



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRDE STRATEJİK AKIL
YÜRÜTME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

GÖZDE GERGİN

İzmir
2022

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRDE STRATEJİK AKIL
YÜRÜTME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

GÖZDE GERGİN

DANIŞMAN
Prof. Dr. Sibel YEŞİLDERE İMRE

İzmir
2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirde Stratejik Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi” adlı çalışmanın içerdiği fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

01/02/2022

Gözde GERGİN



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 08/02/2022

Tez Başlığı:

8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirde Stratejik Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 330 sayfalık kısmına ilişkin, 08/02/2022 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (**Turnitin**-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı %9 dur**.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum. ☒

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15)

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) x

☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça dâhil, ☒ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒ EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ☐	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Gözde GERGİN
Öğrenci No : 2018950200
Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans
Statüsü : Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐

ÖĞRENCİ

Gözde GERGİN
08/02/2022

DANIŞMAN

Prof. Dr. Sibel YEŞİLDERE İMRE
08/02/2022

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (□) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu" formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama sürecimde akademik bilgeliği ve uzmanlığı ile her zaman desteğini hissettiren ve iyi bir araştırmacı olabilmem için bilgiyi hazır vermek yerine beni yönlendirerek daha iyiye yaklaşmamı sağlayan değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Sibel YEŞİLDERE İMRE'ye teşekkürlerimi sunarım.

İyi bir araştırmacı olarak yetişmem için ders dönemimde ders içi ve ders dışı teorik ya da uygulamalı olarak makale, bildiri gibi yayınlar yazmayı, literatür taraması yapmayı ve araştırma verilerinin nasıl çözümlenebileceğini öğrendiğim Sayın Prof. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL'e, Sayın Prof. Dr. Elif TÜRNUKLÜ'ye ve Sayın Doç. Dr. Berna CANTÜRK GÜNHAN'a teşekkür ederim. Ayrıca tezime katkılarını ve görüşlerini sunan Sayın Doç. Dr. Ayşe TEKİN DEDE ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayten ERDURAN hocalarıma teşekkür ederim.

Yüksek lisans sürecinin tüm aşamalarında birlikte çalıştığımız, birbirimize değerli katkılarda bulunduğumuz, güzel anılar ile birlikte zorluklara karşı hep yan yana durarak birbirimize destek olduğumuz sevgili arkadaşlarım Merve TOKGÖZ'e ve Güliz TÜRER'e teşekkür ederim.

Lisans dönemimde olduğu gibi yüksek lisans dönemimde de her zaman sorularımı yanıtlayan, görüşlerini ve önerilerini esirgemeyen Arş. Gör. Yusuf ERKUŞ'a teşekkür ederim.

İhtiyaç duyduğum her anımda yanımda duran ve varlığı ile güven veren sevgili eşim Murat GERGİN'e beni desteklediği ve bana güç verdiği için teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde olduğu gibi çalışmalarımı ve araştırma sürecimi en iyi şekilde destekleyen sevgili annem Zehra YAVUZ'a yanımda olduğu ve bana inandığı için teşekkür ederim.

Son olarak bugüne gelmemde katkıları bulunan eğitim hayatımda yer edinen bütün öğretmenlerime teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	xii
ABSTRACT	xiii
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	4
1.2. Amaç ve Önem.....	6
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri	7
1.4. Sınırlılıklar	7
1.5. Varsayımlar.....	8
1.6. Tanımlar	8
1.7. Kısaltmalar	8
BÖLÜM II	10
KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	10
2.1. Cebir ve Cebir Öğretimi.....	10
2.2. Matematiksel Düşünme ve Matematiksel Akıl Yürütme	14
2.3. Cebirsel Akıl Yürütme	19
2.4. Stratejik Cebirsel Akıl Yürütme.....	23
2.4.1. SAR Çerçevesi Bağlamında Öğrencilerin Cebirsel Problem Çözme Yaklaşımları ve Zorlukları	24
2.4.2. SAR Yetkinlikleri ve Yetkinliklerin Genişletilmiş Açıklamaları	26
2.5. SAR Çerçevesinin Seçilme Nedenleri	32
2.6. Açık Uçlu Problemler İle İlgili Araştırmalar	33
BÖLÜM III.....	35
YÖNTEM	35
3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni.....	35
3.2. Katılımcılar	39
3.3. Veri Toplama Araçları ve Geliştirme Süreçleri	41

3.3.1.	Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu.....	41
3.3.2.	Yarı Yapılandırılmış Klinik Mülakatlar.....	61
3.4.	Veri Toplama Araçlarının Uygulama Süreci	63
3.5.	Verilerin Analizi	66
3.5.1.	Açık Uçlu Cebir Problemleri Verilerinin Analizi	66
3.5.2.	Örnek Olay Çalışması Verilerinin Analizi	68
3.6.	Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği.....	69
3.7.	Araştırmacının Rolü.....	70
BÖLÜM IV		72
BULGULAR VE YORUMLAR		72
4.1.	Metni Okuma, Yorumlama ve Bağlamı Anlamlandırma Sürecine İlişkin Bulgular 72	
4.1.1.	Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular	72
4.1.2.	Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular.....	78
4.1.3.	“n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular	83
4.1.4.	Teraziler Nasıl Dengede? Problemine İlişkin Bulgular	89
4.1.5.	Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular.....	94
4.1.6.	Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular	100
4.1.7.	Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular.....	105
4.2.	İlgili Miktarları ve Bunlar Arasındaki İlişkileri Belirleme Sürecine İlişkin Bulgular.....	109
4.2.1.	Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular	109
4.2.2.	Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular.....	116
4.2.3.	“n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular	120
4.2.4.	Teraziler Nasıl Dengede? Problemine İlişkin Bulgular	126
4.2.5.	Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular.....	131
4.2.6.	Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular	137
4.2.7.	Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular.....	142

4.3. Miktarlar Arasındaki İlişkilerin Cebirsel Temsillerini Kullanma Sürecine İlişkin Bulgular.....	146
4.3.1. Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular	147
4.3.2. Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular.....	156
4.3.3. “n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular	162
4.3.4. Teraziler Nasıl Dengede? Problemine İlişkin Bulgular	167
4.3.5. Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular.....	173
4.3.6. Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular	180
4.3.7. Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular.....	184
4.4. Prosedürleri Yürütme ve Sonuçların Doğruluğunu Kontrol Etme Sürecine İlişkin Bulgular.....	189
4.4.1. Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular	190
4.4.2. Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular.....	197
4.4.3. “n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular	203
4.4.4. Teraziler Nasıl Dengede? Problemine İlişkin Bulgular	208
4.4.5. Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular.....	213
4.4.6. Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular	218
4.4.7. Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular.....	221
4.5. İkna Edici Açıklamalar Yapma Sürecine İlişkin Bulgular.....	226
4.5.1. Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular	226
4.5.2. Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular.....	230
4.5.3. “n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular	235
4.5.4. Teraziler Nasıl Dengede? Problemine İlişkin Bulgular	240
4.5.5. Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular.....	245
4.5.6. Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular	250
4.5.7. Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular.....	253
BÖLÜM V.....	258
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER	258

KAYNAKÇA	268
EK 1.	281
EK 2. Uygulama İzinleri	282
EK 3. Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu	285
EK 4. Yarı Yapılandırılmış Klinik Mülakat Soruları	294
EK 5. Uzman Görüşü Formu	312



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1	26
Tablo 2	40
Tablo 3	40
Tablo 4	42
Tablo 5	48
Tablo 6	50
Tablo 7	53
Tablo 8	56
Tablo 9	58
Tablo 10	61
Tablo 11	65
Tablo 12	66
Tablo 13	77
Tablo 14	82
Tablo 15	88
Tablo 16	93
Tablo 17	100
Tablo 18	104
Tablo 19	108
Tablo 20	115
Tablo 21	119
Tablo 22	125
Tablo 23	130
Tablo 24	136
Tablo 25	142
Tablo 26	146
Tablo 27	155
Tablo 28	161
Tablo 29	166
Tablo 30	172
Tablo 31	179
Tablo 32	184
Tablo 33	189

Tablo 34	197
Tablo 35	202
Tablo 36	207
Tablo 37	212
Tablo 38	217
Tablo 39	221
Tablo 40	225
Tablo 41	230
Tablo 42	234
Tablo 43	239
Tablo 44	244
Tablo 45	249
Tablo 46	252
Tablo 47	257

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Öğrenme alanlarının sınıf seviyelerine göre vurgulanması.....	13
Şekil 2. Örnek olay çalışması sürecinde yer alan aşamalar ve ilişkileri.....	37
Şekil 3. Ters Piramit problemi.	46
Şekil 4. Harflerin Oyunu problemi.....	48
Şekil 5. “n” Neye İfade Ediyor? problemi.	50
Şekil 6. Teraziler Nasıl Dengede? Problemi.	52
Şekil 7. Timuçin İnternet Kafede problemi.....	54
Şekil 8. Bakterilerin Hızına Yetiş problemi.	57
Şekil 9. Sekizgen Masalar problemi.....	59
Şekil 10. C5 yetkinliğinin alt bileşenleri ve diğer yetkinliklerle ilişkisi.	67
Şekil 11. Y2'nin yazılı çözümlerinde örüntüdeki gömülü matematiği keşfetme süreci.....	73
Şekil 12. O2'nin yazılı çözümlerinde örüntüdeki gömülü matematiği keşfetme süreci.....	74
Şekil 13. Y1'in yazılı çözümlerinde örüntüdeki bağlamı anlamlandırma süreci.	74
Şekil 14. Y1'in mülakat sırasında örüntüdeki gömülü matematiği keşfetme süreci.	75
Şekil 15. Y1'in yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği keşfetme süreci.	79
Şekil 16. D1'in yazılı çözümlerinde bağlamı anlamlandırma süreci.....	79
Şekil 17. D2'nin bağlamı anlamlandıramadığı yazılı çözümleri.	80
Şekil 18. Y1'in bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırma süreci.	84
Şekil 19. O1'in bağlamı anlamlandıramadığını gösteren yazılı çözümler.	84
Şekil 20. D1'in bağlamı anlamlandırdığını gösteren yorumları.	85
Şekil 21. O2'nin mülakatlarda gömülü matematiği keşfetme süreci.....	86
Şekil 22. D2'nin mülakatlarda problem bağlamını anlamlandırma süreci.	87
Şekil 23. O1'in yazılı çözümlerinde problem bağlamını anlamlandırma süreci.	90
Şekil 24. D1'in yazılı çözümlerinde problem bağlamını anlamlandırma süreci.	90
Şekil 25. D2'nin yazılı çözümlerinde problem bağlamını anlamlandırma süreci.	91
Şekil 26. Y1'in yazılı çözümlerinde gömülü matematiği anlamlandırma süreci.	95
Şekil 27. O2'nin yazılı çözümlerinde gömülü matematiği anlamlandırma süreci.	96
Şekil 28. D1'in çözümlerinde cebirsel ilişkiler kullanmadan sayarak ilerleme süreci.....	96
Şekil 29. Y1'in gömülü matematiği anlamlandırma sürecinde yaptığı işlemler.	98
Şekil 30. Y1'in yazılı çözümlerinde problem bağlamını anlamlandırma süreci.	101
Şekil 31. D1'in denklemi yanlış yorumladığını gösteren çözümleri.	102
Şekil 32. O1'in çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırma süreci.....	106

Şekil 33. D1'in çözümlerinde bağlamı anlamlandırma süreci.	107
Şekil 34. Y2'nin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.	110
Şekil 35. O2'nin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.	111
Şekil 36. Y1'in yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.	111
Şekil 37. D2'nin miktarları ve ilişkilerini belirleme sürecinde yazılı çözümleri.	112
Şekil 38. Y1'in mülakatlarda örüntüdeki gömülü matematiği keşfetme süreci.	113
Şekil 39. Y1'in yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.	116
Şekil 40. D2'nin yazılı çözümlerinde miktarların ilişkilerini yanlış yorumlama süreci.	117
Şekil 41. Y1'in yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.	121
Şekil 42. O1 yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.	121
Şekil 43. D1'in ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme sürecinde yaptığı çözümler.	122
Şekil 44. D1'in ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkiyi ifade etme süreci.	127
Şekil 45. O2'nin ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkiyi ifade etme süreci.	127
Şekil 46. Y2'nin ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkiyi ifade etme süreci.	128
Şekil 47. O1'in miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.	128
Şekil 48. Y1'in ilgili miktarları belirleme süreci.	132
Şekil 49. O2'nin miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.	132
Şekil 50. D2'nin miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.	133
Şekil 51. Y2'nin ilgili miktarları belirleme süreci.	138
Şekil 52. Y1'in miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.	138
Şekil 53. D2'nin miktarları ve ilişkileri ifade etme sürecinde yaptığı çözümler.	139
Şekil 54. Y1'in ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.	143
Şekil 55. D1'in ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.	143
Şekil 56. Y2'nin cebirsel temsil (cebirsel ifade) oluşturma ve yorumlama süreci.	148
Şekil 57. Y1'in cebirsel temsil (tablo) oluşturma süreci.	149
Şekil 58. Y1'in artış miktarından yararlanarak oluşturduğu cebirsel ifade.	149
Şekil 59. O2'nin oluşturduğu cebirsel ilişkiler.	150
Şekil 60. Y1'in örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturma süreci.	152
Şekil 61. Y1'in örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturma süreci.	154
Şekil 62. Y1'in temsilleri oluşturma, yorumlama ve bağlantı kurma süreci.	156
Şekil 63. Y2'nin temsilleri oluşturma, yorumlama ve bağlantı kurma süreci.	157
Şekil 64. O1'in cebirsel temsil oluşturma süreci.	158
Şekil 65. Y2'nin cebirsel temsil oluşturma süreci.	163
Şekil 66. O2'nin cebirsel temsil (cebirsel ifade) oluşturma süreci.	163

Şekil 67. O1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.	163
Şekil 68. Y1'in cebirsel temsil (denklem) oluşturma süreci.	168
Şekil 69. Y2'nin temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.	168
Şekil 70. D2'nin cebirsel temsil (denklem) oluşturma süreci.	169
Şekil 71. O1'in örnek olay çalışmasında cebirsel temsil (denklem) oluşturma süreci.	171
Şekil 72. Y1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.	174
Şekil 73. O2'nin cebirsel temsil (eşitsizlik) oluşturma süreci.	174
Şekil 74. O2'nin cebirsel temsil (denklem) oluşturma ve yorumlama süreci.	175
Şekil 75. O1'in cebirsel temsil (tablo) oluşturma süreci.	175
Şekil 76. D1'in cebirsel temsil (grafik) oluşturma süreci.	176
Şekil 77. Y1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.	181
Şekil 78. O1'in var olan cebirsel temsile (grafik) ekleme yapma süreci.	181
Şekil 79. Y2'nin temsiller arası bağlantı kurma süreci.	182
Şekil 80. O2'nin cebirsel temsil (denklem) oluşturma süreci.	185
Şekil 81. O1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.	186
Şekil 82. Y1'in özyinelemeli prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.	191
Şekil 83. Y2'nin sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.	191
Şekil 84. O2'nin cebirsel prosedürleri doğru ve verimli uygulayamama süreci.	192
Şekil 85. Y1'in mülakat sırasında uyguladığı değişkene değer verme prosedürleri.	194
Şekil 86. Y1'in mülakat sırasında oluşturduğu cebirsel ifadeyi kontrol etme süreci.	194
Şekil 87. O2'nin mülakat sırasında geliştirdiği cebirsel ilişkileri uygulama süreci.	196
Şekil 88. Y1'in sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.	198
Şekil 89. O2'nin prosedürleri kullanmadan problemi çözme süreci.	199
Şekil 90. Y1'in özyinelemeli prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.	204
Şekil 91. Y2'nin sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.	204
Şekil 92. D1'in sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.	209
Şekil 93. Y1'in sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.	210
Şekil 94. Y2'nin cebirsel prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.	210
Şekil 95. Y1'in aritmetik prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.	214
Şekil 96. O1'in prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.	219
Şekil 97. Y2'nin prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.	223
Şekil 98. Y2'nin cebirsel ifade oluştururken yaptığı ikna edici açıklamalar.	227
Şekil 99. Y2'nin problem bağlamından yararlanarak yaptığı açıklamalar.	231
Şekil 100. Y1'in problemi çözmeye başlamadan önce yaptığı açıklamalar.	236

<i>Şekil 101.</i> Y1'in problemi çözmeye başladıktan sonra yaptığı açıklamalar.	236
<i>Şekil 102.</i> Y1'in problemi çözme sürecinde yaptığı ikna edici açıklamalar.	241
<i>Şekil 103.</i> Y1'in problemi çözme sürecinde yaptığı ikna edici açıklamalar.	245



ÖZET

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRDE STRATEJİK AKIL YÜRÜTME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Bu araştırmanın amacı, sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirde stratejik akıl yürütme süreçlerini incelemektir. Akademik başarıları yüksek, orta ve düşük olan öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçleri birbiriyle karşılaştırılarak ele alınmakta ve farklılıklara neden olan yönler tartışılmaktadır. Bununla birlikte stratejik akıl yürütme süreçleri incelenen öğrencilerin açık uçlu problem durumları ile karşılaştıklarında ne gibi çözüm stratejileri ürettiklerini gözlemlemek hedeflenmektedir.

Araştırmada nitel araştırma yöntemleri kullanılmaktadır. Ağrı ilindeki resmi bir ortaokuldan amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilen altı tane sekizinci sınıf öğrencisi ile çalışılmaktadır. Araştırmada asıl olan, öğrencilerin akıl yürütme süreçlerine ya da problem çözme stratejilerine ilişkin bir genelleme yapmak değil, bu süreci derinlemesine inceleyerek süreci oluşturan bileşenleri ele almaktır. Bu nedenle örnek olay çalışması araştırma deseni olarak belirlenmiştir. Örnek olay çalışmasında veri toplama aracı olarak, açık uçlu problemler ve yarı yapılandırılmış klinik mülakat soruları kullanılmaktadır.

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden ve örnek olay çalışmalarından elde edilen veriler, öğrencilerin açık uçlu problemlerde yer alan bağlamı anlamlandırma süreçlerinde farklı çözüm stratejilerine başvurdıklarını göstermektedir. Bazı öğrencilerin problem bağlamında yer alan nicelikleri ve bunların arasındaki ilişkileri belirlemede zorluk yaşadıkları görülmektedir. Bunun yanı sıra kavramsal ya da teorik bilgileri yeterli olan öğrenciler nicelikler arasındaki ilişkileri belirtirken cebirsel temsiller kullanmaktadır.

Akademik olarak başarılı olan öğrencilerin temsil oluşturma ve ilişkileri ifade etme süreçlerinde uyguladıkları prosedürleri cebirsel gerekçeleri kullanarak ve daha anlaşılır bir dille açıkladıkları görülmektedir. Bununla birlikte orta ve düşük başarı seviyesindeki öğrencilerin bazı problemlerde ikna edici açıklamalar ile doğru çözüm stratejisi uyguladıkları gözlemlenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Stratejik akıl yürütme, cebir, açık uçlu problemler.

ABSTRACT

INVESTIGATING 8TH GRADE STUDENTS' STRATEGIC REASONING IN ALGEBRA

The aim of this research was to investigate the strategic reasoning processes of eighth grade students in algebra. The strategic reasoning processes of students with high, medium and low academic achievements are compared with each other and the aspects that cause differences are discussed. In addition, it is aimed to observe what kind of solution strategies the students whose strategic reasoning processes are examined produce when they encounter open-ended problem situations.

Qualitative research methods are used in the research. It is studied with 6 eighth grade students selected by purposive sampling method from an official secondary school in Ağrı. The main thing in the research is not to generalize about the reasoning processes or problem solving strategies of the students, but to examine the components that make up the process by examining this process in depth. For this reason, the case study was determined as the research design. The case study provides the opportunity to conduct in-depth research with a small number of people. Open-ended problems and semi-structured clinical interview questions are used as data collection tools for the case study.

The data obtained from students' written solutions and case studies show that students apply different solution strategies in the process of making sense of the context in open-ended problems. It is seen that some students have difficulties in determining the quantities in the context of the problem and the relationships between them. In addition, students with sufficient conceptual or theoretical knowledge use algebraic representations when describing the relationships between quantities.

It is seen that academically successful students explain the procedures they apply in the processes of creating representation and expressing relationships more easily and using algebraic reasons. However, it is observed that students at medium and low achievement levels apply the right solution strategy with convincing explanations for some problems.

Keywords: Strategic reasoning, algebra, open-ended problems.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Akıl yürütme, doğasında üst düzey becerileri barındırması ve düşünmeyi ön plana çıkarması gibi özellikleri nedeniyle geçmişten bu yana matematik eğitiminde birçok araştırmacıya konu olmuştur (Schoenfeld, 1985; Lithner, 2000; English, 1998; Umay, 2003). Son yıllarda da günlük yaşam ile ilişkilendirilmiş gerçek yaşam problemlerine yanıt verebilen bireylerin yetişmesinin önemi arttıkça akıl yürütme üzerine yapılan araştırmaların devam ettiği görülmektedir (Bike Kalkan, 2014; Kaya, 2015; Yıldırım, 2016). Bireylerin kendi düşüncelerini nasıl yönlendirdikleri ve sorunlarla başa çıkabilme süreçlerinin nasıl gerçekleştiğini ortaya koyma fikri, matematik eğitime yapacağı katkılardan dolayı araştırmacılar tarafından ilgi görmüştür. Bu bölümde bu araştırmanın nasıl ortaya çıktığı ve araştırma konusu olarak neden stratejik akıl yürütmenin seçildiğine ilişkin açıklamalara yer verilmektedir.

Literatür taraması akıl yürütmenin birçok matematiksel beceri ile birlikte ortaya çıktığını ve matematiksel akıl yürütme başlığı altında üst düzey düşünme biçimlerinden bahseden araştırmaların olduğunu göstermektedir. Bu araştırmalarda ilişki kurma, kanıt yapma, tümdengelim ya da tümevarıma dayalı düşünme ve yapıları çözümleme gibi çeşitli becerilerin ele alınması araştırmanın akıl yürütme kapsamında ilerlemesini sağlamaktadır.

Matematiksel akıl yürütme, konusuna göre cebirsel, orantısal, geometrik ve istatistiksel gibi alt başlıklara ayrılmaktadır (Akkuş ve Duatepe, 2002). Öğrencilerin matematiksel akıl yürütme süreçlerini inceleyen araştırmalar daha çok cebirsel ve orantısal akıl yürütme üzerine yoğunlaşmaktadır. Mason (2001) cebir öğrenme alanı için akıl yürütmenin doğal olarak gerçekleşmesi beklenen bir alan olduğunu vurgulamaktadır. Bu nedenle stratejik akıl yürütmeyi konu edinen bu araştırmanın cebir içermesinin yararlı olacağı düşünülmektedir. Cebir öğrenme alanının gerçek yaşamla ilişkili olması ve öğrencinin soyut düşüncelerini açığa çıkarmayı sağlaması gibi özelliklerinin yanında ortaokul matematiğinin geniş bir bölümünü temsil etmesi, araştırmanın cebir konusu üzerine şekillenmesini sağlamaktadır.

Cebirsel akıl yürütme, matematiksel akıl yürütmenin özel bir biçimi olarak sadece cebir işlemleriyle sınırlı olmayıp, genellemeler yapmayı, sembol sistemleri ve örüntüleri kullanarak formüle etmeyi, farklı temsiller kullanmayı ve bunları kelimelerle ifade edebilmeyi gerektirmektedir. Ayrıca cebirsel akıl yürütmenin gerçek yaşamda karşılaşılan durumlardan bilgi edinerek bunları matematiksel ifade biçimleri ile ilişkilendirip bilinmeyen durumları

tahmin etme ve bu durumlar için değişken kullanıp ilişkiyi analiz etmeyi içermesi, bu gibi süreçlerin incelenmesinin önemi ve gerekliliği konusunda fikir vermektedir.

Öğrencilerin bilişsel olarak hangi süreçlerden geçtiğini anlamak ve bu süreçlerden hangilerinin cebirsel akıl yürütmeyi gerektirdiğini incelemek kadar önemli olan bir diğer nokta öğrencilerin çözümlerini şekillendirme süreçlerini ortaya koymak olabilir. Bu şekillendirme süreçleri, öğrencilerin problem durumuna verdiği tepki ve çözüme ulaşmada seçtiği stratejiyi içermektedir. Bu durumda en önemli gereksinimlerden biri, öğrencilerin bu süreçte hangi stratejileri kullandıklarının öğrenilebileceği açık uçlu gerçek yaşam problemleridir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

Açık uçlu problemlerin varlığı son dönemlerde eğitim sistemindeki değişikliklerle hissedildiği gibi literatürde de bu problemlerin önemine değinildiği gözlemlenmektedir (Erdem, 2015). Öğrencinin bir takım sorulara verdiği doğru yanıtları ve gösterdiği performansı, gerçekten anladığının ya da anladığına dair gerekçelerinin güvenilir bir göstergesi olamayacağından araştırmada açık uçlu problemlerin gerekliliği ön görülmektedir. Öğrencilerin sadece anladığını göstermekle kalmayıp, aynı zamanda akıl yürütmelerine yardımcı olması açısından bu tarz soruları kullanmanın yararlı olabileceği düşünülmektedir.

Cebirsel akıl yürütme ile ilgili becerileri ve öğrencilerin bu becerileri ne tür stratejiler kullanarak sergilediğini açık uçlu problemler aracılığıyla ortaya koymak literatüre katkı sağlayacak olsa da öğrencilerin cebirdeki akıl yürütme süreçlerinde uyguladıkları stratejilere ilişkin doğru ve yerinde çıkarımlarda bulunabilmek ve yapılacak incelemelerde tarafsızlık ilkesini daha iyi sağlayabilmek için kavramsal bir çerçevenin varlığına ihtiyaç vardır.

Akıl yürütmeyi ve özel bir biçim olarak cebirsel akıl yürütmeyi anlamlandırmayı, incelemeyi ya da tanımlamayı amaçlayan araştırmalar incelendiğinde (Kapot, 1999; Driscoll, 1999; Kaf, 2007; Kasmer, 2008; Bike Kalkan, 2014), “Stratejik Cebirsel Akıl Yürütme (Strategic Algebraic Reasoning- SAR)” çerçevesinin birçok çalışmada yer alan kavram ve becerileri genel anlamda içerdiği görülmüştür. Cebirsel akıl yürütme sürecini gözlemlenebilir şekilde incelemeye imkân sağlaması ve öğrencilerin akıl yürütme süreçlerinde kullandıkları stratejilere odaklanması gibi yönleriyle, SAR çerçevesinin hem kavramsal bir çerçeve hem de bir araç olarak bu araştırma için uygun olduğuna karar verilmiştir. Bu kararın dayandığı diğer nedenler, akıl yürütme sürecinin nasıl gerçekleştiğini açıklamaya yönelik farklı bakış açıları ve SAR çerçevesi ile ilgili kapsamlı bilgiler tezin ilgili bölümlerinde yer almaktadır.

Ortaya çıkışı yukarıda kısaca özetlenen bu araştırmada 8. sınıf öğrencilerinin cebirde stratejik akıl yürütme süreçleri incelenmektedir. Bu süreçlerin incelenmesi farklı başarı

seviyesindeki öğrenciler üzerinde gerçekleştirilerek öğrencilerin uyguladıkları stratejilerin neler olduğu ve hangi yetkinlikleri gösterdikleri araştırılmaktadır. Ayrıca öğrencilerin son dönemlerde Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) sınav sistemlerinde oldukça önem verilen gerçek yaşam problemlerine nasıl yaklaştıkları incelenmekte ve öğrenciler tarafından güçlük çekilen durumlara dikkat çekmek amaçlanmaktadır.

Beş bölüm halinde sunulan tezin birinci bölümünde araştırmanın başlaması ve konunun belirlenmesinden itibaren son şeklini almasına kadar geçen akademik sürecin nasıl gerçekleştiğine değinilmektedir. Bu bölümün başlıkları; problem durumu, amaç ve önem, problem cümlesi / alt problem cümleleri, sınırlılıklar, varsayımlar, tanımlar ve kısaltmalar şeklindedir.

İkinci bölümde, araştırmanın alt yapısını hazırlayan ilgili yayınlara ve araştırmalara yer verilmektedir. Araştırmanın öğrenme alanı olan cebir ve cebir öğretimine ilişkin yapılan çalışmalara değinilmektedir. Matematiksel akıl yürütmeye ilişkin araştırmaların yanı sıra cebirsel akıl yürütme ile ilgili yapılan araştırmalara yer verilmektedir. Cebirsel akıl yürütme ile ilgili farklı çalışmalarda yer alan tanım ve yaklaşımlara değinilmektedir. Ayrıca açık uçlu problemlerin hazırlanması sırasında yararlanılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmektedir. Araştırmada kavramsal çerçeve ve bir araç olarak kullanılan SAR çerçevesi açıklanmakta ve bu çerçevenin neden seçildiği ile ilgili gerekçeler belirtilmektedir.

Üçüncü bölüm araştırmanın yöntem kısmını içermektedir. Araştırma modeli / deseni, katılımcılar, veri toplama araçları ve geliştirme süreci, veri toplama araçlarının uygulama süreci, verilerin analizi, araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği, araştırmacının rolü bu bölümde belirtilmektedir.

Dördüncü bölüm bulgular ve yorumlardan oluşmaktadır. Bu bölümde farklı başarı seviyesindeki sekizinci sınıf öğrencilerinin açık uçlu problemlere verdiği yanıtlardan elde edilen bulgular hem SAR yetkinliklerine göre ele alınmakta hem de toplu bir şekilde sunulmaktadır. Örnek olay çalışması bulgularında öğrencilerin klinik mülakat sırasında verdikleri yanıtlar ile birlikte açık uçlu problemlere verdikleri yanıtlar SAR çerçevesine göre incelenmekte ve yorumlara yer verilmektedir.

Beşinci bölümde tartışma, sonuç ve önerilere yer verilmektedir. Dördüncü bölümde yer alan bulgulardan elde edilen çıkarımlar toplu olarak değerlendirilmekte ve literatürde ulaşılan bulgularla karşılaştırılmaktadır. Bu araştırmadan elde edilen izlenimlerden hareketle yapılabilecek araştırma önerileri sunulmaktadır.

1.1. Problem Durumu

Geçmişten günümüze doğayı, fiziksel olguları, mühendislik alanlarını, sanatsal betimlemeleri, birçok pozitif ve modern bilimi anlayabilme, doğru algılayıp aktarabilme süreçlerinde kullanılan yöntemler matematiksel dili etkin bir şekilde benimsemektedir. Özellikle içinde bulunduğumuz çağın daha çok bilişsel ihtiyaçlara cevap aradığını göz önünde bulundurursak matematiksel terminolojiden doğru yönde yararlanarak araştıran, sorgulayan ve öğrenmeye meraklı bireylerin rolü ortaya çıkmaktadır. Bireylere bu rolleri kazandırabilmek için matematiği etkili bir şekilde kullanabilen nesillerin yetiştirilmesinin önemi ile birlikte eğitim sistemleri de yeniden şekillenmiştir.

Eğitim sistemlerindeki değişiklikleri somut olarak en iyi yansıtan öğretim programları da bu yönden incelendiğinde, öğrencilerin matematiksel becerilerini etkin bir şekilde kullanabilmesine her geçen yıl daha çok vurgu yapıldığı görülmektedir (MEB, 2009; MEB, 2013; MEB, 2018). Bununla birlikte etkin matematik kullanımı; öğrencinin matematik okuryazarlığı becerisi, kendi öğrenme süreçlerini yönetebilme becerisi, kavramları farklı şekillerde temsil edebilme becerisi, matematiksel kavramları anlayabilme ve ilişkilendirebilme becerisi ve bunun gibi birçok beceri ile ilgilidir. Ayrıca matematik, bu çeşitli işlem becerilerinin yanı sıra üst düzey temsil biçimlerini barındıran, gerekçeleriyle düşünmeyi ve mantıklı çıkarımlarda bulunmayı içeren bir disiplindir (Ball ve Bass, 2003; Ersözlü ve Çoban, 2012; Schoenfeld, 2014; Steen, 1999; Umay ve Kaf, 2005). Bu bağlamda düşünmeyi ön plana çıkardığımızda matematiği gerçek anlamda yorumlayabilme, içselleştirebilme ve fikirleri iyi organize edebilme yeteneği odak noktası olmaktadır (Öz ve Işık, 2017). Bu durumu matematik eğitiminde ele alacak olursak, öğrencilerin genellikle zorlandıkları, kaygı duydukları ve çekimser yaklaştıkları bir ders olarak matematiği anlamlandırma sürecinde akıl yürütme kavramı ön plana çıkmaktadır.

Bilginin derinlemesine bir anlayış ile bağlanması oldukça önemlidir (Steen, 1999). Bu noktada öğrencilerin anlayışlarını ve bilişsel olarak kavramları anlamlandırma süreçlerini açığa çıkarmak öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini inceleyebilmek adına önemli olabilir. Dolayısıyla öğretmenlerin öncelikli rolü talimat vermek yerine öğrencilere, problem durumuyla karşı karşıya bırakacak ve akıl yürütmelerini ortaya çıkarmalarını sağlayacak sorular sormak olmalıdır (Steen, 1999). Bu şekilde açıklama ve ortaya çıkarma gibi faaliyetler yalnızca anlayışı göstermekle kalmayacağı gibi aynı zamanda onu geliştirmeye de yardımcı olabilir. Üst düzey düşünmeyi sağlayan açık uçlu problemler sayesinde matematiğin daha etkili öğrenileceği, matematiksel akıl yürütmenin gelişeceği ve öğrencilerin matematiğe ilişkin tutumlarının iyileşeceği düşünülmektedir (Erdem, 2015). Öğrencilerin gerçek yaşamla ilişkili

açık uçlu problemler ile karşılaştırılmaları, akıl yürütme süreçlerini incelemeye fırsat vermektedir (Steen, 1999).

Çeşitli problem durumlarında akıl yürütme yoluyla sonuca ulaşabilen öğrencilerin, bilişsel süreçlerinde semboller kullanması ve bunlarla genellemelere varması ya da bu sembollerini açıklaması gibi durumlar akıl yürütmenin en iyi yansımaları olabilir. Sembollerle anladıklarını ifade edip cebirsel durumlardaki ilişkileri kurabilmeleri, farklı temsiller yoluyla fikirlerini açıklayabilmeleri ve hatta bu temsiller arasında geçiş yapabilmeleri gibi süreçleri öğrencilerin akıl yürüttüklerine dair kanıtlar sunabileceğinden cebir konusunun akıl yürütmede katkısı olabileceği düşünülmektedir.

Matematiksel akıl yürütmenin özel bir biçimi olan cebirsel akıl yürütmenin kazanılmasının, günümüzün ihtiyaçlarına uygun becerilerin öğrenciler üzerinde geliştirilmesi hususunda önemi olduğu aşikârdır. NCTM (2000), cebirsel akıl yürütmeye ilişkin becerileri şu şekilde belirtmiştir:

1. Nicel bağların temsili ve bu bağların anlaşılması için matematiksel modeller kullanma,
2. Cebirsel semboller ile matematiksel yapıları ve durumları farklı temsillerle ifade edebilme ve analiz edebilme,
3. Fonksiyonları ve doğrusal ilişkileri anlamlandırma
4. Gerçek yaşamla ilişkili durumlarda karşılaşılan değişimleri ve sonuçları analiz etme

Bu becerilere bakıldığında cebirsel akıl yürütme süreçlerinde öğrencileri, cebirsel yollarla aslında gelecekteki akademik hayata hazırlamanın yanında gerçek yaşama da hazırlamanın amaçlandığı söylenebilir. Bu durum matematik öğretim programlarında yer alan kazanımlarla da örtüşmektedir (MEB, 2018). Tüm bu becerilerin yanı sıra öğrencilerin cebirsel akıl yürütmelerinde ne gibi yollara hangi nedenle başvurdıkları ile ilgili süreçler de gözden kaçırılmamalıdır. Cebirsel akıl yürütmeleri sırasında kullanabilecekleri herhangi bir strateji öğrencilerin düşünme biçimleri, tercihleri ve gerekçeleri hakkında fikir vermesi açısından önemlidir. Öğrencilerin bir problem durumuna karşı ürettikleri çözüm sürecinde kullandıkları stratejiler ve bu stratejiler arasında yaptıkları tercihler aslında bizi tam olarak akıl yürütmelerine dair bilgilendiriyor olabilir. Çünkü stratejik yeterlilik, öğrencilerin bir sorunu çözmek için geçirdikleri süreci ifade eder (National Research Council [NRC], 2001). Güçlü akıl yürütmeye sahip öğrenciler, kendilerine anlamlı gelen bir stratejiyi kullanarak problemi çözebilir (Lepak, Wernet ve Ayieko, 2018).

Bu durumda akıl yürütme sürecinde öğrencilerin kullandıkları stratejilerin üzerinde durulması, öğrencilerin akıl yürütmelerinin ortaya çıkarılmasını sağlamak kadar bu akıl yürütmelerin iyi gözlemlenmesi, tespit edilebilmesi ve akıl yürütme stratejileri hakkında fikir sahibi olunması matematik eğitiminde yapılan araştırmalara katkı sağlayabilir.

1.2. Amaç ve Önem

Matematik eğitiminde öğrenimin daha etkili bir şekilde nasıl gerçekleşebileceği ile ilgili yapılan çalışmalar, eğitimciler tarafından farklı boyutlar ele alınarak araştırılmaktadır. Akıl yürütme, etkili matematik öğrenimi için kilit bir kavram olarak birçok matematik eğitimi araştırmacısı tarafından ele alınan boyutlardan biridir. Bu çalışmaların okul eğitimine yansımalarıyla birlikte öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarını ve bakış açılarını genişletmeleri sağlanabilir. Araştırmacıların akıl yürütme kavramına ilişkin elde ettiği sonuçlar ile matematik öğretimi arasında paralel bir işbirliği çalışması olabilirse öğretmenler üzerinde olumlu etkiler yaratması muhtemeldir. Öğretmenlerin matematiksel bilginin derinlemesine bir anlayış ile öğrenciye ne kadar aktarıldığını görebilmesi için öğrencilerin akıl yürütme süreçlerine başvurmaları gerekir.

Öğrencilerin matematiksel becerileri ile yeterlilikleri arasında bir denge kurulabilmesi ve matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesi, matematik eğitiminin amaçlarındandır (Yeşildere, 2006). Bu amaçlar doğrultusunda matematik eğitimi ilişkileri ifade etme, bu ilişkileri modelleme ve gerekçeler sunma gibi belirli içerik standartlarının ötesine geçen uygulamalara odaklanmalıdır (Lepak ve diğerleri, 2018). Öğrencilerin matematiksel becerileri ile diğer bileşenler arasındaki etkileşimlerin anlaşılması için bu standartlardan farklı olarak çözüm stratejilerine odaklanarak akıl yürütmelerine ilişkin daha kapsamlı ve karmaşık bakış açılarını sahip olunmalıdır. Bununla birlikte Türkiye’de öğrencilerin akıl yürütmelerini inceleyen çalışmalar bulunmasına rağmen (Erdem, 2015; Gürbüz ve Erdem, 2014; Öz, 2017; Umay ve Kaf, 2005; Yeşildere ve Türnüklü, 2007), stratejik akıl yürütme çerçevesinde cebirsel modellemeler ve problem durumları ile bunların çözüm aşamasındaki sürecin nasıl işlediği ile ilgili derinlemesine bir araştırmaya rastlanamamıştır.

Bu araştırmanın amacı, sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirde stratejik akıl yürütme süreçlerinin incelenmesidir. Bu bağlamda öğrencilerin üst düzey düşünmeyi sağlayan problem durumlarıyla başa çıkabilme yöntemleri ve akıl yürütme stratejilerine dikkat çekmek hedeflenmiştir. Farklı başarı seviyesindeki öğrencilerin cebirde akıl yürütme stratejileri karşılaştırılmaktadır. Bu çalışmayla öğrencilerin cebirdeki stratejik akıl yürütme süreçlerinin incelenmesiyle birlikte güçlük çekilen noktaların üzerinde durulması ve gerekli çözüm önerilerinin getirilmesi de amaçlanmaktadır.

Cebirde oluşturulabilecek farklı problem durumları ve modelleri ile öğrencilerin bir durumu yorumlamaları, durumun bir veya birden fazla modelini oluşturmaları, öğrendikleri ifadeleri bu çözüm ya da modellerde nasıl kullanabileceklerini belirlemeleri ve genel veya özel sonuçlar oluşturmaları gerekir (Lepak ve diğerleri, 2018). Öğrencilerin son yıllarda gündemde olan akıl yürütme becerisi isteyen problem durumlarında zorlandıkları göz önünde bulundurulursa, konunun araştırılmasının önemi ortaya çıkmaktadır. Bu araştırmayı özgün kılan bir tarafı olan cebirsel akıl yürütmenin stratejik boyutunun ele alınması araştırmanın alana sağlayacağı önemli katkılardan biri olarak görülmektedir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerde stratejik akıl yürütme süreçleri nasıldır?

Araştırmanın alt problemleri aşağıda verilmiştir:

1. Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlamlandırma süreçleri nasıldır?
2. Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri belirleme süreçleri nasıldır?
3. Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki miktarlar arasındaki ilişkilerin cebirsel temsillerini kullanma süreçleri nasıldır?
4. Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki hesaplamaları ve prosedürleri yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme süreçleri nasıldır?
5. Öğrencilerin problemlerdeki cebirsel düşünceleri hakkında bilgi veren ikna edici açıklamalar yapma süreçleri nasıldır?

1.4. Sınırlılıklar

1. 2020-2021 öğretim yılı bahar döneminde Ağrı'da bulunan bir devlet ortaokulunda 8. sınıfa devam eden araştırmanın katılımcıları, araştırmadan yaklaşık iki ay önce ortaokul matematiğinde yer alan tüm cebir konularını öğretim programı kazanımları doğrultusunda öğrendiği düşünülen 6 öğrenci ile sınırlıdır.

2. Klinik mülakat çalışmasına ait bulgular, yalnızca araştırmanın gerçekleştirildiği öğrencilerin açıklamalarından elde edilen veriler ile sınırlıdır.

3. Pandemi sürecinin eğitim-öğretim devamlılığını etkilemesi sebebiyle çalışmanın uygulama süreci, öğrencilerin okulda bulunabildiği süre ile sınırlıdır.

4. Pandemi sürecinin eğitim-öğretim devamlılığını etkilemesi sebebiyle araştırmanın katılımcıları, uzaktan eğitim sürecinde derslere katılabilen öğrenciler ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

1. Araştırmada kullanılan açık uçlu problemlere ve klinik mülakatta sorulan sorulara ilişkin alınan uzman görüşlerinin yerinde ve yeterli olduğu varsayılmaktadır.
2. Araştırmada kullanılan problemlerin, öğrencilerin stratejik akıl yürütmelerine ilişkin süreçlerini yerinde ve yeterli düzeyde yansıttığı varsayılmaktadır.
3. Araştırmada kullanılan tüm veri toplama araçlarının, veri toplama ve yorumlama aşamaları için yeterli olduğu kabul edilmektedir.

1.6. Tanımlar

Matematiksel akıl yürütme: Matematiksel akıl yürütme, yeni ortaya çıkan bir takım matematiksel fikirler ile birlikte keşfeden, neden-nasıl sorularına yanıt arayan, problemi yeniden yapılandıran, açıklamalar yapabilen ve neden sorusuna karşılık gelen yanıtları onaylayabilen öğrenci becerilerini içerir (Kasmer, 2008).

Cebirsel Akıl yürütme: Bilgiyi kelime, tablo, grafik, diyagram ve denklem gibi çeşitli biçimlerde sunma, gereksiz bilgileri ayırt edip gerekli olan bilgilerden yola çıkarak varsayımlar ortaya koyma ve bu varsayımları test etme, var olan fonksiyonel ilişkileri belirleme, ortaya çıkan sonuçları yorumlama, açıklama ve analiz etmedir (Herbert ve Brown, 1997).

Yetkinlik: Bir alanda yetkin olma durumu ya da sorumluluk ve görevleri yerine getirebilme olarak tanımlanmaktadır. Araştırmanın çerçevesi kapsamında yetkinlik kavramı öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçlerinde kendilerinde bulunması gereken beceri ve yeteneklerin bir bütünü olarak düşünülmelidir.

Bağlam: Yapıları ve insan davranışlarını ve bu davranışların anlamlarını içeren birbiri ile ilişkili faktörlerin bir araya gelmesidir (Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus, 2001). Kısaca olay örgüsü olarak da tanımlanmaktadır.

Sembol duygusu: Öğrenciler tarafından sembollerin esnek kullanımını ve uygun olduğunda bunları kullanma alışkanlıklarını ifade etmek için kullanılan bir terimdir.

Özyinelemeli stratejiler: Bir çözüm stratejisinin doğrudan ya da dolaylı olarak sürekli kendini çağırması ve tekrar etmesi yoluyla sonuca ulaşılmasıdır. Kendini tekrar eden işlemler özyinelemeli işlemlerdir.

1.7. Kısaltmalar

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NAEP: (National Assessment of Educational Progress)
Ulusal Eğitimsel Gelişimi Değerlendirme Birimi

NCTM: (National Council of Teachers of Mathematics)
Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi

NGA Center & CCSSO:

(National Governors Association for Best Practices Center and Council of Chief State School Officers)

Ulusal Valiler Derneği En İyi Uygulamalar Merkezi ve Devlet Okul Yöneticileri Konseyi

NRC: (National Research Council)
Ulusal Araştırma Konseyi

OECD: (The Organisation for Economic Co-operation & Development)
İktisadi İşbirliği ve Gelişme Teşkilatı

PISA: (Programme for International Student Assessment)
Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı

SAR: (Strategic Algebra Reasoning)
Cebirde Stratejik Akıl Yürütme

TIMSS: (Thirds/Trends in International Mathematics and Science Study)
Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Çalışması

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde cebir ve cebir öğretimi, matematiksel düşünme ve matematiksel akıl yürütme, cebirsel akıl yürütme gibi başlıklara ve araştırmanın kavramsal çerçevesi ile ilgili yayın ve araştırmalara yer verilmektedir. Akıl yürütme ve üst düzey düşünmeyi sağlayan problemlerin ilişkisi ele alınmakta, öğrencilerin akıl yürütme süreçlerinin incelenmesinde yararlanılabilecek bazı akıl yürütme yaklaşımlarına değinilmektedir. Bu yaklaşımlar birbiriyle karşılaştırılmakta, benzer, ortak ve farklı yönler ortaya konulmaktadır. Araştırmanın kavramsal çerçevesi ve inceleme aracı olarak kullanılan SAR çerçevesine ait tanımlara ve açıklamalara yer verilmektedir. Ayrıca bu çerçevenin araştırma için uygun görülme nedenleri açıklanmaktadır.

2.1. Cebir ve Cebir Öğretimi

Genel olarak cebir konusu sayı ve sembollerin kullanılmasıyla tanımlanan ilişkileri genelleştirip denklem kurmayı sağlayan bir matematik dalı olarak tanımlanmaktadır (Akkaya ve Durmuş, 2006). Bunun yanında cebiri bir dil olarak tanımlayan ve cebirsel kavramların iyi bir şekilde öğrenilmesiyle ileri matematiğe geçişin olabileceğini belirten araştırmalar da vardır (Usiskin, 1997; Lacampagne, 1995). Sutherland ve Rojano (1993) benzer şekilde cebiri, matematiği ve diğer disiplinleri açıklamada kullanılan bir dil olarak görmektedir. Kieran (1992) ise cebirde harflerin kullanılması yoluyla niceliklerin ve sayıların temsil edilmesinin yanında bu sembollerle hesaplamalar yapmanın da yer aldığını belirtmektedir.

Cebir, matematik yapan herkesin gereksinim duyduğu bir kavramdır (Greenes ve Findell, 1999). Aynı zamanda günlük yaşamın her anında hissedilen bir matematik alanıdır. Bu durum öğrencilerin okul yaşantısında cebir öğrenmelerinin hassasiyetini gündeme getirmektedir. Cebir, nicel ilişkileri temsil etmede kullanılan kavramların ve tekniklerin bir kümesi olarak ve aynı zamanda örüntülerin formüle edilmesi ve genellemeler yapılması için matematiksel bir düşünme tarzı şeklinde öğrenilir (Öz, 2017). Yetişkinlerin cebir alanı hakkında ortaokul ve ortaöğretim kademeleri için daha uygun olduğunu düşünmelerine rağmen daha küçük yaşlardaki öğrenciler de sayı kümeleri arasındaki ilişkilerden ya da örüntülerden yararlanma gibi çalışmalarla cebir ile ilgili fikirlerinin gelişimi için teşvik edilebilir (NCTM, 2000). Aritmetik temeline dayanan cebir aritmetik ile yoğun ve karşılıklı ilişkiler içindedir (Akkan, Baki ve Çakıroğlu, 2011). Cebir ile tanışmada öğrenciler ilk olarak aritmetik içerikli ilişkilerin yoğun olarak var olduğu örüntüler ile başlamaktadır.

Ülkemizde de cebir öğretimi, ilkokulda örüntü ve aritmetik içerikli yaklaşım ile öğrencilere hissettirilir. Ortaokul matematiğinde ise sayı ve şekil örüntülerinin kurallarını bulma ya da kuralı verilen örüntüyü yazabilme becerileri ile başlar, sonraki sınıf seviyelerinde denklem ve eşitsizlik konularında temel cebir öğretimi devam eder. Ortaöğretim sürecinde fonksiyonları da içine alan cebir geniş bir yelpazeye sahiptir. Ortaokul matematiğinde öğretim programlarının içeriğinde öğrenme alanı olarak yer alan cebir konusunun öğrenimi ve öğretimi boyutunda çeşitli problemler yaşanmaktadır. Öğrencilerin neredeyse her sınıf seviyesinde cebir konusuyla karşılaşmalarına rağmen cebir problemlerini anlamada ve bu problemlere çözüm bulmada zorlandıkları görülmektedir (Dede, 2004). Bu durumda cebir öğretiminin gözden geçirilmesinin ve öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorluklara değinilmesinin ne kadar önemli olduğu düşüncesi ön plana çıkmaktadır.

Dede ve Argün (2003) cebirsel kavramları ve cebir içerikli konuları anlamada öğrencilerin neden zorlandıkları ile ilgili bir araştırma yapmışlardır. Cebir konularının öğrenciler tarafından anlaşılmasında zorlayıcı olan faktörleri literatürden yararlanarak irdeledikleri çalışmalarında bu faktörleri; cebirin ana yapısı, öğrencilerin bilişsel hazırbulunuşluk düzeyleri ve cebir öğretiminde yer alan eksiklikler olarak belirlemişlerdir. Çalışmanın sonucunda da öğretmenlerin bu faktörleri göz önünde bulundurmalarının ve yeni öğretim yaklaşımlarından faydalanmalarının gerekliliğine değinmişlerdir.

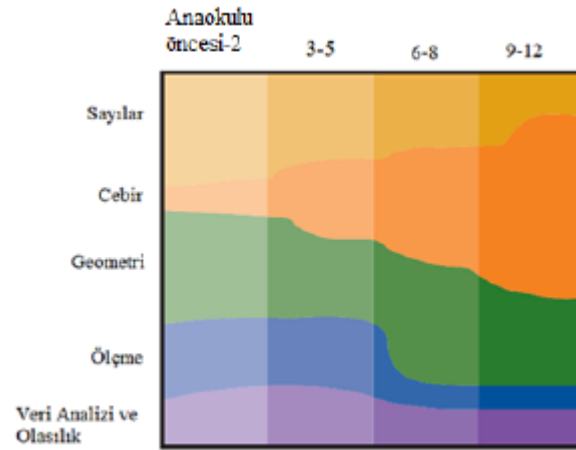
Son yıllarda yapılan çalışmalar ile cebir öğretiminde yaşanan güçlükler oldukça sık yer verilmektedir. Tekay (2012) çalışmasında bu güçlüklerin giderilmesi için cebir bilgilerinin ve becerilerinin öğrencilere kazandırılmasının gerekliliğine vurgu yapmaktadır. Her ne kadar teoride bilginin inşa edilme süreçlerinde öğrencinin aktif rol alması gerektiği bilinse de öğretim programlarına yansımaya rağmen uygulama aşamasında hala eksikliklerin olduğu söylenebilir. Aktif öğretim ortamları oluşturulmadan sunuş yoluyla verilen bilgilerin bir sonucu olarak cebir öğrenciler tarafından günlük yaşamda var olmayan algılaması zor bir ders olarak görülmektedir (Zengin, 2015). Bununla birlikte öğrencilerin ön bilgilerinde aritmetik ile ilgili yaşantılarından kalan cebire temel oluşturabilecek bir takım kavramsal ve işlemsel yetersizlikler de cebirin anlaşılmasında güçlük yaratmaktadır. Rutin işlemlerden oluşan, sembol ve işlemlerin anlamsal olarak kopuk verildiği, kural ve formül odaklı bir cebir öğretiminin aksine bir bütün olarak cebirsel süreçlerin adım adım ilerleyerek verildiği, günlük yaşamla ilişkili durumların çoklu temsil ve modeller ile çözümlendiği bir öğretimde cebirin öğrenciler tarafından anlamlar eşliğinde kazanılması gerçekleşecektir.

Cebir öğretiminde temel konulardan biri değişken kavramıdır. Değişken kavramı, aritmetikten cebire geçişte ve ileri seviyedeki matematik kavramlarının öğrenilmesinde cebir

öğretiminin yapı taşlarından biri niteliğindedir (Schoenfeld ve Arcavi, 1988). Öğrencilerin bu kavramın anlaşılmasında güçlük çektiğini belirten birçok araştırma mevcuttur (Rosnick, 1981; MacGregor ve Stacey, 1997; English ve Warren, 1998; Bağdat ve Saban, 2014; Tekay ve Doğan, 2015; Yıldızhan ve Şengül, 2017).

Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens (2005) da benzer şekilde iki temel cebirsel kavramın (değişken ve eşitlik) ortaokul öğrencileri tarafından anlaşılmasına ve bu iki kavramın kullanımını gerektiren problemlerde öğrencilerin gösterdikleri anlayışlarına odaklanmışlardır. Çalışmalarında cebirsel akıl yürütmeye odaklanarak ortaokul matematiğinde cebir reformuna yönelmelerinin nedenini, birçok eğitimciyi göz önünde bulundurarak cebirsel akıl yürütmenin K-12 sınıf seviyelerine eklenmesinin gerekliliği düşüncesine bağlamaktadırlar. Çalışmalarına altı, yedi ve sekizinci sınıflardan oluşan 373 ortaokul öğrencisi katılmış ve verilerini bu öğrencilerin değişken ve eşitlik kavramlarını anlamaya ilişkin yazılı değerlendirmelerden elde etmişlerdir. Araştırmanın sonunda öğrencilerin cebir başarılarının eşittir işaretinin anlamının üzerinde durmalarıyla ve denklik anlayışlarını geliştirmeleriyle sağlanacağını vurgulamışlardır.

Temel anlamda cebir ile ilgili kavramları anlamak ve cebir içerikli problemleri çözmek için yeterli becerileri kazanmak, belli bir seviyede ön bilgilerin varlığını ve soyut düşünce tarzını gerektirir (Susac, Bubic, Vrbanc ve Planinic, 2014). Ortaokul matematik öğretim programında beş öğrenme alanı bulunmaktadır. Bunlar; sayılar ve işlemler, cebir, geometri ve ölçme, veri işleme ve olasılıktır. Bazı öğrenme alanlarına tüm sınıf seviyelerinde yer verilirken, her sınıf seviyesinde yer almayan öğrenme alanları da vardır. Cebir, 5. sınıf dışında tüm sınıf kazanımlarında yer almaktadır (MEB, 2018). Temel cebir öğretimini tartışırken, cebirin okul matematiğinde geniş bir bölümü temsil eden bir alan olduğunu vurgulamak önemlidir. Cebir öğrenme alanının, temel doğrusal denklemlerin çözümünün yanı sıra daha çok soyut kavramları içeren konuları kapsadığını belirtmek gereklidir. NCTM (2010), Şekil 1’de öğrenme alanlarının kapsamını yansıtan bir diyagram ile bu durumu vurgulamıştır.



Şekil 1. Öğrenme alanlarının sınıf seviyelerine göre vurgulanması.

Şekil 1’de cebir öğrenme alanına ait kısmın sınıf seviyelerine göre ilerledikçe kapsamının arttığı görülmektedir. Bu durum okul matematiğinde cebir öğretiminin önemini vurgulamaktadır. Cebir öğrenme alanının amaçları, sembolik ve temsil içerikli gösterimlerin anlamlarını fark etme, bu gösterimlerden yararlanarak ilişkileri bulma ve sonuçlara ulaşma ya da sonuçlardan ve ilişkilerden yola çıkarak sembol ve grafikler oluşturma şeklinde özetlenebilir (Baki, 2008). Cebir, soyut düşüncelere geçişte ve matematiksel akıl yürütmenin gelişiminde önemli bir rol oynar (Susac ve diğerleri, 2014; Witzel, Mercer ve Miller, 2003). Günlük yaşamda sınırlı kullanımı olduğu düşünülemeyecek olan cebirsel düşünme matematiğe tümüyle hâkim olan ve gerçek yaşamda da yararlı olan temel bir unsurdur (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012). Cebirin, akıl yürütmenin ve cebirsel düşünmenin temeli olduğu düşünülürse sadece bir ders konusu olarak ele alınmasından ziyade günlük yaşam durumlarında karşılaşılan güçlüklerle çözüm bulmada bir araç olduğu ele alınmalıdır (Kaya ve Keşan, 2014). Bu noktada cebir öğretiminde cebire ilişkin farklı öğretim yaklaşımlarına ilişkin araştırmaların önemi ortaya çıkmaktadır.

Kanbir (2016) cebir öğretme yaklaşımları ile ilgili araştırmasında bu yaklaşımların cebir öğretimine etkilerini incelemeyi hedeflemiştir. Yedinci sınıf öğrencilerinden oluşan üç farklı gruba öğretme-müdahale çalışması yapmış ve müdahale kaynaklı elde edilen verilerin analizi yorumlanmış ve tartışılmıştır. Her gruba yalnızca bir yaklaşım kullanılarak üç cebire giriş yaklaşımı (modelleme yaklaşımı, görsel-sayı yaklaşımı ve yapısal yaklaşım) uygulanmıştır. Araştırmada öğretme öncesi ve sonrası cebir hazırlık testi, modelleme testi, görsel-sayı testi ve yapı testi ile birlikte veri toplama aracı olarak görüşme formu kullanılmıştır. Araştırmanın sonuçları modelleme grubundaki öğrencilerin diğer gruplardaki öğrencilere göre anlamlı bir fark oluşturduğunu göstermiştir.

Bu araştırmalar incelendiğinde, öğrencilerin cebirde yanlış kurallar oluşturma, aritmetik ya da işlem odaklı hatalar yapmanın yanında cebir bileşenleri hakkında çok fazla fikir sahibi olamadıkları ve cebir ile ilgili kavramları tam olarak anlamlandıramadıkları söylenebilir. Ayrıca öğretmenlerin cebir öğretiminde kullandıkları yaklaşımların öğrenci beklentilerine ve hazırbulunuşluk seviyelerine uygun olmasının gerekliliğine vurgu yapıldığı görölmektedir. Cebir öğreniminde en aktif rol oynaması beklenenin öğrenciler olduğu düşünölrse, öğrencilerin düşünce süreçlerinin önemini vurgulayan araştırmaların sayıca fazla olması şaşırtıcı değıldir. Bu durumda cebir öğretiminde en önemli faktörlerden biri olan akıl yürütme kavramı, öğrencilerin cebirdeki düşünme süreçleri ele alındığında odak noktası haline gelmektedir.

2.2. Matematiksel Düşünme ve Matematiksel Akıl Yürütme

Öğrenci merkezli yaklaşımları temel alan öğretim programlarında öğrenmenin gerçekeştiğı sürece odaklanıldığı görölmekte ve öğrenme süreçlerinde araştırma yapma, eleştirel düşünme, yaratıcı düşünme, yorumlama, sorgulama, problem çözme becerileri kazanma, değerlendirme yapma, akıl yürütme, çıkarımlarda bulunma gibi yeteneklerin öğrencilere kazandırılmasının gerekliliğı üzerinde durulmaktadır (NCTM, 2000). Bu doğrultuda öğrencilerin kendi öğrenmelerini geliştirmeleri, geğmiş bilgilerini düzenleyebilmeleri ve yeni öğrendikleri bilgiler ile ilişki kurabilmeleri hedeflenmektedir (MEB, 2005). Güncel programlarda da matematik eğitimi temel hedefleri arasında matematiğin sadece öğrenilmesinden ziyade matematiği günlük hayatta kullanabilen öğrencilerin yetiştirilmesinin önemi vurgulanmaktadır (MEB, 2018). Bu gibi hedefler ile eski bilgilerden yola çıkarak yeni bilgiyi keşfetmeyi, keşfettiğı bilgiyi anlamlı kılarak günlük yaşamla ilişkilendirebilmeyi ve uygulayabilmeyi başarabilen öğrencilerin öğrenme sürecinde aktif bir şekilde yer alarak üst düzey bilişsel becerilerinin gelişimine katkı sağlanacağı düşünölmektedir. Bu bilişsel becerilerin kazandırılması ile matematiksel düşünme birbirine paralel gelişen durumlar olarak görölebilir.

Her ne kadar matematiksel düşünme kavramı, matematiksel durumlar karşısında etkili bir işlem yapabilme ve kuralları uygulayabilme gibi düşünölse de problem çözümlelerinde açık ya da örtük şekilde bilişsel süreçlerin gerçekeşmesini de içerir (Henderson ve diğerleri, 2002). Bir problem çözümü tahmin etme, hipotez üretme, özelleştirme, genelleme, hipotezin doğruluğunu kontrol etme gibi üst düzey düşünmeyi içeren bilişsel süreçleri gerektiriyorsa, matematiksel düşünme de gerçekeşecektir (Yeşildere, 2006). Matematiğin soyut bir dile sahip olması matematiği öğrenme ve öğretmede zorlu süreçlerin varlığını destekleyen yönlerdendir. Bu süreçlerde başarıyı sağlayabilmek adına etkili matematiksel düşünme süreçlerine ihtiyaç

vardır. Matematiksel düşünme; öğrencilerin anlama çabalarını, akıl yürütmelerini, değerlendirme yapmalarını, eleştirel yaklaşımlarını, yaratıcı düşüncelerini ve problem çözmelerini içeren genel bir süreçtir (Kaya, 2015). Dolayısıyla matematiksel düşünme ile ilgili sadece sayısal işlemlerin ve matematiksel soyut kavramların var olduğu durumlarda değil, günlük yaşamda da kullanılabilecek bir düşünme biçimi olduğu söylenebilir.

Matematik kazanımlarının diğer disiplinler ve günlük yaşam ile ilişkilendirilmesi sonucu soyut düşünceden somut düşünceye doğru bir değişim gerçekleşmiştir (NCTM, 2000). Matematiksel düşünme kavramının gelişimiyle de eğitim sistemlerindeki gelişime dayanak oluşturulmaktadır (Mubark, 2005). Bu değişim ve gelişimler ile yeni matematik eğitimi sistemlerine temel teşkil edildiği söylenebilir. Çünkü matematiksel düşünme kavramının temelindeki amaçlar, sorgulama becerisine sahip bireylerin yetiştirilmesi ve bu bireylere fırsatlar verilerek cesaretlendirilmesidir. Çözüm adımlarını taklit ederek ezberleyerek işlem yapan öğrenciler yerine kendi düşüncelerini ortaya koyabilen farklı stratejiler kullanabilen öğrenci profili oluşturmak ön plandadır. Sadece çözüme ulaşmayı hedefleyen ezber yaparak ilerleyen öğrenciler için işlemlerin geliştiği süreçler önemli değildir. Bu nedenle sonuç odaklı hedefler matematiksel düşünme süreçlerini geri iten ve desteklemeyen hedeflerdir. Bir öğrencinin özellikle problem çözümlerinde sonuca odaklanması yani akıl yürütme yapmadan işlemlere başlaması, öğrencinin çözüm için plan yapmadığının, farklı durumları analiz edemediğinin ve hatta problemi anlamadığının göstergesi olabilir. Bu noktada matematiksel düşünmenin en önemli bileşenlerinden biri olan matematiksel akıl yürütme süreci, fikirleri ve bunların ilişkileri hakkındaki süreçlere odaklanması gibi yönleriyle ele alınması gereken konu haline gelmektedir (O'Daffer ve Thornqvist, 1993).

Öğretim programlarında akıl yürütme sayıların, niceliklerin, ifadelerin ya da şekillerin arasındaki ilişkileri belirleme ve problemleri çözmeye verilen bilgiyi ilgili temsillerle ilişkilendirerek farklı stratejileri değerlendirerek kanıt niteliğinde geçerli çıkarımlarda bulunma şeklinde tanımlanmaktadır (MEB, 2005; MEB, 2013; MEB, 2018). Akıl yürütme genel anlamda tüm bileşenlerin dikkate alınmasıyla birlikte mantıksal düşünebilme ve bunlardan yola çıkarak sonuca ulaşma olarak ifade edilebilir. Belli bir seviyede akıl yürütme süreçlerini barındıran bir eğitim anlayışı ile yetişen öğrenciler kendi fikirlerini geliştirerek yeni bağlantıları keşfedebilirler. Herhangi bir durum ya da konu üzerine akıl yürütme yapabilen biri, o durumla ilgili iyi düzeyde bilgi sahibidir, ilk kez karşılaştığı farklı durumları inceler ve keşfeder, varsayımlarda bulunur, düşündüğü her şeyi gerekçelendirir, bulduğu sonuçları savunabilir (Umay, 2003). Düşünme sürecinde etkili kararlar verilmesi, akıl yürütmenin yaşamı kolaylaştırıcı özelliklerinden biri olan önemli bir yetenektir (Erdem, 2011). Matematikte de akıl yürütme yapan birey, sorgulayıcı tavırlar ile ilişkilerin nedenlerini

araştırır, kendi öğrenmelerinin farkında ve planlı bir keşif sürecindedir. Dolayısıyla birey kendisi için kalıcı bir öğrenme ve gelişime açık bir matematik temeli oluşturur. Bu nedenler ışığında matematiksel akıl yürütmenin nasıl gerçekleştiği ve hangi becerilerden oluştuğu hakkında bilgiler verilecektir.

Matematiksel akıl yürütme, yeni ortaya çıkan bir takım matematiksel fikirler ile birlikte keşfeden, neden-nasıl sorularına yanıt arayan, problemi yeniden yapılandıran, açıklamalar yapabilen ve neden sorusuna karşılık gelen yanıtları onaylayabilen öğrenci becerilerini içerir (Kasmer, 2008). Matematiksel akıl yürütmeye,

- Tümevarıma ve tümdengelimine dayalı akıl yürütmeyi anlama ve uygulama
- Akıl yürütme süreçlerini tanıma ve uygulama
- Kendi düşüncelerini gerekçelendirme
- Akıl yürütmenin matematiğin bir parçası olduğunun farkında olma

gibi özellikler öğrencilerin sahip olması gereken özellikler arasındadır (NCTM, 1989). Öğrencilerin akıl yürütmelerinin farkında olmasının ve bunları öğretmenleri ya da arkadaşları ile tartışmalarının yanında kendi akıl yürütme süreçlerinin dayandığı temelleri sözel ve yazılı bir şekilde ifade etmeleri de gereklidir (Kramarski ve Mevarech, 2003). Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS), matematiksel akıl yürütme becerilerini şu şekilde sınıflandırmıştır:

- Tahmin etme
- İlişki kurma
- Birleştirme
- Analiz etme
- Rutin/rutin olmayan problem çözme
- İspat yapma
- Değerlendirme

Ülkemizde uygulanmakta olan ortaokul matematik dersi öğretim programında, öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerinin gelişimi için belirlenmiş hedeflere değinilmektedir. Öğrencilerin bilişsel süreçlerinde matematiksel akıl yürütmeyi özgüven duyarak kullanabilmesi önemsenmekte ve matematik dersi öğretim programında belirtildiği üzere öğrencilere aşağıdaki amaçların kazandırılması hedeflenmektedir (MEB, 2018: 8):

- Matematiksel kavramları anlama ve günlük hayatta kullanma

- Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade etme
- Başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksikleri ve boşlukları görebilme
- Matematiksel terminolojiyi ve dili kullanarak mantıklı açıklamalar yapma
- Nesnelerin birbiriyle ilişkilerini matematiksel dil kullanarak anlamlandırma
- Kendi bilişsel süreçlerini bilinçli biçimde şekillendirme
- Etkin biçimde tahmin etme ve zihinden işlem yapma becerilerini kullanma
- Matematiksel akıl yürütmeye olumlu ve özgüvenli yaklaşım sergileme
- Araştırma yapma, bilgiyi üretme ve kullanma becerilerini geliştirme

Matematik öğretim programındaki bu amaçlar, matematiksel akıl yürütmenin gelişimi ile paralel ilerlemesi gereken süreçlerden oluşmaktadır. Öğrencilerde olması beklenen özellikler, beceriler ve yaklaşımların belirlenmesi kadar öğrencilerin akıl yürütmelerinin hangi durumlarda ortaya çıktığı, ne tür davranışların akıl yürütme sürecini yansıttığı hakkında bilgilerin de belirlenmesi önemlidir. Hangi tür öğrenci davranışının akıl yürütme süreci ile ilgili fikir verdiği akla gelebilecek sorulardandır. NCTM (2000) matematiksel akıl yürütme becerilerinin değerlendirilmesinde öğrencilerin akıl yürütmelerinin varlığına ilişkin kanıtların olabileceği durumları,

- Örüntüleri fark etme ve tahminlerini şekillendirmede tümevarımsal akıl yürütmeyi kullanma
- Matematiksel ifadeler ile ilgili tartışmalarda akıl yürütmeyi kullanma
- Problemlerin çözümünde orantısal ve uzamsal akıl yürütmeleri kullanma
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme, tartışmaların geçerliliğine karar verme ve geçerli tartışmaları oluşturmada tümdengelsel akıl yürütmeleri kullanma
- Ortak özellik ve yapıları belirlemede farklı durumları iyi analiz etme
- Matematiğin aksiyomatik yapısından haberdar olma
- Genellemelere ulaşmada örüntüler oluşturma ve kullanma

şeklinde sınıflandırdığı görülmektedir. Buradan da anlaşılacağı üzere öğrencinin bilgisini çeşitli şekillerde sunması ve sunarken tercih ettiği yolları kullanma becerisi matematiksel akıl yürütme sürecinde, sürecin nasıl işlediğine dair kanıtları sunmada önemli bir içeriktir.

Russell (1999) ise çalışmasında matematiksel akıl yürütmeye ilişkin şu açıklamalara yer vermiştir:

- Matematiksel akıl yürütme temelinde gelişime açık olmayı, doğrulama yapmayı ve genelleme yapmayı barındırır.
- Matematiksel akıl yürütme, ilgili alanlarda birbiriyle ilişkili bilgilerin ilişki ağına ulaşmayı sağlar.
- Matematiksel akıl yürütme bilgi ağlarının oluşumuyla matematiksel hafızanın temelini oluşturarak matematiksel algıları geliştirir.

Burada bahsedilen matematiksel bilgi ağı öğrencinin öğrendiği bilgilerin nedensellik ilişkileri ile birbirine bağlı bir şekilde zihinde yer edinmesi ve anlamlandırılmasıdır. Bu durumla ilgili olarak Umay ve Kaf (2005), matematiksel akıl yürütme sürecinin, matematiksel bilgi ağı üzerinde yapıldığını ve ilerlediğini savunmuşlardır. Matematiği akıl yürütmelerle işlem sürecindeki öncelikleri dikkate alarak ilişkilendirme, matematiksel yapıları sorgulayarak ve neyi ne amaçla yaptığını bilerek oluşturma, kalıcı ve gelişime açık bir matematik oluşumunu sağlar. Matematiği her açıdan oldukça çok ilişkili fikirlerin birer ağı olarak düşünme, hem akıl yürütme kavramı üzerindeki vurgunun bir sonucu hem de daha ileri seviyelerdeki akıl yürütme için bir temel niteliğindedir.

Matematiksel akıl yürütmenin bireysel bir süreç olduğu ve birçok şekilde yapıldığı düşünülürse bu durumla ilgili olarak bir takım sınıflandırmaların olması da kaçınılmaz görülebilir. Kişisel ve kendine özgü bir süreç olduğundan bu sınıflandırmalar farklı başlıklar altında birbirinden ayrılmaktadır. Bakış açısına göre analitik (çözümsel) akıl yürütme ve holistik (bütünsel) akıl yürütme; düşünme tarzına göre pratik akıl yürütme ve soyut akıl yürütme gibi ayrımlar yapılmaktadır (Umay, 2003). Analitik (çözümsel) akıl yürütme, parçalardan yola çıkarak tümdengelsel bir bakış açısıyla sonuca ulaşmayı hedefleyen bir akıl yürütme tarzıdır. Analitik düşünen ve akıl yürüten bireylerin gerçek yaşamdaki olaylara ya da sembolik nesnelerdeki örüntülere, kurallara ve yapılara karşı dikkatlidirler ve bunların ortaya çıkmalarının asıl nedenlerini sorgularlar (NCTM, 2000). Holistik (bütünsel) yaklaşımda ise parçalardan çok bütün ile ilgilenerek olaylara ya da yapılara yukardan bakarak akıl yürütme vardır (Umay, 2003). Çözüm yöntemine göre bakıldığında pratik akıl yürütme eylemlerinin daha çok hesaplamalarla ilgili olduğu görülür. Bu akıl yürütme tarzı, günlük yaşam içinde ve matematiğin uygulamalı olduğu diğer alanlarda daha çok kullanılır (Sternberg, 1999). Soyut ya da teorik akıl yürütme ise çoğunlukla matematik araştırmacıları tarafından kullanılan bir akıl yürütme biçimi olarak matematiksel akıl yürütmenin temelini oluşturan yaklaşım biçimidir.

Konu bazında ise matematiksel akıl yürütme cebirsel, orantısal, geometrik ve istatistiksel olarak sınıflandırılmaktadır (Akkuş Çıkla ve Duatepe, 2002; Bishop, Otto ve Lubinski, 2001). Orantısal akıl yürütme, orantı içeren durumlarda çarpımsal ilişkileri içeren matematiksel yapıların anlaşılmasıdır (Akkuş Çıkla ve Duatepe, 2002). Geometrik akıl yürütme diğer bir deyişle uzamsal akıl yürütme, üç boyutlu uzaydaki cisimleri anlama ve hayali olarak hareketlerini gösterme şeklinde ifade edilmektedir (Clements ve Battista, 1992). İstatistiksel akıl yürütme, “istatistiksel fikirler ve istatistiksel bilgileri anlamlandırma ile akıl yürütme yolu” olarak tanımlanmaktadır (Garfield ve Chance, 2000, s.101). Araştırmanın konusu olan cebirsel akıl yürütme ise aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

2.3. Cebirsel Akıl Yürütme

Cebirsel akıl yürütme ile ilgili literatür incelendiğinde bu kavramın farklı yönlerini vurgulayan tanımların olduğu görülmektedir. Cebirsel akıl yürütme, bilgiyi kelime, tablo, grafik, diyagram ve denklem gibi çeşitli biçimlerde sunma, gereksiz bilgileri ayırt edip gerekli olan bilgilerden yola çıkarak varsayımlar ortaya koyma ve bu varsayımları test etme, var olan fonksiyonel ilişkileri belirleme, ortaya çıkan sonuçları yorumlama, açıklama ve analiz etmedir (Herbert ve Brown, 1997). NCTM (2000) ise cebirsel akıl yürütme için yaptığı tanımda öğrencilerin gerçek yaşam durumlarıyla karşılaşmasının ve nicel ilişkilerin temsili için matematiksel modellemeler kullanmasının önemine vurgu yapmış, öğrencilerin farklı temsiller kullanmasının ve bu yolla analiz yapmalarının gerekliliği üzerinde durmuştur. Cebirsel akıl yürütmeye ilişkin sembollerin anlamlarını zihinde oluşturabilmenin, nicel ilişkiler için değişken kullanmanın ve değişkenlerin nicel durumlar ile birlikte anlamını açıklayabilmenin ve genellemeler yapabilmenin önemine değinilmiştir (Kieran ve Chalouh, 1993; Driscoll, 1999; Kaput, 1999).

Cebirsel akıl yürütme, bir problem durumunda cebirsel becerilerin kullanılmasıyla tahminde bulunarak ya da varsayımlar yaparak değerlendirmeler yapma sürecidir. Kaput (1999) cebirsel akıl yürütmenin beş farklı biçimini aritmetik ve örüntülerden genelleme, sembollerin anlamlı kullanımı, sayı sistemindeki yapıların çalışılması, fonksiyonların ve örüntülerin çalışılması ve bu dört maddeyi birleştirecek matematiksel modelleme süreci şeklinde özetlemiştir. Bu maddelerden yola çıkarak bazı alt başlıklar oluşturulmuştur. Örneğin; sembollerin anlamlı kullanımı başlığında ilişkisel düşünebilme, eşittir işaretinin anlamını bilme, değişkenlerin anlamını bilme, eşitlik işaretini terazilerdeki denge durumu olarak anlamlandırabilme, ifadeleri ve eşitlikleri sadeleştirme, bilinmeyen değerler olarak kullanılan değişkenler gibi alt başlıklar yer almaktadır. Sayı sistemlerindeki yapılar ile ilgili başlığın altında varsayımlarda bulunabilme ve doğrulayabilme yer almaktadır. Fonksiyonlar

ve örüntüleri çalışma başlığında örüntülerin tanımlanması, tahmin edilmesi ve genişletilmesi, fonksiyonların grafikleri, grafiklerdeki değişim oranı ve eğim, orantısal ve orantısal olmayan durumlar gibi alt başlıklar vardır (Van De Walle ve diğerleri, 2014).

Matematiksel akıl yürütmenin özel bir biçimi olarak cebirsel akıl yürütme sadece cebir ile ilgili çalışmalarla sınırlı değildir. Matematik öğretiminde cebirsel akıl yürütmenin bütün sınıf seviyeleri için ön planda olan bir kavram olmasının nedeni bu kavramın içini dolduran matematiksel beceriler olabilir. Bu becerilerin öğrencilere kazandırılmasında duyulan gereksinim ve öğrencilerin yaşadığı bir takım güçlükler cebirsel akıl yürütme kavramının önemini ortaya çıkarmaktadır (Kaf, 2007).

Cebirsel akıl yürütme ile ilgili araştırmalarda ortak olarak değinilen ifadeler, matematiksel sembol ve işlemlerin anlamlandırılması, ilişkilerin nedensellik bağlamında kurulması ve açıklanması, gerekli yorumların ve genellemelerin yapılmasıdır. Tüm bu ifadeler soyut kavramlar içermektedir. Öğrencilerin aritmetikten başlayan matematiksel süreçlerinde somut düşüncelerinden soyut düşüncelere geçişleri ile cebirsel fikirlerinin gelişiminin önü açılırken aynı zamanda soyutlaştırma ve akıl yürütme yetenekleri de gelişir (Herscovics ve Linchevski, 1994). Dolayısıyla soyutlaştırma, akıl yürütme ve özel bir biçim olarak cebirsel akıl yürütme gibi süreçler birbiri ile iç içe bir yapıdadır ve özellikle cebirsel akıl yürütme, bu süreçlerin tamamlanması için ilkökul ve ortaokul kademelerinde önemli bir paya sahiptir. Cebirsel akıl yürütmenin önemini vurgulayan çok sayıda uluslararası çalışma mevcuttur (Kaput, 1995; NTCM, 2000; NAEP, 2002; TIMMS, 2003). Daha özel olarak öğrencilerin cebiri anlamada güçlük çekme nedenleri, sembolleri anlamaları ve kullanmaları, cebirsel akıl yürütme becerileri, cebir öğretme ile ilgili yaklaşımların öğrenmeye etkileri, yazma etkinlikleri ve bunların önemi, cebirsel akıl yürütmede kavram yanılgıları, öğretim programlarının cebirsel akıl yürütme sürecine etkileri ve cebirsel akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi gibi konuları temel alan araştırmalar vardır (Erdem ve Sarpkaya-Aktaş, 2018; Öz, 2017; Kaya, Keşan, İzgiol ve Erkuş, 2016; Kanbir, 2016; Yılmaz, 2015; Bike-Kalkan, 2014; Bağdat ve Anapa Saban, 2014; Ceyhun, 2012; Ellis, 2011; Blanton ve Kaput, 2005).

Blanton ve Kaput (2005) profesyonel gelişim içerikli uzun süreli bir proje kapsamında bir öğretmeni sınıf içerisinde takip ederek veri topladıkları bir araştırma yapmışlardır. Araştırmanın amacı, cebirsel akıl yürütme temelinde durum tespit etmekten çok uygulamalara ve uygulamalardan ortaya çıkan yansımalara odaklanmaktır. Burada öğretmenin öğrenciler için sınıf inşa ederken cebirsel akıl yürütme becerilerinin gelişimini desteklemenin yollarını ve bu yolların etki derecesinin ne olduğunu araştırmışlardır. Bir yıl süreyle öğretmenin cebirsel akıl yürütmeyi derslerinde ne kadar benimsediğini ve derslerine cebirsel akıl yürütmeyi

katarken öğrenciler üzerinde bu durumun ne kadar etki yarattığını incelemişlerdir. Bulgular ışığında, öğretmenin cebirsel akıl yürütmeyi sınıf içerisinde derslere entegre etmesi ile öğrencilerin akıl yürütmelerinde pozitif yönde kaymalar sağladığı sonucuna varılmıştır.

Bağdat ve Anapa-Saban (2014) sekizinci sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmada cebirsel ilişkileri ve sembolleri kullanma, genellemeleri formalize etme ve çoklu temsillerden yararlanma becerilerini incelemişlerdir. Nitel araştırmayı temel alan çalışmada 15 katılımcıya yönlendirilmiş problemler ayrıca klinik görüşmelerle yürütülmüştür. SOLO taksonomisi yardımıyla incelenen araştırmanın klinik görüşmelerinden elde edilen video kayıtları ve araştırmacının notlarından oluşan verileri, çift-kodlama yöntemi ile (Miles ve Huberman, 1994) analiz edilmiştir. Sonuç olarak, öğrencilerin en çok kullandığı beceri cebirsel ilişkileri ve sembolleri kullanma becerisi olduğu görülmüştür. Bunun yanında birçok öğrencinin Solo Taksonomisi kapsamında ilişkilendirilmiş yapı seviyesinin altında olduğu tespit edilmiştir. Ek olarak cebirsel akıl yürütme ve ders notları arasında doğrusal bir ilişkinin varlığı belirlenmiştir.

Bike-Kalkan (2014) doğrusal denklemler alt öğrenme alanını ve eğitim ile ilgili kavramları konu edindiği çalışmasında kavramsal anlama ve cebirsel akıl yürütme yapılarını belirlemeye odaklanmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak açık uçlu sorular ve klinik görüşmeler kullanılmıştır. Araştırmanın örneklemini Eskişehir'deki 103 sekizinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Öğrencilere yönlendirilen açık uçlu soruların yanıtları iki uzman tarafından değerlendirilmiştir. Beş orta ve beş yüksek olmak üzere toplam 10 öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Verilerin yorumlanması ve çözümlenmesi karma yöntem tekniği ile gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin doğru grafiği, eğitim ve doğrusal ilişki konularında güçlük yaşadığı, kavram yanılgılarının olduğu ve bildiklerini düşündükleri kavramların da çoğunun ezbere dayalı bilgiler olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ellis (2011) yaptığı çalışmada ortaokul öğrencileri için birinci ve ikinci dereceden fonksiyonları anlamada doğrudan değerler kullanmanın anlamalarına destek oluşturabileceği konusunda açıklamalar yapmıştır. Cebirsel akıl yürütmenin kritik bir adımı olarak fonksiyonları anlamının önemini vurgulamış ve ilişkiyi düşünmeleri için öğrencileri fonksiyonel ilişkiler kurmaya teşvik etmenin önemli bir etkinlik olduğunu belirtmiştir. Fonksiyonel ve ilişkiyi düşünmenin gelişmesi için nicel değerler kullanarak akıl yürütmeyi gerekli görmüştür. Çalışma sürecinde nicel ilişkiler kurmanın fonksiyonel anlayışı nasıl destekleyebileceği irdelenmiştir.

Kaya ve Keşan (2014) cebirsel akıl yürütmenin yalnızca matematik dersleri için değil günlük yaşamın bir parçası olduğunu belirtmiş ve buna rağmen cebir öğretimini temel alan araştırmaları incelemeleri sonucu öğrencilerin cebirsel akıl yürütmede güçlük yaşadıklarını

vurgulamışlardır. Araştırma süreçlerinde öğrencilerin cebirsel akıl yürütme ve cebirsel düşünme becerilerinin önemine değinmişler ve yaşanan güçlüklerin nedenlerini ortaya koymayı hedeflemişlerdir.

Kaya ve diğerleri (2016) yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel akıl yürütmeleri doğrultusunda başarı düzeylerini belirlemeye yönelik bir çalışma yapmışlardır. Çalışmada nicel yöntem kullanılmış ve Kaya (2015) tarafından oluşturulan Cebirsel Muhakeme Değerlendirme Aracı veri toplama aracı olarak tercih edilmiştir. Çalışmaya İzmir’de öğretim gören 70 kız ve 76 erkek olmak üzere 146 öğrenci katılım sağlamıştır. Öğrencilerin cebirsel durumlarda yapıları ve ilişkileri tanıma ve kullanma, bir veriye ait farklı gösterimleri kullanma, uygun cebirsel akıl yürütme yolunu belirleme, çıkarımlarda bulunma ve bunlarla ilgili işlem yapma, sonucun doğru olup olmadığını test etme ve karar verme gibi becerilere ilişkin testten aldıkları puanların düşük veya orta düzeyde olduğu gözlemlenmiştir. Ek olarak, kız ve erkek öğrenciler arasında cebirsel akıl yürütme becerileri kapsamında anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır.

Öz (2017) cebir konusunda yedinci sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme süreçlerini incelemiştir. Çalışmada bütüncül durum çalışması deseni kullanılmış ve iki öğretmen ile bu öğretmenlerin sınıflarından seçilen altışar öğrenci çalışmanın katılımcılarını oluşturmuştur. Araştırmanın güvenilirliği açısından farklı bir okulda benzer katılımcılarla pilot uygulama yapılmış ve asıl uygulama için veriler değerlendirilmiştir. Veriler seçilen dokuz probleme verilen yanıtlar üzerinden toplanmıştır. Ayrıca her öğrenciyle ikişer olmak üzere toplam 24 adet yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir. Veriler betimsel analiz ile değerlendirilmiştir. Sonuç olarak, öğrencilerin problemler karşısında benzetmeye dayalı akıl yürütmenin alt başlıklarından biri olan algoritmaya dayalı akıl yürütmeyi daha çok kullandıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca öğretmenlerin matematiksel akıl yürütmeyi sağlayıcı yönlendirmeler yapmadıkları ve sınırlı fırsatlar sundukları görülmüştür.

İlgili literatürde cebirsel akıl yürütmenin gelişimi için derslere entegre edilmesinin ve öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri ve sembolleri kullanmaya teşvik edilmesinin önemi vurgulanmaktadır (Blanton ve Kaput, 2005; Ellis, (2011). Öğrencilerin bildiklerini düşündükleri kavramlara ilişkin sorularda ezbere dayalı yaklaşımlar sergilemeleri (Bike Kalkan, 2014) ile ilgili durumlarda öğrencilerin problem bağlamını anlamlandırma süreçlerinin incelenmesinin gerekliliğini göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin akıl yürütmeye ilişkin becerilerini dikkate alan, anlamlandırma süreçlerine odaklanan ve problem çözme sırasında uyguladıkları ya da uygulayabilecekleri stratejileri tanımlayan bir çerçevenin varlığı ile akıl yürütme süreçlerinin incelenmesinin önemi ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle

araştırmada öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçleri incelenirken bahsedilen bu özelliklere sahip bir çerçeve olarak Stratejik Cebirsel Akıl Yürütme (Strategic Algebraic Reasoning-SAR) çerçevesinin kullanılması gerekli görülmüştür.

2.4. Stratejik Cebirsel Akıl Yürütme

Stratejik cebirsel akıl yürütme (SAR), öğrenci performanslarını tanımlamayı, öğrencilerin cebirsel akıl yürütmelerine daha kapsamlı ve karmaşık bir bakış açısı sağlamayı amaçlayan bir çerçevedir (Lepak ve diğerleri, 2018). SAR, problem çözme yaklaşımlarının kapsamlı olarak karakterize edilmesiyle cebirsel temsillere odaklanarak öğrencilerin çeşitli yeterlilikleri arasında cebirsel akıl yürütmelerine ilişkin detaylı bir görüş sunmaktadır.

Lepak ve diğerleri (2018) SAR'ı, rutin olmayan günlük yaşam ilişkili cebir problemlerini çözmek için cebirsel akıl yürütmeyi uygulama yeteneği ve eğilimi olarak tanımlamaktadırlar.

Lepak ve diğerleri (2018), bu tanımın daha iyi anlaşılması için bu tanımlı oluşturmada yararlandıkları araştırmacıların görüşleri ile birlikte bazı kavramları açıklamaktadır. SAR; Ulusal Araştırma Konseyi (National Research Council [NRC], 2001) tarafından tanımlanan iki temel matematiksel yeterliliği birleştirmektedir: stratejik yeterlilik ve uyarlanabilir akıl yürütme. *Stratejik yeterlilik*, öğrencilerin bir sorunu çözmek için geçirdikleri süreci ifade etmektedir (NRC, 2001). Özellikle öğrencilerin mevcut kaynaklarını değerlendirebilmelerini ve verilen duruma uygun olanları seçmelerini gerektirmektedir. *Uyarlanabilir akıl yürütme* ise stratejik yeterlilik ile yakından bağlıdır; ancak stratejik yeterliliğin bir sorunu çözmek için araçlar sağladığı durumlarda, uyarlanabilir akıl yürütme mantığa dayanır (NRC, 2001). Örneğin, uyarlanabilir akıl yürütme öğrencilerin mevcut kaynakları/bilgileri uygun olup olmamaları açısından değerlendirmelerinde, sınırları tanımlamalarında ve araçlar (yani temsil biçimleri) aracılığıyla görünür hale getirilen ilişkileri anlamlandırmalarında devreye girmektedir.

SAR çerçevesi kendi oluşumunda kavramsal anlayışı ve prosedürel akıcılığı temel almakta ve bu temelleri gerektirmektedir (Hiebert ve Lefevre, 1986; Skemp, 1976; NRC, 2001; Star, 2005). Rutin olmayan açık uçlu problemler, SAR'ı değerlendirmek için bir arena sunar; çünkü tanım gereği bu tür problemlerin doğasında var olan belirsizlik, öğrencilerin problem çözme sürecinde kararlar alırken bir dizi beceri ve yeteneklerini gerektirir ya da bu beceri ve yetenekleri göstermeye teşvik eder (Stein, Grover ve Henningsen, 1996). Genel olarak güçlü SAR'a sahip öğrenciler bağlamı ve gömülü matematiksel fikirleri anlayabilir, problem durumu içinde kendilerine anlamlı gelen bir strateji kullanarak problemi çözebilir ve

çözümlerini yansıtmak veya açıklamak için problem bağlamına geri dönebilir. Lepak ve diğerleri (2018) bu duruma ek olarak, rutin sözel problemlerde veya işlem yapmaya dayalı etkinliklerde bile bir miktar SAR'ın gerekliliğine vurgu yapmışlar ve bu nedenle yapının uygulanabilir olduğunu, bu yeterliliklerin bir dizi problem tipi aracılığıyla değerlendirilebilir olduğunu belirtmişlerdir.

