



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLİCZ UZAYLARINDA FONKSİYONLARIN
TRİGONOMETRİK POLİNOM ve RASYONEL
FONKSİYONLARLA YAKLAŞIMI

Cihat ÇOKÇA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim - 2025
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLİCZ UZAYLARINDA FONKSİYONLARIN
TRİGONOMETRİK POLİNOM ve RASYONEL
FONKSİYONLARLA YAKLAŞIMI

Cihat ÇOKÇA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Jüri Üyesi: Dr. Öğrt. Üyesi Hayri TOPAL

Ekim -2025
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV danışmanlığında, Cihat ÇOKÇA tarafından hazırlanan “Orlicz Uzaylarında Fonksiyonların Trigonometrik Polinom ve Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşımı” adlı tez çalışması 19/09/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç. Dr. Muhsin İNCESU
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

.....

Danışman

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Hayri TOPAL
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 26/09/2025 Tarih ve 15/1 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Selçuk SAĞIR
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Cihat ÇOKÇA

Tarih: 19/09/2025

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLICZ UZAYLARINDA FONKSİYONLARIN TRİGONOMETRİK POLİNOM ve RASYONEL FONKSİYONLARLA YAKLAŞIMI

Cihat ÇOKÇA

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Bu tez çalışmasında, Orlicz uzaylarında fonksiyonların trigonometrik polinomlarla yaklaşımı incelenir. Ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonlarla Fourier serilerinin Fejér toplamaları arasındaki değerlendirme elde edilir. Ayrıca, kompleks düzlemde basit eğrilerle sınırlanmış çift bağlantılı bölgelerde Smirnov-Orlicz sınıflara ait fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili yaklaşım teorisinin düz teoremi ispat edilir.

2025, 41 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Dini-düzgün eğri, düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım, eşlenik fonksiyonu, Lebesgue uzayı, Muckehoupt ağırlığı, Orlicz uzayı, Smirnov-Orlicz sınıfı, Trigonometrik polinom

ABSTRACT

MS THESIS

APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIAL and RASYONEL FUNCTION IN ORLICZ SPACES

Cihat ÇOKÇA

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

In this thesis, the approximation of functions by trigonometric polynomials in Orlicz spaces is investigated. The estimation between the Fejér sums of Fourier series with conjugate functions in weighted Orlicz spaces is obtained. In addition, the direct theorem of approximation theory regarding the approximation of functions belonging to Smirnov-Orlicz classes by rational functions in doubly connected domains bounded by simple curves in the complex plane is proved.

2025, 41 Pages

Keywords: Dini-smooth curve, modulus of smoothness, best approximation, adjoint function, Lebesgue space, Muckenhoupt weight, Orlicz space, Smirnov-Orlicz class, Trigonometric polynomial

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda, değerli zamanlarını ayırarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sadulla JAFAROV'a, teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Yüksek Lisans yaptığım süreçte “TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Programları Başkanlığı (BİDEB) 2210-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programları” kapsamında tarafıma maddi destek veren TÜBİTAK-BİDEB kurumuna şükranlarımı sunarım.

Cihat ÇOKÇA
MUŞ-2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	4
3.1 Temel Tanımlar	4
3.2 Ortogonal Fonksiyonlar Sistemi ve Fonksiyonun Fourier Serisi	9
3.3 Orlicz uzayı ve yüksek mertebeden düzgünlük modülü	12
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA	21
4.1 Yardımcı Sonuçlar	21
4.2 Orlicz uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım üzerine	21
4.3 Ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonların trigonometrik polinomlarla yaklaşımı	26
4.4 Smirnov-Orlicz Sınıflarında Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşımı	32
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	37
5.1 Sonuçlar	37
5.2 Öneriler	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	41

