t_1 bir başlangıç noktası olmak üzere, $\phi \in C\left[[t_1 - \tau, t_1), \mathbb{R}\right]$ başlangıç fonksiyonu verilmiş olsun. Böylece (2.2.1) denklemi $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$ için

$$x(t) = \phi(t) \tag{2.2.4}$$

olacak şekilde $[t_1, \infty)$ aralığında birtek x çözümüne sahiptir (Györi ve Ladas 1991).

Tanım 2.2.2 Bir diferensiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü x olsun. Eğer x çözümü keyfi sayıda sıfıra sahipse, yani; $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $x(t_n) = 0$ ise x çözümüne salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Salınımlı olmayan bir çözüm, ergeç pozitif ya da ergeç negatiftir. Yani, $\forall t > t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak biçimde bir t_1 vardır. Eğer denklemin her çözümü salınımlı ise denklemin tüm çözümleri salınımlıdır, salınımlı olmayan en az bir çözümü varsa denklemin çözümleri salınımlı değildir denir (Ladde vd. 1987).

Aşağıda verilen teorem Ladas ve Stavroulakis (1982) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.2.1

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+T} p(s)ds > \frac{1}{e} \tag{2.2.5}$$

ise (2.2.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladas ve Stavroulakis 1982).

$p(t) \equiv p \in (0, \infty)$ olduğunda ise aşağıdaki koşul elde edilmiştir.

Teorem 2.2.2

(i) $x'(t) - px(t+\tau) \geq 0$, $t \geq t_0$ eşitsizliğinin ergeç hiç bir pozitif çözüme sahip olmaması,

(ii) $x'(t) - px(t+\tau) \leq 0$, $t \geq t_0$ eşitsizliğinin ergeç hiç bir negatif çözüme sahip olmaması,

(iii) $x'(t) - px(t+\tau) = 0,\ t \geq t_0$ denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$pT > \frac{1}{e} \tag{2.2.6}$$

olmasıdır (Ladas ve Stavroulakis 1982).

Ayrıca Kulenavic ve Grammatikopoulos (1988), Koplatadze ve Chanturija (1982) ve Kusano (1982) da (2.2.3) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Aşağıda verilen sonuçlar ise Li ve Zhu (2002) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.2.3

$$p_k(t) \geq \frac{1}{e^k},\ q_k(t) \geq \frac{1}{e^k},\ t \geq t_1 + kT$$

ve

$$\int_{t_1+kT}^{\infty} p(t) \left[\exp\left(e^{k-1}p_k(t) - \frac{1}{e}\right) - 1\right] dt = \infty$$

olacak şekilde $t_1 > t_0 + T$ ve k pozitif tamsayısı mevcut ise (2.2.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada

$$p_1(t) = \int_t^{t+T} p(s)ds,$$

$$p_n(t) = \int_t^{t+T} p(s)p_{n-1}(s)ds,\ n \geq 2,\ t \geq t_0$$

ve

$$q_1(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)ds,\ t \geq t_0 + T,$$

$$q_n(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)q_{n-1}(s)ds,\ n \geq 2,\ t \geq t_0 + nT$$

şeklindedir (Li ve Zhu 2002).

Teorem 2.2.4

$$\liminf_{t\to\infty} p_k(t) > \frac{1}{e^k} \text{ ve } \liminf_{t\to\infty} q_k(t) > \frac{1}{e^k} \tag{2.2.7}$$

olacak şekilde pozitif bir k tamsayısı varsa (2.2.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $p_k(t)$ ve $q_k(t)$ ifadeleri Teorem 2.2.3 teki gibi tanımlanmıştır (Li ve Zhu 2002).

Örnek 2.2.1

$$x'(t) - \frac{1}{2e}(1+\sin t)x(t+\pi) = 0,\ t \geq 0 \tag{2.2.8}$$

ileri diferensiyel denklemi verilmiş olsun. Burada $p(t) = \frac{1}{2e}(1+\sin t)$, $T = \pi$ şeklindedir. Böylece

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+T} p(s)ds = \liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+\pi} \frac{1}{2e}(1+\sin s)ds = \frac{1}{2e}(\pi - 2) < \frac{1}{e}$$

olduğundan

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+T} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

olma koşulu sağlanmaz. Ancak

$p_1(t) = \int_t^{t+T} p(s)ds = \frac{1}{2e}(\pi + 2\cos t)$

$p_2(t) = \int_t^{t+T} p(s)p_1(s)ds = \frac{\pi^2+2\pi\cos t - 4\sin t}{4e^2}$

$p_3(t) = \int_t^{t+T} p(s)p_2(s)ds = \frac{1}{8e^3}\left(\pi^3 - 2\pi + (2\pi^2 - 8)\cos t - 4\pi \sin t\right)$

$p_4(t) = \int_t^{t+T} p(s)p_3(s)ds = \frac{1}{16e^4}\left[\pi^4 - 4\pi^2 - 2\pi + 2(\pi^3 - 6\pi)\cos t - 4(\pi^2 - 4)\sin t\right]$

olur ki;

$$\liminf_{t\to\infty} p_4(t) > \frac{22}{4e^4}$$

dır. Aynı zamanda

$q_1(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)ds = \frac{1}{2e}(\pi - 2\cos t)$