Lepak ve diğerleri (2018) cebiri, cebirsel ilişkileri ve temsilleri araştırma yoluyla (Cai, 2014; Heid, 1996; Kieran, 2007; Usiskin, 1988; Yerushalmy, 2006; NCTM, 2000) SAR çerçevesinin geliştirilmesi için problem merkezli bir perspektif ele almaktadır. Bu perspektifin odak noktaları şu şekilde sıralanabilir:

1. Cebirsel anlayış
2. Okul cebirindeki sembol manipülasyonundan uzaklaşma
3. Fonksiyonların ve niceliklerin arasındaki ilişkiler
4. Günlük yaşam bağlamlarında gömülü niceliklerin arasındaki ilişkiyi tanımlama
5. İlişkilerin temsil yolları
6. Temsil etmenin bir yolu olarak modelleme

Bu perspektif ile cebir öğretimindeki sembol manipülasyonundan uzaklaşmayı ve modellemeyi vurgulamayı hedeflemişlerdir. Bu bakış açısına göre fonksiyonel cebir; tablolar, grafikler ve denklemlerin dâhil olması ile birlikte çoklu temsiller aracılığıyla ilişkileri araştırmaktadır (Lepak ve diğerleri, 2018).

Araştırmada SAR çerçevesinin temel aldığı bu perspektifin uygulanmasına özen gösterilmekte ve araştırmanın alt problemlerine yanıt aranırken SAR çerçevesinin içerdiği yetkinlikler dikkate alınmaktadır. Araştırmanın alt problemleri ile ilişkili olan SAR yetkinliklerini açıklamadan önce araştırma sürecine derinlik sağlaması ve çerçevenin uygulanmasında göz önünde bulundurulması gereken noktaların belirtilmesi amacıyla öğrencilerin problem durumlarına yaklaşım biçimleri ve karşılaştıkları zorlukları ele almanın gerekli olduğu görülmektedir.

2.4.1. SAR Çerçevesi Bağlamında Öğrencilerin Cebirsel Problem Çözme Yaklaşımları ve Zorlukları

Bu bölümde öğrencilerin cebirsel problemleri çözme yaklaşımları ve zorlukları SAR çerçevesinin temel aldığı yetkinlikler bakımından ele alınmaktadır. Buradaki amaç, SAR çerçevesinde yer alan yetkinlikleri tanımlamadan önce bu öğrenci yaklaşımlarında ve zorluklarında yer alan eksikliklerde SAR yetkinliklerinin gerekliliğinin vurgulanmasıdır.

Çeşitli araştırmalar öğrencilerin cebir problemlerini ve özellikle de geleneksel tarzdaki rutin olan problemleri çözme yaklaşımlarını araştırmaktadır. Bu problemler cebirsel ifadeleri anlama, nicelikleri anlamlandırma ve sembolik temsiller üretme ihtiyacını içermesinden dolayı öğrenciler tarafından tarihsel olarak zor kabul edilir (Schoenfeld, 2004; Koedinger ve Nathan, 2004; Kieran, 2007; Rakes, Valentine, McGatha ve Ronau, 2010; Schoenfeld ve Kilpatrick, 2008). Ancak bazı araştırmalarda ise öğrencilerin günlük yaşam bağlamlarıyla ilgili problemlerde salt sembolik problemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir (Nathan ve Koedinger, 2000; Koedinger ve Nathan, 2004). Bu durum, öğrencilerin sembollerle karşılaşmalarına nazaran sözlü temsillerle karşılaştıklarında sözel ifadeleri yorumlarken yaşadıkları göreceli kolaylığa, öğrencilerin günlük bilgilerden yararlanma fırsatına veya mümkün olan çoklu problem çözme yaklaşımlarına bağlanabilir.

Genel bir bakış ile araştırmalar sürekli olarak öğrencilerin cebir hikâyesi problemlerini çözerken daha güçlü ve verimli cebirsel stratejiler yerine aritmetik veya özyinelemeli stratejilere yöneldiğini göstermektedir (Carragher, Martinez ve Schliemann, 2008; Walkington, Sherman ve Petrosino, 2012; Koedinger & Nathan, 2004). Bir yandan, informal aritmetik stratejiler öğrencilerin önemli cebirsel fikirleri geliştirmesi ve uygulaması için önemli bir platform sunabileceğinden yanlış varsayımlara ulaşmaları durumunda bir zarar olarak görülebilir. Öğrencileri bilişsel süreçlerinde kendi kendine bırakmak informal gelişimleri doğurabileceğinden öğretmenlerin endişeye kapılmasına ve süreci bir tehlike olarak görmesine neden olabilir. Öte yandan, informal aritmetik stratejiler öğrencilere doğru çözümlere ulaşmada daha büyük başarı sağlayan problemlere ve çözüm yollarına erişimi de sağlayabilir (Walkington ve diğerleri, 2012; Nathan ve Koedinger, 2000). Aritmetik ve cebirsel akıl yürütmeyi birbirine bağlamak, bu endişeleri ve oluşması muhtemel görülen zararları engelleyerek öğrencileri ispat yapma niteliğindeki çözümlere ve açıklamalara doğru yönlendirebilir (Pedemonte, 2008).

Öğrencilerin aritmetiksel akıl yürütmede formal yollara daha az bağımlı olmaları, cebir problemlerini çözerken temsilleri kullanmalarına ilişkin sonuçlara da yansımaktadır (Lepak ve diğerleri, 2018). Stylianou (2011) çalışmasında öğrencilerin temsil kullanımının uzman matematikçilerin temsil kullanmaları ile aynı olduğunu, bunları problemi anlamak veya keşfetmek için ve ayrıca bir çözüm bulmaya yönelik ilerlemelerini kaydetmek veya izlemek için kullandıklarını gözlemlemektedir. Bundan önceki birçok çalışma problem durumlarını modellerken öğrencilerin önce sözel, görsel ve sayısal temsiller; sonra grafikler ve sembolik temsiller ile birlikte akıcılık geliştirdiğini göstermektedir (Healy ve Hoyles, 1999; Yerushalmy, 2000; Nathan, Stephens, Masarik, Alibali ve Koedinger, 2002; Radford, 2003; Koedinger ve Nathan 2004). Bu bulgular, öğrencilerin değişken ifadeler ve denklemler

üretmesinin gerekli olmadığı, temel cebirsel bilgi ve becerilere (Arcavi, 2005) bağlı olan bir düzeyde *sembol duygusu* (sembollerin esnek kullanımı ve uygun olduğunda bunları kullanma alışkanlığı) gerektirdiği fikrini yansıtmaktadır.

Özetle, öğrencilerin cebirsel problem çözme yaklaşımlarının incelenmesi sonucu, rutin problemlerde gösterdikleri performanslara göre rutin olmayan açık uçlu problemlerde daha iyi performans gösterebileceği görülmektedir. Buradaki performans kavramının içeriği, problemlere doğru yanıt verilmesinden çok çözüm esnasında öğrencinin bilişsel süreçlerindeki özelliklerle ilgilidir. Sürekli rutin problemler ile karşılaşan öğrencilerin rutin olmayan problemler karşısında ezbere dayalı aritmetik ya da özyinelemeli işlemler yapma eğilimi göstermeleri normal karşılanabilir. Ayrıca bu işlemler ile birlikte öğrenci zihninde cebirsel akıl yürütmeyi geliştirecek cebirsel fikirlerin oluşumu da gerçekleşebilir. Aritmetik işlemler ile birlikte cebirsel akıl yürütme temel alınırsa öğrencilerde cebirsel fikirlerin ve sembol duygusunun gelişimi kaçınılmaz hale gelebilir.

2.4.2. SAR Yetkinlikleri ve Yetkinliklerin Genişletilmiş Açıklamaları

Öğrencilerin SAR'larını tanımlamak ve kavramsallaştırmak için Lepak ve diğerleri, (2018) tarafından hazırlanan kavramsal çerçeve kapsamında beş yetkinlik bulunmaktadır (bkz. Tablo 1). Bu yetkinlikler ile öğrencilere yönlendirilmesi gereken açık uçlu problemlerin niteliği hakkında fikir sahibi olunurken aynı zamanda öğrenci çalışmalarından elde edilen yanıtların analizi sağlanmaktadır. SAR yetkinlikleri genel olarak matematiksel problem çözme becerilerini yansıtırken; ilişkilerin, temsillerin, prosedürlerin ve açıklamaların doğası hakkında cebire özgü ayrıntılara da değinmektedir.

Tablo 1

SAR yetkinliklerine ilişkin kodlar ve açıklamalar

SAR Yetkinlikleri	Açıklama
C1 yetkinliği	Metni Okuma, Yorumlama ve Bağlamı Anlamlandırma
C2 yetkinliği	İlgili Miktarları ve Bunlar Arasındaki İlişkileri Belirleme
C3 yetkinliği	Miktarlar Arasındaki İlişkilerin Cebirsel Temsillerini Kullanma
C4 yetkinliği	Prosedürleri Yürütme ve Sonuçların Doğruluğunu Kontrol Etme
C5 yetkinliği	İkna Edici Açıklamalar Yapma

Tablo 1'de verilen SAR yetkinliklerinin her birinin detaylı açıklamaları bu bölümde verilmektedir. C2, C3 ve C4 yetkinlikleri kendi içinde ayrıca iki başlık halinde ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

Metni Okuma, Yorumlama ve Bağlamı Anlamlandırma (C1 Yetkinliği)

Bir problem durumunun dilini ve bağlamını anlamlandırmak, rutin olmayan problemleri çözmenin temel bir gereğidir (MacGregor ve Price, 1999; Schoenfeld, 2014; National Governors Association Center for Best Practices, ve Council of Chief State School Officers, 2010; Walkington ve diğerleri, 2012). Rutin olmayan birçok problem durumu, modelleme uygulamalarını gerektirmesi nedeniyle gerçekçi ya da yaratıcı olabilen bir senaryo veya bağlamı içermektedir. Bağlamsal dilin ve durumun sağlam bir şekilde anlaşılması, öğrencilerin problem durumunun çözümüne odaklanmasını desteklemektedir (Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons ve Shahan, 2013).

C1 yetkinliği, hem senaryo hem de eşlik eden temsiller de dahil olmak üzere bağlamı anlamlandırma becerisinin yanı sıra, içinde gömülü olan matematiğin doğasını anlamlandırma becerisini de içermektedir (Lepak ve diğerleri, 2018). Öğrenciler sorulan durumu yorumlayamazlarsa problem çözme stratejilerini uygulamada sınırlı kalacaklardır. Problem çözmenin iki aşaması vardır: yorumlama ve çözme (Schoenfeld, 2014; Yerushalmy ve Gilead, 1999). Bu yetkinlik, öğrencilerin problemde tanımlanan durumun zihinsel bir temsili oluşturdukları problem çözmenin yorumlama aşamasına değinmektedir (Lepak ve diğerleri, 2018). Schoenfeld (2004) problemlerini çözmek için gereken öğrenci bilgisinin yönlerini problemi okuma, kelimeleri doğru bir şekilde ayrıştırma ve problemin ifadesinden çözümün matematiksel karakterini çıkarma olarak tanımlamaktadır. Bu yönlerin tümü sorunu anlamlandırmak için metni yorumlamakla ilgilidir.

Özetle, C1 yetkinliği öğrencinin soruda verilen senaryoyu anlamasını, bağlamı anlamlandırmasını ve gömülü olan matematiğin doğasını keşfetmesini içermektedir. Problem çözmenin “yorumlama” boyutunu ele almaktadır. Öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeyleri araştırmanın birinci alt probleminde öğrencilerin metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlamlandırma süreçlerinin nasıl olduğu araştırılırken incelenecektir.

İlgili Miktarları ve Bunlar Arasındaki İlişkileri Belirleme (C2 Yetkinliği)

Cebirde fonksiyon temelli yaklaşım anlayışıyla uyumlu olarak öğrenciler, bir durumdaki temel nicel ilişkileri tanımlamalı ve ilişkiyi modelleyebilecek fonksiyonların sınıfını veya sınıflarını belirlemelidir (NCTM, 2000, s. 665). Walkington ve diğerleri (2012) öğrencilerin miktarları (nicelikleri) ve aralarındaki ilişkileri anlamlandırmadan problem metninden sonra doğrudan temsile atladıklarında cebirsel problemleri çözme sürecinde büyük ölçüde başarısız olduklarını bulmuşlardır.

İlgili miktarları ve aralarındaki ilişkileri belirlemek, cebirsel akıl yürütmenin temel bir yönüdür ve öğrencilerin rutin olmayan cebir görevlerini başarıyla çözmeleri için gerekmektedir. Örneğin Thompson (1994), öğrencilerin oran konusunda akıl yürütmelerindeki sürecin tek bir miktardaki (nicelikteki) değişimi tanımlama ile başlayacağını, daha sonra iki miktarı (niceliği) gevşek bir şekilde ilişkilendireceklerini ve en son aşamada iki miktar (nicelik) arasındaki kovaryasyonu tanımaya doğru ilerleyeceğini öne sürmektedir. Bu durumda öğrencilerin çözümü hangi miktarların (niceliklerin) etkilediğini ve bu miktarların nasıl ilişkili olduğunu belirlemeleri için problem bağlamına başvurmaları gerekir (Schoenfeld, 2004). Bu durum miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme becerilerini içermektedir. Bu beceriler, miktarlar arasındaki ilişkileri temsil etmede bir temel niteliğinde olduğu için özellikle önemlidir (C3 yetkinliğine hizmet etmektedir). C2 yetkinliği, aşağıda kapsamı açıklanan iki bileşene ayrılmaktadır: ilgili miktarları belirleme ve miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme.

İlgili Miktarları Belirleme (C2a Yetkinliği): Bir problem durumunu, matematiksel bir modele başarılı bir şekilde transfer edebilmek için öğrencilerin öncelikle model ile hangi miktarların ilgili olduğunu belirlemeleri gerekmektedir. Öğrenciler, problemi çözerken hangi bilgilerin ilgili olduğunu ve hangi bilgilerin gereksiz olduğunu belirlemek için verilen bağlamı gözden geçirmelidir (Schoenfeld, 2014). İlgili miktarları belirledikten sonra, öğrenciler miktarların nasıl ilişkili olduğunu belirlemelidir.

Özetle C2a yetkinliğinde, öğrenci soruda yer alan bilgilerden hangisinin uygun, hangisinin yabancı/gereksiz olduğunu belirleyebilmelidir. Öğrencinin çözüm aşamasında kullanacağı bilgilerin ve miktarların (değerlerin/niceliklerin) belirlemesini gerektirmektedir.

Miktarlar Arasındaki İlişkileri İfade Etme (C2b yetkinliği): Bu ölçüt, öğrencilerin çoklu miktarlar arasındaki ilişkiler hakkında akıl yürütmelerini ifade etme becerilerini kapsamaktadır. Miktarların nasıl ilişkili olduğunu tanımlayabilmek, bir sonraki yetkinlik olan C3 için gereklidir ve öğrencilerin cebirsel temsiller yoluyla bu ilişkileri modelleyebilmelerine izin vermektedir. Bu miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme biçimi, ilişkilerin niteliksel olarak anlaşılmasıyla (örneğin, “örüntüde çevre her adımda 4 artar”) veya miktarlarla ilgili işlevler ailesini tanımlayarak (örneğin, “örüntüde doğrusal bir artış mevcuttur”) gerçekleştirilebilir.

Özetle C2b yetkinliği, belirlenen miktarların (değerlerin/niceliklerin) ve bilgilerin birbiri ile nasıl ilişkili olduğunu belirlemeyi içermektedir. Ayrıca bu ilişkileri açıkça ifade edebilmeyi ve tanımlayabilmeyi gerektirmektedir.

Öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeyleri araştırmanın ikinci alt probleminde öğrencilerin ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri belirleme süreçlerinin nasıl olduğu araştırılırken incelenecektir.

Miktarlar Arasındaki İlişkilerin Cebirsel Temsillerini Kullanma (C3 Yetkinliği)

Birden çok değişken miktarı ilişkilendirmek ve temsil etmek, cebirde fonksiyona dayalı bir yaklaşımın temel bir özelliğidir (Chazan, 2000; Leinhardt, Zaslavsky ve Stein, 1990; Yerushalmy, 1997). Bu çerçevede ile temsillerin kullanımı hem bireysel hem de sosyal olarak kavramsallaştırılmaktadır (Stylianou, 2011). Bireysel olarak, öğrenciler problemi anlamak ve keşfetmek için temsilleri kullanmaktadır. Sosyal olarak ise, öğrenciler açıklamalarında gerekçeler sunarak akıl yürütmelerini başkalarına ifade etmek için temsilleri kullanmaktadır.

Sembolik ifadeler ve denklemlerin dışında hangi ifade biçimlerinin cebirsel bir temsil olarak sayıldığı konusunda bazı anlaşmazlıklar vardır. Ancak tabloların, grafiklerin ve sözel sembolik sistemlerin doğası hakkındaki farklı bakış açıları ile cebirsel temsil anlayışı zamanla genişlemiştir. Bu temsiller (tablo, grafik vb.), değişken ifadeler ya da denklemlerin yanı sıra cebir öğrenimi için cebire giriş noktaları olarak görülmektedir (Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Durán, Reed ve Webb, 1997; Stylianou, 2011). Cebirsel temsiller, bağlamı belirgin niceliklere bağlayan koordinat grafikleri, iki değişkenli tabloları, değişken denklemleri ve diyagramları içerecek şekilde geniş bir temsil kümesi olarak tanımlanmaktadır (NGA Center ve CCSSO, 2010; Driscoll, 1999; NCTM, 2000). C3 yetkinliği aşağıda kapsamı açıklanan iki alt bileşene ayrılmaktadır: cebirsel temsiller oluşturma ve temsiller arasında bağlantı kurma veya yorumlama.

Cebirsel Temsiller Oluşturma (C3a Yetkinliği): Bu yetkinlik, ya sıfırdan bir temsil üretmeyi ya da var olan bir temsile ekleme yapmayı içermektedir. Çoklu temsillerin kullanılması, öğrencilerin matematiksel kavramları ve problem çözme görevlerini yerine getirme çabalarını kolaylaştırmakta ve bir gereklilik olarak görülmektedir. C3a yetkinliği tablo, grafik, şekil, şema, denklem ve cebirsel ifade gibi farklı temsil biçimlerini/cebirsel gösterimleri oluşturmaya gerektirmektedir.

Temsiller Arasında Bağlantı Kurma veya Yorumlama (C3b Yetkinliği): Lepak ve diğerleri (2018) bir temsili yorumlamayı, bir temsilden uygun bilgiyi çıkarma olarak tanımlamaktadır. Temsiller arasında bağlantı kurma; bir temsili diğerini oluşturmak için kullanmayı, çoklu temsillerin kullanışlılığını karşılaştırmayı ve/veya bir denklemdeki parametrelerin diğer gösterimlerde nasıl görüldüğünü tanımlamayı içermektedir. Matematik eğitimi literatürü, fonksiyonların daha geniş ve daha bütünleşik bir şekilde anlaşılmasına yol açtığı için, özellikle

cebir öğrenimi ile ilgili önemli bir anlama aracı olarak temsiller arasında transferi ve bağlantı kurmayı vurgulamaktadır (Driscoll, 1999; NCTM; 2000; Duval, 2006; Kieran, 2007; Lloyd, Beckmann, Zbiek ve Cooney, 2010).

Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeyleri araştırmanın üçüncü alt probleminde öğrencilerin miktarlar arasındaki ilişkilerin cebirsel temsillerini kullanma süreçlerinin nasıl olduğu araştırılırken incelenecektir.

Prosedürleri Yürütme ve Sonuçların Doğruluğunu Kontrol Etme (C4 yetkinliği)

Karmaşık cebirsel problem çözümleri, genellikle bir veya daha fazla prosedür veya hesaplama içermektedir ve öğrencilerin çözerken çözüm stratejilerini izlemelerini ve nihai sonuçlarını kontrol etmelerini gerektirmektedir. Örneğin Schoenfeld (2014), öğrencilerin ilgili sembolik denklemi (uygun olduğu şekilde) çözebilmeleri ve çözümün anlamlı olup olmadığını kontrol edebilmeleri gerektiğini savunmaktadır. NCTM (2000) Problem Çözme Standartları'nda yansıtıldığı gibi, stratejilerinin var olan problem durumuna göre uyarlanmasının gerekip gerekmediğini ve çözümün bağlam sınırları içerisinde uygulanabilir olup olmadığını belirleyebilmeleri için öğrencilerin problem bağlamına başvurmaları gerekmektedir. Bu yetkinlikleri yansıtmak için C4 yetkinliği aşağıda kapsamı açıklanan iki alt bileşene ayrılmaktadır: cebirsel prosedürleri hassasiyetle yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme.

Cebirsel Prosedürleri Hassasiyetle Yürütme (C4a Yetkinliği): Öğrenciler cebirsel ve aritmetik prosedürleri ve hesaplamaları doğru ve verimli bir şekilde uygulayabilmelidir. Bu hem prosedürlerin nasıl doğru bir şekilde uygulanacağını hem de ne zaman uygulanacağını bilmek dahil olmak üzere prosedürel akıcılığın titizliği ile örtüşmektedir (Star, Newton, Pollack, Kokka, Rittle-Johnson ve Durkin, 2015). İlgili literatüre dayanarak (NGA Center ve CCSSO, 2010; NCTM, 2000), cebirsel prosedürler bazı maddeleri içerecek ancak bunlarla sınırlı kalmayacak şekilde Lepak ve diğerleri (2018) tarafından tanımlanmaktadır:

1. Bir değeri değişken bir ifadeye koyma ve değerlendirme
2. Doğrusal denklemleri ve eşitsizlikleri çözme
3. Orantı kullanma
4. Özyinelemeli işlevleri yineleme
5. Benzer terimleri dağıtma, çarpanlara ayırma, birleştirme vb. eşdeğer yöntemleri kullanma
6. Polinom ve rasyonel ifadelerle aritmetik yapma

7. İkinci dereceden denklemleri çarpanlara ayırma, kareyi tamamlama, ikinci dereceden formülleri uygulama veya karekök alma

Lepak ve diğerleri (2018) SAR çerçevesinde cebirsel prosedürlerin bu maddelerle sınırlı olamayacağını ve bu maddelerin birer örnek niteliğinde belirtilmesinin C4a yetkinliğinin anlaşılması için yararlı olacağını vurgulamaktadır.

Sonuçların Doğruluğunu Kontrol Etme (C4b Yetkinliği): Öğrenciler, sonuçlarının inandırıcılığını kontrol etmek ve çözümlerini anlamlandırmak için problem bağlamına ve matematiksel prosedürlere başvurabilmelidir (NRC, 2001). Aslında, prosedürel akıcılığın bir kısmı, bir hesaplamanın sonuçlarını tahmin edebilmeyi ve sonuçları anlamlandırmayı içermektedir (Star ve diğerleri, 2015). İşlemleri ve hesaplamaları anlamlandırmak ve bunları anlamlı bir şekilde yürütmek, öğrencilerin matematiksel yapıyı ve kalıpları kullanarak akıl yürütmelerini de gerektirmektedir (NGA Center ve CCSSO, 2010).

Özetle C4b yetkinliğinde, öğrencilerin kendi çözümlerini anlamlandırabilmeleri, çözümlerin doğruluğunu kontrol etmek için problem bağlamına başvurabilmeleri, matematiksel işlemleri kullanabilmeleri, hesaplama sonuçlarını tahmin edebilmeleri ve yorumlayabilmeleri gerekmektedir.

Öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeyleri, araştırmanın dördüncü alt probleminde öğrencilerin hesaplamaları ve prosedürleri yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme süreçlerinin nasıl olduğu araştırılırken incelenecektir.

İkna Edici Açıklamalar Yapma (C5 Yetkinliği)

Cebirsel açıklama veya gerekçelendirme, öğrencilerin bir iddiayı doğrulamak için cebirsel akıl yürütmelerinin netleştirilmesini içermektedir (Yackel, 2001; Martinez, Brizuela ve Castro, 2011). Yani C5 yetkinliği, cebirsel nedenleri kullanarak bir yanıt için destek sağlamak olarak düşünülebilir. C5 yetkinliği, genellikle diğer yetkinlikleri yansıtmaktadır; örneğin, bir öğrenci miktarlar arasındaki ilişkiyi açıkça ifade edebilir (C2b) veya gerekçelerinin bir parçası olarak bir temsili (C3b) yorumlayabilir. Bununla birlikte C5 yetkinliği, kişinin düşüncesini açık ve eksiksiz bir şekilde iletme yeteneğini yakalamak için diğer yeterliliklerin ötesine geçmektedir.

Matematiksel argümantasyon, öğrencilerin anlama ve stratejilerine yönelik değerli bir pencereye ek olarak başka faydalar da sunmaktadır. Matematiksel argümantasyon, problemleri çözerken bir “keşif aracı” olabilmekte (Schoenfeld, 2004, s. 345) ve cebirsel anlayışı geliştirmek için bir arena sunmaktadır (Martinez ve diğerleri, 2011). Bir kişinin çalışmasını

sözlü ve yazılı olarak açıklayabilmesi ve gerekçelendirebilmesi sadece cebirde önemli değildir. Graham, Cuoco ve Zimmerman (2010), bunların anaokulunda başlayabilen önemli matematiksel beceriler olduğunu savunmuşlardır.

En genel ifadeler ile bu yetkinlik; diğer tüm yetkinlikleri içermesinden farklı olarak öğrencinin düşüncesini net ve eksiksiz bir şekilde iletme yeteneğini göstermesini gerektirmektedir. Bu şekilde öğrencinin cebirsel akıl yürütmelerini dışa vurması, stratejileri uygulamada ilerlediği yolu açıklaması ve strateji seçimlerinin nedenlerinden bahsetmesi beklenmektedir. Bu yetkinliğin sağlanması halinde öğrencide cebirsel anlayışını geliştirmesi için adeta bir bilişsel arena sağlanmaktadır.

Özetle, öğrencilerin sadece çözümlerini değil, problem çözme yaklaşımlarını da göz önünde bulundurarak öğrencilerin SAR'larını incelemek için bu belirli yetkinliklerin kullanılmasıyla araştırmanın amacına hizmet etmek hedeflenmektedir. SAR çerçevesi, rutin olmayan cebirsel problemleri çözmede, başarı için öğrencilerin ne bilmeleri ya da ne yapmaları gerektiğini yönlendirme süreçlerini, öğrencilerin kendi yazılı çalışmalarından gözlemlenebilir bir kavramsallaştırmayı temsil etmektedir. SAR, problemleri çözme adımlarında öğrencilerin doğrusal bir yetkinlik sırasını temsil etmemektedir (örneğin, C1 yetkinliğinden sonra C2 yetkinliğinin gelişmesi beklenmemelidir). Bunun yerine, sınıf içinde ve dışında cebirsel durumları yorumlarken ve matematikselleştirirken yararlanılabilecek bir dizi entegre beceriyi temsil etmektedir. Öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri, araştırmanın beşinci alt problemde öğrencilerin cebirsel düşünceleri hakkında bilgi veren ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinin nasıl olduğu araştırılırken incelenecektir.

2.5. SAR Çerçevesinin Seçilme Nedenleri

Bu çalışmada öğrencilerin cebirde stratejik akıl yürütme süreçlerinin incelenmesinde SAR kavramsal çerçevesi ele alınmaktadır. Bu çerçeve ile öğrencilerin yazılı çalışmaları üzerinden cebirsel akıl yürütme süreçlerine ilişkin incelemeler yapabilmenin mümkün olduğu görülmektedir.

Araştırmada öğrencilerin problem durumlarına karşı doğru çözümler sunmasından çok cevaba ulaşmada geçirdikleri süreçlere odaklanıldığından, bu durum çerçevenin hedefleri ile örtüşmektedir. Öğrencilerin bağlamı anlamaları ve yorumlamaları, anladıklarını yansıtırken kullanabilecekleri cebirsel temsilleri ve ilişkileri ifade etme stratejileri bu süreçlere ilişkin görüşler sunmaktadır.

SAR yetkinlikleri, öğrencilerin anlama süreçlerine odaklanırken bir problem durumundaki bağlamı nasıl yorumladıklarını, çözümleri üzerinde gösterdikleri performanslara

dayanarak hangi stratejiler ile ilerlediklerini kategorize etmektedir. Bu durum içerdiği önemli bileşenleri sayesinde öğrencilerin stratejik akıl yürütmelerini gözlemlenebilir kılmaktadır.

Stein ve diğerleri, (1996) açık uçlu problemlerin çoklu çözüm stratejilerine ve temsillerine izin verdiği için birbiriyle ilişkili yetkinlikler gerektirdiğini açıkça ifade etmektedir. Öğrencilerin bu tür problemler karşısında bir takım becerilere ihtiyaç duyduğu bilinmektedir. Bu beceriler cebirsel akıl yürütme kavramı kapsamında da birçok araştırmaya ve araştırmacıya konu olmuştur (Kaf, 2007; NTCM, 2000; NAEP, 2002; TIMMS, 2003; Herbert ve Brown, 1997; Kieran ve Chalouh, 1993; Driscoll, 1999; Kanbir, 2016; Yılmaz, 2015; Bike-Kalkan, 2014; Bağdat ve Anapa Saban, 2014; Ceyhun, 2012). SAR, bu araştırmalarda bahsedilen tüm beceri ve yetkinlikleri içeren kapsamlı bir çerçeve sunmaktadır.

Araştırmanın stratejik akıl yürütme süreçlerine odaklanması ile birlikte cebir öğrenme alanında yapılması tercih edilmiştir. Mason (2001) çalışmasında, cebir hakkında akıl yürütmenin doğal olarak gerçekleştiği bir alan olduğu ifadelerine yer vermektedir. Öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçlerine odaklanırken cebirin içinde gömülü olan matematiği barındırması, daha soyut süreçlere yer vermesi gibi nedenler cebir konusunun ele alınmasının bu süreçler için gerekli olduğunu göstermiştir. Bu nedenler düşünüldüğünde öğrencilerin zihinsel süreçlerini ortaya koymaları açısından cebir öğrenme alanı üzerine kurulu olan SAR çerçevesinin bu araştırmada kullanılması uygun görülmüştür.

2.6. Açık Uçlu Problemler İle İlgili Araştırmalar

Öğrencilerin doğal bir şekilde akıl yürütmelerini ortaya çıkarmalarını ve stratejilerini kendiliğinden gerçekleştirebilmelerini sağlayan açık uçlu problemlerin varlığı oldukça önemlidir.

Üst düzey düşünmeyi sağlayan açık uçlu problemler ile matematiğin daha etkili öğrenileceği, matematiksel akıl yürütmenin gelişeceği ve öğrencilerin matematiğe ilişkin tutumlarının iyileşeceğini destekleyen araştırmalar mevcuttur (Erdem, 2015; Umay, 2003; NCTM, 2000; Stein ve diğerleri, 1996). Tüm bunların yanı sıra öğrencide matematiksel akıl yürütmenin nasıl işlediğinin açık uçlu problemler üzerinden gözlemlenmesi ve öğrencilerin bu tarz sorular üzerindeki stratejik akıl yürütme süreçlerinin belirlenmesi, matematiksel anlayışı geliştirmede ve bu anlayışa katkı sağlamada önemli bir yere sahiptir.

Matematik, fen, okuma gibi eğitim alanlarına odaklanan Programme for International Student Assessment (PISA) 2012 çalışmasında, problem çözme değerlendirmesi çerçevesinde belirlenen problem durumlarının doğası, problemin bağlamı ve problem çözme süreçleri gibi temel elemanlara odaklanılmaktadır (OECD, 2014). Problem durumlarının doğası durağan ve

interaktif olarak iki alt boyutta; problemin bağlamı senaryo ve odak olmak üzere iki alt boyutta; problem çözme süreçleri ise keşfetme ve anlama, temsil ve formüle etme, planlama ve uygulama, kontrol etme ve yansıtma olmak üzere dört alt boyutta değerlendirilmektedir (OECD, 2010; OECD, 2015). Çelik (2007) ise açık uçlu cebir problemlerinin niteliği konusunda bir takım becerileri ortaya çıkarmaya yönelik olmasının gerekliliğinden bahsetmektedir. Bunlar; sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma, çoklu gösterimlerden yararlanma ve genellemeleri formüle etme şeklindedir. Araştırmanın veri toplama araçları olan açık uçlu problemlerin oluşturulmasında bu araştırmalarda belirtilen nitelikler dikkate alınmıştır.

Rutin olmayan açık uçlu problemler, SAR'ı incelemek için bir değerlendirme platformu sunmaktadır (Lepak ve diğerleri, 2018). Tanım gereği, bu tür problemlerin doğasında var olan belirsizlik, bilinmezlik ya da karmaşıklık öğrencilerin problem çözme süreçlerinde kararlar alırken bir dizi beceri ve yeteneklerini gerektirir veya bunlara teşvik eder (Stein ve diğerleri, 1996). Bu durum öğrencilerin çeşitli stratejilere yönelmelerini, problem bağlamına tekrar başvurmalarını ve farklı temsiller üretmelerini sağlayabilir. SAR yetkinliklerinin içeriğini oluşturan bu özellikler rutin olmayan açık uçlu problemlerin kullanılmasının gerekliliğini göstermektedir. Yani, SAR hem kavramsal bir anlayış hem de prosedürel akıcılık gerektirir (Hiebert ve Lefevre, 1986; NRC, 2001; Skemp, 1976; Star, 2005).

Ayrıca SAR yetkinliklerinin tam anlamıyla değerlendirilebilmesi için açık uçlu problemlerin alt maddeler ile yönergeler oluşturabilme fırsatı sağlaması önemli bir ölçüt oluşturmaktadır. Böylece açık uçlu problemler, her bir yetkinlik için öğrencilerin akıl yürütme süreçlerine ilişkin açıklamalarının ve gerekçelerinin istendiği komut niteliğindeki yönergelerin oluşturulmasına fırsat vermektedir.

Yukarıda belirtilen nedenlerden dolayı rutin olmayan açık uçlu problemlerin, öğrencilerin SAR çerçevesine göre stratejik akıl yürütmelerini incelemede önemli olduğu düşünülmektedir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın yöntemi ele alınmaktadır. Araştırma modeli, katılımcılar, veri toplama yöntemleri, veri toplama araçları ve geliştirme süreci, veri toplama araçlarının uygulama süreci, verilerin analizi, araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği ve araştırmacının rolü ayrıntıları ile açıklanmaktadır.

3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni

Sosyal bilimlerde araştırma yapma sürecinde kullanılan birçok yöntem vardır. Bu yöntemler araştırmanın çıkış kaynağı olan soruların türüne, araştırmacının süreç içerisindeki rolüne, araştırma konusuna yaklaşım biçimine ve konunun şekillendiği ana temasına göre seçilmektedir (Yin, 1994). Bu çalışmada da nitel araştırma yöntemleri, konunun odak noktasında incelenmeye değer araştırma sorularına yanıt verebilecek şekilde kullanılmaktadır.

Nitel araştırma, disiplinler arasında bütüncül bakış açılarına sahip bir yaklaşım ile araştırma sorularını, yorumlayıcı bir incelemeyle ele almaktadır. Nitel araştırmalarda olaylar kendi bağlamında incelenerek araştırmacıların bu olaylara ve bulgularına yükledikleri anlamlar neticesinde yorumlanır (Altunışık, Coşkun, Bayraktaroğlu ve Yıldırım, 2010: 302).

Nitel araştırma görüşme, gözlem ve doküman incelemesi gibi veri toplama tekniklerinin kullanıldığı, olayların ve algıların doğal ortamdaki biçimlerinin bütüncül ve gerçekçi bir bakış açısıyla ortaya konmasına imkân veren nitel süreçler içeren bir araştırma olarak tanımlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s. 39). Wiersma (2000) farklı kuramsal temellere dayanan nitel ve nicel araştırmalar hakkında, nicel araştırmanın nedenleri, ilişkileri ve sonuçları belirlemek için kullanıldığını; nitel araştırmanın ise bir olayı derinlemesine anlama amacıyla özel bir durumdan yola çıkarak genel bir sonuca ulaşmada tümevarımsal bir süreç içerdiğini belirtmektedir.

Bu çalışmada sekizinci sınıf öğrencilerinin rutin olmayan açık uçlu cebir problemlerinde stratejik akıl yürütmelerinin incelenmesi amaçlandığından nitel araştırma yöntemlerinin kullanılması uygun görülmüştür. Nitel araştırmalarda duruma odaklanılır ve amaç derinlemesine bir incelemedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Araştırmanın amaçları doğrultusunda incelenen durumun derinlemesine bir bakış açısıyla ortaya konması gerektiğinden örnek olay çalışması (case study) araştırma modeli olarak belirlenmiştir.

Bir araştırma yöntemi olarak kabul edilen örnek olay çalışmasının literatürde durum çalışması, özel durum çalışması ya da vaka çalışması gibi farklı isimleri bulunmaktadır. Örnek olay çalışmaları *durum* odak noktasıdır. Gerring (2007) durumun belirli bir zaman içerisinde tek bir nokta üzerinden gözlemlenen olgu olduğunu belirtmiştir. Miles ve Huberman (1994) durumu sınırlı bir bağlam içinde daima gerçekleşen bir olgu olarak tanımlamaktadırlar.

Örnek olay çalışması, araştırılan konu ya da durumun derinlemesine bir şekilde boyamsal olarak incelenmesinde kullanılması gereken bir yöntemdir (Cohen ve Manion, 1994). Chmiliar (2010) örnek olay çalışmasını, sınırlı bir sistem içerisinde olgunun nasıl çalıştığı ve işlediği hakkında çoklu veri toplama kullanılarak sistematik bilgi toplama ve derinlemesine inceleme içeren bir metodolojik yaklaşım olarak tanımlamaktadır. Creswell (2007) ise örnek olay çalışması ile ilgili birçok tanımı içinde bulunduracak nitelikte bir açıklama yapmıştır. Ona göre örnek olay çalışması; araştırmacının sınırlandırılmış bir veya birkaç durumu belli bir zaman diliminde çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları (görsel-işitsel araçlar, görüşme, gözlem, doküman, rapor) ile derinlemesine incelenen durumların ve bu durumlara bağlı temaların tanımlandığı nitel bir araştırma yöntemi ve yaklaşımıdır (Creswell, 2007).

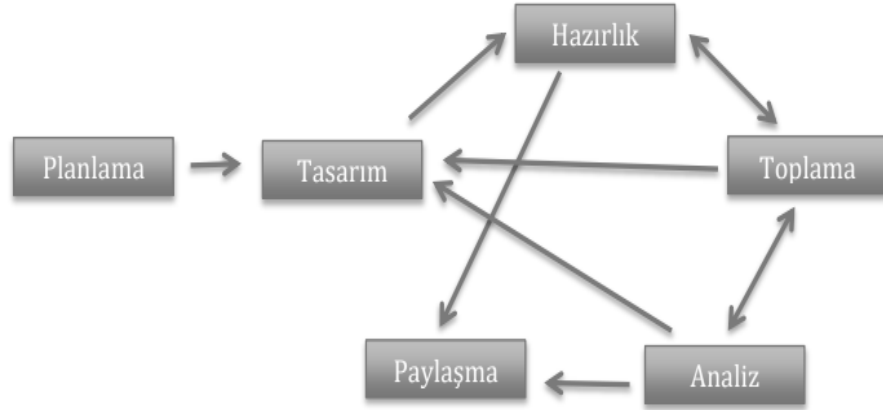
Araştırmada okul matematiğinde farklı başarı düzeylerinde olan öğrencilerin stratejik akıl yürütmeleri incelenirken derinlemesine, anlamlı ve gerçekçi bir bakış sunulmak istendiğinden örnek olay çalışmasının bu amaca hizmet edeceği düşünülmektedir. Ayrıca sınırlı örneklem seçimi, birden fazla veri toplama aracının kullanılması (öğrencilerin yazılı materyalleri, mülakat, video kaydı) ve durumun detaylı bir şekilde incelenmesi de bu yöntemin seçilmesinde etkili olmuştur.

Örnek olay çalışmaları karmaşık yapıya sahip sosyal olayların anlaşılması arzusu ile ortaya çıktığından, gerçek yaşam olaylarının anlamlı ve bütünsel özelliklerini araştırmaya imkân vermektedir (Yin, 1994). Burada öğrencilerin düşünme süreçlerinden yola çıkarak bir genelleme yapmaktan ziyade bu süreci oluşturan stratejik akıl yürütme bileşenleri ile derinlemesine bir inceleme söz konusudur. Öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini tetikleyen, etkileyen ilişkileri ve nedenlerini ortaya koymak, belli bir sistematiklik içerisinde açıklamalara ve yorumlara gerçek bir durum üzerinden ulaşmak hedeflenmektedir. Yin (1994:13) de bu durumla ilgili olarak şu açıklamalara yer vermektedir:

Örnek olay çalışmaları, olay ve bağlam arasındaki başlıca sınırların açıkça ifade edilmediği durumlarda olayları kendi bağlamında incelemek amaçlanır. Bu çalışma türünde çoklu kanıtlar sunabilmek için birden fazla kaynağa ihtiyaç vardır. Veri toplama ve analiz etme süreçlerinde

ise önceki teorik, kuramsal ya da kavramsal önerilerden rehber olması açısından yararlanılmalıdır.

Yin (2013) çalışmasında, örnek olay çalışma sürecini Şekil 2'deki gibi bir şema yardımıyla tanımlamıştır.



Şekil 2. Örnek olay çalışması sürecinde yer alan aşamalar ve ilişkileri.

Örnek olay çalışması, doğrusal aşamalar içeren fakat bu aşamaların tekrarlı bir şekilde geliştiği bir süreçtir (Yin, 2009). Aşamalar arasında geçişler olabilir ve süreç içerisinde önceki basamaklara geri dönülerek işlem yapılabilir. Şekil 2'de oklarla bu sürecin işleyişinin şematize edilmiş hali verilmiş ve aşamalar gösterilmiştir.

Bu araştırmada örnek olay çalışması için kullanılması planlanan yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar hazırlanırken Şekil 2'de yer alan bu aşamalara dikkat edilmiştir. Örnek olay çalışmasının planlanmasının ardından bu planda yer alan yarı yapılandırılmış klinik mülakatların tasarım sürecinde gerekli hazırlıklar yapıldıktan sonra sorular uzman görüşü ile paylaşılırken, diğer yandan öğrenciler üzerinde uygulanarak veri toplama ve analiz gerçekleştirilmiştir. Bu analizler ile uzman görüşlerinin birlikte değerlendirilmesi sonucunda örnek olay çalışmasının tasarımı tamamlanmıştır. Bu sürece ilişkin detaylı bilgiler ilgili bölümde verilmektedir.

Yıldırım ve Şimşek (2000) örnek olay çalışmalarının *niçin* ve *nasıl* sorularına dayandığını ve araştırmacının kontrolü dışında gerçekleşen bir olguyu derinliğine incelemeyi sağladığını vurgulamaktadırlar.

Bu çalışmalara yöneltilen eleştirilerden belki de en önemlisi örnek olay çalışmaları ile genellemelere ulaşılamayacağıdır. Flyvbjerg (2006) bu yanılgıya karşılık olarak Aristo'nun yerçekimi teorisini çürütürken, Galileo'nun sadece bir kavramsal ve bir de pratik deney ve

sonucunda mantıksal bir önerme kullandığını örnek göstermektedir. Yıldırım ve Şimşek (2000) de deneysel çalışmalarda da tek bir deneyi baz alarak genelleme yapmanın mümkün olduğunu, fakat bu genellenmenin belirlenmiş bir evren yerine kuramsal önermelere yapıldığını ve bu durumun örnek olay çalışmaları için de geçerli olduğunu belirterek örnek olay çalışmalarında analitik genellemeler yapma yoluyla kuramsal önermelerde bulunabilmeyi destekler nitelikte açıklamalar yapmaktadır.

Yin (1994) örnek olay çalışmasını araştırma amaçları doğrultusunda üç tip olarak sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırma; keşfedici (exploratory), açıklayıcı (explanatory) ve betimleyici (descriptive) örnek olay çalışmalarıdır. Araştırma soruları “ne” sorusu etrafında toplanıyor ve araştırma verilerinde araştırılan olgu keşfedilmek isteniyorsa bu durum keşfedici örnek olay çalışması kategorisinde yer almaktadır. Betimleyici örnek olay çalışması ise önceden yapılmış çalışmalarda ortaya konulmuş olguları betimlemeyi amaçlar ve incelenen olguya ait alt kümeleri ve anahtar kavramları betimleyerek kavramsallaştırmayı hedefler (Ozan-Leylum, Odabaşı, Kabakçı-Yurdakul, 2017).

Bu çalışma amaçları doğrultusunda açıklayıcı örnek olay çalışması kategorisinde incelenmiştir. Çünkü açıklayıcı örnek olay çalışmasında “neden” ya da “niçin” sorularını yanıtlamak amaçlanır (Ozan-Leylum, Odabaşı, Kabakçı-Yurdakul, 2017). Bu çalışmada, problem cümlesinde belirtildiği üzere öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçlerinin nasıl olduğunun incelenmesi amaçlanmaktadır ve bu sebeple açıklayıcı örnek olay çalışması olarak planlanması uygun görülmüştür.

Nitel araştırmalarda genellikle çevreyle ilgili, süreçle ilgili ve algılarla ilgili olmak üzere üç tür veri toplanmaktadır. Örnek olay çalışmalarda ise çoğunlukla algılar temel alınır. Çünkü algılara ilişkin veriler, araştırmanın odak noktasında yer alan bireylerin düşünme süreçlerine ilişkin verilerdir (Yıldırım ve Şimşek, 2008: 40). Bu verileri toplamak için araştırmacılar çoğunlukla mülakat, gözlem ve yazılı materyaller gibi yöntemleri kullanmaktadır. Bu örnek olay çalışmasında öğrencilerin problemlere verdikleri yanıtların olduğu yazılı materyaller ve mülakat yöntemi kullanılmaktadır.

Örnek olay çalışmalarda nitel yöntemlerden en yaygın kullanılan yöntem mülakat (görüşme) yöntemidir. Mülakatlar, kaynağın kendisinden durumu anlamaya ve açıklamaya yönelik bilgiler elde edilmesine olanak sağladığı için örnek olay çalışmalarının doğasında bulunan olguyu anlama çabası ile paralel bir çalışma metodu sunmaktadır. Mülakatlarda, bireylerin öznel deneyimlerini, duygu ve değerlerini, bakış açılarını ve algılarını ortaya koymalarına olanak sağlanması bu yöntemi güçlü kılan özelliklerinden biridir (Karataş, 2015).

Mülakat sürecinin yazılı materyallerden elde edilen veriler ile desteklenmesi araştırma geçerliliğini ve güvenilirliğini artırır (Yıldırım ve Şimşek, 2008: 40-41).

Örnek olay çalışmasında öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi için yazılı materyal olarak açık uçlu cebir problemleri kullanılmıştır. Öğrencilerin bu problemleri çözmesinin hemen ardından yarı yapılandırılmış mülakat soruları öğrencilere yönlendirilmiştir. Yarı yapılandırılmış mülakatlarda araştırmacı sürecin akışına bağlı olarak yarı yapılandırılmış formda yer alan sorulardan farklı, yan ya da alt sorular yöneltebilir. Yarı yapılandırılmış mülakat, araştırmanın amaçları doğrultusunda derinlemesine bir inceleme için öğrencilerin yanıtlarının daha iyi anlaşılmasını ve detaylandırılmasını sağlamaktadır.

3.2. Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını Ağrı ilindeki resmi bir ortaokulda öğrenim gören 8. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Araştırmanın katılımcılarının sekizinci sınıf öğrencileri arasından seçilmesinin gerekçesi, bu öğrencilerin geçmiş yıllarda öğretim programında yer alan cebir öğrenme alanına ilişkin tüm konuları öğrenmiş olmaları ve birçok problem türü ile karşılaşmış olmalarıdır.

Örnek olay çalışmalarında amaç genelleme yapmaktan çok, özel bir durumun derinlemesine incelenmesidir. Bir başka deyişle, örnek olay çalışmasının en önemli özelliği, belirlenmiş bir duruma veya az sayıdaki durumlara yoğunlaşmayı gerektirmesidir. Araştırmada açıklayıcı örnek olay çalışması deseni kullanılmıştır. Bu nedenle az sayıda katılımcı ile stratejik akıl yürütme sürecine odaklanma, ayrıntılara dikkat etme ve sürece ilişkin olası açıklamaları geliştirme hedeflendiğinden 6 katılımcı ile çalışılmıştır. Bu katılımcıların seçiminde örnekleme yöntemlerinden amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme, bilgi açısından zengin olan özel durumlarda derinlemesine inceleme yapmaya olanak sağlayan bir örnekleme türüdür (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu yönüyle araştırma desenine uyum sağlamaktadır.

Araştırma problemlerine en iyi cevap alınabilecek katılımcıları veya çalışma koşullarını amaca yönelik seçmek nitel araştırmaların en önemli unsurlarındandır (Creswell, 2014). Bu bağlamda, amaçlı örnekleme tekniklerinden ölçüt örnekleme tekniğinin kullanılması çalışmanın veri kaynaklarını zenginleştirmesi açısından uygun görülmüştür. Ölçüt örnekleme önceden belirlenmiş bazı önem ölçütlerini gözden geçirmeyi gerektirmektedir (Patton, 2014). Söz konusu ölçüt veya ölçütler önceden hazırlanmış bir ölçüt listesinden alınabilir ya da araştırmacı tarafından oluşturulabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Dolayısıyla sınıf öğretmenleriyle görüşülen 8. sınıf öğrencilerinin sözlü ifade becerilerinin iyi

düzeyde olması birinci ölçüt, öğrencilerin okuldaki akademik başarılarına göre çeşitli başarı düzeylerinde olmaları ikinci ölçüt, pandemi sürecinde derslere eksiksiz katılım sağlamış öğrencilerin seçilmesi üçüncü ölçüt ve öğrencilerin gönüllü olarak araştırmada yer almaları dördüncü ölçüt olarak dikkate alınmıştır. Akademik başarıları yüksek, orta ve düşük seviyede olan ikişer öğrenci olmak üzere toplam altı öğrencinin seçimi bu ölçütler sonucu gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin seçimi gönüllülük ilkesi esas alınarak gerçekleştirilmiş ve öğrencilere gerekli bilgilendirmeler yapılmıştır.

Bunların yanı sıra öğrencilerden oluşan örneklemin seçiminde kız erkek dengesine dikkat edilmiş ve cinsiyet faktöründen kaynaklanabilecek muhtemel etkilerin ortadan kaldırılması hedeflenmiştir. Öğrencilerden üçü kız, diğer üçü ise erkektir. Ayrıca araştırmada öğrencilerin isimlerinin gizli tutulması amacıyla başarı düzeyleri de göz önünde bulundurularak akademik açıdan yüksek olan iki öğrenci için Y1 ve Y2, orta düzeydeki iki öğrenci için O1 ve O2, düşük düzeydeki iki öğrenci için ise D1 ve D2 şeklinde kodlar kullanılmıştır. Bu öğrencilerin akademik başarı ve cinsiyet dağılımları Tablo 2’de belirtildiği gibidir.

Tablo 2

Araştırmaya katılan öğrencilerin akademik başarı ve cinsiyet dağılımları

Öğrenci	Akademik başarıları	Cinsiyet
Y1	Yüksek	Kız
Y2	Yüksek	Erkek
O1	Orta	Kız
O2	Orta	Erkek
D1	Düşük	Erkek
D2	Düşük	Kız

Öğrencilerin akademik başarıları belirlenirken 5, 6 ve 7. sınıfın iki döneminde aldıkları matematik karne notları ile 8. sınıfın ilk döneminde aldıkları matematik karne notları dikkate alınmıştır. Araştırma 8. sınıfın bahar döneminde gerçekleştirildiği için bahar dönemine ait karne notları verilmemiştir. Tablo 3’de öğrencilerin geçmiş dönemlerdeki matematik karne notları verilmiştir.

Tablo 3

Öğrencilerin geçmiş dönemlere ait matematik dersi karne notları

Öğrenci	5.Sınıf	6.Sınıf	7.Sınıf	8.Sınıf
---------	---------	---------	---------	---------

Y1	94,5	100	100	100	100	100	100
Y2	93,6	98	100	100	95	95	100
O1	82,5	78	82,6	84	80	80	80
O2	77	80	74,5	80,6	80	80	80
D1	45	51,6	54,5	50	65	65	65
D2	30	57	42	48,9	60	60	60

Çalışmaya katılan öğrencilerin akademik başarıları okul not sistemindeki not aralıklarından yararlanılarak belirlenmiştir. Buna göre notu 70'ten az olan öğrenciler düşük; notu 70 ile 84 arasında olan öğrenciler orta; notu 85 ve üstü olan öğrenciler ise yüksek akademik başarıya sahip öğrenciler olarak nitelendirilmiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları ve Geliştirme Süreçleri

Araştırmada veri toplama aracı olarak Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu ve Yarı Yapılandırılmış Klinik Mülakat Soruları kullanılmıştır. Ayrıca yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar sırasında video kayıtları alınmış ve veri toplama sürecinde bu kayıtlardan yararlanılmıştır.

3.3.1. Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu

Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu Ek 3'te verilmektedir. Açık uçlu problemler matematik dersi öğretim programındaki tüm sınıfların cebir öğrenme alanında yer alan kazanımların dışına çıkmayacak şekilde araştırmanın hedeflerine yönelik hazırlanmıştır. Bununla birlikte literatür taraması açık uçlu problemlerin oluşturulması ve nitelikleri üzerine birçok araştırmanın varlığını göstermektedir. Bu araştırmalara ikinci bölümde değinilmiştir.

Araştırmada kullanılan açık uçlu cebir problemlerinin oluşturulmasında Lepak ve diğerleri (2018) çalışmasında yer alan SAR yetkinlikleri çerçevesi temel olarak kabul edilmiştir. Bununla birlikte önceki yıllardaki yayımlanmış kılavuz kitaplar, kaynak kitaplar, MEB ortaokul ders kitapları, PISA soruları ve ilgili literatür de dikkate alınarak problemler tekrar geliştirilmiştir. Genel olarak problemlerin bağlamında senaryonun varlığının önemine dikkat edilmiş, çözüm süreçlerinde ise keşfetme ve anlama, temsil kullanma ve formüle etme, planlama ve uygulama, kontrol etme ve yansıtma gibi PISA değerlendirme süreçlerini içeren alt maddeler kullanılarak SAR yetkinliklerini açığa çıkarmayı amaçlayan yönergeler oluşturulmuştur. Ayrıca problem durumlarında formüle etmeye değer genellemelere yer verilmesi ve cebirsel ilişkilerin bulunması öğrencilerin SAR yetkinliklerini değerlendirme sürecinde gerekli görülmüştür.

Öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçlerinin incelenmesinde farklı çalışma ve çözüm süreçlerine yönelik problemler, zengin bir inceleme seçeneği sunmaktadır. Bu tipteki açık uçlu problemler, öğrencilerin akıl yürütme stratejilerini ortaya koymaktadır. Bu amaçlar doğrultusunda gerekli kriterler tekrardan gözden geçirilerek üç problemin elenmesi sonucu, açık uçlu cebir problemleri formu 7 problemten oluşturulmuştur. Açık uçlu cebir problemleri genel olarak,

- Problemde verilen matematiksel bağlamı anlamalarını ve yorumlamalarını,
- Nicel ilişkileri ve görsel bilgileri belirlemelerini ve kullanmalarını,
- Problemde yer alan gereksiz bilgileri ayırt edebilmelerini,
- Nicel ilişkileri kelimelerle ve matematiksel dili kullanarak ifade etmelerini,
- Problemde verilen miktarların ilişkilerini ve örüntüleri keşfetmelerini,
- Problemde yer alan ilişkileri, örüntüleri ve genellemeleri formüle etmelerini,
- İlişkileri ifade ederken denklemlerden ve cebirsel ifadelerden yararlanmalarını,
- Çoklu temsil biçimlerini bir strateji olarak kullanabilmelerini,
- Farklı temsiller arasında geçiş yapmalarını ve bu durumu açıklamalarını,
- Ulaştıkları sonuçlardan emin olmalarını ve bu sonuçları kontrol etmelerini,
- Problemleri çözmeye gerçekleştirdikleri tüm aşamaları ikna edici bir şekilde açıklamalarını

amaçlamaktadır. Hangi problemin hangi hedefi nasıl amaçladığı ise problemlerin verildiği bölümde detaylı olarak açıklanmaktadır.

Hedeflenen amaçlar doğrultusunda ilgili literatür desteğiyle hazırlanan problemlerin incelemek istediği yetkinliklere uygunluğu için iki matematik eğitimcisiinden uzman görüşleri ve ortaokulda görev yapan iki matematik öğretmenin görüşleri alınmıştır. Bu aşamada hazırlanan problemlerin her biri için uzmanların görüşlerini belirtebilecekleri alanların yer aldığı tablolar oluşturulmuş ve Uzman Görüşü Formu şeklinde uzmanlara sunulmuştur. Formda Lepak ve diğerleri (2018) çalışmasında yer alan SAR çerçevesinden yararlanıldığı belirtilmiş ve SAR yetkinliklerinin açıklamaları verilerek açık uçlu cebir problemlerinin bu yetkinliklere uygunluğu konusunda uzmanların görüşlerine başvurulduğu açıklanmıştır. Uzman Görüşü Formu Ek 5'te sunulmuştur. Tablo 4'te bu Uzman Görüşü Formu'nun genel formatının nasıl olduğu gösterilmiştir.

Tablo 4

Uzman Görüşü Formu Örneği

Stratejik Cebirsel Akıl Yürütme Yetkinlikleri	Ters Piramit Problemine Yönelik Uzman Görüşü		
	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		

Uzman Görüş Formu'nda stratejik akıl yürütme yetkinlikleri bölümüne SAR yetkinlikleri yazılmış ve problem maddelerinin bu yetkinliklere uygun olup olmadığına ilişkin uzmanlardan görüş belirtmeleri istenmiştir. Formlar, uzmanlara elektronik posta yoluyla ulaştırıldıktan yaklaşık bir ay sonra geri dönüt alınmıştır.

Alınan geri dönütlerde uzmanlar, problemlerin uygun olduğunu belirtmiş ve bazı problem maddelerine yönelik önerilerde bulunmuşlardır. Problemlere son halinin verilmesi için bu öneriler dikkate alınmıştır.

Uzmanlar, Ters Piramit problemindeki (b) maddesinin daha anlaşılır olması için bir düzenleme önermiştir. Bu öneri doğrultusunda başlangıçta “Örüntünün adımlarına bağlı olarak oda sayısındaki değişimi gösteren bir tablo, grafik vb. oluşturabilir misiniz? Oluşturduğunuz bu gösterimi cümlelerinizle yorumlayınız.” şeklinde ifade edilen (b) maddesi, “Örüntünün adımlarına bağlı olarak *katlardaki* oda sayısındaki değişimi gösteren bir tablo, grafik *ya da şema* çiziniz. Çizdiğiniz bu gösterimle ilgili düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.” şeklinde yeniden düzenlenmiştir. Benzer olarak Harflerin Oyunu probleminde “Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu nasıl kontrol edersiniz? Düşüncelerinizi açıklayınız.” şeklinde ifade edilen (f) maddesi, uzmanın önerisi üzerine “Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu *kontrol* ediniz. Düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.” şeklinde yeniden düzenlenmiştir. Bu öneriler üzerine diğer problemlerdeki maddeler tekrar gözden geçirilerek, sorularda daha anlaşılır ifadelerin kullanılmasına özen gösterilmiştir.

Bir diğer geri dönüt ise Timuçin İnternet Kafede probleminde yer alan (f) maddesine ilişkin bir uzmanın yaptığı yorum ile ilgilidir. Problemin (f) maddesindeki “Hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin bir haftada 20 TL ödeme yapmıştır. Buna göre bir hafta boyunca kaç saat bilgisayar kullanmıştır?” sorusuna yönelik uzmanın yaptığı yorum:

“Bilgisayarı 5 kere açtırdığı için zaten 10 TL harcanmış oluyor. Geri kalan 10 TL internet kullanımını gösteriyor. Saati hesaplamak için öğrenci 10 TL’yi 50 kuruşa bölüp cevabı 20

bulabilir. Fakat biraz daha fazla akıl yürüten öğrenci her gün 4 -5 saat arası kullanımla da aynı ücreti ödeyeceğini fark edecektir. Bu durumda bilgisayar kullanım saati 20 saat ile 25 saat arasında (25 hiç olmayacak ama) değişebilecektir. Yani şöyle bir eşitsizlik durumu ortaya çıkabilir: $20 \leq x < 25$.”

şeklindedir. Problemde var olan bu durum, C1 yetkinliğinin incelenmesi sürecinde gömülü matematiği anlamlandırma bileşeninin sağlanması için gerekli görülmüştür.

Uzmanların yaptığı bir diğer değişiklik önerisi Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde verilen denklem ile ilgilidir. Problemde verilen “Bakteri Sayısı(B.S.) = $8 + 16 \cdot \text{Dakika}(D)$ ” yani $B.S = 8 + 16 \cdot D$ ” şeklindeki denklemde dakika değişkeni ile 16 katsayısının çarpım durumunda olduğunu daha anlaşılır şekilde ifade edebilmek için “.” sembolü yerine “x” sembolünün kullanılması gerektiğine karar verilmiştir. Böylece denklemin son hali yeniden “Bakteri Sayısı(B.S.) = $8 + 16 \times \text{Dakika}(D)$ ” yani $B.S = 8 + 16 \times D$ ” olarak düzenlenmiştir. Ayrıca Uzman Görüşü Formu’nda aynı problemin “Timuçin’in grafiğini doğru çizmesine yardımcı olmak amacıyla, dakikada değişen bakteri sayısını gösteren bir tablo oluşturunuz.” şeklinde ifade edilen (c) maddesinin temsil oluşturma ile ilgili olduğu için C3 yetkinliğini sağladığı belirtilmişti. Uzmanların, bu maddenin aynı zamanda miktarları ve aralarındaki ilişkileri ifade edebilmeyi gerektirdiği için C2 yetkinliğini de incelemeye fırsat verdiğini belirtmeleri üzerine verilerin analizinde bu öneri dikkate alınmıştır.

Uzmanların görüşleri doğrultusunda problemlerde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra problemlerin hedeflenen amaçları gerçekleştirip gerçekleştirmediğini belirlemek için gönüllü olan öğrenciler ile çalışılmıştır. Bu öğrencilerin öğretmenlerinden görüşleri alındıktan sonra cinsiyet ve matematik başarıları dikkate alınan dört öğrencinin seçilmesi uygun görülmüştür. Öğrenciler tarafından problem metinlerinin okunabilmesi, amaçlandığı şekilde problemde yer alan bağlamların anlaşılabilmesi ve hedeflenen yetkinlikler doğrultusunda verilere ulaşılabilmesi konularında problemlerin araştırmanın amacına uygunluğunu görebilmek için ya da varsa düzeltilmesi gereken noktaların ortaya çıkabilmesi için Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu, bu dört öğrenciye uygulanmıştır.

Uygulama süreci pandemi koşulları sebebiyle çevrim içi gerçekleştirilmiştir. Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu öğrencilere öğretmenleri tarafından elektronik ortamdan ulaştırılmış ve yazılı çözümlerini göndermeleri için öğrencilere bir gün süre verilmiştir. Öğrencilerin yazılı çözümlerini göndermelerinin ardından problemlere verdikleri yanıtlar incelenmiştir. Bu inceleme, öğrencilerin verdikleri yanıtların hangi yetkinliğe ilişkin olduğunu tespit etme ile gerçekleştirilmiştir. Bu tespitler ile problem maddelerinin hedeflenen SAR

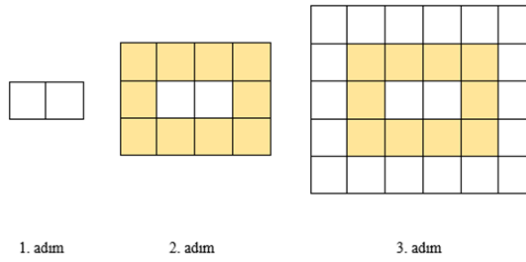
yetkinliğe ilişkin olup olmadığı karşılaştırılmıştır. Daha sonra her bir öğrenci ile problemleri çözme süreçlerine ilişkin mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bu mülakatlarda, öğrencilerin problemi okuduklarında ne anladığını kendi cümlelerini kullanarak ifade etmeleri istenmiştir. Ayrıca problemlerde anlamadıkları bir kısım olup olmadığı sorulmuş ve problemleri nasıl çözdüklerini anlatmaları istenmiştir.

Öğrenciler ile yapılan bu ön çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin problemleri anladığı ve problemlerin bağlamına ilişkin doğru yorumlar yapabildiği görülmüştür. Problemlerin maddelerinin hedeflenen SAR yetkinliğine yönelik olup olmadığı öğrencilerin çözümlerinin incelenmesinin ardından tekrar düzenlenmiştir. Örneğin, problemlerde yer alan maddelerden bazılarının C3 yetkinliğini değerlendirdiği düşünülürken, aynı zamanda C2 yetkinliğini de değerlendirebildiği görülmüştür. Bu problem maddeleri ile ilgili gerekli düzenlemeler, verilerin analizi sürecinde kullanılmak üzere kaydedilmiştir.

Yeniden düzenlenen açık uçlu cebir problemleri aşağıda verilmiştir. Uzman görüşü sonrası alınan dönütlerin, öğrencilerle yapılan çalışmaların ve ilgili literatürün üzerinde durduğu noktaların dikkatle incelenmesi sonucu, açık uçlu cebir problemlerinin her birinin hangi tür problem çeşidini yansıttığı, bu problemlerin neyi amaçladığı ve öğrencilerin olası cevaplarına karşılık incelemelerin nasıl gerçekleşeceğine temel teşkil etmesi açısından problemlerin alt maddelerinin gerekli açıklamaları yapılmıştır. Ayrıca problemlerin ortaokul matematik dersi öğretim programındaki hangi kazanımları içerdiği her problemin altında verilmiştir. Problemlerin amacı bu kazanımları ölçmek olmasa da araştırmanın öğretim programı ile uyumunun belirtilmesi gerekli görülmüştür. Bununla birlikte problemlerin SAR çerçevesinde yer alan yetkinlikleri nasıl yansıttığı, problemlerde yer alan alt maddelerin hangi yetkinliklere yönelik sorular içerdiği açıklanmıştır. Ayrıca öğrencilerden beklenen cevaplara yer verilerek bu cevapların SAR çerçevesi kapsamında nasıl değerlendirileceği belirtilmiştir.



Dünyadaki en çirkin 30 binadan biri olarak kabul edilen Slovak Radyo binası, Bratislava'daki en ürkütücü mimarlık örneklerinden biri olma özelliğini koruyor. Tersine çevrilmiş bir piramit şeklindeki 80 metrelik bina, 1967'de Slovak mimarlar Svetko, Ďurkovič ve Kissling tarafından tasarlandı.



Mimar Sinan Bey Slovak Radyo binasından esinlenerek hazırladığı sanat merkezi planında yukarıdaki gibi bir örüntüden faydalanmak istemektedir. İlk katı 1. adımdaki gibi iki odalı olacak şekilde 8 katlı bir sanat merkezi planı hazırlayacaktır. Örüntüdeki kare sayıları her bir katta bulunacak oda sayısına karşılık geldiğine göre;

- Sanat merkezinin 4. katında bulunacak oda sayısı kaçtır? Sizce katlardaki oda sayısındaki değişim nasıl gerçekleşmektedir?
- Örüntünün adımlarına bağlı olarak katlardaki oda sayısındaki değişimi gösteren bir tablo, grafik ya da şema çiziniz. Çizdiğiniz bu gösterimle ilgili düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.
- Bu örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade ediniz. Oluşturduğunuz cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol ediniz. Oluşturduğunuz cebirsel ifadeyi kullanarak d, e ve f maddelerini çözünüz.
- 56 odanın bulunacak kat kaçınıcı kattır?
- 132 odanın bulunacağı kat kaçınıcı kattır?
- Sanat merkezinin an üst katında bulunacak oda sayısı kaçtır?

Şekil 3. Ters Piramit problemi.

Problemde öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir durum verilmiş ve bu durumu örüntüde verilen her bir adım ile ilişkilendirmeleri beklenmiştir. Ayrıca öğrencilerden verilen örüntüyü incelemeleri, örüntünün kuralını bulmaları, bu kuraldan yararlanarak problem maddelerine cevap vermeleri beklenmektedir. Problem türünün genellemeleri formüle etme becerisine yönelik olduğu söylenebilir. Ters Piramit problemi, ortaokul matematik dersi öğretim programında yer alan,

- Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar.

- Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
- Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.
- Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.

kazanımlarına yöneliktir.

Problemin (a) ve (f) maddeleri yapı itibarıyla birbirine benzemektedir ve örüntünün herhangi bir adımını bulmada öğrencilerin hangi çözüm stratejisini kullanacaklarını yansıtmayı amaçlamaktadır. Her iki maddede de öğrencilerden örüntünün genel kuralını anlayıp (C1) sonraki adımlara ulaşmaları beklenmektedir. Cevabı bulma sırasında SAR'ları güçlü olan öğrenciler örüntüdeki gömülü matematiği keşfederek (C1), örüntüde yer alan miktarları belirleyebilir (C2a), cebirsel sembollerden yararlanarak ilişkileri ifade edebilir ve genel kuralı bulup bu kuralı cebirsel bir gösterim ile ifade ederek (C3a) kullanabilirler. Fakat ilişkiyi ifade etmede cebirsel dili iyi olmayan öğrenciler sayarak veya çizerek sonuca ulaşmaya çalışacaklardır. Bu soruların iki tane olmasının sebebi, birine doğru cevap verip diğer soruya yanlış cevap veren öğrenciler için iki farklı yoruma ulaşılacaktır: dikkat dağınıklığı ya da öğrencinin örüntüyü anlayamaması sonucu sayarak ilerlemesi sırasında hata yapması. Sonuç itibarıyla sayarak ilerleme yapan öğrencilerin ilişkileri cebirsel temsiller kullanarak ifade etmede (C3a) güçlük çektikleri yorumunun yapılması kaçınılmazdır.

Problemin (b) ve (c) maddeleri cebirsel temsiller üretme/oluşturma ile ilgilidir ki bu da bu maddelerin SAR yetkinliklerinde C3 yetkinliğinin içeriğine ilişkin olduğunu göstermektedir. Ayrıca bu maddelerin amaçları, PISA değerlendirmesinde de yer alan temsil kullanma ve formüle etme süreçleri ile ilişkilidir. Burada öğrencinin farklı temsiller kullanması (C3a) ve genellemeleri formüle etme sürecinde bu temsillerin arasında bağlantı kurması (C3b) beklenmektedir.

Problemin (d) ve (e) maddelerinde ilk ve son maddelerden farklı olarak katta bulunan oda sayısı değil, verilen oda sayısından yola çıkarak kaçınıcı kat olduğu sorulmaktadır. Bu iki soruya verilecek cevaplar öğrencinin cebirsel ilişkiyi anladığına dair önemli bir ölçüt teşkil edecektir. Burada SAR'ları güçlü olan öğrencilerin temsil üretme süreçlerinde oluşturdukları stratejiler neticesinde bu temsilleri kullanarak işlemlerini düzenli/sistematiik bir biçimde yapmaları (C4a) ve buldukları sonuçları kontrol etmeleri (C4b) beklenmektedir.

Ayrıca problemin tüm maddelerinde yapacakları açıklamaların ikna ediciliği C5 yetkinliğini sağlayabilmeleri açısından önem arz etmektedir. Öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlayabilmeleri için açıklamalarının gerekçelerini ve cebirsel nedenleri barındırması gerekmektedir.

Tablo 5

Ters Piramit probleminde yer alan maddelere ilişkin SAR yetkinliklerinin dağılımı

Alt Maddeler	Alt Maddelerde Yer Alan Yönergeler	Yetkinlik (C)
a	Sanat merkezinin 4. katında bulunacak oda sayısı kaçtır?	C1, C2
	Sizce katlardaki oda sayısındaki değişim nasıl gerçekleşmektedir?	C2
b	Örüntünün adımlarına bağlı olarak katlardaki oda sayısındaki değişimi gösteren bir tablo, grafik ya da şema çiziniz.	C2, C3a
	Çizdiğiniz bu gösterimle ilgili düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.	C3b
c	Bu örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade ediniz.	C3a
	Oluşturduğunuz cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol ediniz.	C4b
	Oluşturduğunuz cebirsel ifadeyi kullanarak d, e ve f maddelerini çözünüz.	C3b
d	56 odanın bulunacağı kat kaçınıcı kattır?	C4a
e	132 odanın bulunacağı kat kaçınıcı kattır?	C4a
f	Sanat merkezinin en üst katında bulunacak oda sayısı kaçtır?	C4a, C5

Tablo 5'te Ters Piramit probleminin alt maddelerinde yer alan yönergelerle ilişkin yukarıda yapılan açıklamalar SAR yetkinliklerinin dağılımı gösterilerek özetlenmektedir.

A, D, Ğ, J, N, ...

Yukarıda alfabemizin harflerinin yer aldığı bir örüntü verilmiştir. Timuçin ve Burçin alfabemizin harflerini kullanarak bir kurala göre oyun oynamaktadırlar. Oyunun kuralına bağlı olarak sırası gelen oyuncu alfabetik sırayı dikkate alarak bir harf söylemektedir. Alfabenin sonuna geldiklerinde kurala bağlı olarak başa dönmektedirler. Burçin ilk harfi söyleyerek oyunu başlatmıştır ve yukarıdaki gibi devam etmişlerdir.

- Sizce örüntüdeki harfler söylenirken neye dikkat edilmektedir?
- Harflerle oluşturulan örüntüyü matematiksel olarak yazmayı deneyiniz. Her bir adımda örüntünün nasıl ilerlediğini açıklayınız.
- Harfleri söylemek için oluşturdukları kuralı şema, tablo, grafikler ya da denklemlerden yararlanarak gösteriniz. Oluşturduğunuz bu gösterimleri (şema, tablo, grafikler, denklem, vb.) kullanarak örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade ediniz ve cümlelerinizle bu işlemlerinizi açıklayınız.
- Burçin'in söyleyeceği 5. harf nedir?
- Timuçin'in söyleyeceği 7. harf nedir?
- Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu kontrol ediniz. Düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.

Şekil 4. Harflerin Oyunu problemi.

Bu problem de genellemeleri formüle etme becerisine yönelik olup öğrencilerin örüntü içerisinde gömülü olan matematiği açığa çıkarmasını hedeflemektedir. Öğrencilerden harflerin alfabeindeki sırasını dikkate alarak örüntüyü matematiksel bir yapıya dönüştürmeleri beklenmektedir. Sonrasında bu örüntüden yola çıkarak cebirsel ilişkiyi fark etmeleri ve kuralı keşfetmeleri istenilenler arasındadır. Harfleri Oyunu problemi, ortaokul matematik dersi öğretim programında yer alan,

- Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar.
- Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
- Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.
- Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.

kazanımlarına yöneliktir.

Problemin (a) maddesinde öğrencinin düşüncelerini açığa çıkarmak önemsenmiş ve örüntüyü keşfetme sürecine destek olmak istenmiştir. Burada öğrencinin problemin bağlamına ilişkin yorumlar yapması da beklenmektedir (C1).

Problemin (b) maddesinde örüntüyü keşfeden öğrenciler için ise miktarları/nicelikleri belirlediklerine (eğer belirleyebildilerse, C2a) dair kanıtlar istenmekte ve bu miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etmeleri (C2b) istenmektedir.

Problemin (c) maddesinde genellemeleri formüle etme becerisine ilişkin temsil oluşturmaları (C3a), bu temsillerden özel olarak cebirsel ifade yazmaları yoluyla temsiller arası dönüşüm yapmaları ve işlemlerini açıklamaları yani tercüme etmeleri (C3b) istenmiştir.

Problemin (d) ve (e) maddeleri de oluşturdıkları temsilleri kullanmalarını ve işlemlerini hassasiyetle sürdürmelerini amaçladığından C4a yetkinliği ile ilişkilidir. Burada öğrenci, Timuçin ile Burçin'in harfleri sırayla söylediğine dikkat etmelidir ki; araştırmacı bu durumda öğrencinin gerektiğinde problem bağlamına başvurma (C4b) yetkinliğine sahip olduğu çıkarımını yapabilir.

Öğrencilerin (f) maddesindeki yönerge ile işlemlerini kontrol etmesi sürecinde başvurdukları stratejilerin neler olduğu gözlemlenmektedir ve ayrıca tüm çözüm stratejileri esnasında SAR'ları güçlü olan öğrencilerin yapacağı açıklamalar C5 yetkinliğini sağlamaları açısından önemlidir.

Tablo 6

Harflerin Oyunu probleminde yer alan maddelere ilişkin SAR yetkinliklerinin dağılımı

Alt Maddeler	Alt Maddelerde Yer Alan Yönergeler	Yetkinlik (C)
a	Sizce örüntüdeki harfler söylenirken neye dikkat edilmektedir?	C1
b	Harflerle oluşturulan örüntüyü matematiksel olarak yazmayı deneyiniz.	C2a
	Her bir adımda örüntünün nasıl ilerlediğini açıklayınız.	C2b
c	Harfleri söylemek için oluşturdukları kuralı şema, tablo, grafikler ya da denklemlerden yararlanarak gösterebilir misiniz?	C3a
	Oluşturduğunuz bu gösterimleri (şema, tablo, grafikler, denklem, vb.) kullanarak örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade ediniz ve cümlelerinizle bu işlemlerinizi açıklayınız.	C3b, C5
d	Burçin'in söyleyeceği 5. harf nedir?	C4a
e	Timuçin'in söyleyeceği 7. harf nedir?	C4a
f	Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu kontrol ediniz. Düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.	C4b, C5

Tablo 6'da Harflerin Oyunu probleminin alt maddelerinde yer alan yönergelerle ilişkin yukarıda yapılan açıklamalar SAR yetkinliklerinin dağılımı gösterilerek özetlenmektedir.

Hangisi daha büyüktür, $n + n$ mi? , $n + 6$ mi?

Şekil 5. “n” Neyi İfade Ediyor? problemi.

Bu problemde amaç öğrencilerin değişkene yükledikleri anlamı analiz edebilmektir. Bu nedenle klinik mülakatlarda öğrencilere “Neden büyüktür?” , “n ne anlama gelmektedir?” gibi sorular yöneltilerek öğrencilerin zihnindeki değişken kavramına yükledikleri anlamlar açığa çıkarılmaya çalışılacaktır. Bu problem sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma becerisine yönelik bir problem türüdür. “n” Neyi İfade Ediyor? problemi, ortaokul matematik dersi öğretim programında yer alan,

- Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar.
- Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar.
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözer.

kazanımlarına yöneliktir.

Öğrencilerden beklenen çözüm senaryoları ışığında eğer öğrenci değişkene iki, üç, dört ya da daha fazla değer verdiğinde farklı durumlar oluştuğunu kestirebilirse (C1) problem

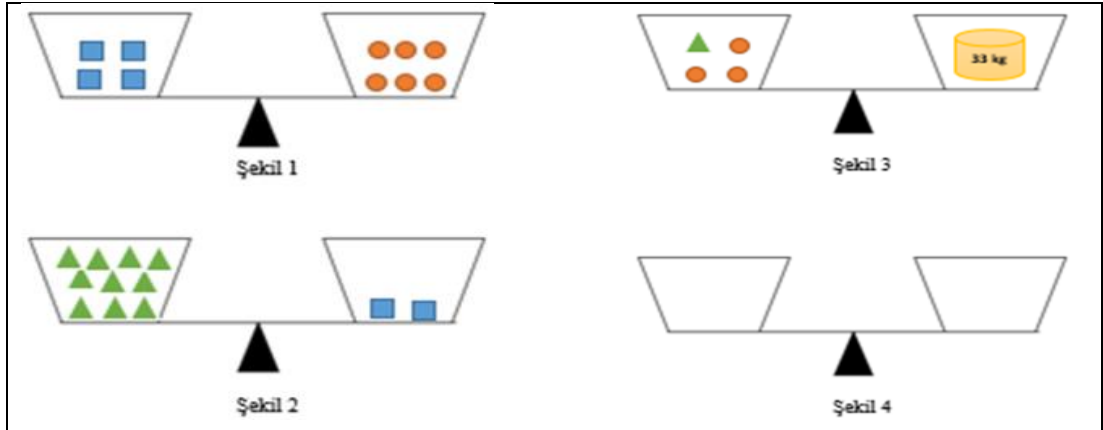
birden fazla yönüyle ele alınır. Değişkene verilen değerler içerisinde kritik değer $n = 6$ değeridir ve öğrencinin bu değere göre çözümün değiştiğini fark etmesi beklenmektedir (C2a). Zira $n = 6$ değerinden küçük değerler için $n + 6$ ifadesi daha büyük, $n = 6$ değerinden büyük değerler için $n + n$ ifadesi daha büyüktür (C2b, C3a). Bu durumu keşfeden öğrenciler bunu kelimelerle ya da sistematik işlemlerle ifade edebileceği gibi tablo, grafik gibi temsiller ile göstermeyi de tercih edebilir ve bunlar arasında dönüşüm yapabilir ya da bunları tercüme edebilir (C3b). Eğer öğrenci bütüncül bir bakış açısı ile problemi değerlendirirse $n = 6$ ‘dan sonra durumun değiştiğinin farkına varabilmeli (C3b) ve matematiksel dilde yazabildiği gibi gerekli açıklamaları da yapabilmelidir (C3b, C5). Değişkene değer verirken bu işlemleri titizlikle ve doğru bir şekilde yapmalıdır (C4a).

Akademik olarak düşük seviyedeki öğrenciler “n” harfinin bir değişken olduğunun farkına varamayabilirler. Değişkenlere değer vererek yorum yapma eylemine başvuramayabilirler. Cebirsel işlemler yaparak bazı sonuçlar elde etmeye çalışabilirler fakat işlemlerde hatalar göze çarpabilir.

Akademik olarak orta seviyedeki öğrencilerin ise bazı cebirsel bilgilere sahip olmaları beklenmektedir. Örneğin “n” ile “n” in benzer terimler olduğu için toplanabileceği, “n” ile “6”nın ise farklı terimler olduğu için toplanamayacağı bu öğrenciler tarafından bilinebilir. Bu seviyede “n” harfinin değişken olduğunun farkına varılabilir fakat değişkene farklı değerler vererek sonuca ulaşılabileceği henüz kestirilemeyebilir. Değişkene sadece bir değer verilip genel hakkında yorum yapılabilir. Orta seviyedeki öğrencilerin probleme tek bir açıdan bakmaları, farklı olasılıkları düşünememeleri durumlarıyla karşılaşılabılır.

Bu problemde eğer öğrenci değişkene değer verdiğinde farklı durumlar oluştuğunu kestirebilirse problem birden fazla yönüyle ele alınır. SAR’ları güçlü olan öğrencilere ait cevaplarda probleme en geniş açıdan bakıldığı ve olası bütün yönlerin incelendiği görülebilir.

Tüm bunların yanı sıra bu problemde yönergelerin ya da problem alt maddelerinin bulunmaması, öğrencinin çözüm sürecinde kendini nasıl yönlendirdiğini gözlemlemek açısından faydalı olacaktır. Öğrencinin miktarları ve ilişkileri anlamlandırması, bağlamı fark etmesi, ilişkileri farklı temsil biçimleri ile ifade etmesi ve gerekli açıklamaları gerektiği yerde yapabilmesi sürecinde SAR yetkinliklerini kendiliğinden ortaya koyması için önemli bir arena sağlayacaktır.



Verilen üç terazi de dengededir.

Şekil 3'deki terazide sol kefedeki bulunan 1 üçgen ve 3 dairenin ağırlıklarının toplamı 33 kilogramlık bidonun ağırlığına eşit olduğuna göre;

- Şekil 1'deki teraziden yola çıkarak kare ve daire arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.
- Şekil 2'deki teraziden yola çıkarak üçgen ve kare arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.
- Şekil 3'teki terazide yer alan ilişkiyi cebirsel gösterimlerle destekleyerek açıklayınız.
- Oluşturduğunuz cebirsel gösterimlerden yararlanarak kare, daire ve üçgenin ağırlıklarını bulabilir misiniz?
- Bulduğunuz değerlerin doğruluğunu kontrol ediniz. Doğru olduğundan emin olma nedenlerinizi birkaç cümle ile ifade ediniz.
- Siz de bu gösterimleri kullanarak denge halinde farklı bir terazi çiziniz.

Şekil 6. Teraziler Nasıl Dengede? Problemi.

Çoklu gösterimlerden yararlanma becerisine yönelik bu problemde öğrencilerin terazilerde yer alan kare, üçgen ve daire gibi şekillerin bilinmeyen değerleri ifade ettiğini bilmeleri, bunların arasındaki ilişkileri terazilerin dengede olma durumundan yararlanarak ortaya çıkarmaları ve çeşitli cebirsel denklemler oluşturarak sonuca ulaşmaları beklenmektedir. Cebirsel ilişkilerle ilgili problemlerde bu gibi çoklu gösterimlerin kullanılması öğrencilerin daha zengin ve derin anlayışlarla bilgiyi anlamlandırmalarına olanak sağlayacaktır (Yerushalmy ve Schwartz, 1993). Teraziler Nasıl Dengede? problemi, ortaokul matematik dersi öğretim programında yer alan,

- Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar.
- Eşitliğin korunumu ilkesini anlar.
- Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.

kazanımlarına yöneliktir.

Bu problemde öğrencilerden verilen denge halindeki terazilerin eşitlik kavramını temsil ettiğini (C1) fark ederek denklemler oluşturmaları beklenmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin kare, üçgen ve dairelerin farklı değişkenler olduğunu ve bu değişkenlerin alacağı değerlerin birbirlerine bağlı olduğunu kestirebilmelidir (C1). Ayrıca öğrencilerin birbiriyle ilişkili denklemleri çözebilecek cebirsel işlem yapma becerisine sahip olmaları gerekmektedir.

(a), (b) ve (c) maddelerinde öğrenci oluşturduğu cebirsel denklemlerden yola çıkarak bilinmeyen değerleri bulmalı ve farklı bilinmeyenlerin birbiri ile oluşturduğu eşitliklerden yararlanarak yerine koyma metodu uygulamalıdır. Örneğin; kareler için a, üçgenler için b ve daireler için c harfi kullanılırsa: $4a = 6c$, $10b = 2a$ ve $b + 3c = 33$ eşitlikleri oluşur. Burada öğrenci ilgili miktarları belirleyerek (C2a) bu miktarlar arasındaki ilişkileri ifade ederken (C2b) cebirsel ifadelerden ve denklemlerden yararlanmalıdır (C3a). Oluşturdukları denklemler arasında bağlantı kurabilen öğrencilerin C3b yetkinliğini sağladıkları yönünde yorumlara yer verilecektir.

(d) maddesinde öğrenci oluşturduğu denklemler arasındaki geçişleri iyi yönlendirmeli ve gerekli bilgilerden yararlanarak harflerin ifade ettiği değerleri bulmalı ve tüm bu işlemlerini titizlikle bir sistematiklik eşliğinde gerçekleştirmelidir (C4a). (e) maddesinde ise öğrenci C4b yetkinliğini ortaya koyabilmesi için işlemlerinin doğruluğunu sözel ifadelerle/kelimelerle ya da matematiksel yollarla kontrol etmeli ve sonuçlarının doğruluğundan emin olmalıdır.

(f) maddesinde öğrencinin terazi oluşturması, C4b yetkinliğinin de kapsamında bahsedildiği üzere farklı temsiller yoluyla anlamlandırma süreçlerine dair kanıtlar sunması açısından önemli bir adım olduğu düşünülmektedir. Tüm bunların yanı sıra öğrencilerin işlemlerini cebirsel nedenler ile desteklemeleri ve açık ifadeler kullanarak açıklayabilmeleri gerekmektedir (C5).

Tablo 7

Teraziler Nasıl Denge? probleminde yer alan maddelere ilişkin SAR yetkinliklerinin dağılımı

Alt Maddeler	Alt Maddelerde Yer Alan Yönergeler	Yetkinlik (C)
a	Birinci teraziden yola çıkarak kare ve daire arasındaki ilişkiyi açıklayınız.	C1, C2, C3, C5
	Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.	C4a
b	İkinci teraziden yola çıkarak üçgen ve kare arasındaki ilişkiyi açıklayınız.	C1, C2, C3, C5
	Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.	C4a
c	Üçüncü terazide yer alan ilişkiyi cebirsel gösterimlerle destekleyerek açıklayınız.	C1, C2, C3, C4a, C5

d	Oluşturduğunuz cebirsel gösterimlerden yararlanarak kare, daire ve üçgenin ağırlıklarını bulabilir misiniz?	C4a
e	Bulduğunuz değerlerin doğruluğunu kontrol ediniz. Doğru olduğundan emin olma nedenlerinizi birkaç cümle ile ifade ediniz.	C4b, C5
f	Siz de bu gösterimleri kullanarak denge halinde farklı bir terazi çizin.	C3b

Tablo 7’de Teraziler Nasıl Dengede? probleminin alt maddelerinde yer alan yönergelere ilişkin yukarıda yapılan açıklamalar SAR yetkinliklerinin dağılımı gösterilerek özetlenmektedir.



Timuçin’in gittiği bir internet kafede bir bilgisayarın açılış fiyatı 2 TL’dir ve her saat başı fiyata 50 Kuruş eklenmektedir. Buna göre;

- Gelen müşterilere kolaylık sağlayabilmek için bilgisayarları kullandıkları süreye bağlı olarak ne kadar ücret ödeyeceklerini gösteren bir tablo oluşturabilir misiniz?
- Oluşturduğunuz tablodan yararlanarak bilgisayarı kullanma süresi ile ücret arasındaki ilişkiyi içeren bir denklem kurabilir misiniz? Bu denklemi kurarken nelere dikkat ettiğinizi cümlelerinizle açıklayınız. Bu denklemi problemin diğer maddelerini çözerken kullanınız.
- Bilgisayarı açtıktan sonra bir saati doldurmadan eve dönen Timuçin kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?
- Başka bir gün ödevini yapmak için internet kafeye giden Timuçin bilgisayarı 5 saat boyunca kullandıysa kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?
- İki gün sonra tekrar internet kafede bilgisayarı 4 saat boyunca kullanan Timuçin kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?
- Hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin bir haftada 20 TL ödeme yapmıştır. Buna göre bir hafta boyunca kaç saat bilgisayar kullanmıştır?

Şekil 7. Timuçin İnternet Kafede problemi.

Timuçin İnternet Kafede problemi, ortaokul matematik dersi öğretim programında yer alan,

- Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.

- Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.

kazanımlarına yöneliktir.

Semboller ve cebirsel ilişkileri kullanma becerisine yönelik olan bu problem öğrencinin problem cümlesini yorumlamasını ve bu yorumdan yola çıkarak başlangıç fiyatının sabit değer olduğunu anlama, değişkenin zaman olduğunu fark etme ve her saat başında eklenen fiyatın denklemdeki katsayı olduğunu anlayabilme gibi cebirsel ilişkileri ifade edebilmesini gerektirir (C1).

(a) maddesinde cebirsel temsil biçimlerinden biri olan tablo gösterimi (C3a) ile öğrencinin ilgili miktarları belirleme ve yorumlama süreçlerinin incelenmesi (C2) amaçlanmakla birlikte problem bağlamında yer alan kritik bilgileri anlamlandırma (C1) ve kullanma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği de gözlemlenebilir.

(b) maddesinde ise öğrenci oluşturduğu tabloyu iyi yorumlamalı ve tablodan yola çıkarak oluşturacağı denklem ile temsiller arası geçiş yapma yetkinliğini gösterebilmelidir (C3b). Burada yapması beklenen açıklamalarda göstereceği ikna etme kabiliyeti C5 yetkinliğini sağladığının göstergesi olacaktır. Bu aşamada bazı öğrencilerin denklem oluşturamadıkları halde soruyu çözebilmek için tek tek sayarak ilerleme yöntemini kullandıkları görülebilir. Bu durum öğrencilerin denklem kurma becerilerinin iyi olmadığı yorumu ile birlikte denklemin cebirsel temsil biçimlerinden biri olması sebebiyle C3 yetkinliğini gerçekleştiremedikleri yorumlarını gerektirir.

(c) maddesi değişkenin 0 (sıfır) olduğunda sonucun sabit değere eşit olduğu bilgisini öğrencinin ne kadar iyi yorumladığını değerlendirmede kullanılacaktır. Bu durum problem bağlamını ve senaryosunu iyi anlayan (C1) öğrencilerde gözlemlenebilir.

(d) ve (e) maddeleri yapı itibarıyla aynı sorulardır ve diğer maddelere göre daha basit becerileri ölçmektedirler. (d) maddesinde değişkenin yerine 5 yazılması gerekirken (e) maddesinde ise 4 değeri yazılmalıdır (C4a). Burada amaç öğrencilerden örüntünün sabit artış miktarını (ortak fark) bulmaları ve tüm adımları daha anlamlı analiz edebilmelerini sağlamaktır. Burada denklem oluşturabilen öğrencilerin denklemi kullanırken, denklem oluşturamayan öğrencilerin aritmetik işlemlerden ve artış miktarından yararlanabileceği düşünülmektedir.