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$mes\Gamma$	: Γ eğrisinin bir boyutlu Lebesgue ölçüsü
$int\Gamma$	: Kapalı Γ eğrisinin içi
$ext\Gamma$	: Kapalı Γ eğrisinin dışı
∂B	: B bölgesinin sınırı
$f \leq g$	: $f \leq cg$, c sabiti f ve g 'ye bağlı değil
$f \asymp g$	: $f \leq g$ ve $g \leq f$
$C(\Gamma)$	: Γ eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$\omega(u) = \omega(f, u)$	: f fonksiyonunun süreklilik modülü
H^ω	: Süreklilik modülü yardımıyla tanımlanan fonksiyonlar sınıfı
ACL	: Eğrilerde mutlak sürekli fonksiyon
$E_n(g)$	: g fonksiyonunun en iyi yaklaşımı
$S_\Gamma(f)$	: $f \in L^1(r)$ fonksiyonunun Cauchy singüler integrali
$A_p(\Gamma)$	: Γ üzerinde Muckenhoupt şartını sağlayan ağırlık fonksiyonlar sınıfı
$dist(z, D)$	: z noktasının D bölgesine uzaklığı
$U(z_0, \delta)$	: $\{z : z - z_0 < \delta\}$
$D(z, \delta)$	: $\{t : t - z < \delta\}$
$A(D)$	: D bölgesinde analitik fonksiyonlar sınıfı
$L^p(\Gamma)$	: Lebesgue uzayı : $\{f : f, \Gamma'$ 'de ölçülebilir (Lebesgue anlamında) ve
	$\int_\Gamma f(z) ^p dz < \infty, p > 0\}$

$L_{\omega}^p(\Gamma)$	: ω – ağırlıklı Lebesgue uzayı $\{f : f, \Gamma$ 'da ölçülebilir (Lebesgue anlamında) ve $\int_{\Gamma} f(z) ^p dz < \infty, p > 0\}$
$E^p(G)$	: ω – ağırlıklı Smirnov sınıfı: $\{f \in E_1(G) : f \in L_p(\Gamma, \omega), \Gamma = \partial G\}$
$L_M(\Gamma)$	: Γ eğrisi üzerinde tanımlanan Orlicz uzayı
$L_M(\Gamma, \omega)$	: Γ eğrisi üzerinde tanımlanan ağırlıklı Orlicz uzayı
$E_M(G)$	: Smirnov-Orlicz sınıfı: $\{f \in E_1(G) : f \in L_M(\Gamma), \Gamma = \partial G\}$
$E_M(G, \omega)$	: Ağırlıklı Smirnov-Orlicz sınıfı: $\{f \in E_1(G) : f \in L_M(\Gamma, \omega), \Gamma = \partial G\}$

1. GİRİŞ

Fonksiyonların Yaklaşım teorisi Matematik analizin en çok uygulaması olan dallarından biridir. Fonksiyonların yaklaşım teorisinde, fonksiyonların daha basit fonksiyonlara en iyi nasıl yaklaştırılabileceği incelendi ve bu sayede ortaya çıkan hatalar nicel olarak karakterize edilmiştir. İyi özelliklere sahip olmayan bir fonksiyon uzayının elemanları ile iyi özelliklere sahip trigonometrik polinomların, cebirsel polinomların, tam fonksiyonların (kompleks düzlemde analitik fonksiyonlar) ve sonsuz basamaktan diferensiyellenebilen fonksiyonların yaklaşımı incelenmiştir.

Fonksiyonların yaklaşım teorisinde düz ve ters teoremler ispatlanmaktadır. Düz teoremler, bir fonksiyonun düzgünlük özellikleri (fonksiyonun belirli bir mertebeden türevlerinin varlığı, fonksiyonun, türevlerinin veya bazı türevlerinin süreklilik modülü vb.) cinsinden fonksiyona yaklaşan polinomların yakınsaklık hızının ifade edilmesidir. Trigonometrik, cebirsel polinomlarla (rasyonel fonksiyonlarla) en iyi yaklaşım durumunda, düz teoremler Jackson tipi teoremler olarak da bilinir. Ters teoremler ise yakınsaklık hızına bağlı olarak fonksiyonların diferansiyel özelliklerini ifade etmektedir. Yani ters teoremler, fonksiyona yaklaşan polinomların yakınsaklık hızından bağımlı olarak bir fonksiyonun şu veya bu sınıfa ait olduğunu ifade eden teoremlerdir. Bu düz ve ters teoremlerin elde edilmesi fonksiyonların yaklaşım teorisinde fonksiyonların yapısal karakterizasyonu olarak adlandırılmaktadır.

Bu tez çalışmasının Kaynak Araştırması bölümünde incelenen problemle ilgili fonksiyonların yaklaşım teorisi kapsamında kaynak araştırması yapılmıştır. Bu çalışmanın Materyal ve Yöntem bölümü üç alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde ilk önce reel ve kompleks fonksiyonlar teorisi ile ilgili olarak temel tanımlar ve teoremler verilmektedir. Ortogonal fonksiyonlar sistemi ve Fourier serileri tanımlanır. Ayrıca bu bölümde Orlicz uzayları ve bu uzaylarda yüksek mertebeden düzgünlük modülü tanımlanır.