$q_2(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)q_1(s)ds = \frac{1}{4e^2}(\pi^2 - 2\pi\cos t - 4\sin t)$

$q_3(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)q_2(s)ds = \frac{1}{8e^3}\left(\pi^3 - 2\pi + (2\pi^2 - 8)\cos t - 4\pi \sin t\right)$

$$q_4(t) = \int\limits_{t-T}^{t} p(s) q_3(s) ds = \tfrac{1}{16e^4} \left[\pi^4 - 4\pi^2 - 2\pi + 2(\pi^3 - 6\pi)\cos t - 4(\pi^2 - 4)\sin t \right]$$

olacağından

$$\liminf_{t \to \infty} q_4(t) > \frac{22}{4e^4}$$

olur. Böylece, Teorem 2.2.4 gereğince (2.2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Li ve Zhu 2002).

Teorem 2.2.5 $p(t) \geq 0$, $t \geq t_0$, azalmayan $\tau(t)$ fonksiyonu için $\tau(t) \geq t$ ve $\lim\limits_{t \to \infty} \tau(t) = \infty$ olmak üzere

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t}^{\tau(t)} p(s) ds > \frac{1}{e} \tag{2.2.9}$$

ise (2.2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Ancak

$$\int_{t}^{\tau(t)} p(s) ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (2.2.2) denklemi salınımsız bir çözüme sahiptir (Fukagai ve Kusano 1984).

Örnek 2.2.2 $a > 0$ ve α bir sabit olmak üzere

$$x'(t) - a t^{\alpha} x(e^t) = 0 \tag{2.2.10}$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Eğer $p(t) = a t^{\alpha}$ ve $\tau(t) = e^t$ alınırsa, ileri diferensiyel denklem için

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t}^{\tau(t)} p(s) ds = \begin{cases} \infty, & \alpha \geq -1 \\ 0, & \alpha < -1 \end{cases}$$

sonucu elde edilir. Böylece verilen (2.2.10) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \geq -1$ olmasıdır (Fukagai ve Kusano 1984).

Örnek 2.2.3 $a > 0$ bir sabit olmak üzere

$$x'(t) - a t x\left(t + \frac{1}{t}\right) = 0 \tag{2.2.11}$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Eğer, $p(t) = at$ ve $\tau(t) = t + \frac{1}{t}$ alınırsa, ileri diferensiyel denklem için

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t}^{\tau(t)} p(s) ds = a$$

sonucu elde edilir. Böylece $a > \frac{1}{e}$ ise verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı, $a \leq \frac{1}{e}$ ise verilen denklemin salınımlı olmayan çözümü vardır (Fukagai ve Kusano 1984).

Teorem 2.2.6 $1 \leq i \leq m$ olmak üzere azalmayan $\tau_i(t)$ fonksiyonları için,

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \int_{t}^{\tau_{\min}(t)} p_i(s)ds > \frac{1}{e} \tag{2.2.12}$$

ise (2.2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada, $\tau_{\min}(t) = \min\limits_{1\leq i\leq m} \{\tau_i(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Ladde vd. 1987).

Şimdi birinci mertebeden lineer ileri fark denklemleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmaları inceleyelim.

$1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 1 \text{ için } \tau_i(n) \geq n \tag{2.2.13}$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve geri fark operatörü

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \tag{2.2.14}$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere

$$\nabla x(n) - \sum_{i=1}^{m} p_i(n)x\left(\tau_i(n)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \tag{2.2.15}$$

şeklinde ifade edilen birinci mertebeden lineer ileri fark denklemini göz önüne alalım.
$m = 1$ için (2.2.15) denklemi

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \tag{2.2.16}$$

denklemine dönüşür.

Tanım 2.2.3 Eğer pozitif bir N tamsayısı ve $n \geq N$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde x_n çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir.
Başka bir şekilde ifade edecek olursak, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra ergeç pozitif ya da ergeç negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal vd. 2000, Györi ve Ladas 1991, Elaydi 2000).

Li ve Zhu (2002) tarafından aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 2.2.7 $\tau(n) = n + k$ olduğunda

$$\begin{aligned} q_1(n) &= \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i), \quad n \geq k, \\ q_{j+1}(n) &= \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i)q_j(n), \quad j \geq 1, \quad n \geq (j+1)k \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\sum_{n=n_1+lk}^{\infty} p(n) \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^l q_l^{1/k+1}(n) - 1 \right] = \infty \tag{2.2.17}$$

olacak şekilde $n_1 \geq 0$ tamsayısı ve l pozitif tamsayısı mevcut ise (2.2.16) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Li ve Zhu 2002).

Diğer taraftan Györi ve Ladas (1991), $\tau(n) = n + \sigma$ olmak üzere aşağıda verilen ileri terimli birinci mertebeden lineer fark denklemini çalışmışlardır.

$$\Delta x(n) - p(n)x(n + \sigma) = 0, \quad n \geq 0, \tag{2.2.18}$$

burada Δ ileri fark operatörü olmak üzere $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ eşitliği ile tanımlıdır.