(f) maddesi diğer maddelere göre daha zorlayıcıdır. Bu maddede öğrencinin, hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin'in 5 kere açılış ücreti verdiğini fark etmesi

önemlidir. Yani sabit değerin 5 katını alması gerekmektedir. Bununla birlikte açılış ücretinin ödenmesi dışındaki durumlarda öğrenci bazı günlerde bir saati doldurmadan bilgisayarın kapatılabileceği ihtimalini düşünerek farklı çözüm süreçlerine girebilir ki bu da öğrencinin SAR'ının güçlü olabileceği fikrini doğurabilir. Ayrıca problemde işlemlerini kontrol etmelerinin istendiği bir alt madde verilmeyerek, öğrencilerin kendiliğinden sonuçlarını kontrol etme ihtiyacı duyup duymayacaklarına ilişkin gözlemler yapılabilir (C4b).

Tablo 8

Timuçin İnternet Kafede probleminde yer alan maddelere ilişkin SAR yetkinliklerinin dağılımı

Alt Maddeler	Alt Maddelerde Yer Alan Yönergeler	Yetkinlik (C)
a	Gelen müşterilere kolaylık sağlayabilmek için bilgisayarları kullandıkları süreye bağlı olarak ne kadar ücret ödeyeceklerini gösteren bir tablo oluşturabilir misiniz?	C1, C2, C3
b	Oluşturduğunuz tablodan yararlanarak bilgisayarı kullanma süresi ile ücret arasındaki ilişkiyi içeren bir denklem kurabilir misiniz?	C3
	Bu denklemi kurarken nelere dikkat ettiğinizi cümlelerinizle açıklayınız.	C3, C5
	Bu denklemi problemin diğer maddelerini çözerken kullanınız.	C3
c	Bilgisayarı açtıktan sonra bir saati doldurmadan eve dönen Timuçin kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?	C1, C4a
d	Başka bir gün ödevini yapmak için internet kafeye giden Timuçin bilgisayar 5 saat boyunca kullandıysa kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?	C4a
e	İki gün sonra tekrar internet kafede bilgisayarı 4 saat boyunca kullanan Timuçin kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?	C4a
f	Hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin bir haftada 20 TL ödeme yapmıştır. Buna göre bir hafta boyunca kaç saat bilgisayar kullanmıştır?	C1, C4, C5

Tablo 8'de Timuçin İnternet Kafede probleminin alt maddelerinde yer alan yönergelerle ilişkin yukarıda yapılan açıklamalar SAR yetkinliklerinin dağılımı gösterilerek özetlenmektedir.

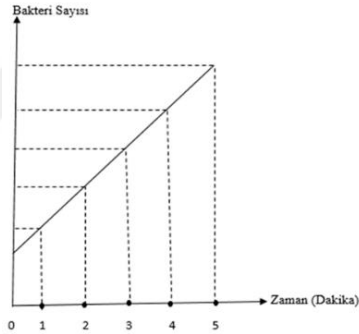


Bir fen lisesi öğrencisi olan Timuçin, bir bakteri türü ile ilgili yaptığı incelemeler sonucu zamana bağlı bakteri sayısındaki değişimi gösteren bir grafik çizmeye karar vermiştir. Bu durumu gösteren denklem:

$$\text{Bakteri Sayısı(B.S.)} = 8 + 16 \times \text{Dakika(D)} \text{ yani}$$

B.S = 8 + 16 x D şeklindedir. Buna göre;

- Yukarıda verilen denklemden yola çıkarak bakteri sayısı ile dakika arasında nasıl bir ilişki olduğunu yazarak açıklayınız.
- Başlangıçtaki bakteri sayısı kaçtır?
- Timuçin'in grafiğini doğru çizmesine yardımcı olmak amacıyla, dakikada değişen bakteri sayısını gösteren bir tablo oluşturunuz.
- 1 saat sonunda ortamdaki bakteri sayısı kaçtır?
- Bakteri sayısının 4808'e ulaştığını görmek için Timuçin kaç saat gözlem yapmalıdır?
- Oluşturduğunuz tablodan da yararlanarak Timuçin'in grafiğini çizmesine yardım ediniz.



Şekil 8. Bakterilerin Hızına Yetiş problemi.

Bakterilerin Hızına Yetiş problemi, ortaokul matematik dersi öğretim programında yer alan,

- Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.
- Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.
- Doğrusal denklemlerin grafiğini çizer.

kazanımlarına yöneliktir.

Bu problemde daha önceki problemlerden farklı olarak bir problem durumuna ilişkin denklem verilmiş ve öğrencilerin bu denklemi kullanarak problem maddelerine cevap vermeleri beklenmiştir. Bu problemle ilgili yürütülen mülakatlarda öğrencilerin denklemi yorumlamalarına (C3) yönelik sorular yöneltilecektir. Zaten problemin (a) ve (b) maddeleri de bu amaca yöneliktir.

$B.S = 8 + 16 \times D$ ifadesinde 0 (sıfır) anında yani değişkene 0 değeri verildiğinde 8 sayısının başlangıçtaki bakteri sayısı olduğunu bilen öğrencilerin denklemi doğru anladıkları söylenebilir ve bu ilişkiyi ifade etmeleri ile birlikte C1 ve C2 yetkinliklerini sağlayacaklardır. Çoklu gösterimlerden yararlanmayı destekler nitelikteki problemin grafikte desteklenmesi ile öğrencilerin farklı gösterimler arasında geçiş yapabilmelerine ilişkin yetkinlikleri ortaya çıkarmak amaçlanmıştır (C3b).

Problemin (c) maddesinde öğrencilerin sıfırdan bir temsil oluşturmaları istenmektedir (C3a). Ayrıca burada zamana bağlı değişimi gösteren tablo ile nicelikler arasındaki ilişkiyi ifade etmeleri de olasıdır. Bu tip açıklamalar öğrencilerin C5 yetkinliğine ilişkin becerilerini gösterecektir.

(d) ve (e) maddeleri, işlemsel becerileri de içermesi sebebiyle C4a yetkinliğini içeren maddelerdir. Ayrıca (e) maddesinde aritmetik metotları kullanarak ya da $8 + 16 \times D = 4808$ şeklinde bir denklem kurup (var olan temsile ekleme yapma) o denklemi çözerek cevaba ulaşmaları beklenmektedir.

(f) maddesinde öğrencilerin temsiller arası transfer yapabilme yetkinliği (C3b) değerlendirilmek istenmektedir. Ayrıca problemde işlemlerini kontrol etmelerinin istendiği bir alt madde verilmeyerek, öğrencilerin kendiliğinden sonuçlarını kontrol etme ihtiyacı duyup duymayacaklarına ilişkin gözlemler yapılabilecektir (C4b).

Tablo 9

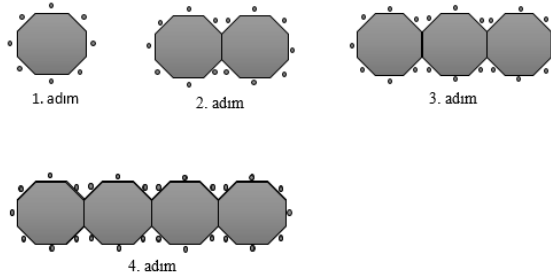
Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde yer alan maddelere ilişkin SAR yetkinliklerinin dağılımı

Alt Maddeler	Alt Maddelerde Yer Alan Yönergeler	Yetkinlik (C)
a	Yukarıda verilen denklemden yola çıkarak bakteri sayısı ile dakika arasında nasıl bir ilişki olduğunu yazarak açıklayınız.	C1, C2, C5
b	Başlangıçtaki bakteri sayısı kaçtır?	C1, C4a
c	Timuçin'in grafiğini doğru çizmesine yardımcı olmak amacıyla, dakikada değişen bakteri sayısını gösteren bir tablo oluşturunuz.	C3, C5
d	1 saat sonunda ortamdaki bakteri sayısı kaçtır?	C4a

e	Bakteri sayısının 4808'e ulaştığını görmek için Timuçin kaç saat gözlem yapmalıdır?	C4a
f	Oluşturduğunuz tablodan da yararlanarak Timuçin'in grafiğini çizmesine yardım ediniz.	C3

Tablo 9'da Bakterilerin Hızına Yetiş probleminin alt maddelerinde yer alan yönergelere ilişkin yukarıda yapılan açıklamalar SAR yetkinliklerinin dağılımı gösterilerek özetlenmektedir.

Düğün organizasyon şefi olan Tolga Bey, evlenecek olan bir çiftin hayallerindeki gibi bir düğün organize edebilmek için çalışmalarına başlamıştır. Çiftin ailesinin oldukça kalabalık olduğunu öğrenen Tolga Bey, çiftten kaç kişilik bir salon hazırlayacağı konusunda yeterli bilgileri almıştır ve düğüne kalabalık aileler katılacağı için özel tasarım sekizgen yemek masalarından kullanmaya karar vermiştir. Masaların salondaki düzeni aşağıdaki gibidir:



	1. adım	2. adım	3. adım	4. adım
Masa sayısı	1	2	3	4
Oturabilecek misafir sayısı	8	14	20	...

Buna göre;

- Sizce 1 masaya 8 misafir oturabiliyorken 2 masaya neden 16 misafir oturamamaktadır?
- 4 yemek masası yan yana geldiğinde kaç misafir oturabilir?
- Adım sayısı a , misafir sayısı m olacak şekilde aralarındaki ilişkiyi ifade eden bir denklem yazınız. Bu denkleminizin bölümlerinin masa düzeni ve misafir sayısı ile nasıl ilişkili olduğunu cümlelerinizle açıklayınız.
- 596 kişilik bir organizasyon için kaç masanın yan yana gelmesi gerekir?
- 630 misafir için 105 masa gerekiyorsa 101 masanın bulunduğu organizasyonda kaç misafir vardır?
- Tolga Bey kalabalık ailelerin katılacağı bu düğün organizasyonu için sekizgen masaları uygun görmüştür. Peki, kalabalık ailelerin olacağını göz önünde bulundurursak sizce masaları yan yana koyması mı, yoksa ayrı ayrı koyması mı mantıklı bir hamle olur?

Şekil 9. Sekizgen Masalar problemi.

Bu problemde öğrencilerden verilen örüntüyü incelemeleri, örüntünün kuralını bulmaları, bu kuraldan yararlanarak problem maddelerine cevap vermeleri beklenmektedir. Cebirsel akıl yürütme becerilerinden genellemeleri formüle etme, sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma ve çoklu gösterimlerden yararlanma becerilerinin tümünü içermesi ile önemli bir problem türüdür. Sekizgen Masalar problemi, ortaokul matematik dersi öğretim programında yer alan,

- Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.
- Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.

kazanımlarına yöneliktir.

Bu problemde yer alan örüntünün kuralını temsillere dönüştüren (C3) öğrenciler genellemeleri formüle etme becerisini göstermiş olacaklardır. Genellemeleri denklem aracılığıyla ifade eden öğrenciler sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma becerilerine ait kanıtları sunacaklardır. Problemde örüntü ve tablo gibi çoklu gösterimlere yer verilmesi ile öğrencilerin bu gösterimleri yorumlama (C3b) becerileri değerlendirilecektir. Aşağıda öğrencilerin verebileceği olası cevaplara ilişkin değerlendirmeler yer almaktadır.

Problemin (b) maddesi yapı itibarıyla diğer maddelere oranla daha basit becerileri ölçmektedir. Öğrencilerden örüntünün sabit artış miktarını (ortak fark) bulmaları (C2) ve bir sonraki adıma ulaşmaları beklenmektedir ya da en başından itibaren genel kurala ulaşarak bu kuralı kullanan öğrenciler de olabilir. (c) maddesinde ise öğrencilere denklemde kullanmaları istenen değişkenler verilmiş ve bu sayede sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma becerilerini göstermeleri beklenmiştir. Ayrıca denklemi başarıyla kurabilen öğrencilerin C3 yetkinliğini sağladıkları yorumuna ulaşılabilmektedir.

(d) maddesinde ise öğrencinin geriye doğru düşünmesi ya da kuralda değerleri yerleştirip sonuca ulaşması beklenmektedir (C4). Problemin (e) maddesinde de yine öğrencinin ortak fark kavramını iyi anlamış olması beklenmekte ve bu yoldan sonuca daha kolay varacağından istenen süreç ortak farkın kullanıldığı yöntemden geçmektedir. Buna ek olarak bazı öğrenciler denklemde yerine koyma metodunu tercih edebilirler.

(f) maddesinde ise daha çok öğrencilerin soru bağlamını anlamlandırma süreçlerini irdeleme ihtiyacından dolayı bağlama ilişkin bir soru yöneltilmiştir (C1). Burada amaç soruya doğru cevap verilmesi ya da bir doğru cevabın varlığı değildir. Amaç öğrencinin bu soruya

karşılık vereceği cevabı nasıl bir mantık süzgecinden geçireceğidir. Ayrıca problemde işlemlerini kontrol etmelerinin istendiği bir alt madde verilmeyerek, öğrencilerin kendiliğinden sonuçlarını kontrol etme ihtiyacı duyup duymayacaklarına ilişkin gözlemler yapılabilecektir.

Tablo 10

Sekizgen Masalar probleminde yer alan maddelere ilişkin SAR yetkinliklerinin dağılımı

Alt Maddeler	Alt Maddelerde Yer Alan Yönergeler	Yetkinlik (C)
a	Sizce 1 masaya 8 misafir oturabiliyorken 2 masaya neden 16 misafir oturamamaktadır?	C1, C2, C5
b	4 yemek masası yan yana geldiğinde kaç misafir oturabilir?	C1, C2
c	Adım sayısı a, misafir sayısı m olacak şekilde aralarındaki ilişkiyi ifade eden bir denklem yazınız. Bu denkleminizin bölümlerinin masa düzeni ve misafir sayısı ile nasıl ilişkili olduğunu cümlelerinizle açıklayınız.	C3a C3b, C5
d	596 kişilik bir organizasyon için kaç masanın yan yana gelmesi gerekir?	C4a
e	630 misafir için 105 masa gerekiyorsa 101 masanın bulunduğu organizasyonda kaç misafir vardır?	C3b, C4a
f	Tolga Bey kalabalık bir ailenin düğün organizasyonu için sekizgen masaları uygun görmüştür. Peki, sizce kalabalık bir aile olduğu halde masaları yan yana koyması doğru bir hamle mi olmuş?	C1, C5

Tablo 10’da Bakterilerin Hızına Yetiş probleminin alt maddelerinde yer alan yönergelere ilişkin yukarıda yapılan açıklamalar SAR yetkinliklerinin dağılımı gösterilerek özetlenmektedir.

Sonuç olarak Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu bu yedi problemten oluşmakta ve öğrencilerin stratejik akıl yürütmelerini incelemeye fırsat vermektedir. Bu formda yer alan problem maddelerinin hangi yetkinliği sağladığı aşağıda verilmektedir.

3.3.2. Yarı Yapılandırılmış Klinik Mülakatlar

Öğrencilerin açık uçlu cebir problemlerine verdikleri yanıtların daha derinlemesine bir bakış açısıyla incelenmesi için yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar (görüşmeler) yapılmıştır. Klinik mülakat, bilgi yapısını ve akıl yürütme süreçlerini araştırmak için Piaget’ nin öncülük ettiği bir tekniktir (Clement, 2000). Örnek olay çalışmalarında en yaygın olarak kullanılan mülakat yöntemi öğrencilerin düşüncelerini ifade etmelerine, yaptıkları işlemleri ve kullandıkları stratejileri açıklamalarına ve kendi gerekçelerini ikna edici bir şekilde

sunmalarına fırsat vermektedir. Bu yönleriyle araştırmanın kavramsal çerçevesi olan SAR yetkinliklerinin ortaya çıkması ve incelenmesine de zemin hazırlayan bir yöntemdir. Yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar, araştırmanın önceden belirlediği sorularla birlikte mülakat sırasında ortaya çıkan durumlara ve konuya ilişkin düşüncelerin oluşturduğu değişiklikler neticesinde yeni sorular yöneltmeye fırsat veren esnekliklere sahiptir. Araştırmacı öğrenci çözümlerinden yola çıkarak *Neden böyle düşündün? Yaptığın işlemlerin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun? Bu işlemin ne anlama geldiğini açıklar mısın?* gibi sorular sorarak öğrencinin düşüncelerini, akıl yürütmelerini ve stratejilerini mülakat sürecinde ortaya çıkarabilir. Araştırmada öğrencilerin cebirdeki stratejik akıl yürütme süreçlerine odaklanıldığından yarı yapılandırılmış klinik mülakat yöntemi tercih edilmiştir.

Klinik mülakatlar için hazırlanan yarı yapılandırılmış formlarda, Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu'nda yer alan her bir soru için toplamda 65 tane mülakat sorusu hazırlanmıştır. Bu mülakat sorularına öğrencilerin verebilecekleri muhtemel yanıtlara karşılık olması bakımından özel sonda sorular oluşturulmuştur. Hazırlanan mülakat sorularının; öğrencilerin SAR yetkinliklerini anlamaya, çözüm stratejilerini seçme nedenlerini ve sonuçlarının doğruluğundan emin olup olmadıklarını anlamaya yönelik olmasına dikkat edilmiştir. Hedeflenen amaçlar doğrultusunda ilgili literatür desteğiyle hazırlanan problemlerin incelemek istediği yetkinliklere uygunluğu için iki matematik eğitimcisi uzman görüşleri ve ortaokulda görev yapan iki matematik öğretmenin görüşleri alınmıştır. Bu aşamada hazırlanan klinik mülakat sorularına yönelik uzmanların görüşlerini belirtebilecekleri Uzman Görüşü Formları hazırlanmış ve uzmanlara sunulmuştur (bkz. Ek 5). Formda ön bilgi olarak araştırmanın çerçevesi olan SAR yetkinlikleri hakkında kısaca bilgiler verilmiş ve klinik mülakat sorularının araştırmaya uygunluğu konusunda uzmanların görüşlerine başvurulduğu açıklanmıştır. Formlar, uzmanlara elektronik posta yoluyla ulaştırıldıktan yaklaşık bir ay sonra geri dönüt alınmıştır.

Alınan geri dönütlerde uzmanlar, klinik mülakat sorularının genel anlamda olumlu yönde uygun olduğu görüşünde olduklarını belirtmişlerdir. Yalnızca bazı sonda soruları ile ilgili “uygun fakat gözden geçirilmeli” şeklinde görüş belirtilmiştir. Bu görüşler doğrultusunda bu sonda soruları tekrar gözden geçirilmiştir. Örneğin, Teraziler Nasıl Dengede? problemine ilişkin hazırlanan klinik mülakat sorularından biri “Oluşturduğun gösterime cebirsel ifade diyebilir miyiz?” şeklindedir. Bu soruya karşılık, hayır denklem yanıtını veren öğrenciler olursa diye hazırlanan sonda soru ise “Cebirsel ifadelerle denklem arasındaki fark nedir?” şeklindedir. Uzman Görüşü Formu'nda bu sonda sorunun uygun olduğu yönünde bir değerlendirme yapılmış, ardından şu şekilde bir görüş belirtilmiştir:

“Her ne kadar öğrencilerin cebirsel ifade ile denklem arasındaki ilişkiyi ifade etmesi açısından çok önemli görünse de araştırmanın amacı açısından yani cebirsel akıl yürütme süreçlerini belirlemek açısından gerekli olmayabileceği görüşündeyim.”

Uzmanın bu görüşü değerlendirildiğinde öğrencinin denklem yazması gerektiği bir problemde cebirsel ifade oluşturması durumunda bunun nedeninin araştırılmasının gerekebileceği ve bu sorunun yardımcı olabileceği düşünülmüştür. Dolayısıyla bu soru öğrencilere yöneltilmek üzere Yarı Yapılandırılmış Klinik Mülakat Soruları arasında yer almıştır.

Ayrıca mülakat soruları ile öğrencilerin düşüncelerinin açığa çıkarılması ve akıl yürütmelerinin incelenebilmesi amaçlandığından bu amaçları sağlayıp sağlayamadığının anlaşılması gerekmektedir. Bunun için açık uçlu cebir problemlerinin çalışıldığı dört öğrenciye yarı yapılandırılmış klinik mülakat soruları yöneltilerek soruları anlayıp anlamadıkları ve soruların amaca uygunluğu değerlendirilmiştir. Öğrencilerin verdiği yanıtlar doğrultusunda tekrar gerekli düzenlemeler yapılmış, sorular daha anlaşılır ve kısa olacak biçimde düzenlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin verdiği yanıtlara karşılık olabilecek sonda sorulara eklemeler yapılmıştır.

3.4. Veri Toplama Araçlarının Uygulama Süreci

Veri toplama araçlarına son halinin verilmesinin ardından araştırmanın uygulama süreci başlamıştır. Sürecin başlaması için önce etik kurul izni başvurusu yapılmış ve veri toplama araçlarının uygulama izni alınmıştır. Uygulama izni Ek 2’de verilmiştir.

Araştırmanın uygulama süreci 2021 yılı Nisan ayının son iki haftasını kapsamaktadır. İlk hafta 23 Nisan haftası olduğu için üç öğrenci ile çalışılmış ve son hafta kalan üç öğrenci ile çalışmalar son bulmuştur. Çalışma sürecinde yaşanabilecek aksaklıklara (okul etkinlikleri, covid-19 pandemi süreci, öğrencinin rahatsızlanması vb.) tedbir olması açısından her öğrenciye bir gün ayrılmış ve bu sayede günün müsait olan herhangi üç ders saati öğrenciyle çalışılmak üzere planlamalar yapılmıştır.

Açık uçlu cebir problemleri, öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçlerini ortaya çıkarmayı hedeflediğinden, 7 problemten altısının 6 adet alt madde sorusu bulunmaktadır. Bu alt maddelerle birlikte öğrenciler toplamda 37 soruyu yazılı olarak yanıtlamalıdır. Açık uçlu cebir problemleri formu yalnızca öğrencinin yazılı çözümlerinden veri toplamayı amaçladığı için, öğrencilerin zaman bakımından sınırlanmaması gerekmektedir. Bu nedenle 2 ders saati (30 dakikalık) soruların yanıtlanma süresi için yeterli ve uygun görülmüştür. Öğrencilerden yalnızca biri bu süre içerisinde problemlerin yanıtlarını yetiştiremeyip ek süre talep etmiştir.

Bu öğrenciye ek süre vermenin araştırmanın amaçlarına aykırı olmaması gerekçesiyle öğrenciye 15 dakika ek süre verilmiştir ve öğrenci bu sürenin dokuzuncu dakikasında yazılı materyalleri araştırmacıya teslim etmiştir.

Öğrencilere açık uçlu cebir problemleri formu verilmeden önce gerekli bilgilendirme yapılarak; problemleri çözerken işlemlerini kelimelerle de ifade etmelerinin ve çözümlerini yanlış yapsalar bile silmeden yeni çözümlerini de yazarak devam etmelerinin araştırma için önemli olduğu belirtilmiştir.

Yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar öğrencilerin tüm problemlerin çözümünü tamamlamalarının hemen ardından yapılmış ve problemdeki maddeleri çözerken yaşadıkları düşünme süreçlerini anlamaya yönelik sorular eşliğinde gerçekleştirilmiştir. Klinik mülakatlar için bir saat sürenin yeterli olacağı düşünülmüş ve mülakatların toplam sürelerine bakıldığında bu sürenin aşılmadığı görülmüştür. Klinik mülakatlar sırasında ortamın sessiz olmasına dikkat edilmiş, okul kütüphanesinde yapılan açık uçlu cebir problemlerinin uygulanmasında ve mülakatlarda sadece araştırmacı ve katılımcı öğrencinin olması sağlanmıştır. Araştırmacı ve katılımcı öğrenci aynı masada karşılıklı olarak oturmuşlardır. Öğrencinin kullanması için masada çalışma kâğıdı ve kalem bırakılmış ve öğrencilerin rahat hissedebilmesi için masaya yedek maske ve su bırakılmıştır. Mülakatlar video kaydına alınırken öğrencinin yüzünün gösterilmemesine özen gösterilmiş, kamera tripod üzerinde sadece öğrencinin yaptığı işlemlerin görülmesini sağlayacak ve öğrencinin dikkatini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiştir. Ayrıca mülakata başlamadan önce öğrencilerin rahat olmalarını sağlayacak bir konuşma yapılmış ve düşüncelerini sesli olarak belirtmelerinin önemli olduğu vurgulanmıştır. Çalışmanın başlamasından hemen önce öğrenciye aşağıdaki yönerge çerçevesinde bilgilendirme yapılmış ve evet yanıtını vermelerinin ardından örnek olay çalışmasına başlanmıştır.

Merhaba. Bu görüşmeye vakit ayırdığın için teşekkür ederim. Görüşmemiz sırasında az önce yanıtladığın problemlerle ilgili bazı sorular soracağım. Cevap verirken düşündüğün her şeyi söylemen, cümlelerle yaptığın işlemleri ve düşüncelerini açıklaman araştırmamız için çok önemlidir. Araştırmanın doğru bir şekilde yapılması için aklına gelen tüm fikirleri söylemelisin. Eğer fikrinin yanlış olduğunu düşünsen ya da emin olmasan bile bu düşüncelerini söylemekten çekinmemelisin. Görüşmemizi yaparken nasıl düşündüğünü anlayabilmek için benzer soruları tekrar sorabilirim. Soracağım soruların hiçbirisi yanlış yolda ilerlediğin ya da yanlış cevapladığın anlamına gelmemektedir. Soruları, yaptıklarının ve söylediklerinin hepsini anlamak ve hiçbirini kaçırmamak için soracağım. Ayrıca

görüşmemizi yaparken sonradan neler konuştuğumuzu hatırlayabileceğim küçük notlar alacağım.

Görüşme esnasında aramızdaki hiçbir konuşma öğretmenine iletilmeyecektir. Bununla birlikte görüşme sürecinde konuştuklarını kaçırmamak için ve nasıl düşündüğünü daha iyi anlayabilmek için görüşmemizi kaydetmek araştırmamıza katkı sağlayacaktır. Video biçiminde kayıt yapmamızın senin için bir sakıncası var mı?

Tüm bunların yanı sıra öğrencilerin yorulduklarında ya da devam etmek istemedikleri bir durumda bunu rahatça söyleyebileceklerine ve süre açısından herhangi bir sınır olmayacağına da değinilmiştir.

Öğrencilerle açık uçlu cebir problemlerine yönelik yapılan yarı yapılandırılmış klinik mülakat süreleri ve gerçekleştirildiği tarihler Tablo 11’de belirtilmiştir.

Tablo 11

Öğrencilerle yapılan klinik mülakatların tarih ve süreleri

Mülakatlar	Y1	Y2	O1	O2	D1	D2
Mülakat Tarihleri	19.04.21	20.04.21	21.04.21	26.04.21	27.04.21	28.04.21
1. Mülakat Süresi	00:10:34	00:06:39	00:07:11	00:08:22	00:05:30	00:06:06
2. Mülakat Süresi	00:05:44	00:04:49	00:04:24	00:05:45	00:05:51	00:07:00
3. Mülakat Süresi	00:04:53	00:04:03	00:03:55	00:03:48	00:03:19	00:04:09
4. Mülakat Süresi	00:03:22	00:03:37	00:04:07	00:02:43	00:03:43	00:06:35
5. Mülakat Süresi	00:06:59	00:05:49	00:06:10	00:05:31	00:05:18	00:06:29
6. Mülakat Süresi	00:04:01	00:03:40	00:04:34	00:04:17	00:04:32	00:05:13
7. Mülakat Süresi	00:05:52	00:05:36	00:05:35	00:06:22	00:05:21	00:05:50
Toplam Süre	00:41:25	00:34:16	00:35:56	00:36:48	00:33:34	00:41:22

Tablo 11’de mülakatların hangi öğrenciyle hangi tarihte çalışıldığı ve her bir öğrenciyle yedi adet probleme yönelik yapılan yedi mülakatın süreleri gösterilmektedir. Örneğin; akademik açıdan yüksek başarıya sahip Y1 ile yapılan mülakatların tarihi 19 Nisan 2021’dir ve 1. mülakat süresi 10 dakika 34 saniyedir.

Araştırmacı tarafından aynı zamanda bu mülakatların video kayıtlarına ek olarak bazı notlar tutulmuştur. Bu notlarda öğrencilerin davranışları ve sorular karşısında gösterdikleri tepkilerin tarafsızca yazılmasına dikkat edilmiş ve video kayıtlarını inceleme esnasında bu notların yararlı olabileceği düşünülmüştür.

3.5. Verilerin Analizi

Bu bölümde açık uçlu cebir problemleri formu kullanılarak toplanan verilerin nasıl çözümlendiği belirtilmektedir. Bununla birlikte örnek olay çalışmalarında yapılan klinik mülakatlardan elde edilen verilerin analizinin yapılma şekli açıklanmaktadır.

3.5.1. Açık Uçlu Cebir Problemleri Verilerinin Analizi

Açık uçlu cebir problemlerine verilen öğrenci yanıtlarının nitel analizi sürecinde; öğrencilerin matematiksel düşünceleri, farklı çözüm stratejileri, sözel ifadeleri ve cebirsel dili kullanma biçimleri ve gerekçelerini belirtmeleri ya da kendinden emin açıklamaları üzerinde durularak SAR yetkinliklerine dair kanıtlar aranmıştır. Öğrenci yanıtlarının birçok kez baştan okunarak derinlemesine incelenmesinin ardından, öğrencilerin yetkinliklerini gösterirken kullandıkları yöntemler yetkinliklere ait birer alt bileşen şeklinde kodlanmıştır. Bunun yapılmasının nedeni, bu kodlar ile tüm öğrencilerin ortak yanıtlarının sınıflandırılarak belli bir sistematiklik içinde sunulabilmesidir. Öğrenci çözümlerinin incelenmesi sonucu yetkinlikleri sağladıklarını gösteren çözümlerinden elde edilen alt bileşenler Tablo 12’de verilmektedir.

Tablo 12

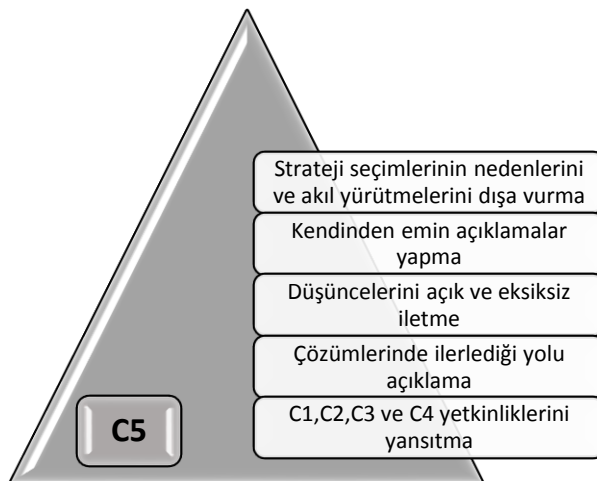
Öğrencilerin yetkinlikleri sağladıklarını gösteren alt bileşenler

SAR Yetkinlikleri	Alt Bileşenleri
C1	Bağlamı anlamlandırma Gömülü matematiği anlamlandırma
C2	C2a İlgili miktarları belirleme C2b Miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme
C3	C3a Örüntü/tablo/grafik/şekil/şema/cebirsal ifade/denklem oluşturma C3b Örüntü/tablo/grafik/şekil/şema/cebirsal ifade/denklem yorumlama Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma Çoklu temsillerin kullanılabilirliğini karşılaştırma Denklemdaki parametrelerin diğer temsillerde nasıl görüldüğünü tanımlama
C4	C4a Prosedürleri hassasiyetle yürütme C4b Problem bağlamına başvurma Matematiksel prosedürleri kullanma Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme
C5	Strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurma Kendinden emin açıklamalar yapma Düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme Çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama C1,C2,C3 ve C4 yetkinliklerini yansıtırma

Tablo 12’de görüldüğü gibi öğrencilerin yazılı çözümlerinde yetkinlikleri sağlayıp sağlayamadıkları araştırılırken hangi bileşenlerin ele alındığı görülmektedir.

Nitel analiz, Lepak ve diğerleri (2018) tarafından öğrencilerin cebirde stratejik akıl yürütmelerinin incelenmesi için oluşturulan SAR yetkinlikleri doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Bu yetkinlikler *metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlamlandırma (C1 Yetkinliği)*; *ilgili miktarları ve bunlar arasındaki ilişkileri belirleme (C2 Yetkinliği)*; *miktarlar arasındaki ilişkilerin cebirsel temsillerini kullanma (C3 Yetkinliği)*; *prosedürleri yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme (C4 Yetkinliği)*; *ikna edici açıklamalar yapma (C5 Yetkinliği)* şeklindedir. Öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçleri bu yetkinlikler bağlamında incelenmiştir. Problemlere verilen yanıtlar ile öğrencilerin stratejik akıl yürütmeleri hakkında yetkinlikler üzerinden incelemeler yapılarak gerekli yorumların yapılabileceği düşünülmektedir. Lepak ve diğerleri (2018) açık uçlu cebir problemlerinin, öğrencilerin yazılı çalışmaları aracılığıyla stratejik cebirsel akıl yürütme süreçlerini değerlendirme aracı olarak hizmet edebileceğini ve bu tipteki problemlerin SAR çerçevesini değerlendirmede bir arena sunduğunu savunmaktadırlar.

C5 yetkinliğinin kapsamında öğrencilerin açıklamalarının nasıl yorumlanacağını, hangi öğrenci açıklamalarının neyi ifade edeceğinin bilinmesi önemlidir. C5 yetkinliği diğer yetkinlikler ile iç içedir ve diğer yetkinlikleri yansıtmaktadır. Bununla birlikte öğrencilerin düşüncelerini eksiksiz ve açık bir şekilde iletme yeteneğini de incelemeye fırsat vermesiyle diğer yetkinliklerinin ötesine geçmektedir. C5 yetkinliğinin alt bileşenleri ve diğer yetkinlikler ile ilişkisi Şekil 10’da görülmektedir.



Şekil 10. C5 yetkinliğinin alt bileşenleri ve diğer yetkinliklerle ilişkisi.

Öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları stratejileri ya da uyguladıkları prosedürleri açıklamaları, düşüncelerini açıkça ve eksiksiz ifade ederek kendilerinden emin açıklamalar yapmaları C5 yetkinliğini sağlamaları için önemlidir. Bunun yanı sıra açıklamaları ile diğer yetkinlikleri (C1, C2, C3 ve C4) sağladıklarını yansıtmaları, çözümlerini cebirsel nedenlere dayandırmaları ve strateji seçimlerinin nedenleri ile akıl yürütmelerini dışa vurmaları C5 yetkinliğini sağlama düzeylerini daha da güçlendirdiklerini gösteren bileşenlerdir. Şekil 3’te bu bileşenleri bir piramit ile şematize etmenin amacı, piramidin üstüne doğru bileşenlerin öğrenci açıklamalarında yer alma sıklığının azalması ve daha güçlü C5 bileşenleri olmasıdır.

3.5.2. Örnek Olay Çalışması Verilerinin Analizi

Örnek olay çalışmasında öğrencilerin anlamalarının üzerinde durulurken, anlamalarını ve prosedürlerini nasıl açıkladıklarına dikkat edilmiştir. Nitel veri analizi yöntemlerinden içerik analizi yöntemi ile veriler analiz edilmiştir. Verilerin raporlaştırılarak sunulması, örnek olay çalışması yönteminin bir özelliği olarak gerçekleştirilmiştir. Örnek olay çalışmalarında yazılı raporlar oluşturma süreçleri dört farklı şekilde gerçekleştirilebilir. Bu raporlar; klasik tek örnek olay, klasik tek örnek olay çalışması çoklu durum çalışması, çoklu veya tek örnek olay ve çoklu örnek olay çalışması şeklinde sunulabilir (Yin, 1994). Bu araştırmada çoklu örnek olay çalışması yazılı raporu kullanılmıştır. Çoklu örnek olay çalışması raporu (Yin, 1994: 135);

“...bireysel olay çalışmaları için ayrı bir bölüm ayrılmaz. Bunun yerine bireysel örnek olay çalışmalarının her bölüme dağıtıldığı çapraz olay analizi gerçekleştirilir. Bu formatta hazırlanan raporda bireysel olay çalışmalarından elde edilen bilgiler mülakat metinleri (vignette) halinde sunulabilir.”

SAR yetkinlikleri, örnek olay çalışmasında yapılan mülakatlar aracılığıyla ayrıca derinlemesine bir bakış açısıyla incelenmekte ve öğrencilerin akıl yürütmelerini ve matematiksel düşünmelerini ortaya çıkarma süreçleri ele alınmaktadır. SAR, öğrencilerin cebirsel akıl yürütmelerini yazılı çalışmalarından incelemeye fırsat vermektedir, fakat bu araştırmada örnek olay çalışması ile elde edilen verilerin birden fazla veri toplama tekniği ile tutarlılığını kanıtlamanın yanında öğrencilerin akıl yürütmelerinin derinlemesine incelenmesi amaçlanmaktadır.

3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Bu bölümde araştırmada veri toplama aracı olarak kullanılan açık uçlu cebir problemlerinin ve araştırma yöntemi olan örnek olay çalışmasının geçerlik ve güvenirlilikleri hakkında bilgi verilmektedir.

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlilik terimleri, inandırıcılık (credibility), aktarılabilirlik (transferability), tutarlık (dependability) ve teyit edilebilirlik (confirmability) kavramları ile ifade edilmektedir (Guba ve Lincoln, 1989). Araştırmanın geçerlik ve güvenirliliği bu kavramlar ile ele alınmaktadır.

Araştırmanın inandırıcılığının sağlanması için öğrencilerin yazılı çözümlerinin olduğu verilerden ve yapılan mülakatların transkriptlerinden doğrudan alıntılara yer verilmektedir. Ayrıca bu verilerin yorumlanması ve sunulması sürecinde nesnel olmaya dikkat edilmektedir. Guba ve Lincoln (1989: 181) inandırıcılığın “post-pozitivist anlayışa göre iç geçerlik” olarak adlandırıldığını belirtmektedir. Geçerliğin sağlanması, çoklu delil kaynaklarının kullanılması ile sağlanabilir (Yin, 1994). Bu araştırmada iki farklı veri kaynağının kullanılması ile inandırıcılığın (iç geçerliğin) sağlandığı düşünülmektedir.

Guba ve Lincoln (1989: 183) aktarılabilirlik kavramını “post-pozitivist anlayışta dış geçerlik” kavramı ile eşdeğer görmektedir. Araştırmanın aktarılabilirliğinin sağlanması, örnek olay çalışması desenlerinden çoklu durum deseni kullanılması ile gerçekleşmektedir. Yin (1994) çoklu durum deseninin kullanılması, örnek olay çalışmalarından elde edilen bulguların dış geçerliliğini artırdığını belirtmektedir. Araştırmada öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçleri farklı akademik başarıya sahip öğrenciler ile gerçekleştirilmektedir. Bu doğrultuda oluşturulan çoklu durum deseni ile araştırmanın aktarılabilirliğinin (dış geçerliğinin) sağlandığı düşünülmektedir.

Araştırmanın tutarlığının sağlanması için araştırma bulguları çözümlenirken, öğrencilerin yazılı çözümlerinin incelenmesinin hemen ardından örnek olay çalışması raporları sunulmaktadır. Örnek olay çalışmasında yapılan mülakatların orijinal metni verilerek sonuçların süreç içerisinde takip edilmesi ve kontrol edilmesi sağlanmaktadır. Yin (1994), örnek olay çalışmalarının tutarlığının sağlanmasının, bir protokol dahilinde sürecin tüm aşamalarının detaylandırılması ve bu şekilde takip edilmesi ile gerçekleşebileceğini belirtmektedir.

Guba ve Lincoln (1989: 184)) teyit edilebilirlik kavramının “post-pozitivist anlayışta tarafsızlık” anlamında olduğunu belirtmektedir. Tarafsızlık, araştırmacının kendi düşüncelerinin etkisini en aza indirmesi için çeşitli stratejiler kullanmasıdır (Guba ve Lincoln,

1989: 184). Yin (1994) bu durumun sağlanabilmesi için delil zinciri oluşturulabileceğini belirtmektedir. Delil zincirini oluşturabilmek için bu çalışmada örnek olay çalışması raporları ile öğrencilerin yazılı çözümleri birbiriyle ilişkilendirilerek sunulmakta ve yorumlanmaktadır. Ayrıca bulgular sunulurken delil olarak uygun görülen yerlerde yeterli sayıda öğrencilerin yazılı çözümlerinden örnekler verilmekte ve yapılan mülakatların transkriptlerinden doğrudan alıntı yapılmaktadır. Delil zinciri oluşturulurken, öğrencilerin farklı akademik başarılarına sahip olması ile stratejik akıl yürütmeleri arasında ilişkiler kurulmakta ve ulaşılan fikirlerin alıntı yapılan metinlerden ilgili bölümlerine atıfta bulunmaktadır.

3.7. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacının kendisinin de bir veri toplama aracı olarak düşünülmesi, bu araştırma türlerinde araştırmacının rolünü oldukça önemli kılmaktadır. Araştırmacının araştırma yaptığı alanda zaman harcaması, araştırmayı yaptığı katılımcılarıyla doğrudan görüşmesi, katılımcılarla birlikte süreci deneyimlemesi, bu deneyimlerle yeni bakış açıları kazanması ve hatta yeni edindiği bakış açılarını verilerini analiz ederken kullanması yönleriyle nitel araştırmalar nicel araştırmalardan çok daha farklıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Araştırmacının nesnelliği bu tür araştırmalarda tartışma konusu olabilmektedir. Bununla birlikte nitel araştırmalarda araştırmacının nesnelliği yakalayabilme uğruna, veri kaynaklarına/katılımcılara yakın olduğu için elde edebileceği geçerli bilgileri kaybetmemesi de önemlidir (Şimşek ve Yıldırım, 2000).

Nitel araştırmalarda ve özellikle örnek olay çalışmalarında araştırmacının sahip olması gereken beceriler araştırmanın verimliliği açısından önemlidir. Bu beceriler:

- “Tarafsız olma
- Araştırma konusuna hâkim olma
- Esnek olma
- İyi bir dinleyici olma ve iyi bir yorumlayıcı olma
- Doğru yer ve zamanda iyi soru sorabilme
- İdeoloji ve önyargılarını yansıtmama”

şeklinde kısaca ifade edilebilir (Yin, 1994: 56). Araştırmacının araştırma konusuna hâkim olması, araştırma konusuna ilişkin kavram yanlışlarına sahip olmaması ve konuya ilişkin sağlam bir kavrayışının olması araştırmanın verimliliği ve amaca uygunluğu açısından

oldukça önemlidir. Araştırmacının esnek olması, yeni karşılaştığı durumlara açık olması, bu durumları tehdit ya da problem olarak görmesi yerine bir fırsat olarak değerlendirebilmesi ile ilgilidir. Bu araştırmada araştırmacı tarafsız bir rol üstlenerek, katılımcıların düşünme ve akıl yürütme süreçlerini etkilemeyecek kadar uzak, araştırma için önemli olan bilgileri kaybetmeyecek kadar yakın bir tavır sergilemektedir. Araştırmada önemli olan öğrencilerin stratejik cebirsel akıl yürütme süreçlerini açığa çıkarmaktır ve araştırmacı bunu sağlayabilmek için örnek olay çalışmasında uyguladığı klinik mülakatlarda amaca uygun sorular yönelmiştir. Araştırmacı örnek olay çalışması sürecinde yapılan bu mülakatlarda ayrıca gözlemlerine yönelik kısa notlar tutarak öğrencileri anlamasına yardımcı olan her türlü veriyi kaydetmiştir.



BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde açık uçlu cebir problemlerinden ve yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar yardımıyla yapılan örnek olay çalışmalarından elde edilen bulgular ve yorumlar yer almaktadır.

Açık uçlu cebir problemleri formu 7 adet problem durumundan oluşmaktadır. Örnek olay çalışması öğrencilerin bu problemleri çözmelerinin hemen ardından yapılan klinik mülakatlar ile gerçekleştirilmektedir. Öğrencilerin açık uçlu cebir problemleri formunda yer alan yedi problemi yanıtladıkları yazılı çözümler ile mülakatlarda bu problemlerde uyguladıkları stratejilere ilişkin açıklamaları birlikte incelenerek araştırmanın alt problemlerine yanıt aranmaktadır.

Bulguların incelenmesi, araştırmanın alt problemlerine ilişkin başlıklar altında sunulmaktadır. Alt problemler SAR yetkinlikleri ile ilişkilidir. SAR yetkinlikleri birbirinden bağımsız olarak düşünülemese de farklı başarı seviyelerine sahip öğrencilerin SAR yetkinlikleri ile ilgili süreçlerinin nasıl gerçekleştiğini incelemeye, araştırmanın alt problemleri ile ilişkili olan bu başlıkların çalışmayı daha anlamlı kılacağı düşünülmektedir.

4.1. Metni Okuma, Yorumlama ve Bağlamı Anlamlandırma Sürecine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın birinci alt problemi olan “Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlamlandırma süreçleri nasıldır?” sorusuna yanıt aranmaktadır. Öğrencilerin metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlamlandırma (C1) yetkinliğini sağlayıp sağlayamadıkları;

- Bağlamı anlamlandırma
- Gömülü matematiği anlamlandırma

iki alt bileşenin ele alınmasıyla incelenmektedir.

4.1.1. Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular

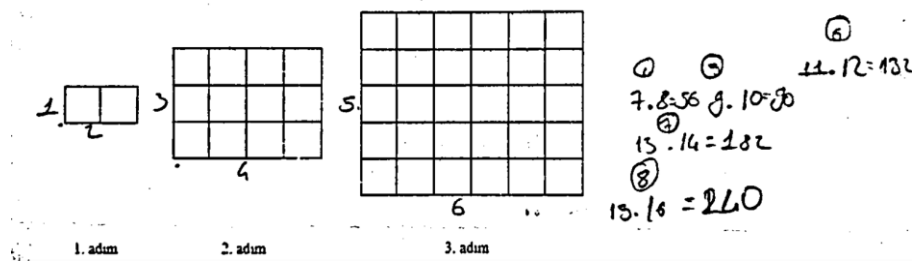
Ters Piramit probleminde gerçek yaşamdan alınmış ters piramit şeklinde duran bir bina ve bu binanın her katında yer alan oda sayılarındaki artışı temsil eden bir örüntü verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlamaları için bu örüntüyü problem bağlamında verilen bilgiler ile ilişkilendirerek sonraki adımlarına ilişkin fikir sahibi olmaları gerekmektedir. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Bağlamı anlamlandırma: Örüntünün nasıl ilerlediğini anlama
- Gömülü matematiği anlamlandırma: Örüntünün her adımında yer alan dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarlarındaki değişimden yararlanmaları gerektiğini keşfetme

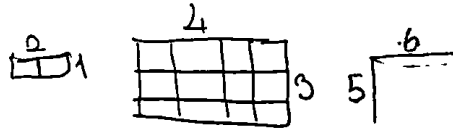
C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, örüntüyü anlama sürecinde örüntüde yer alan miktarları ve ilişkileri ortaya koymaktadır. Öğrenciler örüntü üzerinde her adımda kaç birim kare olduğunu belirterek ve örüntünün sonraki adımını bularak bağlamı anlamlandırdıklarını; birim karelerden oluşan dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenar uzunluklarının artış miktarını fark ederek gömülü matematiği anlamlandırdıklarını göstermektedir. İnfomal ön işlemler yapan bu öğrencilerin problemi çözme adımlarına geçmeden önce örüntünün adımlarındaki değişimi anlama çabasında oldukları, çözüme nasıl başlayacaklarını ve nasıl ilerleyeceklerini planladıkları görülmektedir. C1 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtan Y2'nin örüntünün adımlarındaki değişimi anlama çabası ve gömülü matematiği anlamlandırma süreci Şekil 11'de görülmektedir.



Şekil 11. Y2'nin yazılı çözümlerinde örüntüdeki gömülü matematiği keşfetme süreci.

Y2, örüntüde verilen dikdörtgenlerin kenar uzunluklarına odaklanarak ilerlemektedir. Bu uzunlukların belirli bir artış miktarı ile ilerlediğini keşfettiği için gömülü matematiği anlamlandırdığını göstermektedir. O2'nin yazılı çalışmalarında da benzer şekilde bu ilişkiyi keşfettiği Şekil 12'de görülmektedir.

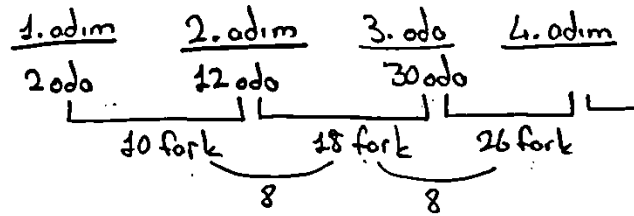
a) Şimdi bu kâtları nasıl buldum desenize hocam



Şekil 12. O2'nin yazılı çözümlerinde örüntüdeki gömülü matematiği keşfetme süreci.

O2, problemde verilen örüntünün adımlarını kısaca tekrar çizmekte ve bu dikdörtgenlerin kenar uzunluklarındaki değişimi fark ettiğini göstermektedir. Öğrencinin bu süreci Y2 ile benzer şekilde ifade ettiği görülmektedir.

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, örüntünün her adımına ilişkin miktarları birim kare sayısından yola çıkarak belirlemekte ve örüntünün bir sonraki adımını belirleyebilmektedir. Dolayısıyla bu öğrenciler bağlamı anlamlandırmaktadır. Fakat bu öğrenciler örüntünün kuralını oluştururken kullanacakları bir bilgi olan, örüntünün her adımında yer alan dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenar uzunluklarının değişimini fark edemedikleri için gömülü matematiği anlamlandıramamaktadır. Y1'in bağlamı anlamlandırma süreci Şekil 13'te görülmektedir.



Şekil 13. Y1'in yazılı çözümlerinde örüntüdeki bağlamı anlamlandırma süreci.

Y1, örüntünün nasıl ilerlediğini oldukça net bir şekilde çözümlerinde göstermektedir. Örüntünün adımlarını dikdörtgenleri oluşturan birim karelerin sayısı ile ifade etmektedir. Birim karelerin arasındaki farkları açıkça belirttiği için problemin bağlamını anlamlandırdığı anlaşılmaktadır. Problemin çözümünde doğru cebirsel ifadeyi oluşturabilmesi için öğrencinin örüntüdeki dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını keşfetmesi gerekmektedir. Fakat Y1 bu durumu fark edemediği için gömülü matematiği anlamlandırma bileşenini sağlayamamaktadır. Yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan diğer öğrenciler de örüntüyü Y1 ile benzer şekilde yorumlamaktadır.

C1 yetkinliğini sağlayamayan tek öğrenci D2 ise örüntüde yer alan miktarları belirtmiş olsa da bir sonraki adımın ne olacağına dair fikir sahibi değildir. Bu nedenle bu yetkinliğin gerektirdiği iki alt bileşeni de sağlayamamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Ters Piramit problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği nasıl anlamlandırdıkları derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin yazılı çalışmalarında C1 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin yapılan yorumlar ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında farklılıklar ortaya çıkmaktadır. Y1'in yazılı çalışmalarında C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı, fakat mülakatlar sırasında bu yetkinliği güçlü düzeyde yansıtabildiği görülmektedir. Y1'in yazılı çalışmaları incelendiğinde bağlamı anlamlandırdığı anlaşılrsa da problemdeki örüntünün kuralını keşfedemediği için gömülü matematiği anlamlandıramadığı sonucuna varılmıştı. Yapılan örnek olay çalışmasında Y1, çözümlerinde bir değişiklik yapmak istemektedir. Aşağıdaki açıklamalarından da anlaşılacağı gibi çözümlerinden tatmin olmadığı ve başka bir yol arayışına girdiği görülmektedir.

- 12A:** Bu sorunun yanıtını bulurken nasıl bir yol izledin? Daha farklı bir yol ile çözümü bulabilir miydin?
- 13Y1:** ... Burada aslında sonradan aklıma bir yol daha gelmişti... Katlardaki oda sayılarının alanlarıyla ilgili.
- 14A:** Tamam, bununla ilgili konuşalım. Oda sayılarının alanları derken ne demek istedin? Gösterebilir misin?
- 15Y1:** Birinci adımda 2 oda var. Kısa kenarı 1, uzun kenarı 2. İkinci adımda 3 ve 4. Üçüncü adımda 5 ve 6 şeklinde gidiyor. Bunu şu şekilde yapabiliriz: *(Burada işlemlerini yazıyor)*

$$\begin{array}{ccc} 1.2 & 3.4 & 5.6 \\ 2 & 12 & 30 \end{array}$$

Şekil 14. Y1'in mülakat sırasında örüntüdeki gömülü matematiği keşfetme süreci.

- 16Y1:** Zaten şekilde de görüyoruz. *(Problemde verilen örüntüyü gösteriyor)* Bir sonraki adım da 7×8 olur yani 56 oda olur.

Burada Y1 problem bağlamında verilen örüntünün kuralına ilişkin yeniden cebirsel akıl yürütme sürecindedir ve yeni bir strateji geliştirmek üzeredir. Örüntünün kuralı hakkında her bir adımda yer alan dikdörtgenlerin alanları ile ilgilenmesi gerektiğini fark etmektedir (13Y1). Örüntünün kuralının dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarlarının her adımdaki artış miktarı ile ilişkili olduğunu keşfetmektedir (15Y1). Bir sonraki adımın 56 olacağını bildiği için yeniden tanımladığı ilişkiyi bu adım için denediğinde ilişkinin doğru olduğundan emin olmaktadır. Bu durum Y1'in gömülü matematiği anlamlandırma sürecinde olduğunu göstermektedir.

Yazılı çözümlerinde C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı tespit edilen O1'in, açıklamalarında örüntüyü yorumladığı görülmektedir.

- 7A:** Her adımdaki oda sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklar mısın?
- 8O1:** Birinci katta 2 oda var. İkinci katta 12 oda var. Üçüncü katta şey 30 oda var. O nedenle ilk 10 oda artıyor sonra 18 oda artıyor.
- 9A:** Bu sorunun yanıtını bulurken nasıl bir yol/strateji izledin? Daha farklı bir yol ile bulabilir misin?
- 10O1:** Bir üst kata çıkarken odalar nasıl artmış ona bakarız. (*Düşünüyor*) Daha farklı bir yol olarak tabloyla yaptım.
- 11A:** Tabloyu nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?
- 12O1:** Nasıl arttığını bulmuştuk yani 10, 18, 26 diye. O nedenle ilk kat x ve ekleyerek buluruz.

O1, bağlamı anlamlandırma sürecinde örüntünün nasıl ilerlediğini anlamaya çalışırken dikdörtgenlerin birim kare sayılarından yararlanmaktadır (8O1). Fakat dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını keşfedemediği için gömülü matematiği anlamlandıramadığı görülmektedir. Öğrenci örüntünün ilk adımındaki birim kare sayısının 2 olduğunu bilmesine rağmen bu miktarı ifade etmek için x değişkenini kullanmaktadır (12O1). Bu değişkeni kullanmasının nedeni temsil oluşturma sürecinde araştırılmaktadır.

Yazılı çözümlerinde C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı tespit edilen D1'in, açıklamalarında örüntünün nasıl ilerlediğini anlayamadığı görülmektedir.

- 1A:** (Soru okunur.) Oda sayısını nasıl bulduğunu anlatır mısın?
- 2D1:** ...Etrafına odaları ekledim.
- 3A:** Bulduğun sonucun doğruluğundan emin misin?
- 4D1:** ...Evet.

5A: Nasıl emin oluyorsun?

6D1: ...

7A: Her adımdaki oda sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklar mısın?

8D1: ... 2 tane oda var, sonra 12 oda var. Sonra 30 oda oluyor.

9A: Bu sorunun yanıtını bulurken nasıl bir yol izledin? Daha farklı bir yol ile bulabilir misin?

10D1: ...Odaların etrafına oda ekleyince cevap çıkıyor.

D1 yazılı çözümlerinde bağlamı anlamlandırdığına ilişkin yanıtlar vermektedir. Öğrenci örüntüde yer alan dikdörtgenlerin birim kare sayılarının nasıl ilerlediğini çözümlerinde artış miktarını belirterek göstermiş olsa da açıklamalarında bundan bahsetmemektedir. Bunun yerine “*odaların etrafına oda ekledim*” şeklinde açıklama yapmaktadır (2D1). Bu açıklaması öğrencinin örüntüdeki miktarlara odaklanmak yerine şekil örüntüsü olarak düşündüğü için örüntünün bir sonraki adımını çizim yaparak bulabileceğini düşünmektedir (10D1). Bu durum öğrencinin yazılı çözümlerinden farklı olarak bağlamı da anlamlandıramadığını göstermektedir. Dolayısıyla D1’in de C1 yetkinliğini sağlayamadığı tespit edilmiştir.

Ters Piramit Probleminde C1 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Öğrencilerin yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından örnek olay çalışmasında çözümleri hakkındaki yaptıkları açıklamaları neticesinde C1 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlar ortaya çıkmaktadır. Öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 13’te görülmektedir.

Tablo 13

Ters Piramit probleminde C1 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Örüntünün adımları 2, 12, 30, ... şeklinde ilerliyor. Adımlardaki dikdörtgenlerin kenarlarının çarpımından 1×2 , 3×4 , 5×6 şeklinde bu sayılar elde edilir. Yani dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarları ikişer ikişer artıyor.”(Y2)	Y1, Y2, O2

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>“1. adımda 2, 2. adımda 12, 3. adımda 30 şeklinde ilerliyor. 2 ve 12 arasında 10 fark var hocam. 12 ve 30 arasında 18 fark var. Farklar sekizer olarak artıyor.” (O1)</i>	O1
C1 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“Soruyu çözmek için kareleri sayabilirim.” (D2)</i>	D1, D2

C1 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerden Y1, örnek olay çalışmasında çözüm stratejisini değiştirerek Y2 ve O2 gibi yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir. D1 ise yazılı çalışmalarında bağlamı anlamlandırdığını gösteren bazı çözümler yapmış olsa da açıklamaları bunun tam tersi bir süreçte olduğunu göstermektedir. Bu öğrenci C1 yetkinliğini sağlayamamıştır.

4.1.2. Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular

Harflerin Oyunu probleminde alfabedeki harflerin belli bir kurala göre diziliminden oluşan bir örüntü ve örüntünün ilk beş adımı verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlamaları için bu harflerin örüntünün adımlarını temsil ettiğini anlamaları ve örüntünün adımlarının nasıl ilerlediğini keşfetmeleri gerekmektedir. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Bağlamı anlamlandırma: Örüntüde yer alan harflerin alfabedeki kaçınıcı harf olduğuna dikkat etme
- Gömülü matematiği anlamlandırma: Matematiksel olarak yazdıkları örüntünün her bir adımının nasıl ilerlediğini fark etme

C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, örüntüde yer alan harflerin örüntünün adımlarını temsil ettiğini anlamaktadır. Örüntünün adımlarını matematiksel olarak yazarken bu harflerin alfabedeki sıralarına dikkat ederek miktarlara ulaşacaklarını anlamaları bağlamı anlamlandırdıklarını ifade etmektedir. Öğrencilerin örüntünün artış miktarı hakkında fikir sahibi olmaları ve sözel ya da sayısal olarak artış miktarını ifade etmeleri gömülü matematiği anlamlandırdıklarını göstermektedir. C1 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtan O2 çözümlerinde bağlam ile ilgili *“Her harfin sayıyı temsil ettiğini düşünüyorum. Alfabetik sıraya*

göre sayı dizisi oluşuyor” yorumunu yazmıştır. Ayrıca “Yeni harf için 4 ekleyip alfabedeki karşılığına gelen sayı oluyor” şeklindeki yorumu ile harflerin dörder dörder ilerlediğini ifade etmeye çalışmış ve gömülü matematiği anlamlandırdığını göstermiştir. Y1 ise harflerin alfabedeki sırasına göre ilerlediğini fark etmekte ve bu ilerleyişin nasıl olduğunu anlamak için harflerin numaralarını belirlemektedir. Y1’in bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırma süreci Şekil 15’te görülmektedir.

A, D, Ğ, J, N, R, S, T, U, Z

1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29.

Şekil 15. Y1’in yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği keşfetme süreci.

Y1, harflerin alfabedeki sıralarını belirttiikten sonra artış miktarının kaç olduğunu anladığını “Örüntü dörder dörder ilerliyor, dörder olarak 1’den 29’a kadar tüm numaraları verdiğimizde 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 şeklinde örüntü oluşur.” şeklinde açıklamalarla ifade etmektedir.

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan tek öğrenci D1, “Örüntüde bir harfi söyleyip 3 harf atlayıp diğer harf yazılmış” şeklindeki ifadesiyle örüntünün nasıl ilerlediğini anladığı göstermektedir. Bununla birlikte matematiksel olarak örüntüyü ifade edememekte ve çözümleri bununla sınırlı kalmaktadır. Bu durum bağlamı kısmen anlamlandırdığını, gömülü matematiği anlamlandıramadığını göstermektedir. D1’in bağlamı kısmen anladığını gösteren yazılı çözümleri Şekil 16’da görülmektedir.

BCÇ EFG JHIİ klm oöP ssT üvy

A, D, Ğ, J, N, R, S, T, U, Z

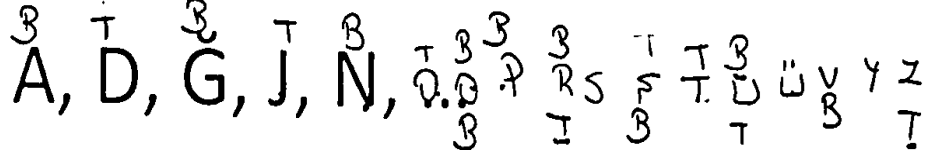
1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29.

Şekil 16. D1’in yazılı çözümlerinde bağlamı anlamlandırma süreci.

D1, harflerin alfabedeki sırasını dikkate alma ve matematiksel olarak örüntüyü tekrar yazma eylemini gerçekleştiremeye de harflerin nasıl ilerlediğini anladığı çözümlerinden anlaşılmaktadır. Öğrenci örüntünün kuralını uygulayarak ilerleyen adımlarını örüntünün devamında belirtmektedir. Bununla birlikte kural gereği söylenmeyen harfleri örüntünün üst kısmında ayrı bir şekilde göstermektedir.

D2 yetkinliğini sağlayamayan tek öğrenci D2 ise örüntü ile ilişkili olmayan çözüm ve yazılı açıklamalar yaparak yetkinliğin iki alt bileşenini de sağlayamadığını göstermektedir. D2'nin bu çözümleri Şekil 17'de görülmektedir.

2) HARFLERİN OYUNU



Şekil 17. D2'nin bağlamı anlamlandıramadığı yazılı çözümleri.

D2, örüntünün ilerleyen adımlarındaki harflerin ne olacağını anlamaya çalışmaktadır. Fakat örüntünün ilerleyen adımlarını doğru yazmadığı ve dolayısıyla bağlamı anlamlandıramadığı görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Harflerin Oyunu problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği nasıl anlamlandırdıkları derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden elde edilen bulgular ile örnek olay çalışması bulguları tamamıyla tutarlıdır. Akademik başarısı yüksek olan öğrencilerden Y2'nin açıklamalarından örüntüyü anladığı anlaşılmaktadır.

- 1A:** (Soru okunur) Timuçin ve Burçin'in harfleri söylerken neye dikkat ettiğini nasıl buldun? Açıklar mısın?
- 2Y2:** Harfleri sayarak nasıl ilerlediğini bulmaya çalıştım. 4 harf sonrası söylenmiş. Yani 4 artarak gitmiş.
- 3A:** Örüntüyü matematiksel olarak nasıl yazdığını anlatır mısın?
- 4Y2:** Dörder ilerleyerek tabloda gösterdim. Harfleri de yazdım.
- 5A:** Yanıtının doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?
- 6Y2:** Çünkü ilk harf A harfi söylenmiş sonra B, C, Ç'yi söylememiş D harfini söylemiş. Sonra yumuşak G harfi. Yani dördüncü harfi söylemiş hep. Bende buna göre ilerledim ve emin oldum.
- 7A:** Matematiksel olarak yazmanı istediğimde aklına gelen düşünceleri anlatır mısın?
- 8Y2:** Matematiksel demek yani sayılarla yazmak.

Y2, örüntünün nasıl ilerlediğini anlamak için kaç harfin atlandığını dikkate aldığı görülmektedir (6Y2). Öğrenci “*hep dördüncü harfi söylemiş*” açıklamasında gömülü matematiği anlamlandırdığını göstermektedir. Daha sonra bu harflerin nasıl ilerlediğini sayısal olarak yazılı çözümlerinde ifade ettiğini belirtmektedir (10Y2- 18Y2).

Yazılı çözümlerini açıklamalarıyla destekleyen O2, hiçbir sayısal değerin verilmediği problem bağlamını matematiksel bir yapıya nasıl dönüştürdüğünü ikna edici açıklamalar yaparak ifade etmektedir.

- 1A:** (*soru okunur*) Timuçin ve Burçin’in harfleri söylerken neye dikkat ettiğini nasıl buldun? Açıklar mısın?
- 2O2:** Her harf bir sayı temsil ediyor hocam bu örüntüde.
- 3A:** Örüntüyü matematiksel olarak nasıl yazdığını anlatır mısın?
- 4O2:** Harfler sayıyı temsil ediyor ya yani sayı örüntüsü olarak söyleyebiliriz. Bu da 1, 5, 9, 13 diye ilerliyor.
- 5A:** Yanıtının doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?
- 6O2:** Çünkü sayılara baktığımızda hep 4 artarak gidiyor. Buradan doğru olduğu anlaşılıyor.
- 7A:** Matematiksel olarak yazmanı istediğimde aklına gelen düşünceleri anlatır mısın?
- 8O2:** Matematiksel yazmamızı istediğinde sayıları yazarız. Ya da denklemlerle... Ya da cebirsel x, y gibi.

Yazılı çözümlerinde her harfin sayıları temsil ettiğini belirten O2, sayılar ile bir sayı örüntüsü oluştuğunu belirterek problem bağlamını anlamlandırdığını (4O2) ikna edici bir şekilde açıklamaktadır. Bu sayı örüntüsünün artış miktarının 4 olduğunu keşfetmesi ile gömülü matematiği anlamlandırdığını göstermektedir (6O2). Ayrıca matematiksel olarak yazmanın nasıl gerçekleştiğini doğru bir şekilde yorumlamaktadır (8O2).

O2 ile yapılan örnek olay çalışmasından alınan bu mülakat metni, C1 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtan diğer öğrenciler ile yapılan mülakatlar ile oldukça benzer açıklamaları içermektedir. Yetkinliği sağlayamayan D2’nin ise açıklamalarında örüntüyü anlayamadığı görülmektedir.

- 1A:** (*Soru okunur*) Timuçin ve Burçin’in harfleri söylerken neye dikkat ettiğini nasıl buldun? Açıklar mısın?
- 2D2:** Her harfi bir kez yazmak. Örüntü şeklinde söylerler.

- 3A:** Alfabedeki harfleri söyler misin?
- 4D2:** A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, Ü, V, Y, Z. (Ç, Ğ, İ, Ė ve Ş harflerini söylemiyor)
- 5A:** Oyunda söylenen harfler nasıl ilerlemektedir? Düşüncelerini anlatır mısın?
- 6D2:** A, D, G, J, N diye ilerlemektedir.
- 7A:** Örüntüyü matematiksel olarak nasıl yazdığını anlatır mısın?
- 8D2:** (cevap vermiyor, bilmiyorum şeklinde bir mimik yapıyor)
- 9A:** “ $x + 2$, $x + 3$, $x + 1$, $x + 3$ diye sırasıyla ve kendi tekrar. $x =$ kendinden önceki sayı” demişsin. Neden böyle dedin?
- 10D2:** Mm... Örüntünün nasıl ilerlediğini sorduğu için. x dedim çünkü hangi sayı bilmiyoruz. Mm... Önce 2 harf ilerliyor sonra 3 sonra 1 gittiği için. x önceki sayı. Böyle yazdım.

D2 örüntünün belli bir kurala göre ilerlemediğini, artış miktarının değiştiğini düşünmektedir (10D2). Bunun nedeni D2'nin alfabede yer alan harfleri söylerken bazı harfleri atlıyor olabileceğidir. Mülakat sırasında da harfleri sırayla söylemesi istendiğinde toplam 6 harf atlayarak hızlıca harfleri söylediği görülmektedir (4D2). Dolayısıyla öğrenci probleme ilişkin bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandıramamıştır.

Harflerin Oyunu Probleminde C1 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 14'te görülmektedir.

Tablo 14

Harflerin Oyunu probleminde C1 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Her harf bir sayıyı temsil ediyor, yani sayı örüntüsü olarak söyleyebiliriz. Bu da 1,5,9,13, ... diye ilerliyor. Örüntü dört harf artarak ilerliyor.” (Y1)	Y1, Y2, O1, O2

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>“Harfler bir tane söyleniyor 3 tane atlanıyor. Oyun kuralından dolayı... Böyle ilerliyor. Matematiksel olarak yazmak demek, 3 artması olabilir.” (D1)</i>	D1
C1 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“... Önce 2 harf ilerliyor sonra 3 sonra 1 gittiği için böyle yazdım.” (D2)</i>	D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmamıştır.

4.1.3. “n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde $n + n$ ve $n + 6$ cebirsel ifadelerinden hangisinin daha büyük olduğunu karşılaştırırken öğrencilerin değişkene yükledikleri anlamların irdelenmesi amaçlanmıştır.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Bağlamı anlamlandırma: Değişkene değer verdiklerinde farklı durumlar olduğunu matematiksel ya da sözel ifadeler yardımıyla gösterebilme
- Gömülü matematiği anlamlandırma: Problemin sonucunun üç farklı durum içerisinde değerlendirileceğini fark etme

Ayrıca bu problemin diğer problemlerden farklı bir yönü olarak alt maddelerinin ve yönergelerinin bulunmaması sonucu öğrencilerin C1 yetkinliklerini ortaya koyarken çözümlerini yönlendirme süreçleri de incelenmektedir.

C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, problem bağlamını anlamlandırabilmek için değişkene farklı değerler verme yöntemini kullanmaktadır. Ayrıca sözel açıklamalara yer veren öğrenciler, değişkene farklı değerler verildiğinde farklı sonuçlar çıkacağını keşfetmektedir. Doğru çözüm için üç farklı durumun ortaya çıktığını keşfeden bu öğrenciler, “*n sayısı 6’dan küçükse $n + 6$ daha büyük, n sayısı 6 ise iki ifade birbirine eşit, n sayısı 6’dan büyükse $n + n$ daha büyük olur*” şeklinde sonuçlarını yorumlamaktadır ve gömülü matematiği anlamlandırdıklarını göstermektedir.

Yetkinliği güçlü sağlayan öğrencilerin zayıf sağlayanlara göre farkı, çözümlerine destek olabilecek prosedürlere ve hesaplamalara yer vermeleridir. Öğrencilerin kendi çözümlerini yönlendirme süreçlerinde olumlu ve doğru sonuçlar elde etmeleri problemde yer alan gömülü matematiği anlamlandırdıklarını ifade etmektedir. Y1'in bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırmak için sistematik bir şekilde değişkene değer verme sürecine ilişkin örnek Şekil 18'de verilmiştir.

$n=1$ olursa $\frac{n+n}{1+1=2}$
 $n=2$ olursa $\frac{n+n}{2+2=4}$
 $n=3$ olursa $\frac{n+n}{3+3=6}$
 $\frac{n+b}{1+7=8}$ olur.
 $\frac{n+b}{2+8=10}$ olur.
 $\frac{n+b}{3+9=12}$ olur.

"n sayısı b'dan küçük ise n+b daha büyük olur."

faktörizasyon

Şekil 18. Y1'in bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırma süreci.

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, çözümlerinde değişkene farklı değerler verebileceklerinin farkında olup olmadıklarını gösteren herhangi bir çözüm ya da sözel açıklamaya yer vermemektedir. Bu nedenle bağlamı anlamlandırdıkları ile ilgili bir yorum yapılamamaktadır. Bununla birlikte bu öğrenciler, doğru çözüm için üç farklı durumun oluştuğunu belirtmişlerdir. Bu durum kısmen gömülü matematiği keşsettiklerini göstermektedir. Fakat yine de sonuca ulaşırken herhangi yazılı bir işlem ya da hesaplama sürecine girmedikleri ve bağlamı anlamlandırdıklarını gösteren açıklamalar yapmadıkları için bu öğrencilerin yetkinliği zayıf düzeyde sağladıkları düşünülmektedir. Örnek olay çalışmasında öğrencilerin bu durumu derinlemesine ele alınmaktadır.

Yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan O1'in çözümlerinde bağlamı tam olarak anlamlandıramadığını düşündürten, doğru çözüm ile ilgisi olmayan bazı cebirsel prosedürler uyguladığı görülmektedir. O1'in bu çözümleri Şekil 19'da görülmektedir.

$n + n' = x$ dersen
 $n + n = x$ ise $n = \frac{x}{2}$ olur.
 Bunu 2. denkleme uygularsak
 n yerine $\frac{x}{2}$ dersen
 2. denkleme $\rightarrow n+b \rightarrow \frac{x}{2} + b$ olur.
 $\frac{x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{x}{2} + \frac{12}{2} = \frac{x+12}{2}$ olur.

Şekil 19. O1'in bağlamı anlamlandıramadığını gösteren yazılı çözümler.

O1, $n + n$ değerine x diyerek bir takım cebirsel prosedürler uygulamaktadır. Fakat bu yol ile herhangi bir sonuca ulaşamamaktadır. Öğrenci n 'in alacağı değerlere göre oluşabilecek üç farklı durumu beklenen şekilde yazdıktan sonra bu işlemleri yapması bağlamda anlamlandıramadığı noktaları araştırmak istemesinden kaynaklanıyor olabilir. Yaptığı bu işlemler ile doğru bir sürece giremediği ve açıklayamadığı bazı durumlardan emin olmadığını belirttiği için öğrencinin yetkinliği zayıf düzeyde sağladığı görülmektedir.

Bir diğer öğrenci D1, Şekil 20'de verilen yorumlarında değişkene farklı değerler verilebileceğinin ve bu verilen değerlere bağlı olarak farklı durumların oluşabileceğinin farkındadır ve sözel açıklamalara yer vermektedir. Fakat yine de net bir cevap veremeyeceğini belirtmiş ve yalnızca bir değer vererek işlemlerini sonlandırmıştır. Bu durum D1'in bağlamı kısmen anlamlandırsa da gömülü matematiği anlamlandıramadığını göstermektedir.

İkisinde sırbirinden büyük değildir. Çünkü farklı farklı değerler vermediğimizde birisi diğerlerinden büyük olur

Şekil 20. D1'in bağlamı anlamlandırdığını gösteren yorumları.

C1 yetkinliğini sağlayamayan D2'nin “*Tamamen bize eksik verilen bilgilerden dolayı sonucu bilemeyiz*” şeklinde bir sözel açıklama yazarak herhangi bir çözüm sürecine girmedeği görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

“ n ” Neyi İfade Ediyor? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği nasıl anlamlandırdıkları derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C1 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin yapılan yorumlar ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlarda arasında bazı farklılıklar ortaya çıkmaktadır. Yazılı çözümlerinde yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığını gösteren O2, mülakatlarda yaptığı açıklamalarında sonuçlarını neye dayandığını ifade etmektedir.

7A: Matematiksel anlamda n 'in değeri hakkında ne söyleyebilirsin?

8O2: Bir şey diyemeyiz, çünkü soruda belirtmemiş.

9A: n değeri için eksili bir sayıda olabilir 6'dan küçük bir sayı da olabilir, demişsin. Neden böyle düşündün?

10O2: Çünkü n hangi değer bilemem. Eksi sayıları denersek $n + n$ daha küçük oluyor. 6'dan küçük sayılarda böyle. 6'dan büyük sayılar verince tam tersi oluyor.

11A: $n = 6$ değerini verdiğinde ortaya nasıl bir sonuç çıktı? Anlatır mısın?

12O2: 6 değerini verirse, (*kâğıdın üzerine çözüm yaparak cevaplıyor*) Eşit çıkıyor...

$$6 \times 6 = 32 \quad 6 + 6 = 12$$

Şekil 21. O2'nin mülakatlarda gömülü matematiği keşfetme süreci.

13A: n'e 6 dışında hangi değerleri verdin?

14O2: Yapmıştım soruyu çözerken. Eksi sayılar vermiştim. 1, 2, 3 diye 6'ya kadar değerler vermiştim... 6'dan büyük değerler de vermiştim.

O2, her ne kadar yazılı çözümlerinde değer verme işlemlerini göstermese de aslında sonuçlarına ulaşırken değişkene değer verme yöntemini kullandığını açıklamaktadır (14O2). Öğrenci çözümlerinde üç farklı durumdan biri olan $n = 6$ olduğunda iki ifadenin birbirine eşit olma durumunu belirtmemişti. Fakat mülakat metninde 6 değerinin önemli olduğunun farkında olduğunu göstermektedir (10O2). Ayrıca $n = 6$ olduğunda iki cebirsel ifadenin birbirine eşit olduğunu Şekil 21'de gösterdiği için bu öğrencinin problem bağlamını ve gömülü matematiği anlamlandırma bileşenlerini sağlayarak C1 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıttığı söylenebilir.

Yazılı çalışmalarında hiçbir çözüme yer vermeyen D2 ise mülakatlarda problem bağlamına ilişkin bir takım fikirlere sahiptir. Her ne kadar problemde bilgi eksikliğinin olabileceği düşüncesi değişmemiş olsa da, D2 değişkene farklı değerler verdiğinde bazı sonuçlara ulaşabileceğinin farkındadır.

23A: Bize eksik verilen bilgilerden dolayı sonucu bilemeyiz, diyorsun. Peki, hangi bilgiler verilmemiş. Ya da hangi bilgiler verilmeliydi?

24D2: (*düşünüyor*) Mesela n'in hangi sayı olduğunu söyleyebilirdi.

25A: O zaman soru çok kolay olmaz mıydı?

26D2: Evet. O zaman n sayısı 1 ile 5 arasında bir sayı diyebilirdi mesela. Biz de ona göre cevap verebilirdik.

27A: Eğer öyle deseydi sonuç ne olurdu?

28D2: 2 olduğunu düşünürsek, (*kâğıda yazarak devam ediyor*) $n + 6$ daha büyük derdim. Sonra diğer sayılara bakıp tekrar cevabı söyledim.

$$\begin{aligned} n+n &= 2+2=4 \\ n+b &= 2+8=10 \\ n+b &\text{ daha büyük} \end{aligned}$$

Şekil 22. D2'nin mülakatlarda problem bağlamını anlamlandırma süreci.

D2'ye hangi bilginin eksik olduğu sorulduğunda, başta n değerini bilmesi gerektiğini düşünmektedir. Fakat sonra n 'in alabileceği değer aralığının tanımlı olması ile bu soruya daha net cevap verebileceğini belirtmektedir (26D2). Bu düşüncesi ile bağlama ilişkin kısmen doğru fikirlerinin olduğunu belirtmekte, böyle bir durumda n değişkenine farklı değerler verebileceğine ve bir sonuca ulaşabileceğine ilişkin ikna edici açıklamalar yapmaktadır. Şekil 22'de bu durumda oluşabilecek sonuçları göstermektedir. Bu durum öğrencinin problem bağlamını kısmen anlamlandırıldığını ve sahip olduğu farklı bakış açısını net bir şekilde açıklayabildiğini göstermektedir. Yapılan mülakatın ardından D2'nin C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı sonucuna varılmıştır.

Yetkinliği yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan Y1'in değişkene ilişkin fikirleri sorulduğunda çözüme nasıl başladığını anlattığı görülmektedir.

4A: Cebirsel ifadelerde n gibi (x, y, z vb.) ifadeler nasıl adlandırılmaktadır?

5Y1: Bilinmeyen.

6A: Sence bu ifadelere neden bilinmeyen denmektedir?

7Y1: Çünkü kaçınıcı sayı olduğunu bilemiyoruz.

8A: Bu soruda n bize neyi ifade ediyor?

9Y1: Herhangi bir sayı olabilir.

10A: Matematiksel anlamda n 'nin değeri hakkında ne söyleyebilirsin?

11Y1: 1 olabilir, 3 olabilir, 10 olabilir hatta 100 olabilir... Her sayı olabilir.

12A: Soruyu çözerken nasıl bir yol izlediğini anlatabilir misin?

13Y1: 1 vererek başladım, sırayla ilerledim. Sonra 2 verdim. Sonra 3 verdim. Fark gittikçe azaldı, 6'ya kadar.

Y1 problemde yer alan n değişkeninin birçok değer alabileceğinin farkındadır (11Y1). Değişkene değer vererek neler olacağını görmek için hangi değerleri verdiğini belirtmektedir (13Y1). Değişkene değere verme sürecinde öğrenci, 6 değerine kadar iki cebirsel ifade arasındaki farkın azaldığını keşfetmektedir. Y1 ilerleyen açıklamalarında iki cebirsel ifadenin farklı durumları için 6 değerinin kritik olduğunu ifade etmektedir (27Y1 – 35Y1). Öğrencinin tüm açıklamaları C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını kanıtlamaktadır.

“n” Neyi İfade Ediyor? Probleminde C1 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 15’te görülmektedir.

Tablo 15

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde C1 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“1, 2, 3, 6, 7, 8 değerlerini verdim. 1’den öylesine başladım. Sonra nasıl devam edecek diye baktım. 2 ve 3 verdim. Farkın azaldığını görünce aklımdan 4 ve 5 değerlerini verdim. Sonra 6’da eşit olduğunu gördüm. Sonraki değerlerde fark yine artmaya başladı zaten.” (Y1)	Y1, Y2, O2
C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“İkisi de birbirinden büyük değil... Farklı değerler verince değişiyor. Verdiğimiz değere göre bazen $n + n$, bazen $n + 6$ büyük çıkar.” (D1)	O1, D1, D2
C1 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

C1 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerden O2, örnek olay çalışmasında sonuçlarını dayandığı noktaları açıklayarak Y1 ve Y2 gibi yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir. D2’nin ise herhangi bir çözüm yapmadığı için yetkinliği sağlayamadığı sonucuna varılmıştı. Yapılan mülakatlarda öğrenci bağlamı kısmen

anlamlandırdığını gösteren bazı açıklamalar yaptığı için C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı tespit edilmiştir.

4.1.4. Teraziler Nasıl Dengede? Problemine İlişkin Bulgular

Teraziler Nasıl Dengede? probleminde öğrencilere denge halinde 3 farklı terazi verilmiştir. Terazilerde kare, daire ve üçgen şekilleri ile temsil edilmiş ağırlıkların birbirleriyle nasıl ilişkili olduğu gösterilmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin terazilerin denge halinde olmasının eşitlik kavramıyla ilişkili olduğunu fark etmeleri ve işlemlere bu mantık ile başlamaları gerekmektedir. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Bağlamı anlamlandırma: Kare, üçgen ve dairenin birer değişken olduğunu ve alacağı değerlerin birbirine bağlı olduğunu anlama ve eşitlik kavramını denge halinde olan terazilerden yola çıkarak yansıtırma
- Gömülü matematiği anlamlandırma: Aritmetik ve cebirsel prosedürler ile doğru sonuçlar elde etme

C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, terazilerde ağırlıkları ifade eden kare, daire ve üçgen şekillerinin birer değişken olduğunun farkındadırlar. Ayrıca öğrenciler terazilerin denge halinde olmasının eşitlik kavramını temsil ettiğini ve bu sayede denklemler oluşturulabileceğini bilmektedir. Terazilerin birbiri ile ilişkisini ifade etmeleri ve kare, daire ve üçgenin alacağı değerlerin birbirlerine bağlı olduğunun da farkında olmaları, öğrencilerin problem bağlamını anlamlandırdıklarını ifade etmektedir. Çözümlerini gerekli prosedürler ile sonlandırıp doğru sonuçlara ulaşan bu öğrenciler gömülü matematiği anlamlandırma bileşenini sağladıklarını göstermektedir.

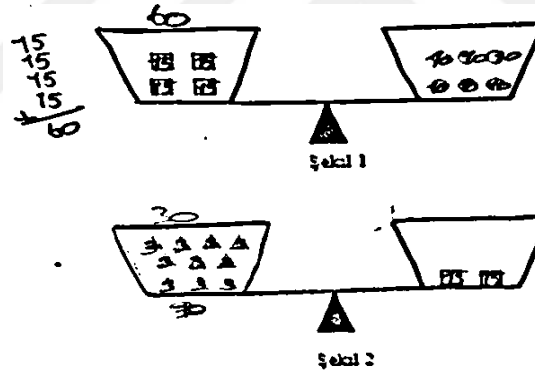
Öğrencilerden biri hariç (D2) tümünün bu problemde C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı görülmektedir. Ancak problemi anlamlandırma sürecinde öğrenciler arasında bazı strateji farklılıkları vardır. Çoğu öğrenci çözümlerinde değişkenlerin alacağı değerlerin birbirine bağlı olduğunu üç değişkeni uygun katsayılarla birbirine eşitleyerek göstermektedir. O1'in bu süreçte değişkenler için x , y , z gibi harf sembolleri kullanmak yerine şekilleri kullanmaya devam ettiği Şekil 23'te görülmektedir.

d) cevap = 1. ve 2. denklemlerde
 2. Ortaklığı
 $2 \square = 3 \circ$ ise $2 \square = 3 \circ = 10 \Delta$
 $2 \square = 10 \Delta$

Şekil 23. O1'in yazılı çözümlerinde problem bağlamını anlamlandırma süreci.

O1, birinci ve ikinci terazideki denge halinden yararlanarak oluşturduğu denklemlerde ortak olan terimi belirtmektedir. Öğrenci bu terimin ortak olmasından yararlanarak genel bir eşitlik oluşturmakta ve çözümlerine bu eşitliği kullanarak devam etmektedir.

D1 ise oluşturduğu denklemlerle çözümlerinde cebirsel prosedürler uygulasa da işlem adımlarından emin olmak için şekil üzerinde de bulduğu değerleri kontrol etmektedir. Bu durum öğrencinin bağlamı anlamlandırma sürecinde teraziler üzerinde değer verme yöntemine başvurduğunu göstermektedir. Öğrencinin bağlamı anlamlandırma süreci Şekil 24'te görülmektedir.



Şekil 24. D1'in yazılı çözümlerinde problem bağlamını anlamlandırma süreci.

D1 terazilerin üzerinde yaptığı işlemlerde karenin ağırlığı için 15 değerini verdikten sonra ilk terazinin sol kefesinin 60 olduğunu ve bu yüzden sağ kefesinde yer alan her bir dairenin ağırlığının 10 olacağını göstermektedir. Öğrenci aynı metodu kullanarak işlemlerine devam etmektedir.

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan D2'nin ise kare, daire ve üçgenlerin değişken olduğunu ve değerlerinin birbirine bağlı olduğunun farkında olması sebebiyle problem bağlamını anlamlandırdığı sonucuna varılabilir. Öğrencinin bu süreci Şekil 25'te görülmektedir.

3) 3'üze üçüncü terazi'de $Z+3Y=33$
 verilmiş, demeli birinci terazi'de
 $4X=6Y$ 'den bulabiliriz yani cebirsel gösterimi: $4X=6Y$ 'den $\frac{4X}{4}=\frac{6Y}{4}$ $X=\frac{6Y}{4}=\frac{3Y}{2}$
 5) $10Z=2X$ olur ki terazi dengede kalsın yani $X=\frac{5}{2}Z$

Şekil 25. D2'nin yazılı çözümlerinde problem bağlamını anlamlandırma süreci.

D2, terazilerin dengede olma durumunun eşitlik kavramını temsil ettiğini anlasa da oluşturduğu denklemleri etkili kullanamadığı ve cebirsel işlemler yapamadığı için problemin istediği sonuçlara ulaşamamıştır. Öğrenci terazilerdeki eşitlikleri diğer öğrenciler gibi $4x = 6y$ ve $10z = 2x$ şeklinde yazmış olsa da ardından bunları sadeleştirme sürecine girmiştir. Bu noktada çözümlerinde nasıl ilerleyeceğini bilmemektedir. Dolayısıyla D2'nin gömülü matematiği anlamlandıramadığı görülmektedir.

Tüm incelemeler, öğrencilerin bu problemde C1 yetkinliğini zayıf ya da güçlü düzeyde sağladıklarını göstermektedir. Yazılı çözümlerinde yetkinliği sağlayamayan öğrenci bulunmamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Teraziler Nasıl Dengede? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği nasıl anlamlandırdıkları derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden elde edilen bulgular ile örnek olay çalışması bulguları tamamıyla tutarlıdır. C1 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan akademik olarak başarılı olan Y2, mülakatlarda terazilerden nasıl yararlandığını açıklamaktadır.

- 1A:** (Soru okunur) Terazilerin dengede olması durumundan nasıl yararlandın?
2Y2: Teraziler dengede olmazsa denklem kuramayız. Ben denklemler kurarak yaptım.
3A: Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğunuz cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıkla mısın?
4Y2: Birinci terazide sadeleştirme yaptım ve 2 kare 3 tane daireye eşit oluyor. İkinci terazide 5 üçgen 2 kareye pardon yanlış yazmışım. 1 kareye eşit. 5 üçgen eşittir 1 kare. Evet. Ama burada 10 üçgen 2 kareye eşit ya. Ben onu kullandım.

2 kare dediğimiz için iki denklemi eşitledim. 3 daire 10 üçgene eşit oluyor. Sonra bunları kullandım.

Y2, terazilerin dengede olmasının eşitlik kavramını ifade ettiğini bilmektedir. Bu nedenle denklem kurabileceğini söylemektedir (2Y2). Öğrenci denklemleri terazilerin kefelerindeki ağırlıkları ifade eden şekilleri kullanarak oluşturmaktadır. İlk iki terazideki ortak terimin 2 kare olduğunu ve bu terimi kullanarak genel bir eşitlik oluşturduğunu (2 kare = 3 daire = 10 üçgen) belirtmektedir (4Y2). Öğrenci oluşturduğu eşitlikleri kullanarak doğru sonuçlara ulaştığını açıkladığı için (6Y2 – 12Y2) yetkinliği güçlü düzeyde sağladığı anlaşılmaktadır.

Yazılı çözümlerinde yetkinliğini güçlü düzeyde gösteren ve bunu açıklamalarıyla destekleyen D1, problem bağlamında verilen terazileri kullanarak oluşturduğu denklem ve eşitlikler hakkında ikna edici açıklamalar yapmaktadır.

- 1A:** (Soru okunur) Terazilerin dengede olması durumundan nasıl yararlandın?
- 2D1:** Eşitlik yaptım... Sınıfta da böyle terazide ağırlıklardan yapmıştık, o aklıma geldi. ... Sağ ve sol birbirine eşit olması gerekiyor.
- 3A:** Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğun cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?
- 4D1:** İlk olarak 4 kare eşittir 6 yuvarlak oluyor. Buradan şöyle bir sonuç daha var: 2 kare de 3 yuvarlağa eşit oluyor... İkinci terazide 2 kare 10 üçgene eşit olduğu için o zaman demek ki 10 üçgen de 3 yuvarlağa eşit... Üçüncü terazide 1 üçgenle 3 yuvarlağın toplamı 33 kilograma eşitmiş. 3 yuvarlak yerine 10 üçgen yazıp buldum.
- 5A:** Bu şekilleri (kare, daire ve üçgen) farklı bir şekilde ifade edebilir misin? Yani bu şekillerin yerine cebirsel ifadeler kullanalım ne dersin?
- 6D1:** Bilmiyorum... Tam anlayamadım.

D1, sınıf ortamından aşına gelen yabancı olmadığı bir durumla karşılaştığı bu problemde diğer problemlerde olduğundan daha emin tavırlar sergilemekte, prosedürlerini daha açık ve net ifadeler kullanarak açıklayabilmektedir (2D1). Öğrenci eşitlik kavramını terazilerin kefeleri ile ilişkilendirebildiği için bağlamı anlamlandırdığını göstermektedir (2D1). Terazilerin denge halinden yararlanarak denklemler oluşturması ve aritmetik ya da cebirsel prosedürlerini bu eşitliklerden yararlanarak yönlendirmesi gömülü matematiği

anlamlandırdığını göstermektedir (4D1). D1'e bilinmeyenleri farklı bir şekilde ifade edip edemeyeceği sorulduğunda ise öğrencinin cevap veremediği görülmektedir (6D1). Burada istenen öğrencinin çözümlerinde bilinmeyenleri kare, yuvarlak ve üçgen diyerek kelimelerle ifade etmesi yerine harfli sembolleri kullanabilmesiydi. Fakat öğrenci mülakatın ilerleyen dakikalarında da bu tip bir soruyla her karşılaştığında soruyu anlayamadığını ifade etmektedir.