Tezin Araştırma Sonuçları ve Tartışma olarak adlandırılan dördüncü bölümü dört alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde ilk önce esas sonuçların ispatında kullanılan yardımcı sonuçlar verilmektedir. Daha sonra Orlicz uzayında fonksiyonların ve fonksiyonların türevlerinin yaklaşımı ile ilgili sonuçlar elde edilir. Elde edilen değerlendirmeler fonksiyonların en iyi yaklaşım dizisine bağlıdır. Ayrıca, ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonların trigonometrik polinomlarla yaklaşımı

incelenir Daha sonra çift bağlantılı bölgelerde tanımlanan Smirnov-Orlicz sınıflarında fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı incelenir. Elde edilen düz teorem yüksek mertebeden düzgünlük modülü cinsinden verilmektedir.



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Fonksiyonların yaklaşım teorisi ile problemler ilk önce P. L. Chebyshev (1854), Weierstrass (1885) çalışmalarında incelenmiştir.

Jackson'ın (1911,1912) çalışmalarında süreklilik modülü kavramından yararlanarak yaklaşım teorisinin düz teoremleri ispat edilmiştir. Daha sonralar fonksiyonların yaklaşım problemleri (düz ve ters teoremler) birçok yazar tarafından incelenmiştir (örneğin bakınız, Bernstein, (1912), Stechkin (1951), Timan (1962) .

Fonksiyonların trigonometrik ve cebirsel polinomlarla yaklaşım problemleri birçok yazarın kitaplarında incelenmiştir. (örneğin, bakınız, Timan, 1994; De Vore ve Lorentz; 1993; Dzyadyk, 1977; Dzyadyk ve Shevchuk, (2009), Andrievskii ve Blatt, 2002)

Fakat fonksiyonların belli aralıkta değil, kompleks düzlemde bulunan bölgelerde fonksiyonların polinomlarla yaklaşımı ile ilgili problemler bir çok yazar tarafından incelenmiştir (bu problemlerle ilgili sonuçlar Dzyadyk, 1977 kitabında buluna bilir).

Farklı uzaylarda ve kompleks düzlemde bulunan farklı eğrilerde fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı merak konusudur. Fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı farklı uzaylarda Walsh, 1935; Tietz, 1957; Pekarskii, 1994; Ramazanov, 1984; Cavus ve Israfilov, 1995 ve başka birçok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Ayrıca fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili sonuçlar Walsh, 1935 kitabı'nda bulunabilir.

Ağırlıksız ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında polinomlarla yaklaşım çoğu yazar tarafından incelenmiştir.(Örneğin, bak. Akgün ve Israfilov, 2008; Israfilov ve Güven, 2006; Jafarov, Mamedkhanov, 2012; Kokilashvili, 1968; Ramazanov, 1984).

Farklı uzaylarda fonksiyonların Fourier serilerinin toplamaları ile yaklaşımı birçok yazar tarafından incelenmiştir. (Örneğin, bak. İl'yasov, 1986; Kokilashvili, Tsanova, 2010; Stechkin, 1961; Timan, 1962; Zygmund, 1959).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1 L bir lineer uzay ve $B \subset L$ olsun. $\forall x_1, y_1 \in B$ için,

$K = \{z \in L : z = \alpha x_1 + (1 - \alpha) y_1, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset B$ ise, B kümesine **konveks küme** denir.

(Kreyszig, 1978)

Tanım 3.2 $B \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $M : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x_1, y_1 \in B$ ve $\forall \beta \in [0, 1]$ için

$$M(\beta x_1 + (1 - \beta) y_1) \leq \beta M(x_1) + (1 - \beta) M(y_1)$$

şartı sağlanıyorsa, M fonksiyonu **konveks fonksiyon** olarak adlandırılır.

Kompleks Düzlemi $\mathbb{C}$ ile gösterelim.

Tanım 3.3 Kompleks değişkenli g fonksiyonu verilmiş olsun Eğer g fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki her bir noktada türevlenebiliyorsa, bu durumda g fonksiyonu z_0 noktasında **analitiktir**, denir. (Başkan, 1998)

Tanım 3.4 Bağlantılı açık kümeye **Bölge** adı verilir (Başkan, 1998, s. 23).

Tanım 3.5 $w = f(z)$ bir B bölgesinde tanımlı bir kompleks tasvir ve z_0, B deki bir nokta olsun. Bu taktirde, z_0 noktasında kesişen B deki her yönlendirilmiş γ_1 ve γ_2 düzgün eğri çiftinin z_0 'da aralarındaki açı, γ_1 've γ_2 'resim eğrilerinin $f(z_0)$ 'da aralarındaki açıya hem büyüklükte hem de yönde eşitse, $w = f(z)$ kompleks tasvirine z_0 da **konform** denir (Zill ve Shanahan, 2003).