Teorem 2.2.8 $\sigma \geq 2$ pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{n+\sigma-1} p(i) > 1 \tag{2.2.19}$$

ya da

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{n+\sigma-1} p(i) > \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right)^{\sigma}, \tag{2.2.20}$$

ise (2.2.18) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Györi ve Ladas 1991).

Öcalan ve Akın (2007) ise aşağıda verilen birinci mertebeden lineer fark denklemini çalışmışlardır.

$i = 1, 2, ..., m$ için $p_i(n) \leq 0$ ve $k_i \leq -1$ olmak üzere

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n)x\left(n - k_i\right) = 0, \quad n \geq 0 \tag{2.2.21}$$

denklemi için bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

Ayrıca $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i(n) = p_i$ olduğunda

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i x\left(n - k_i\right) = 0, \;\; n = 0, 1, 2, ... \tag{2.2.22}$$

ve bu denklemin bir özel hali olan

$$\Delta x(n) + px(n - k) = 0, \;\; n = 0, 1, 2, ... \tag{2.2.23}$$

denklemi elde edilir.

Györi ve Ladas (1991), (2.2.22) ve (2.2.23) denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 2.2.9 $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere (2.2.23) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.

(i) $k = -1$ ve $p \leq -1$;

(ii) $k = 0$ ve $p \geq 1$;

(iii) $k \in \{..., -3, -2\} \cup \{1, 2, ...\}$ ve $p\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$

(Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.2.10 $i = 1, 2, ..., m$ için

$$p_i \in (0, \infty) \text{ ve } k_i \{0, 1, 2, ...\}$$

ya da

$$p_i \in (-\infty, 0) \text{ ve } k_i \{..., -3, -2, -1\}$$

şartlarından biri sağlanmak üzere

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i + 1}}{k_i^{k_i}} > 1 \tag{2.2.24}$$

ise (2.2.22) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Györi ve Ladas 1991).

Chatzarakis ve Stavroulakis (2012) aşağıdaki sonucu vermişlerdir.

Teorem 2.2.11 $\{\tau(n)\}$ azalmayan olmak üzere

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\tau(n)} p(j) > 1, \tag{2.2.25}$$

ise (2.2.16) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlıdır (Chatzarakis ve Stavroulakis 2012).

Chatzarakis ve Stavroulakis 2012 yılında yapmış oldukları bu çalışmada $\tau(n) \geq n + 1, \ n \geq 1$ olduğunu kabul etmişlerdir. Ancak $\tau(n) \geq n, \ n \geq 1$ alındığında bu sonuçlar gerçeklenmemektedir.

Ayrıca Chatzarakis ve Stavroulakis (2012) aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.12 $\{\tau(n)\}$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\sigma(n)} p(j) > 1, \tag{2.2.26}$$

ise (2.2.16) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlıdır. Burada $\sigma(n)$ fonksiyonu

$$\sigma(n) = \max_{1\leq s\leq n} \{\tau(s)\}, \ s \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Chatzarakis ve Stavroulakis 2012).

Ancak biz elde edilen bu sonucun uygulanabilir olduğunu düşünmüyoruz. Bu durumu göz önünde bulundurarak çalışmalar yaptığımızda bu sonucun Chatzarakis ve Stavroulakis (2012)'in makalesinde yer alan Teorem 2.1 gibi ispat edilemeyeceğini gördük.

Şimdi bu durumu görmek için Teorem 2.1 de yapılan ispat ele alırsak $\sigma(n) \geq \tau(n)$ ve $\{x(n)\}$, $\{\sigma(n)\}$ azalmayan olduğundan (2.2.16) denkleminden

$$\nabla x(n) - p(n)x(\sigma(n)) \leq 0, \ n \geq 1$$

elde edilir. Bu denkleme n den $\sigma(n)$ ye kadar toplam uygulanırsa

$$x(\sigma(n)) - x(n-1) - \sum_{j=n}^{\sigma(n)} p(j)x(\sigma(j)) \leq 0$$

elde edilir ve ispata bu adımdan sonra devam edilemez. Böylece Chatzarakis ve Stavroulakis (2012)'in makalesinde yer alan Teorem 2.1 ve Teorem 2.4 uygulanamaz.

Örnek 2.2.4

$$\nabla x(n) - p(n)x(n^2+1) = 0, \ n \geq 1 \tag{2.2.27}$$

ileri fark denklemini göz önüne alalım. Burada

$$p(n) = \frac{c}{(n+2)\ln(n+2)},\ n \geq 1,\ c = \frac{e}{\ln 4},\ \tau(n) = n^2+1$$

olarak tanımlanmıştır. $\{p(n)\}$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $\{\tau(n)\}$ pozitif tamsayıların bir dizisi olmak üzere $n \geq 1$ için $\tau(n) \geq n+1$ şartını sağlasın. Ayrıca $\{\tau(n)\}$ azalmayandır. Diğer yandan $\frac{c}{(n+2)\ln(n+2)}$ artmayan olduğundan, $f(x)$ artmayan pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{b-1}^{b} f(x)dx \geq f(b) \geq \int_{b}^{b+1} f(x)dx$$