Aynı problemde C1 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde gösteren D2, açıklamalarında da yetkinliğini yine zayıf düzeyde yansıtmaktadır.

11A: Kare, üçgen ve dairenin ağırlıklarını bulurken yaptığın işlemleri anlatır mısın?
Cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandın?

12D2: Onu tam yapamadım.

13A: Neden yapamadın, cebirsel ifadelerden yararlanamadın mı?

14D2: Evet. Yani mesela $4x = 6y$ demişim. (çözümlerini inceliyor) Sonra dörde böldüm. $x = 6y / 4$ çıktı. Sadeleştirince $3y / 2$ oluyor yani. Sonra kafam karıştı.

15A: b maddesini çözerken işlemleri nasıl yaptın?

16D2: Orda $x = 5z$ buldum.

17A: c maddesinde yaptığın işlemleri anlatır mısın?

18D2: 3. terazideki gibi. 1 üçgen ve 3 daire 33 yapıyor. Hepsini tek tek yaptım... Birleştiremedim.

D2, eşitliklerden yararlandığını ve bu eşitlikleri denklemler kullanarak ifade ettiğini açıklayarak bağlamı anlamlandırdığını göstermektedir. Fakat bu denklemleri kullanamaması ve prosedürleri uygulayamaması öğrencinin gömülü matematiği anlamlandıramadığı (14D2) ve daha önceden aşına olduğu anlaşılan bu problem türünde belli bir noktaya kadar gelebildiği görülmektedir.

Teraziler Nasıl Denge? Probleminde C1 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 16'da görülmektedir.

Tablo 16

Teraziler Nasıl Denge? probleminde C1 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Terazi dengedeysse kefeler eşittir. Eşitlik kurulabilir... Denklemleri kullandım. $4x=6y$ sadeleştirirsek $2x=3y$ olur. $10z=2x$ bir de $3y+z=33$. $3y$ yerine $2x$ yazdım. $2x$ yerine $10z$ koydum. Bu şekilde denklemleri çözdüm.” (Y2)	Y1, Y2, O1, O2, D1
C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“3. terazideki gibi. 1 üçgen ve 3 daire 33 yapıyor. Denklemlerin hepsini tek tek yaptım... Birleştiremedim.” (D2)	D2
C1 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmamıştır.

4.1.5. Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular

Timuçin İnternet Kafede probleminde bir internet kafede bilgisayar kullanma süresine bağlı ücret değişimlerini ifade eden bir bağlam ile sabit değerin, değişkenin ve artış miktarının belirtildiği bir problem cümlesi verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin verilen problem cümlesini yorumlayabilmeleri gerekmektedir. Bu problemin zorlayıcı bir yönünü ele alan (f) maddesi ise ücrete saat başı fiyat eklemesi yapılması ifadesinin derinlemesine düşünülmesini gerektirmektedir. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Bağlamı anlamlandırma: Başlangıç fiyatının sabit değer olduğunu, değişkenin zaman olduğunu, her saat başında eklenen fiyatın denklemdaki katsayıya karşılık geldiğini anlama
- Gömülü matematiği anlamlandırma: (f) maddesini yanıtlarken 59 dakika bilgisayar kullanılması durumunda ücrete ekleme yapılmayacağının farkına varma ve çözümlerini daha geniş bir bakış açısıyla ele alma

C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bağlamı doğru bir şekilde yorumlayarak problemde verilen sabit değer, değişken ve artış miktarlarını doğru yer ve zamanda kullanarak cebirsel ilişkilere de yer vermektedir. Bu öğrenciler ilişkileri temsil eden cebirsel ifadeyi oluşturmaktadır. Ayrıca öğrenciler benzer çözümlere yer vererek zorlayıcı olan (f) maddesinde çözümlerini diğer öğrencilere göre daha geniş bir bakış açısıyla sunmakta ve gömülü matematiği anlamlandırmaktadır. Şekil 26'da yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan Y1'in bu maddenin çözümüne getirdiği farklı bakış açısı görülmektedir.

Yani $0.5 \cdot x = 10 \text{ TL}$ diye düşünürsek $x = 20$ saat yapar...

Ama tam 20 saat olmayabilir. Belki 20 saat 40 dk olabilir ya da 20 saat 59 dk 'dan oz bir sürede olabilir. Aklımda birsey daha var 5 gün gitmiş forzedelim ki her gidişinde 4 saat kullanmış olsun!

1. gün 4 saat 40 dk 2 TL	2. gün 4 saat 50 dk 2 TL	3. gün 4 saat 59 dk 2 TL	4. gün 4 saat 59 dk 2 TL	5. gün 4 saat 59 dk → 2 TL
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	----------------------------------

Şekil 26. Y1'in yazılı çözümlerinde gömülü matematiği anlamlandırma süreci.

Problemin (f) maddesinde "hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin bir haftada 20 TL ödeme yapmıştır. Buna göre bir hafta boyunca kaç saat bilgisayar kullanmıştır?" şeklinde bir soru yöneltilmektedir. Bilgisayarların açılış fiyatı 2 TL ve her saat başı fiyata 50 kuruş eklenmektedir. Y1 ilk olarak, bilgisayar açılış fiyatının 2 TL olması üzerine 5 kere gidildiğinde 10 TL açılış ücreti ödeyeceğini ve geriye kalan 10 TL ile 20 saat bilgisayar kullanılabileceğini belirtmektedir. Y1 denklem yoluyla doğru bir sonuca ulaşırsa da sorunun çözümüne ilişkin farklı fikirlere sahiptir ve bu fikirlerini farklı bir çözüm stratejisi ile ele almaktadır. Problemin bağlamında saat başı fiyat eklendiğinin belirtilmesi üzerine x değişkeninin saati/süreyi belirttiğini ifade ettikten sonra $x < 1$ sa. ihtimalini ele alarak stratejik akıl yürütme sürecine ilişkin gömülü matematiği anlamlandırma boyutunda önemli bir ilerleme kaydetmektedir. 20 saati beş güne paylaştırarak günde 4 saat bilgisayar kullanılabileceği gibi 4 saat 59 dakika kullanılması durumunda da aynı ücretin ödeneceğini belirtmektedir. Öğrenci cebirsel akıl yürütme sürecinde ortaya koyduğu stratejisi ile birlikte bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırma sürecini oldukça güçlü düzeyde yansıtmaktadır.

Bununla birlikte yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci O2, Y1 ile benzer bir düşünceye sahiptir. Sürenin 1 saatten az olduğu durumlarda ücrete 50 Kuruş eklenmeyeceğini düşünmektedir. O2'nin bu süreci Şekil 27'de görülmektedir.

f1

4,5tl	4tl	2tl	?	?
5 sa	4 sa	X < 1 sa	X.	X.

9,5 H baki

9,5 + 2 kalan yere en yakın para miktarlarını yazıyor
 5tl + 4,5 Bunlar da 6 saat ve 5 saate denk geliyor toplam
 Süreyi istenir

5 sa + 4 sa + 6 sa + 5 sa + X < 1 sa = 20, + X saat yazar

Şekil 27. O2'nin yazılı çözümlerinde gömülü matematiği anlamlandırma süreci.

O2 de denklemleri kullanarak sorunun yanıtının 20 saat olacağını görmekte fakat son bilgisayar kullanımında 1 saatten az bir süre eklenirse ücretin değişmeyeceğini ifade etmektedir. Öğrencinin Y1'den farklı olarak tüm günlerde bunun geçerli olabileceğini gözden kaçırmış olmasıdır. Fakat yine de bu ihtimali düşünmesi gömülü matematiği anlamlandırdığını ifade etmektedir.

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerin, problem cümlesini yorumlayarak bazı maddelerde doğru sonuçlara ulaşmalarına rağmen, problemde yer alan kritik bilgileri (sabit değer, değişken, artış miktarı, vb.) kısmen anladıkları ve kullandıkları görülmektedir. Bu öğrenciler genel olarak denklem oluşturmadan ilerlemektedir. Denklem oluşturan öğrenciler ise denklemleri etkili kullanmamakta ya da (f) maddesinin çözümünde gömülü matematiği keşfedememektedir. Bu durum öğrencilerin problem bağlamını kısmen anlamlandırırken; gömülü matematiği anlamlandıramadıklarını göstermektedir. Yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan D1'in çözümlerinden bir kesit Şekil 28'de görülmektedir.

6=5	11=7,5	16=10
7=5,5	12=8	17=10,5
8=6	13=8,5	18=11
9=6,5	14=9	19=11,5
10=7	15=9,5	20=12

Şekil 28. D1'in çözümlerinde cebirsel ilişkiler kullanmadan sayarak ilerleme süreci.

D1, bağlamı anladığı kadarıyla artış miktarını ekleme yöntemini kullanmayı tercih etmekte ve cebirsel prosedürlere yer vermemektedir. Öğrencinin bu çözümlerinde özyinelemeli aritmetik işlemler yaptığı ve bunun bir sonucu olarak bağlamı kısmen anlamlandırdığı görülmektedir.

Tüm incelemeler, öğrencilerin bu problemde C1 yetkinliğini zayıf ya da güçlü düzeyde sağladıklarını göstermektedir. Yazılı çözümlerinde yetkinliği sağlayamayan öğrenci bulunmamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Timuçin İnternet Kafede problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği nasıl anlamlandırdıkları derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden elde edilen bulgular ile örnek olay çalışması bulguları tamamıyla tutarlıdır. Yazılı çözümlerinde yetkinliğini güçlü düzeyde gösteren ve bunu açıklamalarıyla destekleyen Y1, problem bağlamında verilen kritik bilgileri kullanarak çözümleri hakkında ikna edici açıklamalar yapmaktadır. Y1'in (f) maddesinde gömülü matematiği anlamlandırma süreci açık ve net yaptığı açıklamaları ile anlaşılmaktadır.

50A: Hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin bir haftada 20 TL ödeme yapmıştır. Buna göre bir hafta boyunca kaç saat bilgisayar kullanmıştır? Sorusunun cevabını nasıl buldun? Açıklar mısın?

51Y1: Her gidişinde bilgisayar kullandıysa 10 TL açılış parası vermiştir. 20 TL'nin 10 TL'si böyle gitti. Geriye 10 TL kaldı. 50 Kuruşa bölersek 20 saat yapar. Eğer çocuk her gidişinde 4 saat kullandıysa 5 gidişte 20 saat yapar. Bir de 4 saat 59 dakika kullandıysa çok daha fazla kullanmış. Oradan 24 saat 55 dakika buldum.

52A: Yani kesin olarak 24 saat 55 dakika bilgisayar kullandığını mı söylüyorsun?

53Y1: Hayır, kesin değil. En az 20 saat kullanmış. Ama en fazla 24 saat 55 dakika yani o arada bir sayı da olur.

54A: Burada soruyu çözmeye başlarken “her gidişinde bilgisayarı kullandığını düşünürsek” demişsin. Ne demek istedin?

55Y1: Her gidişinde belki bilgisayarı kullanmamıştır dedim. Belki o arkadaşını görmek için gitti.

56A: Burada bulduğun 24 saat 55 dakika çözümün dikkatimi çekti. Bu şekilde çözmek aklına nereden geldi?

57Y1: c maddesinde 1 saati doldurmadan ne kadar öder denmişti, oradan aklıma gelmişti.

58A: Timuçin hafta boyunca 5 kere internet kafeye gitmiş. Bazı günlerde bilgisayarı 1 saatten az kullanmışsa, bu durumu nasıl yorumlarsın?

59Y1: O zaman şöyle olur, iki gün 1 saatten az kullanmış olsun. Yine 59 dakika diyelim. Geriye kalan günlere 20 saati paylaştırmam lazım. Mesela 6 saat, 7 saat, 7 saat şeklinde. Onlara da yine 5 dakika derim, pardon onlara da yine 59 dakika eklerim. Şunu yazayım: (*Burada işlemlerini yazarak gösteriyor*)

$$\begin{aligned} 6 \text{ saat} &= 3 \text{ TL} \\ 7 \text{ saat} &= 3,5 \text{ TL} \\ 7 \text{ saat} &= 3,5 \text{ TL} \end{aligned}$$

Şekil 29. Y1'in gömülü matematiği anlamlandırma sürecinde yaptığı işlemler.

60Y1: Yani olur. Yine 5 tane 59 dakika ve 20 saat yapar. Yani aynı sonuca ulaşırız. En fazla 24 saat 55 dakika eder.

Y1, problemin zorlayıcı alt maddesi olan (f) maddesinde saat başı ücrete 50 Kuruş eklendiği için, bilgisayarı 59 dakika kullanan birinin ücret ödemesine gerek kalmayacağı düşüncesiyle hareket ettiğini açıklamaktadır (51Y1). Çözümlerinde bu düşüncesini oldukça mantıklı açıklamalar kullanarak yansıtan Y1'in gömülü matematiği anlamlandığı aşikârdır. Ayrıca araştırmacının çözümünde değişiklik yapması durumunda sonucun değişip değişmeyeceğini sormasının (58A) ardından, Y1 çözümü tekrar yorumlayarak her durum için verdiği cevabın doğru olacağını Şekil 29'da kanıtlamaktadır (59Y1). Bu durum öğrencinin güçlü anlamlandırmalarını yansıtmaktadır.

Problemin aynı zorlayıcı maddesiyle ilgili yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan Y2'nin açıklamaları aşağıdaki gibidir.

40Y2: 5 kere giderse her gidişte bilgisayarı açtığı için açılış fiyatı 2 TL veriyor. 5 kere 2 yani 10 TL olur. 20 TL ödemiş ve 10 TL kaldı geriye. $0,5 \cdot x = 10$. Yani cevap 20 saat çıkar. 20 saat bilgisayar kullanmış.

41A: İşlemlerini kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

42Y2: Evet, eminim.

43A: Her gün eşit saat kullandığını söyleyebilir miyiz?

44Y2: Hayır. Yani 20 saat toplam ama 5 güne bölersek 4 saat oluyor. Ama belki bir gün 2 saat diğer gün 6 saattir. Eşit olmak zorunda değil.

45A: Timuçin hafta boyunca 5 kere internet kafeye gitmiş. Bazı günlerde bilgisayarı 1 saatten az kullanmışsa, bu durumu nasıl yorumlarsın?

46Y2: Mesela bir gün bir saatten az kullansa diğer gün 8 saat kullansa yani cevap değişmez sonuçta 20 saat kullanmış olması lazım. Diğer gün daha fazla kullanmıştır.

Y2, problemi denklem üzerinden çözmeye devam etmekte ve zorlayıcı olan bu maddede gömülü matematiği (sürenin 1 saatten az olması durumunda ücret ödenmeyeceği ile ilgili bağlamı çözümlerde ortaya koyabilme) anlamlandıramamaktadır. Öğrenci yalnızca doğru oluşturduğu denklemde değer verme yöntemini kullanmakta ve farklı durumları araştırmamaktadır (40Y2). Araştırmacının gömülü matematiği anlamlandırma sürecini ortaya çıkarıcı sorular yöneltmesi (45A) bu durumu değiştirmemektedir.

Yetkinliği yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci D1'in, bilgisayar kullanım süresinin 1 saatten az olduğu durumlarda ne olacağına ilişkin farklı bir bakış açısına sahip olduğu görülmektedir.

20D1: Burada 1 saat geçmemiş demiş. O yüzden tam emin değilim... 2 TL olabilir. Ya da belki de 50 kuruş değil de daha az bir şey vermiş olabilir.

21A: Yani 50 kuruştan az vermiş olabilir diyorsun, öyle mi?

22D1: Evet yani 2 TL ek olarak.

23A: Neden böyle düşündün?

24D1: Çünkü bir saatten az kullanmış. Bir saat olsa direk iki buçuk derdim. Böyle olunca sadece 2 TL ya da iki buçuktan az vermiş diyorum. Hangisi olur onu bilemem.

25A: Sorunun doğru cevabının bu iki yanıtta biri olduğunu mu söylemek istiyorsun?

26D1: Evet.

D1, problemin (c) maddesinin çözümüne ilişkin açıklamalarında bakış açısını yansıtmaktadır. Bu maddede "1 saatten az bilgisayar kullanılması durumunda ne kadar ödeme yapılır?" şeklinde bir soru yöneltilmektedir. Öğrenci bu durumda 2 TL ödeneceğini ya da ödenecek ücretin 2,5 TL'den az olacağını belirtmektedir (24D1). Fakat çözümlerinde cebirsel prosedürlere yer vermediği için yetkinliği zayıf düzeyde sağladığı sonucuna varılmaktadır.

Timuçin İnternet Kafede Probleminde C1 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 17’de görülmektedir.

Tablo 17

Timuçin İnternet Kafede probleminde C1 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Her gidişinde bilgisayar kullandıysa 10 TL açılış parası vermiştir. 20 TL ’nin 10 TL ’si böyle gitti. Geriye 10 TL kaldı. 50 Kuruşa bölersek 20 saat yapar. Eğer çocuk her gidişinde 4 saat kullandıysa 5 gidişte 20 saat yapar. Bir de 4 saat 59 dakika kullandıysa çok daha fazla kullanmış. Oradan 24 saat 55 dakika buldum.”(Y1)	Y1, O2
C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“5 kere giderse her gidişte bilgisayarı açtığı için açılış fiyatı 2 TL veriyor. 5 kere 2 yani 10 TL olur. 20 TL ödemiş ve 10 TL kaldı geriye. $0,5.x=10$. Yani cevap 20 saat çıkar. 20 saat bilgisayar kullanmış.” (Y2)	Y2, O1, D1, D2
C1 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmamıştır.

4.1.6. Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde bir ortamda bulunan bakterilerin zamana bağlı artış sayısı ile ilgili bir bağlam ve diğer problemlerden farklı olarak bu bağlama ilişkin denklem verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin verilen denklemi yorumlamaları gerekmektedir. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Bağlamı anlamlandırma: Denklemi yorumlarken değişkenler (bakteri sayısı ve dakika) arasındaki ilişkiyi ifade etme, başlangıçtaki bakteri sayısının dakikanın 0 (sıfır) anındaki bakteri sayısı olduğunu ve bu durumun denklemdeki karşılığının sabit değer olduğunu anlama
- Gömülü matematiği anlamlandırma: Problemdeki maddelerin çözümünde denklemi etkili bir şekilde kullanma

C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, denklemdeki bakteri sayısı ile zaman değişkenlerinin birbiri ile olan ilişkilerini ifade etmekte ve denklemdeki sabit değişkenin başlangıçtaki bakteri sayısı olduğunu, denklemdeki dakika değişkenine 0 (sıfır) değeri verildiğinde başlangıçtaki bakteri sayısını bulacaklarını anlamaktadır. Ayrıca bu öğrenciler verilen denklemi problemin diğer maddelerine yanıt verirken etkili bir biçimde kullanarak doğru sonuçlara ulaşmaktadır. Bu durum problem bağlamını ve gömülü matematiği anlamlandırdıklarının göstergesidir. Şekil 30'da Y1'in yazılı çözümlerinde denkleme ilişkin yaptığı yorumlar görülmektedir.

a) 8 bakteri var zaten ve dakikada 16 bakteri üreyormuş. Dakikada sayısı arttıktan bakteri sayısında onun 16 katı olur.
b) başlangıçtaki bakteri sayısı 8'dir.

Şekil 30. Y1'in yazılı çözümlerinde problem bağlamını anlamlandırma süreci.

Y1'in açıklamalarından anlaşılacağı üzere, ortamda zaten 8 bakteri bulunduğunu ve her dakika 16 bakterinin daha eklendiğini belirten öğrencinin denklemi doğru bir şekilde yorumladığı ve bağlamı anlamlandırdığı görülmektedir.

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenci bulunmadığı gibi, bu yetkinliği hiç sağlayamayan öğrenciler olmuştur. C1 yetkinliğini sağlayamayan öğrenciler, denklemi yorumlayamamakta ve değişkenlerin arasındaki ilişkileri ifade edememektedir. Bu öğrencilerden biri olan D2, denkleme ilişkin oluşturduğu tabloda “bakteri sayılarının her dakika 8, 16, 24, 32 şeklinde ilerlediğini” belirtmiştir. Oysaki bakteri sayıları her dakika 8 değil 16 artmaktadır. Bu nedenle bu öğrenciler hakkında bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandıramadıkları şeklinde yorum yapılmaktadır.

Yetkinliği sağlayamayan bir diğer öğrenci olan D1'in, yazılı çözümlerinde başlangıçtaki bakteri sayısına ilişkin yanlış değerler bulduğu görülmektedir. Öğrencinin problemi çözme sürecinde yaptığı yanlış işlemler Şekil 31'de görülmektedir.

$$\begin{array}{ll}
 \text{b) } \text{başlangıçtaki bakteri sayısı} \Rightarrow 8+16 = 24 & \\
 \text{d) } B.S. = 8+16+1 & \text{e) } 4808 = 8+DK+16 \\
 B.S. = 25 & 4784 = x
 \end{array}$$

Şekil 31. D1'in denklemi yanlış yorumladığını gösteren çözümleri.

D1, başlangıçtaki bakteri sayısının sorulduğu (b) maddesini yanıtlarken, denklemde gördüğü tüm değerleri toplayarak yanlış sonuca ulaşmaktadır. Ayrıca problemin diğer maddelerinde de denklemi anlayamadığını gösteren çözümler yaptığı görülmektedir. D1, “1 saat sonunda ortamdaki bakteri sayısı kaçtır” sorusunun olduğu (d) maddesini yanıtlarken de denklemde yer alan tüm sayıların toplamına 1 eklemektedir. D1'in “bakteri sayısının 4808'e kaç saatte ulaşacağı” ile ilgili olan (e) maddesinde de denklemi kullanamadığı görülmektedir.

Tüm incelemeler, öğrencilerin bu problemde C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını ya da hiç sağlayamadığını göstermektedir. Yazılı çözümlerinde yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan öğrenci bulunmamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Bakterilerin Hızına Yetiş problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği nasıl anlamlandırdıkları derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden elde edilen bulgular ile örnek olay çalışması bulguları tamamıyla tutarlıdır. Yazılı çözümlerinde yetkinliğini güçlü düzeyde gösteren ve bunu açıklamalarıyla destekleyen O2, problem bağlamında verilen denklemi yorumlayarak çözümleri hakkında ikna edici açıklamalar yapmaktadır.

1A: (soru okunur) Denklemde yer alan sayılar neyi ifade ediyor?

2O2: (soruyu inceliyor) Bakteri sayısını bulmak için 8 artı 16 çarptı dakikadan yapıyormuşuz. 8 sabit değişken oluyor. Dakika arttıkça bakteri artıyor. Doğru orantı şeklinde.

3A: Dakikada ortamda kaç bakteri artıyor?

4O2: Mm 16 artarak gidiyor.

Yazılı çözümlerinde de “*Doğru orantılı bir ilişki olduğunu söyleyebiliriz. Zaman arttığında bakteri sayısı artıyor*” şeklinde bir yorum yapan O2, burada da benzer yorumlar yapmaktadır.

- 7A:** Başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl buldun? Denklemden nasıl yararlandın?
- 8O2:** Mm denklemde 8 sabit olduğu için. Başlangıçta 8 bakteri oluyor hocam denklemden.
- 9A:** Zamana bağlı bakteri sayısındaki değişimi düşünürsek başlangıçtaki bakteri sayısını bulmak için denklemde bu durumu nasıl ifade ederiz?
- 10O2:** Zaman daha geçmemiş oluyor. Yani denklemde dakikaya sıfır yazarız.
- 11A:** ‘Başlangıç’ ifadesi ile süreyi yani dakikayı nasıl ilişkilendirdin?
- 12O2:** Sıfır yazarak hocam. Dakika sıfır olunca 16 çarpı sıfırdan sıfır oluyor. Sadece sabit sayıya bakıyorum.

Başlangıç ifadesinin ne anlama geldiğini ve çözümlerini bu anlamalar üzerinden yönlendirdiğini (12O2) yapılan mülakatlarda açıklamalarıyla ortaya koyan O2’nin C1 yetkinliğini sağladığını gösteren mülakat metni verilmiştir. Öğrenci denklemi problemin diğer maddelerinde kullanarak doğru sonuçlara ulaştığı işlemlerini açıklamaktadır. Böylece hem bağlamı hem gömülü matematiği anlamlandırdığı görülmektedir. O1’in başlangıçtaki bakteri sayısı ile ilgili açıklamaları da O2 ile benzerdir.

- 3A:** Dakikada ortamda kaç bakteri artıyor?
- 4O1:** 16.
- 5A:** Bakteri sayısı ile dakika arasındaki ilişkiyi daha ayrıntılı açıkla mısın?
- 6O1:** Dakika artarsa bakteri sayısı da artar.
- 7A:** Başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl buldun? Denklemden nasıl yararlandın?
- 8O1:** Dakikaya sıfır yazarız. Denklemden bu şekilde çözeriz ve 8 çıkar.
- 9A:** Denklemdaki sayıları tekrardan gözden geçir bakalım. Ne düşünüyorsun?
- 10O1:** ...(*Düşüncelerini açıklamıyor*)
- 11A:** Zamana bağlı bakteri sayısındaki değişimi düşünürsek başlangıçtaki bakteri sayısını bulmak için denklemde bu durumu nasıl ifade ederiz?
- 12O1:** (*Düşünüyor*) Denklemden dakikaya sıfır dersek başlangıçtaki bakteriyi buluruz. Yani dakika geçmediği için.
- 13A:** ‘Başlangıç’ ifadesi ile süreyi yani dakikayı nasıl ilişkilendirdin?
- 14O1:** Sıfır diyerek.

O1'in açıklamalarında başlangıçtaki bakteri sayısının denklemdeki sabit değer olduğunu söylemesi beklendi. Fakat O1, her seferinde başlangıç ifadesinin dakikanın 0 (sıfır) olmasını ifade ettiğini belirtti (8O1 - 14O1). O1'in bu açıklaması yine doğru bir açıklamadır. Öğrenci yetkinliği güçlü düzeyde sağlamaktadır. Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan Y1, sabit değer ile sorudaki başlangıç ifadesini ilişkilendirdiğini gösteren açıklamalar yapmaktadır.

5A: Bakteri sayısı ile dakika arasındaki ilişkiyi daha ayrıntılı açıkla mısın?

6Y1: 8 bakteri var ve bunlar gitgide artıyor. Yani üüyor. 1 dakika geçtiğinde 16 dakika pardon 16 bakteri daha oluyor yani toplam 24. Böyle böyle devam ediyor.

7A: Başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl buldun? Denklemden nasıl yararlandın?

8Y1: Denklemden dakikaya sıfır vererek. Yani sabit terim kadar.

9A: Yani denklemden sabit terime bakarak ya da değişkene sıfır vererek başlangıçtaki değeri buluyoruz öyle mi?

10Y1: Evet.

11A: 'Başlangıç' ifadesi ile süreyi yani dakikayı nasıl ilişkilendirdin?

12Y1: Dediğim gibi, yani daha hiç süre geçmemiş. Başlangıç demesi bile ipucu. Yani sıfır dakika.

Y1, dakikaya bağlı olarak bakteri sayısındaki değişimi denklemini yorumlayarak anladığını gösteren açıklamalar yapmaktadır (6Y1). Denklemden sabit değer başlangıçtaki bakteri sayısını verdiğini ve bu durumun dakikaya sıfır verilmesinden kaynaklandığını açıklayarak bağlamı anlamlandırdığını göstermektedir (8Y1).

Bakterilerin Hızına Yetiş Probleminde C1 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Öğrencilerin yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından örnek olay çalışmasında çözümleri hakkındaki yaptıkları açıklamaları neticesinde C1 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlar ortaya çıkmaktadır. Öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 18'de görülmektedir.

Tablo 18

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde C1 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
-------------	-------------	---------

C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	<i>“8 sabit sayı. 16 katsayı. Dakika ve bakteri sayısı bilinmeyen. 8 bakteri var ve bunlar gitgide artıyor. 1 dakika geçtiğinde 16 bakteri daha oluyor yani toplam 24. Böyle devam ediyor. Başlangıçtaki bakteri sayısı denklemde dakikaya sıfır vererek. Yani sabit terim kadar.” (Y1)</i>	Y1, Y2, O1, O2
C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	...	
C1 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“Başlangıçtaki bakteri sayısı mı? Başlangıçta sıfırdır. Başlangıç demesi yani birinci dakika demek. 16 dakikada 8 bakteri varmış. İki katını aldığımızda 8 artacağı için 32 dakikada 16 bakteri. Sonra 8 daha artar 24 olur, o şekilde yaptım.”</i>	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmamıştır.

4.1.7. Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular

Sekizgen Masalar probleminde gerçek yaşamdan alınmış bir senaryoyu temsil eden örüntü verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin bu örüntüyü problem bağlamında verilen bilgiler ile ilişkilendirerek sonraki adımlarına ilişkin fikir sahibi olmaları gerekmektedir. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Bağlamı anlamlandırma: Verilen örüntü ve tablo temsillerini anlamaları ve örüntünün nasıl ilerlediğini verilen tablodan da yararlanarak anlama
- Gömülü matematiği anlamlandırma: Örüntüde yer alan matematiksel ilişkinin cebirsel olarak nasıl ifade edilebileceğini fark etme ve problemin (c) alt maddesinde verildiği gibi adım sayısı (a) ile misafir sayısı (m) değişkenlerini kullanma

C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, problemde verilen örüntü ve tablo temsillerini anlayarak bir takım yorumlara yer vermektedir. Ayrıca öğrenciler örüntünün nasıl

ilerlediğine ve sonraki adımlarına ilişkin fikirlere sahiptir. Bu öğrenciler problemin (c) alt maddesinde verilen değişkenleri uygun bir şekilde yorumlayarak bu değişkenleri cebirsel ifadeler eşliğinde kullanmaktadır. Öğrencilerin bağlama ilişkin genel olarak “İlk adımda bir masaya 8 kişi oturabiliyorken, ikinci adımda masaların birleştiği yere 2 kişi oturamaz ve iki masaya 14 kişi oturabilir.” şeklinde benzer yorumlar yaptıkları görülmektedir. Ayrıca öğrenciler değişkenleri doğru kullanarak çözümlerinde “Her bir masa artışında 6 kişi daha oturabiliyor. $6a + 2 = m$ şeklinde denklem olur.” gibi açıklamalara yer vermekte ve gömülü matematiği anlamlandırma bileşenini sağladıklarını göstermektedir.

a) cevap= çünkü masaların birleştiği yerde 2 kenar yoktur.
2 masanın 2 misafiri oturması demek, 0 yüzden 16 kişi değil 14 kişi oturur
b) 26 kişi oturabilir
c) cevap: $m=6A+2$ sayılara bakıldığında hepsi 6'nın katının

Şekil 32. O1'in çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırma süreci.

O1 Şekil 32'de, yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler gibi, örüntüyü doğru yorumlamaktadır. Ayrıca problemin (c) alt maddesinde verildiği gibi adım sayısı (a) ile misafir sayısı (m) değişkenlerini kullanarak örüntünün kuralını veren denklemi doğru bir şekilde oluşturmuştur. Bu çözümleri ile O1, bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırdığını göstermektedir.

C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler de bağlamı anlamlandırabilmekte ve yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerle benzer şekilde sözel açıklamalarla örüntüyü yorumlamaktadır. D2, “Birinci masa tek başına olduğu için tam kapasite olabilir. İkinci masada ise iki masanın birleşmesi sonucu 14 kişi oturmuştur.” şeklinde bağlama ilişkin yorumlar yapmaktadır. Bu öğrencilerin adım sayısı ve misafir sayısına ilişkin değişkenleri amacına uygun bir şekilde kullanamadıkları için gömülü matematiği anlamlandıramadıkları görülmektedir. D1'in bağlamı anlamlandırdığını gösteren ifadeleri Şekil 33'te görülmektedir.

a) çünkü iki masa birleştiğinde 1 masanın 1 kenarı 2 masanın 1 kenarı birleşiyor ve ortaya kimse oturamaz
b) 26 kişi oturabilir
c) $\begin{array}{r} 596 \\ 54 \overline{) 596} \\ \underline{54} \\ 56 \\ \underline{54} \\ 20 \end{array}$ masa

Şekil 33. D1'in çözümlerinde bağlamı anlamlandırma süreci.

D1, örüntüdeki masalara misafir oturma düzenini doğru bir şekilde yorumladığı ve örüntünün bir sonraki adımını bulabildiği için bağlamı anlamlandırıdığını göstermektedir. Fakat örüntünün kuralını veren denklemi kuramadığı için öğrenci gömülü matematiği anlamlandırma bileşenini sağlayamamaktadır.

Tüm incelemeler, öğrencilerin bu problemde C1 yetkinliğini zayıf ya da güçlü düzeyde sağladıklarını göstermektedir. Yazılı çözümlerinde yetkinliği sağlayamayan öğrenci bulunmamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Sekizgen Masalar problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde bağlamı ve gömülü matematiği nasıl anlamlandırıdıkları derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden elde edilen bulgular ile örnek olay çalışması bulguları tamamıyla tutarlıdır. Yazılı çözümlerinde yetkinliğini güçlü düzeyde gösteren ve bunu açıklamalarıyla destekleyen Y2, problem bağlamında verilen örüntü ve tabloyu yorumlayarak çözümleri hakkında ikna edici açıklamalar yapmaktadır.

- 1A:** (Soru okunur) 2 masaya neden 14 misafir oturduğunu nasıl açıklarsın?
- 2Y2:** 2 masa birleşince birleşen yerlere misafir oturamaz bu yüzden 16 değil 2 eksik.
- 3A:** Masa sayısı ile misafir sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- 4Y2:** Masa sayısı arttıkça misafir sayısı da artar.
- 5A:** 4 masaya kaç misafirin oturduğunu nasıl buldun? Anlatır mısın?
- 6Y2:** 6 artarak gidiyor, örüntü şeklinde. 20'ye 6 eklersek 26 buldum.
- 7A:** Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?
- 8Y2:** Denklem kullanabilirim. Ya da tablo.
- 9A:** Denklemi nasıl yazdın? Anlatır mısın?
- 10Y2:** Adım sayısına a dedim. Misafir de m olsun demiş. 6 arttığı için 6a. Sayıları sağlaması için 2 ekledim. Sonuç da misafir sayısına eşit olur. Yani $6a + 2 = m$ şeklinde yazdım.

Y2'nin örüntünün her adımında masaların dizilimi ile ilgili yaptığı ikna edici açıklamalar, örüntüyü ne kadar iyi anladığını ve bağlamı anlamlandırıdığını göstermektedir

(2Y2). Çözümlerini artış miktarından yararlanarak bulabileceği gibi denklem ya da tablodan yararlanarak ilerleyebileceğini de belirtmektedir (8Y2). Problemde kullanılması istenen a ve m parametrelerini nasıl kullandığını ve denklemi nasıl oluşturduğunu doğru ve açıkça ifade edebilmesi (10Y2) öğrencinin gömülü matematiği anlamlandırıldığını göstermektedir. Bununla birlikte problemin yazılı çözümlerinde C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan D2'nin açıklamaları, bu bulguyu desteklemektedir.

- 1A:** (Soru okunur) 2 masaya neden 14 misafir oturduğunu nasıl açıklarsın?
- 2D2:** 2 masada yanlar birleştiği için.
- 3A:** Masa sayısı ile misafir sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- 4D2:** 1 masada 8 kişi, 2 masada 14 kişi, 3 masada 20 bu şekilde bir ilişki var.
- 5A:** 4 masaya kaç misafirin oturduğunu nasıl buldun? Anlatır mısın?
- 6D2:** Tablodan baktığımızda 6 artmış. $20 + 6 = 26$ çıkar.
- 7A:** Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?
- 8D2:** Sayarak bulabilirim.
- 9A:** c maddesinin cevabında denklemi bulamadığını yazmışsın. Fakat tabloda a ve m harflerini adım sayısı ve oturabilecek misafir sayısının olduğu yerlere yazdığını görüyorum. Buradan sonra nasıl ilerleyebilirsin?
- 10D2:** $8m + a$ dedim ama bilmiyorum. Yani doğru değil galiba.
- 11A:** Oluşturduğun bu ifadede her sayı ve değişken ne anlama geliyor?
- 12D2:** 1 masada 8 kişi oturuyor. 8 misafir o yüzden $8m$. Adım sayısı a...
- 13A:** Sence bu şekilde yazman doğru oldu mu? Başka bir fikrin var mı?
- 14D2:** Bilmiyorum, doğru olmayabilir.

D2, problem bağlamını anlamlandırabildiğini örüntünün nasıl ilerlediğini açıklayarak ve bir sonraki adımın değerini doğru yanıtlayarak göstermektedir (6D2). Fakat adım sayısı ve misafir sayısı için verilen a ve m parametreleri ile doğru bir denklem oluşturamamaktadır (10D2). Bu nedenle gömülü matematiği anlamlandıramadığı sonucuna varılmaktadır.

Sekizgen Masalar Probleminde C1 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 19'da görülmektedir.

Tablo 19

Sekizgen Masalar probleminde C1 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“2 masa birleşince birleşen yerlere misafir oturamaz bu yüzden 16 değil, 2 eksik. Masa sayısı arttıkça misafir sayısı da artar. Tablodan baktığımızda 6 artmış. Dört masaya $20 + 6 = 26$ çıkar. Denklem için adım sayısına a dedim. Misafir de m olsun demiş. 6 arttığı için $6a$. Sayıları sağlaması için 2 ekledim. Sonuç da misafir sayısına eşit olur. Yani $6a+2=m$ şeklinde yazdım.” (Y2)	Y1, Y2, O1, O2
C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“1 masada 8 kişi, 2 masada 14 kişi, 3 masada 20 bu şekilde bir ilişki var. Tablodan baktığımızda 6 artmış. Dört masada $20 + 6 = 26$ çıkar.” (D2)	D1, D2
C1 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmamıştır.

4.2. İlgili Miktarları ve Bunlar Arasındaki İlişkileri Belirleme Sürecine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın ikinci alt problemi olan “Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri belirleme süreçleri nasıldır?” sorusuna yanıt aranmaktadır. Öğrencilerin ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri belirleme (C2) yetkinliğini sağlayıp sağlayamadıkları;

- İlgili miktarları belirleme (C2a)
- Miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme (C2b)

olmak üzere iki alt bileşenin ele alınmasıyla incelenmektedir.

4.2.1. Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular

Ters Piramit probleminde gerçek yaşamdan alınmış ters piramit şeklinde duran bir bina ve bu binanın her katında yer alan oda sayılarındaki artışı temsil eden bir örüntü verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- İlgili miktarları belirleme: Örüntüdeki dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarlarının uzunluklarını belirleme ve problemde yer alan gereksiz bilgileri ayırt etme
- Miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme: Örüntü adımlarında yer alan dikdörtgenlerin kenar uzunluklarındaki artış miktarını ifade etme ve dikdörtgenleri oluşturan birim kare sayıları ile artış miktarlarını ilişkilendirme

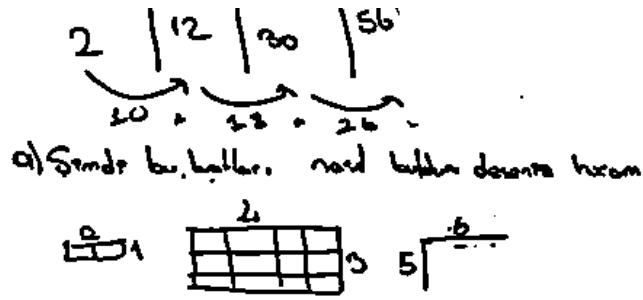
C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, ilgili miktarları belirlerken örüntüdeki dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarlarını dikkate almaktadır. Öğrenciler miktarlar arasındaki ilişkiyi bu uzunlukların artış miktarını ifade ederek göstermektedir. Ayrıca bu öğrenciler problemde verilen fakat çözüm ile ilişkisi olmayan miktarları (30 bina, 80 metre) ayırt edebilmektedirler. Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan Y2'nin bu süreci Şekil 34'te görülmektedir.

$$\begin{array}{cccc}
 \text{C) } \frac{1.\text{kat}}{2} & \frac{2.\text{kat}}{12} & \frac{3.\text{kat}}{30} & \frac{4.\text{kat}}{56} \\
 & 1,2 & 3,4 & 5,6 & 7,8 \\
 & \downarrow & \downarrow & & \\
 & +2 & +2 & &
 \end{array}$$

Kenar sayıları 2'ser arttığı için.

Şekil 34. Y2'nin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.

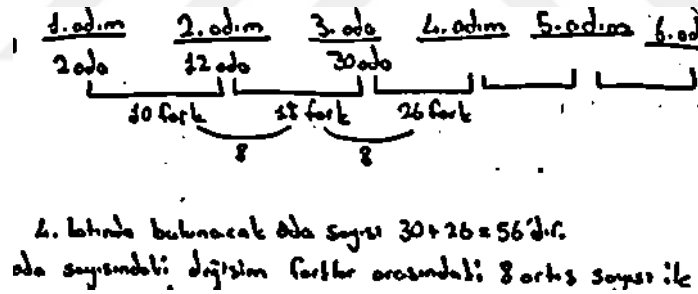
Y2, binanın katlarını temsil eden örüntü adımlarındaki miktarları dikdörtgenlerin kenar uzunluklarından yararlanarak göstermektedir. Dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarlarının ikişer ikişer arttığını belirterek miktarlar arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır. Öğrenci dikdörtgenin alan formülünden yararlanarak birim kare sayılarının (2, 12, 30, 56, ...) elde edilebileceğini ifade etmektedir. C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci olan O2'nin miktarlar arasındaki ilişkiyi dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarlarını kullanarak ifade etme biçimi Şekil 35'te görülmektedir.



Şekil 35. O2'nin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.

Y2 ve O2 dikdörtgenin kenar uzunluklarından yararlanarak miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme sürecinde sözel ifadeler kullanarak açıklamalar yapmaktadır. Bu öğrenciler arasındaki tek fark O2'nin bu ilişkiyi cebirsel ifadeyi oluşturma sürecinde kullanamamasıdır.

C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, yalnızca örüntünün her bir adımındaki dikdörtgenleri oluşturan birim kare sayılarını belirlemektedir. Bu öğrenciler birim karelerin arasındaki artış miktarlarının nasıl gerçekleştiğini anlamaya çalışarak ilişkileri ifade etmektedir. Bu öğrenciler de problemde verilen gereksiz miktarları ayırt edebilmektedir. Y1'in ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri belirleme süreci Şekil 36'da görülmektedir.

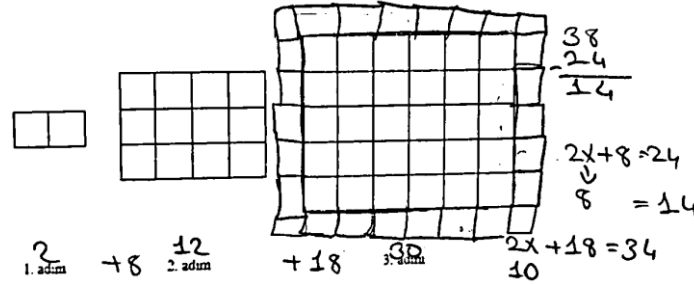


Şekil 36. Y1'in yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.

Y1 her adımdaki oda sayılarını göstererek ilgili miktarları belirlemektedir. Oda sayıları arasındaki artışın 10, 18, 26, ... şeklinde ilerlediğini göstermektedir. Miktarlar arasındaki artışın ise sekizer sekizer ilerlediğini belirtmekte ve problemin çözümünde bu ilişkiyi kullanmaktadır.

C2 yetkinliğini güçlü ve zayıf düzeyde sağlayan tüm öğrenciler Y1'in ifade ettiği ilişkiyi keşfetmişlerdir. Fakat miktarlar arasındaki ilişkiyi aynı zamanda dikdörtgenin kenar uzunluklarından yararlanarak belirleyebilen öğrenciler yetkinliği güçlü düzeyde sağladıklarını kanıtlamışlardır. Diğer öğrenciler ise Y1 gibi adımların artış miktarını belirleyebilmenin ötesine geçemeyerek (cebirsel ifade oluştururken yararlanacakları ilişkileri keşfedemedikleri için) yetkinliği zayıf düzeyde sağlamaktadır.

C2 yetkinliğini sağlayamayan tek öğrenci D2 örüntüde yer alan miktarları belirtmiş olsa da örüntünün ilerleyen adımlarına ait miktarları belirleyememektedir. D2'nin çözümleri Şekil 37'de görülmektedir.



Şekil 37. D2'nin miktarları ve ilişkilerini belirleme sürecinde yazılı çözümleri.

D2, ilgili miktarları birim kare sayılarından yola çıkarak ifade etmekte fakat örüntünün bir sonraki adımını belirleyememektedir. Ayrıca öğrenci miktarlar arası ilişkiyi anlayamadığını gösteren ve problemin özümü ile ilişkisi olmayan cebirsel işlemler yapmaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Ters Piramit problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C2 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bazı farklılıklar olmuştur. Y1'in yazılı çalışmalarında C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı, fakat mülakatlar sırasında bu yetkinliği güçlü düzeyde yansıtabildiği görülmektedir. Y1'in yazılı çalışmaları incelendiğinde miktarları belirlerken oda sayılarını dikkate aldığı, miktarlar arası ilişkiyi ise oda sayılarındaki değişimin nasıl ilerlediğini göstererek ifade ettiği görülmekteydi. Yapılan örnek olay çalışmasında Y1 miktarları Y2 gibi dikdörtgenin kısa ve uzun kenarlarını ifade ederek belirlemekte ve miktarlar arası ilişkiyi bu duruma uygun olarak yeniden düzenlemektedir.

12A: Bu sorunun yanıtını bulurken nasıl bir yol izledin? Daha farklı bir yol ile çözümü bulabilir miydin?

13Y1: ... Burada aslında sonradan aklıma bir yol daha gelmişti... Katlardaki oda sayılarının alanlarıyla ilgili.

14A: Tamam, bununla ilgili konuşalım. Oda sayılarının alanları derken ne demek istedin? Gösterebilir misin?

15Y1: Birinci adımda 2 oda var. Kısa kenarı 1, uzun kenarı 2. İkinci adımda 3 ve 4. Üçüncü adımda 5 ve 6 şeklinde gidiyor. Bunu şu şekilde yapabiliriz: (Burada işlemlerini yazıyor)

$$\begin{array}{ccc} 1.2 & 3.4 & 5.6 \\ 2 & 12 & 30 \end{array}$$

Şekil 38. Y1'in mülakatlarda örüntüdeki gömülü matematiği keşfetme süreci.

16Y1: Zaten şekilde de görüyoruz. (Problemde verilen örüntüyü gösteriyor) Bir sonraki adım da 7×8 olur yani 56 oda olur.

Y1 örüntüye ilişkin miktarları yeniden belirlerken, örüntünün adımlarında yer alan dikdörtgenlerin kenar uzunluklarının çarpımı ile önceden dikkate aldığı birim kare sayılarını ilişkilendirmektedir (15Y1). Dolayısıyla Y1'in ilgili miktarları belirleme (C2a) ve miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme (C2b) yetkinliklerini güçlü düzeyde yansıtabildiği örnek olay çalışmasında tespit edilmiştir. Ayrıca önünde bulunan boş kâğıda Şekil 38'de verilen işlemleri yazarak ikna edici açıklamalar yapmakta ve örüntünün bir sonraki adımını da bu ilişkiden yararlanarak bulabileceğini belirtmektedir.

Y2 ise yetkinliği güçlü düzeyde sağlama sürecine ilişkin yazılı çalışmalarında uyguladığı prosedürleri ikna edici açıklamalarla ifade etmektedir.

1A: (Soru okunur) Oda sayısını nasıl bulduğunu anlatır mısın?

2Y2: Oda sayısı ilk olarak 2, 12, 30 diye ilerliyor. Burada aradaki fark 10, 18, 26 diye 8 artarak gidiyor. O zaman bir sonraki adımda 26 eklenmesi gerekiyor. 30 ile 26'yı topladım 56 buldum.

3A: Bulduğun sonucun doğruluğundan emin misin?

4Y2: Evet, eminim.

5A: Nasıl emin oluyorsun?

6Y2: Örüntü olarak ilerlediği için hep 8 artması lazım. Bir de sonra denklemden bulunca aynı sonuç çıkıyor. Böyle emin oldum.

7A: Bu sorunun yanıtını bulurken nasıl bir yol izledin? Daha farklı bir yol ile bulabilir misin?

8Y2: Dördüncü katı bulurken artış miktarını bulduğum için oradan sonucu buldum. Ama ikinci bir yol bulduğum denklemden de 7×8 deyip 56 buldum.

Y2 tüm öğrencilerin yazılı çalışmalarında kullandığı yolu başlangıçta kullandığını, hatta örüntünün bir sonraki adımını bu şekilde bulduğunu açıklamaktadır (2Y2). Oda sayıları arasındaki değişimi ve artış miktarını fark etse de bu yol ile örüntünün kuralını bulamayacağını düşünen öğrenci ardından dikdörtgenin alanından yararlanarak ilerlediği, miktarları ve miktarlar arasındaki ilişkiyi belirlediği stratejiyi uygulamaktadır. Öğrencinin bu stratejisini ikna edici açıklamalar ile anlatabildiği görülmektedir (18Y2).

17A: Örüntünün kuralını nasıl buldun? Açıklar mısın?

18Y2: Dikdörtgenlerin kenarlarına baktığımda 2 arttığını gördüm. Birinci katta 1×2 oluyor. Burada bire iki eklersek 3 oluyor. İkiye iki eklersek 4 oluyor. Buradan ikinci kat 3×4 ortaya çıkıyor. Sonraki üçüncü adımda da 5×6 oluyor. Bu şekilde buldum.

D1'in yazılı çalışmalarında örüntünün ilk üç adımına ilişkin miktarları (2, 12 ve 30) belirleyerek bunlar arasındaki artış miktarlarını (10, 18, 26, ...) yazdığı ve ilişkileri zayıf düzeyde ifade edebildiği görülmekteydi. Öğrencinin C2 yetkinliğini nasıl sağladığını anlamaya yönelik yapılan mülakatın metni aşağıdaki gibidir:

7A: Her adımdaki oda sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklar mısın?

8D1: ... 2 tane oda var, sonra 12 oda var. Sonra 30 oda oluyor.

9A: Bu sorunun yanıtını bulurken nasıl bir yol izledin? Daha farklı bir yol ile bulabilir misin?

10D1: ...Odaların etrafına oda ekleyince cevap çıkıyor.

Bu metinden anlaşılacağı gibi D1, ilgili miktarları 2, 12 ve 30 şeklinde yazılı çalışmalarında olduğu gibi belirtebilmektedir. Fakat mülakatın ilerleyen dakikalarında bu miktarlar arasındaki ilişki tekrar tekrar sorulduğunda her seferinde “*Odaların etrafına oda ekleyince cevap çıkıyor*” şeklinde bir açıklama yapmaktadır (10D1).

Örüntü, şekil örüntüsü olarak düşünüldüğünde bir sonraki adım önceki adımın etrafına birim karelerin dizilmesi ile oluşmaktadır. D1'in ifadelerinden anlaşılan bu durumu kullanarak bir sonraki adıma ulaşmış olmasıdır. Dolayısıyla öğrencinin örüntünün miktarları arasındaki ilişkiyi nicelikler ile ifade edemediği ortaya çıkmaktadır.

D1 ile yapılan örnek olay çalışmasının sonucunda, öğrencinin problem çözümü ile ilgili olan miktarları belirleyemediği, çözüm ile doğrudan ilişkisi olmayan miktarları belirlese de bunlar arasındaki ilişkiyi açıklayamadığı tespit edilmiştir. Bu tespit ile D1'in yazılı çalışmalarında yetkinliği zayıf düzeyde de olsa sağladığı düşünülmekteyken, aslında hiç sağlayamadığı sonucuna varılmıştır. D2 de D1 ile benzer olarak örüntünün adımlarına ilişkin çizimler yaparak miktarları anlamaya çalışmaktadır, fakat yetkinliği sağlayamadığı gözlemlenmektedir.

Ters Piramit Probleminde C2 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 20'de görülmektedir.

Tablo 20

Ters Piramit probleminde C2 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	<i>“Dikdörtgenlerin kenarlarına baktığımda 2 arttığını gördüm. Birinci katta 1 x 2 oluyor. Burada bire iki eklersek 3 oluyor. İkiye iki eklersek dört oluyor. Buradan ikinci kat 3 x 4 ortaya çıkıyor. Sonraki üçüncü adımda da 5 x 6 oluyor. Bu şekilde buldum.” (Y2)</i>	Y1, Y2, O2
C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>“Birinci adımda 2 oda var. İkinci adım 12, üçüncü adım 30 oda şeklinde ilerliyor. Bu odaların artış miktarı 10, 18, 26 diye sekizer sekizer artıyor.” (O1)</i>	O1
C2 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“Odaların etrafına oda ekleyince cevap çıkıyor... Örüntünün ilerleyen adımlarını yapamadım... Çünkü çok odayı çizemedim ve bu kadar oda olması abartı gibi...” (D1)</i>	D1, D2

C2 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerden Y1, örnek olay çalışmasında çözüm stratejisini değiştirerek Y2 ve O2 gibi yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir. Öğrenci örnek olay çalışması sırasında, ilgili miktarları belirlerken

birim kare sayıları yerine dikdörtgenin kenar uzunluklarından yararlanmayı tercih etmiştir. D1 ise yazılı çalışmalarında miktarları belirlediğini ve örüntünün bir sonraki adımını bulabildiğini gösteren bazı çözümler yapmış olsa da açıklamaları bunun tam tersi bir süreçte olduğunu göstermektedir. Bu öğrenci örnek olay çalışması sırasında yeterli düzeyde açıklama yapamadığı için C2 yetkinliğini sağlayamamıştır.

4.2.2. Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular

Harflerin Oyunu probleminde alfabedeki harflerin belli bir kurala göre diziliminden oluşan bir örüntü ve örüntünün ilk beş adımı verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamamaları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- İlgili miktarları belirleme: Verilen harflerin alfabetik sırasını dikkate alarak örüntünün adımlarını sayısal değerleri (matematiksel olarak) kullanarak belirleme
- Miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme: Örüntünün adımlarındaki harflerin nasıl ilerlediğini bir başka deyişle örüntünün artış miktarını ifade etme

C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, örüntüdeki harflerin alfabede kaçınıcı sıraya karşılık geldiğini belirleyerek bir sayı örüntüsü oluştuğunu fark etmektedir. Öğrenciler bu sayı örüntüsünün sabit artış miktarını doğru ifade etmektedir. Y1'in örüntüdeki ilgili miktarları belirleme ve bu miktarların arasındaki ilişkileri doğru bir şekilde ifade ettiği çözümleri Şekil 39'da görülmektedir.

a) Örüntü 4'er 4'er ilerliyor.
b) 4'er sekilde 1'den 29'a tüm numara verip yazdığımızda,
1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 şeklinde örüntü oluşur.

Şekil 39. Y1'in yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.

Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan Y1, örüntüde verilen A, D, Ğ, J, N, ... harflerinin alfabetik sırasına dikkat ettiği ve matematiksel olarak 1, 5, 9, 13, 17, ... şeklinde yazdığı görülmektedir. Bu sayı örüntüsünün dörder dörder ilerlediğini belirterek miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade edebildiğini göstermektedir. Bu yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan diğer öğrenciler de Y1 ile benzer çözümler yapmaktadır.

C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan tek öğrenci O1, örüntüyü oluşturan harflerin alfabetik sırasına dikkat etmeden farklı yollar denemeyi tercih etmektedir. Yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan O1, harflerin ilerleyişini ifade ederken “4 harf sonrasını bulmamızı istiyor yani” şeklinde bir yorum yapmaktadır. Fakat sayısal değerler vermeden çözümlerine devam etmektedir. O1’in çözümlerinde tercih ettiği bu farklı stratejiler, temsil oluşturma süreci olarak ilerleyen bölümde ele alınmaktadır.

C2 yetkinliğini sağlayamayan öğrenciler, örüntüdeki miktarları belirleyemezken problemin alt maddelerine ilişkin yanlış çözümler yapmaktadır. Harflerin nasıl ilerlediğini araştırmadan bazı doğru olmayan çözüm yolları deneyen bu öğrencilerin problemi çözüm süreçleri başarısız ilerlemektedir. Yetkinliği sağlayamayan D2’nin örüntüdeki miktarların ilerleyişine ilişkin yaptığı yanlış açıklamalar Şekil 40’ta görülmektedir.

a) Her birinin birer defa yazılmal. Şartıyla yazılan bir bir harf
bir daha yazılmaz. Her bir adımda örüntü yaklaşık "2" şer halinde
Plerler

Şekil 40. D2’nin yazılı çözümlerinde miktarların ilişkilerini yanlış yorumlama süreci.

D2 bu açıklamaları ile örüntünün miktarlarını belirleyemediğini ve harflerin ilerleyişine ilişkin yanlış çıkarımlar yaptığını göstermektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Harflerin Oyunu problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C2 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılığa rastlanmamıştır. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir. Y2 ile yapılan mülakatlara ilişkin metinler verilmekte ve yetkinlikle ilişkili olarak yorumlanmaktadır.

1A: (Soru okunur) Timuçin ve Burçin’in harfleri söylerken neye dikkat ettiğini nasıl buldun? Açıklar mısın?

2Y2: Harfleri sayarak nasıl ilerlediğini bulmaya çalıştım. 4 harf sonrası söylenmiş. Yani 4 artarak gitmiş.

- 3A:** Örüntüyü matematiksel olarak nasıl yazdığını anlatır mısın?
- 4Y2:** Dörder ilerleyerek tabloda gösterdim. Harfleri de yazdım.
- 5A:** Yanıtının doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?
- 6Y2:** Çünkü ilk harf A harfi söylenmiş sonra B, C, Ç'yi söylememiş D harfini söylemiş. Sonra Ğ harfi. Yani dördüncü harfi söylemiş hep. Bende buna göre ilerledim ve emin oldum.
- 7A:** Matematiksel olarak yazmanı istediğimde aklına gelen düşünceleri anlatır mısın?
- 8Y2:** Matematiksel demek yani sayılarla yazmak.
- 9A:** Peki öyleyse, sayılarla örüntüyü yazabilir misin?
- 10Y2:** Birinci harf, beşinci, dokuzuncu... Hım anladım. 1, 5, 9, 13, 17 diye yazılır.

Y2, ilgili miktarları belirlerken harfleri nasıl incelediğini açıkça ifade etmektedir (6Y2). Matematiksel olarak yazmanın ne anlama geldiğini ve bu örüntüyü matematiksel olarak nasıl yazdığını açıklamaktadır (8Y2, 10Y2). Yetkinliği yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan tek öğrenci olan O1'in mülakatta bu probleme ilişkin net açıklamalar yapmadığı görülmektedir.

- 1A:** İkinci problemimiz Harflerin Oyunu. (*Soru okunur*) Timuçin ve Burçin'in harfleri söylerken neye dikkat ettiğini nasıl buldun? Açıklar mısın?
- 2O1:** Harfleri sayarak buluruz. A harfi birinci harf. D harfi beşinci. Yumuşak G harfi dokuzuncu harf. O nedenle 4 artarak gitmiş deriz.
- 3A:** Örüntüyü matematiksel olarak nasıl yazdığını anlatır mısın?
- 4O1:** Matematiksel olarak... 4 harf ilerisini söyleriz.
- 5A:** Yanıtının doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?
- 6O1:** Saydığımızda bunu anlarız o nedenle emin oluruz.
- 7A:** Matematiksel olarak yazmanı istediğimde aklına gelen düşünceleri anlatır mısın?
- 8O1:** Matematiksel olarak diye sorarsa artışın kaç olduğunu bulmamız gerekir.

O1, örüntüde yer alan harflerin alfabetik sırasını dikkate almadan çözümlerine devam etmektedir. Matematiksel olarak örüntüyü ifade etmenin, örüntüdeki artış miktarını belirtmek anlamına geldiğini düşünmektedir (4O1). Öğrenci harflerin dörder dörder ilerlediğini ifade ederek yalnızca miktarlar arası ilişkiyi ifade etme bileşenini sağlamaktadır. Bu durum yetkinliği zayıf düzeyde sağladığını göstermektedir.

Yetkinliği yazılı çözümlerinde sağlayamayan D1'in mülakatlarda da problemdeki miktarları ve ilişkileri ifade edemediği görülmektedir.

- 1A:** (Soru okunur) Timuçin ve Burçin'in harfleri söylerken neye dikkat ettiğini nasıl buldun? Açıklar mısın?
- 2D1:** Sırayla harf söylüyorlar.
- 3A:** Oyunda seçilen harfler nasıl ilerlemektedir? Anlatır mısın?
- 4D1:** Harfler bir tane söyleniyor 3 tane atlanıyor. Oyun kuralından dolayı... Böyle ilerliyor.
- 5A:** b maddesinde örüntüyü matematiksel olarak yazmanı istemiştin, oraya anlamadım yazmışsın. Tam olarak anlayamamanın sebebini açıklar mısın?
- 6D1:** Bilmiyorum... Yani nasıl ilerliyor demiş... Harfler A, D, Ğ, J, N gidiyor.
- 7A:** Yanıtının doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?
- 8D1:** Soruda böyle yazmış.
- 9A:** Matematiksel olarak yazmanı istediğimde aklına gelen düşünceleri anlatır mısın?
- 10D1:** ... 3 artması olabilir.

D1, problemdeki harflerin dörder dörder ilerlediğini ifade edemeyerek 3 harfin atlandığını söylemektedir. Yine de bu ilişkiden yararlandığını gösteren herhangi bir süreç içerisinde değildir. Problemde yalnızca harflerin olması, sayısal değerlerin olmaması D1'in probleme karşı tutumlarını etkiliyor olabilir.

Harflerin Oyunu Probleminde C2 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 21'de görülmektedir.

Tablo 21

Harflerin Oyunu probleminde C2 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına	"4 artarak gitmiş. Çünkü ilk harf A harfi söylenmiş sonra B, C, Ç'yi söylememiş D harfini söylemiş. Sonra Ğ harfi. Yani	Y1, Y2,

yönelik ikna edici açıklama yapan	<i>dördüncü harfi söylemiş hep. Bende buna göre ilerledim ve emin oldum. Örüntü matematiksel olarak 1, 5, 9, 13, 17 diye yazılır.” (Y2)</i>	O2
C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>“Harfleri sayarak buluruz. A harfi birinci harf. D harfi beşinci. Ğ harfi dokuzuncu harf. O nedenle 4 artarak gitmiş deriz. Matematiksel olarak 4 harf ilerisini söyleriz. Matematiksel olarak diye sorarsa artışın kaç olduğunu bulmamız gerekir.” (O1)</i>	O1
C2 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“Önce 2 harf ilerliyor sonra 3 sonra 1...” (D2)</i>	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmamıştır.

4.2.3. “n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde $n + n$ ve $n + 6$ cebirsel ifadelerinden hangisinin daha büyük olduğunu karşılaştırırken öğrencilerin değışkene yükledikleri anlamların irdelenmesi amaçlanmıştır.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- İlgili miktarları belirleme: $n = 6$ değerini belirleme
- Miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme: $n < 6$ ve $n > 6$ durumlarında iki cebirsel ifade arasındaki ilişkileri ifade etme

C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bu problemin çözümü için gerekli olan kritik değerin $n = 6$ olduğunun farkındadır. $n = 6$ değerini problemin çözümünde kullanan bu öğrenciler, n 'e 6'dan büyük ya da küçük değer verme durumlarında iki cebirsel ifadenin arasındaki ilişkileri ifade edebilmektedir. Y1'in iki cebirsel ifade arasındaki ilişkileri ifade etme biçimi Şekil 41'de görülmektedir.

Handwritten work for Şekil 41:

$n=1$ olursa $\frac{n+b}{1+1=2}$	$\frac{n+b}{1+1=2}$ olur.	} "n" sayısı 6'dan küçük ise $n+b$ daha büyük olur.
$n=2$ olursa $2+2=4$	$2+2=4$ olur.	
$n=3$ olursa $3+3=6$	$3+3=6$ olur.	
Artarak		
$n=6$ olursa $6+6=12$	$6+6=12$ olur.	} "n" sayısı 6'dan büyük ise $n+n$ daha büyük dur.
$n=7$ olursa $7+7=14$	$7+7=14$ olur.	
$n=8$ olursa $8+8=16$	$8+8=16$ olur.	
Artarak		

Şekil 41. Y1'in yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.

Y1 verdiği değerleri incelerken, iki cebirsel ifadenin aralarındaki farkın $n = 6$ değerine yaklaştıkça azaldığını, 6 değerinden uzaklaştıkça aralarındaki farkın arttığını belirtmektedir. Bu durum öğrencinin cebirsel işlemler eşliğinde bir genellemeye ulaşarak ilişkileri niceliksel olarak ifade edebildiğini; bu ilişkileri sözel açıklamalar yardımıyla belirtmesi ile niteliksel olarak ifade edebildiğini göstermektedir. Benzer şekilde O1'in değişkene 6 vererek ilgili miktarı belirleme süreci Şekil 42'de görülmektedir.

Handwritten text for Şekil 42: Eğer n sayısı $n=6$ olursa 1. ve 2. denklem eşit olur.

Şekil 42. O1 yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme süreci.

O2, $n = 6$ değerini verdiğiinde ortaya çıkan sonucu belirtmese de n değişkenine altıdan büyük ya da küçük değerler verdiğiinde hangi durumların ortaya çıkacağını belirttiği için, bu öğrencinin $n = 6$ kritik değerini problemin çözümünde kullandığı söylenebilir.

C2 yetkinliğini sağlayamayan öğrenciler, bu problemi çözme sürecinde cebirsel ifadeler ve değişkene anlam yükleyememektedir. Dolayısıyla bu öğrenciler ilgili miktarları belirleyememektedir. D1'in çözümleri Şekil 43'te görülmektedir.

Örnek = $n+n$ 'n'e değer verdim n olsun ..
 $\downarrow \downarrow$
 $10+10=20$ oluyor
 $n+b$ 'n'e n verdim
 $\downarrow \downarrow$
 $10+10=20$ oluyor
 Sence'den dolayı verdiğimiz değere bağlıdır
 Net bir cevap vermiyoruz

Şekil 43. D1'in ilgili miktarları ve ilişkilerini belirleme sürecinde yaptığı çözümler.

D1 değişkene değer verme eğilimi göstermektedir. Değişkene 10 değerini verdiğinde cebirsel ifadelerin sonuçlarını yazmaktadır. Fakat bu değer problemi çözerken kullanabileceği ilgili bir miktar değildir. Öğrenci değer verme sürecini sonlandırdığı için ve cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri ifade edemediği için yetkinliği sağlayamamaktadır.

Tüm incelemeler, öğrencilerin bu problemde C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını ya da hiç sağlayamadığını göstermektedir. Yazılı çözümlerinde yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan öğrenci bulunmamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

"n" Neyi İfade Ediyor? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C2 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir öğrencide farklılıklar olduğu görülmektedir. O2'nin yazılı çözümlerinde verdiği cevaplarıyla yetkinliği güçlü düzeyde sağladığı görülmekteydi. Fakat mülakatlarda sonuçlarından emin olmadığı açıklamalar yapmaktadır.

- 15A:** Değer vermeyi neden sonlandırdın? Ya da bulduğun sonuçları neden cevap olarak yazmadın?
- 16O2:** Çünkü kesin bir şey yoktu. Ben de yanıltır diye yazmadım.
- 17A:** Sence bu verdiğin değerlerin sonuçları ne anlama geliyor? Sonuca ulaşırken bu bilgilerden yararlanabilir miyiz?
- 18O2:** Bu değerlerden dolayı sadece biri büyük olmuyor. Yani bu anlama geliyor hocam.

- 19A:** Bu değerler dışında başka değerler vermeyi düşündün mü?
- 20O2:** Hayır.
- 21A:** n ifadesine değer verirken tablo çizmeyi denedin mi? Tablo çizmek bize ne gibi faydalar sağlar?
- 22O2:** Hayır hocam ben tablo çizmedim burada.
- 23A:** $n + n$ değeri mi daha büyük? $n + 6$ değeri mi daha büyük? Bu konuda nasıl bir sonuca ulaştığını bize açıklar mısın?
- 24O2:** n değerine 6'dan küçük değer verince farklı, büyük değer verince farklı çıkıyor. Yani değişken bir sonuç hocam.
- 25A:** Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin? Ya da düşüncelerin doğru mu sence?
- 26O2:** Tam bir yanıt olmadı (*düşünüyor*) Ama ben böyle düşündüm. Bence doğru.
- 27A:** Bu yanıtı vermedeki kritik noktalar nelerdi?
- 28O2:** (*cevap veremiyor*)
- 29A:** Yaptığın işlemleri tekrar gözden geçir bakalım. Bu işlemlerini nasıl açıklarsın? Hangi ifadenin daha büyük olduğunu söyleyebilir misin?
- 30O2:** (*düşünüyor*) Söyleyemem.

O2'nin yaptığı açıklamalarda ilgili miktarları belirleyebildiği ve kritik değer 6 olduğunu bildiği ve sonuçlarını kısmen bu durumu dikkate alarak yorumladığı görülmektedir (24O2). Fakat öğrenci yazılı çözümlerinde belirttiği gibi farklı değerler verilmesi durumunda $n + n$ ve $n + 6$ cebirsel ifadelerinden hangisinin büyük olabileceğini ifade edemediği görülmektedir. Ayrıca öğrenci verdiği cevaplardan genel olarak emin değildir (26O2). Öğrencinin ilişkileri belirleyememesi sonucu problemin sonucuna varamadığı ve güçlük çektiği söylenebilir. Bu durum öğrencinin ilgili miktarları belirleme bileşenini sağladığını, fakat miktarlar arası ilişkiyi ifade etme bileşenini sağlayamadığını göstermektedir.

Y1 ile yapılan mülakat incelendiğinde problemi çözme sürecinde cebirsel düşüncelerini oldukça dışa vurabildiği ve net açıklamalar yapabildiği görülmektedir.

- 14A:** $n = 6$ değerini verdiğinde ortaya nasıl bir sonuç çıktı? Anlatır mısın?
- 15Y1:** $n + n$ ve $n + 6$ birbirine eşit oldu. 12 oldu ikisi de.
- 16A:** n 'e hangi değerleri verdin? Neden bu değerleri verdin?
- 17Y1:** 1, 2, 3, 6, 7, 8 değerlerini verdim. 1'den öylesine başladım. Sonra nasıl devam edecek diye baktım. 2 ve 3 verdim. Farkın azaldığını görünce aklımdan dört

beşi yaptım. Sonra 6'da eşit olduğunu gördüm. Sonraki değerlerde fark yine artmaya başladı zaten.

18A: Bu değerler dışında başka değerler vermeyi düşündün mü? Neden?

19Y1: Hayır düşünmedim. Çünkü son değerlerde fark arttı. Giderek artarak devam edecek diye başka değerlere gerek yoktu. Bir de 6 sayısı bence daha önemli.

20A: Neden 6 sayısı önemli?

21Y1: Çünkü 6 olmasının sebebi bence soruda $n + 6$ demesi.

22A: Başka bir sayı verseydi o sayı mı önemli olacaktı? Mesela $n + 7$ deseydi?

23Y1: Evet. (*düşünüyor*)

$$n + n = 14$$

$$n + 7 = 14 \text{ olurdu. } 7 \text{ önemli olurdu.}$$

24A: n ifadesine değer verirken tablo çizmeyi denedin mi? Tablo çizmek bize ne gibi faydalar sağlar?

25Y1: Denemedim. Ama tabloda da aynı şeyleri yazardım. Sonuca ulaşırken kolay olur.

Y1, ilgili miktarları belirleme sürecinde kritik olan 6 değerini elde edene kadar değişkene değer verdiğini ve bu değer verme sürecinde hangi sayıları kullandığını belirtmektedir (17Y1). Öğrenci 6'ya kadar olan değerleri verdiğinde iki cebirsel ifadenin sonuçları arasındaki farkın azaldığını ve en son 6'da eşit olduğunu fark etmektedir (17Y1). 6'dan büyük değerler verdiğinde ise tekrardan farkların arttığını ifade etmekte ve değer verme sürecini sonlandırmaktadır (19Y1). Öğrenci 6 sayısının ilgili miktar olmasının sebebini açıklarken problem bağlamından kaynaklandığını belirtmektedir (21Y1). Araştırmacının soruda " $n + 6$ yerine $n + 7$ deseydi" ihtimaline karşılık olarak yeniden düşünmekte ve $n = 7$ olduğunda iki cebirsel ifadenin eşit olacağını göstermektedir (23Y1). Tüm bu süreçler Y1'in ilgili miktarları ve bunların ilişkilerini ne kadar iyi belirleyebildiğini sunmaktadır. Öğrencilerden hiçbiri bu problemde tablo çizerek ilişkileri ifade etme yöntemini kullanmamıştır.

Yetkinliği yazılı çözümlerinde sağlayamayan D1'in mülakatlarda yaptığı açıklamalar da bu durumu desteklemektedir.

7A: Hangi sayıyı ifade ediyor? Matematiksel anlamda n 'in değeri hakkında ne söyleyebilirsin?

8D1: Hangi sayı olduğunu bilemeyiz. Değerini de bilemeyiz. Sadece bir sayı olduğunu biliriz.

9A: n'e 10 değerini vermişsin. Neden bu değeri verdiğini açıklar mısın?

10D1: Nedeni öylesine bakmak için.

11A: Bu değer dışında başka değerler vermeyi düşündün mü?

12D1: Evet, düşündüm aklımdan başka değerleri ve hep farklı sonuç oluyor.

13A: Değer vermeyi neden sonlandırdın? Ya da bulduğun sonuçları neden cevap olarak yazmadın?

14D1: Hepsinde farklı sonuç çıkıyor bende yazmadım. Yanlış olabilir diye.

15A: Peki, hangi değerleri verdin?

16D1: Tam hatırlamıyorum.

17A: Verdiğin değerler arasında dikkatini çeken bir sonuç buldun mu?

18D1: Hayır.

D1, değişkene verilecek değerlerin hangi sayılar olduğunu bilemeyeceğini ve $n = 10$ değerini öylesine verdiğini söylediğinde ilgili miktarları belirleyemediğini göstermektedir (8D1, 10D1). Öğrenci aklından başka değerler verdiğini ve hep farklı sonuçlar elde ettiğini, sonuçların yanlış olma ihtimali nedeniyle bunları yazmadığını belirttiğinde miktarlar arasındaki ilişkiyi anlayamadığını ifade etmektedir (12D1, 14D1). Dolayısıyla D1'in yetkinliği sağlayamadığı görülmektedir.

“n” Neyi İfade Ediyor? Probleminde C2 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 22'de görülmektedir.

Tablo 22

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde C2 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“n, 6 olduğunda $n + n$ ve $n + 6$ birbiriyle eşit oldu. Yani 12 oldu. Bence n'e verdiğimiz değerlere göre sonuç değişir. Mesela n'e 6'dan küçük değerler verince $n + 6$ hep daha büyük çıkıyor. $n = 6$ olunca zaten eşit çıkıyor. n eğer 6'dan büyükse o zamanda değişiyor. Bu sefer $n + n$ hep daha büyük oluyor. Her şey altıya göre değişiyor.” (Y2)	Y1, Y2, O1,

C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>“n değerine 6’dan küçük değer verince farklı, büyük değer verince farklı çıkıyor. Yani değişken bir sonuç.” (O2)</i>	O2
C2 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“...n’in değerini bilemem. Soruda bilgi eksikliği olabilir diye düşündüm. Sonucu belli değil. Ama $n + 6$ değeri daha büyük olabilir. Sonuçta 6 var. Yani 6’dan büyük olduğu kesin.” (D2)</i>	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olan bir öğrenci olduğu tespit edildi. O2’nin, yazılı çözümlerinde ilişkileri ifade ederek C2 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıttığı görülmekteydi. Fakat öğrenci açıklamalarında bu ilişkiyi yansıtamayarak yetkinliği zayıf düzeyde sağladığını göstermektedir.

4.2.4. Teraziler Nasıl Dengede? Problemine İlişkin Bulgular

Teraziler Nasıl Dengede? probleminde öğrencilere denge halinde 3 farklı terazi verilmiştir. Terazilerde kare, daire ve üçgen şekilleri ile temsil edilmiş ağırlıkların birbirleriyle nasıl ilişkili olduğu gösterilmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin terazilerin denge halinde olmasının eşitlik kavramıyla ilişkili olduğunu fark etmeleri ve işlemlere bu mantık ile başlamaları gerekmektedir. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- İlgili miktarları belirleme: Terazilerdeki kare, daire ve üçgenlerin miktarlarını belirlemeli ya da kullanmalıdır.
- Miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme: Terazilerin her iki kefesinde yer alan miktarların birbiri ile olan ilişkilerini ifade etme

C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, problemdeki ilgili miktarları belirlemektedir. Öğrenciler denge halinde olan terazilerdeki kare, daire ve üçgenlerin miktarlarını kullanarak eşitlik oluşturacaklarının farkındadır. Bu miktarlar oluşturacakları denklemlerdeki katsayıları ifade ettiğinden problemin çözümü için gereklidir. D1’in bu miktarları belirleme süreci Şekil 44’te görülmektedir.

a) Şekil 1' deki teraziden yola çıkarak kare ve daire arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.

$$4 \text{ kare} = 6 \text{ yuvarlak}$$

$$2 \text{ kare} = 3 \text{ yuvarlak}$$

b) Şekil 2' deki teraziden yola çıkarak üçgen ve kare arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.

$$10 \text{ üçgen} = 2 \text{ kare}$$

Şekil 44. D1'in ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkiyi ifade etme süreci.

D1, terazilerdeki miktarların aralarındaki ilişkileri ifade ederken harfli semboller kullanmak yerine değişkenleri kare, yuvarlak ve daire şeklinde isimlendirerek belirtmektedir. Öğrencinin miktarları ve bunlar arasındaki ilişkileri doğru ifade ettiği görülmektedir. O2'nin benzer çözümleri de Şekil 45'te görülmektedir.

a) Şekil 1' deki teraziden yola çıkarak kare ve daire arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.

$$4m = 6t$$

$$2m = 3t$$

b) Şekil 2' deki teraziden yola çıkarak üçgen ve kare arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.

$$10y = 2m = 5y = m \text{ hatta } 10y = 3t$$

c) Şekil 3' teki terazide yer alan ilişkiyi cebirsel gösterimlerle destekleyerek

olabilir

Şekil 45. O2'nin ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkiyi ifade etme süreci.

O2, denklemler arasındaki ilişkileri oklar yardımıyla göstermeye çalışmaktadır. Öğrencilerin, terazilerin her iki kefesinde yer alan şekillerin (kare, daire, üçgen) kaç tane olduğunu ifade ederek çözümlerine başladığı görülmektedir. Ayrıca öğrenciler problemde yer alan gereksiz bilgileri ayırt edebilmektedir. Y2'nin terazilerden yararlanarak ilgili miktarların ilişkilerini ifade etme süreci Şekil 46'da görülmektedir.

$$2x = 3y \quad 2 \text{ tane kare} \quad 3 \text{ tane daire}$$

b) Şekil 2' deki teraziden yola çıkarak üçgen ve kare arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.

$$5z = y \quad 5 \text{ üçgen} \text{ ile } 2 \text{ kare} \text{ degede}$$

c) Şekil 3' teki terazide yer alan ilişkiyi cebirsel gösterimlerle destekleyerek açıklayınız.

$$2 + 3y = 33 \quad 4 \text{ tane } 10 \text{ üçgen ile } 3 \text{ daire}$$

$$\text{toplarsak } 33$$

Şekil 46. Y2'nin ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkiyi ifade etme süreci.

Diğer problemlerden farklı olarak tüm öğrencilerin Teraziler Nasıl Dengede? probleminde C2 yetkinliğini sağladıkları görülmektedir. Öğrenciler terazilerin her iki kefesindeki miktarların birbiri ile olan ilişkisini ifade etmektedir. Y1, Y2, O1 ve O2 öğrencileri bu ilişkileri daha çok cebirsel işlemler ile ifade ederek yetkinliği sağlamaktadır. D1 ve D2 öğrencileri de ifadelerinde daha çok sözel açıklamalara yer vermektedir. O1 öğrencisi iki terazideki ilişkilerden yola çıkarak tüm miktarların birbiri ile olan ilişkisini açıkça ifade etmektedir. O1 öğrencisinin ilişkileri ifade etme biçimi Şekil 47'de görülmektedir.

Cevap = 1. ve 2. denklemlerde
 $2B = 3O$
 $2B = 10A$
 $2B = 3O$ ise $2B = 3O = 10A$

Şekil 47. O1'in miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.

Y2, O1 ve O2 iki denklemde ortak olan iki adet kare şekli ile temsil edilen ağırlıkları kullanabileceğini ifade ederek bu yol ile yeni bir eşitlik oluşturmaktadır. Bu eşitliğin ilişkilerini niceliksel olarak ifade etmektedir.

Bu problemde C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan ya da hiç sağlayamayan öğrenci bulunmamaktadır. Tüm öğrenciler ilgili miktarları doğru belirlemekte ve miktarlar arasındaki ilişkiyi farklı yollar kullanarak doğru ifade etmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Teraziler Nasıl Dengede? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C2 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılık olmadığı görülmektedir. Öğrenciler hem yazılı çözümlerinde ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkileri ifade etme bileşeni sağlamakta, hem de yapılan mülakatlar sırasında bu süreçleri doğru açıklamaktadır. Öğrencilerden Y2 ile yapılan mülakat aşağıda verilmektedir.

3A: Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğun cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?

- 4Y2:** Birinci terazide sadeleştirme yaptım ve 2 kare 3 tane daireye eşit oluyor. İkinci terazide 5 üçgen 2 kareye pardon yanlış yazmışım. 1 kareye eşit. 5 üçgen eşittir 1 kare. Evet. Ama burada 10 üçgen 2 kareye eşit ya. Ben onu kullandım. 2 kare dediğimiz için iki denkleme eşitledim. 3 daire 10 üçgene eşit oluyor. Sonra bunları kullandım.
- 5A:** Oluşturduğun bu gösterimlere cebirsel ifade diyebilir miyiz?
- 6Y2:** Evet diyebiliriz.
- 7A:** Cebirsel ifade ile denklem arasındaki fark nedir?
- 8Y2:** Şey. Bu ifadeler aynı zamanda denklem. Denklemden eşittir olur.

Y2'nin yaptığı açıklamalar terazideki ağırlıkların arasındaki ilişkiyi ne kadar iyi anladığını göstermektedir. Akıcı ve net ifadeler kullanarak terazilerdeki eşitlikleri doğru açıklamaktadır. Bu eşitliklerde bazı sadeleştirmeler yapmakta ve hangi ifadeleri kullanması gerektiğini yorumlamaktadır (4Y2).

O1 de diğer öğrenciler gibi terazilerdeki kare, daire ve üçgen şekillerinin denklemden katsayılarından yararlanarak ilişkileri ifade etmektedir.

- 1A:** (Soru okunur ve incelenir) Terazilerin dengede olması durumundan nasıl yararlandın?
- 2O1:** Dengede olması demek yani şey mesela denklem kurabiliriz demek. Tüm teraziler için denklem yazılabilir bence.
- 3A:** Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğun cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?
- 4O1:** Birinci, ikinci ve üçüncü terazideki şekillere göre denklemlerimizi yazıyoruz. Sonra birleştiriyoruz. Yani mesela ben birinci ve ikinci terazide kare var. O nedenle denklemleri birleşik yazabiliriz. O nedenle 2 kare = 3 daire = 10 üçgen çıkıyor.

O1, miktarları doğru belirlemekte ve bunlar arasındaki ilişkiyi doğru ifade etmektedir. Öğrenci iki terazide yer alan üç farklı bilinmeyeni uygun katsayılar ile birbirine eşitlemektedir. Bu sayede üç bilinmeyen arasındaki ilişkileri net bir şekilde ifade ettiğini göstermektedir. C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci D2 de benzer açıklamalar yapmaktadır.

- 1A:** (Soru okunur) Terazilerin dengede olması durumundan nasıl yararlandın?

- 2D2:** Teraziler dengede olduğu için mesela 1. terazide 4 tane kare 6 tane daireye eşit.
- 3A:** Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğunuz cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıkla mısın?
- 4D2:** 1. terazi dediğim şekilde yani ben kareye x dedim. Daireye y dedim. Üçgene z dedim. Yani $4x = 6y$ oluyor.
- 5A:** Şekil 2 ve Şekil 3'teki teraziler için nasıl yazdın?
- 6D2:** 2. terazide $10z = 2x$ oluyor. 3. terazi $1z + 3y = 33$.
- 7A:** Bu şekilde doğru ilerlediğinden emin misin?
- 8D2:** Evet.

D2, cebirsel ilişkileri en iyi açıkladığı bu problemde yaptığı açıklamalarda bu problem ile daha önce sınıf ortamında karşılaştığını belirtmektedir. Öğrencinin aşına olduğu bir problem türü olması, ilişkileri nasıl ifade edeceğini daha iyi organize etmesini sağlamış olabilir.

Terazilerin Nasıl Dengede? Probleminde C2 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 23'te görülmektedir.

Tablo 23

Teraziler Nasıl Dengede? probleminde C2 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	"Birinci terazide 4 kare ile 6 daire birbirine eşit. İkinci terazide 10 üçgen 2 kareye eşit. Üçüncü terazide sayı vermiş, bunu kullanabiliriz. 1 üçgen ile 3 dairenin toplamı 33'müş. Ben kareye x, daireye y, üçgene z dedim ve böyle yazdım." (Y1) "İlk olarak 4 kare = 6 yuvarlak oluyor. Buradan şöyle bir sonuç daha var: 2 kare de 3 yuvarlağa eşit oluyor... İkinci terazide 2 kare 10 üçgene eşit olduğu için o zaman demek ki	Y1, Y2, O1, O2, D1, D2

	<i>10 üçgen de 3 yuvarlağa eşit... Üçüncü terazide 1 üçgenle 3 yuvarlağın toplamı 33 kilograama eşitmiş. (D1)</i>	
C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	...	
C2 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir. Yetkinliği yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, örnek olay çalışmalarında açıklamaları ile C2 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtmaya devam ettiler.

4.2.5. Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular

Timuçin İnternet Kafede probleminde bir internet kafede bilgisayar kullanma süresine bağlı ücret değişimlerini ifade eden bir bağlam ile sabit değerin, değişkenin ve artış miktarının belirtildiği bir problem cümlesi verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamamaları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- İlgili miktarları belirleme: Problemde verilen bu terimleri kullanma ve zamana bağlı ücret miktarlarını gösterme (başlangıçta 2 TL, 1 saatte 2,5 TL, 2 saatte 3 TL gibi) ya da bu miktarları kullandıklarını ifade etme
- Miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme: Problemde verilen bilgilerin birbiri ile ilişkilerini ifade etme

C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, problemdeki ilgili miktarları belirleyerek zamana bağlı ücret miktarlarını olabildiğince açık ve net bir şekilde ifade etmektedir. Öğrencilerin problemde verilen miktarların aralarındaki ilişkileri de tercih ettikleri yollar ile ifade edebildikleri görülmektedir. Y1'in problemdeki bağlama ilişkin miktarları belirleme süreci Şekil 48'de görülmektedir.

0	2
1	2,5
2	3
3	3,5
4	4
5	4,5

Şekil 48. Y1'in ilgili miktarları belirleme süreci.

Y1, problemde verilen bağlama ilişkin bilgileri dikkate alarak problemin çözümünde kullanacağı ilgili miktarları belirlemektedir. Belirlediği miktarları ifade etmek için cebirsel temsil biçimlerinden yararlanarak tablo temsilinde bu miktarları göstermektedir.

Öğrencilerden Y1, Y2 ve O2 problemde verilen miktarları kullanarak cebirsel ifade oluşturmaktadır. Bu öğrencilerin oluşturdukları cebirsel ifadelerin doğru olması verilen miktarlar arasındaki ilişkileri anladıklarını ve cebirsel olarak ifade ettiklerini göstermektedir. O2 bu miktarların ilişkisini bir takım eşitsizlikler kullanarak da ifade etmiştir. O2'nin bu süreci Şekil 49'da görülmektedir.

a) $0 < x < 59 \Rightarrow 2 H$ bu bilgisayarın açılma anından 1 saat önce
fiyatı

$150 < x < 150 + 59 dk \Rightarrow 2,5 H \dots$

b) denklemler kurabiliriz bilgisayar açılma parası... Sabit değişken
dur, Saat başı Eklenmesi değişken dur

$0,50 \cdot x + 2H = \text{ödeyeceğimize fiyat}$
 x saat değişkeni

Şekil 49. O2'nin miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.

O1, D1 ve D2 miktarlara ilişkin cebirsel ifadeler kullanmak yerine problemin alt maddelerini çözerken başlangıç fiyatının üzerine artış miktarını istenen değişken kadar ekleme yöntemini kullanmakta ve sayarak ilerlemektedir. Bu durum her ne kadar istenen çözüm yöntemlerinden biri olmasa da öğrencilerin verilen miktarların birbiri ile ilişkisini anladıklarını ve kullandıklarını göstermektedir. Ayrıca bu öğrenciler sözel ifadeler yardımıyla bir takım açıklamalara yer vermektedir. D2'nin bilgisayar açılış fiyatının üzerine artış miktarlarını ekleme yöntemini kullandığını ifade eden çözümleri Şekil 50'de görülmektedir.

Açılış Fiyatı	Ekstra Uzatma
2 TL	1 Saat = 50 Kr
	2 Saat = 1 TL
	3 Saat = 1.50 TL
	4 Saat = 2 TL
	5 Saat = 2.5 TL

Şekil 50. D2'nin miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.

D2, çözümlerini daha rahat yapabilmek için informal bir tablo oluşturarak problem bağlamında verilen bilgileri düzenlemektedir. Çözüm sürecinde bu tabloyu takip eden öğrencinin ekstra uzatma şeklinde adlandırdığı bölüm, bilgisayar kullanım süresine bağlı olarak ne kadar ücret ödendiğini göstermektedir. Öğrenci bu şekilde problemin birçok maddesini doğru yanıtlamıştır. Bu informal tablo öğrencinin ilgili miktarları belirleyebildiğini ve aralarındaki ilişkiyi ifade etmek için böyle bir yol seçtiğini göstermektedir. Dolayısıyla D2 C2 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtmaktadır.

Yazılı çözümlerinde C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan ya da hiç sağlayamayan öğrenci bulunmamaktadır. Tüm öğrenciler ilgili miktarları doğru belirlemekte ve miktarlar arasındaki ilişkiyi farklı yollar kullanarak doğru ifade etmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Timuçin İnternet Kafede problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C2 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılık olmadığı görülmektedir. Öğrenciler hem yazılı çözümlerinde ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkileri ifade etme bileşeni sağlamakta, hem de yapılan mülakatlar sırasında bu süreçleri doğru açıklamaktadır. Öğrencilerden Y1 ile yapılan mülakat aşağıda verilmektedir.

18A: Tabloyu nasıl çizdin? Anlatır mısın?

19Y1: Soruda açılış fiyatı 2 TL demiş. Bilgisayarı açınca yani. O yüzden saat başlamadan sıfırken 2 TL dedim. Sonra bir saat arttıkça 50 Kuruş artmış. 1 saat 2,5 TL, 2 saat 3 TL, 3 saat 3,5 TL diye yazdım.

20A: Tabloyu kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?

21Y1: Evet.

22A: Nasıl emin oluyorsun?

23Y1: Süreye bağlı ücretleri göstermem gerekiyordu. Buna göre yaptım. 50 Kuruş artırarak, yani eminim.

24A: Tabloda dikkatini çeken bir durum var mı?

25Y1: (Sessizlik) Hayır, yani normal.

26A: Tabloyu inceleyerek bilgisayar kullanma süresi ile ücret arasındaki değişim hakkında ne söyleyebilirsin?

27Y1: Başta 2 TL vermek zorunda. Sonrasında 50 Kuruş artıyor, saat geçtikçe.