Tanım 3.6 Bağlantılı kapalı kümeye **Kontinyum** adı verilir (Dzyadyk, 1977, s.346).

Tanım 3.7 (Lebesgue Uzayı) (X, μ) bir ölçü uzayı ve $M, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlı μ ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p(X) = \left\{ f \in M : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p – inci kuvveti **integrallenebilen fonksiyonların sınıfı** denir.

g fonksiyonunun L^p normu

$$\|g\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |g(x)|, p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L^p ye **Lebesgue uzayı** denir. Burada

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |g(x)| = \inf \{ \lambda : \mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\}) = 0 \}$$

dir. $L^p(X)$ uzayı $\|g\|_{L^p(X)}$ normuna göre bir **Banach uzayıdır**.

(DeVore, Lorentz, 1993).

Tanım 3.8 $\omega: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyonu göz önüne alalım. Eğer $\omega^{-1}(\{0, \infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise bu durumda ω fonksiyonuna $[-\pi, \pi]$ parçası üzerinde bir **ağırlık fonksiyonu** denir.

Tanım 3.9 ω ağırlık fonksiyonu verilmiş olsun. $g\omega \in L^p$ koşulunu şartını sağlayan ölçülebilir, $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarının kümesi L_ω^p ile gösterilir. Bu durumda

$$\|g\|_{p, \omega} := \|g\omega\|_p$$

fonksiyonu L_ω^p üzerinde bir normdu ifade edir. L_ω^p normlu uzayına **ağırlıklı Lebesgue uzayı** denir.

G bölgesi $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde, Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı bölge olsun.

Tanım 3.10 Γ_s , $0 < s < 1$, eğrisi, D diskinin B bölgesine konform dönüşümü altında $\{\mu : |\mu| = s, 0 < s < 1\}$ çemberinin görüntüsü olsun. B bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0 < s < 1} \int_{\Gamma_s} |g(z)|^p |dz| < \infty, 1 \leq p < \infty$$

koşulunu sağlayan g fonksiyonlarının kümesine $E^p(B)$ **Smirnov sınıfı** denir. (Timan, 1994).

Ayrıca $B = D$ olduğu durumda, $H^p(D) := E^p(D)$ olarak tanımlanan uzaya Hardy uzayı denir (Timan, 1994).

Uyarı 3.1 $L^p(\Gamma)$ ve $E^p(G)$ uzayları $p \geq 1$ olduğunda,

$$\|h\|_{E^p(G)} = \|h\|_{L^p(\Gamma)} := \left(\int_{\Gamma} |h(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre **Banach uzayıdır**.

$E^p(B, \omega)$, $1 \leq p < \infty$, ω - ağırlıklı Smirnov sınıfı

$$E^p(B, \omega) := \{h \in E^1(B) : h \in L_p(\Gamma, \omega)\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.11 Kabul edelim ki $p \in (1, \infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartları sağlansın. ω fonksiyonu

Γ eğrisi üzerinde

$$\sup_{t \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma(t, \varepsilon)} \omega^p(\tau) |d\tau| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma(t, \varepsilon)} \omega^{-q}(\tau) |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \quad (3.1)$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda ω ağırlık fonksiyonu $A_p(\Gamma)$ sınıfına aittir diyeceğiz:

(3.1) şartına Muckenhoupt- A_p şartı denir, Burada $\Gamma(t, \varepsilon) = \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon\}$ dur.

(Muckenhoupt 1972; Böttcher ve Karlovich, 1997).

Γ eğrisi $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Ayrıca $B = \text{Int}\Gamma$ ve $B^- = \text{Ext}\Gamma$ gösterelim. $f \in L_1(\Gamma)$ olmak üzere

$$g^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G$$

ve

$$g^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^-$$

biçiminde tanımlanan g^+ ve g^- fonksiyonları, sırasıyla B ve B^- bölgelerinde analitiktirler ve $g^-(\infty) = 0$ olur.

$g \in L_1(\Gamma)$ fonksiyonunun bir $z \in \Gamma$ noktasındaki **Cauchy singüler integrali**,

$$S_\Gamma(g)(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(z, \varepsilon)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

olarak tanımlanır. Bu limit hemen her $z \in \Gamma$ için mevcuttur.

(Böttcher ve Karlovich, 1997).