olma durumunu göz önünde bulundurursak

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \geq c\sum_{i=n}^{n^2+1} \int_{i}^{i+1} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)} = c\int_{n}^{n^2+2} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)}$$

ya da

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \geq c\ln\frac{\ln(n^2+4)}{\ln(n+2)}$$

ve

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \leq c\sum_{i=n}^{n^2+1} \int_{i-1}^{i} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)} = c\int_{n-1}^{n^2+1} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)}$$

ya da

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \leq c\ln\frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n+1)}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} c\ln\frac{\ln(n^2+4)}{\ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty} c\ln\frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n+1)} = c\ln 2 = \frac{e}{\ln 4}\ln 2 = \frac{e}{2}$$

bulunur.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{n^2+1} p(i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} = \frac{e}{2}$$

olup

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) = \frac{e}{2} > 1$$

olduğundan verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı olur (Chatzarakis ve Stavroulakis 2012).

Öcalan ve Özkan (2016) ise aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.13 $\{\tau(n)\}$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere, eğer

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=n}^{h(n)}p(j)>1, \tag{2.2.28}$$

ise (2.2.16) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $h(n)=\min_{n\leq s}\{\tau(s)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Öcalan ve Özkan 2016).

İspat: Çelişki oluşturmak adına (2.2.16) denkleminin pozitif salınımsız bir $x(n)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Ayrıca $-x(n)$ de (2.2.16) denkleminin bir çözümü olarak düşünülebilir ancak biz ispatımızı yalnızca $x(n)$ in pozitif olduğu durum için yapacağız. Böylece her $n\geq n_1$ için $x(n),\ x(\tau(n))>0$ olacak şekilde $n_1>n_0\geq 1$ mevcuttur. Yani (2.2.16) denkleminden

$$\nabla x(n)=p(n)x(\tau(n))\geq 0,\quad n\geq n_0$$

elde edilir ki buradan $\{x(n)\}$ azalmayan olur. Böylece $\tau(n)\geq h(n)\geq n$ olduğundan (2.2.16) denkleminden

$$\nabla x(n)-p(n)x(h(n))\geq 0,\quad n\geq n_0 \tag{2.2.29}$$

bulunur. Diğer taraftan $x(n)$ ve $h(n)$'in azalmayan olduğu göz önüne alınarak, $n\geq n_0$ için (2.2.29) eşitsizliğine n den $h(n)$ ye kadar toplam uygulanırsa

$$x(h(n))-x(n-1)-\sum_{j=n}^{h(n)}p(j)x(h(j))\geq 0$$

ve

$$x(h(n))-x(h(n))\sum_{j=n}^{h(n)}p(j)\geq 0$$

veya

$$x(h(n))\left[1-\sum_{j=n}^{h(n)}p(j)\right]\geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=n}^{h(n)}p(j)\leq 1$$

olup kabul ile çelişir. İspat tamamlanır.

Chatzarakis vd. (2014), (2.2.15) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.14 $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\{\tau_i(n)\}$ azalmayan ve

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\tau(n)} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > 1 \tag{2.2.30}$$

ise (2.2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $\tau(n) = \min_{1\le i\le m} \{\tau_i(n)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Chatzarakis vd. 2014).

Örnek 2.2.5

$$\nabla x(n) - \frac{c}{3\ln(n+2)^{n+2}} x(n^2+1) - \frac{2c}{3\ln(n+2)^{n+2}} x(n^2+2) = 0, \; n \ge 1 \tag{2.2.31}$$

şeklinde verilen ileri fark denklemini göz önüne alalım. Burada $c = \frac{e}{\ln 4}$, $\tau_1(n) = n^2+1$, $\tau_2(n) = n^2+2$, $p_1(n) = \frac{c}{3\ln(n+2)^{n+2}}$ ve $p_2(n) = \frac{c}{3\ln(n+2)^{n+2}}$ şeklinde tanımlanmıştır. Her $n \ge 1$ için $\tau_1(n)$ ve $\tau_2(n)$ artan ve $\tau_2(n) > \tau_1(n)$ olur. Böylece

$$\tau(n) = \min_{1\le i\le m} \tau_i(n) = \tau_1(n) = n^2+1, \; n \ge 1$$

olur. Şimdi

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\tau(n)} \sum_{i=1}^{2} p_i(j) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{n^2+1} \sum_{i=1}^{2} p_i(j) > 1$$

olduğunu göstermek istiyoruz.

Örnek 2.2.4 deki benzer işlem adımları uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} \left(c \ln \frac{\ln(n^2+4)}{\ln(n+2)} \right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\tau(n)} \sum_{i=1}^{2} p_i(j) \le \lim_{n\to\infty} \left(c \ln \frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n+1)} \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\tau(n)} \sum_{i=1}^{2} p_i(j) = \frac{e}{2}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\tau(n)} \sum_{i=1}^{2} p_i(j) = \frac{e}{2} > 1$$

olup verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı olur (Chatzarakis vd. 2014).

3 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER İLERİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMI

Salımlılık teorisi ile ilgili çalışmalarda genellikle aşağıda belirtilen durumlar üzerinde durulmuştur:

(i) Salınımlı olmayan çözümün varlığı için yeter şartlar.