Y1 miktarları belirlerken ve belirlediğini miktarların ilişkilerini açıklarken oluşturduğu tablodan yararlanmaktadır. Öğrenci bilgisayarın açılış fiyatının 2 TL olmasının sabit değeri ifade ettiğini değişkenin sıfır olduğu an ile ilişkilendirerek açıklamaktadır (19Y1). Bilgisayar kullanım süresinin 1 saat olması durumunda açılış fiyatına 50 Kuruş eklenerek 2,5 TL ödeme yapılacağını belirtmektedir. Öğrenci artış miktarını kullanarak diğer miktarları da belirlemektedir (19Y1). Öğrencinin artış miktarının 50 Kuruş olmasını açıklaması, miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade edebildiğini göstermektedir. Dolayısıyla öğrenci C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci O2 açıklamalarında miktarlar arası ilişkiyi oluşturduğu eşitsizlik yardımıyla ifade etmektedir.

3A: Peki, soruda dikkatini çeken bir durum var mı?

4O2: Bilgisayarı açma parası dikkatimi çekmişti.

5A: Bilgisayarı kullanma süresi ile ücret arasındaki değişim hakkında ne söyleyebilirsin?

6O2: Her saat artıyor.

7A: a maddesinin cevabında $0 < x < 59$ yazmışsın bu ne anlama geliyor?

8O2: Yani burada 60 dakika olarak düşündüm. ... 60 dakika kullanınca 50 kuruş daha veriyor hocam. 60 dakikadan az olursa 50 kuruştan az verir.

O2'nin 60 dakikadan daha az süre bilgisayar kullanılması durumunda 50 Kuruştan daha az ücret ödeneceği ile ilgili düşüncesi, öğrencinin miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme sürecinde farklı bir bakış açısına sahip olduğunu göstermektedir. O2'nin bu düşüncesi problemin diğer maddelerindeki çözümlerini de etkilemiştir.

19A: c maddesinin cevabını nasıl buldun? Açıklar mısın?

20O2: 1 saat kullanmamış bilgisayarı. Yani 2 TL verir sadece.

21A: Cevabında 2, y TL de verebiliriz demişsin burada yazdıklarını açıklar mısın?

22O2: Orada şey hocam. (*heyecanlanıyor*) 1 saatten az kullandıysa 2 TL bir de ek olarak 50 kuruştan az bir para daha verir diye düşündüm. Süreyi söylemediği için ne kadar olduğunu bilemem...

23A: Neden böyle düşündün?

24O2: Mesela hocam soruda deseydi yarım saat diye o zaman 25 kuruş diyebilirdim. Ama şimdi tam bilemem.

O2, bilgisayar kullanma süresinin 1 saatten az olması durumunu diğer bazı öğrenciler gibi başta “*yalnızca 2 TL verir*” şeklinde ifade etmektedir (20O2). Fakat yazılı çözümlerinde 2, y TL şeklinde ifade etmektedir. Bunun ne anlama geldiği sorulduğunda öğrenci, bilgisayarın 1 saatten az kullanılması durumunda süre ile orantılı bir ücret ödenmesi gerektiğini düşünmektedir. Bu düşüncesini açıklamak için verdiği örnekte, bilgisayar kullanım süresinin yarım saat olması halinde 50 Kuruşun yarısı olarak 25 Kuruş daha ödenmesi gerektiğini açıklamaktadır (24O2).

Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan bir başka öğrenci D1, yazılı çözümlerinde grafik oluşturarak miktarları belirlediği için yine bu grafikten yararlanarak çözümlerini açıklamaktadır.

6D1: ...Soruda saat başı dediği için saatlerdeki artışı gösterdim... 5’e kadar gösterdim sonra geri kalanını yaptım. Yani doğru çıkıyor.

7A: Peki, soruda dikkatini çeken bir durum var mı?

8D1: ...Hayır.

9A: Grafiği de inceleyerek bilgisayarı kullanma süresi ile ücret arasındaki değişim hakkında ne söyleyebilirsin?

10D1: Bilgisayarı kullanma saatine göre ücret veriyor... Her saate göre 50 kuruş fazla veriyor.

D1 açıklamalarında oluşturduğu grafiğe ilişkin açıklamalar yapmakta ve miktarlar arasındaki ilişkiyi doğru yorumlamaktadır. Bilgisayar kullanma süresi ile ücret arasındaki değişim hakkında saat başı 50 Kuruş arttığının farkındadır (10D1).

19A: c maddesinin cevabını nasıl buldun? Açıklar mısın?

20D1: Burada 1 saat geçmemiş demiş. O yüzden tam emin değilim... 2 TL olabilir. Ya da belki de 50 kuruş değil de daha az bir şey vermiş olabilir.

21A: Yani 50 kuruştan az vermiş olabilir diyorsun, öyle mi?

22D1: Evet yani 2 TL’ye ek olarak.

23A: Neden böyle düşündün?

24D1: Çünkü bir saatten az kullanmış. Bir saat olsa direk iki buçuk derdim. Böyle olunca sadece 2 TL ya da iki buçuktan az vermiş diyorum. Hangisi olur onu bilemem.

25A: Sorunun doğru cevabının bu iki yanıtta biri olduğunu mu söylemek istiyorsun?

26D1: Evet.

D1'in bu açıklamaları O2 ile aynı fikirde olduğunu göstermektedir. Öğrenci bilgisayar kullanım süresinin 1 saati doldurmadığı durumda, ödenecek miktarın bağlama göre iki şekilde yorumlanabileceğini düşünmektedir. D1'e göre bunlardan ilki daha klasik bir yanıt olan sabit değer kadar (2 TL) ücret ödenmesi, ikincisi 1 saat dolmadığı için 2 TL'ye ek olarak 50 Kuruştan az bir ücret ödenmesi durumlarıdır (20D1 – 24D1).

Timuçin İnternet Kafede Probleminde C2 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 24'te görülmektedir.

Tablo 24

Timuçin İnternet Kafede probleminde C2 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Bilgisayarın açılış fiyatı 2 TL demiş. 2 TL ye 50 kuruş ekleyerek 1 saati yazdım. Sonra 50 kuruş ekleyerek ilerledim. Bilgisayarı kullandığın saate göre ücreti artar. Yani burada da her saat 50 kuruş artıyor.” (Y2) Bilgisayarı kullanma süresi ile ücret arasındaki değişim her saat artıyor. Yani burada 60 dakika olarak düşündüm. ... 60 dakika kullanınca 50 kuruş daha veriyor hocam. 60 dakikadan az olursa 50 kuruştan az verir. (O2)	Y1, Y2, O1, O2, D1, D2

C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	...	
C2 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir. Yetkinliği yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, örnek olay çalışmalarında açıklamaları ile C2 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtmaya devam etmektedir.

4.2.6. Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde bir ortamda bulunan bakterilerin zamana bağlı artış sayısı ile ilgili bir bağlam ve diğer problemlerden farklı olarak bu bağlama ilişkin denklem verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- İlgili miktarları belirleme: Denklemden yer alan katsayı, değişken ve sabit terime ilişkin miktarları iyi değerlendirme ve bu denklemden yararlanarak ortamdaki bakteri sayısının ilk birkaç dakikada ne kadar olduğunun doğru bir şekilde belirtme
- Miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme: Denklemden yer alan miktarların birbiriyle olan ilişkilerinin anlaşılması ve ifade edilmesi

C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, problemde verilen katsayı, değişken ve sabit terimleri iyi değerlendirerek çözümlerinde kullanmaktadır. İlk birkaç dakikadaki bakteri sayılarını belirten bu öğrenciler, problemin bağlamını ifade eden denklemden miktarların aralarındaki ilişkileri sözel ifadelerle açıklamaktadır. Bu öğrenciler aynı zamanda denklemi kullanarak da bu ilişkileri anladıklarını göstermektedir. Y2'nin problemdeki bağlamdan yola çıkarak belirlediği miktarlar Şekil 51'de görülmektedir.

Dakika	Bakteri
0	8
1	24
2	40
3	56
4	72

Şekil 51. Y2'nin ilgili miktarları belirleme süreci.

Y2 problemde verilen denklemdeki terimleri değerlendirerek ilgili miktarları doğru belirlemektedir. Öğrenci belirlediği miktarları oluşturduğu tabloda göstermektedir. İlgili miktarları belirlerken sabit terimin başlangıçtaki miktarı ifade ettiğini anladığı için sıfırıncı dakikadaki miktarı da göstermektedir.

Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci Y1'in denklemdeki miktarların arasındaki ilişkileri ifade etme süreci Şekil 52'de görülmektedir.

- a) 8 bakteri var zaten ve dakikada 16 bakteri üreyormuş. Dakikada sayısı arttıktan bakteri sayısında onun 16 katı olur.
b) başlangıçtaki bakteri sayısı 8'dir.

Şekil 52. Y1'in miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.

Y1 de denklemi yorumlayarak ilgili miktarlar arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır. Dakikada 16 bakterinin arttığını belirterek miktarlar arası artışı ve başlangıçtaki bakteri sayısını doğru ifade etmektedir.

Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci O1'in verilen denklemi "Bakteri sayısını şöyle buluruz: 16 ile kaç dakika istiyorsak çarparız. Sonra da 8 ekleriz." şeklinde yorumladığı görülmektedir. O2 ise denklemden yola çıkarak miktarlar arasındaki ilişkiyi "Doğru orantılı bir ilişki olduğunu söyleyebiliriz. Zaman arttıkça zaman bakteri sayısı da artar" diyerek niteliksel olarak yorumlamaktadır.

C2 yetkinliğini sağlayamayan öğrenciler, denklemde yer alan miktarları doğru yorumlayamadıkları için bu miktarların arasındaki ilişkileri de doğru bir şekilde ifade edememektedir. Bu öğrencilerden biri olan D2'nin ilgili miktarları belirleyebilmek için bir tablo oluşturduğu Şekil 53'te görülmektedir.

C)

Geçen Süre	Bakteri Sayısı
3 2	16
4 8	24
6 4	32
?	?

Şekil 53. D2'nin miktarları ve ilişkileri ifade etme sürecinde yaptığı çözümler.

D2 verilen denklemdeki terimleri (katsayıları ve sabit terimi) yanlış yorumladığı için problem ile ilgili olan miktarları yanlış belirlemektedir. Ayrıca zamana bağlı bakteri değişimini de doğru ifade etmemektedir. Dolayısıyla bu öğrenciler, problemin diğer alt maddelerinde yer alan soruları yanıtlanamamış ve çözüm süreçlerini bu noktada sonlandırmıştır.

Tüm incelemeler, öğrencilerin bu problemde C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını ya da hiç sağlayamadığını göstermektedir. Yazılı çözümlerinde yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan öğrenci bulunmamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Bakterilerin Hızına Yetiş problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C2 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılık olmadığı görülmektedir. C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler hem yazılı çözümlerinde ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkileri ifade etme bileşeni sağlamakta, hem de yapılan mülakatlar sırasında bu süreçleri doğru açıklamaktadır. C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerden Y2 ile yapılan mülakat metni aşağıda verilmektedir.

- 3A:** Dakikada ortamda kaç bakteri artıyor?
- 4Y2:** Yani bir dakika geçince 16 bakteri artıyor.
- 5A:** Bakteri sayısı ile dakika arasındaki ilişkiyi daha ayrıntılı açıklar mısın?
- 6Y2:** Dakika artarsa bakteri de artıyor.
- 7A:** Başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl buldun? Denklemden nasıl yararlandın?
- 8Y2:** Başlangıç demesi yani sıfır. Dakikaya sıfır verince 8 çıkıyor.

9A: Zamana bağılı bakteri sayısındaki değişimi düşünürsek başlangıçtaki bakteri sayısını bulmak için denklemde bu durumu nasıl ifade ederiz?

10Y2: Sabit terim yani 8 denklemde bize başlangıcı ifade ediyor.

Y2, problemde verilen denklemi doğru yorumladığını dakikada artan bakteri sayısının 16 olduğunu söylediğinde göstermektedir (4Y2). Y2 önce, başlangıçtaki bakteri sayısını bulmak için dakika değişkenine sıfır verilmesi gerektiğini ifade etmektedir (8Y2). Öğrenci daha sonra başlangıçtaki bakteri sayısının denklemdeki sabit değere eşit olduğunu da belirtmektedir (10Y2). Öğrenci yazılı çözümlerinde denklemdeki terimlerden yola çıkarak ilk dört dakikada ortamda kaç bakteri bulunduğunu tablo çizerek göstermekteydi.

13A: Tabloyu nasıl oluşturdu? Anlatır mısın?

14Y2: Dakika ve bakteri olarak yaptım. Sıfır dakika 8 oluyor. Sonra 1 dakikada 16 arttığı için 24 oluyor. Sonra da 16 ekleyip yaptım.

Y2 tabloyu nasıl oluşturduğunu anlatmaktadır. Öğrenci tabloyu yazarken denklemdeki miktarları (katsayıları) dikkate aldığını ve bunlar arasındaki ilişkiyi nasıl kullandığını açıklamaktadır. Öğrencinin bu açıklamaları C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

Yazılı çözümlerinde C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını gösteren öğrencilerden O1'in açıklamalarının Y2 ile benzer olduğu görülmektedir.

1A: (*Soru okunur*) Denklemde yer alan sayılar neyi ifade ediyor?

2O1: Bakteri sayısını bulmak için. Yani şey 8 bakteri vardır. Bir de 16 artıyor.

3A: Dakikada ortamda kaç bakteri artıyor?

4O1: 16.

5A: Bakteri sayısı ile dakika arasındaki ilişkiyi daha ayrıntılı açıklar mısın?

6O1: Dakika artarsa bakteri sayısı da artar.

7A: Başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl buldun? Denklemde nasıl yararlandın?

8O1: Dakikaya sıfır yazarız. Denklemde bu şekilde çözeriz ve 8 çıkar.

9A: Denklemdeki sayıları tekrardan gözden geçir bakalım. Ne düşünüyorsun?

10O1: ...(*Düşüncelerini açıklamıyor*)

11A: Zamana bağılı bakteri sayısındaki değişimi düşünürsek başlangıçtaki bakteri sayısını bulmak için denklemde bu durumu nasıl ifade ederiz?

12O1: (*Düşünüyor*) Denklemde dakikaya sıfır dersek başlangıçtaki bakteriyi buluruz. Yani dakika geçmediği için.

13A: ‘Başlangıç’ ifadesi ile süreyi yani dakikayı nasıl ilişkilendirdin?

14O1: Sıfır diyerek.

15A: Tabloyu nasıl oluşturdu? Anlatır mısın?

16O1: Denklemden dakikaya sayı vererek. Sıfır yazınca 8 bakteri, 1 yazınca 24 bakteri, 2 yazınca 40 bakteri diye gidiyor.

O1, denklemdaki katsayıları dikkate alarak başlangıçta ortamda 8 bakterinin bulunduğunu ve dakikada 16 bakterinin arttığını ifade etmektedir (2O1). Öğrenci denklemden yararlanarak miktarları nasıl belirleyeceğini açıklamaktadır (8O1, 12O1). O1 de Y2 gibi tablo ile belirlediği miktarları ve aralarındaki ilişkileri göstermektedir. Tabloda miktarları gösterirken denklemden dakika değişkenine değer verdiğini açıklamaktadır.

C2 yetkinliğini sağlayamayan öğrencilerden D2’nin problemi çözme sürecine ilişkin açıklamalarının doğru olmadığı görülmektedir.

1A: (*Soru okunur*) Denklemden yer alan sayılar neyi ifade ediyor?

2D2: Bakteri sayısına eşitmiş. $8 + 16 \dots$

3A: Dakikada ortamda kaç bakteri artıyor?

4D2: 8 bakteri artıyor.

5A: Bakteri sayısı ile dakika arasındaki ilişkiyi daha ayrıntılı açıklar mısın?

6D2: 16. dakikada kaç bakteri olduğunu yani 16 dakikada 8 bakteri oluyor.

7A: Başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl buldun? Denklemden nasıl yararlandın?

8D2: (*cevap vermiyor*)

9A: Denklemden sayıları tekrar gözden geçir bakalım. Ne düşünüyorsun?

10D2: (*soruyu tekrar okuyor*) Başlangıçtaki bakteri sayısı mı? Başlangıçta sıfırdır.

11A: Zamana bağlı bakteri sayısındaki değişimi düşünürsek başlangıçtaki bakteri sayısını bulmak için denklemden bu durumu nasıl ifade ederiz?

12D2: Bilmiyorum.

13A: ‘Başlangıç’ ifadesi ile süreyi yani dakikayı nasıl ilişkilendirdin?

14D2: Başlangıç demesi yani birinci dakika demek.

D2, denklemi doğru yorumlayamadığı için problemin alt maddelerini de doğru cevaplayamamaktadır. D2 denklemden yer alan sabit değerin, dakikada artan bakteri sayısını ifade ettiğini düşünmesi miktarları doğru belirleyemediğini göstermektedir (16D2). Problemin denklemi “Bakteri Sayısı = $8 + 16 \times \text{Dakika}$ ” şeklinde verilmiştir. Öğrenci denklemden

katsayıları yorumlarken 16 dakikada 8 bakteri olduğunu ifade ederek ilişkileri doğru açıklayamadığını göstermektedir. Dolayısıyla C2 yetkinliğini sağlayamamaktadır.

Bakterilerin Hızına Yetiş Probleminde C2 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 25’te görülmektedir.

Tablo 25

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde C2 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Denklemden yer alan sayılarda 8 sabit sayı. 16 katsayı. Dakika ve bakteri sayısı bilinmeyen. 1 dakika geçtiğinde 16 bakteri daha oluyor yani toplam 24. Başlangıçtaki bakteri sayısını denklemden dakikaya sıfır vererek buldum. Yani sabit terim kadar.” (Y1)	Y1, Y2, O1, O2
C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	...	
C2 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“Başlangıçtaki bakteri sayısını 24 buldum. Sekiz ile 16’yı topladım. Denklemden $8 + 16$ demiş.” (D1)	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir. Yetkinliği yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, örnek olay çalışmalarında açıklamaları ile C2 yetkinliğini yine güçlü düzeyde yansıtmaya devam etmektedir. C2 yetkinliğini sağlayamayan öğrencilerin ise çözümlerine ilişkin yaptıkları açıklamalarının da doğru olmadığı görülmüştür.

4.2.7. Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular

Sekizgen Masalar probleminde gerçek yaşamdan alınmış bir senaryoyu temsil eden örüntü verilmiştir.

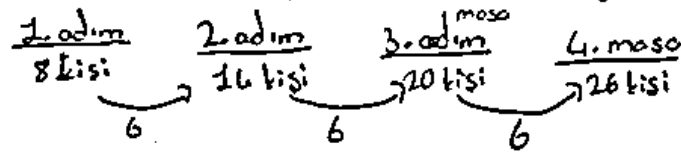
Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- İlgili miktarları belirleme: Örüntünün bir sonraki adımına ilişkin miktarları belirleme
- Miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade etme: Örüntüde yer alan miktarların birbiriyle olan ilişkilerinin anlaşılması ve ifade edilmesi

C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, problemde yer alan örüntü ve tablo temsillerini iyi anlayarak örüntünün bir sonraki adımını bulmaya ilişkin (a) ve (b) maddelerini doğru yanıtlamaktadır. Bu öğrencilerin örüntü ve tablo temsillerindeki miktarların arasındaki ilişkileri belirledikleri ve örüntünün ilerleyen adımlarını buldukları çözümlerinden anlaşılmaktadır. Bu öğrenciler örüntünün artış miktarının 6 olduğunu farkındadırlar.

Y1'in örüntünün adımları arasındaki ilişkileri ifade etme biçimi Şekil 54'te görülmektedir.



Şekil 54. Y1'in ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.

Y1, örüntünün adımlarına ilişkin miktarları 8, 14, 20 olarak doğru belirlemektedir. Bu miktarlar arasındaki ilişkileri belirlerken artış miktarının 6 olduğunu göstermekte ve örüntünün bir sonraki adımı olan dördüncü adımı artış miktarını ekleyerek bulmaktadır. Öğrencilerden D1'in ilgili miktarları belirleme süreci ise Şekil 55'te görülmektedir.

a) 4. adım 20 kişi birleştiğinde 1 masanın 1 kenarı 2 kişi
2 masanın 1 kenarı birleşiyor ve ortaya kimse oturamıyor
b) 26 kişi oturabilir

Şekil 55. D1'in ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri ifade etme süreci.

D1'in sekizgen masalardan oluşan örüntüyü yorumlarken masaların birleşmesi sonucu iki kenara kimsenin oturamayacağını belirtmesi, ilk adımda 8 kişi oturabiliyorken ikinci adımdan neden 14 kişinin oturduğunu açıklamaya yöneliktir. Öğrencilerin bu problemdeki ilgili miktarları belirleme süreci diğer yetkinlikleri sağlama süreçleri ile iç içedir. Örneğin, D1 öğrencisinin ilgili miktarları belirleme süreci, bağlamı anlamlandırma (C1) sürecini de yansıtmaktadır.

D1 ve D2 daha çok problemde yer alan diğer alt maddelerin cevaplarını bulmaya odaklanmaktadır. Bu öğrencilerin örüntünün verilmeyen 4. adımının 26 olduğunu belirtmesi açıkça ifade etmeseler de artış miktarının 6 olduğunu farkında olduklarını göstermektedir.

Yazılı çözümlerinde C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan ya da hiç sağlayamayan öğrenci bulunmamaktadır. Tüm öğrenciler ilgili miktarları doğru belirlemekte ve miktarlar arasındaki ilişkiyi doğru ifade etmektedir. Öğrencilerin tümünün bu problemde C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Sekizgen Masalar problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C2 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılık olmadığı görülmektedir. Öğrenciler hem yazılı çözümlerinde ilgili miktarları belirleme ve aralarındaki ilişkileri ifade etme bileşeni sağlamakta, hem de yapılan mülakatlar sırasında bu süreçleri doğru açıklamaktadır.

Yazılı çözümlerinde C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerden Y1 ile yapılan mülakat metni aşağıda verilmektedir.

- 1A:** (Soru okunur) 2 masaya neden 14 misafir oturduğunu nasıl açıklarsın?
2Y1: Masalar birleşiyor çünkü. Yani birleştiği iki kenara 2 kişi oturamaz.
3A: Masa sayısı ile misafir sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
4Y1: Masa sayısı arttıkça daha çok misafir oturabilir.
5A: 4 masaya kaç misafirin oturduğunu nasıl buldun? Anlatır mısın?
6Y1: 6 artıyordu. 6 ekledim ve 26 buldum.

Y1'in örüntüdeki miktarları doğru yorumladığı görülmektedir. Öğrencinin örüntüden ve verilen tablodan yararlanarak ilgili miktarları doğru belirlediği ve örüntünün adımlarına bağlı olarak miktarların aralarındaki ilişkileri doğru belirlediğine ilişkin açıklamaları C2 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıttığını göstermektedir (2Y1, 6Y1).

C2 yetkinliğini yazılı çözümlerde güçlü düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci O2, açıklamalarında da bu yetkinliğini güçlü düzeyde yansıttığını göstermektedir.

1A: (soru okunur) 2 masaya neden 14 misafir oturduğunu nasıl açıklarsın?

2O2: Masalar birleştiği için.

3A: Masa sayısı ile misafir sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?

4O2: Masa sayısı arttıkça 6 misafir daha oturabilir.

5A: 4 masaya kaç misafirin oturduğunu nasıl buldun? Anlatır mısın?

6O2: 20'ye 6 ekledim hocam.

7A: Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

8O2: (düşünüyor) Bilmiyorum. Denklemi kullanabiliriz hocam ama zaten kaç olduğu belli ben kullanmadım o yüzden.

O2'nin Y1 ile benzer açıklamalar yaptığı görülmektedir. O2 örüntünün bir sonraki adımını artış miktarı olan 6'yı ekleyerek bulması, miktarları doğru belirlediğini ve miktarlar arası ilişkiyi de doğru ifade ettiğini göstermektedir (6O2).

C2 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan D1'in açıklamaları aşağıda verilmektedir.

5A: 4 masaya kaç misafirin oturduğunu nasıl buldun? Anlatır mısın?

6D1: 8, 14, 20 diye artıyor. 6 fazlası olduğu için 26 buldum.

7A: Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

8D1: İkinci yol olarak masalardan sayabilirim.

D1 de çözümlerine ilişkin diğer tüm öğrenciler ile benzer açıklamalar yaparak C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir. Öğrenci ilgili miktarları belirleme bileşenini sağladığını, ilk üç adımı verilen örüntünün miktarlarını 8, 14, 20 şeklinde ifade ederek göstermektedir. D1 artış miktarının 6 olduğunu ve bu nedenle örüntünün bir sonraki adımının 26 olduğunu belirterek miktarlar arası ilişkiyi ifade etme bileşenini sağladığını göstermektedir.

Sekizgen Masalar Probleminde C2 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 26’da görülmektedir.

Tablo 26

Sekizgen Masalar probleminde C2 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“2 masa birleşince birleşen yerlere misafir oturamaz bu yüzden iki masaya 16 değil 2 eksik olacak şekilde 14 misafir oturabilir. Örüntünün adımları 6 artarak gidiyor. Örüntünün dördüncü adımı 20’ye 6 eklersek 26 olur.” (Y2)	Y1, Y2, O1, O2, D1, D2
C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	...	
C2 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir. Yetkinliği yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, örnek olay çalışmalarında açıklamaları ile C2 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtmaya devam etmektedir.

4.3. Miktarlar Arasındaki İlişkilerin Cebirsel Temsillerini Kullanma Sürecine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın üçüncü alt problemi olan “Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki miktarlar arasındaki ilişkilerin cebirsel temsillerini kullanma süreçleri nasıldır?” sorusuna yanıt aranmaktadır. Öğrencilerin miktarlar arasındaki ilişkilerin cebirsel temsillerini kullanma (C3) yetkinliğini sağlayıp sağlayamadıkları;

- Cebirsel temsiller oluşturma (C3a)

- Temsilleri yorumlama (C3b)
- Temsiller arası bağlantı kurma (C3b)
 - Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma
 - Çoklu temsillerin kullanışlılığı karşılaştırma
 - Bir denklemdeki parametrelerin diğer temsillerde nasıl görüldüğünü tanımlama

üç alt bileşenin ele alınmasıyla incelenmektedir. Temsiller arası bağlantı kurma bileşeni üç farklı kategoriden oluşmaktadır. Bu bileşen, probleme uygun olan kategorinin/kategorilerin incelenmesiyle ele alınmaktadır.

4.3.1. Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular

Ters Piramit probleminde gerçek yaşamdan alınmış ters piramit şeklinde duran bir bina ve bu binanın her katında yer alan oda sayılarındaki artışı temsil eden bir örüntü verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Cebirsel temsiller oluşturma: Örüntüye ilişkin bir tablo, grafik vb. temsil biçimlerini oluşturma ve örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade etme
- Temsilleri yorumlama: Cebirsel temsil biçimlerini (Tablo, grafik, vb.) ve cebirsel ifadeyi yorumlama
- Temsiller arası bağlantı kurma:
 - Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma: Cebirsel ifadeyi oluşturmak için temsil biçimlerinden (örüntü, tablo, grafik, vb.) yararlanma
 - Çoklu temsillerin kullanışlılığı karşılaştırma: Örüntünün artış miktarını ekleyerek bir sonraki adımı bulma ya da bu süreçte oluşturduğu temsil biçimlerini kullanma yöntemi yerine cebirsel ifadeden yararlanmanın daha kullanışlı olduğunu gösterme

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan tek öğrenci Y2, cebirsel temsil oluşturma sürecinde formal yapıda bir tablo oluşturmakta ve örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade etmektedir. Oluşturduğu tablo ve cebirsel ifade temsillerini kelimelerle yorumlayarak çözümlerini açıklamaktadır. Y2'nin oluşturduğu tabloyu, açıklamalarına gerekçe sunmak ve akıl yürütme süreçlerini karşı tarafa ifade edebilmek amacıyla oluşturduğu ve diğer

öğrencilere göre daha çok örüntünün kuralını bulma sürecine odaklandığı görülmektedir. Temsiller arası bağlantı kurma sürecinde öğrenci cebirsel ifadeyi oluşturmak için örüntü ve tablo temsillerinden yararlanmaktadır. Öğrencinin cebirsel ifadeyi kullanarak örüntünün diğer adımlarını bulma sürecinden anlaşılabileceği üzere çoklu temsillerin (örüntü, tablo, cebirsel ifade) kullanışlılığını karşılaştırarak uygun temsil ile çözümlerine devam ettiği görülmektedir. Y2'nin örüntünün kuralını veren doğru cebirsel ifadeyi oluşturma ve yorumlama süreci Şekil 56'da görülmektedir.

Kenar sayıları 2'şer arttığı için $2n$ demeliyim. Yani 2 kat 1.2'yi bulmaya çalışırsak
 Kısa kenara x uzun kenara y diyelim
 $(2x-1) \cdot (2y)$ 1. adım olduğu için 1 koyarsak $(2-1) \cdot (2) = 1 \cdot 2$ olur. Aslında x ve y demeye gerek
 yok, n diyelim.
 Bulduğum cebirsel ifade: $(2n-1) \cdot 2n$
 Kontrol etmek için diğer adımlara bakalım.

Şekil 56. Y2'nin cebirsel temsil (cebirsel ifade) oluşturma ve yorumlama süreci.

Y2, cebirsel ifade de $2n$ ifadesini kullanmasının nedeni olarak, dikdörtgenlerin kenar sayılarının ikişer ikişer artmasını gerekçe göstermektedir. Başlangıçta dikdörtgenin kısa kenarı için x , uzun kenarı için y parametrelerini kullansa da kenar uzunluklarını yalnız bir değişken kullanarak ifade edebileceğini fark etmekte ve bu durumu süreç içerisinde “Aslında x ve y demeye gerek yok, n diyelim” şeklinde yorumlamaktadır. Daha sonra örüntünün ilk adımından yararlanarak cebirsel ifadedeki diğer terimleri bulabildiğini açıklamaktadır. Bu açıklama ve yorumlar, Y2'nin temsilleri (cebirsel ifadeyi ve örüntüyü) oluşturabildiği, yorumlayabildiği ve bunlar arasında bağlantı kurabildiği anlamına gelmektedir.

C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, örüntünün adımlarıyla ilişkili informal ya da formal özellikte tablolar oluşturmaktadır. Y1 ve O1 örüntünün her bir adımına ilişkin oluşturdukları informal özellikteki tabloya yerleştirdikleri değerlere sık sık başvurma ve tabloya atıf yapma eğilimindedirler. Bu durum ile tabloları daha çok problemi anlamak ve keşfetmek için oluşturdukları anlaşılmaktadır. Y1'in oluşturduğu informal özellikteki tablo Şekil 57'de görülmektedir.

8. kat		58
7. kat		50
6. kat		42
5. kat		34
4. kat	56	26
3. kat	30	18
2. kat	10	10
1. kat	2	

Şekil 57. Y1'in cebirsel temsil (tablo) oluşturma süreci.

Y1'in tabloda miktarların artış miktarını örüntünün son adımına kadar belirtmesi ile örüntünün diğer adımlarına, bu artış miktarını ekleme yöntemini kullanarak ulaştığı anlaşılmaktadır. Tablonun informal özellikte olmasının sebebi, her iki sütununda yer alan değerlerin neyi ifade ettiğini belirtmemesidir. O1 de örüntünün artış miktarlarını eklediği benzer bir informal tablo oluşturma süreci içerisindeydi.

C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan bu öğrenciler aynı zamanda örüntünün kuralını cebirsel olarak doğru ifade edememektedir. Problemin çözümü ile ilişkili olmayan miktarlara odaklanmaları (C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamaları) cebirsel ifadeyi oluşturma süreçlerini olumsuz etkilemektedir. Bu öğrencilerin örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturamamaları, temsiller arası bağlantı kurma (C3b) bileşeni sağlayamadıklarını göstermektedir. Bu öğrencilerin temsil oluşturma süreçlerinde probleme yaklaşımlarının anlaşılması için yazılı çözümlerinden örnekler verilmektedir.

Y1'in problemin alt maddelerine doğru cevap vermesini sağlayan fakat örüntünün kuralı ile ilişkili olmayan artış miktarlarını ifade etmek için oluşturduğu cebirsel ifade Şekil 58'de görülmektedir.

iki fark arası 8 ilerdeği için $8x$ derim
iki fark: 10 olduğu için $8x+2$ olur.

1. fark = $8 \cdot 1 + 2 = 10$
2. fark = $8 \cdot 2 + 2 = 18$
3. fark = $8 \cdot 3 + 2 = 26$
4. fark = $8 \cdot 4 + 2 = 34$
5. fark = $8 \cdot 5 + 2 = 42$
6. fark = $8 \cdot 6 + 2 = 50$
7. fark = $8 \cdot 7 + 2 = 58$

Şekil 58. Y1'in artış miktarından yararlanarak oluşturduğu cebirsel ifade.

Y1 oluşturduğu cebirsel ifadenin, örüntünün artış miktarlarını temsil ettiğinin farkındadır. Bu farkındalığı çözümlerinde “1. fark, 2. fark, ...” şeklinde ilerlemesinden anlaşılmaktadır. Fakat öğrenci problemin çözümü ile ilgili miktarları keşfedemediği için kullandığı strateji ile doğru sonuçlara ulaşmayı tercih etmekte ve başka bir yol bulamadığı için çözümlerine bu strateji ile devam etmektedir.

Yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci olan O2 ise, örüntünün kuralını fark etse de bu kuralı cebirsel olarak ifade edememektedir. Bu öğrencinin sadece bir takım cebirsel ilişkileri ortaya koymakla sınırlı kaldığı bu süreci Şekil 59’da görülmektedir.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \times 2 \\ \hline 1. \text{ kat} = 2 \end{array} \text{ oda sayısı} > 4 \times \text{ fark} \\
 \begin{array}{c} \times 6 \\ \hline 2. \text{ kat} = 12 \end{array} \text{ oda sayısı} > 4 \times \text{ fark} \\
 \begin{array}{c} \times 10 \\ \hline 3. \text{ kat} = 30 \end{array} \text{ kat oda sayısı} > 4 \times \text{ fark} \\
 \begin{array}{c} \times 14 \\ \hline 4. \text{ kat} = 56 \end{array} \text{ oda sayısı}
 \end{array}$$

Şekil 59. O2’nin oluşturduğu cebirsel ilişkiler.

O2, problemin çözümü ile ilişkili olan dikdörtgenin kısa ve uzun kenar ilişkilerini ortaya koyarak C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamasına rağmen, bu ilişkileri cebirsel ifade oluşturma sürecinde kullanamamaktadır. Bu nedenle çözümlerinde farklı bakış açılarını ortaya koyarak ilerleme amacındadır. Fakat oluşturduğu cebirsel ilişkileri de anlamlı bir şekilde sonuçlandıramamaktadır.

C3 yetkinliğini sağlayamayan öğrencilerin ise cebirsel temsil biçimlerini (tablo, grafik vb.) ya da örüntünün kuralına ilişkin cebirsel ifadeyi oluşturamadıkları görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Ters Piramit problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C3 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar incelendiğinde Y1’in yetkinliği sağlama sürecinde bazı farklılıklar olmuştur. Y1’in yazılı çalışmalarında C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı, fakat mülakatlar sırasında bu yetkinliği güçlü düzeyde yansıtabildiği görülmektedir. Y1’in yazılı çalışmaları incelendiğinde örüntünün kuralını veren

cebirsel ifadeyi oluşturmadağı görülmekteydi. Bu nedenle temsiller arası bağlantı kuramadığı sonucuna varılmıştı. Yapılan örnek olay çalışmasında bu durumda bazı farklılıklar tespit edilmektedir. Y1 ile yapılan mülakat metinleri aşağıda verilmektedir.

31A: Örüntünün kuralını nasıl buldun? Açıklar mısın?

32Y1: Farklar 8 artış sayısı ile gittiği için $8x$ dedim. 10, 18 diye gittiği için birinci adım 10 dersek, $8x + 2$ olur, dedim. Yani sekizle ikiyi toplarsak... 7 fark için de gösterdim hatta.

33A: Tamam, oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

34Y1: (Soruyu tekrar gözden geçiriyor) Evet.

35A: Nasıl emin oluyorsun?

36Y1: Çünkü hepsine uyuyor kontrol edince.

37A: Daha önce oluşturduğun tablo ile bu cebirsel ifadeyi ilişkilendirebilir misin?

38Y1: (Düşünceli ve soruyu anlayamamış bir şekilde) Nasıl?

39A: Yani tablo ile cebirsel ifade arasında bir ilişki var mı? Nasıl bir ilişki var?

40Y1: Cebirsel ifadeyi bulurken farklardan gittim. Bunu tabloya bakarak yaptım. Mesela altıncı farka tabloda baktım 50 ve cebirsel ifadeye 6 yazdım, 50 cevabını buldum. Doğru mu yanlış mı onu görebildim bir de.

Y1, yazılı çözümlerinde örüntünün kuralına ilişkin cebirsel ifadeyi bulamadığı için örüntünün artış miktarına ilişkin bir cebirsel ifade oluşturmuştu. Oluşturduğu bu cebirsel ifadeyi nasıl oluşturduğunu mülakat sırasında açıklamaktadır (32Y1). Fakat bu cebirsel ifadenin doğru olup olmadığına ilişkin açıklamalar yapmaya çalıştığı sırada kendinden emin tavırlar takınmamaktadır. Mülakatın ilerleyen dakikalarında neden emin olmadığını açıklamaktadır.

47A: Sence burada cebirsel ifadeyi neden oluşturduk? Açıklar mısın?

48Y1: Normalde soruyu daha kolay bulmamızı sağlar. Daha ilerideki adımları saymadan bulmak için falan. Ama benim bulduğum pek öyle olmadı.

49A: Bunun sebebi ne olabilir?

50Y1: Ben cevapları böyle bulmuş olabilirim ama sonuçta başka bir yollar da olabilir. Benim bulduğumda cevabı bulmak için bir önceki adımı da bulmam gerekti hep. Sanırım aradaki farklara göre bulduğum için cebirsel ifade normal olmadı.

Y1 mülakat esnasında dikdörtgenin kısa ve uzun kenarları arasındaki ilişkiyi keşfetmesi üzerine yeniden cebirsel ifade oluşturma sürecine girdiği gözlemlenmektedir. Y1'in cebirsel ifadeyi, Y2 gibi dikdörtgenin alan formülünden yararlanarak oluşturabildiği ve çözümlerini bu cebirsel ifadeyi kullanarak yeniden düzenleyebildiği görülmektedir.

68Y1: Aslında cebirsel ifadeyi istediğim gibi bulamadım. Yoksa ilk başta alandan gitseydim cebirsel ifadeyi daha kolay bulurdum ve sorular daha kolay olurdu.

69A: Dediğin gibi alandan gitseydin cebirsel ifadeyi nasıl bulurdun? Gösterir misin?

70Y1: Tamam. Başta dediğim gibi: *(İşlemlerini yazıyor)*

$$\begin{array}{l}
 2 \cdot 1.2 \\
 2 \cdot 3.6 \\
 2 \cdot 5.6 \\
 2 \cdot 7.8 \\
 2 \cdot 9.6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 2x-1 \cdot 2x \\
 (2x-1) \cdot (2x) \\
 x=1 \quad (2 \cdot 1-1) \cdot (2 \cdot 1) = 1.2 \\
 x=2 \quad (2 \cdot 2-1) \cdot (2 \cdot 2) = 3.6 \\
 x=3 \quad (2 \cdot 3-1) \cdot (2 \cdot 3) = 5.6
 \end{array}$$

2. 20da

Şekil 60. Y1'in örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturma süreci.

71Y1: $(2x - 1) \cdot (2x)$ cebirsel ifadesini kullanırım. Bu şekilde oluyor.

Y1, başlangıçta artış miktarından yararlanarak oluşturduğu cebirsel ifadeyi eleştirdiği ve doğru bulmadığı açıklamalar yapmaktadır (68Y1). Öğrenci konuşma sırasında dikdörtgenin kenar uzunluklarının çarpımı ile cebirsel ifadeyi oluşturabileceğini belirtmektedir (70Y1). Şekil 60'ta dikdörtgenlerin kenarlarının ikiye ikiye artması sebebiyle $2x$ ifadesini yazdığını; kısa kenarların 1, 3, 5, ... şeklinde ilerlemesi sebebiyle bunların ardışık tek sayılar olduğu için $(2x - 1)$ şeklinde yazabileceğini ifade etmektedir. Bu şekilde çözümlerine devam eden öğrenci yazılı çözümlerinde yansıtamadığı C3 yetkinliğini oldukça güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan Y2 ise, yazılı çözümlerindeki tüm işlem adımlarını ikna edici açıklamalar eşliğinde anlatmaktadır. Bu öğrencinin yazılı çözümleri ile yaptığı açıklamalar tutarlı ve doğrudur. Bununla birlikte yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan O1, yazılı çözümlerinde cebirsel temsil biçimlerinden tablo temsilini oluşturabilmekteydi. Fakat bu öğrencinin problemin çözümü ile ilişkisi olmayan cebirsel ifade oluşturma sürecinde olduğu görülmekteydi. Öğrencinin cebirsel ifadeyi oluşturamadığı yapılan mülakatlarda da gözlemlenmektedir.

- 21A:** Peki, 1. Adımdaki oda sayısına neden x dedin?
- 22O1:** (*Düşünüyor*) Çünkü artışı x deyince görebiliriz. 10,18 şeklinde 8 olarak arttığını görmek için.
- 23A:** Örüntünün kuralını nasıl buldun? Açıklar mısın?
- 24O1:** İlk oda sayısına artışı ekleriz, 8 ekleriz yani. Bir de baştaki fark da eklenecek. $a + 8 + x$ deriz.
- 25A:** Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 26O1:** Tam doğru olmayabilir.
- 27A:** Neden?
- 28O1:** Bilmiyorum.
- 29A:** Oluşturduğun bu cebirsel ifadede a ne anlama geliyor? Açıklar mısın?
- 30O1:** Şimdi tam hatırlayamadım neden a demiştim. (*Düşünüyor*) Bilmiyorum.

O1'in açıklamaları cebirsel ifadeyi nasıl oluşturacağına ilişkin fikirlerinden emin olmadığını (26O1) ve yanlış ilerlediğinin farkında olduğunu göstermektedir. O1 ile yapılan mülakatlar sonucunda, öğrencinin yazılı çözümlerinde tespit edilen yetkinliği sağlama düzeyinde bir farklılık olmadığı görülmektedir.

O2'nin yazılı çözümlerinde ise örüntünün ilk dört adımını dikdörtgenin alan formülünden yararlanarak ifade edebildiği, fakat bu ilişkileri cebirsel ifade oluşturma sürecinde kullanamadığı görülmekteydi. Çözümlerinde bazı farklı cebirsel ilişkilere yer veren öğrenci ile yapılan mülakatlarda, daha önce yanıtlayamadığı problemin alt maddelerine doğru yanıtlar verdiği gözlemlenmektedir.

- 18O2:** Örüntü kenar sayılarına göre değişiyor. Birinci adımda kenarlar 1 ve 2, ikinci adımda 3 ve 4... Böyle gidiyor hocam. Bunları çarparsak oda sayıları çıkıyor. Böyle bir kural buldum.
- 19A:** Cebirsel ifade oluşturma istemişim bu soruda. Bulduğun bu kuraldan yararlanarak bir cebirsel ifade oluşturabilir misin?
- 20O2:** Evet. Ben burada cebirsel olarak şöyle dedim hocam: Birinci kat 2 oda yani iki katı. İkinci kat 12 oda yani 6 katı. Üçüncü kat 30 oda yani 10 katı. $4x$ fark var yani.

O2, açıklamalarında oluşturduğu cebirsel ilişkileri kendinden emin tavırlar takınarak açıklamaktadır. Bu durum araştırmacının dikkatini çekmektedir. Öğrencinin oluşturduğu cebirsel ilişkileri yorumlamasının önemli olacağı düşünülmektedir.

25A: Burada 4x fark derken hangi sayılar arasında 4x fark var?

26O2: Yani şöyle hocam: 2x, 6x, 10x diye gidiyor yani 4x artarak.

Öğrencinin bu ilişkiyi kullanarak bazı sonuçlara ulaşp ulaşamayacağı merak konusu olduğundan bu stratejisine devam etmesi istenmektedir.

39A: 132 odanın bulunacağı katın kaçınıcı kat olduğunu sormuşum fakat yanıt vermemişsin? Neden?

40O2: ... Bilmiyorum, onu yapamadım hocam.

41A: Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kullanarak bu sorunun cevabını bulabilir misin?

42O2: 4x olarak ilerliyor... (Çözümlerini kağıda yazıyor) Evet yaptım. Altıncı kat oluyor.

$$\begin{aligned} 4.kat &= 56 \text{ san: } 14 \times \\ 5.kat &= 68 \text{ san: } 18.5 = 80 \\ 6.kat &= 72 \text{ san: } 22.6 = 132 \end{aligned}$$

Şekil 61. Y1'in örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturma süreci.

43A: İşlemlerini kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

44O2: Evet hocam eminim.

45A: En üst kattaki oda sayısını bulmamışsın. Tekrar düşünmek ister misin?

46O2: Evet hocam... Sekizinci katı soruyor hocam... (düşünüyor) O zaman 22 nin 4 fazlası 26. 4 fazlası 30. Yani 8 çarpı 30 hocam. Sonuç 240 oluyor... 240 oda var.

O2, örüntünün artış miktarını cebirsel ilişkiler kullanarak ifade etmektedir (26O2). Şekil 61'de öğrenci örüntünün adım sayısı ile örüntü miktarları arasında bir ilişki kurmaktadır. Bu ilişki 2 kat, 6 kat, 10 kat, 14 kat, ... şeklinde 4 kat fark ile ilerlediği için adım sayısı ile oluşturduğu bu katları çarptığında doğru sonuçlara ulaşmaktadır (46O2). Örnek olay çalışmasında problemin doğru çözümlerine ulaştığı için O2'nin yetkinliği sağlama düzeyinde bir farklılık gösterdiği düşünülebilir. Ama ifade ettiği cebirsel ilişkileri kullanabilmesi için her zaman bir önceki adımın kaç kat olduğunu bilmesi gerekmektedir (46O2). Tüm bunlar göz önünde bulundurulduğunda, O2'nin örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeye çok yaklaşmış olmasına rağmen cebirsel ifadeyi oluşturamadığı için yetkinliği hala zayıf düzeyde sağladığı söylenebilir. Öğrencinin düşünme süreçleri hakkında ise cebirsel anlayışının bu probleme ilişkin örnek olay çalışmasında geliştiği görülmektedir.

D1 ve D2 ise örnek olay çalışmalarında yetkinliği sağladıklarına ilişkin herhangi bir açıklamaya yer vermemektedir.

Ters Piramit Probleminde C3 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 27’de görülmektedir.

Tablo 27

Ters Piramit probleminde C3 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Dikdörtgenlerin kenar uzunlukları 2 artarak gittiği için $2n$ dedim. İki kenar için ayrı ayrı yapmamız gerekiyordu. Kısa kenarlar 1,3,5 diye gidiyor ve o yüzden $(2n - 1)$ olur. Diğer kenarlar da 2, 4, 6 diye gidiyor yani direk $2n$ olduğu belli. Bunları çarpmamız gerektiği için de $(2n - 1) \times 2n$ buldum.” (Y2)	Y1, Y2
C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Örüntünün adımlarına bağlı olarak odaların artışını gösteren bir tablo oluşturdum. Tabloda oda sayılarını gösterdim. Örüntünün diğer adımlarını tablodan yararlanarak buldum.” (O1)	O1, O2
C3 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“Bilmiyorum... Tablo, grafik nasıl çiziyorduk hatırlamıyorum. Cebirsel ifadeye örnek olarak mesela x olabilir.” (D1)	D1, D2

C3 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerden Y1, örnek olay çalışmasında çözüm stratejisini değiştirdiği için Y2 gibi yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir. Öğrenci örnek olay çalışması sırasında, dikdörtgenin kenar uzunluklarından yararlanmayı tercih ederek örüntünün kuralını veren denklemi doğru yazmıştır.

4.3.2. Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular

Harflerin Oyunu probleminde alfabedeki harflerin belli bir kurala göre diziliminden oluşan bir örüntü ve örüntünün ilk beş adımı verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Cebirsel temsiller oluşturma: Örüntüye ilişkin bir tablo, grafik vb. temsil biçimlerini oluşturma ve örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade etme
- Temsilleri yorumlama: Örüntüye ilişkin cebirsel temsil biçimlerini (Tablo, grafik, vb.) ve cebirsel ifadeyi yorumlama
- Temsiller arası bağlantı kurma:
 - Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma: Cebirsel ifadeyi oluşturmak için temsil biçimlerinden (örüntü, tablo, grafik, vb.) yararlanma
 - Çoklu temsillerin kullanışlılığı karşılaştırma: Örüntünün artış miktarını ekleyerek bir sonraki adımı bulma ya da bu süreçte oluşturduğu temsil biçimlerini kullanma yöntemleri yerine cebirsel ifadeden yararlanmanın daha kullanışlı olduğunu gösterme

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, yetkinliğe ilişkin tüm alt bileşenleri sağlamaktadır. Öğrenciler cebirsel temsil biçimlerinden tablo ile ilişkileri ifade etmeyi tercih etmektedir. Bu öğrencilerden Y1'in oluşturduğu tablo formal, Y2'nin oluşturduğu tablo ise informal özelliktedir. Öğrencilerin örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi doğru bir şekilde oluşturdukları ve tüm cebirsel temsilleri yorumladıkları görülmektedir. Y1'in oluşturduğu formal özellikteki tablo Şekil 62'de görülmektedir.

b) 4.ter setinde 1'den 29'a tüm numara verip yordadığımızda,
1,5,9,13,17,21,25,29 setinde örüntü oluşur.

c)

Adım Sayısı	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Harf Numarası	1	5	9	13	17	21	25	29

u u

Cebirsel ifade: $4x-3$

Şekil 62. Y1'in temsilleri oluşturma, yorumlama ve bağlantı kurma süreci.

Y1 verilen örüntüden yararlanarak örüntüdeki harflerin temsil ettiği sayıları tabloda göstermektedir. Oluşturduğu tabloda adım sayısı ve harf numarasını belirttiği için tablonun formal özellikte olduğu görülmektedir. Tabloda her adıma karşılık gelen harfin numarasını yazdığını ve bunların dörder dörder ilerlediğini oklarla tekrar belirtmektedir. Bu tablodan yararlanarak cebirsel ifadede değişkenin katsayısına dört yazmaktadır. Bu ifadeleri ile temsilleri yorumlayabildiğini ve temsiller arasında bağlantı kurabildiğini kanıtlamaktadır. Y2'nin oluşturduğu informal özellikteki tablo Şekil 63'te görülmektedir.

a) A söylenmiş ardından 4 harf sonra D harfi söylenmiş tekrar 4 harften sonra G gelmiştir ve öyle devam etmiştir.

1. Adım	2. Adım	3. Adım	4. Adım	5. Adım	6. Adım	7. Adım	8. Adım	9. Adım	10. Adım
A	D	G	J	U	R	L	Z	C	G

b) 3.harf 5.harf 9.harf 13.harf 17.harf 21.harf 25.harf 29.harf 33.harf 37.harf

Örüntüyü sayılarla yazabiliriz. Dörder ilerliyor.

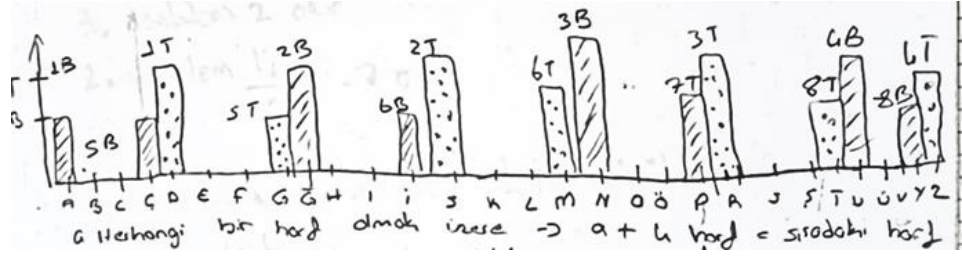
Bulduğum cebirsel ifade: $4x-3$

Şekil 63. Y2'nin temsilleri oluşturma, yorumlama ve bağlantı kurma süreci.

Y2 verilen örüntüdeki harfleri tabloda göstermektedir. Oluşturduğu tablonun informal özellikte olmasının sebebi adım sayısını belirtmesi fakat harf numaralarını belirtmemesidir. Tabloda harflerin dörder dörder ilerlediğini oklarla gösteren öğrenci harf numaralarını tablonun altında belirtmektedir. Öğrenci bu tablodan yararlanarak cebirsel ifadeyi oluşturmaktadır.

C3 yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, örüntü ve tablo temsillerini kullanarak cebirsel ifadeyi oluşturarak bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma yetkinliği göstermektedir. Öğrencilerin cebirsel ifadeyi kullanarak örüntünün diğer adımlarını bulma sürecinden anlaşılacağı üzere çoklu temsillerin (örüntü, tablo, cebirsel ifade) kullanışlılığını karşılaştırarak uygun temsil ile çözümlerine devam ettiği görülmektedir. Bu öğrencilerin temsilleri yorumlayabildiği ve temsiller arası bağlantı kurabildiği görülmektedir.

C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, informal özellikte cebirsel temsil biçimleri kullanmaktadır. O1 problemle ilgili informal özellikte bir grafik oluşturma çabası göstermektedir. Bu problemin doğası grafik oluşturmaya uygun değildir. O1'in oluşturduğu ve grafik olduğunu belirttiği fakat daha çok problemde verilen bilgileri organize ettiği grafik görünümlü şekil/şema, problemi doğru yanıtlamasında etkili olmuştur. O1'in cebirsel temsil oluşturma sürecinde problemde verilen bilgileri organize etmek için kullandığı bu temsil Şekil 64'te görülmektedir.



Şekil 64. O1'in cebirsel temsil oluşturma süreci.

O1'in oluşturduğu şekil/şema, grafik olarak nitelendirilemese de akıl yürütme sürecine ilişkin önemli bulgular sunmaktadır. Öğrenci problemi çözme sürecinde gösterdiği bu çabası ile belirli bir cebirsel anlayışa sahip olduğunu fakat cebir bilgisinin yeterli olamadığı bazı durumlarda kendine özgü stratejiler ortaya koyabildiğini göstermektedir. Bu öğrencinin cebir bilgisinde yetersizlikler olduğu fakat bunun geliştirilebileceği bu problemdeki cebirsel ifade oluşturma sürecinden anlaşılmaktadır. O1 cebirsel ifadeyi $a + 4$ olarak yazarken *a herhangi bir harf olmak üzere* şeklinde a sembolünü tanımlayarak $a + 4$ ifadesinin bir sonraki harfi verdiğini belirtmektedir. Bu durum öğrencinin problemi çözme sürecinde ne yaptığının farkında olduğunu göstermektedir.

O2 ise informal özellikte oluşturduğu tablodan yararlanarak örüntünün adımları arasındaki artış miktarını bir sonraki adıma ekleme yöntemini kullanmaktadır. Örüntünün diğer adımlarını bu şekilde sayarak bulabildiği için örüntünün kuralını veren bir cebirsel ifade oluşturmamaktadır. Yetkinliği zayıf düzeyde sağlayan bu öğrenciler, verilen örüntü ile oluşturdukları cebirsel temsilleri yorumlamaktadır. Örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturamadıkları için bu öğrencilerin temsiller arasında etkili bir şekilde bağlantı kuramadıkları gözlemlenmektedir.

C3 yetkinliğini sağlayamayan öğrenciler ise yazılı çözümlerinde herhangi bir temsil oluşturmamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Harflerin Oyunu problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C3 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılığa rastlanmamıştır. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da

benzer olarak açıkladıkları görülmektedir. Y2'nin temsil oluşturma, yorumlama ve temsiller arasında bağlantı kurma sürecine ilişkin açıklamaları aşağıda verilmektedir.

- 11A:** Tabloyu nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?
- 12Y2:** Birinci harf A olduğu için birinci adım dedim. Birinci adım A, ikinci adım D diye ilerleyerek tabloyu çizdim.
- 13A:** Tabloyu kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?
- 14Y2:** Evet, eminim.
- 15A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 16Y2:** Çünkü böyle sorularda tablo yaparken adım sayısını yazıyoruz. Bende öyle yaptım.
- 17A:** Oluşturduğun tabloyu inceleyerek adımlar arasındaki değişim hakkında tekrar konuşalım, ne söyleyebilirsin?
- 18Y2:** 4 artarak gittiği için alfabeden harfleri yazdım. Sırayı dikkat ederek.
- 19A:** Cebirsel ifadeyi oluştururken gösterimleri yani tabloyu mesela nasıl kullandın? Açıklar mısın?
- 20Y2:** 4 harf olarak ilerlediği için $4x$ dedim. Birinci adımda 1 çıkması gerekiyor. O yüzden 3 çıkarttım. $4x - 3$ yani. Tabloyu kullanmadım.
- 21A:** Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 22Y2:** Evet, eminim.
- 23A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 24Y2:** Mesela ikinci adımı bulmak için x 'e 2 verince 5 çıkıyor yani beşinci harf D harfi. x 'e 3 verdiğimizde 9 yani Ğ harfi çıkıyor. Böylece doğru olduğunu anlarım.

Y2, temsil oluşturma sürecinde tablo ve cebirsel ifade oluşturmaktadır. Y2'nin bu temsilleri doğru yorumladığı görülmektedir (12Y2, 20Y2, 24Y2). Öğrenci cebirsel ifadeyi oluştururken tablodan yararlanmadığını belirtmektedir (20Y2). Y2 cebirsel ifadeyi oluştururken örüntüden yararlandığını ve örüntünün adımlarının alfabedeki kaçınıcı harfe karşılık geldiğine dikkat ettiğini açıklamaktadır (24Y2). Y2 bu açıklamaları ile temsiller arasında nasıl bağlantı kurduğunu göstermektedir. Dolayısıyla öğrenci alt bileşenlerin tümünü sağladığı için C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

- 9A:** Tabloyu nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?
- 10O2:** Harflere karşılık gelen sayıları tablo şeklinde gösterdim.
- 11A:** Tabloyu kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?

- 12O2:** Evet hocam.
- 13A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 14O2:** Sayılar karışık olsaydı emin olmazdım. Ama hep aynı 4 artış ile gidiyor.
- 15A:** Oluşturduğun tabloyu inceleyerek adımlar arasındaki değişim hakkında tekrar konuşalım, ne söyleyebilirsin?
- 16O2:** Adım sayısını yazmamışım tabloda. (*düşünüyor*) Ama birinci adım 1, ikinci adım 5, üçüncü adım 9 diye yazabilirdik tabloya. Adımlar arası artış miktarı 4 yani.
- 17A:** Oluşturduğun tabloyu kullanarak örüntünün kuralını cebirsel olarak yazmanı istemiştım. Ama yazmamışsın. Bu konuda ne düşünüyorsun?
- 18O2:** $n = + 4$ şeklinde yazdım. Yani sonraki yeni harfi bulmak için bir önceki harfe 4 ekleyerek.
- 19A:** Oluşturduğun ifade bir cebirsel ifade mi?
- 20O2:** Evet.
- 21A:** Bu oluşturduğun ifadede n ne anlama gelmektedir?
- 22O2:** Bir önceki sayıya n dedim. $n + 4$ bize sıradaki sayıyı veriyor.
- 23A:** Bu durumda oluşturduğun cebirsel ifadeyi tekrar söyler misin?
- 24O2:** (*çözümlerini gözden geçiriyor*) n artı 4. (*yanlış ifade ettiğini fark ediyor*) Hım hocam n eşittir demişim eşittir olmayacak.

O1, yazılı çözümlerinde oluşturduğu tabloyu yorumlarken adım sayılarını belirtmediğini fark etmektedir (16O2). Adım sayılarını belirtmediği için öğrencinin oluşturduğu tablonun informal özellikte olduğu yazılı çözümleri incelenirken belirtilmekteydi. Öğrencinin örüntünün adım sayılarını mülakat sırasında belirtmesi, istediğinde formal özellikte tablo oluşturabileceğini göstermektedir. Yine de öğrenci oluşturduğu tabloyu doğru yorumlamaktadır (16O2). O2 örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturduğunu belirtmektedir (18O2). Fakat oluşturduğu bu ifade ($n = + 4$) doğru değildir. Öğrenci daha sonra oluşturduğu cebirsel ifadeyi doğru yazmadığını $n + 4$ şeklinde olması gerektiğini ifade etmektedir (24O2). O2'nin bu açıklamalarıyla örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi doğru oluşturamadığı ve temsiller arasında doğru bağlantıyı kuramadığı görülmektedir. Bu nedenle öğrenci yazılı çözümlerinde olduğu gibi C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamaktadır.

- 13A:** Tabloyu nasıl oluşturduğunu anlatır mısın?
- 14D2:** Burçin'in ve Timuçin'in söylediği harfleri tabloda gösterdim.
- 15A:** Tabloyu kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?
- 16D2:** Evet.

17A: Nasıl emin oluyorsun?

18D2: Soruda verilen alfabeleri yerleştirdim zaten. (*harfleri kastediyor*)

19A: Neden Burçin 3 harf söylemiş ve Timuçin de 2 harf söylemiş? Oyun kuralları nasıldı?

20D2: Sırayla harf söylüyor yani önce Burçin başladığı için o daha fazla söylemiş.

21A: Oluşturduğun tabloyu inceleyerek adımlar arasındaki değişim hakkında tekrar konuşalım, ne söyleyebilirsin?

22D2: (*cevap vermiyor*)

D2 yazılı çözümlerinde tablo oluşturma eğilimi göstermekteydi. Fakat oluşturduğu tablo doğru değildir. Öğrenci açıklamalarında da tabloyu doğru yorumlayamamaktadır (20D2). C1 yetkinliğine ilişkin bulgulara öğrencinin çözümleri incelenirken bağlamı anlamlandırma bileşenini sağlayamadığı görülmekteydi. Bu durum hem C2 yetkinliğini hem de C3 yetkinliğini etkilemektedir. Öğrenci problem bağlamını anlayamadığı için örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi de doğru oluşturamamaktadır.

D1 ve D2 ise örnek olay çalışmalarında yetkinliği sağladıklarına ilişkin herhangi bir açıklamaya yer vermemektedir.

Harflerin Oyunu Probleminde C3 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 28’de görülmektedir.

Tablo 28

Harflerin Oyunu probleminde C3 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Birinci harf A olduğu için birinci adım dedim. Birinci adım A, ikinci adım D diye ilerleyerek tabloyu çizdim. Cebirsel ifadeyi tabloya bakarak yapmak daha kolay, o yüzden 4 harf ilerliyor. 4x dedim. Tabloya baktığımda 1. adımda sonuç 1 olacak. 4x – 3 demem gerekir, böyle düşündüm.” (Y1)	Y1, Y2

C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Grafikte önce tüm harfleri gösteriyoruz. Sonra sırasıyla Burçin’in ilk A söylediğini sonra Timuçin’in D söylediği için bunları gösteriyoruz. Cebirsel ifadeyi yazarken a herhangi bir harf ve 4 harf sonrasını söyleriz. O nedenle $a + 4$ deriz.” (O1)	O1, O2
C3 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“Örüntünün nasıl ilerlediğini sorduğu için. x dedim çünkü hangi sayı bilmiyoruz.” (D2)	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.3.3. “n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde $n + n$ ve $n + 6$ cebirsel ifadelerinden hangisinin daha büyük olduğunu karşılaştırırken öğrencilerin değişkene yükledikleri anlamların irdelenmesi amaçlanmıştır.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Cebirsel temsiller oluşturma: Değişkene farklı değerler verilmesi sonucu iki cebirsel ifade arasındaki ilişkileri ifade eden $n + n < n + 6$, $n + n = n + 6$ ve $n + n > n + 6$ eşitsizliklerini oluşturma
- Temsilleri yorumlama: Oluşturulan eşitsizlikleri yorumlama
- Temsiller arası bağlantı kurma:
 - Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma: Problemin sonuçlarını ifade eden eşitsizlikleri oluşturmak için $n < 6$, $n = 6$ ve $n > 6$ durumlarını kullanma

Bu yetkinlik aynı zamanda problemi çözmeye görevlerini yerine getirmede kolaylık sağlaması için farklı cebirsel gösterimleri oluşturabilmeyi de gerektirir. Dolayısıyla öğrencilerin cebirsel ifadeleri karşılaştırırken eşitlik, denklem ya da eşitsizlik gibi cebirsel gösterimleri kullanması bu yetkinliği sağladıklarını göstermektedir.

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, $n < 6$, $n = 6$ ve $n > 6$ durumlarında hangi cebirsel ifadenin büyük olacağını sözel açıklamalarla yorumlayarak ve matematiksel argümantasyonlar oluşturarak göstermektedir. Y2'nin hangi cebirsel ifadenin hangi durumlarda büyük olacağına ilişkin yorumları Şekil 65'te görülmektedir.

$b+b=12$ $b+b=12$
 n 6 olduğunda $n+n$ ve $n+b$ eşit
 n 6'dan büyükse $n+b$ büyük, n 6'dan küçükse $n+n$ büyüktür.
 Bundan dolayı hangisi daha büyük bilemem.

Şekil 65. Y2'nin cebirsel temsil oluşturma süreci.

Y2 değişkene 6'dan büyük ya da küçük değerler verildiğinde oluşan durumları sözel ifadeler kullanarak doğru bir şekilde açıklamaktadır. Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan diğer öğrenciler de benzer şekilde sözel açıklamalar ile aynı durumları açıklamaktadır. Bu öğrencilerden yalnızca O2 bu durumları matematiksel argümantasyonlar oluşturarak ifade etmektedir. O2'nin $n + n$ ve $n + 6$ ifadelerini karşılaştırırken kullandığı cebirsel gösterimler Şekil 66'da görülmektedir.

0 yüzden $n+n < n+b$ dur
 n sayısı $n > 6$ ise $n+n > n+b$ dur

Şekil 66. O2'nin cebirsel temsil (cebirsel ifade) oluşturma süreci.

O2, $n = 6$ durumuna değinmeden $n < 6$ ve $n > 6$ durumlarına ilişkin yorumlara yer vermektedir. Bu iki durumda oluşabilecek eşitsizlikleri yazması oluşturduğu farklı temsiller arasında bağlantı kurabilmesi anlamına gelmektedir. Dolayısıyla bu öğrencinin bu yetkinliği sağladığı fakat bir durumu ($n = 6$) gözden kaçırdığı söylenebilir. O1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci Şekil 67'de görülmektedir.

Hangisi daha büyüktür, $n+n$ mi?, $n+6$ mi?
 Cevap: Eğer n sayısı $\rightarrow n < 6$ olursa 2. denklemin büyük olur
 Eğer n sayısı $n=6$ olursa 1. ve 2. denklemin eşit olur. Eğer n sayısı $\rightarrow$
 $n > 6$ olursa 1. denklemin büyük olur

Şekil 67. O1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.

O1, $n < 6$ ise $n + 6$ ifadesinin büyük olduğunu; $n = 6$ ise iki ifadenin birbirine eşit olduğunu ve $n > 6$ ise $n + n$ ifadesinin daha büyük olduğunu belirtmektedir. Bu açıklamaları O1'in temsilleri yorumlayabildiğini ve aralarında bağlantı kurabildiğini göstermektedir.

C3 yetkinliğini sağlayamayan öğrencilerin ise temsil oluşturmaya ilişkin çözümlerine rastlanamamaktadır. Dolayısıyla bu öğrenciler hakkında C3 yetkinliğini sağlayamadıkları yorumu yapılmaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

“n” Neyi İfade Ediyor? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C3 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılığa rastlanmamıştır. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir. Y1'in C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını gösteren açıklamaları aşağıda verilmektedir.

26A: $n + n$ değeri mi daha büyük? $n + 6$ değeri mi daha büyük? Bu konuda nasıl bir sonuca ulaştığını bize açıkla mısın?

27Y1: 3 farklı sonuca ulaştım. Birincisi n 6'dan küçükse $n + 6$ büyük. İkincisi n 6'ya eşitse $n + n$ ile $n + 6$ eşit. n 6'dan büyükse $n + n$ büyük. Bunu verdiğim değerlerden sonra fark ettim.

28A: Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin?

29Y1: Evet.

Y1, problemin çözümü için kritik değer olan 6 değerini kullanarak $n + n$ ve $n + 6$ cebirsel ifadelerini nasıl karşılaştırdığını açıklamaktadır. Y1, iki cebirsel ifadede hangisinin daha büyük olacağını ya da bu iki cebirsel ifadenin hangi durumlarda birbirine eşit olduğunu açıklayabildiği için öğrenci temsilleri yorumlama bileşenini sağlamaktadır. Öğrenci bu durumları değişkene verilen değerler sonucunda değerlendirdiği ve iki cebirsel ifade arasındaki ilişkiyi açıklayabildiği için temsiller arası bağlantı kurma bileşenini sağladığını göstermektedir(27Y1). Dolayısıyla Y1, C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

32A: Bu yanıtı vermedeki kritik noktalar nelerdi?

33Y1: n 'e 6 verince her şey anlaşıldı. Bence 6 değeri kritik.

- 34A:** Bu sonuca ulaşırken izlediğin yollarda karşılaştığın zorluklar nelerdi?
- 35Y1:** Nerden başlayacağımı bilemedim başta. Sonra 1 vermek geldi aklıma. Sonra ne kadar devam edecek bilmiyordum. Yanlış diye düşündüm. Sonra da farkların azaldığını gördüm.
- 36A:** Birkaç defa bundan bahsettin: “Farkların azalmaya başlaması”. Bunu söylerken ne demek istiyorsun?
- 37Y1:** $n + n$ ve $n + 6$ birbirine yaklaşıyor. Yani $n = 1$ için ikisi arasındaki fark 5, $n = 2$ olduğunda 4, $n = 3$ olduğunda 3. Demek ki sonra 2 sonra 1 olacak ve en son eşit olacak. Eşit olduktan sonra da sonsuza kadar artarak gidecek, bu sefer tam tersi.

Ayrıca Y1 iki cebirsel ifadeyi (temsilleri) karşılaştırırken dikkat ettiği durumları açıklamaktadır (37Y1). Bu sırada cebirsel ifadelerin sonuçlarının sistematik olarak verdiği değerlere göre nasıl değiştiğini ifade etmektedir (37Y1). Bu durum öğrencinin temsilleri yorumlayabildiğini göstermektedir.

Yazılı çözümlerinde C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerden Y2, açıklamalarında Y1 ile benzer durumlara değinmektedir.

- 19A:** $n + n$ değeri mi daha büyük? $n + 6$ değeri mi daha büyük? Bu konuda nasıl bir sonuca ulaştığını bize açıkla mısın?
- 20Y2:** Kesin bir sonuç yok. Bu soru kesin sonucu olmayan sorulardan yani bizim yorumumuza bağlı bir şey.
- 21A:** Peki, senin bu soruyla ilgili bir yorumun var mı? Açıklayabilir misin?
- 22Y2:** Tabi. Bence n 'e verdiğimiz değerlere göre sonuç değişir. Mesela n 'e 6'dan küçük değerler verince $n + 6$ hep daha büyük çıkıyor. Eksi sayılar bile. $n = 6$ olunca zaten eşit çıkıyor. n eğer 6'dan büyükse o zaman da değişiyor. Bu sefer $n + n$ hep daha büyük oluyor. Yani hep farklı çıkıyor. Ama en azından bir kural var. Her şey 6'ya göre değişiyor.

Y2, başlangıçta $n + n$ ve $n + 6$ 'dan hangisinin daha büyük olacağına ilişkin kesin bir sonucun olmadığını belirtmektedir (20Y2). Fakat daha sonra Y1 ile benzer şekilde temsilleri yorumlamakta ve iki cebirsel ifade arasındaki ilişkiyi net bir şekilde açıklayarak temsiller arasında bağlantı kurabildiğini göstermektedir (22Y2). Dolayısıyla Y2 de yazılı çözümlerinde olduğu gibi açıklamalarında C3 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıttığını göstermektedir.

C3 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan O2'nin açıklamalarında da kesin sonuçlara değinmediği görülmektedir.

- 23A:** $n + n$ değeri mi daha büyük? $n + 6$ değeri mi daha büyük? Bu konuda nasıl bir sonuca ulaştığını bize açıkla mısın?
- 24O2:** n değerine 6'dan küçük değer verince farklı, büyük değer verince farklı çıkıyor. Yani değişken bir sonuç hocam.
- 25A:** Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin? Ya da düşüncelerin doğru mu sence?
- 26O2:** Tam bir yanıt olmadı... Ama ben böyle düşündüm. Bence doğru.
- 27A:** Bu yanıtı vermendeki kritik noktalar nelerdi?
- 28O2:** (cevap vermiyor)
- 29A:** Yaptığın işlemleri tekrar gözden geçir bakalım. Bu işlemlerini nasıl açıklarsın? Hangi ifadenin daha büyük olduğunu söyleyebilir misin?
- 30O2:** (düşünüyor) Söyleyemem.
- 31A:** Bu sonuca ulaşırken izlediğin yollarda karşılaştığın zorluklar nelerdi?
- 32O2:** Hocam n değerinin kaç olacağını soruda vermediği için bulamadım. Bu zor.

O2, değişkene farklı değerler verilmesi durumunda farklı durumların oluşacağını belirterek miktarlar arasındaki ilişkiyi ifade edebildiğini gösterse de kesin bir yorum yapamamaktadır (24O2). Bu durum iki cebirsel ifadeyi karşılaştıramadığı için temsilleri yorumlayamadığını ve temsiller arasında bağlantı kuramadığını göstermektedir. Öğrenci problemin çözümü için n değerinin kaç olduğunu bilmesi gerektiğini düşünmektedir (32O2).

D1 ve D2 ise örnek olay çalışmalarında yetkinliği sağladıklarına ilişkin herhangi bir açıklamaya yer vermemektedir.

“n” Neyi İfade Ediyor? Probleminde C3 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 29'da görülmektedir.

Tablo 29

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde C3 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“3 farklı sonuca ulaştım. Birincisi n , 6’dan küçükse $n + 6$ büyük. İkincisi n , 6’ya eşitse $n + n$ ile $n + 6$ eşit. n , 6’dan büyükse $n + n$ büyük. Bunu verdiğim değerlerden sonra fark ettim.” (Y1)	Y1, Y2, O1
C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“ n değerine 6’dan küçük değer verince farklı, büyük değer verince farklı çıkıyor. Yani değişken bir sonuç.” (O2)	O2
C3 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“... Kesin bir cevabı yok galiba. Bence hangi değeri verirsen sonuç ona göre değişiyor.” (D1)	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.3.4. Teraziler Nasıl Denge? Problemine İlişkin Bulgular

Teraziler Nasıl Denge? probleminde öğrencilere denge halinde 3 farklı terazi verilmiştir. Terazilerde kare, daire ve üçgen şekilleri ile temsil edilmiş ağırlıkların birbirleriyle nasıl ilişkili olduğu gösterilmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Cebirsel temsiller oluşturma: Terazilerdeki ilişkileri gösteren denklemler oluşturma
- Temsilleri yorumlama: Denklemleri ve terazileri yorumlama
- Temsiller arası bağlantı kurma:
 - Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma: Cebirsel ifadeyi oluşturmak için terazilerden yararlanma
 - Çoklu temsillerin kullanışlılığı karşılaştırma: Terazilerdeki şekillere değer verme gibi yöntemler yerine denklemlerden yararlanarak sonuçlara ulaşma

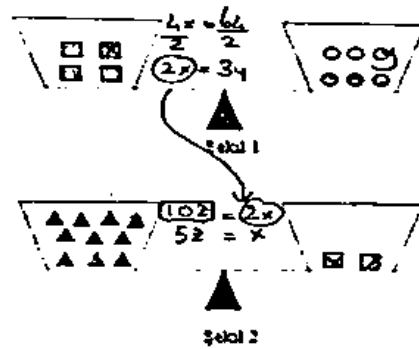
Ayrıca öğrencilerin denklemlerdeki parametreleri diğer temsillerde nasıl görüldüğüne ilişkin tanımlamalarının ortaya çıkabilmesi için problemdeki dördüncü şekilde kefeleri boş olan bir terazi verilmiştir. Burada denklemden yola çıkarak denge halinde yeni bir terazi oluşturmaları gerekmektedir.

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, çözüme ulaşmak için her terazinin denge halinden yararlanarak doğru denklemler oluşturmaktadır. Öğrencilerden Y1, Y2 ve O2 denklemleri yazarken kare, daire ve üçgen değişkenleri için x, y ve z şeklinde harfli semboller kullanırken, O1 kare, daire ve üçgen şekillerini kullanmaktadır. D1 sembol kullanmak yerine “4 kare = 6 yuvarlak” gibi ifadeler kullanarak ilişkileri denklem formatında temsil etmektedir. Y1’in temsil oluşturma süreci Şekil 68’de görülmektedir.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Terazî} &\longrightarrow 4x = 6y \\ 2. \text{ Terazî} &\longrightarrow 10z = 2x \\ 3. \text{ Terazî} &\longrightarrow 3y + 2 = 33 \end{aligned}$$

Şekil 68. Y1’in cebirsel temsil (denklem) oluşturma süreci.

Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, çözümlerinde terazileri ve oluşturdıkları denklemleri doğru yorumlamaktadır. Bu öğrenciler terazilerin dengede olma durumundan yararlanarak denklemler oluşturmaları sonucu bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma bileşenine ilişkin çözümler yapmaktadır. Öğrenciler oluşturdıkları denklemlerin kullanışlılığının farkında oldukları için çözümlerine denklem temsilini kullanarak devam ederek çoklu temsillerin kullanışlılığını karşılaştırma; denklemlerde yer alan değişkenleri kullanarak yeniden denge halinde terazi oluşturabildikleri için bir denklemdeki parametrelerin diğer temsillerde nasıl görüldüğünü tanımlama bileşenlerini sağlamakta ve temsiller arası bağlantı kurduklarına ilişkin kanıtlarını sunmaktadır. Y2’nin temsiller arası bağlantı kurma sürecine ilişkin çözümleri Şekil 69’da verilmektedir.



Şekil 69. Y2’nin temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.

Y2’nin temsiller arası bağlantı kurma sürecinde bir temsili (terazilerin olduğu şekilleri) diğerini (denklemleri) oluşturmak için kullanma yetkinliğini sağladığı çözümleri

görülmektedir. Ayrıca Y2, bir terazideki denge halinden yararlanarak oluşturduğu denklemi bir diğer oluşturduğu denklem ile nasıl ilişkilendirdiğini göstermektedir.

C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan D2, bunlardan farklı olarak oluşturduğu denklemleri yorumlayamamaktadır. Bu nedenle çözümlerinde bu denklemleri kullanamaması sonucu problemin istediği sonuçlara ulaşamamaktadır. D2'nin cebirsel temsiller oluşturma sürecinde oluşturduğu denklemler Şekil 70'te görülmektedir.

$$\begin{aligned}
 D &= Z \\
 O &= y \\
 \square &= x \\
 \text{a) 3'üncü terazide } Z + 3y &= 33 \\
 \text{verilmiş, demeli birinci terazide} \\
 Lx = by \text{ den bulabiliriz yani cebirsel gösterimi} \\
 \text{b) } 10Z &= 2x \text{ olur ki terazide dengede kalsın}
 \end{aligned}$$

Şekil 70. D2'nin cebirsel temsil (denklem) oluşturma süreci.

D1 ve D2'nin diğer problemlerde cebirsel temsiller oluşturamazken bu problem için terazilerin denge halinde olması durumlarında denklemler oluşturabilmeleri sınıf ortamında bu tip problem örnekleri ile daha önce çalışmış olmaları ihtimalini göstermektedir. Bu öğrencilerin çözümlerinde de sürekli terazilerin dengede olması durumuna atıf yaptıkları görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Teraziler Nasıl Dengede? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C3 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılığa rastlanmamıştır. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir.

3A: Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğün cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?

- 4Y1:** Birinci terazide 4 kare ile 6 daire birbirine eşit. İkinci terazide 10 üçgen 2 kareye eşit. Üçüncü terazide sayı vermiş, bunu kullanabiliriz. 1 üçgen ile 3 dairenin toplamı 33'müş. Ben kareye x , daireye y , üçgene z dedim ve böyle yazdım.
- 5A:** Doğru ilerlediğinden emin misin?
- 6Y1:** Evet.
- 7A:** Oluşturduğun bu gösterimlere cebirsel ifade diyebilir miyiz?
- 8Y1:** Evet. Yani denklem oluşturduk.
- 9A:** Cebirsel ifade ile denklem arasındaki fark nedir?
- 10Y1:** Eşitlik olunca denklem diyorduk.
- 11A:** Kare, üçgen ve dairenin ağırlıklarını bulurken yaptığın işlemleri anlatır mısın? Cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandın?
- 12Y1:** Denklemleri kullandım. $4x = 6y$ sadeleştirirsek $2x = 3y$ olur. $10z = 2x$ bir de $3y + z = 33$. $3y$ yerine $2x$ yazdım. $2x$ yerine $10z$ koydum. $11z = 33$ oldu. Buradan $z = 11$ oldu. Pardon 11 'e böl, $z = 3$ oldu. İkinci terazide yerine koydum, $x = 15$ buldum. Birinci terazide yerine koydum, $y = 10$ buldum.

Y1, terazilerin her iki kefesindeki şekillerin birbiri ile ilişkisini yorumlayarak denklemleri doğru oluşturmaktadır (4Y1, 12Y1). Y1'in denklemleri doğru yorumladığı ve denklemler arasında ilişkileri kullanarak doğru sonuçlara nasıl ulaştığını açıkça ifade etmektedir (12Y1). Öğrencinin denklemleri oluştururken terazilerden yararlanması, bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma bileşenini sağladığını göstermektedir. Öğrencinin sonuçlara ulaşmak için denklemleri kullanması ise çoklu temsillerin kullanışlılığı karşılaştırma bileşenini sağladığını göstermektedir. Dolayısıyla Y1, C3 yetkinliğini yaptığı açıklamalar ile güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

C3 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerden O1'in açıklamaları aşağıda verilmektedir.

- 3A:** Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğun cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?
- 4O1:** Birinci, ikinci ve üçüncü terazideki şekillere göre denklemlerimizi yazıyoruz. Sonra birleştiriyoruz. Yani mesela birinci ve ikinci terazide kare var. O nedenle denklemleri birleşik yazabiliriz. O nedenle 2 kare = 3 daire = 10 üçgen çıkıyor.

- 5A:** Bu şekilleri (kare, daire ve üçgen) farklı bir şekilde ifade edebilir misin? Yani bu şekillerin yerine cebirsel ifadeler kullanalım ne dersin?
- 601:** Cebirsel ifadeler olarak a, b gibi mi?
- 7A:** Evet.
- 801:** O zaman kareye a, daireye b, üçgene c diyebiliriz.

O1, denklemleri oluşturmak için terazileri kullanmaktadır. Terazilerin denge halinde olması durumundan yararlanarak oluşturduğu denklemlerin ortak terimlerini dikkate alarak bu denklemleri birbiriyle ilişkilendirmektedir (401). Fakat bu süreçte harfli semboller kullanmadığı için öğrenciye araştırmacı tarafından bir öneri yapılmaktadır (5A). O1'in sembol kullanarak nasıl ilerleyeceği merak edilmektedir.

- 13A:** Kare, üçgen ve dairenin ağırlıklarını bulurken yaptığın işlemleri anlatır mısın? Cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandın? İstersen kâğıdın var, kullanabilirsin.
- 1401:** Önceki bulduğum denklemi harflerle cebirsel olarak yazayım. (*İşlemlerini anlatarak yapmaya devam ediyor*) Diğerlerini de yerine koyarız ve buluruz.

$$\begin{aligned}
 2a &= 3b = 10c \\
 3b + c &= 33 \quad 3b = 10c \\
 10c + c &= 33 \\
 11c &= 33 \\
 c &= 3
 \end{aligned}$$

Şekil 71. O1'in örnek olay çalışmasında cebirsel temsil (denklem) oluşturma süreci.

O1, yazılı çözümlerinde doğru oluşturduğu denklemleri Şekil 71'de terazilerde yer alan kare, daire ve üçgen sembolleri için a, b ve c sembollerini kullanarak tekrar oluşturmaktadır. Öğrencinin denklemleri kullanarak sonuca ulaşması ve denklemleri oluştururken verilen terazilerden yararlanması temsiller arasında bağlantı kurabildiğini göstermektedir.

C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan D2'nin yazılı çözümlerin ilişkin açıklamalarında denklemleri kullanarak sonuçlara ulaşamadığı görülmektedir.

- 3A:** Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğun cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?
- 4D2:** 1. terazi dediğim şekilde yani ben kareye x dedim. Daireye y dedim. Üçgene z dedim. Yani $4x = 6y$ oluyor.
- 5A:** Şekil 2 ve Şekil 3'teki teraziler için nasıl yazdın?
- 6D2:** 2. terazide $10z = 2x$ oluyor. 3. terazi $1z + 3y = 33$.
- 7A:** Bu şekilde doğru ilerlediğinden emin misin?
- 8D2:** Evet.

D2, terazilerden yararlanarak denklemleri oluşturma sürecini doğru ve eksiksiz bir şekilde açıklamaktadır (4D2, 6D2). Öğrencinin bu süreci temsil oluşturma ve temsil yorumlama bileşenlerini sağladığını göstermektedir.

- 11A:** Kare, üçgen ve dairenin ağırlıklarını bulurken yaptığın işlemleri anlatır mısın? Cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandın?
- 12D2:** Onu tam yapamadım.
- 13A:** Neden yapamadın, cebirsel ifadelerden yararlanamadın mı?
- 14D2:** Evet. Yani mesela $4x = 6y$ demişim. Sonra 4'e böldüm. $x = 6y/4$ çıktı. Sadeleştirince $3y/2$ oluyor yani. Sonra kafam karıştı.

D2, oluşturduğu denklemleri kullanamadığı için bilinmeyenlerin değerlerini bulamamaktadır. D2, bu noktada kafasının karıştığı söylemektedir (14D2). Öğrencinin bu süreci temsiller arasında yeterli düzeyde bağlantı kuramadığını göstermektedir. Bu nedenle öğrencinin C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı görülmektedir.

Teraziler Nasıl Denge? Probleminde C3 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 30'da görülmektedir.

Tablo 30

Teraziler Nasıl Denge? probleminde C3 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Birinci terazide 4 kare ile 6 daire birbirine eşit. İkinci terazide 10 üçgen 2 kareye eşit. Üçüncü terazide sayı vermiş, bunu kullanabiliriz. 1 üçgen ile 3 dairenin toplamı 33’müş. Denklemleri kullandım. $4x = 6y$ sadeleştirirsek $2x = 3y$ olur. $10z = 2x$ bir de $3y + z = 33$. $3y$ yerine $2x$ yazdım. $2x$ yerine $10z$ koydum. $11z = 33$ oldu.” (Y1)	Y1, Y2, O1, O2, D1
C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“1. terazi dediğim şekilde yani ben kareye x dedim. Daireye y dedim. Üçgene z dedim. Yani $4x = 6y$ oluyor. $4x = 6y$ demişim. Sonra 4’e böldüm. $x = 6y/4$ çıktı. Sadeleştirince $3y/2$ oluyor yani...” (D2)	D2
C3 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.3.5. Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular

Timuçin İnternet Kafede probleminde bir internet kafede bilgisayar kullanma süresine bağlı ücret değişimlerini ifade eden bir bağlam ile sabit değerin, değişkenin ve artış miktarının belirtildiği bir problem cümlesi verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Cebirsel temsiller oluşturma: Problemden verilen miktarlara ilişkin tablo, grafik vb. temsil biçimlerini ve ilişkileri ifade eden denklemi oluşturma
- Temsilleri yorumlama: Cebirsel temsil biçimlerini ve denklemi yorumlama
- Temsiller arası bağlantı kurma:
 - Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma: Denklemi oluşturmak için oluşturduğu diğer temsil biçimlerini (Tablo, grafik, vb.) kullanma
 - Çoklu temsillerin kullanışlılığı karşılaştırma: Artış miktarını ekleme yöntemini ya da bu süreçte oluşturduğu temsil biçimlerini kullanmak yerine denklemden yararlanmanın daha kullanışlı olduğunu gösterme

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, formal ya da informal özellikle tablo ve grafikler oluşturma yanında bağlama ilişkin doğru bir denklem kurabilmektedir. Bu öğrenciler, verilen bilgiler ışığında oluşturdukları tablolardan yararlanarak denklemlerini oluşturmakta ve bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma yetkinliği göstermektedir. Öğrencilerin tablo yerine denklemden yararlanarak çoklu temsillerin kullanılabilirliğini karşılaştırdıkları ve uygun temsil ile çözümlerine devam ettikleri görülmektedir. Y1'in denklemi yorumlama süreci Şekil 72'de görülmektedir.

Kullanım Saat:	Ücret
0	2
1	2,5
2	3
3	3,5
4	4
5	4,5

b) Denklem $\Rightarrow 2 + 0,5 \cdot x = \text{Ücret}$

Bu denklemi kurarken başlangıçta bilgisayarı açtığı gibi hiç kullanmasa bile 2 TL ödemek zorunda olduğunu dikkat ederek yazdım. x ise kullandığı saat kadar olacaktır.

c) 2'den bilgisayarı açtığı gibi 2 TL ödemek zorundadır. 1 saat dolmasa bile 2 TL verecek

Şekil 72. Y1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.

Y1, denklemi yorumlarken sabit terim olan 2 değerini nasıl düşündüğünü açıklamaktadır. Bu açıklama "Başlangıçta bilgisayarı açtığı gibi hiç kullanmasa bile 2 TL ödemek zorunda" şeklindedir ve denklemi açıkladığını göstermektedir. Ayrıca önce tabloyu oluşturup bu tablodan yararlanarak denklemi oluşturma temsilleri arasında bağlantı kurabildiğini göstermektedir.

O2 ise tablo, grafik vb. temsillere yer vermemektedir. Bunun yerine problemin bağlamında belirtilen "sabit fiyat 2 TL ve her saat başı fiyata 50 Kuruş eklenmekte" ifadesine ilişkin bir eşitsizlik oluşturarak değişkenin sınırlarını ifade etmeye çalışmaktadır. Bu öğrencinin farklı bir yönü, denklem parametrelerini tanımladığı basit eşitsizlikler oluşturma ve bunları yorumlamasıdır. Öğrencinin farklı bir bakış açısı ile çözümlerini eşitsizlikler kurarak ifade etmesi temsil oluşturma ve bu temsilleri yorumlama bileşenini sağladığını göstermektedir. O2'nin cebirsel temsil oluşturma süreci Şekil 73'te görülmektedir.

$$a) 0 < x < 59 \Rightarrow 2 + 1 \text{ bu bilgisayarın açılma anından 1 saat önce fiyatı}$$

$$1,50 < x < 1,50 \cdot 59 \text{ dk} \Rightarrow 2,54 \dots$$

Şekil 73. O2'nin cebirsel temsil (eşitsizlik) oluşturma süreci.

O2 temsilleri yorumlama ve temsiller arası bağlantı kurma bileşenlerini sağlamaktadır. O2 tablo, grafik, şema vb. temsiller oluşturmada da bu problemin bağlamına ilişkin oluşturduğu basit eşitsizliklerden yararlanarak denklemi oluşturmakta ve denklemin kullanışlılığının farkında olduğu, çözümlerinde denklemi kullanmasından anlaşılmaktadır. O2'nin denklem oluşturma süreci Şekil 74'te görülmektedir.

$150 < x < 150.59 \text{ dk} \Rightarrow 2,5 \text{ H} \dots$
 b) denklem kurabilmeye bilgi sayısı açma parası... Sabit değişken
 dur, Saat başı Eklenmesi değişken dur
 $0,50 \cdot x + 2 + 1 = \text{ödeyeceğimize fiyat}$
 x saat değişkeni

Şekil 74. O2'nin cebirsel temsil (denklem) oluşturma ve yorumlama süreci.

O2 yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan Y1 ve Y2 ile denklemi ($0,5 \cdot x + 2 = \text{ücret}$) benzer şekilde oluşturmaktadır. Denklemdaki terimleri yorumlayarak nasıl oluşturduğunu anlatmaktadır.

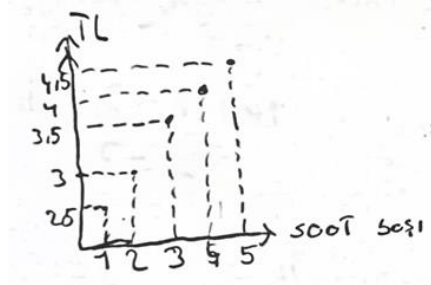
C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler informal özellikte temsil biçimleri kullanmaktadır. O1'in informal özellikte oluşturduğu tablo Şekil 75'te görülmektedir.

Fiyat	2+50kr	2+1	2+1.50kr	2+2	2+2.50kr
saat	1	2	3	4	5

Şekil 75. O1'in cebirsel temsil (tablo) oluşturma süreci.

O1'in oluşturduğu tabloda başlangıç fiyatına yer vermemesi ve değerleri belirtirken artış miktarlarını eklemekten göstermesi tablonun informal özellikte olması anlamına gelmektedir. Aynı zamanda bu tablo bağlamı anlamlandırdığının ve çözümlerini bu anlamalar üzerine kurulu bir şekilde gerçekleştirdiğinin de göstergesidir. O1'in oluşturduğu tabloyu ve denklemi yorumlaması temsilleri yorumlama yetkinliğini göstermektedir. Ayrıca bu öğrencinin oluşturduğu tablodan yararlanarak denklemi kurması temsiller arası bağlantı kurma yetkinliğini sağladığı şeklinde yorumlanabilir. Fakat temsiller arası bağlantı kurma süreci yalnızca bu yetkinliği ile sınırlı kalmaktadır. Çünkü oluşturduğu denklemi çözümlerinde kullanmamış ve denklemden yer alan parametreleri tabloda tam olarak tanımlayamamış ve daha informal gösterimlere yer vermiştir. Bu nedenle öğrenci yetkinliği zayıf düzeyde sağlamaktadır.

Bununla birlikte D1 diğer öğrencilerden farklı olarak bağlamda yer alan ilişkileri gösteren grafik temsili oluşturmayı tercih etmektedir. D1'in oluşturduğu grafik Şekil 76'da görülmektedir.



Şekil 76. D1'in cebirsel temsil (grafik) oluşturma süreci.

D1'in saat başı artan ücreti gösterdiği bu grafik formal özelliktedir. Grafiğin formal özellikte olması, öğrencinin parametreleri grafik üzerinde doğru tanımlayabilmesinden kaynaklanmaktadır.

D2'nin ise ilişkileri doğru anladığı görülmektedir, fakat oluşturduğu tablo informal özelliktedir. D2 oluşturduğu tabloyu yorumlayarak çözümlerine bu tablo yardımıyla devam etmektedir.

D1 ve D2'nin bu problemde bağlama ilişkin denklemini kurma eğiliminde oldukları görülmektedir. Bu öğrencilerin ilk üç problemde temsil üretmedikleri ve geçmiş yaşantılarından tanıdık gelen Teraziler Nasıl Dengede? problemindeki denklem kurma sürecinde başarılı oldukları düşünülürse; bu problemde de denklemini kurmaya çalışmaları bazı cebirsel bilgileri hatırladıkları ve uygulamaya çalıştıkları şeklinde yorumlanabilir. Yine bu öğrenciler problemdeki bağlama ilişkin doğru denklemini kuramamaktadır. Bu nedenle öğrencilerin yetkinliği zayıf düzeyde sağladıkları yönünde değerlendirme yapılmaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Timuçin İnternet Kafede problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C3 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılığa rastlanmamıştır. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir. Y2'nin yazılı çözümlerinde informal özellikte bir

tablo oluşturduğu ve bağlama ilişkin doğru cebirsel ifadeyi kurabildiği görülmektedir. Öğrenci, yapılan örnek olay çalışmasında cebirsel ifadeyi nasıl oluşturduğunu açıklamaktadır. Bu sırada cebirsel ifadeyi denkleme dönüştürmektedir.

11A: Denklemi nasıl oluşturdu? Anlatır mısın?

12Y2: Bilgisayarı açtığında daha süre geçmeden 2 TL verdiği için 2 sabit terim oluyor. Yani süreyle bir ilgisi yok. Saat ilerledikçe 50 kuruş artıyor. Saati bilmediğimiz için x dedim. Bu şekilde $2 + 0,5 \cdot x$ dedim. TL olmadığı için 0,5 diyoruz.

13A: Oluşturduğun denklemi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

14Y2: Evet, eminim.

15A: Nasıl emin oluyorsun?

16Y2: Tablodan emin olduğum için. Denklemden değer verince tabloda bakıyorum ve doğru ilerliyor.

17A: Denklemden her bir sayı ve değişken ne anlama geliyor? Açıklar mısın?

18Y2: x süre demek. 2 sabit sayı yani baştaki ücret. Diğer 0,5 sayısı 50 kuruş yani artış.

19A: Peki, oluşturduğun bu ifadenin denklem olduğuna emin misin? Denklem olması için gerekli şartları sağlıyor mu?

20Y2: (*Çözümünü inceliyor, şaşırarak cevap veriyor*) Hayır... Eşitlik yok aslında denklem olmamış.

21A: Denklem kurmanı istemiştin ve bu oluşturduğun ifadenin denklem olmadığını söylüyorsun. Denklem olabilmesi için bir fikrin var mı?

22Y2: Yani $2 + 0,5 \cdot x = \dots$ Ü diyebilirim. Ü yani ücret anlamında. Çünkü sonuç bize ücreti veriyor. O da bir değişken.

23A: $y = ax + b$ şeklindeki bir denklemde b sabiti bize neyi ifade eder? Oluşturduğun denklemi de düşünerek açıklar mısın?

24Y2: b sabiti yani sabit sayı. Değişmiyor hep aynı. Tüm sonuçları bulurken hep ekleniyor.

Y2, denklem kurma sürecini problem bağlamındaki bilgilerden yararlanarak açıklamaktadır (12Y2). Öğrenci denklem oluşturmak için gerekli olan şartların farkında olduğunu göstermektedir (22Y2). Öğrenci bu şekilde denklemi açıklayarak temsilleri yorumlama bileşenini sağlamaktadır. Ayrıca Y2, denklem oluşturmak için tablodan yararlandığını ifade etmektedir (16Y2). Bu durum öğrencinin bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma bileşenini sağladığını göstermektedir. Y2'nin denklemi kullanarak problemin

diğer maddelerini cevaplaması çoklu temsillerin kullanışlılığını karşılaştırma bileşenini sağlaması ile ilgilidir (26Y2 – 46Y2).

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerden O2'nin de denklemi doğru yorumladığı görülmektedir.

15A: Denklemdaki her bir sayı ve değişken ne anlama geliyor? Açıklar mısın?

16O2: x saat. 2 bilgisayar açılış parası... 0,50 de arttığı için saatlerde.

17A: $y = ax + b$ şeklindeki bir denklemde b sabiti bize neyi ifade eder? Oluşturduğun denklemi de düşünerek açıkla mısın?

18O2: y sonuç demek. a artan şeydir, para gibi... x bilinmeyen... b sabit sayı.

O2, oluşturduğu denklemdeki terimleri açıklayarak temsilleri yorumlama bileşenini sağladığını göstermektedir (16O2). Öğrenci, ilerleyen çözümlerinde denklem ve basit eşitsizliklerinden yararlanarak problemin diğer maddelerini nasıl yanıtladığını açıklamaktadır (20O2 – 40O2). Bu nedenle öğrencinin temsiller arasında bağlantı kurma bileşenini sağladığı görülmektedir.

C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan O1'in açıklamalarında yanlış oluşturduğu denklemi yorumlarken güçlük yaşadığı, fakat tabloyu doğru yorumladığı görülmektedir.

1A: (Soru okunur) Tabloyu nasıl çizdin? Anlatır mısın?

2O1: İlk olarak fiyat ve saat yazarız. Sonra soruda dediği şekilde bir saat kullanırsa 2 TL + 50 kuruş öder. 2 saat kullanırsa bilgisayarı, bir 2 TL'ye ek olarak 1 TL öder. O nedenle böyle devam eder.

3A: Tabloyu kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?

4O1: Evet eminim.

5A: Nasıl emin oluyorsun?

6O1: Çünkü her saatte 50 kuruş ekleyerek gidiyor. Ben de buna dikkat ettim. O nedenle eminim.

O1'in, yazılı çözümlerinde informal özellikte bir tablo oluşturduğu görülmekteydi. Öğrenci bu tabloyu nasıl oluşturduğunu açıklarken, problemin bağlamına göre doğru yorumlar yapmaktadır (2O1). O1 tabloyu oluştururken problem bağlamında yer alan bilgilere dikkat ettiğini belirtmektedir (6O1). O1'in yazılı çözümlerinde denklem oluşturduğu görülmektedir. Öğrencinin oluşturduğu denkleme ilişkin açıklamaları aşağıda verilmektedir.

- 11A:** Denklemi nasıl oluşturdun? Anlatır mısın?
- 12O1:** Vereceği para 2 TL artı süre çarpı x deriz. x derken $x = 50$ kuruş yani.
- 13A:** Oluşturduğun denklemi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 14O1:** (*Düşünüyor*) Evet.
- 15A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 16O1:** (*Düşünüyor*) Denklemi kullanırsak sonuçlar doğru çıkıyor. O nedenle eminim.
- 17A:** Denklemdaki her bir sayı ve değişken ne anlama geliyor? Açıklar mısın?
- 18O1:** (*Düşünüyor*) Bilgisayarın açılış fiyatı... 2 bilgisayarın açılış fiyatı, x de 50 kuruş.

O1, oluşturduğu denklemde bilinmeyene x diyerek bunun 50 Kuruşu ifade ettiğini belirtmektedir (12O1, 18O1). Öğrenci bu süreçte denklemi doğru oluşturamadığını ve doğru yorumlayamadığını göstermektedir. Bu nedenle öğrencinin C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı görülmektedir.

Timuçin İnternet Kafede Probleminde C3 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 31’de görülmektedir.

Tablo 31

Timuçin İnternet Kafede problemde C3 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Soruda açılış fiyatı 2 TL demiş. O yüzden tabloda saat sıfırken 2 TL dedim. Sonra bir saat arttıkça 50 Kuruş artmış. Tabloya 1 saat 2,5 TL, 2 saat 3 TL, 3 saat 3,5 TL diye yazdım. Denklemde 2 sabit terim oluyor. Saat ilerledikçe 50 kuruş artıyor. Saati bilmediğimiz için x dedim. Bu şekilde $2 + 0,5 \cdot x = \text{ücret olur.}$ ” (Y1)	Y1, Y2, O2
C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“İlk açınca bilgisayarı 2 TL veriyor. Sonra ekstra uzatma yani 1 saat uzatırsa 50 Kuruş, 2 saat uzatırsa 1 lira, 3 saat	O1, D1, D2

	<i>uzatınca 1 buçuk lira diye gidiyor. Tabloda bunları gösterdim.” (D2)</i>	
C3 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.3.6. Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde bir ortamda bulunan bakterilerin zamana bağlı artış sayısı ile ilgili bir bağlam ve diğer problemlerden farklı olarak bu bağlama ilişkin denklem verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Cebirsel temsiller oluşturma: Problemde verilen bilgileri bir tablo temsili kullanarak düzenleme ve verilen grafik üzerinde bağlama ilişkin verileri doğru yerleştirme
- Temsilleri yorumlama: Verilen denklemden yararlanarak oluşturdukları tablo ve grafik temsillerini yorumlama
- Temsiller arası bağlantı kurma:
 - Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma: Tablo ve grafiği oluşturmak için denklemden yararlanma
 - Çoklu temsillerin kullanılabilirliği karşılaştırma: Miktarları tablo ve grafik yerine denklem kullanarak bulma
 - Bir denklemdaki parametrelerin diğer temsillerde nasıl görüldüğünü tanımlama: Denklemden yer alan parametreleri tablo ve grafikte tanımlama

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, problemde verilen bağlama ilişkin formal ya da informal özellikte tablolar oluşturmaktadır. Ayrıca bu öğrenciler verileri grafikte doğru bir şekilde göstermektedir. Bu öğrenciler problemde verilen denklemden yararlanarak buldukları verileri grafik üzerinde doğru bir şekilde göstermekte ve var olan temsile doğru

eklemeler yapabilmektedir. Öğrencilerin problemde verilen denklemi yorumlayarak oluşturdukları tablo ve grafik temsillerini de yorumladıkları görülmektedir. Y1'in tablo ve denklem temsillerini yorumlama ve bunlar arasında bağlantı kurma süreci Şekil 77'de görülmektedir.

a) 8 bakteri var zaten ve dakikada 16 bakteri üreyormuş. Dakikada sayısı
ortalama bakteri sayısında onun 16 katı olur.

b) başlangıçtaki bakteri sayısı 8'dir.

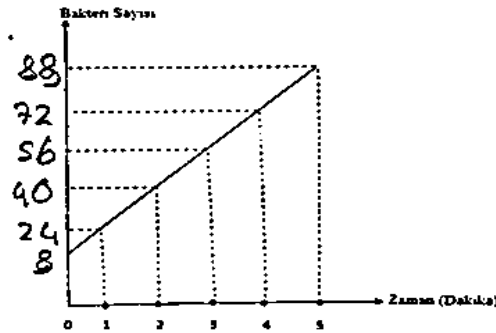
c)

Dakika	0	1	2	3	4
B.S.	8	24	40	56	72

e) denklemde yerine koyarız?
 $8 + 16 \cdot Dk = 4808$

Şekil 77. Y1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.

Y1 denklemden yararlanarak tabloyu, tabloyu kullanarak grafiği oluşturmuş ve bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma yetkinliği göstermiştir. Öğrenciler tablo ve grafik yerine denklemden yararlanarak çoklu temsillerin kullanılabilirliğini karşılaştırdıkları ve uygun temsili kullanarak çözümlerine devam ettikleri görülmektedir. O1'in grafik üzerinde verileri yerleştirme süreci Şekil 78'de görülmektedir.

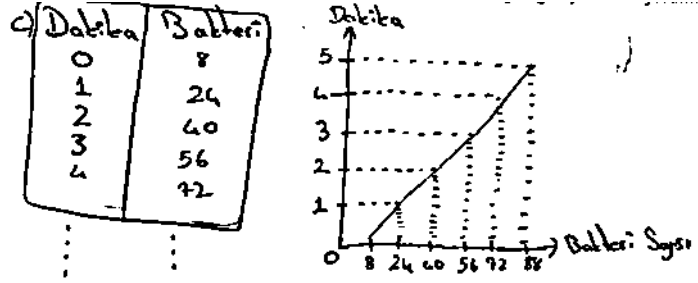


Şekil 78. O1'in var olan cebirsel temsile (grafik) ekleme yapma süreci.

O1 problemde verilen denklemden yararlanarak bulduğu verileri grafik üzerinde doğru bir şekilde göstermekte ve var olan temsile doğru eklemeler yapabilmektedir.

O2 oluşturduğu tabloda denklemde yer alan değişkenleri/parametreleri tanımlamamıştır. Fakat bu öğrencinin çözümlerinden bu değişkenler hakkında bilgisinin olduğu ve değişkenleri doğru yorumladığı anlaşılmaktadır. Y1, Y2 ve O1 öğrencileri denklemde yer alan değişkenlerin/parametrelerin tablo ve grafikteki karşılıklarını tanımlamaktadır. Y2'nin temsiller arası bağlantı kurma sürecinde denklemde yer alan

parametrelerin (dakika ve bakteri sayısı) tablo ve grafik temsillerinde nasıl görüldüğünü tanımlama biçimi Şekil 79’da görülmektedir.



Şekil 79. Y2'nin temsiller arası bağlantı kurma süreci.

Y2, problemde verilen denklemdeki parametreleri oluşturduğu tablo ve grafikte tanımlamaktadır. Ayrıca bu cebirsel temsilleri oluştururken denklemden yararlanmaktadır. Y2'nin bu süreçleri temsiller arasında bağlantı kurma bileşenini sağladığını göstermektedir.

C3 yetkinliğini sağlayamayan öğrencilerin ise problemdeki bağlama ilişkin doğru temsilleri oluşturamadıkları görülmektedir. D2 denklemden yararlanarak doğru verilere ulaşamadığı için oluşturduğu tabloda bağlam ile ilişkisi olmayan verilere yer vermektedir. Dolayısıyla bu öğrenci var olan temsile ekleme yapabilme sürecinde grafiğe de doğru verileri yerleştirememektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Bakterilerin Hızına Yetiş problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C3 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılığa rastlanmamıştır. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir. Y1'in tablo oluşturma sürecine ilişkin açıklamaları aşağıda verilmektedir.

13A: Tabloyu nasıl oluşturdu? Anlatır mısın?

14Y1: Dakikadaki bakteri sayısı değiştiğini göstermem istemiş. Dakikaya 0, 1, 2, 3, 4 yazdım ve altına bakteri sayılarını yazdım.

15A: Oluşturduğun tabloyu kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

16Y1: Evet.

17A: Bakteri sayısındaki değişimi oluşturduğun tabloda doğru bir şekilde gösterebilir miyiz?

18Y1: Evet.

19A: Tabloda başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl gösterdin?

20Y1: Sıfır dakika dedim ve altına 8 yazdım. Çünkü sıfırıncı dakika.

Y1, tabloyu nasıl oluşturduğunu açıkça ifade etmektedir (14Y1). Y1'in oluşturduğu tablonun doğru olması ve başlangıçtaki bakteri sayısını bu tabloda gösterirken değişkene sıfır verdiğini açıklaması denklemi doğru yorumladığı göstermektedir (20Y1). Öğrencinin denklemdeki parametreleri tabloda doğru tanımlaması ve tablo yerine denklemi kullanarak çözümlerine devam etmesi temsiller arası bağlantı kurma bileşenini sağladığını göstermektedir. Y1, açıklamaları ile C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerden O1'in açıklamaları aşağıda verilmektedir.

15A: Tabloyu nasıl oluşturdu? Anlatır mısın?

16O1: Denklemde dakikaya sayı vererek. Sıfır yazınca 8 bakteri, 1 yazınca 24 bakteri, 2 yazınca 40 bakteri diye gidiyor.

17A: Oluşturduğun tabloyu kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

18O1: Evet.

19A: Bakteri sayısındaki değişimi oluşturduğun tabloda doğru bir şekilde görebilir miyiz?

20O1: Evet. Çünkü 16 artarak gidiyor.

21A: Tabloda başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl gösterdin?

22O1: Dakikaya sıfır yazarak 8 bakteri şeklinde.

O1, tabloyu oluştururken denklemde nasıl yararlandığını açıklamaktadır. Tabloda yer alan değerleri denklemde değişkene değer vererek bulduğunu belirtmektedir (16O1). O1'in denklemdeki sabit değeri tabloda nasıl ifade edeceğini bildiği görülmektedir (22O1). O1, denklemdeki parametreleri tabloda doğru tanımlamaktadır. Bu yönleriyle öğrenci C3 yetkinliğinin alt bileşenlerini sağlamaktadır.

Bakterilerin Hızına Yetiş Probleminde C3 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 32’de görülmektedir.

Tablo 32

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde C3 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	<i>“1 dakika geçince 16 tane artıyor yani sekiz eklersek... 24 oluyor... 2 dakika geçince... 32 artıyor 8 eklersek... 40 oluyor bu şekilde artıyor. Tabloda dakikada kaç bakteri olduğunu gösterdim. Bakteri sayısı 16 artarak gidiyor tabloda. Grafiği çizerken her dakikanın karşısına değerleri yazdım. Sekize dikkat ettim.. Sıfır olacağı için çizginin başladığı yere yazdım. (O2)</i>	Y1, Y2, O1, O2
C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	...	
C3 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>16 dakikada 8 bakteri varmış. İki katını aldığımızda 8 artacağı için 32 dakikada 16 bakteri. Sonra 8 daha artar 24 olur, tabloda göstererek o şekilde yaptım.” (D2)</i>	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.3.7. Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular

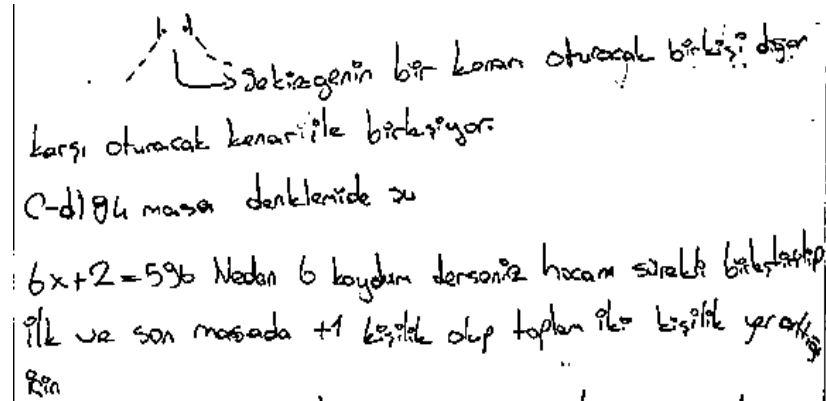
Sekizgen Masalar probleminde gerçek yaşamdan alınmış bir senaryoyu temsil eden örüntü verilmiştir. Bu senaryoda adım sayılarına ilişkin misafir sayısının nasıl ilerlediği görülmektedir. Örüntüyle ilişkili verilen tabloda bu örüntüde yer alan miktarlar belirtilmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Cebirsel temsiller oluşturma: Problemin (c) maddesindeki yönergeye göre adım sayısı için a , misafir sayısı için m parametrelerini kullanarak verilen örüntüdeki ilişkileri ifade eden denklemi oluşturma
- Temsilleri yorumlama: Problemde verilen örüntü ve tablo temsilleri ile oluşturdukları denklemi yorumlama
- Temsiller arası bağlantı kurma:
 - Bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma: Denklemi oluşturmak için örüntü ve tablodan yararlanma
 - Çoklu temsillerin kullanışlılığı karşılaştırma: Miktarları, örüntü ve tablo yerine denklemi kullanarak bulma

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bağlama ilişkin denklemi oluşturmaktadır. Y1, Y2 ve O2'nin bu denklemi istenildiği gibi a ve m değişkenlerini kullanarak $6a + 2 = m$ şeklinde oluşturduğu görülmektedir. O2'nin ise bu parametreleri kullanmadan denklemi $6x + 2 = 596$ şeklinde yazdığı görülmekte ve daha çok sorunun çözümüne odaklandığı anlaşılmaktadır. O2'nin bu süreci Şekil 80'de verilmektedir.



Şekil 80. O2'nin cebirsel temsil (denklem) oluşturma süreci.

O2, problemde kullanması için verilen a ve m parametrelerini kullanarak örüntünün kuralını veren denklemi genel bir şekilde ifade etmeden problemin çözüm aşamasına geçmektedir. Burada oluşturduğu denklem ($6x + 2 = 596$) doğrudur. Öğrenci denklemi nasıl oluşturduğunu "Neden 6 koydum dersiniz, sürekli birleştirilip ilk ve son masada 1 kişilik olup toplam 2 kişilik yer arttığı için" şeklinde açıklamaktadır. Denklemde değişkenin kat sayısına 6 yazmasının sebebini, sekiz kişilik masaların kenarları birleştirildiğinde iki kişinin masaya

oturamayacağını ve bu nedenle altışar altışar artacağını belirterek açıklamaktadır. Öğrencinin denklemi doğru oluşturması ve yorumlaması bu yetkinliğe ait cebirsel temsil oluşturma ve yorumlama bileşenlerini sağladığını göstermektedir. Ayrıca çözümlerinde denklemi kullanması ve denklemi oluştururken örüntüden yararlanması, temsiller arasında bağlantı kurabilme bileşenini yansıtabildiğini ifade etmektedir.

C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerin genel olarak verilen örüntüyü ve tabloyu yorumlayarak oluşturdukları denklemi yorumladıkları görülmektedir. Bu öğrenciler verilen örüntü ve tablodan yararlanarak denklemi oluşturmakta ve bir temsili diğerini oluşturmak için kullanma yetkinliği göstermektedir. Öğrenciler tablo ve grafik yerine denklemden yararlanarak çözüm yaptıkları için çoklu temsillerin kullanılabilirliğini karşılaştırdıkları görülmektedir. Ayrıca bu öğrenciler parametrelerin a ve m şeklinde verildiği bu problemde $6a + 2 = m$ şeklinde oluşturdukları denklemden anlaşılmaktadır.

O1'in örüntüyü yorumlayarak ve parametreleri kullanarak oluşturduğu denklemi yorumlama süreci Şekil 81'de görülmektedir.

2 kişi 2 misafir olması demek, 0 yüzden 16 kişi değil 14 kişi oturur
b) 26 kişi oturabilir
c) cevap: $m = 6A + 2$ sayılara baktığımda hepsi 6'nın katının 2 fazlası, 0 yüzden böyle yaptım.
d) cevap: $596 = 6A + 2$

Şekil 81. O1'in temsilleri yorumlama ve bağlantı kurma süreci.

O1'in, oluşturduğu $m = 6a + 2$ denkleminde değişkenin katsayısını yorumladığı görülmektedir. Ayrıca denklemde sorunun istediği parametreleri kullanabildiği için temsiller arası bağlantı kurabildiği anlaşılmaktadır.

C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerin, sadece problemde verilen örüntüyü ve tabloyu yorumladıkları görülmektedir, fakat denklemi oluşturamadıkları için çözümleri bu noktada sınırlı kalmaktadır. Bu nedenle bu öğrencilerin temsiller arası bağlantıyı kurma bileşenini sağlayamadığı görülmektedir.

C3 yetkinliğini sağlayamayan öğrenci olmamıştır. Öğrenciler problemde C3 yetkinliğini güçlü ya da zayıf düzeylerde sağlamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Sekizgen Masalar problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkiyi nasıl belirledikleri derinlemesine incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C3 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bir farklılığa rastlanmamıştır. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir. Y2'nin problemdeki örüntünün kuralını veren denklemi kurma sürecine ilişkin açıklamaları aşağıda verilmektedir.

- 9A:** Denklemi nasıl yazdın? Anlatır mısın?
- 10Y2:** Adım sayısına a dedim. Misafir de m olsun demiş. 6 arttığı için 6a. Sayıları sağlaması için 2 ekledim. Sonuç da misafir sayısına eşit olur. Yani $6a + 2 = m$ şeklinde yazdım.
- 11A:** Denklemi tekrar kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 12Y2:** Evet.
- 13A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 14Y2:** Sorudaki tabloya bakınca sayıları sağlıyor.
- 15A:** Oluşturduğun bu denklemdeki her sayı ve değişken için ne söyleyebilirsin?
- 16Y2:** 6 artış sayısı olduğu için 6a dedim, a değişken, m de değişken, 2 sabit terim oluyor. Öyle yani.

Y2, problemin (c) maddesinde istenildiği gibi a ve m parametrelerini kullanarak denklemi nasıl yazdığını açıklamaktadır (16Y2). Öğrencinin örüntüden yararlanarak denklemi oluşturması, denklemdeki terimleri doğru yorumlaması ve problemin diğer maddelerinde denklemden yararlanması C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

Yazılı çözümlerinde C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrencilerden O1, denklemi nasıl oluşturduğunu açıklamaktadır.

- 9A:** Denklemi nasıl yazdın? Anlatır mısın?
- 10O1:** 6 artarak gidiyor demiştik. Yani adımın 6 katı olarak. 2 ekleriz çünkü o zaman misafirlere eşit oluyor.
- 11A:** Denklemi tekrar kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 12O1:** Evet.

13A: Nasıl emin oluyorsun?

14O1: Tablodaki sonuçlarla aynı çıktığı için eminim.

15A: Oluşturduğun bu denklemdeki her sayı ve değişken için ne söyleyebilirsin?

16O1: 6 kat anlamında. 2 sabit sayı ve değişkenlerimiz de adım ve misafir.

O1, verilen örüntü ve tablodan yararlanarak doğru bir denklem oluşturmaktadır. O1 bu denklemdeki her bir terimi yorumlamaktadır (10O1). Denklemde emin olmak için tabloya başvurmuştur (14O1). Öğrencinin yaptığı açıklamalar C3 yetkinliğinin alt bileşenlerini sağlamaktadır.

Yazılı çözümlerinde C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan D1'in açıklamaları aşağıda verilmektedir.

5A: 4 masaya kaç misafirin oturduğunu nasıl buldun? Anlatır mısın?

6D1: 8, 14, 20 diye artıyor. 6 fazlası olduğu için 26 buldum.

7A: Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

8D1: İkinci yol olarak masalardan sayabilirim.

9A: c maddesinde denklem yazmanı istemiştin. Neden bir denklem yazmadın?

10D1: ... Soru karışık geldi.

11A: Denklemlerdeki sayılar ve değişkenler ne anlama gelir?

12D1: ... Sonucu bulmamızı sağlar.

13A: d maddesinin sonucunu nasıl bulduğunu anlatır mısın?

14D1: 596'yı 6'ya bölüp 99 buldum.

15A: Neden 596'yı 6'ya böldün?

16D1: Çünkü masa arttıkça altı kişi daha oturabiliyor. O yüzden beş yüz doksan altının içinde kaç tane altı kişi oturuyor bulmam gerek.

D1'in yazılı çözümlerinde denklem kuramadığı ve açıklamalarında da denkleme ilişkin bir yorumu olmadığı görülmektedir (10D1). Öğrencinin örüntüdeki miktarları ve aralarındaki ilişkileri doğru ifade etmesi temsilleri kısmen yorumlayabildiğini göstermektedir (6D1). Ayrıca problemin (d) maddesine ilişkin çözümlerini açıklarken de örüntüyü doğru yorumladığı görülmektedir (16D1). Bu nedenle öğrencinin C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı görülmektedir.

Sekizgen Masalar Probleminde C3 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 33'te görülmektedir.

Tablo 33

Sekizgen Masalar probleminde C3 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Denklemleri yazarken, 6 artarak gidiyor demiştik. Yani adımın 6 katı olarak. 2 ekleriz çünkü o zaman misafirlere eşit oluyor. 6 kat anlamında. 2 sabit sayı ve değişkenlerimiz de adım ve misafir. Böylece $6a + 2 = m$ olur.” (O1)	Y1, Y2, O1, O2
C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“1 masada 8 kişi, 2 masada 14 kişi, 3 masada 20 bu şekilde bir ilişki var. Tablodan baktığımızda 6 artmış. $20 + 6 = 26$ çıkar. Denklem için $8m + a$ dedim ama bilmiyorum. Yani doğru değil galiba.” (D2)	D1, D2
C3 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.4. Prosedürleri Yürütme ve Sonuçların Doğruluğunu Kontrol Etme Sürecine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın dördüncü alt problemi olan “Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki hesaplamaları ve prosedürleri yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme süreçleri nasıldır?” sorusuna yanıt aranmaktadır. Öğrencilerin prosedürleri yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme (C4) yetkinliğini sağlayıp sağlamadıkları;

- Prosedürleri hassasiyetle yürütme (C4a)
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme (C4b)
 - Problem bağlamına başvurma
 - Matematiksel prosedürleri kullanma

➤ Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme

iki alt bileşenin ele alınmasıyla incelenmektedir. Sonuçların doğruluğunu kontrol etme bileşeni üç farklı kategoriden oluşmaktadır. Bu bileşen, probleme uygun olan kategorinin/kategorilerin incelenmesiyle ele alınmaktadır. Öğrencilerin C4b bileşenini sağlamaları için bu kategorilerden en az birini uygulamaları gerekmektedir.

4.4.1. Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular

Ters Piramit probleminde gerçek yaşamdan alınmış ters piramit şeklinde duran bir bina ve bu binanın her katında yer alan oda sayılarındaki artışı temsil eden bir örüntü verilmiştir. Problemin (c) maddesinde öğrencilerden, oluşturacakları cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol etmeleri istenmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Prosedürleri hassasiyetle yürütme: Örüntünün diğer adımlarını bulmak için aritmetik ve cebir içerikli prosedürleri uygun yer ve zamanda, doğru ve akıcı uygulama
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme
 - Problem bağlamına başvurma: Sonuçlarına gerekçe sunarken problem bağlamında verilen bilgi ve durumlardan yararlanma
 - Matematiksel prosedürleri kullanma: Sonuçlarını matematiksel prosedürlere dayandırarak doğruluğundan emin olma
 - Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme: Bulduğu sonuçları belirli bir mantık çerçevesinde açıklarken kelimelerle gerekçeler sunma

C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, cebirsel ifade oluşturma ve örüntünün diğer adımlarına ilişkin miktarları bulma sürecinde hem cebirsel prosedürlerini hem de aritmetik işlemlerini doğru yer ve zamanda, akıcı bir şekilde gerçekleştirmektedir. Bu öğrencilerin yazılı çözümlerinde problemi çözme yolları birbirinden farklı olsa da kendi çözüm yollarını uygularken yaptıkları prosedürler doğru ve verimlidir. Y1 bu süreçte problemin çözümü ile doğrudan ilgili olmasa da, oluşturduğu cebirsel ifade ile diğer adımları bulma sürecinde özyinelemeli işlemlere yer vermektedir. Bu öğrencinin özyinelemeli prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci Şekil 82’de görülmektedir.

İki fark arası 8 ilah ettiği için $8x$ derim
 İki farkı 10 olduğu için $8x+2$ olur.

1. fark = $8 \cdot 1 + 2 = 10$
2. fark = $8 \cdot 2 + 2 = 18$
3. fark = $8 \cdot 3 + 2 = 26$
4. fark = $8 \cdot 4 + 2 = 34$
5. fark = $8 \cdot 5 + 2 = 42$
6. fark = $8 \cdot 6 + 2 = 50$
7. fark = $8 \cdot 7 + 2 = 58$

Şekil 82. Y1'in özyinelemeli prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.

Y1 örüntünün artış miktarından yararlanarak oluşturduğu cebirsel ifadenin yardımıyla örüntü adımları arasındaki tüm farkları bulmaktadır. Bu özyinelemeli prosedürlerini akıcı ve titiz bir şekilde uygulamaktadır. Öğrenci sonuçlarının doğru olup olmadığını yine burada cebirsel ifade ile bulduğu artış miktarlarını tabloda belirttiği değerler ile karşılaştırarak kontrol etmektedir. C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan Y2, benzer şekilde prosedürlerini hassasiyetle yürütmektedir. Öğrencinin cebirsel ifadenin doğruluğunu nasıl kontrol ettiği Şekil 83'te görülmektedir.

Bulduğum cebirsel ifade $(2n-1) \cdot 2n$
 Kontrol etmek için diğer adımlara bakalım.

$$2. \text{Kad} = n=2 \quad (2 \cdot 2 - 1) \cdot 2 \cdot 2 = (2 \cdot 2 - 1) \cdot (2 \cdot 2) = 3 \cdot 4$$

$$3. \text{Kad} = n=3 \quad (2 \cdot 3 - 1) \cdot (2 \cdot 3) = 5 \cdot 6$$

evet doğru çıkıyor.

Şekil 83. Y2'nin sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.

Y2, problemin çözümünde kullandığı cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol ederse problemin diğer maddelerinin de doğru olduğundan emin olacağını düşünmektedir. Örüntünün kuralını gösteren cebirsel ifadeyi $(2n - 1) \cdot 2n$ olarak bulmuştur. Değişkene 2 ve 3 değerlerini verirken matematiksel prosedürler kullanmış, sonuçları örüntünün ikinci ve üçüncü adımı ile karşılaştırmıştır. Örüntüdeki adımların miktarları ile aynı sonuçlara ulaştığı için "evet doğru çıkıyor" şeklinde açıklama yaparak sonucunu değerlendirmiş ve oluşturduğu cebirsel ifadenin doğru olduğundan emin olmuştur. Sonuçlarını kontrol ederken verilen örüntünün miktarlarından faydalanması Y2'nin problem bağlamına başvurduğunu göstermektedir.

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, prosedürlerini doğru yer ve zamanda yapmaktadır. Fakat bu öğrenciler bu işlemlerini doğru ya da verimli bir şekilde gerçekleştiremedikleri için doğru sonuçlara ulaşamamaktadır. Ayrıca öğrencilerin C4

yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamalarının bir diğer sebebi prosedürlerini ya da buldukları bir takım sonuçları kontrol etmemesidir. Bu öğrenciler cebirsel prosedürleri uygulama sırasında da güçlük çekmektedir. Bu öğrencilerden biri olan O1 yalnızca aritmetik prosedürleri hassasiyetle yürütmekte ve doğru sonuçlara ulaşmaktadır. Fakat sonuçlarını kontrol etmemektedir. C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci O2'nin ise cebirsel prosedürleri doğru ve verimli bir şekilde uygulamada yaşadığı güçlük Şekil 84'te verilen çözümlerinden anlaşılmaktadır.

C) Grafik ve cebirsel çözümler şöyle yapılır:

1. kat oda sayısı 2	2. kat oda sayısı 12	3. kat oda sayısı 30	4. kat oda sayısı 56
---------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

1. kat = 2 oda sayısı $\xrightarrow{\times 2}$ 4x fark
2. kat = 12 oda sayısı $\xrightarrow{\times 2}$ 4x fark
3. kat = 30 kat oda sayısı $\xrightarrow{\times 2}$ 4x fark
4. kat = 56 oda sayısı

Şekil 84. O2'nin cebirsel prosedürleri doğru ve verimli uygulayamama süreci.

O2 her adımdaki miktarlar arasındaki ilişkiyi belirlerken cebirsel temsiller kullanmaktadır. Birinci adım 2 olduğu için iki katını düşünerek $2x$, ikinci adım 12 olduğu için altı katını düşünerek $6x$, üçüncü adım 30 olduğu için $10x$ diyerek $2x$, $6x$, $10x$, $14x$ şeklinde artış miktarlarını cebirsel olarak elde etmekte ve burada $4x$ farkın olduğunu göstermektedir. O2 bu cebirsel prosedürleri verimli gerçekleştiremediği için ve bulduğu bu farkları doğru kullanamadığı için problemin istediği sonuçlara ulaşamamaktadır.

C3 yetkinliğini sağlayamayan öğrencilerin ise probleme ilişkin çok fazla prosedür uygulamadığı, uyguladıkları prosedürlerin doğru olmadığı ve sonuçlarını herhangi bir şekilde kontrol etmedikleri görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Ters Piramit problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde prosedürleri yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C4 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında herhangi bir

farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir.

Y1'in yazılı çalışmalarında C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlarken problemin çözümü ile doğrudan ilişkisi olmayan cebirsel ifadeyi kullanarak bazı özyinelemeli prosedürleri hassasiyetle uyguladığı görülmektedir. Öğrenci mülakatlar sırasında bu prosedürlerini belirli bir mantık çerçevesinde gerçekleştirdiğini açıklamakta ve gerekçelerini sunmaktadır.

51A: 56 odanın bulunacağı katın kaçınıcı kat olacağını nasıl buldun?

52Y1: Zaten ilk sırada bulmuştum. 30'a 26 ekleyip 56 demiştim. Bu da 4. kat oluyor.

53A: Evet ama ben c sorusunda d, e ve f sorularını oluşturduğun cebirsel ifade ile çözmeni istemiştin, bu şekilde yapar mısın?

54Y1: Tamam. Dördüncü kat olduğu için 3. farka bakarım. $8x + 2$ 'de yerine koyarım. $8 \times 3 + 2 = 24 + 2 = 26$ bulurum. Üçüncü katta 30 oda olduğundan $30 + 26 = 56$ oda bulurum.

55A: İşlemlerini anladım fakat soruya göre 4. kat olduğunu bilmiyoruz. Sen 4. kat olduğunu söyleyerek çözüme başladın. Bununla ilgili düşüncelerini açıklayabilir misin?

56Y1: (Biraz şaşırarak) Aa, evet pardon hocam. Ben normalde şöyle düşündüm: İlk kat 2, üstüne de farkları ekleriz. 56'yı bulunca kaç fark olduğunu sayıp kat sayısını, pardon... (Yanlış söylediğini düşünerek duraksıyor) Hm, evet kat sayısını öyle buluruz.

57A: Nasıl yaptığını işlemlerle gösterir misin?

58Y1: $2 + 10 + 18 + 26 = 56$ yapar. Burada 4 fark topladığımız için 4. kat olduğunu anlıyoruz.

59A: Tamam, işlemlerini kontrol eder misin? İşlemlerinin doğru olduğundan emin misin?

60Y1: (İşlemlerini kontrol ediyor) Evet.

61A: 132 odanın bulunacağı katın kaçınıcı kat olduğunu nasıl buldun? İşlem adımlarını açıklar mısın?

62Y1: Yine farkları üstüne toplayarak gittim. $2 + 10 + 18 + 26 + 34$ dedim. Sonuç 90 çıktı. $90 + 42 = 132$ buldum. Toplam 6 fark topladığım için 6. kat olduğunu anladım.

63A: İşlemlerini kontrol eder misin? İşlemlerinin doğru olduğundan emin misin?

64Y1: Evet.

65A: En üst kattaki oda sayısını bulurken nasıl bir yol izlediğini açıklar mısın?

66Y1: 1. kat ile tüm farkları topladım. 240 çıktı.

Y1, mülakatlarda uyguladığı prosedürlere ilişkin mantıklı açıklamalar yapmaktadır. Y1 bulduğu sonuçlarını matematiksel prosedürlere dayandırarak doğruluğundan emin olmaktadır (58Y1, 62Y1). Ayrıca öğrenci mülakat sırasında örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturduğu için çözümlerini yeniden düzenlemektedir. Öğrencinin kendisine verilen kâğıt üzerine problemin (f) maddesini çözerken uyguladığı prosedürleri Şekil 85'te görülmektedir.

$$\frac{(2 \cdot 8 - 1)}{15} \cdot \frac{(2 \cdot 8)}{16} = \underline{\underline{240}}$$

Şekil 85. Y1'in mülakat sırasında uyguladığı değişkene değer verme prosedürleri.

Y1, yeni oluşturduğu cebirsel ifadeyi mülakat sırasında kontrol etmektedir. Y1'in cebirsel ifadeyi nasıl kontrol ettiği Şekil 86'da görülmektedir.

$$\begin{aligned} & 2x - 1 \cdot 2x \\ & (2x - 1) \cdot (2x) \\ \\ & x=1 \quad (2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1) = 1 \cdot 2 \\ & x=2 \quad (2 \cdot 2 - 1) \cdot (2 \cdot 2) = 3 \cdot 4 \\ & x=3 \quad (2 \cdot 3 - 1) \cdot (2 \cdot 3) = 5 \cdot 6 \end{aligned}$$

Şekil 86. Y1'in mülakat sırasında oluşturduğu cebirsel ifadeyi kontrol etme süreci.

Y1 değişkene 1, 2 ve 3 değerlerini verirken matematiksel prosedürler kullanmakta, sonuçları örüntünün ikinci ve üçüncü adımı ile karşılaştırmaktadır. Örüntüdeki adımların miktarları ile aynı sonuçlara ulaştığı için oluşturduğu cebirsel ifadenin doğru olduğundan emin olmaktadır. Sonuçlarını kontrol ederken verilen örüntünün miktarlarından faydalanması Y1'in problem bağlamına başvurduğunu göstermektedir.

Y2, yazılı çözümlerinde uyguladığı prosedürlere ilişkin yaptığı açıklamalarda da C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

- 35A:** 132 odanın bulunacağı katın kaçınıcı kat olduğunu nasıl buldun? İşlem adımlarını açıklar mısın?
- 36Y2:** Yine aynı şekilde denklem yaptım. $(2n - 1) \times 2n = 132$. Kaçla kaç çarparsam 132 oluyor diye baktım. 11×12 yani $2n = 12$. Demek ki $n = 6$. kat.
- 37A:** İşlemlerini kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 38Y2:** Evet.
- 39A:** En üst kattaki oda sayısını bulurken nasıl bir yol izlediğini açıklar mısın?
- 40Y2:** Orda da yine aynı şey. Yani en üst kat sekizinci kat. Değişken yerine 8 yazıp buldum.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci Y2, uyguladığı prosedürleri akıcı bir dille açıklamaktadır. Y2 cebirsel ifadeye değer vererek sonuçlara nasıl ulaştığını açıkladığında (36Y2, 40Y2), prosedürlerini doğru yer ve zamanda hassasiyetle yürütebildiğini göstermektedir. Ayrıca öğrenci örüntünün ilerleyen adımlarına ilişkin bulduğu sonuçları gerekçeler sunarak açıklamakta ve sonuçlarını değerlendirmektedir.

- 19A:** Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 20Y2:** Evet.
- 21A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 22Y2:** 2 artarak gittiği için $2n$ dedim. İki kenar için ayrı ayrı yapmamız gerekiyordu. Kısa kenarlar 1,3,5 diye gidiyor ve o yüzden $(2n - 1)$ olur. Diğer kenarlar da 2, 4, 6 diye gidiyor yani direk $2n$ olduğu belli. Bunları çarpmamız gerektiği için de $(2n - 1) \times 2n$ buldum. Biraz değişik çıktı gibi ama yerine koyunca hepsi çıkıyor.

Y2, oluşturduğu cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol ederken de sonuçlarını matematiksel prosedürlere dayandırarak doğruluğundan emin olmaktadır. Öğrencinin sonuçlarını matematiksel prosedürlere dayandırma şekli örüntüyü nasıl oluşturduğunu ve örüntüyü oluştururken nelere dikkat ettiğini açıklamasıyla gerçekleşmektedir.

- 37A:** 56 odanın bulunacağı katın kaçınıcı kat olduğunu nasıl buldun? İşlem adımlarını açıklar mısın?
- 38O1:** Tabloya bakarız ve x 'e 54 ekleriz 56 olur.
- 39A:** İşlemlerini kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 40O1:** (İşlemlerin olduğu kâğıda bakıyor, tam olarak emin bir tavrı olmadığı gözlemleniyor.) Evet, eminim.

- 41A:** 132 odanın bulunacağı katın kaçınıcı kat olduğunu nasıl buldun? İşlem adımlarını açıklar mısın?
- 42O1:** Yine tabloya bakarız. $x + 130 = 132$ olacağını anlarız. O nedenle altınıcı kata denk geliyor.
- 43A:** İşlemlerini kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 44O1:** Evet.
- 45A:** En üst kattaki oda sayısını bulurken nasıl bir yol izlediğini açıklar mısın?
- 46O1:** Tabloda en üst kata bakarız. $x + 238$ yani şey 240 oda buluruz.

O1'in prosedürleri uygulama şekli oldukça farklıdır. Öğrenci cebirsel ifade oluşturmaya da örüntünün ilk adımını x değişkeni ile ifade etmekte ve artış miktarını ekleme yöntemi ile diğer adımların sonuçlarına ulaşmaktadır. Benimsediği bu yöntemi açıklama sürecinde sonuçlarını kontrol etmeden yalnızca akıcı bir şekilde doğru yer ve zamanda uyguladığı prosedürleri açıklamaktadır. Bu durum, öğrencinin örnek olay çalışmalarında da C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığını göstermektedir.

C4 yetkinliği yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan bir diğer öğrenci olan O2 ile yapılan mülakatta, öğrencinin yetkinliği sağlama düzeyinin değişmediği, fakat yazılı çözümlerinde yarım bıraktığı cebirsel ilişkileri kullanabildiği ve bu ilişkiler yardımıyla doğru sonuçlar elde edebildiği Şekil 87'de görülmektedir.

- 45A:** En üst kattaki oda sayısını bulmamışsın. Tekrar düşünmek ister misin?
- 46O2:** Evet hocam... Sekizinci katı soruyor... (*düşünüyor*) O zaman 22 nin 4 fazlası 26. 4 fazlası 30. Yani 8 çarpı 30 hocam. Sonuç 240 oluyor... 240 oda var.

$$\begin{aligned} 4.kat &= 56 \text{ gen: } 14 \times \\ 5.kat &= 18 \times 10 \text{ ni } 18.5 = 30 \\ 6.kat &= 22 \times 10 \text{ ni } 22.6 = 132 \end{aligned}$$

Şekil 87. O2'nin mülakat sırasında geliştirdiği cebirsel ilişkileri uygulama süreci.

O2, oluşturduğu cebirsel ilişkiler yardımıyla prosedürleri hassasiyetle yürüttüğünü ve bu süreçte özyinelemeli prosedürlere yer verdiğini göstermektedir. Fakat öğrenci bulduğu sonuçların doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağlamamaktadır.

D1 ve D2 ise örnek olay çalışmalarında yetkinliği sağladıklarına ilişkin herhangi bir prosedüre veya açıklamaya yer vermemektedir.

Ters Piramit Probleminde C4 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan örnek olay çalışmaları ile bu problemde öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 34’te görülmektedir.

Tablo 34

Ters Piramit probleminde C4 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Sanat merkezinin en üst katında bulunacak oda sayısını denklemde 8 yazarak bulabiliriz. $(2 \times 8 - 1) \times 2 \times 8 = 240$ olur. Cebirsel ifadenin doğru olduğunu görmek için örüntünün ilk adımlarına karşılık gelen 1, 2 ve 3 değerlerini denediğimde aynı sonuçlar çıktı.” (Y2)	Y1, Y2,
C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Tabloda en üst kata bakarız. $x + 238$ yani 240 oda buluruz.” (O1)	O1, O2
C4 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“Bilmiyorum... Tablo, grafik nasıl çiziyorduk hatırlamıyorum. Cebirsel ifadeye örnek olarak mesela x olabilir.” (D1)	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.4.2. Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular

Harflerin Oyunu probleminde alfabedeki harflerin belli bir kurala göre diziliminden oluşan bir örüntü ve örüntünün ilk beş adımı verilmiştir. Problemin (f) maddesinde öğrencilerden, buldukları sonuçların doğruluğunu kontrol etmeleri istenmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Prosedürleri hassasiyetle yürütme: Örüntünün diğer adımlarını bulmak için aritmetik ve cebir içerikli prosedürleri uygun yer ve zamanda, doğru ve akıcı uygulama
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme
 - Problem bağlamına başvurma: Sonuçlarına gerekçe sunarken problem bağlamında verilen bilgi ve durumlardan yararlanma
 - Matematiksel prosedürleri kullanma: Sonuçlarını matematiksel prosedürlere dayandırarak doğruluğundan emin olma
 - Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme: Bulduğu sonuçları belirli bir mantık çerçevesinde açıklarken kelimelerle gerekçeler sunma

C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, verilen örüntünün kuralını ifade etme ve örüntüye ilişkin diğer adımları bulma sürecinde işlemlerini akıcı ve titiz bir şekilde gerçekleştirdikleri görülmektedir. Bu öğrencilerin kendi çözüm yollarını uygularken yaptıkları işlemler doğru ve verimlidir. Aynı zamanda bu öğrencilerin hem aritmetik hem de cebirsel prosedürleri doğru yer ve zamanda uyguladıkları görülmektedir. Yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan bu öğrenciler, problemin (f) alt maddesinde buldukları sonuçların doğruluğunu kontrol ettiklerini göstermektedir. Öğrenciler oluşturdukları cebirsel ifadeyi kontrol ettiklerinde diğer sonuçların da doğru olacağını düşünmektedir. Y1 ve Y2, oluşturdukları cebirsel ifadeden elde ettikleri değerleri tablodaki değerler ile karşılaştırmakta ve problem bağlamından faydalanmaktadır. Problemden verilen örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade eden Y1'in bu cebirsel ifadenin doğruluğunu nasıl kontrol ettiği ise Şekil 88'de görülmektedir.

Kobay bir soru denklemini yerine koyarak kontrol edelim:

$$1. \text{ harf} = 6 \cdot 2 - 3 = 1 \text{ yani A}$$

$$2. \text{ harf} = 6 \cdot 2 - 3 = 5 \text{ yani D}$$

$$3. \text{ harf} = 6 \cdot 3 - 3 = 9 \text{ yani G}$$

Kısacası denklem doğru olduğu için sonuçlar da doğru

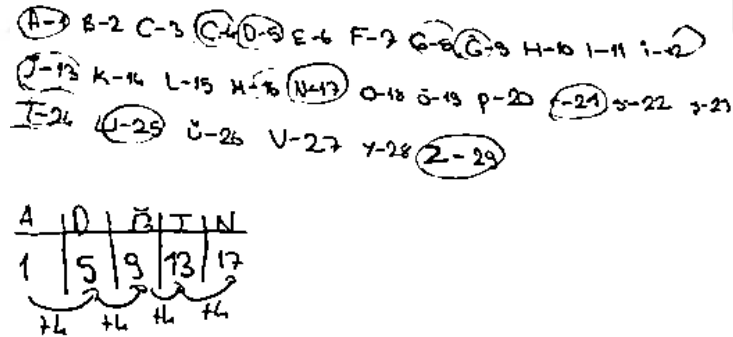
Şekil 88. Y1'in sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.

Y1, problemin çözümünde kullandığı cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol ederse problemin diğer maddelerinin de doğru olduğundan emin olacağını düşünmektedir. Örüntünün kuralını gösteren cebirsel ifadeyi $(4x - 3)$ olarak bulmuştur. Değişkene 1, 2 ve 3 değerlerini verirken matematiksel prosedürler kullanmış, sonuçları örüntünün birinci, ikinci ve üçüncü adımı ile karşılaştırmıştır. Örüntüdeki adımların miktarları ile aynı sonuçlara ulaştığı için “kısacası denklem doğru olduğu için sonuçlar da doğru” şeklinde açıklama yaparak sonucunu değerlendirmiş ve oluşturduğu cebirsel ifadenin doğru olduğundan emin olmuştur. Sonuçlarını

kontrol ederken verilen örüntünün miktarlarından faydalanması Y1'in problem bağlamına başvurduğunu göstermektedir.

Diğer yandan Y1'in problem bağlamında harflerin iki kişi arasında sırayla söylendiği şeklinde yer alan olay örgüsünü gözden kaçırdığı görülmektedir. Bu ifadeye göre örneğin problemin alt maddesinde istenen Burçin'in söyleyeceği 5. harf, aslında örüntünün 9. adımına karşılık gelmektedir. Bu durumda Y1'in cebirsel ifadeye değişkene 5 değerini vererek yanlış sonuçlara ulaştığı görülmektedir. Y1 ise sadece oluşturduğu cebirsel ifadeyi kontrol etmenin yeterli olacağını düşündüğü için diğer maddelerin çözümlerini kontrol etme ihtiyacı duymamış ve yanlışlarını fark edememiştir. Y1 ile birebir yapılacak mülakatlarda bu durum ele alınacak ve örnek olay çalışması bulgularında bu mülakatlara değinilecektir.

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, bir takım prosedürlerini doğru yer ve zamanda yapmaktadır. Fakat bu öğrencilerin doğru ve verimli prosedürler uygulayamadıkları ve miktarlar arasındaki artış farkını üzerine ekleme yöntemi kullanarak örüntünün ilerleyen adımlarına ilişkin doğru sonuçlara ulaştıkları görülmektedir. O2'nin aritmetik ve cebirsel prosedürler yerine üzerine ekleme yaparak örüntünün adımlarını bulma süreci Şekil 89'da verilmektedir.



Şekil 89. O2'nin prosedürleri kullanmadan problemi çözme süreci.

O2 her harfe 1'den 29'a kadar numara verdikten sonra dörder dörder ilerlediğini göstermektedir. Artış farkını ekleyerek ilerlediği çözümlerinde görülmektedir. Örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturmadıkları için cebirsel prosedürler uygulamadan aritmetik prosedürler uygulamaktadır. Bu öğrenciler sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmemektedir.

Bağlama ilişkin prosedürleri uygulayamadıkları için D1 ve D2'nin C4 yetkinliğini sağlayamadığı tespit edilmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Harflerin Oyunu problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde prosedürleri yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C4 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir. Y1'in oluşturduğu tablonun doğruluğundan nasıl emin olduğu aşağıda verilen metinde görülmektedir (15Y1).

12A: Tabloyu kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?

13Y1: (*Tabloyu kontrol ediyor*) Evet.

14A: Nasıl emin oluyorsun?

15Y1: Harfleri sırayla söyleyerek anladım. Mesela üçüncü söylenen harf Ğ ve saydığımda 9. harf oluyor. Yani 3. adım 9 oluyor.

Y1, oluşturduğu cebirsel ifadenin doğruluğundan emin olduğunu aşağıdaki açıklamalarıyla göstermektedir.

20A: Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

21Y1: (*Yaptığı işlemleri kontrol ediyor*) Evet.

22A: Nasıl emin oluyorsun?

23Y1: Yerine koyarak.

24A: Yerine koyarak nasıl emin olduğunu açıklar mısın?

25Y1: Mesela 2. adımda 5 çıkması gerek. Bakalım buradan $2 \times 4 = 8$ yapar. 8'den 3 çıkarırsak 5 olur. 3. adımda $4 \times 3 = 12$ yapar. $12 - 3 = 9$ olur. Böyle emin oldum.

Y1, oluşturduğu cebirsel ifadenin doğruluğunu yazılı çözümlerinde olduğu gibi değişikene değer verme yöntemi ile kontrol etmektedir (25Y1).

28A: Burçin'in söyleyeceği 5. harfi nasıl bulduğunu açıklar mısın?

29Y1: Cebirsel ifadede yerine koyarsak;

$$4 \times 5 = 20$$

$$20 - 3 = 17 \text{ buluruz. Bu da N harfi yapar.}$$

- 30A:** Bulduğun sonucun doğruluğundan emin misin?
- 31Y1:** Evet. (*Bulduğu sonucun doğruluğundan son derece emin*)
- 32A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 33Y1:** Cebirsel ifadeyi doğru yaptım çünkü.
- 34A:** Oyun kurallarını tekrar gözden geçir bakalım. Hala emin misin?
- 35Y1:** (*Sessizlik*) Soruyu okuyabilir miyim?
- 36A:** Tabi ki. Soruyu okuduktan sonra düşüncelerini söyleyebilirsin.
- 37Y1:** (*Soruyu tekrar okuyor*) Soruyu anladım, cevaplarım da doğru bence.

Y1, (d) ve (e) maddelerinin cevabını yazılı çözümlerinde yanlış bulmaktadır. Bunun sebebi problem bağlamında yer alan bilgilerden bazılarını dikkate almaması ya da gözden kaçırmasıdır. Y1, mülakat sırasında da bu hatalarını tekrar etmekte ve (d) maddesinin cevabı sorulduğunda yazılı çözümleri ile aynı çözümleri uygulamaktadır (29Y1). Öğrencinin bulduğu sonuçların doğru olduğunu düşünmesinin sebebi oluşturduğu cebirsel ifadeden son derece emin olmasıdır (33Y1). Soruyu tekrar okumasına rağmen öğrencinin ilgili bağlamı fark edemediği görülmektedir (37Y1).

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan O1'in yazılı çözümlerine ilişkin yaptığı açıklamalar aşağıda verilmektedir.

- 9A:** Grafiği nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?
- 10O1:** Grafikte önce tüm harfleri gösteriyoruz. Sonra sırasıyla Burçin'in ilk A söylediğini sonra Timuçin'in D söylediği için bunları gösteriyoruz ve bu şekilde gösteriyoruz.
- 11A:** Grafiği kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?
- 12O1:** Evet, eminim.
- 13A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 14O1:** Tek tek Burçin ve Timuçin'in söyleyeceği harflere baktım. O nedenle emin oldum.

O1'in yazılı çözümlerinde grafik olarak adlandırdığı şekilden emin olmasının nedeni aslında öğrencinin artış miktarını kullanarak örüntünün tüm adımları bu şekil üzerinde belirtmesidir. Fakat bu konuda ikna edici açıklamalar yapmamaktadır.

- 17A:** Cebirsel ifadeyi oluştururken gösterimleri (tablo, grafik, denklem vb.) nasıl kullandın? Açıklar mısın?
- 18O1:** a herhangi bir harf ve 4 harf sonrasını söyleriz. O nedenle $a + 4$ deriz.

- 19A:** Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 20O1:** Evet.
- 21A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 22O1:** Grafiğe bakarak bunu anlarız.
- 23A:** Burçin'in söyleyeceği 5. harfi nasıl bulduğunu açıklar mısın?
- 24O1:** Grafikte yazdığımda 5B yazdığım yer Burçin'in söylediği harfe denk geliyor zaten.
- 25A:** Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?
- 26O1:** Başka bir yol aklıma gelmiyor şuan.

O1'in doğru sonuçlara ulaşması, özyinelemeli basit işlemler yaparak artış miktarını kullanması ile gerçekleşmektedir. Fakat öğrenci çözüm sürecinin hiçbir aşamasında bulduğu sonuçları kontrol ettiğini gösteren bir işleme ya da ikna edici açıklamaya yer vermemektedir (14O1, 22O1). Öğrencinin sonuçlarını doğru bulması ve oluşturduğu şekli doğru sonuçlara ulaşmak için hassasiyetle hazırlaması prosedürleri hassasiyetle yürütme bileşenini sağladığını göstermektedir (24O1). Fakat öğrenci sonuçların doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağlayamamaktadır.

D1 ve D2 ise örnek olay çalışmalarında yetkinliği sağladıklarına ilişkin herhangi bir prosedüre veya açıklamaya yer vermemektedir.

Harflerin Oyunu Probleminde C4 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 35'te görülmektedir.

Tablo 35

Harflerin Oyunu probleminde C4 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına	"Cebirsel ifadenin doğru olduğundan mesela ikinci adımı bulmak için $x'e 2$ verince 5 çıkıyor yani beşinci harf D harfi.	Y1, Y2,

yönelik ikna edici açıklama yapan	<i>x'e 3 verdiğimizde 9 yani Ğ harfi çıkıyor. Böylece doğru olduğunu anlarım.</i> (Y2)	
C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>"Sırayla 4 ekleyerek gittiğimizde Burçin ilk harfi söylüyor. Sonra Timuçin söylüyor. Sırayla söylediklerinde alfabe bitince başa dönüyorlar. Burçin'e Ç harfi denk geliyor (O2)</i>	O1, O2
C4 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>"Tam emin değilim ama harfler böyle gittiği için böyle yazdım. A, B, C, D, E, F, G, Ğ, H, J... Böyle yani evet eminim."</i> (D2)	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.4.3. "n" Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular

"n" Neyi İfade Ediyor? probleminde $n + n$ ve $n + 6$ cebirsel ifadelerinden hangisinin daha büyük olduğunu karşılaştırırken öğrencilerin değişkene yükledikleri anlamların irdelenmesi amaçlanmıştır. Problemin herhangi bir alt maddesinde, öğrencilerin sonuçlarını kontrol etmeleri istenmemektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Prosedürleri hassasiyetle yürütme: Örüntünün diğer adımlarını bulmak için aritmetik ve cebir içerikli prosedürleri uygun yer ve zamanda, doğru ve akıcı uygulama
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme
 - Problem bağlamına başvurma: Sonuçlarına gerekçe sunarken problem bağlamında verilen bilgi ve durumlardan yararlanma
 - Matematiksel prosedürleri kullanma: Sonuçlarını matematiksel prosedürlere dayandırarak doğruluğundan emin olma
 - Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme: Bulduğu sonuçları belirli bir mantık çerçevesinde açıklarken kelimelerle gerekçeler sunma

C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, $n + n$ ve $n + 6$ cebirsel ifadelerini karşılaştırabilmek için değişkene farklı değerler vererek oluşan durumları yorumladıkları

görülmektedir. Bu süreçte öğrenciler prosedürlerini hassasiyetle yürüterek doğru, verimli ve akıcı bir şekilde gerçekleştirmektedir. Y1'in özyinelemeli prosedürlerini doğru yer ve zamanda hassasiyetle yürütme süreci Şekil 90'da görülmektedir.

Handwritten mathematical work showing a pattern of addition problems. The first part shows $n=1$ olursa $1+1=2$, $n=2$ olursa $2+2=4$, $n=3$ olursa $3+3=6$. The second part shows $n=6$ olursa $6+6=12$, $n=7$ olursa $7+7=14$, $n=8$ olursa $8+8=16$. Brackets and arrows indicate a pattern or continuation.

Şekil 90. Y1'in özyinelemeli prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.

C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, buldukları sonuçların doğruluğunu kontrol ettiklerini göstermektedir. Öğrenciler ulaşacakları sonuçları ve bu sonuçların doğru olacağını tahmin ederek bazı matematiksel prosedürler ve açıklamalar kullanmaktadır. Dolayısıyla bu öğrencilerin sonuçlarını kontrol ederken benzer stratejiler uyguladıkları söylenebilir.

Y2'nin sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme sürecine nasıl başladığı Şekil 91'de görülmektedir.

Bu vereceğim değere göre cevap değişir.

$n=3$ dersak

$3+3=6$ $3+6=9$

$n=5$ dersak

$5+5=10$ $5+6=11$

$n=7$ dersak

$7+7=14$ $7+6=13$

Şekil 91. Y2'nin sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.

Y2'nin çözümlerine başlamadan önce bu vereceğim değere göre cevap değişir açıklamasını yapması sonuçları tahmin edebildiğine ilişkin ipucu vermektedir. Ardından n değişkenine farklı değerler vermesi, tahmin ettiği sonuçları kontrol etme ve emin olma sürecinde matematiksel prosedürler kullandığını göstermektedir.

Ayrıca Y2 kontrol etme sürecinin sonunda bulduğu sonuçları değerlendirmekte ve “*n*, 6’dan büyükse $n + 6$ büyük; *n*, 6’dan küçükse $n + n$ büyük; *n*, 6’ya eşitse $n + n$ ve $n + 6$ eşit” gibi doğru açıklamalara yer vermektedir.

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler ise gerekenden oldukça az prosedürel işlem yapmaktadır. Bu öğrenciler sadece sonuçlarını belirterek bu sonuçlara nasıl ulaştıklarını çözümlerinde net bir şekilde ifade etmemektedir. Doğru sonuçlara ulaştıkları için bu öğrencilerin prosedürleri doğru ve verimli uyguladıkları, fakat sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmedikleri için yetkinliği zayıf düzeyde sağladıkları görülmektedir.

Bağlama ilişkin prosedürleri uygulayamadıkları ve herhangi bir sonuca ulaşamadıkları için D1 ve D2’nin bu yetkinliği sağlayamadığı tespit edilmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

“*n*” Neyi İfade Ediyor? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde prosedürleri yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C4 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bazı farklılıkların olduğu görülmüştür. C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan Y2, prosedürlerini hassasiyetle yürütme sürecini açıklayabilmektedir (22Y2).

22Y2: Tabi. Bence *n*’e verdiğimiz değerlere göre sonuç değişir. Mesela *n*’e 6’dan küçük değerler verince $n + 6$ hep daha büyük çıkıyor. Eksi sayılar bile. $n = 6$ olunca zaten eşit çıkıyor. *n* eğer 6’dan büyükse o zamanda değişiyor. Bu sefer $n + n$ hep daha büyük oluyor. Yani hep farklı çıkıyor. Ama en azından bir kural var. Her şey altına göre değişiyor

23A: Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin?

24Y2: Yani doğru mu bilmiyorum. Bence böyle. Başka bir şey bulabilir miyim diye düşünüyorum. Ama yok bence.

Y2, yazılı çözümlerinde doğru sonuçlara ulaşırken hangi prosedürleri uyguladığını açıklayabilse de sonuçlarının doğruluğundan emin olup olmadığı sorulduğunda öğrencinin sonuçlarından emin olmadığı görülmektedir (24Y2). Öğrencinin sonuçlarının doğruluğundan emin olmak için problem bağlamına başvurma, matematiksel prosedürler kullanma ya da açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme bileşenlerinden herhangi birini sağlayamadığı

görüldüğünden, örnek olay çalışması sonucunda C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı sonucuna varılmıştır.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan Y1'in ise sonuçlarından emin olduğunu gösteren açıklamalar yaptığı görülmektedir.

26A: $n + n$ değeri mi daha büyük? $n + 6$ değeri mi daha büyük? Bu konuda nasıl bir sonuca ulaştığını bize açıkla mısın?

27Y1: 3 farklı sonuca ulaştım. Birincisi n altıdan küçükse $n + 6$ büyük. İkincisi n altıya eşitse $n + n$ ile $n + 6$ eşit. n altıdan büyükse $n + n$ büyük. Bunu verdiğim değerlerden sonra fark ettim.

28A: Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin?

29Y1: Evet.

30A: Önceki adımlarda yaptığın işlemleri ve çizdiğin tabloyu sonuca ulaşırken nasıl kullandın?

31Y1: n herhangi bir sayı olabilirdi ve ben öylesine 1 verdim. Sınıfta başka konularda soru çözerken de genelde 1'den başlarız. Bu şekilde nasıl ilerlediğini gördüm. n 'in değerine göre sonuç değişiyor.

32A: Bu yanıtı vermendeki kritik noktalar nelerdi?

33Y1: n 'e 6 verince her şey anlaşıldı. Bence 6 değeri kritik.

Y1, yaptığı işlemleri açıkladığında prosedürlerini hassasiyetle yürütme bileşenini sağladığını göstermektedir (27Y1). Y1'in bu prosedürlerin doğruluğundan emin olmak için matematiksel prosedürler kullanma bileşenini sağladığı ve çeşitli değerler verdiğinde sonuçlarının doğru çıktığını kontrol ettiği görülmektedir (31Y1). Ayrıca öğrencinin kritik değerin 6 olduğunu belirtmesi problem bağlamına başvurduğunu göstermektedir. Dolayısıyla Y1, örnek olay çalışmasında yaptığı açıklamalar ile C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir.

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerin prosedürleri hassasiyetle yürütme bileşenini sağladıkları görülmektedir. Fakat bu öğrenciler de Y2 gibi sonuçlarından emin değildir ve emin olmak için herhangi bir strateji uygulamamaktadır.

D1 ve D2 ise örnek olay çalışmalarında yetkinliği sağladıklarına ilişkin herhangi bir prosedüre veya açıklamaya yer vermemektedir. D2'nin bu süreçte yaptığı açıklamalar aşağıda verilmektedir.

- 11A:** $n + n$ değeri mi daha büyük? $n + 6$ değeri mi daha büyük? Bu konuda nasıl bir sonuca ulaştığını bize açıkla mısın?
- 12D2:** Sonucu belli değil. Ama $n + 6$ değeri daha büyük olabilir.
- 13A:** Neden?
- 14D2:** Sonuçta 6 var. Yani 6'dan büyük olduğu kesin.
- 15A:** n 'i bilmeden 6'dan büyük olduğunu nasıl anlıyorsunuz?
- 16D2:** n hangi sayı olursa olsun. Orası 6'dan büyük çıkar. Mm... Ama diğer taraf her şey olabilir.
- 17A:** Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin?
- 18D2:** Mm... Evet.
- 19A:** Bu yanıtı vermedeki kritik noktalar nelerdi?
- 20D2:** Bilmiyorum.

D2'nin genel olarak açıklamalarında problemi çözmek için prosedürler uygulamadığı ve sonuçlarını kontrol etmediği görülmektedir (12D2, 16D2, 20D2).

“n” Neyi İfade Ediyor? Probleminde C4 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 36'da görülmektedir.

Tablo 36

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde C4 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“3 farklı sonuca ulaştım. Birincisi n altıdan küçükse $n + 6$ büyük. İkincisi n altıya eşitse $n + n$ ile $n + 6$ eşit. n altıdan büyükse $n + n$ büyük. Bunu verdiğim değerlerden sonra fark ettim. n herhangi bir sayı olabilirdi ve ben öylesine 1 verdim. Sınıfta başka konularda soru çözerken de genelde 1'den başlarız. Bu şekilde nasıl ilerlediğini gördüm. n 'in değerine göre sonuç değişiyor. n 'e 6 verince her şey anlaşıldı. Bence 6 değeri kritik.” (Y1)	Y1

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>“Bence n’e verdiğimiz değerlere göre sonuç değişir. Mesela n’e 6’dan küçük değerler verince $n + 6$ hep daha büyük çıkıyor. Eksi sayılar bile. $n = 6$ olunca zaten eşit çıkıyor. n eğer 6’dan büyükse o zamanda değişiyor. Bu sefer $n + n$ hep daha büyük oluyor. Yani hep farklı çıkıyor. Yani doğru mu bilmiyorum. Bence böyle. Başka bir şey bulabilir miyim diye düşünüyorum.” (Y2)</i>	Y2, O1, O2
C4 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“Hepsinde farklı sonuç çıkıyor bende yazmadım. İkisi de birbirinden büyük değil... Farklı değerler verince değişiyor. Bence böyle olduğunu düşünüyorum. Bence bu soru şaşırtmalı soru. Ama kesin bir cevabı yok galiba” (D1)</i>	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde Y2’nin değişiklik gösterdiği tespit edildi. Yazılı çözümlerinde hassasiyetle doğru sonuçlara ulaşması, matematiksel prosedürler kullanması C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını gösterirken; öğrencinin açıklamaları sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağlayamadığını göstermektedir. Dolayısıyla Y2, C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamaktadır.

4.4.4. Teraziler Nasıl Dengede? Problemine İlişkin Bulgular

Teraziler Nasıl Dengede? probleminde öğrencilere denge halinde 3 farklı terazi verilmiştir. Terazilerde kare, daire ve üçgen şekilleri ile temsil edilmiş ağırlıkların birbirleriyle nasıl ilişkili olduğu gösterilmektedir. Problemin (e) alt maddesinde, öğrencilerin sonuçlarını kontrol etmeleri istenmektedir.

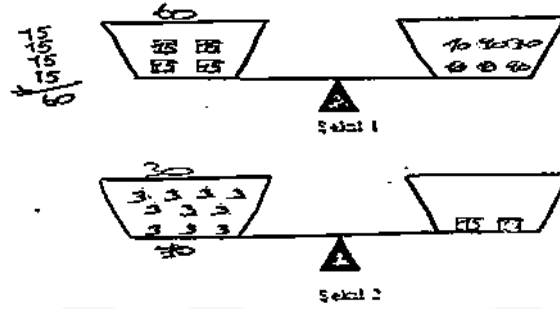
Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Prosedürleri hassasiyetle yürütme: Terazilerdeki eşitliklerden yararlanarak oluşturulan denklemleri çözme ve prosedürleri akıcı ve doğru yürütme
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme
 - Problem bağlamına başurma: Bulduğu değişken değerlerinin doğru olduğuna dair gerekçe sunarken problem bağlamında verilen terazileri kullanma

- Matematiksel prosedürleri kullanma: Denklemlerin ya da ulaştığı sonuçların doğruluğunu göstermek için aritmetik ya da cebirsel prosedürler kullanma
- Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme: Bulduğu sonuçları belirli bir mantık çerçevesinde açıklarken kelimelerle gerekçeler sunma

C4 yetkinliğini güçlü sağlayan öğrenciler, oluşturdukları denklemler ile aritmetik ve cebirsel prosedürlere başvurmaktadır. Bu öğrencilerin prosedürlerini doğru yer ve zamanda verimli bir şekilde gerçekleştirerek doğru sonuçlara ulaştıkları görülmektedir. Bu öğrenciler sonuçlarını kontrol ederek doğruluğundan emin olmaktadır. D1, sonuçlarını ilk kez kontrol ettiği bu problemde bağlama başvurma yöntemi ile bu yetkinliği sağlamaktadır. D1'in bulduğu sonuçların doğruluğunu kontrol etme süreci Şekil 92'de görülmektedir.



Şekil 92. D1'in sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.

D1, kare şekli ile temsil edilen ağırlığı 15 kg; daire şekli ile temsil edilen ağırlığı 10 kg; üçgen şekli ile temsil edilen ağırlığı ise 3 kg bulmuştur. Öğrencinin sonuçlarını kontrol etmek için bağlamda verilen terazileri kullandığı görülmektedir. Şekillerin ağırlıklarını üzerine yazarak gösteren D1, her bir kefedeki toplam ağırlığı hesaplayarak iki taraftaki ağırlıkların eşit olup olmadığını, bir başka deyişle terazilerin dengede kalıp kalmadığını kontrol etmektedir. Her iki tarafın birbirine eşit olduğunu gören öğrenci, böylece sonuçlarından emin olmaktadır. Teraziler üzerinde ağırlıkları yerleştirerek sonuçlarını kontrol etmesi D1'in problem bağlamına başvurduğunu göstermektedir.

Sonuçlarını kontrol eden bir diğer öğrenci Y1'in bu süreci Şekil 93'te görülmektedir.

e) Bulduğumuz değerlerin doğru olup olmadığını bulmak için 3, teraziden gideriz-

$$\begin{aligned} 3. \text{ terazî} &\rightarrow 3y + z = 33 \\ 3 \cdot 10 + z &= 33 \\ 33 &= 33 \text{ yani doğru} \end{aligned}$$

Şekil 93. Y1'in sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreci.

Y1 sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme sürecinde matematiksel prosedürleri kullanmaktadır. Birinci ve ikinci teraziden yararlanarak bulduğu değerlerin üçüncü teraziden yararlanarak oluşturduğu denklem ile uyumlu olup olmadığını kontrol etmekte ve uyumlu olduğunu gördüğünde sonuçlarından emin olmaktadır.

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, prosedürleri hassasiyetle yürüterek doğru sonuçlara ulaşmaktadır. Y2'nin prosedürlerini akıcı ve titiz bir şekilde gerçekleştirme ve doğru sonuçlara ulaşma süreci Şekil 94'te verilmektedir.

$$\begin{aligned} 2x &= 3y = 10z = 30 \\ 2 + 10z &= 33 \\ \frac{11z}{11} &= \frac{33}{11} & z &= 3 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{30}{2} & x &= 15 & \frac{3y}{3} &= \frac{30}{3} \end{aligned}$$

Şekil 94. Y2'nin cebirsel prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.

Bu öğrencilerin yetkinliği zayıf düzeyde sağlamış olmalarının sebebi sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmemeleridir. Y2, O1 ve O2 ise oldukça emin olmaları sebebiyle sonuçlarını kontrol etme ihtiyacı duymamakla birlikte, yanlış olsaydı tüm denklemleri sağlamazdı; bulduğum değerleri terazilerde yerine koyarak doğru olduğunu anlarım gibi açıklamalara yer vermektedirler. Bu açıklamaları uygulamamaları nedeniyle sonuçların doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağlayamadıkları söylenebilir.

C4 yetkinliğini sağlayamayan öğrenci D2 ise temsil oluşturma aşamasında doğru denklemler elde etmektedir, fakat öğrencinin bu denklemlerdeki bilinmeyenleri bulmaya yönelik prosedürler gerçekleştirmediği görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Teraziler Nasıl Denge? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde prosedürleri yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C4 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir.

C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, prosedürlerini hassasiyetle yürüterek doğru sonuçlara ulaşmakta ve ulaştıkları sonuçları kontrol etmek için bazı stratejilere başvurmaktadır. C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan D1'in açıklamaları aşağıda verilmektedir.

4D1: İlk olarak 4 kare eşittir 6 yuvarlak oluyor. Buradan şöyle bir sonuç daha var: 2 kare de 3 yuvarlağa eşit oluyor... İkinci terazide 2 kare 10 üçgene eşit olduğu için o zaman demek ki 10 üçgen de 3 yuvarlağa eşit... Üçüncü terazide 1 üçgenle 3 yuvarlağın toplamı 33 kilograma eşitmiş. 3 yuvarlak yerine 10 üçgen yazıp buldum.

D1 bu açıklamasıyla prosedürlerini hassasiyetle yürütme sürecinde neler yaptığını anlatmaktadır. D1'e cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandığı sorulduğunda terazilerden yararlandığını açıklamaktadır.

9A: Kare, üçgen ve dairenin ağırlıklarını bulurken yaptığın işlemleri anlatır mısın? Cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandın?

10D1: Demin de dediğim gibi. Terazilere bakıp eşitledim. En son 11 üçgen otuz üçe eşit olduğu için bir üçgen 3 çıkıyor... Sonra da kareyi ve yuvarlağı buldum.

D1, “*terazilere bakıp eşitledim*” ifadesiyle bulduğu değerleri terazilerin üzerinde gösterdiğini belirtmektedir. Öğrencinin bunu yaparak bulduğu değerlerin sonuçları sağlayıp sağlamadığını görmek istemesidir. Dolayısıyla öğrenci sonuçlarının doğruluğunu kontrol ettiğini bu şekilde belirtmekte ve C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan O2, prosedürlerini hassasiyetle yürütme sürecini açıklayabilmektedir.

- 3A:** Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğun cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?
- 4O2:** (çözümlerine bakarak açıklıyor) Şekil birde, $2m$ eşittir $3t$... Şekil ikide $5y$ eşittir m ... Şekil üçte $3t$ artı bir y eşittir 33 oluyor...
- 5A:** Oluşturduğun bu gösterimlere cebirsel ifade diyebilir miyiz?
- 6O2:** Evet hocam.
- 7A:** Cebirsel ifade ile denklem arasındaki fark nedir?
- 8O2:** (düşünüyor) İkisinde de bilinmeyen olduğu için aynı aslında...(emin değil)
- 9A:** Kare, üçgen ve dairenin ağırlıklarını bulurken yaptığın işlemleri anlatır mısın? Cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandın?
- 10O2:** Şekil 3 teki 33 sayısı var oradan gittim. Zaten diğer denklemleri de yazmıştık... Oradan değerleri denklemde yazdım.

O2, sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağladığını gösteren bir açıklama yapmamaktadır.

Teraziler Nasıl Dengede? Probleminde C4 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 37'de görülmektedir.

Tablo 37

Teraziler Nasıl Dengede? probleminde C4 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	"Denklemleri kullandım. $4x = 6y$ sadeleştirsek $2x = 3y$ olur. $10z = 2x$ bir de $3y + z = 33$. $3y$ yerine $2x$ yazdım. $2x$ yerine $10z$ koydum. $11z = 33$ oldu. Buradan 11 'e böl $z=3$ oldu. İkinci terazide yerine koydum, $x=15$ buldum. Birinci terazide yerine koydum, $y=10$ buldum. Diğer terazileri sonuçları bulurken kullandım. Sonuçlar doğru mu diye bakmak için. Kullanmadığım teraziye uyuyor mu bakmak istedim." (Y1)	Y1, D1

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Birinci, ikinci ve üçüncü terazideki şekillere göre denklemlerimizi yazıyoruz. Sonra birleştiriyoruz. Yani mesela ben birinci ve ikinci terazide kare var. O nedenle denklemleri birleşik yazabiliriz. O nedenle 2 kare eşittir 3 daire eşittir 10 üçgen çıkıyor.” (O1)	Y2, O1, O2
C4 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“Evet. Yani mesela $4x = 6y$ demişim. Sonra 4’e böldüm. $x = 6y/4$ çıktı. Sadeleştirince $3y/2$ oluyor yani. Sonra kafam karıştı” (D2)	D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.4.5. Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular

Timuçin İnternet Kafede probleminde bir internet kafede bilgisayar kullanma süresine bağlı ücret değişimlerini ifade eden bir bağlam ile sabit değerin, değişkenin ve artış miktarının belirtildiği bir problem cümlesi verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Prosedürleri hassasiyetle yürütme: Denklem ve diğer temsilleri kullanırken aritmetik ve cebirsel prosedürleri hassasiyetle yürütme
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme
 - Problem bağlamına başvurma: Oluşturdukları temsillerin doğruluğunu kontrol ederken problemde verilen bilgileri dikkate alma
 - Matematiksel prosedürleri kullanma: Denklemlerin ya da ulaştığı sonuçların doğruluğunu göstermek için aritmetik ya da cebirsel prosedürler kullanma
 - Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme: Bulduğu sonuçları belirli bir mantık çerçevesinde açıklarken kelimelerle gerekçeler sunma

Öğrencilerin C4 yetkinliğine ilişkin yanıtları incelendiğinde sonuçlarının doğru olup olmadığını kontrol etmedikleri görülmektedir. Bu durumun ilk akla gelen sebebi, problemin alt maddelerinden herhangi birinde sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmeleri şeklinde bir yönerge bulunmaması olabilir. Diğer bir sebep ise sonuçlarını doğru bulan öğrencilerin, bu sonuçlarının doğruluğuna kendilerinin ikna olması ve kontrol etmeye gerek duymaması olarak görülebilir. Her iki ihtimal de öğrencilerin bu problemde kendiliğinden *sonuçların doğruluğunu kontrol etme* bileşenini sağlamadıkları anlamına gelmektedir. Yine de bu durum ilerleyen bölümde yer alan örnek olay çalışmasında yer alan mülakatlar sırasında öğrencilerin yaptıkları açıklamalar ile ele alınacaktır. Buldukları sonuçları kontrol etme yetkinliği göstermedikleri için hiçbir öğrencinin bu yetkinliği güçlü düzeyde sağlamadığı görülmektedir.

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerden bazıları prosedürlerinde oluşturdukları denklemi kullanmaktadır. Bu öğrencilerin cebirsel prosedürleri süreç içerisinde doğru ve akıcı gelişmektedir. Öğrencilerden Y1 ve O2 bu problemin bağlamına farklı bir bakış açısıyla yaklaşmaktadır. Bu nedenle öğrencilerin aritmetik ve cebirsel prosedürleri diğerlerinden farklı gelişmektedir. Y1'in problemin (f) maddesine verdiği yanıtlarda önce herkes gibi denklemi kullanarak çözüm yaptığı ve ardından bu çözüm dışında farklı bir fikri olduğunu belirttiği görülmektedir. Bu öğrenci farklı bir strateji ile prosedürlerini uygularken Şekil 95'te verilen çözüm sürecindedir.

1. gün	2. gün	3. gün	4. gün	5. gün
4 saat 20 dk	4 saat 50 dk	4 saat 55 dk	4 saat 55 dk	4 saat 59 dk
2 TL	2 TL	2 TL	2 TL	2 TL

Toplam yine 20 TL yapar ama daha fazla saat kullanmış olabilir. Her birinde atılınca duranıp 59 dk bilgisayardan çıkıyorsa:

$$\begin{array}{r}
 59 \\
 \times 3 \\
 \hline
 177 \\
 + 20 \\
 \hline
 197 \\
 + 20 \\
 \hline
 217 \\
 + 55 \\
 \hline
 272
 \end{array}$$

20 saat + 4 saat + 55 dk = 24 saat 55 dk kullanmış.

Şekil 95. Y1'in aritmetik prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.

Y1, bilgisayar kullanım süresinin fiyatının 20 TL olarak verildiği soruda bu ücreti 5 güne paylaştırırken 4 saat yerine 4 saat 59 dk. şeklinde düşünerek bir saat dolmadığı için yine aynı ücretin ödeneceğini belirtmektedir. Çözümlerini bu düşünme stratejisine göre yönlendirerek prosedürlerini oldukça verimli ve doğru kullanmaktadır.

O1, D1 ve D2'nin ise bu problemde prosedürleri verimli ve doğru bir şekilde gerçekleştiremedikleri; en verimli yolun denklem kullanmak olduğu düşünülürse bu

öğrencilerin sayarak bazı sonuçları bulma eğiliminde oldukları görülmektedir. Öğrencilerin çözümleri, bazı prosedürlerinin doğru yerde ve doğru zamanda hassasiyetle uygulanmış olsa da bu noktada diğer öğrencilere göre sınırlı kaldıklarını göstermektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Timuçin İnternet Kafede problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde prosedürleri yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C4 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bazı farklılıkların olduğu görülmektedir.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmediği için zayıf düzeyde sağlayan Y1'in açıklamaları aşağıda verilmektedir.

28A: Denklemi nasıl oluşturdun? Anlatır mısın?

29Y1: 2 TL zaten verecek. Ne kadar 50 Kuruş artacağı süreye bağlı. O yüzden bilinmeyen çarpı 50 Kuruş derim. *(Yazarak tekrar oluşturduğu denklemi gösteriyor)*

30A: Oluşturduğun denklemi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

31Y1: Evet.

32A: Nasıl emin oluyorsun?

33Y1: Denklemden saatleri yerine koyarım. Tablodan kontrol edince doğru çıkıyor.

Y1, denklemi nasıl oluşturduğunu açıklarken prosedürlerini hassasiyetle yürütme bileşenini sağlamaktadır (28Y1). Öğrenci denklemden değişkene ilgili değerlere verip oluşturduğu tablo ile karşılaştırdığında sonuçlarını kontrol ettiğini ve doğru çıktığını açıklamaktadır (33Y1). Bu durum yazılı çözümlerinde C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan Y1'in örnek olay çalışmasında sonuçlarını nasıl kontrol ettiğini açıklayabilmesi üzerine sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini de sağlayabildiğini göstermektedir. Dolayısıyla Y1, C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağladığını gösteren Y2, aşağıdaki açıklamaları yapmaktadır.

11A: Denklemi nasıl oluşturdun? Anlatır mısın?

12Y2: Bilgisayarı açtığında daha süre geçmeden 2 TL verdiği için 2 sabit terim oluyor. Yani süreyle bir ilgisi yok. Saat ilerledikçe 50 kuruş artıyor. Saati bilmediğimiz için x dedim. Bu şekilde $2+0,5.x$ dedim. TL olmadığı için 0,5 diyoruz.

13A: Oluşturduğun denklemi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

14Y2: Evet, eminim.

15A: Nasıl emin oluyorsun?

16Y2: Tablodan emin olduğum için. Denklemden değer verince tabloda bakıyorum ve doğru ilerliyor.

Y2'nin yaptığı açıklamalar, Y1'in yaptığı açıklamalar ile benzerdir. Öğrenci Y1 gibi yazılı çözümlerinde sağlamadığı düşünülen sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağladığını yaptığı açıklamalar ile göstermektedir (16Y2). Dolayısıyla yapılan örnek olay çalışması sonucunda Y2'nin de C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı görülmektedir.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan O2'nin açıklamaları aşağıda verilmektedir.

7A: a maddesinin cevabında $0 < x < 59$ yazmışsın bu ne anlama geliyor?

8O2: Yani burada 60 dakika olarak düşündüm. ... 60 dakika kullanınca 50 kuruş daha veriyor hocam. 60 dakikadan az olursa 50 kuruştan az verir.

9A: Denklemi nasıl oluşturdun? Anlatır mısın?

10O2: Bilgisayarın açılış parası 2 TL... Buna her saat 50 kuruş geldiği için... Saate x dedim hocam. Böyle yazdım. Bunların toplamı ödeyeceğimiz fiyat olur dedim.

11A: Oluşturduğun denklemi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

12O2: Evet, eminim.

13A: Nasıl emin oluyorsun?

14O2: (cevap veremiyor)

O2, denklemi nasıl oluşturduğunu açıklarken prosedürlerini hassasiyetle yürütme bileşenini sağlamaktadır (10O2). Fakat öğrenciye denklemin doğru olduğundan nasıl emin olduğu sorulduğunda cevap vermediği görülmektedir (14O2). Bu nedenle O2'nin yazılı çözümlerinde olduğu gibi sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağlamadığı için C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı görülmektedir.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan diğer öğrenciler prosedürlerini açıklayabilseler de, O2 gibi sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini örnek olay çalışmasında sağlayamamaktadırlar. Bu nedenle bu öğrencilerin yapılan mülakatlar sonucunda da C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları görülmektedir.

Timuçin İnternet Kafede Probleminde C4 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 38’de görülmektedir.

Tablo 38

Timuçin İnternet Kafede probleminde C4 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Bilgisayar kullanmak için 5 kere giderse her gidişte bilgisayarı açtığı için açılış fiyatı 2 TL veriyor. 5 kere 2 yani 10 TL olur. 20 TL ödemiş ve 10 TL kaldı geriye. $0,5 \cdot x = 10$. Yani cevap 20 saat çıkar. 20 saat bilgisayar kullanmış. Denklemin doğru olduğundan emin olmak için saatleri yerine koyarım. Tablodan kontrol edince doğru çıkıyor” (Y2)	Y1, Y2
C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Yine aynı şekilde grafikten 4 TL olduğu belli. Diğer yoldan 4 saat 2 TL olduğu için 2 TL daha ekleyip 4 buldum.” (D2)	O1, O2, D1, D2
C4 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde Y1 ve Y2’nin değişiklik gösterdiği tespit edildi. Yazılı çözümlerinde hassasiyetle doğru sonuçlara ulaşmaları C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını gösterirken; öğrencilerin açıklamaları, sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme

bileşenini sağladıklarını göstermektedir. Dolayısıyla Y1 ve Y2, C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

4.4.6. Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde bir ortamda bulunan bakterilerin zamana bağlı artış sayısı ile ilgili bir bağlam ve diğer problemlerden farklı olarak bu bağlama ilişkin denklem verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Prosedürleri hassasiyetle yürütme: Denklem ve diğer temsilleri kullanırken aritmetik ve cebirsel prosedürleri hassasiyetle yürütme
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme
 - Problem bağlamına başvurma: Oluşturdukları temsillerin doğruluğunu kontrol ederken problemde verilen bilgileri dikkate alma
 - Matematiksel prosedürleri kullanma: Denklemlerin ya da ulaştığı sonuçların doğruluğunu göstermek için aritmetik ya da cebirsel prosedürler kullanma
 - Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme: Bulduğu sonuçları belirli bir mantık çerçevesinde açıklarken kelimelerle gerekçeler sunma

Öğrencilerin C4 yetkinliğine ilişkin yanıtları incelendiğinde sonuçlarının doğru olup olmadığını kontrol etmedikleri görülmektedir. Bu durumun ilk akla gelen sebebi, problemin alt maddelerinden herhangi birinde sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmeleri şeklinde bir yönerge bulunmaması olabilir. Diğer bir sebep ise sonuçlarını doğru bulan öğrencilerin, bu sonuçlarının doğruluğuna kendilerinin ikna olması ve kontrol etmeye gerek duymaması olarak görülebilir. Her iki ihtimal de öğrencilerin bu problemde kendiliğinden *sonuçların doğruluğunu kontrol etme* bileşenini sağlamadıkları anlamına gelmektedir. Yine de bu durum ilerleyen bölümde yer alan örnek olay çalışmasında yer alan mülakatlar sırasında öğrencilerin yaptıkları açıklamalar ile ele alınacaktır. Buldukları sonuçları kontrol etme yetkinliği göstermedikleri için hiçbir öğrencinin bu yetkinliği güçlü düzeyde sağlamadığı görülmektedir.