(ii) Her çözümün salınımlı olması için yeter şartlar.

Verilen bu durumlar için yapılan çalışmalar birbirinden farklıdır. İlk durum için sabit işaretli olan bir çözümün var olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda çeşitli sabit nokta teoremleri uygulanabilir ya da salınımlı olmayan bir çözüme yakınsak, monoton bir dizi tanımlanabilir. İkinci durumda ise denklemin bazı çözümleri için bu yöntemlerin kullanılması uygun değildir. Bu yüzden çelişki yöntemi kullanılarak ispat yapılır. Yani, verilen denkleme ait salınımlı olmayan bir çözümün varlığı kabul edilir ve bu denklemin parametreleri için kabul edilen şartların sağlandığı gösterilerek çelişki elde edilir.

Birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin salınımlılık davranışı ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Ancak birinci mertebeden lineer ileri fark denklemlerinin salınımı üzerine çok sayıda çalışma bulunmamaktadır. Özellikle daha genel bir durum olan monoton olması gerekmeyen argumanları içeren denklemlerle ilgili yapılan çalışmalar neredeyse yok denecek kadar azdır.

Bu nedenle bu tez çalışmasında

$$\nabla x(n) - \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x\left(\tau_i(n)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \tag{3.1}$$

ve bu denklemin $m = 1$ için özel bir hali olan

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \tag{3.2}$$

şeklinde verilen birinci mertebeden lineer ileri fark denklemlerinin salınımlılık davranışı ele alınmıştır. Bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için yeni salınımlılık kriterleri elde edilmiştir. Burada $1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen ve

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \text{ için } \tau_i(n) \geq n \tag{3.3}$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileridir. Ayrıca çalışmamız boyunca $\sum_{i=k}^{k-1} A(i) = 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Elde edilen sonuçlar tamamen orjinal olup aşağıdaki şekildedir.

İlk olarak (3.2) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili elde edilen sonuçları ele alalım.

$\{\tau(n)\}$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere

$$h(n) := \min_{n \leq s} \{\tau(s)\}, \quad s \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

ifadesini tanımlayalım. Açık olarak, her $n \geq 1$ için $\tau(n) \geq h(n)$ ve $\{h(n)\}$ azalmayan olur.

Lemma 3.1 (3.4) eşitliği sağlansın ve $m > 0$ olsun. Bu durumda

$$m = \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{\tau(n)} p(j) \tag{3.5}$$

eşitliği vardır (Öcalan ve Özkan 2016).

Lemma 3.2 $p(n) > 0$ ve $\{x(n)\}$ aşağıda verilen eşitsizliğin pozitif bir çözümü olsun.

$$\nabla x(n) - p(n)x(n) \geq 0, \quad n \geq s. \tag{3.6}$$

Böylece

$$x(n) \geq \exp\left\{\sum_{j=s+1}^{n} p(j)\right\} x(s), \quad n \geq s \tag{3.7}$$

olur.

İspat İlk olarak (3.6) eşitsizliği $x(n)$ ile bölünürse

$$\frac{\nabla x(n)}{x(n)} - p(n) \geq 0, \quad n \geq s \tag{3.8}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.8) eşitsizliğine $s+1$ den n ye kadar toplam uygulanırsa,

$$\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\nabla x(j)}{x(j)} - \sum_{j=s+1}^{n} p(j) \geq 0 \tag{3.9}$$

bulunur. Şimdi $x \geq 0$ için $e^x \geq 1 + x$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\nabla x(j)}{x(j)} &= \sum_{j=s+1}^{n} \frac{x(j) - x(j-1)}{x(j)} = (n-s) - \sum_{j=s+1}^{n} \frac{x(j-1)}{x(j)} \\
&= (n-s) - \sum_{j=s+1}^{n} \exp\left\{ \ln \frac{x(j-1)}{x(j)} \right\} \\
&\leq (n-s) - \sum_{j=s+1}^{n} \left(1 + \ln \frac{x(j-1)}{x(j)} \right) = \sum_{j=s+1}^{n} \ln \frac{x(j)}{x(j-1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\nabla x(j)}{x(j)} &\leq \sum_{j=s+1}^{n} \ln \frac{x(j)}{x(j-1)} = \ln x(n) - \ln x(s) \\
&= \ln \frac{x(n)}{x(s)}
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak (3.9) eşitsizliğinden

$$\ln \frac{x(n)}{x(s)} - \sum_{j=s+1}^{n} p(j) \geq 0$$

ya da

$$x(n) \geq \exp\left\{ \sum_{j=s+1}^{n} p(j) \right\} x(s)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 (3.4) sağlansın. $\{\tau(n)\}$ monoton olması gerekmeyen bir dizi ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{\tau(n)} p(j) > \frac{1}{e}, \tag{3.10}$$

ise (3.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.2) denkleminin pozitif salınımsız bir $x(n)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Ayrıca $-x(n)$ de (3.2) denkleminin bir çözümü olarak düşünülebilir ancak biz ispatımızı yalnızca $x(n)$ in pozitif olduğu durum için yapacağız. Böylece her $n \geq n_1$ için $x(n),\ x(\tau(n)) > 0$ olacak şekilde $n_1 > n_0 \geq 1$ mevcuttur. Yani (3.2) denkleminden

$$\nabla x(n) = p(n) x(\tau(n)) \geq 0, \quad \forall\ n \geq n_1$$

elde edilir ki buradan $\{x(n)\}$ azalmayan olur. Buradan ve $\tau(n) \geq h(n) \geq n$ olduğundan (3.2) denkleminden

$$\nabla x(n) - p(n)x(h(n)) \geq 0, \quad n \geq n_1 \tag{3.11}$$

ve

$$\nabla x(n) - p(n)x(n) \geq 0, \quad n \geq n_1 \tag{3.12}$$

bulunur.