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler problemi çözme süreçlerinde prosedürlerini hassasiyetle yürütmektedir. Bu öğrenciler problemin alt maddelerinde istenilenlere cevap ararken prosedürlerini doğru yer ve zamanda en verimli biçimde

gerçekleştirmektedir. O1'in aritmetik ve cebirsel prosedürlerini akıcı ve titiz bir şekilde uygulama süreci Şekil 96'da görülmektedir.

$$\begin{aligned}
 &= 4808 = 8 \times (16 \cdot ?) \\
 &4800 = (16 \cdot ?) \\
 &\frac{4800}{16} = ? \quad 300 \text{ dk.} \\
 &\quad \quad \quad 300 \text{ da } 5500
 \end{aligned}$$

Şekil 96. O1'in prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.

Bağlama ilişkin prosedürleri yapamadıkları için D1 ve D2'nin bu yetkinliği değerlendirilememiş ve bu yetkinliği sağlayamadıkları şeklinde yorum yapılmıştır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Bakterilerin Hızına Yetiş problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde prosedürleri yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C4 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencilerin çözümlerinde gözlemlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladıkları görülmektedir.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağladığını gösteren Y1, aşağıdaki açıklamaları yapmaktadır.

27A: e maddesinin cevabını nasıl buldum? Açıklar mısın?

28Y1: Denklemden yerine koydum. Bakteri sayısı yazan yere 4808 yazarsak. Karşıya sekizi at falan öyle işte. Bir de sonra dakikayı saate çevirdim.

29A: Grafiği çizerken nelere dikkat ettiğini, nasıl çizdiğini anlatır mısın?

30Y1: Sekizin yerine dikkat ettim. Başta yanlış yazıyordum neredeyse. Sonra 16 artarak zaten. Orayı da tablodan baktım.

Y1, prosedürlerini doğru bir şekilde açıklamaktadır. Fakat öğrenci sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağladığını gösteren bir açıklama yapmamaktadır.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan bir başka öğrenci O1'in açıklamaları aşağıda verilmektedir.

- 15A:** Tabloyu nasıl oluşturdun? Anlatır mısın?
- 16O1:** Denklemden dakikaya sayı vererek. Sıfır yazınca 8 bakteri, 1 yazınca 24 bakteri, 2 yazınca 40 bakteri diye gidiyor.
- 17A:** Oluşturduğun tabloyu kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 18O1:** Evet.
- 19A:** Bakteri sayısındaki değişimi oluşturduğun tabloda doğru bir şekilde görebilir miyiz?
- 20O1:** Evet. Çünkü 16 artarak gidiyor.
- 21A:** Tabloda başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl gösterdin?
- 22O1:** Dakikaya sıfır yazarak 8 bakteri şeklinde.
- 23A:** 1 saat sonunda ortamdaki bakteri sayısının cevabını nasıl buldun?
- 24O1:** Burada 1 saat dediği için dikkat ediyoruz. Çünkü 1 saat 60 dakika olduğu için denkleme 60 yazıyoruz.

O1, tabloyu nasıl oluşturduğunu ve prosedür gerektiren maddelerin cevaplarını nasıl bulduğunu açıklarken prosedürlerini hassasiyetle yürütme bileşenini sağlamaktadır (16O1, 24O1). Fakat öğrenciye tablonun doğru olduğundan nasıl emin olduğu sorulduğunda açıklama yapmadığı görülmektedir (18O1). Bu nedenle O2'nin yazılı çözümlerinde olduğu gibi sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağlamadığı için C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı görülmektedir.

- 31A:** Bakteri sayısının 4808'e ulaştığını görmek için Tımuçin kaç saat gözlem yapmalıdır? Sorusunun cevabını nasıl buldun? Açıklar mısın?
- 32O1:** Bu sefer tam tersi oluyor. Yani bize dakikayı soruyor. $4808 = 8 + 16 \times \text{dk.}$ olarak denkleme çözeriz ve 300 dakika buluruz. Kaç saat dediği için 300 dakika 5 saat oluyor.
- 33A:** Grafiği çizerken nelere dikkat ettiğini, nasıl çizdiğini anlatır mısın?
- 34O1:** Bakteri sayısı yazılan tarafa önce 8 diyoruz en başlangıca. Sonra 16 artarak yazıyoruz.

O1'in tüm açıklamalarda prosedürlerini oldukça iyi açıklayabildiği görülmektedir. O1, istenenleri bulurken problemde verilen denkleme verimli ve akıcı bir şekilde kullanmakta ve doğru sonuçlara ulaşmaktadır (32O2).

Yazılı çözümlerinde C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan diğer öğrenciler de Y1 ve O1 gibi uyguladıkları prosedürleri açıkça ifade etmekte ve prosedürleri hassasiyetle yürütme

bileşenini sağlamaktadırlar. Fakat öğrencilerin hiçbiri bu problemde sonuçların doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağlayamadıklarını gösteremedikleri için C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayamamışlardır.

D1 ve D2 ise örnek olay çalışmalarında yetkinliği sağladıklarına ilişkin herhangi bir prosedüre veya açıklamaya yer vermemektedir.

Bakterilerin Hızına Yetiş Probleminde C4 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 39’da görülmektedir.

Tablo 39

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde C4 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	...	
C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Tabloyu dakika ve bakteri olarak yaptım. Sıfır dakika 8 oluyor. Sonra 1 dakikada 16 arttığı için 24 oluyor. Sonra da 16 ekleyip yaptım. (d) maddesinde 1 saat dediği için dakika yerine 60 yazarak buldum.” (Y2)	Y2, O1, O2
C4 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“1 saat demiş. 60 dakika. Tabloda 64 dakikayı buldum. Yani 32 bakteri olabilir mi? Bence 32 bakteri.” (D2)	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yetkinliği sağlama düzeylerinde bir farklılık olamadığı görülmektedir.

4.4.7. Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular

Sekizgen Masalar probleminde gerçek yaşamdan alınmış bir senaryoyu temsil eden örüntü verilmiştir. Bu senaryoda adım sayılarına ilişkin misafir sayısının nasıl ilerlediği

görülmektedir. Örüntüyle ilişkili verilen tabloda bu örüntüde yer alan miktarlar belirtilmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden yetkinliği sağlayıp sağlayamadıkları, bu problem için aşağıdaki kriterler doğrultusunda incelenmektedir.

- Prosedürleri hassasiyetle yürütme: Denklem ve diğer temsilleri kullanırken aritmetik ve cebirsel prosedürleri hassasiyetle yürütme ve doğru sonuçlara ulaşma
- Sonuçların doğruluğunu kontrol etme
 - Problem bağlamına başvurma: Oluşturduğu denklemin doğruluğunu kontrol ederken problemde verilen bilgileri dikkate alma
 - Matematiksel prosedürleri kullanma: Denklemlerin ya da ulaştığı sonuçların doğruluğunu göstermek için aritmetik ya da cebirsel prosedürler kullanma
 - Açıklamalar ile sonuçlarını değerlendirme: Bulduğu sonuçları belirli bir mantık çerçevesinde açıklarken kelimelerle gerekçeler sunma

Öğrencilerin C4 yetkinliğine ilişkin yanıtları incelendiğinde sonuçlarının doğru olup olmadığını kontrol etmedikleri görülmektedir. Bu durumun ilk akla gelen sebebi, problemin alt maddelerinden herhangi birinde sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmeleri şeklinde bir yönerge bulunmaması olabilir. Diğer bir sebep ise sonuçlarını doğru bulan öğrencilerin, bu sonuçlarının doğruluğuna kendilerinin ikna olması ve kontrol etmeye gerek duymaması olarak görülebilir. Her iki ihtimal de öğrencilerin bu problemde kendiliğinden sonuçların doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağlamadıkları anlamına gelmektedir. Yine de bu durum ilerleyen bölümde yer alan örnek olay çalışmasında yer alan mülakatlar sırasında öğrencilerin yaptıkları açıklamalar ile ele alınacaktır. Buldukları sonuçları kontrol etme yetkinliği göstermedikleri için hiçbir öğrencinin bu yetkinliği güçlü düzeyde sağlamadığı görülmektedir.

C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerin, problemin her bir alt maddesi için aritmetik ve cebirsel prosedürleri doğru ve verimli bir şekilde uyguladıkları görülmektedir. Bu öğrenciler prosedürlerini akıcı ve titiz uygularken doğru yer ve zamanda gerçekleştirdikleri için doğru sonuçlar elde etmektedir. Y2'nin prosedürlerini hassasiyetle yürütme süreci Şekil 97'de görülmektedir.

- d) 596 kişilik bir organizasyon için kaç masanın yan yana gelmesi gerekir?
 $6a + 2 = 596$ $6a = 594$ $a = 99$ masanın yan yana gelmesi gerekir.
- e) 630 misafir için 105 masa gerekiyorsa 101 masanın bulunduğu organizasyonda kaç misafir vardır?
 $105 - 101 = 4$ $4 \cdot 6 = 24$ $630 - 24 = 606$ misafir vardır.

Şekil 97. Y2'nin prosedürleri hassasiyetle yürütme süreci.

Y2 misafir sayısının 596 olması halinde kaç masanın gerekeceğini bulmaya çalışırken denklemden yararlanarak doğru sonuçlara ulaşmaktadır (99 masa). Ayrıca öğrenci (e) maddesinde sorulan soruya yanıt verirken denklem yerine artış miktarını kullanmaktadır. Bu durum öğrencinin prosedürlerini uygularken farklı stratejiler kullanabildiğini göstermektedir.

C4 yetkinliğini sağlayamayan öğrenciler, genel olarak örüntünün kuralını veren denklemi oluşturamadıkları için cebirsel prosedürler uygulayamamaktadır. Öğrenciler örüntünün ilerleyen adımlarının sorulduğu maddeleri de doğru yanıtlayamamaktadır. Bu nedenle öğrenciler prosedürleri hassasiyetle yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme ile ilgili olan bu yetkinliği sağlayamamaktadır. Sadece bu öğrencilerden biri olan O2, doğru denklemi oluşturmasına rağmen prosedürlerini hassasiyetle yürütmediği için doğru sonuçlara ulaşamamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Sekizgen Masalar problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde prosedürleri yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmektedir.

Öğrencilerin bu problemdeki yazılı çalışmalarında C4 yetkinliğini nasıl sağladıklarına ilişkin çözümleri ile örnek olay çalışması için yapılan mülakatlar arasında bazı farklılıkların olduğu görülmektedir.

Yazılı çözümlerinde C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan Y2'nin açıklamaları aşağıda verilmektedir.

11A: Denklemi tekrar kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

12Y2: Evet.

13A: Nasıl emin oluyorsun?

14Y2: Sorudaki tabloya bakınca sayıları sağlıyor.

Y2, sonuçlarının doğruluğunu kontrol ettiğini yazılı çözümlerinde göstermemekteydi. Fakat açıklamalarında oluşturduğu denklemin doğru olup olmadığını anlamak için tablodan yararlandığını belirtmektedir (14Y2).

17A: d maddesinin sonucunu nasıl bulduğunu anlatır mısın?

18Y2: m misafir sayısı yerine 596 yazdım. Sonra da a'yı buldum.

19A: e maddesinin sonucunu nasıl bulduğunu anlatır mısın?

20Y2: 105 ile 101 masa dediği için 4 masa fark var. 6 misafir çarpı 4 masadan 24 kişi eksilir. Yani 606 misafir buldum.

21A: Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

22Y2: Denklemden a yerine 101 de yazarak bulabilirim.

23A: Neden bu yolu tercih ettiğini açıklar mısın?

24Y2: Ortak fark 6 olduğu için daha kolay buldum. Bu yüzden tercih ettim

Y2, problem maddelerinin çözümlerini nasıl yaptığını açıklarken prosedürlerini hassasiyetle yürütme bileşenini sağlamaktadır (18Y2, 20Y2, 22Y2). Yazılı çözümlerinde C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan Y1'in örnek olay çalışmasında sonuçlarını nasıl kontrol ettiğini açıklayabilmesi üzerine sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini de sağlayabildiğini göstermektedir (14Y2). Dolayısıyla Y2, C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağladığını gösteren Y1 ve O1 de Y2 ile benzer açıklamalar yaparak C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

C4 yetkinliğini yazılı çözümlerinde sağlayamayan öğrenciler prosedürlerini hassasiyetle yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenlerini sağladıklarına ilişkin açıklamalara yer vermemektedir. Bu öğrencilerden biri olan D1'in açıklamaları aşağıda verilmektedir.

17A: e maddesinin sonucunu nasıl bulduğunu anlatır mısın?

18D1: ... Tam bilmiyorum. Çok büyük sayı çıktı, yanlış çıktı galiba.

19A: Bulduğun sonucun doğruluğundan emin misin? İşlemlerini kontrol eder misin?

20D1: Emin değilim.

21A: Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

22D1: ... Masaları sayarak yapamam. Sayı büyük.

D1 bu açıklamaları ile prosedürleri uygulayamadığını göstermektedir. Ayrıca öğrenci problemdeki örüntünün kuralını veren denklemi oluşturamadığı için problem maddelerini yanıtlamamaktadır. Dolayısıyla öğrencinin sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenine ilişkin açıklamalarının olmadığı ve C4 yetkinliğini sağlayamadığı görülmektedir.

Sekizgen Masalar Probleminde C4 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 40'ta görülmektedir.

Tablo 40

Sekizgen Masalar probleminde C4 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Denklemi kontrol ederken mesela adım sayısına 1 dersek 8 buluruz. 2 dersek 14 buluruz. Böyle doğru olduğuna emin oldum. (d) maddesini cevaplarken denklemde m yerine 596 yazdım ve buldum. (e) maddesinde 105 masada 630 misafir varmış. 101 masada bulmak için 4 masa kalması lazım. 24 misafir eksilir yani. O da 606 misafir oluyor.” (Y1)	Y1, Y2, O1
C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	...	
C4 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“Bilmiyorum, denklem $(8m + a)$ doğru olmayabilir. Burada tam bulamadım. En yakın bulduğum sonuca göre yaptım.” (D2)	O2, D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakatlar sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda Y1, Y2 ve O1'in C4 yetkinliğini sağlama düzeylerinde değişiklik gösterdiği tespit edildi. Yazılı çözümlerinde hassasiyetle doğru sonuçlara ulaşmaları, fakat sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmemeleri C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıklarını gösterirken; öğrencilerin açıklamaları sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenini sağladıklarını göstermektedir. Dolayısıyla Y1, Y2 ve O1 örnek olay çalışmasında C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıklarını göstermektedir.

4.5. İkna Edici Açıklamalar Yapma Sürecine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın beşinci alt problemi olan “Öğrencilerin problemlerdeki cebirsel düşünceleri hakkında bilgi veren ikna edici açıklamalar yapma süreçleri nasıldır?” sorusuna yanıt aranmaktadır. Öğrencilerin ikna edici açıklamalar yapma (C5) yetkinliğini sağlayıp sağlayamadıkları;

- C1, C2, C3 ve C4 yetkinliklerini yansıtırma
- Çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama
- Düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme
- Kendinden emin açıklamalar yapma
- Strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurma

beş alt bileşenin ele alınmasıyla incelenmektedir. Yazılı çözümlerinde C1, C2, C3 ve C4 yetkinliklerini sağlayan (güçlü ya da zayıf düzeyde sağlayan) öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama süreçleri incelenerek, yazılı çözümlerinde ya da örnek olay çalışmasında yaptıkları ikna edici açıklamalara yer verilmektedir. İlk dört yetkinliği sağlayamayan öğrencilerin ise probleme ilişkin ikna edici açıklamaları varsa bu durum örnek olay çalışmalarında gerektiği şekilde belirtilmektedir.

4.5.1. Ters Piramit Problemine İlişkin Bulgular

Ters Piramit probleminde gerçek yaşamdan alınmış ters piramit şeklinde duran bir bina ve bu binanın her katında yer alan oda sayılarındaki artışı temsil eden bir örüntü verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren Y1’in, yazılı çözümlerinde C5 yetkinliğine ilişkin yaptığı ikna edici açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Y1 miktarlar arasındaki ilişkileri ifade ederken “*Oda sayısındaki değişim farklar arasındaki 8 artış sayısı ile gerçekleşmektedir*” şeklinde doğru bir açıklama yapmaktadır. Bu açıklama ile Y1, örüntüdeki miktarları (2, 12, 30, 56, ...) belirledikten sonra artış miktarları ile 10, 18, 26, ... şeklinde yeni bir örüntü oluştuğunu ve bu yeni örüntüye ait artış miktarının sabit ve 8 olduğunu belirtmektedir. Yani matematiksel olarak gösterdiği bu durumun okuyucu tarafından anlaşılabilmesi ihtimalini düşünerek sözel ifadelerle açıklama ihtiyacı duymaktadır. Ayrıca Y1, yeni oluşan örüntüye ilişkin bir cebirsel ifade oluşturmakta ve bu cebirsel ifadeyi

oluşturma sürecini “İki fark arası 8 ilerlediği için $8x$ derim. İlk fark 10 olduğu için $8x + 2$ olur” şeklinde çözümlerinde ilerlediği yolu cebirsel nedenleri kullanarak açıklamaktadır.

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren bir diğer öğrenci Y2, miktarlar arası ilişkiyi incelerken Y1’den farklı olarak örüntüdeki dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenarları arasındaki ilişkilere odaklanmaktadır. Dikdörtgenin alan formülünden yararlanarak örüntünün miktarlarını (2, 12, 30, 56, ...) kısa ve uzun kenarlarının çarpımı (1×2 , 3×4 , 5×6 , 7×8 , ...) olarak yeniden ifade etmektedir. Bu sırada “Örüntüdeki dikdörtgenlerin kenarlarını çarpınca oda sayısı çıkar” şeklinde açıklama yapmaktadır. Gömülü matematiği anlamlandığı bu aşamalarda Y2, cebirsel ifadeyi oluşturma sırasında Şekil 98’deki açıklamaları yapmaktadır.

Kenar sayıları 2'şer arttığı için $2n$ demeliyiz. Yani 2 kat 1.2'yi bulmaya çalışsak
 Kısa kenara x uzun kenara y diyelim
 $(2x-1) \cdot (2y)$ 1. adım olduğu için 1 koyarsak $(2-1) \cdot (2) = 1 \cdot 2$ dur. Aslında x ve y demeye gerek
 yok. n diyelim.
 Bulduğum cebirsel ifade $(2n-1) \cdot 2n$
 Kontrol etmek için diğer adımlara bakalım.

Şekil 98. Y2’nin cebirsel ifade oluştururken yaptığı ikna edici açıklamalar.

Y2, başlangıçta dikdörtgenlerin kısa kenarı için x , uzun kenarı için y değişkenlerini kullanmaktadır. Ardından kısa kenarların her bir adımdaki artışı için $(2x - 1)$, uzun kenarların her bir adımdaki artışı için $(2y)$ cebirsel ifadesini oluşturmakta ve örüntünün genel kuralını dikdörtgenin alan formülü ile ilişkilendirerek $(2x - 1) \cdot (2y)$ olarak yazmaktadır. Burada x ve y değişkenlerinin aslında aynı adım sayısını ifade ettiğini fark ederek bu durumu “Aslında x ve y demeye gerek yok. n diyelim” şeklinde açıklamaktadır. Y2’nin iddialarını doğrulamak için bu cebirsel açıklamaları ve gerekçelendirmeleri kullanması cebirsel prosedürlerdeki stratejik akıl yürütmelerini sergilemektedir.

Ayrıca Y1 ve Y2, cebirsel ifadeleri kullanarak örüntünün diğer adımlarını hesaplarken de aritmetik ve cebirsel prosedürlerini sözel ifadeler yardımıyla açıklamaktadır. Öğrencilerin düşüncelerini açık ve eksiksiz bir şekilde ilettikleri yaptıkları açıklamalarda görülmektedir. Ters Piramit problemini çözerken birden fazla açıklamaya yer verdikleri için bu öğrencilerin C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları söylenebilir.

O1 ve O2, problemin tüm maddelerini doğru yanıtlamadıkları için ve örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturamadıkları için bu durumlara yönelik ikna edici

açıklamalar yapamamaktadır. Bu öğrenciler, bağlamı anlamlandırdıklarını ve miktarlar arasındaki ilişkileri anladıklarını gösteren açıklamalar yaparak yalnızca C1 ve C2 yetkinliklerini yansıtmaktadır. Bu nedenle O1 ve O2'nin C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları söylenebilir.

D1 ve D2 ise problemin bağlamını anlamlandıramadıkları için ilk dört yetkinliği sağlayamadıkları gibi C5 yetkinliğini de sağlayamamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Ters Piramit problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmekte ve öğrencilerin mülakat sırasında yaptıkları açıklamaların C5 yetkinliği kapsamındaki nitelikleri hakkında yorumlara yer verilmektedir.

C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları ikna edici açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayabilmektedir. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan Y2 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği aşağıdaki gibi araştırılarak sonuca varılmaktadır.

17A: Örüntünün kuralını nasıl buldun? Açıklar mısın?

18Y2: Dikdörtgenlerin kenarlarına baktığımda 2 arttığını gördüm. Birinci katta 1 x 2 oluyor. Burada bire iki eklersek 3 oluyor. İkiye iki eklersek 4 oluyor. Buradan ikinci kat 3 x 4 ortaya çıkıyor. Sonraki üçüncü adımda da 5 x 6 oluyor. Bu şekilde buldum.

19A: Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

20Y2: Evet.

21A: Nasıl emin oluyorsun?

22Y2: 2 artarak gittiği için $2n$ dedim. İki kenar için ayrı ayrı yapmamız gerekiyordu. Kısa kenarlar 1,3,5 diye gidiyor ve o yüzden $(2n - 1)$ olur. Diğer kenarlar da 2, 4, 6 diye gidiyor yani direk $2n$ olduğu belli. Bunları çarpmamız gerektiği için de $(2n - 1) \times 2n$ buldum. Biraz değişik çıktı gibi ama yerine koyunca hepsi çıkıyor.

Y2, örüntünün kuralını açıklarken ilgili miktarları ve aralarındaki ilişkileri açıkça ifade etmektedir (18Y2). Öğrencinin bu ifadeleri, ikna edici açıklamalar ile C2 yetkinliğini yansıtabildiğini göstermektedir. Öğrencinin örüntünün kuralını ifade ederken “bire iki

eklersek 3 oluyor, ikiye iki eklersek 4 oluyor” şeklinde aritmetik işlemlerine kadar en ince ayrıntılardan bahsetmesi, öğrencinin düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme bileşenini sağladığını göstermektedir (18Y2). Diğer yandan çözümlerinden nasıl emin olduğu sorulduğunda öğrenci tüm gerekçelerini belirterek kendinden emin açıklamalar yapmaktadır. Y2’nin, denklemi nasıl oluşturduğunu detaylı bir şekilde açıklaması, çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama bileşenini sağladığını göstermektedir (22Y2). Öğrencinin dikdörtgenin kısa ve uzun kenarlarındaki örüntüyü ifade eden kuralları nasıl yazdığını anlatmaya başlamadan önce “iki kenar için ayrı ayrı yapmamız gerekiyordu” şeklindeki açıklaması, strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurma bileşenini sağladığına yöneliktir.

C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayamamaktadır. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan O1 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği araştırılmıştır.

23A: Örüntünün kuralını nasıl buldun? Açıklar mısın?

24O1: İlk oda sayısına artışı ekleriz, 8 ekleriz yani. Bir de baştaki fark da eklenecek. $a + 8 + x$ deriz.

25A: Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

26O1: Tam doğru olmayabilir.

27A: Neden?

28O1: Bilmiyorum.

29A: Oluşturduğun bu cebirsel ifadede a ne anlama geliyor? Açıklar mısın?

30O1: Şimdi tam hatırlayamadım neden a demiştim. (*Düşünüyor*) Bilmiyorum.

O1, örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturamadığı için bu kurala ilişkin yanlış açıklamalar yapmaktadır (24O1). Öğrencinin açıklamalarında kendinden emin olmadığı (26O1), düşüncelerini açık ve eksiksiz iletemediği (28O1) ve çözümlerinde ilerlediği yolu açıklayamadığı görülmektedir (30O1).

O1’in bu problemi çözme sürecini açıklarken yalnızca miktarları ve aralarındaki ilişkileri doğru açıklayabildiği (C2 yetkinliğini yansıtmaya) ve diğer bileşenleri sağlayamadığı görülmektedir. Bu nedenle O1, C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamaktadır.

Ters Piramit Probleminde C5 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 41’de görülmektedir.

Tablo 41

Ters Piramit probleminde C5 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“2 artarak gittiği için $2n$ dedim. İki kenar için ayrı ayrı yapmamız gerekiyordu. Kısa kenarlar 1,3,5 diye gidiyor ve o yüzden $(2n - 1)$ olur. Diğer kenarlar da 2, 4, 6 diye gidiyor yani direk $2n$ olduğu belli. Bunları çarpmamız gerektiği için de $(2n - 1) \times 2n$ buldum. Biraz değişik çıktı gibi ama yerine koyunca hepsi çıkıyor.” (Y2)	Y1, Y2
C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Örüntü kenar sayılarına göre değişiyor. Birinci adımda kenarlar 1 ve 2, İkinci adımda 3 ve 4... Bunları çarparsak oda sayıları çıkıyor. Böyle bir kural buldum. Birinci kat 2 oda yani iki katı. İkinci kat 12 oda yani 6 katı. Üçüncü kat 30 oda yani 10 katı. $4x$ fark var yani. Bilmiyorum. Orda 8 artarak gidiyor... Burada da $4x$.” (O2)	O1, O2
C5 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“Örüntünün sürekli artması, 2, 12, 30 olarak... Buna x diyorduk. Tüm katlar etrafına oda ekleyerek çıkıyor.” (D1)	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda C5 yetkinliğini sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.5.2. Harflerin Oyunu Problemine İlişkin Bulgular

Harflerin Oyunu probleminde alfabedeki harflerin belli bir kurala göre diziliminden oluşan bir örüntü ve örüntünün ilk beş adımı verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren Y1'in, yazılı çözümlerinde C5 yetkinliğine ilişkin yaptığı ikna edici açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Y1 örüntüdeki harflerin sayıları ifade ettiğini “*Tüm harflere numara verip yazdığımızda 1, 5, 9, 13, 17, ... şeklinde örüntü oluşur*” cümlesiyle açıklamaktadır. Bu açıklama problemde verilen bağlamı ve gömülü matematiği anlamlandırdığına ilişkin Y1'in ikna etme biçimidir. Bununla birlikte oluşturduğu cebirsel ifadenin doğruluğunu kanıtlayabilmek için cebirsel ifadenin değişkenine problemde verilen örüntü adımlarını yazarak sonuçları karşılamakta ve bu durumu şu şekilde açıklamaktadır: “*Kolay bir soru denklemi yerine koyarak kontrol edelim*”. Y1'in, cebirsel ifadenin doğruluğundan emin olduğu halde ilerlediği yolu açıklaması; yanıtlarına destek aramayı, okuyucu tarafından anlaşılmayı ve okuyucuyu ikna etmeyi önemseydiğini göstermektedir.

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren bir diğer öğrenci Y2, oluşturduğu cebirsel ifadeyi kullanarak örüntünün diğer adımlarına ulaşırken problem bağlamına ilişkin bazı açıklamalara yer vermektedir. Y2'nin bu açıklamaları Şekil 99'da görülmektedir.

Bulduğum cebirsel ifade: $2 \cdot x - 3$

d) BTBTBTBTBT Burçin'in söyleyeceği 5. harf aslında 9. harf çünkü sırayla söylüyorlar
Oyun kurallarına göre ve buna yerine koyarsak
 $4 \cdot 9 - 3 = 36 - 3 = 33$ çıkar. Burada baya döndüğümüzde
C harfi çıkmıştır.

e) Timuçin 7. harf derken 12. harftir. $\frac{53}{24}$
 $4 \cdot 12 - 3 = 56 - 3 = 53$ harf 24. harf 7 harftir.

Şekil 99. Y2'nin problem bağlamından yararlanarak yaptığı açıklamalar.

Y2'nin çözümlerinde, problem bağlamında yer alan “harflerin Timuçin ve Burçin tarafından sırayla söylenmesi” ifadesini örüntü ile ilişkilendirdiği ve durumu açıklayarak çözümlerine devam ettiği görülmektedir. Problemin (d) maddesinde Burçin'in söyleyeceği 5. harf sorulmaktadır. Y2 bu durumu çözümlerine yansıtırken “*Burçin'in söyleyeceği 5. harf aslında 9. harf çünkü sırayla söylüyorlar*” şeklinde doğru bir açıklama yapmaktadır. Y2'nin bu açıklaması cebirsel prosedürlerini gerekçelendirmeye ilgilidir. Gerekçelerini belirtmeden değişkene 9 değerini vermesinin anlaşılamayacağı düşüncesiyle hareket ederek açıklama yapmış olabileceği gibi; gerekçelerini ifade etmeden çözümünü yönlendiremediği için de

açıklama yapmış olabilir. Her iki durumda da Y2 doğru ve ikna edici açıklamalar yapmakta ve cebirsel prosedürlerdeki stratejik akıl yürütmelerinin kanıtlarını sunmaktadır.

Y1 ve Y2'nin açıklamalarından yola çıkarak düşüncelerini açık ve eksiksiz bir şekilde ilettikleri, kendinden emin açıklamalar yaptıkları, stratejilerini seçme nedenlerini dışa vurdukları ve çözüm yollarını net bir şekilde ifade edebildikleri açıklamalara yer verdikleri için C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları görülmektedir.

O1 ve O2, problemde verilen örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturamadıkları için bu duruma yönelik ikna edici açıklamalar yapamamaktadır. Bu öğrenciler, bağlamı anlamlandırdıklarını ve miktarlar arasındaki ilişkileri anladıklarını gösteren açıklamalar yaparak yalnızca C1 ve C2 yetkinliklerini yansıtmaktadır. Bu nedenle O1 ve O2'nin C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları söylenebilir.

D1 ve D2 ise problemin bağlamını tam olarak anlamlandıramadıkları için ilk dört yetkinliği sağlayamadıkları gibi C5 yetkinliğini de sağlayamamaktadır.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Harflerin Oyunu problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmekte ve öğrencilerin mülakat sırasında yaptıkları açıklamaların C5 yetkinliği kapsamındaki nitelikleri hakkında yorumlara yer verilmektedir.

C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları ikna edici açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayabilmektedir. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan Y1 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği aşağıdaki gibi araştırılarak sonuca varılmaktadır.

12A: Tabloyu kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?

13Y1: (Tabloyu kontrol ediyor) Evet.

14A: Nasıl emin oluyorsun?

15Y1: Harfleri sırayla söyleyerek anladım. Mesela üçüncü söylenen harf Ğ ve saydığımda 9. harf oluyor. Yani 3. adım 9 oluyor.

16A: Oluşturduğun tabloyu inceleyerek adımlar arasındaki değişim hakkında tekrar konuşalım, ne söyleyebilirsin?

17Y1: Her adımda 4 harf ilerliyor.

18A: Cebirsel ifadeyi oluştururken gösterimleri yani tabloyu nasıl kullandın?

- 19Y1:** Tabloya bakarak yapmak daha kolay, o yüzden arada takip etmek kolay yani 4 harf ilerliyor. 4x dedim. Tabloya baktığımda 1. adımda sonuç 1 olacak. 4x – 3 demem gerekir, böyle düşündüm.
- 20A:** Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 21Y1:** (*Yaptığı işlemleri kontrol ediyor*) Evet.
- 22A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 23Y1:** Yerine koyarak.
- 24A:** Yerine koyarak nasıl emin olduğunu açıklar mısın?
- 25Y1:** Mesela 2. adımda 5 çıkması gerek. Bakalım buradan $2 \times 4 = 8$ yapar. 8'den 3 çıkarırsak 5 olur. 3. adımda $4 \times 3 = 12$ yapar. $12 - 3 = 9$ olur. Böyle emin oldum.

Y1, oluşturduğu tablonun doğruluğundan nasıl emin olduğunu açıklarken ilgili miktarları ve aralarındaki ilişkileri açıkça ifade etmektedir (15Y1). Öğrencinin bu ifadeleri, ikna edici açıklamalar ile C2 yetkinliğini yansıtabildiğini göstermektedir. Öğrencinin örüntünün kuralını ifade ederken tablodan nasıl yararlandığını açıklaması düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme ve çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama bileşenlerini sağladığını göstermektedir (19Y1). Y1'in cebirsel ifadeyi oluşturma sırasında örüntünün adımlarını tablodan takip ettiğini belirtmesi, temsiller arasında bağlantı kurabildiğini ve dolayısıyla C3 yetkinliğini yansıtabildiğine yöneliktir. Öğrencinin oluşturduğu cebirsel ifadenin doğru olduğundan nasıl emin olduğu sorulduğunda “*yerine koyarak*” yanıtını vermesi strateji seçimini göstermektedir (23Y1). Y1'in bu stratejisini nasıl gerçekleştirdiğini anlatması ise strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurma bileşenini sağladığı anlamına gelmektedir (25Y1). Ayrıca Y1 bu sırada prosedürlerini nasıl gerçekleştirdiğini anlatarak C4 yetkinliğini yansıtmaktadır.

C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayamamaktadır. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan O1 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği araştırılmıştır.

- 11A:** Grafiği kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?
- 12O1:** Evet, eminim.
- 13A:** Nasıl emin oluyorsun?

- 14O1:** Tek tek Burçin ve Timuçin'in söyleyeceği harflere baktım. O nedenle emin oldum.
- 15A:** Oluşturduğun grafiği inceleyerek adımlar arasındaki değişim hakkında tekrar konuşalım, ne söyleyebilirsin?
- 16O1:** 4 harf sonrasını söyleyerek ilerleriz.
- 17A:** Cebirsel ifadeyi oluştururken gösterimleri (tablo, grafik, denklem vb.) nasıl kullandın? Açıklar mısın?
- 18O1:** a herhangi bir harf ve 4 harf sonrasını söyleriz. O nedenle $a + 4$ deriz.
- 19A:** Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?
- 20O1:** Evet.
- 21A:** Nasıl emin oluyorsun?
- 22O1:** Grafiğe bakarak bunu anlarız.

O1'in çözümlerinde ilerlediği yolu açıklarken düşüncelerini açık ve eksiksiz iletemediği (14O1, 18O1, 22O1), örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi doğru oluşturamadığı için bu kurala ilişkin yanlış açıklamalar yaptığı (18O1) ve öğrencinin açıklamalarında kendinden emin cevaplar vermediği görülmektedir.

O1'in bu problemi çözme sürecini açıklarken yalnızca miktarları ve aralarındaki ilişkileri doğru açıklayabildiği (C2 yetkinliğini yansıtır), çözümlerinde ilerlediği yolu kısmen açıklayabildiği ve diğer bileşenleri sağlayamadığı görülmektedir. Bu nedenle O1, C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamaktadır.

Harflerin Oyunu Probleminde C5 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 42'de görülmektedir.

Tablo 42

Harflerin Oyunu probleminde C5 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
-------------	-------------	---------

C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Örüntü 1, 5, 9, 13, 17 diye yazılır. Birinci adım A, ikinci adım D diye ilerleyerek tabloyu çizdim. 4 harf olarak ilerlediği için $4x$ dedim. Birinci adımda 1 çıkması gerekiyor. O yüzden 3 çıkarttım. $4x - 3$ yani. Mesela ikinci adımı bulmak için x 'e 2 verince 5 çıkıyor yani beşinci harf D harfi. x 'e 3 verdiğimizde 9 yani Ğ harfi çıkıyor. Böylece doğru olduğunu anlarım.” (Y2)	Y1, Y2
C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Birinci adım 1, ikinci adım 5, üçüncü adım 9 diye yazabilirdik tabloya. Adımlar arası artış miktarı 4 yani cebirsel ifadeyi $n = +4$ şeklinde yazdım. Yani sonraki yeni harfi bulmak için bir önceki harfe 4 ekleyerek.” (O2)	O1, O2
C5 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	“Örüntünün nasıl ilerlediğini sorduğu için, x dedim çünkü hangi sayı bilmiyoruz. Mm... Önce 2 harf ilerliyor sonra 3 sonra 1 gittiği için, x önceki sayı.” (D2)	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda C5 yetkinliğini sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.5.3. “n” Neyi İfade Ediyor? Problemine İlişkin Bulgular

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde $n + n$ ve $n + 6$ cebirsel ifadelerinden hangisinin daha büyük olduğunu karşılaştırırken öğrencilerin değişkene yükledikleri anlamların irdelenmesi amaçlanmıştır.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren Y1’in, yazılı çözümlerinde C5 yetkinliğine ilişkin yaptığı ikna edici açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Y1 başlangıçta hangi cebirsel ifadenin daha büyük olduğu hakkında fikir sahibi değildir. Y1’in problemi çözme aşamasına geçmeden önceki açıklamaları Şekil 100’de görülmektedir.

Hangisi daha büyüktür, $n + n$ mi? $n + 6$ mi?

$n + n$ $n + 6$

Simdi $n + n$ mi yoksa $n + 6$ mı büyük bunu bulabilmemiz için “n” sayısının hoc olubugunu bilmemize lazım. Bunu bilmediğim için kesin birşey söyleyemem ama şöyle bir yorum yapabiliriz mi?

Şekil 100. Y1'in problemi çözmeye başlamadan önce yaptığı açıklamalar.

Y1 açıklamalarında n sayısının kaç olduğunu bilmesi gerektiğini, bilmediği için kesin bir sonuca ulaşamayacağını belirtmektedir. Fakat yine de n 'in bir değişken olduğunun farkındadır ve n 'e değer verdiğinde neler olacağını merak etmektedir. Sırayla 1, 2 ve 3 değerlerini verdiği çözüm süreci Şekil 101'de görülmektedir.

Handwritten work showing calculations for $n=1, 2, 3$ and a comparison of $n+n$ and $n+6$.

$n=1$ olursa	$\frac{n+n}{1+1=2}$	$\frac{n+6}{1+6=7}$ olur.	"n sayısı 6'dan küçük ise $n+6$ daha büyük olur.
$n=2$ olursa	$2+2=4$	$2+6=8$ olur.	
$n=3$ olursa	$3+3=6$	$3+6=9$ olur.	

Below the calculations, there is a handwritten note: "fark azaldı" (the difference decreased) with an arrow pointing from the result of $n=3$ to the result of $n=2$.

Şekil 101. Y1'in problemi çözmeye başladıktan sonra yaptığı açıklamalar.

Y1'in değişkene değer verirken $n + n$ ve $n + 6$ ifadelerinin arasındaki ilişkiyi "fark azaldı" olarak yorumlaması, farkın kapanacağını ve bir noktada bu iki cebirsel ifadenin eşitleneceğini hissettirmektedir. Bu durum öğrencinin işlemlere devam etmesini ve n değişkenine 6 değerini verdiğinde bu durumu kanıtlamasını sağlamaktadır. Değişkene 6'dan büyük değerler verdiğinde ise "fark artıyor" şeklinde yorumlamaktadır. Y1'in bu sürecinden anlaşılan en önemli nokta, "n" Neyi İfade Ediyor? probleminin öğrencide cebirsel anlayışı geliştirmek için bir platform sağladığıdır. Y1'in cebirsel ifadelerin arasındaki ilişkiyi açıklaması, aritmetik ve cebirsel prosedürlere devam ederek bu açıklamayı desteklemesi ve belli bir sonuca vardığında hangi ifadenin daha büyük olduğuna ilişkin doğru açıklamalar yapabilmesi C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren bir diğer öğrenci Y2 benzer prosedürler uygulasa da Y1'den farklı olarak çözümlerine başlamadan önce sonucun ne olacağına dair bir fikri olduğunu "Vereceğim değere göre cevap değişir" açıklamasıyla belirtmektedir. Bununla birlikte bu açıklamayı destekleyen cebirsel nedenler sunmaktadır. Kritik değeri bulabilmek için değişkene önce 3, 5 ve 7 değerlerini vermektedir. Kritik değerin 6 olduğunu fark ederek $n = 6$ için cebirsel ifadelerin eşit olduğunu göstermekte ve hangi durumlarda hangi ifadenin büyük olduğuna ilişkin açıklamalar yaparak çözümlerini sonlandırmaktadır. Y2'nin çözümü adeta planlanmış gibi akıcı ilerlemektedir ki bu durum Y2'nin sonuçları tahmin ettiğini; tahminleri desteklemek ve düşüncelerini iletme için süreci bu şekilde yönettiğini göstermektedir. Y2'nin çözümleri ikna edici sözel ve cebirsel açıklamalardan oluştuğu için C5 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtmaktadır.

O1 ve O2, problemin sonucunu doğru bulmaktadır. Fakat öğrencilerin buldukları sonuçları ifade ettikleri açıklamalar dışında, bu sonuca nasıl ulaştıklarını gösteren matematiksel ya da sözel açıklamalara yer vermedikleri görülmektedir. Bu nedenle O1 ve O2'nin C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları söylenebilir.

D1, problemin bağlamını kısmen anlamlandırsa da ilgili miktarları belirleyemediği için C2, C3 ve C4 yetkinliklerini; D2 ise bağlamı anlamlandıramadığı için ilk dört yetkinliğin tümünü sağlayamamaktadır. Dolayısıyla D1 ve D2'nin C5 yetkinliğini de sağlayamadıkları görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

“n” Neyi İfade Ediyor? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmekte ve öğrencilerin mülakat sırasında yaptıkları açıklamaların C5 yetkinliği kapsamındaki nitelikleri hakkında yorumlara yer verilmektedir.

C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları ikna edici açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayabilmektedir. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan Y1 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği aşağıdaki gibi incelenerek sonuca varılmaktadır.

12A: Soruyu çözerken nasıl bir yol izlediğini anlatabilir misin?

13Y1: 1 vererek başladım, sırayla ilerledim. Sonra 2 verdim. Sonra 3 verdim. Fark gittikçe azaldı, 6'ya kadar.

14A: $n = 6$ değerini verdiğinde ortaya nasıl bir sonuç çıktı? Anlatır mısın?

15Y1: $n + n$ ve $n + 6$ birbirine eşit oldu. 12 oldu ikisi de.

16A: n'ye hangi değerleri verdin? Neden bu değerleri verdin?

17Y1: 1, 2, 3, 6, 7, 8 değerlerini verdim. 1'den öylesine başladım. Sonra nasıl devam edecek diye baktım. 2 ve 3 verdim. Farkın azaldığını görünce aklımdan dört beşi yaptım. Sonra 6'da eşit olduğunu gördüm. Sonraki değerlerde fark yine artmaya başladı zaten.

18A: Bu değerler dışında başka değerler vermeyi düşündün mü? Neden?

19Y1: Hayır düşünmedim. Çünkü son değerlerde fark arttı. Giderek artarak devam edecek diye başka değerlere gerek yoktu. Bir de 6 sayısı bence daha önemli.

20A: Neden 6 sayısı önemli?

21Y1: Çünkü 6 olmasının sebebi bence soruda $n + 6$ demesi.

22A: Başka bir sayı verseydi o sayı mı önemli olacaktı? Mesela $n + 7$ deseydi?

23Y1: Evet. $n + n = 14$, $n + 7 = 14$ olurdu. 7 önemli olurdu.

Y1, cebirsel ifadelerle değer vererek soruyu çözmeye başladığını ve bu değerlerin neler olduğunu belirttiğinde çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama bileşenini sağladığını göstermektedir (13Y1). Öğrenci değişkene değer verme sürecinde neler olduğunu anlatırken ve bu değerleri verdiği oluştan miktarların ilişkisini “*farkın azalması*” ya da “*farkın artması*” şeklinde düşüncelerini açık ve eksiksiz bir şekilde iletirken C2 yetkinliğini yansıtmaktadır (15Y1, 17Y1). Y1’e verdiği değerler dışında başka değerler vermeyi düşünüp düşünmediği sorulduğunda, öğrenci kendinden emin açıklamalar yaparak verdiği değerlerin yeterli olduğunu belirtmektedir (19Y1). Ayrıca Y1, 6 sayısının önemine değinerek değer verme stratejisini seçmesine neden olan durumları açıklamakta (21Y1) ve soru bağlamında değişiklikler olması durumunda ortaya çıkacak durumlara ilişkin akıl yürütmesini cebirsel nedenler eşliğinde dışa vurmaktadır (23Y1).

C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayamamaktadır. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan O2 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği araştırılmıştır.

7A: Matematiksel anlamda n ’in değeri hakkında ne söyleyebilirsin?

8O2: Bir şey diyemeyiz, çünkü soruda belirtmemiş.

9A: n değeri için eksili bir sayıda olabilir 6’dan küçük bir sayı da olabilir demişsin. Neden böyle düşündün?

10O2: Çünkü n hangi değer bilemem. Eksi sayıları denersek $n + n$ daha küçük oluyor. 6’dan küçük sayılarda böyle. 6’dan büyük sayılar verince tam tersi oluyor.

13A: n ’e 6 dışında hangi değerleri verdin?

14O2: Yapmıştım soruyu çözerken. Eksi sayılar vermiştim. 1, 2, 3 diye 6’ya kadar değerler vermiştim... 6’dan büyük değerler de vermiştim.

15A: Değer vermeyi neden sonlandırdın? Ya da bulduğun sonuçları neden cevap olarak yazmadın?

16O2: Çünkü kesin bir şey yoktu. Ben de yanlıştır diye yazmadım.

17A: Sence bu verdiği değerlerin sonuçları ne anlama geliyor? Sonuca ulaşırken bu bilgilerden yararlanabilir miyiz?

18O2: Bu değerlerden dolayı sadece biri büyük olmuyor. Yani bu anlama geliyor hocam.

O2, n 'in değeri hakkında açık ve net düşüncelere sahip değildir (8O2, 10O2). O2 çözümlerinde ilerlediği yolun değişkene değer verme olduğunu belirtse de bu değerleri verdiğinde neler olduğunu, ortaya çıkan sonuçlar neticesinde nasıl ilerlediğini açıklayamadığı için çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama bileşenini sağlayamamaktadır (14O2). Öğrencinin çözüme verdiği değerleri yazmamasının nedenini “yanlıştır diye yazmadım” gibi açıklamalar yaparak yanıt vermesi, kendinden emin açıklamalar yapma bileşenini sağlayamadığını göstermektedir (16O2). Bu süreçlerde cebirsel ifadeler arasındaki ilişkiyi kısmen açıkladığı için öğrencinin C1 ve C2 yetkinliklerini yansıtmaya bileşenini sağladığı söylenebilir.

23A: $n + n$ değeri mi daha büyük? $n + 6$ değeri mi daha büyük? Bu konuda nasıl bir sonuca ulaştığını bize açıkla mısın?

24O2: n değerine 6'dan küçük değer verince farklı, büyük değer verince farklı çıkıyor. Yani değişken bir sonuç hocam.

25A: Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin? Ya da düşüncelerin doğru mu sence?

26O2: Tam bir yanıt olmadı. Ama ben böyle düşündüm. Bence doğru.

O2, problemi çözme sürecinde ortaya çıkan sonuçları doğru yorumlayamamakta, strateji seçimlerinin nedenlerini açıklayamamakta ve çözümlerini açık ve eksiksiz bir şekilde açıklayamadığı için akıl yürütmelerini açığa çıkaramamaktadır.

“n” Neyi İfade Ediyor? Probleminde C5 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 43'te görülmektedir.

Tablo 43

“n” Neyi İfade Ediyor? probleminde C5 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	<i>“Yani denklemi çözüp değerini bulurum ya da bazı cebirsel ifadelerde adım sayısını değişkenin yerine yazarım. Sonucu böyle bulurum. n, 6 olduğunda $n + n$ ve $n + 6$ birbiriyle eşit oldu. Yani 12 oldu. Bilmiyorum yani 3'le başladım. Sonra</i>	Y1, Y2

	<i>tek tek uzun olur diye atlayarak gidecektim. 5 değerini verdim sonra 7 verince büyüklük değişti. Ben de 6'yı merak ettim ve eşit çıktı” (Y2)</i>	
C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>“Öncelikle n bir bilinmeyen. Ve cebirsel ifadede çokça kullanılır. n'e 6 verince birinci ve ikinci denklem birbirine eşit çıkıyor zaten. Kafamda yaparken bir sürü değer verdim. Ve bu sonuçları buldum. Cevabın nasıl olduğunu görünce değer vermeyi bıraktım. $n + n = x$ diyerek ve $2n = x$ deriz. O nedenle $n = x/2$ olur. Bunu denklemde yerine yazarak işlemler yaparız. Ama bu yoldan tam olarak bir sonuca ulaşamayız.” (O1)</i>	O1, O2
C5 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“Hepsinde farklı sonuç çıkıyor bende yazmadım. Yanlış olabilir diye. Bence bu soru şaşırtmalı soru. Ama kesin bir cevabı yok galiba. Bence hangi değeri verersen sonuç ona göre değişiyor” (D2)</i>	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda C5 yetkinliğini sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.5.4. Teraziler Nasıl Denge? Problemine İlişkin Bulgular

Teraziler Nasıl Denge? probleminde öğrencilere denge halinde 3 farklı terazi verilmiştir. Terazilerde kare, daire ve üçgen şekilleri ile temsil edilmiş ağırlıkların birbirleriyle nasıl ilişkili olduğu gösterilmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren Y1'in, yazılı çözümlerinde C5 yetkinliğine ilişkin yaptığı ikna edici açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Y1 denge halindeki üç farklı terazi için oluşturduğu denklemleri birbirleriyle ilişkilendirirken sözel ve cebirsel açıklamalara yer vermektedir. Ayrıca iki terazinin dengede olmasından yola çıkarak bulduğu değerleri kontrol etmek için denge halinde olan üçüncü teraziden yararlandığını belirtmekte ve prosedürleri uygulamaktadır. Y1'in problemi çözerken yaptığı açıklamalardan biri Şekil 102'de verilmektedir.

$$\begin{array}{l}
 1. \text{ Terazisi} \rightarrow 2x = 6y \\
 2. \text{ Terazisi} \rightarrow 10z = 2x \\
 3. \text{ Terazisi} \rightarrow 3y + z = 33 \\
 \downarrow \\
 3y \text{ yerine } 2x \text{ koyabiliriz: } 2x + z = 33 \text{ dir} \\
 2x \text{ yerine } 10z \text{ koyabiliriz: } 10z + z = 33 \text{ dir} \\
 \begin{array}{r}
 10z + z = 33 \\
 11z = 33 \\
 z = 3
 \end{array}
 \end{array}$$

Şekil 102. Y1'in problemi çözme sürecinde yaptığı ikna edici açıklamalar.

Y1 birden fazla denklemi kullanarak bilinmeyenlerin değerini bulmak için hangi denklemi nerede neden kullandığını açıklamaktadır. Örneğin oluşturduğu $10z = 2x$ denklemini sadeleştirerek üçüncü terazide kullandığını oklar kullanarak ve sözel ifadeler yardımıyla açıklamakta ve karşı tarafa düşüncelerini iletme için farklı yollar denemektedir. Y1'in problemin farklı aşamalarında birden fazla doğru açıklamaya yer vermesi ve açıklamalarında ilerlediği yolu net bir şekilde ifade etmesi C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren bir diğer öğrenci D1, Y1 ile aynı prosedürleri uygulamaktadır. Yalnızca D1'in oluşturduğu denklemleri "6 yuvarlak = 20 üçgen" biçiminde ifade ettiği görülmektedir. D1 sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmek için bulduğu değerleri terazilere yerleştirmekte ve tüm değerleri bu şekilde karşılaştırmaktadır. Öğrenci bu durumla ilgili olarak yazılı çözümlerinde "Terazide yerleştirdim ve sonuçları buldum. Doğru olmasaydı sonuçlar tüm terazilere uymazdı" şeklinde ikna edici açıklamalara yer vermektedir. D1'in çözümleri ikna edici sözel ve cebirsel açıklamalardan oluştuğu için C5 yetkinliğini güçlü düzeyde yansıtmaktadır.

Y2, O1 ve O2 ise ilk üç yetkinliği güçlü düzeyde sağlayıp C4 yetkinliğini sonuçlarını kontrol etmedikleri için zayıf düzeyde sağlamaktadır. Bu öğrenciler, Y1 ve D1 ile benzer çözüm yolları kullanarak bu çözüm yollarını açıklamaktadır. Fakat bu öğrenciler, yazılı çözümlerinde sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme yetkinliğine ilişkin ikna edici açıklamalar yapamamaktadırlar. Bu nedenle öğrencilerin C4 yetkinliğini yansıtamadıkları ve dolayısıyla C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları söylenebilir.

D2'nin ise yazılı çözümlerinde bağlamı kısmen anlamlandırdığı ve temsiller arası bağlantı kurmada güçlük çektiği için C1 ve C3 yetkinliklerini zayıf düzeyde, miktarları ve aralarındaki ilişkileri ifade edebildiği için C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı ve C4 yetkinliğini sağlayamadığı görülmektedir. D2, ilk dört yetkinliğin tümünü sağlayamadığı için bu yetkinliklerin tamamını açıklamalarında yansıtamamakta ve problemin çözümünü

sonuçlandıramadığı için kendinden emin açıklamalara yer vermemektedir. Dolayısıyla D2'nin C5 yetkinliğini sağlayamadığı görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Teraziler Nasıl Dengede? problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmekte ve öğrencilerin mülakat sırasında yaptıkları açıklamaların C5 yetkinliği kapsamındaki nitelikleri hakkında yorumlara yer verilmektedir.

C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları ikna edici açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayabilmektedir. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan D1 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği aşağıdaki gibi incelenerek sonuca varılmaktadır.

- 1A:** (Soru okunur) Terazilerin dengede olması durumundan nasıl yararlandın?
- 2D1:** Eşitlik yaptım... Sınıfta da böyle terazide ağırlıklardan yapmıştık, o aklıma geldi. ... Sağ ve sol birbirine eşit olması gerekiyor.
- 3A:** Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğun cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?
- 4D1:** İlk olarak 4 kare eşittir 6 yuvarlak oluyor. Buradan şöyle bir sonuç daha var: 2 kare de 3 yuvarlağa eşit oluyor... İkinci terazide 2 kare 10 üçgene eşit olduğu için o zaman demek ki 10 üçgen de 3 yuvarlağa eşit... Üçüncü terazide 1 üçgenle 3 yuvarlağın toplamı 33 kilograma eşitmiş. 3 yuvarlak yerine 10 üçgen yazıp buldum.

D1, terazilerin dengede durmasından nasıl yararlandığını “*eşitlik yaptım*” şeklinde açıklayarak çözümlerinde ilerlediği yolu açıklamakta ve sınıfta benzer bir uygulama yaptıklarını belirtmektedir. D1, bu çözüm yolunu uygulayabilmek için gerekli olan şartın sağ ve sol kefaletlerinin birbirine eşit olması gerektiğini kendinden emin bir şekilde açıklayarak C1 yetkinliğini yansıtmakta ve bu şekilde eşitlik oluşturma stratejisini seçme nedenini dışa vurmaktadır (2D1). D1'in prosedürel ilişkileri ve işlemleri açıklarken miktarların ilişkisinden bahsederek C2 yetkinliğini yansıttığı, oluşturduğu denklemleri yorumlayarak C3 yetkinliğini yansıttığı ve bu denklemleri nasıl çözümlediğini belirterek C4 yetkinliğini yansıttığı görülmektedir (4D1).

C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan Y2 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği araştırılmaktadır.

- 3A:** Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğun cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıklar mısın?
- 4Y2:** Birinci terazide sadeleştirme yaptım ve 2 kare 3 tane daireye eşit oluyor. İkinci terazide 5 üçgen 2 kareye pardon yanlış yazmışım. 1 kareye eşit. 5 üçgen eşittir 1 kare. Evet. Ama burada 10 üçgen 2 kareye eşit ya. Ben onu kullandım. 2 kare dediğimiz için iki denklemi eşitledim. 3 daire 10 üçgene eşit oluyor. Sonra bunları kullandım.
- 5A:** Oluşturduğun bu gösterimlere cebirsel ifade diyebilir miyiz?
- 6Y2:** Evet diyebiliriz.
- 7A:** Cebirsel ifade ile denklem arasındaki fark nedir?
- 8Y2:** Şey. Bu ifadeler aynı zamanda denklem. Denklemde eşittir olur.
- 9A:** Kare, üçgen ve dairenin ağırlıklarını bulurken yaptığın işlemleri anlatır mısın? Cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandın?
- 10Y2:** Bulduğum denklemleri birbirine eşitledim. Bir de üçüncü terazideki 33 değerini kullandım. Bir saniye. (*İşlemlerini tekrar gözden geçiriyor*) Orda $3y$ yani 3 daire $10z$ yani 10 üçgene eşitti. Üçüncü denklemde $3y$ yerine $10z$ yazdım. $11z = 33$ olduğu için z eşittir 3 çıktı. Diğer denklemlerde yerine koyunca hepsi çıkıyor zaten.

Y2, oluşturduğu denklemlerde sadeleştirme yapma veya birbirine eşitleme gibi yöntemler kullandığını belirterek bunlardan hangisini neden kullandığını açıkladığında, strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurmaktadır (4Y2). Öğrenci, “*üçüncü terazideki 33 değerini*” kullandığını belirttiğinde çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama bileşenini sağladığını, denklemi çözümlmek için yaptığı işlemleri açıklarken düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme bileşenini sağladığını ve bu süreçte kendinden emin açıklamalar yaparak ilk dört yetkinliği yansıtan ifadeler kullandığı görülmektedir (10Y2).

Y2'nin problemle ilgili yapılan mülakatta tüm bileşenleri sağladığı ve dolayısıyla C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı tespit edilmektedir. C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerin ise, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayamadıkları görülmektedir.

Teraziler Nasıl Dengede? Probleminde C5 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 44’te görülmektedir.

Tablo 44

Teraziler Nasıl Dengede? probleminde C5 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	<i>Birinci terazide 4 kare ile 6 daire birbirine eşit. İkinci terazide 10 üçgen 2 kareye eşit. Üçüncü terazide sayı vermiş, bunu kullanabiliriz. 1 üçgen ile 3 dairenin toplamı 33’müş. Ben kareye x, daireye y, üçgene z dedim ve böyle yazdım. Eşitlik olunca denklem diyorduk. Denklemleri kullandım. $4x = 6y$ sadeleştirirsek $2x = 3y$ olur. $10z = 2x$ bir de $3y + z = 33$. $3y$ yerine $2x$ yazdım. $2x$ yerine $10z$ koydum. $11z = 33$ oldu. Buradan $z = 11$ oldu. Pardon $11’e$ böl $z=3$ oldu. İkinci terazide yerine koydum, $x=15$ buldum. Birinci terazide yerine koydum, $y=10$ buldum” (Y1)</i>	Y1, Y2, D1
C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	<i>“Denklem kurdum hocam dengede olduğu için. Şekil birde, $2m$ eşittir $3t$... Şekil ikide $5y$ eşittir m... Şekil üçte $3t$ artı bir y eşittir 33 oluyor... Şekil 3 teki 33 sayısı var oradan gittim. Zaten diğer denklemleri de yazmıştık... Oradan değerleri denklemde yazdım” (O2)</i>	O1, O2
C5 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“x, y, z harflerinin katlarına bakmak. Yani sayı vermek gerekir böylece doğru mu anlarız. Tamam. $4x = 6y$ ya. Orada $4x$ derken 4 kat demek. $x’e$ 4’ün bir katını vereceğiz. 8 verebiliriz. $6y$ olduğu için y için de 6’nın katı. 12 verebiliriz... ($4 \times 8 = 6 \times 12$) Eşit olmadı. Emin değilim.” (D2)</i>	D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda yalnızca Y2’nin C5 yetkinliğini sağlama düzeyinde değişiklik olduğu ve yazılı çözümlerinde çok fazla açıklamaya yer vermeyip C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlarken, örnek olay çalışmasında yaptığı açıklamalarda C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı görülmektedir.

4.5.5. Timuçin İnternet Kafede Problemine İlişkin Bulgular

Timuçin İnternet Kafede probleminde bir internet kafede bilgisayar kullanma süresine bağlı ücret değişimlerini ifade eden bir bağlam ile sabit değerin, değişkenin ve artış miktarının belirtildiği bir problem cümlesi verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren Y1'in, yazılı çözümlerinde C5 yetkinliğine ilişkin yaptığı ikna edici açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Y1, problemin bağlamına ilişkin oluşturduğu denklemi “*Bu denklemi kurarken başlangıçta bilgisayarı açtığı gibi hiç kullanmasa bile 2 TL ödemek zorunda olduğuna dikkat ederek yazdım. x ise kullandığı saat kadar olacaktır.*” şeklinde yorumlarken çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama, C1 yetkinliğini yansıtır ve kendinden emin açıklamalar yapma bileşenlerini sağladığını göstermektedir. Ayrıca öğrenci bu problemin zorlayıcı olan (f) maddesindeki farklı bakış açısını açıklarken strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurduğu görülmektedir. Y1'in bu süreci Şekil 103'te görülmektedir.

Yani 0,5. $x = 10$ TL diye düşünürsek $x = 20$ saat yapıyor ..
 Ama tam 20 saat olmayabilir. Belki 20 saat 40 dk olabilir ya da
 20 saat 59 dk 'dan az bir sürede olabilir. Atlımda birsey daha var
 5 gün gitmiş forzetdim ki her gidişinde 4 saat kullonmuş olsun!

1. gün 4 saat 40 dk 2 TL	2. gün 4 saat 50 dk 2 TL	3. gün 4 saat 59 dk 2 TL	4. gün 4 saat 59 dk 2 TL	5. gün 4 saat 59 dk → 2 TL
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	----------------------------------

}

Şekil 103. Y1'in problemi çözme sürecinde yaptığı ikna edici açıklamalar.

Y1 denklem yoluyla doğru bir sonuca ulaşsa da sorunun çözümüne ilişkin farklı fikirlere sahip olduğunu belirterek düşüncelerini açık ve eksiksiz bir şekilde iletmekte ve bu fikirlerini kullanarak ilerlediği yolu açıklamaktadır. Bu sırada bağlamı ve gömülü matematiğini anlamlandırdığını gösterdiği, ilişkileri ifade ettiği ve cebirsel temsilleri kullanarak gerekçelerini sunduğu için C1, C2 ve C3 yetkinliklerini ikna edici açıklamalar ile yansıttığı görülmektedir. O2 de yazılı çözümlerinde benzer stratejilere ve benzer açıklamalara yer verdiği için C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermektedir.

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren bir diğer öğrenci Y2, oluşturduğu denklemi kullanarak problemin tüm maddelerini yanıtlamaktadır. Bu öğrenci Y1 gibi (f) maddesi için farklı fikirlere ve çözüm stratejilerine sahip olmasa da denklemi kullanarak ilerlemektedir. Öğrencinin bu süreçte, “*açılış fiyatı 2 TL olduğu için sabit fiyattır, 2’yi yazıp her saat için 50 Kuruş arttırdım*” şeklindeki açıklamaları ile temsilleri nasıl oluşturduğunu açıkladığı ve C3 yetkinliğini yansıttığı görülmektedir. Ayrıca öğrencinin bu açıklamaları ile çözümlerinde ilerlediği tolu açıklama, düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme ve kendinden emin açıklamalar yapma bileşenlerini sağladığı görülmektedir. Y2, açılış fiyatı olduğu için denklemdeki sabit terime 2 yazılacağını belirttiğinde denklem oluştururken kullandığı stratejilerin nedenlerini açıkladığını göstermektedir.

O1, D1 ve D2’nin, problem cümlesini yorumlayarak bazı maddelerde doğru sonuçlara ulaşmalarına rağmen, problemde yer alan kritik bilgileri (sabit değer, değişken, artış miktarı, vb.) kısmen anladıkları ve kullandıkları görülmektedir. Öğrenciler problemin tüm maddelerini doğru yanıtlamadıkları ve örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi oluşturamadıkları için bu durumlara yönelik ikna edici açıklamalar yapamamaktadır. Bu öğrenciler, bağlamı anlamlandırdıklarını ve miktarlar arasındaki ilişkileri anladıklarını gösteren açıklamalar yaptıkları ve miktarlar arasındaki artış miktarını kullanarak sonuçlara ulaştıkları için yalnızca C1 ve C2 yetkinliklerini yansıtmaktadır. Bu nedenle O1, D1 ve D2’nin C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları söylenebilir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Timuçin İnternet Kafede problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmekte ve öğrencilerin mülakat sırasında yaptıkları açıklamaların C5 yetkinliği kapsamındaki nitelikleri hakkında yorumlara yer verilmektedir.

C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları ikna edici açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayabilmektedir. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan Y1 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği aşağıdaki gibi araştırılarak sonuca varılmaktadır.

30A: Oluşturduğun denklemi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

31Y1: Evet.

32A: Nasıl emin oluyorsun?

33Y1: Denklemden saatleri yerine koyarım. Tablodan kontrol edince doğru çıkıyor.

Y1 oluşturduğu denklemin doğruluğundan emin olmak için değişkene değer verip tablo ile karşılaştırdığını ifade etmesiyle, C4 yetkinliğini yansıtabildiğini ve çözümlerinde ilerlediği yolu açıklayabildiğini göstermektedir.

50A: “Hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin bir haftada 20 TL ödeme yapmıştır. Buna göre bir hafta boyunca kaç saat bilgisayar kullanmıştır?” sorusunun cevabını nasıl buldun? Açıklar mısın?

51Y1: Her gidişinde bilgisayar kullandıysa 10 TL açılış parası vermiştir. 20 TL’nin 10 TL’si böyle gitti. Geriye 10 TL kaldı. 50 Kuruşa bölersek 20 saat yapar. Eğer çocuk her gidişinde 4 saat kullandıysa 5 gidişte 20 saat yapar. Bir de 4 saat 59 dakika kullandıysa çok daha fazla kullanmış. Oradan 24 saat 55 dakika buldum.

52A: Yani kesin olarak 24 saat 55 dakika bilgisayar kullandığını mı söylüyorsun?

53Y1: Hayır, kesin değil. En az 20 saat kullanmış. Ama en fazla 24 saat 55 dakika yani o arada bir sayı da olur.

54A: Burada soruyu çözmeye başlarken “her gidişinde bilgisayarı kullandığını düşünersek” demişsin. Ne demek istedin?

55Y1: Her gidişinde belki bilgisayarı kullanmamıştır dedim. Belki o arkadaşını görmek için gitti.

56A: Burada bulduğun 24 saat 55 dakika çözümün dikkatimi çekti. Bu şekilde çözmek aklına nereden geldi?

57Y1: c maddesinde 1 saati doldurmadan ne kadar öder denmişti, oradan aklıma gelmişti.

58A: Timuçin hafta boyunca 5 kere internet kafeye gitmiş. Bazı günlerde bilgisayarı 1 saatten az kullanmışsa, bu durumu nasıl yorumlarsın?

59Y1: O zaman şöyle olur, iki gün 1 saatten az kullanmış olsun. Yine 59 dakika diyelim. Geriye kalan günlere 20 saati paylaştırmam lazım. Mesela 6 saat, 7 saat, 7 saat şeklinde. Onlara da yine 5 dakika derim, pardon onlara da yine 59 dakika eklerim. Yani olur. Yine 5 tane 59 dakika ve 20 saat yapar. Yani aynı sonuca ulaşırız. En fazla 24 saat 55 dakika eder.

Y1, (f) maddesine ilişkin soruyu yanıtlarken yaptığı işlemleri “50 Kuruşa bölersek 20 saat yapar” gibi açıklamalar ile en ince ayrıntısına kadar anlatarak düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme bileşenini sağladığını göstermektedir (51Y1). Öğrencinin bu ifadeleri, ikna edici açıklamalar ile C4 yetkinliğini yansıtabildiğini göstermektedir. Öğrencinin kendinden emin açıklamalar yaparak sonuçlarını ifade ettiği ve yorumladığı görülmektedir (53Y1). Y1,

strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurma bileşenini sağlama sürecinde problemin (c) maddesinde sorulan sorudan esinlendiğini ve bu nedenle bu stratejiyi kullandığını belirtmektedir (57Y1). Öğrenciye bağlamda bir değişiklik yapılması durumunda neler olacağı sorulduğunda (58A), öğrenci aynı çözüm stratejisini kullanarak yeni prosedürleri uygulamakta ve diğer yetkinlikleri açıklamalarında yansıtabildiğini göstermektedir (59Y1).

C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan O1 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği araştırılmaktadır.

3A: Tabloyu kontrol eder misin? Doğru çizdiğinden emin misin?

4O1: Evet eminim.

5A: Nasıl emin oluyorsun?

6O1: Çünkü her saatte 50 kuruş ekleyerek gidiyor. Ben de buna dikkat ettim. O nedenle eminim.

7A: Tabloda dikkatini çeken bir durum var mı?

8O1: Hayır, yani şey... Mesela her defasında 2 TL'yi hep vermesi dikkatimi çekti.

9A: Tabloyu inceleyerek bilgisayarı kullanma süresi ile ücret arasındaki değişim hakkında ne söyleyebilirsin?

10O1: Bilgisayarı kullandıkça 50 Kuruş artar her saatte. Her saatte 50 kuruş artar.

11A: Denklemi nasıl oluşturdu? Anlatır mısın?

12O1: Vereceği para 2 TL + süre çarpı x deriz. x derken x = 50 Kuruş yani.

13A: Oluşturduğun denklemi kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

14O1: (*Düşünüyor*) Evet.

15A: Nasıl emin oluyorsun?

16O1: (*Düşünüyor*) Denklemi kullanırsak sonuçlar doğru çıkıyor. O nedenle eminim.

O1'e, tabloyu doğru oluşturup oluşturmadığından nasıl emin olduğu sorulduğunda, öğrencinin düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme bileşenini sağlamadığı ve daha kapalı ifadelerle soruyu geçiştirdiği görülmektedir (6O1). Öğrencinin miktarları ve ilişkilerini doğru açıkladığı için açıklamalarında C2 yetkinliğini yansıtma bileşenini sağlayabildiği görülmektedir (10O1). Öğrenciye denklemi nasıl oluşturduğu sorulduğunda, doğru açıklamalar yapamadığı ve dolayısıyla C3 yetkinliğini yansıtamadığı görülmektedir. Ayrıca öğrencinin sonuçlarının doğru olduğundan emin olduğunu söylemesi, temsil oluşturma sürecinde yaşadığı güçlüklerden dolayı hatalarının farkında olmadığını göstermektedir (16O1).

Timuçin İnternet Kafede Probleminde C5 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 45’te görülmektedir.

Tablo 45

Timuçin İnternet Kafede probleminde C5 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“60 dakika kullanınca 50 kuruş daha veriyor. 60 dakikadan az olursa 50 kuruştan az verir. Bilgisayarın açılış parası 2 TL... Buna her saat 50 kuruş geldiği için... Saate x dedim Bunların toplamı ödeyeceğimiz fiyat olur dedim. (f) maddesinde 4 buçuk, 4, 2 bunları toplarsak 10 buçuk... Geriye 9 buçuk kalıyor. Böyle 5 gün yaptım. Tablo şeklinde altına da saatleri yazdım... 2 TL olan yer 1 saatten az. Toplam saatleri toplayınca hocam 20 saat artı bir de x oluyor. x, 1 saatten az bir dakika.” (O2)	Y1, Y2, O2
C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Bir saatten az kullanmış. Bir saat olsa direk iki buçuk derdim. Böyle olunca sadece 2 TL ya da iki buçuktan az vermiş diyorum. Hangisi olur onu bilemem. (f) maddesinin cevabında 36 saate 20 TL denk geliyor.” (D1)	O1, D1, D2
C5 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda C5 yetkinliğini sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

4.5.6. Bakterilerin Hızına Yetiş Problemine İlişkin Bulgular

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde bir ortamda bulunan bakterilerin zamana bağlı artış sayısı ile ilgili bir bağlam ve diğer problemlerden farklı olarak bu bağlama ilişkin denklem verilmiştir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Bu problemin yazılı çözümlerinde öğrencilerin hiçbiri ilk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağlayamamaktadır. İlk üç yetkinliği güçlü düzeyde sağlayan C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlayan Y1'in yazılı çözümlerinde C5 yetkinliğine ilişkin yaptığı ikna edici açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Y1, problemin bağlamına ilişkin “8 bakteri var zaten ve dakikada 16 bakteri üriyormuş. Dakika sayısı arttıkça bakteri sayısı da onun 16 katı olur” şeklinde bir açıklama yapmaktadır. Y1'in bu açıklaması bağlamı anlamlandırıldığını ve denklemde yer verilen sabit terim ile katsayıların ilişkilerini ifade edebildiğini gösterdiği için öğrencinin C1 ve C2 yetkinliklerini açıklamalarında yansıtabildiği görülmektedir. Denklem ile yaptığı çözümlerinde “denklemde yerine koyarız” gibi açıklamalarla çözümlerinde ilerlediği yolu açıkladığını gösteren Y1, bunun dışında farklı açıklamalara yer vermeden işlemlerine devam etmektedir. Öğrencinin C5 yetkinliğini sağlama düzeyi örnek olay çalışmasında tekrar irdelenmektedir.

İlk üç yetkinliği güçlü düzeyde sağlayıp C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığını gösteren bir diğer öğrenci O2, çözümlerini denklemi kullanarak yapmaktadır. O2'nin problem bağlamına ilişkin “doğru orantılı bir ilişki olduğunu söyleyebiliriz, zaman arttığında bakteri sayısı da artıyor” şeklinde yalnızca bir açıklama yaptığı ve bu açıklama ile C1 yetkinliğini yansıttığı görülmektedir. Öğrenci çözümlerinde ilerlediği yolu açıklamadan ya da düşüncelerini belirtmeden matematiksel işlemlerine devam etmektedir.

İlk dört yetkinliği Y1 ve O2 ile benzer şekilde sağlayan Y2 ve O1'in de çözümlerini yaparken çok fazla açıklama yapmadan matematiksel işlemler yaptıkları görülmektedir. Bu öğrencilerin, örnek olay çalışmasında yaptıkları açıklamalar ile C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri araştırılmaktadır.

D1 ve D2'nin ise problemin bağlamını anlamlandıramadıkları için ilk dört yetkinliği sağlayamadıkları ve dolayısıyla C5 yetkinliğini de sağlayamadıkları görülmektedir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Bakterilerin Hızına Yetiş problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmekte ve öğrencilerin mülakat sırasında yaptıkları açıklamaların C5 yetkinliği kapsamındaki nitelikleri hakkında yorumlara yer verilmektedir.

C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları ikna edici açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayabilmektedir. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde ne düzeyde sağladığını gösteremeyen Y2 ve O2 ile yapılan mülakatlarda, öğrencilerin açıklamalarının niteliği aşağıdaki gibi araştırılarak sonuca varılmaktadır.

19A: Tabloda başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl gösterdin?

20Y2: 8 şeklinde.

21A: d maddesinin cevabını nasıl buldun?

22Y2: 1 saat dediği için dakika yerine 60 yazarak buldum.

23A: Cevabını kontrol eder misin? Doğruluğundan emin misin?

24Y2: Evet.

25A: Doğru değerleri kullandığına emin misin?

26Y2: Eminim, yani saat demediği için dakika olarak değer verdim.

27A: Bu soruyu çözerken hangi gösterim daha kullanışlı oldu? Denklem mi, tablo mu? Neden?

28Y2: Denklem. Çünkü tabloda hepsini gösteremeyiz, uzun olur.

29A: e maddesinin cevabını nasıl buldun? Açıklar mısın?

30Y2: Bakteri sayısı yerine 4808 yazdım.

Y2 ile O2'nin çözümlerini açıklama biçimleri çok benzemektedir. Bu nedenle öğrencilerin yaptıkları açıklamalar, O2'nin mülakat metninin hemen altında birlikte incelenmektedir.

19A: Tabloda başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl gösterdin?

20O2: Dakika yerine sıfır yazdım.

21A: d maddesinin cevabını nasıl buldun?

22O2: 60 x 16 dedim (*çözümüne bakıyor*) 960 bakteri oluyor. 8 ekledim 968 buldum.

23A: Cevabını kontrol eder misin? Doğruluğundan emin misin?

24O2: Evet hocam.

25A: Bu soruyu çözerken hangi gösterim daha kullanışlı oldu? Denklem mi, tablo mu? Neden?

26O2: Denklem.

27A: e maddesinin cevabını nasıl buldun? Açıklar mısın?

28O2: (*çözümlerine bakarak anlatıyor*) Bakteriler 4808 tane olduğu için denklemde sekizi karşıya atarsak 4800 kalır. On altıya böldüğümde 300 dakika olur... Bir de 300 dakikada 5 saat oluyor.

Y2 ile O2, denklemdeki sabit değeri tabloda nasıl yerleştirdiklerini açıklayarak temsiller arası bağlantı kurabildiklerini ve dolayısıyla C3 yetkinliğini yansıtabildiklerini göstermektedir (20Y2, 20O2). Öğrencilerin her ikisi de çözümlerinde ilerlediği yolu açıklarken denklemden yararlandıklarını kendilerinden emin bir tavırla belirtmektedir (22Y2, 22O2). Yalnızca O2'nin Y2'ye göre düşüncelerini daha açık ve eksiksiz iletmediği görülmektedir (22O2, 28O2). Y2 çözümlerinde tablo yerine denklemi kullanma stratejisini seçme nedenini “*çünkü tabloda hepsini gösteremeyiz, uzun olur*” şeklinde açıklarken (28Y2); O2 ise bu bileşeni sağladığını (e) maddesinin çözümünde denklemi çözme stratejilerini anlatırken göstermektedir (28O2).

Mülakatlarda yaptıkları açıklamaları verilmeyen Y1 ve O1 de bu öğrenciler ile neredeyse aynı açıklamaları yapmaktadır. Dolayısıyla bu dört öğrencinin yaptıkları doğru çözümleri açıklarken C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları söylenebilir.

Bakterilerin Hızına Yetiş Probleminde C5 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 46'da görülmektedir.

Tablo 46

Bakterilerin Hızına Yetiş probleminde C5 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“Tabloda başlangıçtaki bakteri sayısını göstermek için sıfır dakika dedim ve altına 8 yazdım. 1 saat sonunda ortamdaki bakteri sayısını bulurken dakika olarak denklem var, 1 saat 60 dakika dedim o yüzden. Sonra denklemde dakikaya 60	Y1, Y2, O1, O2

	<i>yazdım. Ben denklemden gittim. Tabloya tüm sonuçları yazmak zor. Denklem daha kullanışlı.” (Y1)</i>	
C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	...	
C5 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	<i>“Başlangıçtaki bakteri sayısını 24 buldum. Sekizle on altıyı topladım. Denklemde 8 artı 16 demiş.” (D1)</i>	D1, D2

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri belirlenmektedir. Yazılı çözümlerinde çok fazla açıklama yapmadan matematiksel prosedürler ile doğru sonuçlara ulaşan Y1, Y2, O1 ve O2’nin C5 yetkinliğini sağlama düzeylerine ilişkin verilere örnek olay çalışmasında ulaşılmaktadır.

4.5.7. Sekizgen Masalar Problemine İlişkin Bulgular

Sekizgen Masalar probleminde gerçek yaşamdan alınmış bir senaryoyu temsil eden örüntü verilmiştir. Bu senaryoda adım sayılarına ilişkin misafir sayısının nasıl ilerlediği görülmektedir. Örüntüyle ilişkili verilen tabloda bu örüntüde yer alan miktarlar belirtilmektedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren Y1’in, yazılı çözümlerinde C5 yetkinliğine ilişkin yaptığı ikna edici açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Y1, problemin bağlamına ilişkin *“Masanın birleştiği yere 2 kişi oturamayacağı için 16 kişi oturamaz.”* şeklinde bir açıklama yaparak C1 yetkinliğini yansıtmaktadır. Y1’in örüntünün miktarları arasındaki ilişkileri sözel ifadelerle açıklayarak C2, örüntünün kuralını veren denklemi nasıl oluşturduğunu açıklayarak C3, gerekli prosedürleri nasıl uyguladığını açıklayarak C4 yetkinliklerini yansıttığı görülmektedir. Y1 denklemi oluşturma sürecinde *“Kişi sayıları arasındaki fark 6 olduğu için masa sayısının 6 katını aldım ve örüntüyü sağlasın diye 2 ekledim. Yani masa sayısının 6 katının 2 fazlası misafir sayısıdır”* şeklindeki açıklamasıyla çözümlerinde ilerlediği yolu açıklarken düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme

bileşenini sağladığını göstermektedir. Bu bileşenleri sağladığı için öğrencinin C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı söylenebilir.

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren bir diğer öğrenci Y2, yazılı çözümlerinde çok fazla açıklama yapmadan matematiksel prosedürleri uygulamaktadır. Öğrencinin yalnızca problem bağlamına ilişkin iki masaya 16 yerine 14 misafirin oturması durumunu “*Çünkü masalar birleştiğinde birleşen kenarlara insanlar oturamazlar*” şeklinde yorumladığı ve C1 yetkinliğini bu yorumu ile yansıttığı görülmektedir. Ayrıca öğrencinin “*her bir masa artışında 6 kişi daha oturabilir*” şeklindeki açıklaması ile miktarlar arasındaki ilişkiyi belirttiği ve C2 yetkinliğini yansıttığı görülmektedir. Y2’nin doğru prosedürler uygulaması ve denklemi kullanarak doğru sonuçlara ulaşması düşünüldüğünde örnek olay çalışmasında öğrencinin bu durumlarda yapacağı açıklamaların C5 yetkinliği kapsamındaki niteliği araştırılmalıdır.

İlk dört yetkinliği güçlü düzeyde sağladığını gösteren bir diğer öğrenci O1, oluşturduğu denklemi kullanarak problemin tüm maddelerini yanıtlamaktadır. Bu öğrenci Y1 gibi masaların birleştiği yere iki kişinin oturamayacağını belirterek C1 yetkinliğini yansıttığı görülmektedir. Benzer şekilde denklem oluşturma sürecini anlatırken C3 yetkinliğini yansıtan öğrenci düşüncelerini açık ve eksiksiz iletme ve çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama bileşenlerini sağladığını göstermektedir. Ayrıca problemin (e) maddesinde “630 misafir için 105 masa gerekiyorsa 101 masaya kaç misafir oturabilir?” şeklindeki soru için öğrencinin “*iki adım arası 6 fark olduğu için 105 masadan 101 masaya 4 adım vardır. 4 adım olduğu için $6 \times 4 = 24$ fark çıkar. $630 - 24 = 606$ misafir olur*” şeklinde yaptığı açıklamalar, kendinden emin açıklamalar yapma ve strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurma bileşenlerini sağladığını göstermektedir. Dolayısıyla bu öğrencinin yazılı çözümlerinde C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı görülmektedir.

D1 ve D2’nin, problem cümlesini yorumlayarak bazı maddelerde doğru sonuçlara ulaşmalarına rağmen, problemin tüm maddelerini doğru yanıtlamadıkları ve örüntünün kuralını veren denklemi oluşturamadıkları (O2 hariç) için bu durumlara yönelik ikna edici açıklamalar yapamamaktadır. Bu öğrenciler, bağlamı anlamlandırdıklarını ve miktarlar arasındaki ilişkileri anladıklarını gösteren açıklamalar yaptıkları ve miktarlar arasındaki artış miktarını kullanarak sonuçlara ulaştıkları için yalnızca C1 ve C2 yetkinliklerini yansıtmaktadır. O2 ise bunlara ek olarak örüntünün kuralını veren denklemi oluşturduğu ve bazı sorularda bu denklemi kullandığı aşamalarda ikna edici açıklamalar yaptığı için C3 yetkinliğini yansıtabilmektedir. Ayrıca problemin bağlamına ve miktarlara ilişkin yaptığı açıklamalarda düşüncelerini açık ve net iletme bileşenini, denklemi nasıl kullandığını anlattığı

açıklamalarında ise kendinden emin olduğu ve çözümlerinde ilerlediği yolu açıklama bileşenini sağladığı görülmektedir. Yine de O2 tüm maddelerde doğru açıklamalar yapamamaktadır. Bu nedenle O2, D1 ve D2'nin C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları söylenebilir.

Örnek Olay Çalışması Bulguları

Sekizgen Masalar problemine ilişkin yapılan mülakatlarda öğrencilerin yazılı çözümlerinde ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği derinlemesine bir yaklaşım ile incelenmekte ve öğrencilerin mülakat sırasında yaptıkları açıklamaların C5 yetkinliği kapsamındaki nitelikleri hakkında yorumlara yer verilmektedir.

C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlayan öğrenciler, bu yetkinliğe ilişkin yaptıkları ikna edici açıklamalar ile tüm alt bileşenleri sağlayabilmektedir. C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde güçlü düzeyde sağlayan Y1 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği aşağıdaki gibi araştırılarak sonuca varılmaktadır.

11A: Denklemi nasıl yazdın? Anlatır mısın?

12Y1: Adımlarda fark 6 olduğundan 6 katını alırız ve 2 ekleriz. Yani adım sayısının 6 katının 2 fazlası. O yüzden böyle yazdım.

13A: Denklemi tekrar kontrol eder misin? Doğru olduğundan emin misin?

14Y1: Evet.

15A: Nasıl emin oluyorsun?

16Y1: Mesela adım sayısına 1 dersek 8 buluruz. 2 dersek 14 buluruz. Böyle doğru olduğuna emin oldum.

17A: Oluşturduğun bu denklemdeki her sayı ve değişken için ne söyleyebilirsin?

18Y1: 6 sayısı katsayıdır. 2 sayısı da katsayı ve sabit terim. a ve m bilinmeyen ve verdiğimiz değerlere göre değişiyor.

19A: d maddesinde sonucu nasıl bulduğunu anlatır mısın?

20Y1: Denklemde m yerine 596 yazdım ve buldum.

21A: e maddesinde sonucu nasıl bulduğunu anlatır mısın?

22Y1: 105 masada 630 misafir varmış. 101 masada bulmak için 4 masa kalması lazım. 24 misafir eksilir yani. O da 606 misafir oluyor.

23A: Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

24Y1: Denklemi kullanabiliriz. a yerine 101 yazarak.

Y1 oluşturduğu denklemin doğruluğundan emin olmak için değişkene değer verip tablo ile karşılaştırdığını ifade etmesiyle, C4 yetkinliğini yansıtabildiğini ve çözümlerinde ilerlediği yolu açıklayabildiğini göstermektedir (16Y1). Y1, strateji seçimlerinin nedenlerini ve akıl yürütmelerini dışa vurma bileşenini sağlama sürecinde problemin (e) maddesinde sorulan soruda kullandığı stratejiyi açıklamaktadır (22Y1). Aynı zamanda Y1, açıklamalarında diğer yetkinlikleri yansıtabildiği ve düşüncelerini eksiksiz bir şekilde açıklayabildiği için C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağlamaktadır.

C5 yetkinliğini yazılı çözümlerinde zayıf düzeyde sağlayan D2 ile yapılan mülakatta, öğrencinin açıklamalarının niteliği araştırılmaktadır.

- 3A:** Masa sayısı ile misafir sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- 4D2:** 1 masada 8 kişi, 2 masada 14 kişi, 3 masada 20 bu şekilde bir ilişki var.
- 5A:** 4 masaya kaç misafirin oturduğunu nasıl buldun? Anlatır mısın?
- 6D2:** Tablodan baktığımızda 6 artmış. $20 + 6 = 26$ çıkar.
- 7A:** Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?
- 8D2:** Sayarak bulabilirim.
- 9A:** c maddesinin cevabında denklemini bulamadığını yazmışsın. Fakat tabloda a ve m harflerini adım sayısı ve oturabilecek misafir sayısının olduğu yerlere yazdığını görüyorum. Buradan sonra nasıl ilerleyebilirsin?
- 10D2:** $8m + a$ dedim ama bilmiyorum. Yani doğru değil galiba.
- 11A:** Oluşturduğun bu ifadede her sayı ve değişken ne anlama geliyor?
- 12D2:** 1 masada 8 kişi oturuyor. 8 misafir o yüzden $8m$. a, adım sayısı...
- 13A:** Sence bu şekilde yazman doğru oldu mu? Başka bir fikrin var mı?
- 14D2:** Bilmiyorum, doğru olmayabilir.

D2, bağlamı anlamlandırdığını ve miktarlar arasındaki ilişkileri ifade edebildiğini gösteren açıklamalar yaparak C1 ve C2 yetkinliklerini yansıtabilmektedir (4D2, 6D2). Öğrencinin bu sırada yaptığı açıklamalarda düşüncelerini açık ve eksiksiz ilettiği görülmektedir. Fakat D2, örüntünün kuralını veren denklemini yazamadığı için kendinden emin ve doğru açıklamalar yapamamaktadır (10D2, 12D2, 14D2).

Sekizgen Masalar Probleminde C5 Yetkinliğine İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Her iki veri grubundan (yazılı çözümler ve mülakat metinleri) ortaya çıkan sonuçlar neticesinde öğrencilerin C5 yetkinliğini sağlama düzeyleri hakkında bulgular elde

edilmektedir. Öğrencilerin yetkinliği sağlama düzeylerini gösteren açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 47’de görülmektedir.

Tablo 47

Sekizgen Masalar probleminde C5 yetkinliğini farklı düzeyde sağlayan öğrenci açıklamaları

Kategoriler	Örnek Çözüm	Öğrenci
C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığına yönelik ikna edici açıklama yapan	“2 masa birleşince birleşen yerlere misafir oturamaz bu yüzden 16 değil 2 eksik. 6 artarak gidiyor, örüntü şeklinde. Denklem için adım sayısına a dedim. Misafir de m olsun demiş. 6 arttığı için 6a. Sayıları sağlaması için 2 ekledim. Sonuç da misafir sayısına eşit olur. Yani $6a + 2 = m$ şeklinde yazdım. 105 ile 101 masa dediği için 4 masa fark var. 6 misafir çarpı 4 masadan 24 kişi eksilir. Yani 606 misafir buldum.” (Y1)	Y1, Y2, O1
C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığına yönelik açıklama yapan	“Denklemini $6x + 2 = 596$ diye yazdım. 6 artarak gidiyor. Artı 2 dedim çünkü ilk ve son masada 1 kişilik daha yer artıyor o yüzden. (e) maddesinde 4 masa azaldığını söylemiş 101 masa diye... 26 kişi az dedim. 6 azalması gerekiyor çünkü... Ama son masada bir kişi daha kenarına oturabilir. 25 azalması lazım yani. 605 oluyor yani.” (O2)	O2, D1, D2
C5 yetkinliğini sağlayamadığını gösteren yanlış açıklamalar	...	

Öğrencilerin yazılı çözümleri ile mülakat sırasında yaptıkları açıklamalar sonucunda C5 yetkinliğini sağlama düzeylerinde değişiklik olmadığı görülmektedir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirde stratejik akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Stratejik akıl yürütme süreçleri farklı akademik başarıya sahip öğrencilerin açık uçlu cebir problemlerine verdikleri yanıtları ve yapılan örnek olay çalışmalarından elde edilen bulgular ile incelenmektedir. Bu bölümde, araştırmanın alt problemlerine yanıt aranırken elde edilen bulgular ile birlikte ilgili tartışmalara yer verilmekte ve alt problemlerden yola çıkarak ana probleme verilebilecek yanıtlar tartışılmaktadır. Araştırmanın sonuçları, öğrencileri değerlendirmekten ya da kesin yargılara varmaktan çok öğrencilerin Stratejik Cebirsel Akıl Yürütme süreçlerinin nasıl olduğunu incelemeye ve güçlük çekilen durumlara odaklanmaktadır.