Diğer taraftan Lemma 3.1 ve (3.10) ifadesinden

$$\sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) \geq c > \frac{1}{e}, \qquad n \geq n_2 > n_1 \tag{3.13}$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti vardır. Böylece, Lemma 3.2 ve (3.12) ifadesinden

$$x\left(h(n)\right) \geq \exp\left\{\sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j)\right\} x\left(n\right) \quad \forall\ h(n) \geq n \tag{3.14}$$

elde edilir.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $e^x \geq ex$ olduğundan $ec > 1$ olmak üzere (3.13) ve (3.14) eşitsizliklerinden

$$x\left(h(n)\right) \geq e^c x\left(n\right) \geq \left(ec\right) x\left(n\right) \tag{3.15}$$

bulunur. Böylece (3.11) ve (3.15) ifadelerinden

$$\nabla x(n) - p(n)\left(ec\right) x\left(n\right) \geq 0, \quad n \geq n_2$$

elde edilir.

Şimdi $p_1(n) := \left(ec\right) p(n)$ olsun. Böylece

$$\nabla x(n) - p_1(n)x\left(n\right) \geq 0, \quad n \geq n_2 \tag{3.16}$$

bulunur.

Ayrıca Lemma 3.2 kullanılırsa,

$$x\left(h(n)\right) \geq \exp\left\{\sum_{j=n+1}^{h(n)} p_1(j)\right\} x\left(n\right) \quad \forall\ h(n) \geq n \tag{3.17}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan (3.13) ve (3.16) ifadeleri yardımıyla

$$\begin{aligned} x\left(h(n)\right) &\geq \exp\left\{\sum_{j=n+1}^{h(n)} (ec)\, p(j)\right\} x\left(n\right) \\ &= \exp\left\{(ec) \sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j)\right\} x\left(n\right) \geq \exp\left\{ec^2\right\} x\left(n\right) \\ &\geq (ec)^2\, x\left(n\right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Yukarıda verilen işlem adımları tekrarlandığında, herhangi bir pozitif k tamsayısı için tümevarım uygulanırsa yeterince büyük n ler için

$$\frac{x\left(h(n)\right)}{x\left(n\right)} \geq (ec)^k \tag{3.18}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.13) ifadesinden

$$\sum_{j=n+1}^{n^*} p(j) \geq \frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad \sum_{j=n^*}^{h(n)} p(j) \geq \frac{c}{2} \tag{3.19}$$

olacak şekilde $n^* \in (n, h(n)]$, $n^* \in \mathbb{N}$ mevcuttur. (3.11) ifadesine $n+1$ den n^* a kadar toplam uygulanırsa

$$x\left(n^*\right) - x(n) - \sum_{j=n+1}^{n^*} p(j) x\left(h(j)\right) \geq 0$$

ifadesi bulunur.

Şimdi (3.19) ifadesi ve $\{x(n)\}$, $\{h(n)\}$ nin azalmayan olduğu göz önünde bulundurulursa

$$x\left(n^*\right) \geq x\left(h(n+1)\right) \sum_{j=n+1}^{n^*} p(j) \geq x\left(h(n)\right) \sum_{j=n+1}^{n^*} p(j)$$

ya da

$$x\left(n^*\right) \geq x\left(h(n)\right) \frac{c}{2} \tag{3.20}$$

ifadeleri elde edilir. (3.11) ifadesine n^* dan $h(n)$ ye kadar toplam uygulanırsa

$$x(h(n)) - x(n^* - 1) - \sum_{j=n^*}^{h(n)} p(j) x\left(h(j)\right) \geq 0,$$

,

$$x(h(n)) - x\left(h(n^*)\right) \sum_{j=n^*}^{h(n)} p(j) \geq 0$$

ya da

$$x(h(n)) \geq x\left(h(n^*)\right)\frac{c}{2} \tag{3.21}$$

bulunur. Elde edilen (3.20) ve (3.21) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde

$$x(n^*) \geq x\left(h(n)\right)\frac{c}{2} \geq x\left(h(n^*)\right)\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

ya da

$$\frac{x\left(h(n^*)\right)}{x(n^*)} \leq \left(\frac{2}{c}\right)^2 < +\infty$$

olup $\liminf_{n\to\infty}\frac{x(h(n))}{x(n)}$ mevcut olur. Ancak bu durum (3.18) ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2 Teorem 3.1'in tüm koşullarının sağlandığını kabul edelim. Böylece

(i)

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) \geq 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

fark eşitsizliğinin ergeç pozitif bir çözümü yoktur.