Araştırmanın birinci alt problemi “Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlamlandırma süreçleri nasıldır?” şeklinde belirlenmiştir. Öğrencilerin metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlamlandırma süreçleri araştırmanın temel aldığı SAR çerçevesinde yer alan C1 yetkinliği bağlamında incelenmiştir. Öğrencilerin C1 yetkinliğini sağlama düzeyleri incelendiğinde, akademik açıdan yüksek başarıya sahip öğrencilerin genel olarak bu yetkinliği güçlü düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden yalnızca Y2, bir problemde (Timuçin İnternet Kafede problemi) C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığını göstermiştir. Y2’nin bu problemde C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamış olmasının sebebi, var olan gömülü matematiği anlamlandıramamasıdır.

Akademik açıdan yüksek başarıya sahip diğer öğrenci olan Y1’in Ters Piramit problemine ilişkin yazılı çalışmalarında gömülü matematiği anlamlandıramadığı için C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı görülürken, örnek olay çalışmasında güçlü düzeyde sağladığı belirlenmiştir. Örnek olay çalışmasında öğrencinin anlamlandırma sürecini geliştirici ve cebirsel akıl yürütmelerini ortaya çıkarmaya yardımcı olan sorular sorulduğunda problemde yer alan gömülü matematiği keşfettiği ve anlamlandırdığı görülmüştür. Benzer şekilde Adıyaman (2019) sınıf ortamında cebirsel eylemleri gözlemleyebilmeyi amaçladığı çalışmasında, anlamlandırma süreçlerine katkı sağlayıcı sorular sorulduğunda öğrencilerin kendi yaklaşımlarını oluşturabildiklerini ve problemleri bu yönlendirici sorular ile anlamlandırabildiklerini gözlemlemiştir. Öğrencilerin açık uçlu problemleri çözerken yaptıkları çözümlerini öğretmenleri ile değerlendirmesini sağlamanın, matematiksel akıl yürütmeyi geliştirdiği belirtilmektedir (Pape, Bell ve Yetkin, 2003). Örnek olay çalışmasında öğrencilerle yazılı çözümleri incelendiğinde ve çözümleri üzerinde tartışıldığında bazı akıl

yürütme stratejilerini ortaya çıkarabildikleri görülmüştür. Y1'in yazılı çözümlerinde anlamlandıramadığı gömülü matematiği yapılan örnek olay çalışmasında keşfetmesi bu durum ile örtüşmektedir.

Akademik açıdan orta seviyede başarıya sahip olan öğrencilerin de yüksek başarıya sahip olan öğrenciler gibi C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Özellikle O2'nin tüm problemlerde C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı görülmüştür. Bu durum cebir öğrenme alanında açık uçlu cebir problemlerinin akademik açıdan yüksek başarıya sahip olmayan öğrencilerin cebir anlayışını geliştirebileceği yönünde vurgu yapan literatürü desteklemektedir. Bu literatür incelendiğinde, Steen ve diğerleri (1996), rutin olmayan açık uçlu problemlerin matematiksel akıl yürütmeyi geliştirdiğini belirtmektedir. Açık uçlu problemlerin matematiksel akıl yürütmeyi geliştirdiğine vurgu yapan NCTM (1989), öğrencilerin ilgilerini çeken problem durumlarının önemine değinmektedir. Nitekim literatürde yer alan diğer araştırmalarda da gerçek yaşamla ilişkili problemlerin matematiksel akıl yürütmeyi geliştirdiği belirtilmektedir (Altun, 2008; Baki, 2008; Driscoll, 1984; Emig, 1997; Erdem, 2011; Schliemann ve Carraher, 2002). Francisco ve Maher (2005), akıl yürütmeyi geliştiren faktörler arasında kompleks durumların olduğu problem bağlamlarının etkili olduğundan bahsetmektedir. Öğrencilerin kendi düşüncelerini gerekçelendirmelerini beklemenin ve bu gerekçelerini sorgulayan sorular yöneltmenin, matematiksel akıl yürütmenin gelişmesine katkı sağladığı görülmüştür (Francisco ve Maher, 2005). Bu araştırmada da yapılan örnek olay çalışması ile öğrencilerin yazılı çalışmalarında buldukları sonuçları gerekçelendirmeleri beklenmiş ve yazılı çözümlerinden elde edilemeyen bazı verilerin bu örnek olay çalışmalarında gözlemlendiği belirlenmiştir. Bu gözlemlere göre öğrencilerin belli sorular sorulduğunda gerekçelerini belirttikleri ve bu süreçte akıl yürütme stratejilerini ortaya koydukları görülmüştür. Umay (2003), bu durumla ilgili olarak öğrencilerle yapılan çalışmalarda öğrenci merkezli yaklaşımların benimsenmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Bu araştırmada da örnek olay çalışmalarında öğrenciler ile yapılan mülakatlarda öğrenci merkezli yaklaşım benimsenmiş ve bunun bir sonucu olarak öğrencilerin kendi düşünsel süreçlerini çekinmeden yansıtabildikleri görülmüştür.

Akademik açıdan düşük başarıya sahip olan öğrencilerin ise C1 yetkinliğini genel olarak zayıf düzeyde sağladıkları görülmektedir. Bu öğrencilerden D1, bir problemde (Teraziler Nasıl Dengede? problemi) C1 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir. Bu durum akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin de cebirsel anlayışlarını geliştirebilecekleri problemler ile karşılaştıklarında cebirsel akıl yürütmelerinin ortaya çıkabileceğinin önemli bir adımı olarak görülmektedir. Bu durumla ilgili olarak Erdem ve

Gürbüz (2015) çalışmasında, çoktan seçmeli sorular yerine hemen sonuca ulaşılamayan, belli derecede akıl yürütme gerektiren açık uçlu problemler ile öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin gelişimine destek sağlanabileceğini belirtmişlerdir. Akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin genel olarak C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamalarının sebebi problem bağlamını anlamlandırma bileşenini sağladıkları halde bu anlamlandırmalarını uygun çözüm stratejilerine ve gömülü matematiği anlamlandırma süreçlerine uyarlayabilme konusunda zorlanmalarıdır. Walkington ve diğerleri (2012) de benzer olarak, çalışmalarında düşük puan grubundaki öğrencilerin problem bağlamını anlamlandırmanın ötesine geçemediklerini ve öğrencilerin problem bağlamını anlamlandırdıklarını gösteren kanıtlar sunmalarına rağmen bunu çözüm stratejilerine yansıtamadıklarını tespit etmişlerdir.

Araştırmanın ikinci alt problemi “Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri belirleme süreçleri nasıldır?” şeklinde belirlenmiştir. Öğrencilerin ilgili miktarları ve bunların arasındaki ilişkileri belirleme süreçleri araştırmanın temel aldığı SAR çerçevesinde yer alan C2 yetkinliği bağlamında incelenmiştir. Öğrencilerin C2 yetkinliğini sağlama düzeyleri incelendiğinde, akademik açıdan yüksek başarıya sahip öğrencilerin tüm problemlerde bu yetkinliği güçlü düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Benzer şekilde Bike-Kalkan (2014) öğrencilerin cebirsel akıl yürütme yapılarının nasıl olduğunu incelediği çalışmasında, yüksek başarı düzeyindeki bazı öğrencilerin gerçek yaşam ile ilişkili problem durumlarındaki ilişkileri ifade edebildiklerini gözlemlemiştir.

Akademik açıdan orta seviyede başarıya sahip olan öğrencilerin genel olarak C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden O1, iki problemde (Ters Piramit ve Harflerin Oyunu problemleri) bu yetkinliği zayıf düzeyde sağladığını göstermiştir. O1’in bu problemlerde gömülü matematiği anlamlandıramaması sonucu C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlaması, ilgili miktarları belirleme sürecini olumsuz etkilediği için C2 yetkinliğini de zayıf düzeyde sağlamasına neden olmuştur. Akademik açıdan orta seviyede başarıya sahip O2 ise yalnızca bir problemde (“n” Neyi İfade Ediyor? problemi) C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamıştır. Bu problem doğası gereği alt maddeler halinde yönergelere sahip olmadığından, O2’nin bu problemde kendi çözüm sürecini kendisinin şekillendirmesi gerektiği aşamalarda ilgili miktarlardan bazılarını belirleyemediği görülmüştür.

Walkington ve diğerleri (2012) öğrencilerin miktarları ve bunların aralarındaki ilişkileri ifade etmeden, problem metninden yola çıkarak doğrudan temsil oluşturma sürecine geçiş yaptıklarında açık uçlu cebir problemlerini çözme sürecinde büyük ölçüde başarısız olduklarını tespit etmiştir. O1’in Harflerin Oyunu probleminin çözüm sürecinde miktarları

belirlemeden cebirsel temsil oluşturma sürecine geçiş yaptığı görülmektedir. O1'in bu aşamada oluşturduğu temsiller doğru olmamıştır. Fakat problemin istediği doğru sonuçlara özyinelemeli işlemler ile ulaşabilmiştir. Bu bulgu, Walkington ve diğerlerinin (2012) bu durum ile ilgili ulaştığı sonuçlar ile O1'in temsil oluşturma sürecinde başarısız olması benzerlik gösterirken, doğru sonuçlara ulaşabilmesi noktasında farklılık göstermektedir.

Akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin ise C2 yetkinliğini genel olarak sağlayamadıkları tespit edilmiştir. Bu öğrenciler C2 yetkinliğini üç problemde güçlü düzeyde sağlarken, dört problemde sağlayamamaktadır. Öğrencilerin C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları problemler ile sağlayamadıkları problemlerin aynı problemler olduğu görülmüştür. Bu bulgu, açık uçlu cebir problemlerinin araştırmanın amaçlarını sağlamada tutarlılık gösterdiğini ifade ediyor olabilir. Akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin yedi problemde dördünde C2 yetkinliğini sağlayamamaları, öğrencilerin C1 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlama süreçlerinde gömülü matematiği anlamlandıramamalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Lepak ve diğerleri (2018) SAR çerçevesinin tanımladığı yetkinliklerin birbirinden kesin çizgilerle ayrılmadığını, yetkinlikler arasında bir miktar örtüşme olduğunu belirtmektedir. Bu durum öğrencilerin bağlamı anlamlandıramamaları halinde miktarları belirlemede ve ilişkileri ifade etmede zorlanmalarını açıklamaktadır.

Akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin C2 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları bazı problemlerde aritmetik kullandıkları tespit edildi. Bu öğrenciler sonuçlara ulaşmak için temsil oluşturmamaları için örüntülerde ya da doğrusal ilişkiler içeren durumlarda artış miktarını tekrar tekrar eklemeyi tercih etmiştir. Lepak ve diğerlerinin (2018) çalışmalarında artış miktarını dört bulan düşük puan grubundaki öğrencilerin tekrar tekrar dört ekleyerek problemin çözümüne ulaştıklarını belirtmektedir. Bu çalışmada da benzer durumların varlığı düşük başarıya sahip öğrencilerde gözlemlenmiştir.

Araştırmanın üçüncü alt problemi “Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki miktarlar arasındaki ilişkilerin cebirsel temsillerini kullanma süreçleri nasıldır?” şeklinde belirlenmişti. Öğrencilerin miktarlar arasındaki ilişkilerin cebirsel temsillerini kullanma süreçleri araştırmanın temel aldığı SAR çerçevesinde yer alan C3 yetkinliği bağlamında incelenmiştir. Öğrencilerin C3 yetkinliğini sağlama düzeyleri incelendiğinde, akademik açıdan yüksek başarıya sahip öğrencilerin bu yetkinliği tüm problemlerde güçlü düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Genellemelere ulaşarak temsiller oluşturabilmeyi gerektiren bu yetkinlikte yüksek başarıya sahip öğrencilerin başarılı olduğunun tespit edilmesi literatürdeki birçok araştırmanın bulguları ile örtüşmektedir (Bike-Kalkan, 2014; Greeno ve Hall, 1997). Brenner ve diğerleri (1997), çoklu temsillerin kullanımına ilişkin araştırma bulgularında,

öğrencilerin bu temsilleri kullanarak matematiksel kavramları daha iyi anlayabildiklerine ve bu temsillerin açık uçlu cebir problemlerinin sonuçlarına ulaşma çabalarını kolaylaştırabileceğine değinmişlerdir.

Araştırmanın bulguları kapsamında bu noktada değinilmesi gereken bir durum söz konusudur. Akademik açıdan yüksek başarıya sahip Y1, Ters Piramit problemini çözmeye başlamasının ilk aşamasında gömülü matematiği anlamlandıramayıp çözüm için ilgili olan asıl miktarları belirleyememişti. Ardından yapılan örnek olay çalışmasında yöneltilen sorularla gömülü matematiği keşfetmesinin ardından problemin tüm çözüm sürecini değiştiren Y1'in bu yetkinlikleri güçlü düzeyde sağladığı tespit edilmiştir. Y1, açık uçlu cebir problemiyle ilk karşılaşmasında resmi olmayan (informal) ve özyinelemeli çözümler uygulayarak doğru sonuçlara ulaşmış olsa da, örnek olay çalışması için yapılan mülakat sırasında öğrencinin gömülü matematiği anlamlandırmasının ardından daha resmi (formal) stratejiler uygulaması ve doğru cebirsel ifadeyi oluşturması araştırmanın önemli bir bulgusu haline gelmiştir. Carraher ve diğerleri (2008), bu duruma ilişkin güçlü SAR'lara sahip öğrencilerin informal yaklaşımlarının açık uçlu problem çözümlerinde daha formal yaklaşımların ve stratejilerin açığa çıkması için bir temel olabileceği görüşünü belirtmişlerdir. Cai (2017) ise yaptığı çalışmada ulaştığı sonuçlar neticesinde, bu duruma ilişkin matematiksel anlayışın sürekli gelişen bir süreç olarak görülebileceğini ve yeni stratejilerin problem çözme sürecinin her anında gerçekleşebileceğini öne sürmüştür.

Akademik açıdan orta seviyede başarıya sahip olan öğrencilerin genel olarak C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Bu öğrenciler, yedi problemde üçünde C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağlamaktadır. O1, genel olarak ilgili miktarları belirleme ve miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etmede güçlük yaşadığı ve C2 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı problemlerde, C3 yetkinliğini de zayıf düzeyde sağlamıştır. O2'nin ise C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı problemlerde temsilleri oluşturma ve aralarında bağlantı kurma sürecinde güçlük yaşadığı görülmüştür. Bununla birlikte her iki öğrenci için de bazı ortak durumların varlığı tespit edilmiştir. Örneğin, Harflerin Oyunu probleminde bu öğrenciler harflerin örüntü oluşturduğunu fark etmeleri üzerine artış miktarının dört olduğunu bulmuşlardır. Fakat temsil oluşturma sürecinde bu durumu cebirsel olarak ifade ederken $(4n - 3)$ ifadesi yerine $n + 4$ gibi özyinelemeli düşünme süreçlerini ortaya koymuşlardır. Öğrencilerin bu cebirsel ifade oluşturma süreçleri, Lepak ve diğerlerinin (2018) çalışmasında yer alan orta puan grubundaki öğrencilerin çözümleri ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca Bike-Kalkan (2014) çalışmasında uyguladığı cebir testinde başarı düzeylerini belirtmeksizin genel olarak öğrencilerin özyinelemeli akıl yürütmelere başvurduklarını gözlemlemiştir.

Akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin ise C3 yetkinliğini genel olarak sağlayamadıkları tespit edilmiştir. Bu öğrenciler C3 yetkinliğini dört problemde sağlayamamaktadır. Diğer üç problemde D2'nin C3 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığı, D1'in ise problemlerden birinde (Teraziler Nasıl Dengede? problemi) C3 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığı tespit edilmiştir. Teraziler Nasıl Dengede? probleminin öğrencilerin sınıf ortamında daha önce karşılaştıkları bir problem türü olması, D1'in bu problemde C3 yetkinliğini sağlama düzeyini olumlu yönde etkilemiş olabilir. Diğer yandan, bu öğrencilerin Sekizgen Masalarda zayıf düzeyde C3 yetkinliğini sağlayabilmeleri, bu problemde bağlamın iki farklı şekilde çoklu temsiller aracılığıyla (hem örüntü hem de tablo ile) verilmiş olmasından kaynaklanıyor olabilir. Bu durumda düşük başarıya sahip olan bu öğrencilerin temsil oluşturmada (üretmede) zorluk yaşadıkları, fakat verilen temsilleri yorumlamada daha verimli oldukları şeklinde bir sonuca varılabilir. Lepak ve diğerleri (2018) bu konuyla ilgili olarak örüntü içerikli açık uçlu cebir problemlerinin SAR gelişimi için bir başlangıç noktası sağlayabileceğini düşünmektedir.

Araştırmanın en önemli bulgularından biri, öğrencilerin akademik başarı seviyelerinin en çok hissedildiği yetkinliğin C3 yetkinliği olmasıdır. Bu durum ilgili literatürdeki araştırmalar ile benzerlik göstermektedir (Brenner ve diğerleri, 1997; Healy ve Hoyles, 1999; Koedinger ve Nathan, 2004; Lepak ve diğerleri, 2018; Stylianou, 2011; Yerushalmy, 2000). Akademik başarıları düşük olan öğrencilerden yüksek olan öğrencilere doğru, açık uçlu cebir problemlerine verilen yanıtların somut sayısal veya görsel temsillerden daha soyut ve cebirsel temsillere (tablo, grafik, denklem) doğru ilerlediği görülmüştür. Bu durumda öğrencilerin cebirsel temsiller oluşturma ve bu temsiller arasında bağlantı kurma süreçleri ile akademik başarıları arasında anlamlı bir ilişki olabileceği düşünülmektedir.

C3 yetkinliğine ilişkin en genel bulgulardan biri ise, akademik başarı açısından tüm seviyelerdeki öğrencilerin cebirsel temsil oluşturma süreçlerinde çoğunlukla tablo temsiline yararlanmalarıdır. Akademik açıdan yüksek başarıya sahip öğrenciler buna ek olarak cebirsel ifadeler ya da denklemler ile bu tablolar arasında geçiş yaparak temsiller arasında bağlantı kurabildiklerini göstermişlerdir. Akademik açıdan orta seviyedeki öğrencilerin ise temsiller arasında bağlantı kurma süreçleri yüksek seviyedeki öğrencilerden daha az problemde (dört problemde) görülmüştür.

Araştırmanın dördüncü alt problemi “Öğrencilerin cebirle ilgili problemlerdeki hesaplamaları ve prosedürleri yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme süreçleri nasıldır?” şeklinde belirlenmişti. Öğrencilerin hesaplamaları ve prosedürleri yürütme ve sonuçların doğruluğunu kontrol etme süreçleri araştırmanın temel aldığı SAR çerçevesinde

yer alan C4 yetkinliği bağlamında incelenmiştir. Öğrencilerin C4 yetkinliğini sağlama düzeyleri incelendiğinde, akademik açıdan yüksek başarıya sahip öğrencilerin bu yetkinliği genel olarak güçlü düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden Y1, yalnızca bir problemde (Bakterilerin Hızına Yetiş problemi) bulduğu sonuçların doğruluğunu kontrol etmeyerek C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığını göstermiştir. Y2 ise aynı problem ile birlikte toplam üç problemde bulduğu sonuçları kontrol etmediği için C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladığını göstermiştir.

Akademik açıdan orta seviyede başarıya sahip olan öğrencilerin genel olarak C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden O1, yalnızca bir problemde (Sekizgen Masalar problemi) prosedürleri hassasiyetle yürütme bileşenini sağladığı gibi bulduğu sonuçların doğruluğunu da kontrol ederek C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir. Akademik açıdan orta seviyede başarıya sahip olan O2 ise aynı problemde denklemi doğru kurmuş olsa da prosedürlerini hassasiyetle yürütmediği ve bulduğu sonuçları kontrol etmediği için C4 yetkinliğini sağlayamamıştır.

Akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin ise C4 yetkinliğini genel olarak sağlayamadıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden D1, yalnızca bir problemde (Teraziler Nasıl Denge? problemi) prosedürleri hassasiyetle yürütme ve sonuçlarının doğruluğunu kontrol etme bileşenlerini sağlayarak C4 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir. Ayrıca D1 ve D2, bir problemde de (Timuçin İnternet Kafede problemi) prosedürlerini hassasiyetle yürüttükleri için C4 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıklarını göstermişlerdir.

Kaya (2015) çalışmasında yaptığı deneysel araştırmanın olumlu etkileri olduğunu ve öğrencilerin çoklu temsilleri temel alan bir eğitim sonrasında temsiller arası bağlantı kurabilme, cebirsel işlemler yapabilme, sonuçların doğruluğunu kontrol etme becerilerinin çoklu temsil temelli öğretim ile geliştirilebileceğini belirtmektedir. Bu çalışmada öğrencilerin çoğunlukla sonuçların doğruluğunu kontrol etmedikleri görülmüştür. Bu durumda C4 yetkinliğinin geliştirilebilmesi için deneysel araştırmalar ile etkinlik ya da farklı tür temellere dayalı öğretimler sağlanabileceği ve öğrencilerin gelişiminin gözlemlenebileceği düşünülmektedir.

Araştırmanın beşinci alt problemi “Öğrencilerin problemlerdeki cebirsel düşünceleri hakkında bilgi veren ikna edici açıklamalar yapma süreçleri nasıldır?” şeklinde belirlenmişti. Öğrencilerin ikna edici açıklamalar yapma süreçleri araştırmanın temel aldığı SAR çerçevesinde yer alan C5 yetkinliği bağlamında incelenmiştir. Öğrencilerin C5 yetkinliğini

sağlama düzeyleri incelendiğinde, akademik açıdan yüksek başarıya sahip öğrencilerin tüm problemlerde bu yetkinliği güçlü düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir.

Akademik açıdan orta seviyede başarıya sahip olan öğrencilerin genel olarak C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin, yedi problemde yalnızca ikisinde C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladıkları görülmüştür.

Akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin ise C5 yetkinliğini genel olarak sağlayamadıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden D1, yalnızca bir problemde (Teraziler Nasıl Denge? problemi) yetkinliğin tüm bileşenlerini yansıttığı ikna edici açıklamalar yaparak C5 yetkinliğini güçlü düzeyde sağladığını göstermiştir. Ayrıca D1 ve D2, iki problemde de (Timuçin İnternet Kafede ve Sekizgen Masalar problemleri) bazı ikna edici açıklamalar yaptıkları için C5 yetkinliğini zayıf düzeyde sağladıklarını göstermişlerdir.

Öğrencilerin cebirsel düşünceleri hakkında bilgi veren ikna edici açıklamalar yapma süreçlerinde, akademik açıdan yüksek başarıya sahip öğrenciler dışındaki öğrencilerin genellikle önceki yetkinliklerin tamamını sağlayamadıklarında açıklama yapma süreçlerine de bu durumların yansıdığı görülmüştür. Adıyaman (2019) çalışmasında da benzer şekilde öğrencilerin genel olarak eleştirel düşünme, yorumlama ve çıkarımlarda bulunmada yetersiz olduklarını ve değerlendirme yapma ya da yorum yapma hususunda öğrenci sayısının az olduğunu gözlemlemiştir.

Genel anlamda akademik açıdan yüksek başarıya sahip öğrencilerin yetkinlikleri güçlü düzeyde sağlamaları sonucu güçlü SAR'lara sahip olduğu söylenebilir. Akademik açıdan orta seviyede başarıya sahip öğrencilerin zaman zaman yüksek başarıya sahip öğrenciler ile benzer çözüm stratejileri uygulamaları ve SAR yetkinliklerini güçlü düzeyde sağlamaları, açık uçlu cebir problemleriyle karşılaştıklarında akıl yürütme süreçlerinin geliştirilebileceğini ve bazı stratejik akıl yürütme süreçlerinin ortaya çıkması sonucu bu süreçlerin gözlemlenebileceğini göstermektedir. Ayrıca açık uçlu cebir problemlerini çözmeye başladıklarında ilk problemlerde güçlük yaşayan öğrencilerin ilerleyen problemlerde önceden sağlayamadıkları bazı yetkinlikleri sağlamaya başladıkları görülmüştür. Örneğin, ilk üç problemde metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlamlandırma yetkinliklerini sağlayamayan akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrenciler, dördüncü problemde itibaren zayıf düzeyde de olsa bu yetkinliği sağlamaya başlamışlardır. Bu durumun bir sonucu olarak, benzer özellikteki problemlerle karşılaştıkça öğrencilerin önceki tecrübelerinden yararlandıkları ve aşına oldukça yetkinlikleri sağlama becerilerinin ortaya çıktığı düşünülmektedir.

Akademik açıdan düşük başarıya sahip öğrencilerin belli bir senaryo, modelleme ya da yaratıcı olabilen gerçek yaşam problemleri ile karşılaştıklarında bağlamı anladıklarını gösteren yanıtlar vermesi, çalışmanın önemli bulgularından biri olabilir. Bu tip cebir içerikli rutin olmayan açık uçlu problemler yerine rutin cebirsel işlemler yapma becerilerine yönelik sorularla karşılaşmaları durumunda, bu öğrenciler için tek bir yargıya varılarak başarısız oldukları düşünülebilirdi. Fakat bu bulgu ile Lepak ve diğerlerinin (2018) de belirttiği gibi, düşük başarıya sahip öğrencilerin de belli düzeyde bir cebirsel anlayışa sahip olabilecekleri görülmüştür.

Açık uçlu cebir problemlerinden biri olan Sekizgen Masalar probleminde yer alan (f) maddesinin yanıtları incelendiğinde, her başarı seviyesinden bir öğrencinin problem bağlamına ilişkin mantıklı açıklamalar yapabildiği görülmüştür. Bu durum tüm öğrenciler için genel bir yorum yapılabileceğini ve uygun bir gerçek yaşam senaryosu ile karşılaşmaları durumunda öğrencilerin yanıtlarında mantıklı açıklamalara ve yorumlara yer verebileceğini göstermektedir. Bu da demektir ki, bu tip problem durumları kullanılarak öğrencilerin metni okuma ve yorumlama yetkinlikleri güçlendirilebilir ve bunun bir sonucu olarak akıl yürütme süreçleri geliştirilebilir. TIMMS’de rutin olmayan problemler olarak tanımlanan, belirgin olmayan durumları içeren problem durumlarının akıl yürütme süreçlerindeki önemine değinilmektedir. NCTM (2000)’ye göre öğrenciler için zor görülen cebir alanına ilişkin gerçek yaşam durumları ile öğrencilerin okulda ilk yıllardan itibaren karşılaştırılmalarının gerekli olduğu düşünülmektedir.

You (2006) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının çoklu cebir temsillerini kullanırken güçlük yaşadıklarını ve öğrencilerin yanıtlarını incelediklerinde hatalarını saptayamadıklarını tespit etmiştir. Öğretmen adaylarının bu olumsuzlukları engelleyecek yöntem ve teknikleri doğru seçemediklerini gösteren bu araştırma, öğrencilerin cebirsel akıl yürütme süreçlerinde öğretmen etkisini inceleyen araştırmaların önemini ortaya koymaktadır. Dede ve Argün (2003), cebirsel kavramların ya da konuların anlaşılmasındaki güçlüklerden birinin de cebir öğretimindeki eksiklikler olduğunu belirtmişlerdir. Bu çalışmada yapılan örnek olay çalışmalarında, öğrencilerin doğru yönlendirmeler ile cebirsel anlayışlarının geliştirilebileceği görülmüştür. Öğretmenin sınıf içinde bir etkinlik ya da eğitsel bir uygulama gerçekleştireceği deneysel ya da eylemsel bir çalışmada derslere SAR yetkinliklerinin entegre edilmesiyle öğrencilerde gözlemlenebilecek SAR gelişimleri üzerine yapılandırılan bir araştırmanın literatüre önemli katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmada kullanılan SAR çerçevesi öğrencilerin stratejik cebirsel akıl yürütme süreçlerine odaklanan yetkinlikleri tanımlamaktadır. Araştırma, bu yetkinlikler kapsamında

gerçekleştirilerek öğrencilerin stratejik akıl yürütme süreçlerini incelemiştir. Bu yetkinliklerin birbiri ile olan örtüşmeleri düşünüldüğünde bu konuyu ele alacak araştırmaların bu örtüşmeleri dikkate alarak SAR yetkinliklerinin daha gözlemlenebilir ve ayırt edici olmasını sağlayan bir değerlendirme aracı geliştirebilecekleri düşünülmektedir.

Gelecek çalışmaların SAR çerçevesini kullanırken, öğrencilerin kavramsal anlamalarına odaklanarak cebirsel kavramlar (eşitlik, değişken vs.) ile yetkinlikleri ilişkilendirdikleri bir araştırma gerçekleştirmeleri önerilebilir. Böylece SAR yetkinliklerini zayıf düzeyde sağlayan öğrencilerin cebirsel anlamalarına ya da cebir konusundaki kavram yanlışlarına ilişkin yeni bulgular edinilerek ilgili literatüre katkı sağlanabilir.



KAYNAKÇA

- Adiyaman, D. (2019). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen öğrenme ortamından yansımalar* (Master's thesis, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü).
- Akkan, Y., Baki, A., ve Çakıroğlu, Ü. (2011). Differences between arithmetic and algebra: Importance of pre-algebra. *Elementary Education Online*, 10(3).
- Akkaya, R. ve DURMUŞ, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanlışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31(31), 1-12.
- Altun, M. (2008). *İlköğretim ikinci kademe (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel Yayıncılık.
- Altunışık, R., Coşkun, R., Bayraktaroğlu, S., ve Yıldırım, E. (2010). Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri SPSS Uygulamalı (6. Baskı). Sakarya: Sakarya Yayıncılık.
- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the learning of mathematics*, 25(2), 42-47.
- Bağdat, O. ve Anapa-Saban, P. (2014). İlköğretim 8. Sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 26, 473-496.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Harf eğitim yayıncılığı.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27-44.
- Bishop, J. W., Otto, A. D., & Lubinski, C. A. (2001). Promoting algebraic reasoning using students' thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(9), 508-514.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 36(5), 412-446.
- Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 663-689.

- Cai, J. (2014). Searching for evidence of curricular effect on the teaching and learning of mathematics: Some insights from the LieCal project. *Mathematics education research journal*, 26(4), 811-831.
- Cai, P. (2017). Understanding China's belt and road initiative.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.
- Ceyhun, E. Y. (2012). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı çerçevesindeki öğretimin öğrencilerin cebir başarısına etkisi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Chazan, D. (2000). *Beyond formulas in mathematics and teaching: Dynamics of the high school algebra classroom*. Teachers College Press.
- Chmiliar, L., (2010). Multiple-case designs. *Encyclopedia of case study research*, 2, 582-584.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 547-589.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420-464.
- Cohen, L., & Manion, L., (1994). *Research methods in education*. London: Routledge.
- Creswell, J.W. (2007). *Qualitative inquiry & research design* (2nd ed.). London: Sage.
- Creswell, J. W. (2014). *Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. London: Sage.
- Çelik, D., (2007). Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Çıkla Akkuş, O. ve Duatepe, A., (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 2002(23), 32-40.
- Dede, Y. (2004). Öğrencilerin cebirsel sözel problemleri denklem olarak yazarken kullandıkları çözüm stratejilerinin belirlenmesi. *Journal of Educational Sciences & Practices*, 3(6).

- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(24), 180-185.
- Driscoll, M. (1984). What research says. *Arithmetic Teacher*, 31(6), 34-35.
- Driscoll, M., (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912.
- Duval, R., (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103-131.
- Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (s. 215-238). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Emig, V. B. (1997). A multiple intelligences inventory. *Educational Leadership*, 55(1), 47-50.
- English, L. D., (1998). Children's reasoning in solving relational problems of deduction. *Thinking & Reasoning*, 4(3), 249-281.
- English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*, 91(2), 166-170.
- Erdem, E. (2011). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.
- Erdem, E., (2015). *Zenginleştirilmiş öğrenme ortamının matematiksel muhakemeye ve tutuma etkisi* (Doctoral dissertation).
- Erdem, E. and Gürbüz, R. (2015). An analysis of seventh-grade students' mathematical reasoning. *Çukurova University Faculty of Education Journal*, in press.
- Erdem, Ö., ve Sarpkaya-Aktaş, G. (2018). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında yaşadıkları kavram yanlışlarının giderilmesinde etkinlik temelli öğretimin değerlendirilmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 9(2), 312-338.
- Ersözlü, Z. N., & Çoban, H. (2012). The Relationship Between Candidate Teachers' Mathematical Reasoning Skills And Their Levels Of Using Metacognitive Learning

Strategies/Öğretmen Adaylarının Matematiksel Muhakeme Becerileri ile Bilişötesi Öğrenme Stratejilerini Kullanma Düzeyleri Arasında. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 9(19).

Flyvbjerg, B. (2006). Five misunderstandings about case-study research. *Qualitative inquiry*, 12(2), 219-245.

Francisco, J. M. and Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 361-372.

Garfield, J., & Chance, B. (2000). Assessment in statistics education: Issues and challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 99-125.

Gerring, J. (2007). Is there a (viable) crucial-case method?. *Comparative political studies*, 40(3), 231-253.

Graham, K., Cuoco, A., & Zimmermann, G. (2010). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Algebra*. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Greenes, C. E., & Findell, C. R. (1999). *Groundworks: Algebraic Thinking, Grade 1, [teachers Book]*. Creative Publications.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 78, 361-367.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1989). *Fourth generation evaluation*. Sage.

Gürbüz, R., ve Erdem, E. (2014). Matematiksel ve olasılıksal muhakeme arasındaki ilişkinin incelenmesi: 7. sınıf örneği. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, (16), 205-230.

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers?. *Mathematical Thinking and learning*, 1(1), 59-84.

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In *Approaches to algebra* (pp. 239-255). Springer, Dordrecht.

- Henderson, P. B., Hitchner, L., Fritz, S. J., Marion, B., Scharff, C., Hamer, J., & Riedesel, C. (2002). Materials development in support of mathematical thinking. *ACM SIGCSE Bulletin*, 35(2), 185-190.
- Herbert, K., & Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 340-344.
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and Procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(4), 646-682.
- Kaf, Y. (2007). Matematikte model kullanımının 6. sınıf öğrencilerinin cebir erişilerine etkisi. *Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara*.
- Kalkan, D. B. (2014). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapıları* (Doctoral dissertation, Anadolu University (Turkey)).
- Kanbir, S. (2016). Middle school students' development of algebraic reasoning: Comparing effects of three instructional approaches (visual, structural, and modeling). NCTM Research Conference, San Francisco.
- Kaput, J. J. (1999). *Teaching and learning a new algebra* (pp. 145-168). Routledge.
- Karataş, Z. (2015). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. *Manevi temelli sosyal hizmet araştırmaları dergisi*, 1(1), 62-80.
- Kasmer, L. (2008). *The role of prediction in the teaching and learning of algebra*. Western Michigan University.

- Kaya, D. (2015). Çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin cebirsel muhakeme becerilerine, cebirsel düşünme düzeylerine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi üzerine bir inceleme. *Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimler Enstitüsü, İzmir*.
- Kaya, D., ve Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 3(2), 38-47.
- Kaya, D., Keşan, C., İzgiol, D., & Erkuş, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakeme becerilerine yönelik başarı düzeyi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 7(1), 142-163.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra.
- Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teachers question from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 16(1), 5-26.
- Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, 119-139.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 68-76.
- Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The journal of the learning sciences*, 13(2), 129-164.
- Kramarski, B., & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American educational research journal*, 40(1), 281-310.
- Lacampagne, C. B. (1995). *The Algebra Initiative Colloquium. Volume 2: Working Group Papers*. US Government Printing Office, Superintendent of Documents, Mail Stop: SSOP, Washington, DC 20402-9328.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 60(1), 1-64.

- Lepak, J. R., Wernet, J. L., & Ayieko, R. A. (2018). Capturing and characterizing students' strategic algebraic reasoning through cognitively demanding tasks with focus on representations. *The journal of mathematical behavior*, 50, 57-73.
- Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational studies in mathematics*, 165-190.
- Lloyd, G., Beckmann, S., Zbiek, R. M., & Cooney, T. (2010). *Developing Essential Understanding of Functions for Teaching Mathematics in Grades 9-12*. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191 1502.
- MacGregor, M., & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for research in mathematics education*, 30(4), 449-467.
- Martinez, M. V., Brizuela, B. M., & Superfine, A. C. (2011). Integrating algebra and proof in high school mathematics: An exploratory study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(1), 30-47.
- Mason, J. (2001). Aspects of generalisation and algebra: exploiting children's power.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M., (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. sage.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005). *İlköğretim matematik dersi 6-8 öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2009). *Ortaokul matematik dersi (6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Mubark, M. M. M. (2005). Mathematical thinking and mathematics achievement of Students in the Year of 11 scientific stream in Jordan, Doctoral dissertation, New Castle university.

- Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and instruction*, 18(2), 209-237.
- Nathan, M. J., Stephens, A. C., Masarik, D. K., Alibali, M. W., & Koedinger, K. R. (2002). Representational fluency in middle school: A classroom study. In *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 462-472). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.
- National Assessment of Educational Progress [NAEP]. (2002). *Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress*. Washington, DC: National Assessment Governing Board.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: Virginia.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2010). *Program for the research presession*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers (2010). In N.G.A.C.f.B. Practices & Co, & C.S.S. Officers (Eds.). *Common core state standards for mathematics*. Washington D.C: National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers.
- National Research Council, & Mathematics Learning Study Committee. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press.
- O'Daffer, P. G. and Thornqvist, B. A. (1993). *Critical thinking, mathematical reasoning, and proof*. In Patricia S Wilson & Sigrid Wagner (Eds.), *Research ideas for the classroom*. New York: Maxwell Macmillan International.
- OECD. (2009). PISA data analysis manual. SPSS. (2nd Ed.). Retrieved from <http://browse.oecdbookshop.org/oecd/pdfs/free/9809031e.pdf>. doi: 10.1787/9789264056275-en

- OECD. (2010). Are new millennium learners making the grade? Technology use and educational performance in PISA. Paris, France: Author. 1088 Journal of Educational Computing Research 54(8)
- OECD. (2014). PISA 2012 technical report. OECD. Retrieved from <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA-2012-technical-report-final.pdf>
- OECD. (2015). Students, computers and learning: Making the connection. PISA: Author. doi: 10.1787/9789264239555-en
- Ozan Leylum, Ş., Odabaşı, H. F., & Kabakçı Yurdakul, I. (2017). Eğitim ortamlarında durum çalışmasının önemi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi-Journal of Qualitative Research in Education*, 5(3), 369-385.
- Öz, T. (2017). 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi.
- Öz, T., ve Işık, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerisi üzerine görüşleri. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19(2), 228-249.
- Pape, S. J., Bell, C. V., & Yetkin, I. E. (2003). Developing mathematical thinking and self regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 179-202.
- Patton, M. Q. (2014). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice*. Sage publications.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM*, 40(3), 385-400.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.
- Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., & Ronau, R. N. (2010). Methods of instructional improvement in algebra: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research*, 80(3), 372-400.
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*, 74(6), 418-420.
- Russell, J. S. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. *1999 Yearbook, NCTM*, 1-12.

- Schliemann, A. D. and Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review*, 22(2), 242-266.
- Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of “out loud” problem-solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4(2), 171-191.
- Schoenfeld, A. H. (2004). Beyond the purely cognitive: belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance Classics in Mathematics Education Research (pp. 329-363). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.
- Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher*, 81(6), 420-427.
- Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in Teaching mathematics. In *International handbook of mathematics teacher education: volume 2* (pp. 321-354). Brill Sense.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113.
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 36(5), 404-411.
- Star, J. R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B., & Durkin, K. (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology*, 41, 198-208.
- Steen, L. A. (1999). Twenty Questions about Mathematical Reasoning.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal*, 33(2), 455-488.
- Sternberg, R. J. (1999). The nature of mathematical reasoning. *Developing mathematical reasoning in grades K-12*, 37-44.

- Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 265-280.
- Susac, A., Bubic, A., Vrbanc, A., & Planinic, M. (2014). Development of abstract mathematical reasoning: the case of algebra. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, 679.
- Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *The Journal of Mathematical Behavior*.
- Tekay, T. (2012). *İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin Doğrusal Denklemlerin Grafiklerini Kartezyen Koordinat Sistemine Aktarma Becerileri* (Doctoral dissertation, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir).
- Tekay, T., Ve Doğan, M. (2015). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin doğrusal denklemlerin grafikleri ile ilgili soruları çözme becerilerinin değerlendirilmesi. *MATDER Matematik Eğitimi Dergisi*, 2(1).
- Thirds/Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS]. (2003). *IEA's TIMSS 2003 international report on achievement in the mathematics cognitive domains: Findings from a developmental project international association for the evaluation of educational achievement*. Boston College: TIMSS ve PIRLS International Study Lynch School of Education.
- Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational studies in mathematics*, 26(2), 229-274.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 2003(24), 234-243.
- Umay, A., ve Kaf, Y. (2005). A study on flawed reasoning in mathematics. *Hacettepe University Journal of Education*, 28(1), 188-195.
- Usiskin, Z., (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, 8, 19.
- Usiskin, Z., (1997). Doing algebra in grades K-4. *Teaching children mathematics*, 3(6), 346-356.

- Walkington, C., Sherman, M., & Petrosino, A. (2012). "Playing the game" of story problems: Coordinating situation-based reasoning with algebraic representation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(2), 174-195.
- Van De Walle, J. A., Karp, K. S., and Bay-Williams, J. M. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim*. (Çev. Ed. S. Durmuş), Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Wiersma, W., (2000). *Research Methods in Education: An Introduction*. USA: Allyn and Bacon.
- Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(2), 121-131.
- Yackel, E., (2001). Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms.
- Yerushalmy, M., (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(4), 431-466.
- Yerushalmy, M., & Gilead, S. (1999). Structures of constant rate word problems: A functional approach analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1), 185-203.
- Yerushalmy, M., (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational studies in mathematics*, 43(2), 125-147.
- Yerushalmy, M., (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra Word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(5), 356-387.
- Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. *Integrating research on the graphical representation of functions*, 41-68.
- Yeşildere, S., (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8 sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Doctoral dissertation, DEÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü).
- Yesildere, S., & Türnüklü, E. B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi [Examination of students' mathematical thinking and

- reasoning processes]. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40(1), 181-213.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H., (2000). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınları.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H., (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınları.
- Yıldırım, A., ve Şimşek, H., (2008). *Nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınevi.
- Yıldırım, K., (2016). Denklemler konusunun etkinliklerle öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerine ve matematik kaygılarına etkisi. *Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanından Alınmıştır*, (430754).
- Yıldızhan, B., ve Şengül, S. (2017). 6. Sınıf Öğrencilerinin Harflerin Anlamına Yönelik Kavram Yanılgılarının Aritmetikten Cebire Geçiş Süreci Bağlamında İncelenmesi Ve Öğrencilerin Matematik Tutumları Ve Öz Yeterlikleri İle Karşılaştırılması. *The Journal Of International Lingual Social And Educational Sciences*, 3(2), 249-268.
- Yılmaz, N., (2015). Cebir öğretiminde yazma etkinliklerini kullanmanın ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin başarılarına etkisi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15(1), 357-376.
- Yin, R. K., (1994). Discovering the future of the case study. Method in evaluation research. *Evaluation practice*, 15(3), 283-290.
- Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (Vol. 5). sage.
- Yin, R. K. (2013). Validity and generalization in future case study evaluations. *Evaluation*, 19(3), 321-332.
- You, Z. (2006). Preservice teachers'knowledge of linear functions within multiple representation modes. Dissertation Abstracts International. (UMI Number: 3280530)
- Zengin, Y., (2015). Dinamik matematik yazılımı destekli işbirlikli öğrenme modelinin ortaöğretim cebir konularının öğrenimi ve öğretiminde uygulanabilirliğinin incelenmesi. *As far as concerning control group, a paired samples t-test was conducted to evaluate the.*

EKLER

EK 1.

ÖĞRENCİNİN AKADEMİK ÖZGEÇMİŞİ

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Gözde Gergin		
E-postası/Web Sayfası			
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı	Matematik Eğitimi		
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm	Yıl
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik	2018
Tez Başlığı	8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirde Stratejik Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi		
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Sibel YEŞİLDERE İMRE		
Akademik Eserler			
(Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.) Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.			
Bildiriler: - Önalı, G., Türer, G., Tokgöz, M., Ökmen, E., Güzel, S. ve Şahbaz, A. (2019, Mayıs). Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Üstbiliş Farkındalık Düzeylerinin Çeşitli Değişkenler Açısından İncelenmesi. Uluslararası Bilim, Eğitim, Sanat ve Teknoloji Sempozyumu (UBEST), İzmir. Erişim Adresi: http://ubest.deu.edu.tr/BEST2018/abstract/ortaokul-ogrencilerinin-matematiksel-ust-bilis-farkindalik-duzeylerinin-cesitli-degiskenler-acisinden-incelenmesi/reader. - Tokgöz, M., Önalı G. ve Yeşildere İmre, S. (2019, Eylül). Ortaokul Matematik Ders Kitaplarında Yer Alan Etkinliklerin Bilişsel Olarak Zorlayıcılık Bağlamında İncelenmesi. IV. Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu (TURKBİLMAT), İzmir. Erişim Adresi: http://www.bilmat.org/dosyalar/files/ozetler.pdf			
Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler			
Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller			

EK 2. Uygulama İzinleri



T.C.
AĞRI VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-78971437-20-24265124
Konu : Araştırma Uygulama İzni
(Gözde GERGİN)

15/04/2021

VALİLİK MAKAMINA

İlgi; Dokuz Eylül Üniversitesi 23109417 sayılı ve 26.03.2021 tarihli yazısı

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans öğrencisi Gözde GERGİN ' in " 8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirde Stratejik Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi " konulu tez çalışması müdürlüğümüze bağlı resmi ortaokullarda uygulanması uygun görülmüş olup;
Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde ohurlarınıza arz ederim.

Mehmet Faruk TEKİN
İl Millî Eğitim Müdürü

OLUR
Ahmet Vezir BAYCAR
Vali a.
Vali Yardımcısı

Ek; İlgide Kayıtlı Yazı ve Ekler

Dağıtım;
Gereği; 7 İlçe Kaymakamlığı (İlçe MEM)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres :

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ekys>

Telefon No :

Bilgi için:

E-Posta:

Uyvan : Öğrenci

Kop Adresi : meb@hs01.kop.tr

İnternet Adresi: Fak:

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evrakorgu.meb.gov.tr> adresinden cd4b-ebe6-30b5-be7d-d6d0 kodu ile teyit edilebilir.



ETİK İZİN

Çok İvedi



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Hukuk Müşavirliği

Sayı : E-87347630-640.99-31352

19/03/2021

Konu : Etik Kurul İzni Hak.

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 12.01.2021 tarih ve E-49926767-302.08.01-3292 sayılı yazınız.

İlgide kayıtlı yazınıza istinaden Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etik Kurulunun 08.03.2021 tarihli toplantısında alınan 37 sayılı karar ile Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Gözde GERGİN'in "8.Sınıf Öğrencilerinin Cebirde Stratejik Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi" adlı tez çalışmasında uygulayacağı anketin etik açıdan uygun olduğuna karar verilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Nükhet HOTAR
Rektör

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Evrakınızı <http://dogrulama.deu.edu.tr> linkinden CFCD5D3XC kodu ile doğrulayabilirsiniz.

Dokuz Eylül Üniversitesi Rektörlüğü
Adres: Cumhuriyet Bulvarı No:144 35210 Alsancak / İZMİR
Tel: 0(232) 412 1212 Elektronik Ağ: www.deu.edu.tr
Kep Adresi: dokuzeyluluniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi İçin İrtibat:
Merve ÇÖRÜK
Dahili:
E-Posta: merve.curuk@deu.edu.tr



OKUL İZİNLERİ



T.C.
TUTAK KAYMAKAMLIĞI
İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-26054959-605.01-24374176
Konu : Araştırma Uygulama İzni
(Gözde GERGİN)

19.04.2021

DAĞITIM YERLERİNE

İlgi; Valiliğin 24265124 sayılı ve 15.04.2021 tarihli yazısı

İlgi yazısına istinaden Gözde GERGİN'in Eğitim Amaçlı "8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirde Stratejik Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu tez çalışması müdürlüğümüze bağlı resmi ortaokullarda uygulanması uygun görülmüş olup gerekli desteklerin sağlanması hususunda;
Gereğini rica ederim.

Mehmet KARTAL
Müdür a.
Milli Eğitim Şube Müdürü

EK: İlgili Yazı ve Ekleri
Dağıtım Planı: Müdürlüğümüze Bağlı Tüm Ortaokul Müdürlüklerine

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Karşıyaka Mah. Ağrı-Van Karayolu Üssü Tutak/AGRI

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.tuzkiya.gov.tr/meb-ebys>

Telefon No : 0 (538) 848 76 58

E-Posta: tutak04@meb.gov.tr

Kop Adresi : meb@ks01.kop.tr

Bilgi için: Emre GÜNAYDIN

İnternet Adresi:

Unvan : Öğretmen

Faks:

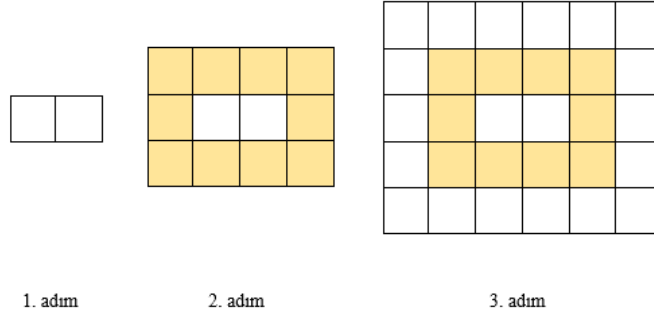
Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evrakorgu.meb.gov.tr> adresinden fdd4-b610-367e-899d-3b09 kodu ile teyit edilebilir.

EK 3. Açık Uçlu Cebir Problemleri Formu

1) TERS PİRAMİT



Dünyadaki en çirkin 30 binadan biri olarak kabul edilen Slovak Radyo binası, Bratislava'daki en ürkütücü mimarlık örneklerinden biri olma özelliğini koruyor. Tersine çevrilmiş bir piramit şeklindeki 80 metrelik bina, 1967'de Slovak mimarlar Svetko, Ľurkovič ve Kissling tarafından tasarlandı.



Mimar Sinan Bey Slovak Radyo binasından esinlenerek hazırladığı sanat merkezi planında yukarıdaki gibi bir örüntüden faydalanmak istemektedir. İlk katı 1. adımdaki gibi iki odalı olacak şekilde 8 katlı bir sanat merkezi planı hazırlayacaktır. Örüntüdeki kare sayıları her bir katta bulunacak oda sayısına karşılık geldiğine göre;

- Sanat merkezinin 4. katında bulunacak oda sayısı kaçtır? Sizce katlardaki oda sayısındaki değişim nasıl gerçekleşmektedir?
- Örüntünün adımlarına bağlı olarak katlardaki oda sayısındaki değişimi gösteren bir tablo, grafik ya da şema çizersiniz. Çizdiğiniz bu gösterimle ilgili düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.
- Bu örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade ediniz. Oluşturduğunuz cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol ediniz. Oluşturduğunuz cebirsel ifadeyi kullanarak d, e ve f maddelerini çözünüz.
- 56 odanın bulunacağı kat kaçınca kattır?
- 132 odanın bulunacağı kat kaçınca kattır?
- Sanat merkezinin en üst katında bulunacak oda sayısı kaçtır?

2) HARFLERİN OYUNU

A, D, Ğ, J, N, ...

Yukarıda alfabemizin harflerinin yer aldığı bir örüntü verilmiştir. Timuçin ve Burçin alfabemizin harflerini kullanarak bir kurala göre oyun oynamaktadırlar. Oyunun kuralına bağlı olarak sırası gelen oyuncu alfabetik sırayı dikkate alarak bir harf söylemektedir. Alfabenin sonuna geldiklerinde kurala bağlı olarak başa dönmektedirler. Burçin ilk harfi söyleyerek oyunu başlatmıştır ve yukarıdaki gibi devam etmişlerdir.

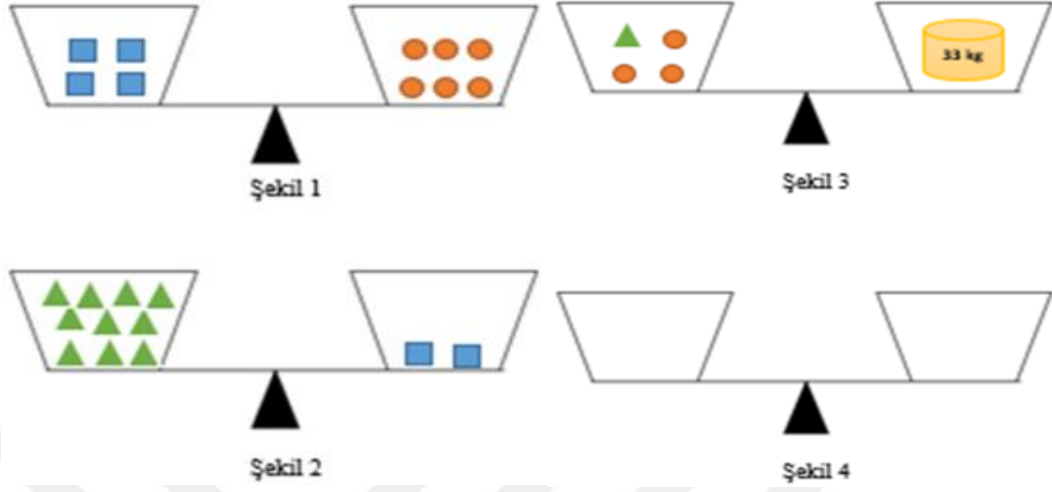
- Sizce örüntüdeki harfler söylenirken neye dikkat edilmektedir?
- Harflerle oluşturulan örüntüyü matematiksel olarak yazmayı deneyiniz. Her bir adımda örüntünün nasıl ilerlediğini açıklayınız.
- Harfleri söylemek için oluşturdukları kuralı şema, tablo, grafikler ya da denklemlerden yararlanarak gösteriniz. Oluşturduğunuz bu gösterimleri (şema, tablo, grafikler, denklem, vb.) kullanarak örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade ediniz ve cümlelerinizle bu işlemlerinizi açıklayınız.
- Burçin'in söyleyeceği 5. harf nedir?
- Timuçin'in söyleyeceği 7. harf nedir?
- Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu kontrol ediniz. Düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.

3) N NEYİ İFADE EDİYOR?

Hangisi daha büyüktür, $n + n$ mi? , $n + 6$ mi?



4) TERAZİLER NASIL DENGEDE?



Verilen üç terazi de dengededir.

Şekil 3’deki terazide sol kefedeki bulunan 1 üçgen ve 3 dairenin ağırlıklarının toplamı 33 kilogramlık bidonun ağırlığına eşit olduğuna göre;

- Şekil 1’deki teraziden yola çıkarak kare ve daire arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.
- Şekil 2’deki teraziden yola çıkarak üçgen ve kare arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.
- Şekil 3’teki terazide yer alan ilişkiyi cebirsel gösterimlerle destekleyerek açıklayınız.
- Oluşturduğunuz cebirsel gösterimlerden yararlanarak kare, daire ve üçgenin ağırlıklarını bulabilir misiniz?
- Bulduğunuz değerlerin doğruluğunu kontrol ediniz. Doğru olduğundan emin olma nedenlerinizi birkaç cümle ile ifade ediniz.
- Siz de bu gösterimleri kullanarak denge halinde farklı bir terazi çiziniz.

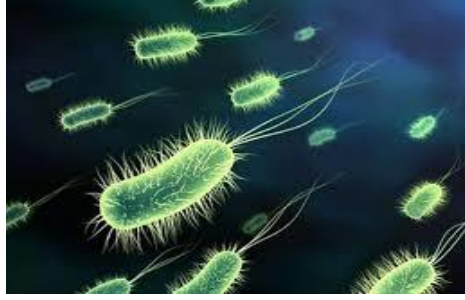
5) TİMUÇİN İNTERNET KAFEDE



Timuçin'in gittiği bir internet kafede bir bilgisayarın açılış fiyatı 2 TL'dir ve her saat başı fiyata 50 Kuruş eklenmektedir. Buna göre;

- a) Gelen müşterilere kolaylık sağlayabilmek için bilgisayarları kullandıkları süreye bağlı olarak ne kadar ücret ödeyeceklerini gösteren bir tablo oluşturabilir misiniz?
- b) Oluşturduğunuz tablodan yararlanarak bilgisayar kullanma süresi ile ücret arasındaki ilişkiyi içeren bir denklem kurabilir misiniz? Bu denklemi kurarken nelere dikkat ettiğinizi cümlelerinizle açıklayınız. Bu denklemi problemin diğer maddelerini çözerken kullanınız.
- c) Bilgisayarı açtıktan sonra bir saati doldurmadan eve dönen Timuçin kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?
- d) Başka bir gün ödevini yapmak için internet kafeye giden Timuçin bilgisayar 5 saat boyunca kullandıysa kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?
- e) İki gün sonra tekrar internet kafede bilgisayar 4 saat boyunca kullanan Timuçin kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?
- f) Hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin bir haftada 20 TL ödeme yapmıştır. Buna göre bir hafta boyunca kaç saat bilgisayar kullanmıştır?

6) BAKTERİLERİN HIZINA YETİŞ

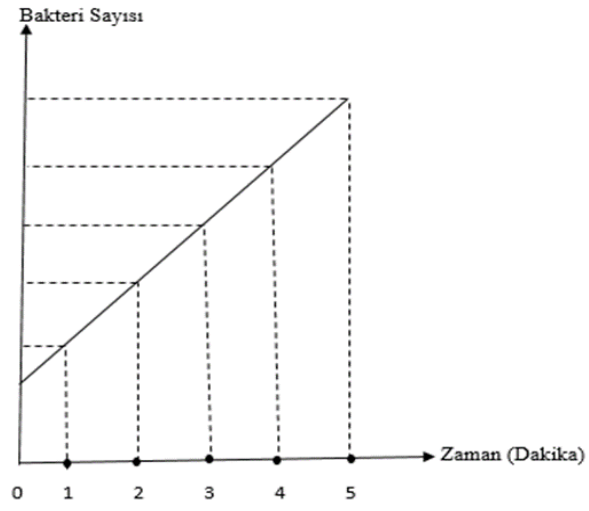


Bir fen lisesi öğrencisi olan Timuçin, bir bakteri türü ile ilgili yaptığı incelemeler sonucu zamana bağlı bakteri sayısındaki değişimi gösteren bir grafik çizmeye karar vermiştir. Bu durumu gösteren denklem:

Bakteri Sayısı (B.S.) = $8 + 16 \times \text{Dakika (D)}$ yani

B.S = $8 + 16 \times D$ şeklindedir. Buna göre;

- Yukarıda verilen denklemden yola çıkarak bakteri sayısı ile dakika arasında nasıl bir ilişki olduğunu yazarak açıklayınız.
- Başlangıçtaki bakteri sayısı kaçtır?
- Timuçin'in grafiğini doğru çizmesine yardımcı olmak amacıyla, dakikada değişen bakteri sayısını gösteren bir tablo oluşturunuz.
- 1 saat sonunda ortamdaki bakteri sayısı kaçtır?
- Bakteri sayısının 4808'e ulaştığını görmek için Timuçin kaç saat gözlem yapmalıdır?
- Oluşturduğunuz tablodan da yararlanarak Timuçin'in grafiğini çizmesine yardım ediniz.

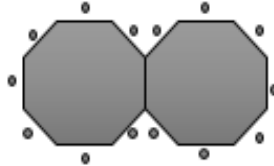


7) SEKİZGEN MASALAR

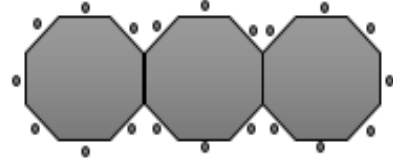
Düğün organizasyon şefi olan Tolga Bey, evlenecek olan bir çiftin hayallerindeki gibi bir düğün organize edebilmek için çalışmalarına başlamıştır. Çiftin ailesinin oldukça kalabalık olduğunu öğrenen Tolga Bey, çiftten kaç kişilik bir salon hazırlayacağı konusunda yeterli bilgileri almıştır ve düğüne kalabalık aileler katılacağı için özel tasarım sekizgen yemek masalarından kullanmaya karar vermiştir. Masaların salondaki düzeni aşağıdaki gibidir:



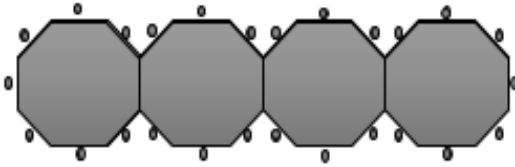
1. adım



2. adım



3. adım



4. adım

	1. adım	2. adım	3. adım	4.adım
Masa sayısı	1	2	3	4
Oturabilecek misafir sayısı	8	14	20	...

Buna göre;

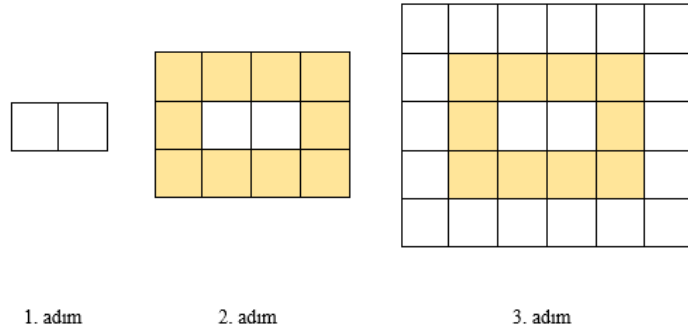
- a) Sizce 1 masaya 8 misafir oturabiliyorken 2 masaya neden 16 misafir oturamamaktadır?
- b) 4 yemek masası yan yana geldiğinde kaç misafir oturabilir?
- c) Adım sayısı a , misafir sayısı m olacak şekilde aralarındaki ilişkiyi ifade eden bir denklem yazınız. Bu denkleminizin bölümlerinin masa düzeni ve misafir sayısı ile nasıl ilişkili olduğunu cümlelerinizle açıklayınız.
- d) 596 kişilik bir organizasyon için kaç masanın yan yana gelmesi gerekir?
- e) 630 misafir için 105 masa gerekiyorsa 101 masanın bulunduğu organizasyonda kaç misafir vardır?
- f) Tolga Bey kalabalık ailelerin katılacağı bu düğün organizasyonu için sekizgen masaları uygun görmüştür. Peki, kalabalık ailelerin olacağını göz önünde bulundurursak sizce masaları yan yana koyması mı, yoksa ayrı ayrı koyması mı mantıklı bir hamle olur?

EK 4. Yarı Yapılandırılmış Klinik Mülakat Soruları

1) TERS PİRAMİT



Dünyadaki en çirkin 30 binadan biri olarak kabul edilen Slovak Radyo binası, Bratislava'daki en ürkütücü mimarlık örneklerinden biri olma özelliğini koruyor. Tersine çevrilmiş bir piramit şeklindeki 80 metrelik bina, 1967'de Slovak mimarlar Svetko, Ďurkovič ve Kissling tarafından tasarlandı.



Mimar Sinan Bey Slovak Radyo binasından esinlenerek hazırladığı sanat merkezi planında yukarıdaki gibi bir örüntüden faydalanmak istemektedir. İlk katı 1. adımdaki gibi iki odalı olacak şekilde 8 katlı bir sanat merkezi planı hazırlayacaktır. Örüntüdeki kare sayıları her bir katta bulunacak oda sayısına karşılık geldiğine göre;

- a) Sanat merkezinin 4. katında bulunacak oda sayısı kaçtır? Sizce katlardaki oda sayısındaki değişim nasıl gerçekleşmektedir?

Klinik Mülakat Sorusu (K.M.S) (1): Oda sayısını (doğru yanıt verdiyse ve yeterli açıklama yapmadıysa) nasıl bulduğunu anlatır mısın?

Sonda Soru: doğru ya da yanlış verdiği yanıtla ilgili;

- Bulduğun sonucun doğruluğundan emin misin?
- Nasıl emin oluyorsun?

Sonda Soru: yanlış yanıt verdiyse ya da işlemlerinde başa dönmesi gerekiyorsa;

- 1. , 2. ve 3. adımlardaki oda sayıları kaç buldun?

- Bu oda sayılarından yola çıkarak tekrar soruyu gözden geçir bakalım. Düşüncelerini açıkla mısın?

K.M.S.(2): Her adımdaki oda sayıları arasında nasıl bir ilişki (ilişkiyi açıklamadıysa) olduğunu açıkla mısın?

K.M.S.(3): Bu sorunun yanıtını bulurken nasıl bir yol/strateji izledin? Daha farklı bir yol ile bulabilir misin?

- b)** Örüntünün adımlarına bağlı olarak katlardaki oda sayısındaki değişimi gösteren bir tablo, grafik ya da şema çizin. Çizdiğiniz bu gösterimle ilgili düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.

K.M.S.(1): Tabloyu/Grafiği vb. (çizdiyse) nasıl oluşturduğunu açıkla mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Tabloyu/Grafiği vb. kontrol eder misin?
- Doğru çizdiğinden emin misin?
- Nasıl emin oluyorsun?

K.M.S.(2): Oluşturduğun tabloyu/grafiği vb. inceleyerek oda sayıları arasındaki değişim hakkında ne söyleyebilirsin? Tablo ya da grafikleri çizmemizdeki amaç ne olabilir?

- c)** Bu örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade ediniz. Oluşturduğunuz cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol ediniz. Oluşturduğunuz cebirsel ifadeyi kullanarak d, e ve f maddelerini çözünüz.

K.M.S.(1): Örüntünün kuralını nasıl buldun? Açıkla mısın?

Sonda Soru: Oluşturduğu doğru ya da yanlış yanıtla ilgili;

- Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?
- Nasıl emin oluyorsun?

K.M.S.(2): Daha önce oluşturduğun tablo/grafik vb. ile bu cebirsel ifadeyi ilişkilendirebilir misin?

Sonda Soru: Neden farklı gösterimler kullandığına dair düşüncelerine yönelik;

- Tablo/grafik gibi gösterimlerin cebirsel ifadeyi oluştururken nasıl bir etkisi oldu?

K.M.S.(3): Sence bu cebirsel ifadeyi neden oluşturduk? Açıklar mısın?

d) 56 odanın bulunacağı kat kaçınıcı kattır?

K.M.S.(1): Kaçınıcı kat olduğunu nasıl buldun? İşlem adımlarını açıklar mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- İşlemlerini kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?

e) 132 odanın bulunacağı kat kaçınıcı kattır?

K.M.S.(1): Kaçınıcı kat olduğunu nasıl buldun? İşlem adımlarını açıklar mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- İşlemlerini kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?

f) Sanat merkezinin en üst katında bulunacak oda sayısı kaçtır?

K.M.S.(1): En üst kattaki oda sayısını bulurken nasıl bir yol izlediğini açıklar mısın?

K.M.S. : Sence katlardaki oda sayısını bulurken cebirsel ifadeyi kullanman mı yoksa artış miktarını kullanman mı daha kolay oldu?

2) HARFLERİN OYUNU

A, D, Ğ, J, N, ...

Yukarıda alfabemizin harflerinin yer aldığı bir örüntü verilmiştir. Timuçin ve Burçin alfabemizin harflerini kullanarak bir kurala göre oyun oynamaktadırlar. Oyunun kuralına bağlı olarak sırası gelen oyuncu alfabetik sırayı dikkate alarak bir harf söylemektedir. Alfabenin sonuna geldiklerinde kurala bağlı olarak başa dönmektedirler. Burçin ilk harfi söyleyerek oyunu başlatmıştır ve yukarıdaki gibi devam etmişlerdir.

a) Sizce örüntüdeki harfler söylenirken neye dikkat edilmektedir?

K.M.S.(1): Timuçin ve Burçin'in harfleri söylerken (bulduysa) neye dikkat ettiğini nasıl buldun? Açıklar mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Alfabadeki harfleri söyler misin?
- Oyunda seçilen harfler nasıl ilerlemektedir? Düşüncelerini anlatır mısın?

b) Harflerle oluşturulan örüntüyü matematiksel olarak yazmayı deneyiniz. Her bir adımda örüntünün nasıl ilerlediğini açıklayınız.

K.M.S.(1): Örüntüyü matematiksel olarak nasıl yazdığını (yazdıysa) anlatır mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Yanıtının doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

Sonda Soru: yanlış yanıtıyla ilgili;

- Matematiksel olarak yazmanı istediğimde aklına gelen düşünceleri anlatır mısın?

c) Harfleri söylemek için oluşturdukları kuralı şema, tablo, grafikler ya da denklemlerden yararlanarak gösteriniz. Oluşturduğunuz bu gösterimleri (şema, tablo, grafikler, denklem, vb.) kullanarak örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade ediniz ve cümlelerinizle bu işlemlerinizi açıklayınız.

K.M.S.(1): Tabloyu/Grafiği vb. (çizdiyse) nasıl oluşturduğunu açıkla mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Tabloyu/Grafiği vb. kontrol eder misin?
- Doğru çizdiğinden emin misin?
- Nasıl emin oluyorsun?

K.M.S.(2): Oluşturduğun tabloyu/grafiği vb. inceleyerek adımlar arasındaki değişim hakkında tekrar konuşalım, ne söyleyebilirsin?

K.M.S.(3): Cebirsel ifadeyi oluştururken gösterimleri (tablo, grafik, denklem vb.) nasıl kullandın? Açıklar mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Oluşturduğun cebirsel ifadeyi kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?
- Nasıl emin oluyorsun?

d) Burçin'in söyleyeceği 5. harf nedir?

K.M.S.(1): Söyleyeceği harfi nasıl bulduğunu açıkla mısın?

K.M.S.(2): Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

e) Timuçin'in söyleyeceği 7. harf nedir?

K.M.S.(1): Söyleyeceği harfi nasıl bulduğunu açıkla mısın?

K.M.S.(2): Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

f) Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu kontrol ediniz. Düşüncelerinizi yazarak açıklayınız.

K.M.S.(1): Sonuçların doğruluğunu kontrol ederken nasıl bir yol izledin?

3) N NEYİ İFADE EDİYOR?

Hangisi daha büyüktür, $n + n$ mi? , $n + 6$ mı?

*Bu problem diğerlerinden farklı olarak herhangi bir yönerge içermemektedir. Öğrenciden kendi çözüm sürecini stratejik akıl yürütmeleriyle birlikte yönetebilmesi beklenmektedir. Öğrencinin cebir konusunda n gibi değişkenlere yüklediği anlamı ortaya çıkarması ve bu anlamlandırmaları neticesinde gerekçeleriyle düşünerek mantıklı çıkarımlarda bulunmasını sağlaması açısından bu tarzda bir sorunun sorulması stratejik akıl yürütme çerçevesinde gerekli görülmüştür. Aşağıda bu açık uçlu problemi çözerken öğrenciden beklenen çözüm senaryosuna yönelik yarı yapılandırılmış klinik mülakat soruları verilmiştir.

Öğrenciden beklenen çözüm senaryosu:

Bu problemde eğer öğrenci değişkene iki, üç, dört ya da daha fazla değer verdiğinde farklı durumlar oluştuğunu kestirebilirse problem birden fazla yönüyle ele alınır.

K.M.S.(1): Sence burada n ne anlama gelmektedir?

K.M.S.(2): Cebirsel ifadelerde n gibi (x , y , z vb.) ifadeler nasıl adlandırılmaktadır?

Sonda Soru: Değişken ya da bilinmeyen cevabını verirse;

- Sence bu ifadelere neden değişken/bilinmeyen denmektedir?
- Bu soruda n bize neyi ifade ediyor?
- Matematiksel anlamda n 'nin değeri hakkında ne söyleyebilirsin?

Değişkene verilen değerler içerisinde kritik değer $n = 6$ değeridir.

K.M.S.(3): $n=6$ değerini verdiğinde ($n=6$ değerini veriyse) ortaya nasıl bir sonuç çıktı? Anlatır mısın?

Sonda Soru: Sadece $n=6$ 'dan küçük değerler verip ilerleyemediyse;

- n 'ye hangi değerleri verdin? Neden bu değerleri verdin?
- Bu değerler dışında başka değerler vermeyi düşündün mü? Neden?

- Değer vermeyi neye dayanarak sonlandırdın?

Sonda Soru: Sadece $n=6$ 'dan büyük değerler verip ilerleyemediyse;

- n 'ye neden bu değerleri verdiğini açıklar mısın?
- Bu değerler dışında başka değerler vermeyi düşündün mü?

Sonda Soru: n ifadesine verdiği değerler rastgele seçilmiş ise;

- N ifadesine neden bu değerleri verdiğini açıklar mısın?
- Bu değerler dışında başka değerler vermeyi düşündün mü?

K.M.S(4): n ifadesine değer verirken tablo çizmeyi denedin mi? Tablo çizmek bize ne gibi faydalar sağlar?

Sonda Soru: Tablo çizdiyse;

- Oluşturduğun tablonun doğruluğundan emin misin?

Zira $n = 6$ değerinden küçük değerler için $n + 6$ ifadesi daha büyük, $n = 6$ değerinden büyük değerler için $n + n$ ifadesi daha büyüktür. Öğrenci bütüncül bir bakış açısı ile problemi değerlendirip $n = 6$ 'dan sonra durumun değiştiğinin farkına varabilmeli ve matematiksel dilde yazabildiği gibi gerekli açıklamaları da yapabilmelidir. Değişkene değer verirken bu işlemleri titizlikle ve doğru bir şekilde yapmalıdır.

K.M.S.(5): $n + n$ değeri mi daha büyük? $n+6$ değeri mi daha büyük? Bu konuda nasıl bir sonuca ulaştığını bize açıklar mısın?

Sonda Soru: Sorunun yanıtı ile ilgili olarak doğru bir çıkarımda bulunabildiyse;

- Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin?
- Önceki adımlarda yaptığın işlemleri ve çizdiğin tabloyu (çizdiyse) sonuca ulaşırken nasıl kullandın?
- Bu yanıtı vermendeki kritik noktalar nelerdi?
- Bu sonuca ulaşırken izlediğin yollarda karşılaştığın güçlükler/zorluklar nelerdi?

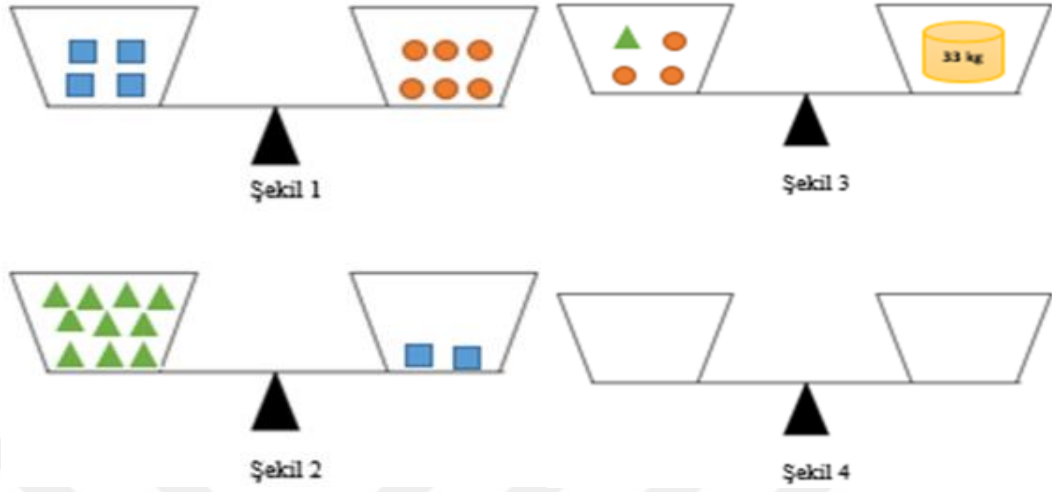
Sonda Soru: Doğru adımlarla ilerlemesine rağmen sorunun yanıtıyla ilgili yanlış bir çıkarımda bulunduysa ve bulduğu değerlere henüz anlam yükleyemediyse;

- Verdiğin yanıtın doğruluğundan emin misin?
- Yaptığın işlemleri tekrar gözden geçir bakalım. Bu işlemlerini nasıl açıklarsın? Hangi ifadenin daha büyük olduğunu söyleyebilir misin?
- n ifadesine verdiğin bu farklı değerler sonucu nasıl etkiliyor?

Sonda Soru: İşlem adımları yanlış olduğu için (n 'ye kritik değerleri vermediği/ rastgele değerler verdiği için) doğru çıkarımda bulunamadıysa;

- İşlemlerini tekrar gözden geçir bakalım. Doğru ilerlediğini düşünüyor musun?
- Nasıl emin oluyorsun?
- n ifadesine verdiğin değerleri sorunun cevabını bulmada yeterli buluyor musun?

4) TERAZİLER NASIL DENGEDİR?



Verilen üç terazi de dengededir.

Şekil 3'deki terazide sol kerede bulunan 1 üçgen ve 3 dairenin ağırlıklarının toplamı 33 kilogramlık bidonun ağırlığına eşit olduğuna göre;

- Şekil 1'deki teraziden yola çıkarak kare ve daire arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.
- Şekil 2'deki teraziden yola çıkarak üçgen ve kare arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Açıklamalarınızı cebirsel gösterimlerle destekleyiniz.
- Şekil 3'teki terazide yer alan ilişkiyi cebirsel gösterimlerle destekleyerek açıklayınız.
- Oluşturduğunuz cebirsel gösterimlerden yararlanarak kare, daire ve üçgenin ağırlıklarını bulabilir misiniz?
- Bulduğunuz değerlerin doğruluğunu kontrol ediniz. Doğru olduğundan emin olma nedenlerinizi birkaç cümle ile ifade ediniz.
- Siz de bu gösterimleri kullanarak denge halinde farklı bir terazi çizin.

K.M.S.(1): Terazilerin dengede olması durumundan nasıl yararlandın?

K.M.S.(2): Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'teki terazilerde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Oluşturduğunuz cebirsel gösterimlerden yararlanarak açıkla mısın?

Sonda Soru: Terazilerde yer alan şekiller arasındaki ilişkiyi cebirsel gösterimlerden yararlanarak kuramadıysa;

- Bu şekilleri (kare, daire ve üçgen) farklı bir şekilde ifade edebilir misin? Yani bu şekillerin yerine cebirsel ifadeler kullanalım ne dersin?
- Doğru ilerlediğinden emin misin?

K.M.S.(3): Oluşturduğun bu gösterimlere cebirsel ifade diyebilir miyiz?

Sonda Soru: Hayır denklem denir, yanıtını verirse;

- Cebirsel ifade ile denklem arasındaki fark nedir?

K.M.S.(4): Kare, üçgen ve dairenin ağırlıklarını bulurken yaptığın işlemleri anlatır mısın? Cebirsel gösterimlerden nasıl yararlandın?

K.M.S.(5): Şekil 4'teki teraziyi dengede tutmak için şekilleri terazinin kefelerine nasıl yerleştirdiğini anlat bakalım. Nelere dikkat ettin? Denge halinde olmasını nasıl sağladın?

5) TİMUÇİN İNTERNET KAFEDE



Timuçin'in gittiği bir internet kafede bir bilgisayarın açılış fiyatı 2 TL'dir ve her saat başı fiyata 50 Kuruş eklenmektedir. Buna göre;

- a) Gelen müşterilere kolaylık sağlayabilmek için bilgisayarları kullandıkları süreye bağlı olarak ne kadar ücret ödeyeceklerini gösteren bir tablo oluşturabilir misiniz?

K.M.S.(1): Tabloyu nasıl (çizdiyse) çizdin? Anlatır mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Tabloyu kontrol eder misin?
- Doğru çizdiğinden emin misin?
- Nasıl emin oluyorsun?

K.M.S.(2): Tabloda dikkatini çeken bir durum var mı?

K.M.S.(3): Tabloyu inceleyerek bilgisayarı kullanma süresi ile ücret arasındaki değişim hakkında ne söyleyebilirsiniz?

- b) Oluşturduğunuz tablodan yararlanarak bilgisayarı kullanma süresi ile ücret arasındaki ilişkiyi içeren bir denklem kurabilir misiniz? Bu denklemi kurarken nelere dikkat ettiğinizi cümlelerinizle açıklayınız. Bu denklemi problemin diğer maddelerini çözerken kullanınız.

K.M.S.(1): Denklemi nasıl oluşturdun? Anlatır mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Oluşturduğun denklemi kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?

- Nasıl emin oluyorsun?

K.M.S.(2): Denklemdaki her bir sayı ve değişken ne anlama geliyor? Açıklar mısın?

K.M.S.(3): $y = ax + b$ şeklindeki bir denklemde b sabiti bize neyi ifade eder? Oluşturduğun denklemi de düşünerek açıklar mısın?

- c) Bilgisayarı açtıktan sonra bir saati doldurmadan eve dönen Timuçin kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?

K.M.S.(1): Cevabı nasıl (doğruysa) buldun? Açıklar mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Neden böyle düşündün?
- İşlemlerini kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?

- d) Başka bir gün ödevini yapmak için internet kafeye giden Timuçin bilgisayarını 5 saat boyunca kullandıysa kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?

K.M.S.(1): Cevabı nasıl (doğruysa) buldun? Açıklar mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- İşlemlerini kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?

- g) İki gün sonra tekrar internet kafede bilgisayarını 4 saat boyunca kullanan Timuçin kafe sahibine ne kadar ödeme yapar?

K.M.S.(1): Cevabı nasıl (doğruysa) buldun? Açıklar mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- İşlemlerini kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?

- h)** Hafta boyunca 5 kere internet kafeye giden Timuçin bir haftada 20 TL ödeme yapmıştır. Buna göre bir hafta boyunca kaç saat bilgisayar kullanmıştır?

K.M.S.(1): Cevabı nasıl (doğruysa) buldun? Açıklar mısın?

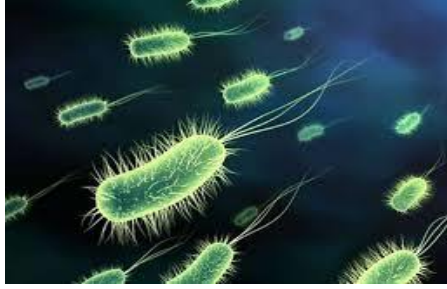
Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Yaptığın işlemleri sırasıyla bana anlatır mısın?
- İşlemlerini kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?

Sonda Soru: her gün bilgisayar kullanımına eşit saat vermişse;

- Her gün eşit saat kullandığını söyleyebilir miyiz?
- Timuçin hafta boyunca 5 kere internet kafeye gitmiş. Bazı günlerde bilgisayarı 1 saatten az kullanmışsa, bu durumu nasıl yorumlarsın?

6) BAKTERİLERİN HIZINA YETİŞ



Bir fen lisesi öğrencisi olan Timuçin, bir bakteri türü ile ilgili yaptığı incelemeler sonucu zamana bağlı bakteri sayısındaki değişimi gösteren bir grafik çizmeye karar vermiştir. Bu durumu gösteren denklem:

Bakteri Sayısı(B.S.) = $8 + 16 \times \text{Dakika}(D)$ yani

$B.S = 8 + 16 \times D$ şeklindedir. Buna göre;

- a) Yukarıda verilen denklemden yola çıkarak bakteri sayısı ile dakika arasında nasıl bir ilişki olduğunu yazarak açıklayınız.

K.M.S.(1): Denklemden yer alan sayılar neyi ifade ediyor?

K.M.S.(2): Dakikada ortamda kaç bakteri artıyor?

K.M.S.(3): Bakteri sayısı ile dakika arasındaki ilişkiyi daha ayrıntılı açıkla mısın?

- b) Başlangıçtaki bakteri sayısı kaçtır?

K.M.S.(1): Başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl buldun? Denklemden nasıl yararlandın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Denklemden sayıları tekrardan gözden geçir bakalım. Ne düşünüyorsun?
- Zamana bağlı bakteri sayısındaki değişimi düşünürsek başlangıçtaki bakteri sayısını bulmak için denklemden bu durumu nasıl ifade ederiz?

K.M.S.(2): ‘Başlangıç’ ifadesi ile süreyi yani dakikayı nasıl ilişkilendirdin?

- c) Timuçin’in grafiğini doğru çizmesine yardımcı olmak amacıyla, dakikada değişen bakteri sayısını gösteren bir tablo oluşturunuz.

K.M.S.(1): Tabloyu nasıl (doğruysa) oluşturdu? Anlatır mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Oluşturduğun tabloyu kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?
- Bakteri sayısındaki değişimi oluşturduğun tabloda doğru bir şekilde görebilir miyiz?

K.M.S.(2): Tabloda başlangıçtaki bakteri sayısını nasıl gösterdin?

d) 1 saat sonunda ortamdaki bakteri sayısı kaçtır?

K.M.S.(1): Cevabı nasıl (doğruysa) buldun?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Cevabını kontrol eder misin?
- Doğruluğundan emin misin?
- Doğru değerleri kullandığına emin misin?

K.M.S.(2): Bu soruyu çözerken hangi gösterim daha kullanışlı oldu? Denklem mi, tablo mu? Neden?

e) Bakteri sayısının 4808'e ulaştığını görmek için Timuçin kaç saat gözlem yapmalıdır?

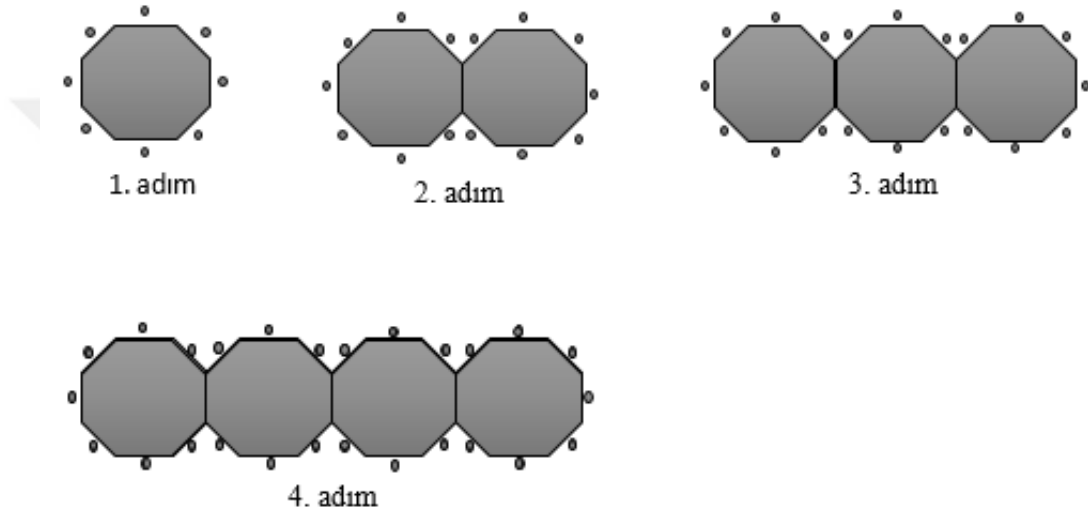
K.M.S.(1): Cevabı nasıl buldun? Açıklar mısın?

f) Oluşturduğunuz tablodan da yararlanarak Timuçin'in grafiğini çizmesine yardım ediniz.

K.M.S.(1): Grafiği çizerken nelere dikkat ettiğini, nasıl çizdiğini anlatır mısın?

7) SEKİZGEN MASALAR

Düğün organizasyon şefi olan Tolga Bey, evlenecek olan bir çiftin hayallerindeki gibi bir düğün organize edebilmek için çalışmalarına başlamıştır. Çiftin ailesinin oldukça kalabalık olduğunu öğrenen Tolga Bey, çiftten kaç kişilik bir salon hazırlayacağı konusunda yeterli bilgileri almıştır ve düğüne kalabalık aileler katılacağı için özel tasarım sekizgen yemek masalarından kullanmaya karar vermiştir. Masaların salondaki düzeni aşağıdaki gibidir:



	1. adım	2. adım	3. adım	4. adım
Masa sayısı	1	2	3	4
Oturabilecek misafir sayısı	8	14	20	...

Buna göre;

- a) Sizce 1 masaya 8 misafir oturabiliyorken 2 masaya neden 16 misafir oturamamaktadır?

K.M.S.(1): 2 masaya neden 14 misafir oturduğunu nasıl açıklarsın?

K.M.S.(2): Masa sayısı ile misafir sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?

- b) 4 yemek masası yan yana geldiğinde kaç misafir oturabilir?

K.M.S.(1): 4 masaya kaç misafirin oturduğunu nasıl buldun? Anlatır mısın?

K.M.S.(2): Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

- c) Adım sayısı a , misafir sayısı m olacak şekilde aralarındaki ilişkiyi ifade eden bir denklem yazınız. Bu denkleminizin bölümlerinin masa düzeni ve misafir sayısı ile nasıl ilişkili olduğunu cümlelerinizle açıklayınız.

K.M.S.(1): Denklemi (doğru yazdıysa) nasıl yazdın? Anlatır mısın?

Sonda Soru: yanlış ya da doğru yanıtıyla ilgili;

- Denklemi tekrar kontrol eder misin?
- Doğru olduğundan emin misin?
- Nasıl emin oluyorsun?

K.M.S.(2): Oluşturduğun bu denklemdeki her sayı ve değişken için ne söyleyebilirsin?

- d) 596 kişilik bir organizasyon için kaç masanın yan yana gelmesi gerekir?

K.M.S.(1): Sonucu nasıl bulduğunu anlatır mısın?

- e) 630 misafir için 105 masa gerekiyorsa 101 masanın bulunduğu organizasyonda kaç misafir vardır?

K.M.S.(1): Sonucu nasıl bulduğunu anlatır mısın?

K.M.S.(2): Daha farklı bir yol ile nasıl bulabilirsin?

Sonda Soru: ortak fark derse;

- Neden bu yolu tercih ettiğini açıklar mısın?
- Sence bu soruda hangi yol daha kullanışlı oldu?

- f) Tolga Bey kalabalık ailelerin katılacağı bu düğün organizasyonu için sekizgen masaları uygun görmüştür. Peki, kalabalık ailelerin olacağını göz önünde bulundurursak sizce masaları yan yana koyması mı, yoksa ayrı ayrı koyması mı mantıklı bir hamle olur?

K.M.S.(1): Neden böyle düşündün? Daha ayrıntılı anlatır mısın?

Sonda Soru:

- Masaları ayrı ayrı yerleştirirse, masa sayısı ile misafir sayısı arasındaki ilişki nasıl olur?
- Örnek verir misin?
- Masalara ayrı ayrı oturulması durumunda 3 masaya kaç misafir oturabilir?

K.M.S.: Genel anlamda sorularda tablo ya da grafikler oluşturdun. Bunları oluşturmadaki amaç ne olabilir? Tablo, grafik ya da şema gibi gösterimler soruları çözerken sana yardımcı oldu mu?

Sonda Soru: Tablo, grafik ya da şema dışında daha farklı gösterimler kullanılabilir mi?

K.M.S.: Bu soruları baştan çözmen gerekse, çözümünü ya da izlediğin yolu değiştirmek istediğin sorular var mı?

Sonda Soru: Evet cevabını verirse;

- Hangi soruların çözümünü değiştirmek istiyorsun?
- Hangi sorularda izlediğin yolu/stratejini değiştirmek istiyorsun?

EK 5. Uzman Görüşü Formu

Cebirde Stratejik Akıl Yürütme Yetkinlikleri	Uzman Görüşü		
C1: Metni okuma, yorumlama ve bağlamı anlama	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		
C2a: İlgili miktarları belirleme	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		
C2b: Miktarlar arası eklem ilişkisi	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		
C3a: Cebirsel gösterimler oluşturma	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		
C3b: Gösterimleri yorumlama veya gösterimler arasında bağlantı kurma	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		
C4a: Cebirsel işlemleri ve hesapları hassasiyetle yapma	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		
C4b: Sonuçların doğruluğunu kontrol etme	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		
C5: İkna edici açıklamalar yapma	Uygun	Uygun fakat gözden geçirilmeli	Uygun değil
	Açıklama:		