(ii)

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) \leq 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

fark eşitsizliğinin ergeç negatif bir çözümü yoktur.

Örnek 3.1.1

$$\nabla x(n) - p(n)x\left(\tau(n)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \tag{3.22}$$

ileri fark denklemini ele alalım. $p(n) = 0.19$ ve $\tau(n) = n + 2$ olsun. Böylece

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=n}^{n+2} p(j) = 0.57 \ngtr 1$$

olup (1.12) şartı sağlanmaz. Ancak

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=n+1}^{n+2} p(j) = 0.38 > \frac{1}{e},$$

olup (3.22) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

Şimdi tekrar (3.1) denklemini göz önüne alalım ve bu denklemin çözümlerinin salınımlılığı için elde etmiş olduğumuz yeni şartları verelim.

$1 \leq i \leq m$ için $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen diziler olmak üzere

$$h_i(n) := \inf_{n \leq s} \{\tau_i(s)\} \text{ ve } h(n) = \min_{1 \leq i \leq m} h_i(n), \; n \geq n_0 \tag{3.23}$$

tanımlayalım. Açık olarak, $1 \leq i \leq m$ için $\{h_i(n)\}$ azalmayan ve her $n \geq n_0$ için $\tau_i(n) \geq h_i(n) \geq h(n)$ olur.

Teorem 3.3 (3.3) sağlansın. $1 \leq i \leq m$ için $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen diziler olmak üzere

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{j=n}^{h(n)} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > 1 \tag{3.24}$$

ya da

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{j=n+1}^{\tau(n)} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > \frac{1}{e}, \tag{3.25}$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $\tau(n) = \min_{1 \leq i \leq m} \{\tau_i(n)\}$ ve $h(n)$ (3.23) deki gibi tanımlanmıştır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.1) denkleminin pozitif salınımsız bir $x(n)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Ayrıca $-x(n)$ de (3.1) denkleminin bir çözümü olarak düşünülebilir ancak biz ispatımızı yalnızca $x(n)$ in pozitif olduğu durum için yapacağız. Böylece her $n \geq n_1$ için $x(n), \; x(\tau(n)) > 0$ olacak şekilde $n_1 > n_0 \geq 1$ mevcuttur. Yani (3.1) denkleminden

$$\nabla x(n) - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(n) \right) x(\tau(n)) \geq 0$$

bulunur.

(3.24) ve (3.25) ifadeleri göz önüne alındığında, Teorem 3.2 ile bir çelişki elde edilir. Böylece verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı olup ispat tamamlanır. Burada aşağıdaki eşitlik kullanılmıştır.

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{j=n+1}^{\tau(n)} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) = \liminf_{t \to \infty} \sum_{j=n+1}^{h(n)} \sum_{i=1}^{m} p_i(j).$$

Bu eşitlik Lemma 3.1 deki ispat yöntemi kullanılarak kolayca elde edilebilir.

Teorem 3.4 Teorem 3.3 ün tüm koşullarının sağlandığını kabul edelim. Böylece

(*i*)

$$\nabla x(n) - \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x\left(\tau_i(n)\right) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

fark eşitsizliğinin pozitif çözümü yoktur.

(*ii*)

$$\nabla x(n) - \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x\left(\tau_i(n)\right) \leq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

fark eşitsizliğinin negatif çözümü yoktur.

4 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında

$$\nabla x(n) - \sum_{i=1}^{m} p_i(n)x\left(\tau_i(n)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

ve bu denklemin $m = 1$ için özel bir hali olan

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

birinci mertebeden lineer ileri fark denklemleri çalışılmıştır. Bu denklemlerin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeter şartlar elde edilmiştir. Bu denklemlerle ilgili yapılan önceki çalışmalarda argumanların monoton olması söz konusu idi, ancak elde ettiğimiz yeni sonuçlar ile birlikte argumanların monoton olma şartı kaldırıldı. Böylece, elde edilen yeni salınımlılık kriterleri ile birlikte monton olması gerekmeyen argumanları içeren birinci mertebeden lineer ileri fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı gösterildi.

Ayrıca tezimizde yer alan sonuçların ilerleyen zamanlarda bu konular üzerinde çalışacak olan araştırmacılara yol gösterici nitelikte olacağı düşünülmektedir.

5 KAYNAKLAR

Agarwal R P, 2000, Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York.

Agarwal R P, Grace S R, O'Regan D, 2000, Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Bayar E, 2012, Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemleri için Çözüm Yöntemleri, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 116s, Denizli.

Braverman E, Chatzarakis G E, Stavroulakis I P, 2015, Iterative Oscillation Tests for Difference Equations with Several Non-monotone Arguments, Journal of Difference Equations and Applications, 21, 854–874.

Braverman E, Chatzarakis G E, Stavroulakis I P, 2016, Iterative Oscillation Tests for Differential Equations with Several Non-Monotone Arguments, Advances in Difference Equations, 2016, 1–18.

Chatzarakis G E, Stavroulakis I P, 2012, Oscillations of Difference Equations with General Advanced Argument, Central Journal of European Mathematics, 10, 807–823.

Chatzarakis G E, Pinelas S, Stavroulakis I P, 2014, Oscillations of Difference Equations with Several Deviated Arguments, Aequationes Mathematicae, 88, 105–123.

Chatzarakis G E, Öcalan Ö, 2015, Oscillations of Differential Equations with Several Nonmonotone Arguments, Dynamical Systems, 30, 310–323.

Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2017, Oscillations in Deviating Difference Equations Using an Iterative Technique, Journal of Inequalities and Applications, Paper No. 173, 24 pages.

Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2017, Improved Iterative Oscillation Tests for First-order Deviating Difference Equations, International Journal of Difference Equations, 12, 185–210.

Chatzarakis G E, Shaikhet L, 2017, Oscillation Criteria for Difference Equations with Nonmonotone Arguments, Advences in Difference Equations, Paper No. 62, 16 pages.

Chatzarakis G E, Horvat-Dmitrovic L, Pasic M, 2018, Oscillation Tests for Difference Equations with Several Nonmonotone Deviating Arguments, Mathematica Slovaca, 68, 1083–1096.

Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2018, Oscillations in Difference Equations with Several Arguments Using an Iterative Method, Filomat, 32, 255–273.

Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2018, Difference Equations with Several Nonmonotone Deviating Arguments: Iterative oscillation tests, Dynamic Systems and Applications, 27, 271–298.

Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2019, Oscillations of Deviating Difference Equations Using an Iterative Method, Mediterranean Journal of Mathematics, 16(1), Paper No. 16, 20 pages.

Elaydi S, 2000, An Introduction to Difference Equations Third Edition, Springer, New York.

Erbe L H, Zhang B G, 1989, Oscillation of Discrete Analogues of Delay Equations, Differential Integral Equations, 2, 300–309.

Erbe L H, Kong Q, Zhang B G, 1995, Oscillation Theory for Functional Differential Equations, Marcel Dekker, New York.

Fukagai N, Kusano T, 1984, Oscillation Theory of First Order Functional Differential Equations with Deviating Arguments, Annali di Mathematica Pura ed Applicata, 136, 95–117.

Györi I, Ladas G, 1991, Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, Clarendon Press, Oxford.

Karagöz F N, 2019, Fark Denklemleri Üzerine Çalışma, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 104s, Isparta.

Koplatadze R G, Chanturija T A, 1982, Oscillating and Monotone Solutions of First-order Differential Equations with Deviating Argument, Differentsial 'nye Uravneniya, 18, 1463–1465 .

Kulenovic M R, Grammatikopoulos M K, 1988, Some Comparison and Oscillation Results for First-order Differential Equations and Inequalities with a Deviating Argument, Journal of Mathematical Analysis and Applications,131, 67–84.

Kulenovic M R S, Kalabusic S, 2000, Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island.

Kusano T, 1982, On Even-order Functional-Differential Equations with Advanced and Retarded Arguments, Journal of Differential Equations, 45, 75–84.

Ladas G, Lakshmikantham V, Papadakis J S, 1972, Oscillation of High-order Retarded Differential Equations Generated by Retarded Arguments. Delay and Functional Differential Equations and Their Applications. Academic Press, New York, 219–231.

Ladas G, Stavroulakis I P, 1982, Oscillation Caused by Several Retarded and Advanced Arguments. Journal of Differential Equations, 44, 134-152.

Ladde G S, 1978, Oscillations Caused by Retarded Perturbations of First Order Linear Ordinary Differential Equations, Atti Acad. Naz. Lincei Rendiconti, 63, 351–359.

Ladde G S, Lakshmikantham V, Zhang B G, 1987, Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 110, Marcel Dekker, Inc., New York.

Ladas G, Philos Ch G, Sficas Y G, 1989, Sharp Condition for The Oscillation of Delay Difference Equations, Journal of Applied Mathematics and Simulation, 2, 101–112.

Ladas G, 1990, Explicit Conditions for The Oscillation of Difference Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153, 276–287.

Lakshmikantham V, Trigiante D, 2002. Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications, Second Edition, Marcel Dekker, New York.

Li X, Zhu D, 2002, Oscillation of Advanced Difference Equations with Variable Coefficients, Annals of Differential Equations, 18, 254–263.

Li X, Zhu D, 2002, Oscillation and Nonoscillation of Advanced Differential Equations with Variable Coefficients, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 269, 462–488.

Öcalan Ö, Akın Ö, 2007, Oscillation Properties for Advanced Difference Equations, Novi Sad Journal of Mathematics, 37, 39–47.

Öcalan Ö, 2009, Linearized Oscillation of Nonlinear Difference Equations with Advanced Arguments, Archivum Mathematicum, 45, 203–212.

Öcalan Ö, Özkan U M, 2016, Oscillations of Dynamic Equations on Time Scales with Advanced Arguments, International Journal of Dynamic Systems and Differerential Equations, 6, 275–284.

Öcalan Ş, Öcalan Ö, Yıldız M K, 2020, Oscillation Behaviour of Advanced Difference Equation with General Arguments. Filomat, 34:12, 4161–4169.

Tollu D, 2009, Bazı Fark Denklemlerinin Kararlılığı, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 69s, Konya.