Not edelim ki, S_Γ lineer operatörünün sınırlılığı $L_p(\Gamma)$ Lebesgue uzaylarında G David tarafından incelenmiştir (David, 1984). Ayrıca, Cauchy singüler integrallerinin özellikleri ile ilgili bilgiler (Böttcher ve Karlovich, 1997) kitabında bulunabilir.

Şimdi Faber polinomlarını ve Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarını tanımlayalım. Bunun için aşağıdaki yardımcı bilgilere ihtiyaç duyulmaktadır.

Kabul edelim ki Γ kapalı Jordan eğrisidir. $G = C\Gamma = G_1 \cup G_2$ ($0 \in G_1$, $\infty \in G_2$) bölgesi Γ kapalı eğrisinin iki bileşenli (tümleyeni) olsun. Ayrıca kabul edelim ki $w = \Phi_i(z)$ ($i=1,2$) fonksiyonları konform ve yalınkat olarak $\Phi_1(0) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow 0} z\Phi_1(z) > 0$, $\Phi_2(\infty) = \infty$ ve $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2(z)/z > 0$ normları ile G_1 ve G_2 bölgelerini birim çemberinin dışına dönüştürür.

Birim çemberin içini U_1 , birim çemberin dış kısmını ise U_2 ile gösterelim. Birim çemberin sınırı T olsun.

$\Phi_i(z)$ ($i=1,2$) fonksiyonlarının tersi $z = \Psi_i(w)$ ($i=1,2$) olsun. Caratheodory teoremi gereğince Φ_1 ve Φ_2 (Ψ_1 ve Ψ_2) fonksiyonları sürekli olarak $\Gamma(T)$ 'ye genişletilebilir (örneğin bkz. Markushevich 1977, s.44).

$g \in C(\Gamma)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunu genelleştirilmiş Faber-Laurent serisi cinsinden

$$g(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) F_k(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (-\tilde{c}_k(f)) F_k(1/z),$$

biçiminde ifade edebiliriz, burada $a_k(f)$ ve $a_k(f)$ katsayıları

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{g[\Psi_2(\omega)]}{\omega^{k+1}} d\omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ve

$$\tilde{c}_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{g[\Psi_1(\omega)]}{\omega^{k+1}} d\omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

olarak tanımlanır. $c_k(f)$ ve $\tilde{c}_k(f)$ katsayılarına $g \in C(\Gamma)$ 'nin **Faber-Laurent katsayıları** denir. $F_k(z)$ polinomu, Γ eğrisi için k **dereceli Faber polinomu** olarak adlandırılır. $F_k(z)$ polinomunun integral şekli

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi_2(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta,$$

biçimindedir. Burada

$$\Gamma_R := \{\zeta \in G_2 : |\Phi_2(\zeta)| = R\}$$

dir.

$F_k(1/z)$ rasyonel fonksiyonu, Γ eğrisi için k dereceli Faber esas kısmı olarak adlandırılır ve integral şekli

$$F_k(1/z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi_1(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

biçimindedir. Burada

$$\Gamma_R := \{\zeta \in G_1 : |\Phi_1(\zeta)| = R\}$$

dir.

Tanım 3.12 $g \in C(\Gamma)$ ve $c_k(f)$, $\tilde{c}_k(f)$ ise Faber-Laurent katsayıları olsun. Bu durumda

$$R_n(f, z) := \sum_{k=0}^n c_k(f) F_k(z) + \sum_{k=0}^n -\tilde{c}_k(f) F_k(1/z)$$

rasyonel fonksiyonuna g 'nin n . **dereceden Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu** denir.

μ fonksiyonu 2π üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun süreklilik modülü

$$\omega(t, \chi) := \sup_{t_1, t_2 \in [0, 2\pi], |t_1 - t_2| < t} |\mu(t_1) - \mu(t_2)|, t \geq 0$$

biçiminde tanımlanır.

Γ eğrisinin parametrik denklemi

$$\Gamma : \mu(t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

biçiminde olsun. Eğer $\mu'(t)$ fonksiyonu **Dini-süreklilik şartını**, yani

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t, \mu')}{t} dt < \infty$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda, Γ eğrisi **Dini-düzgün eğri** olarak adlandırılır.

(Ch. Pomeranke, 1992, s.48).

Γ kapalı Jordan eğrisi ve $f \in C(\Gamma)$ olsun. $E_n(f, \Gamma)$ ile f fonksiyonunun Γ eğrisi üzerinde en iyi yaklaşımını gösterelim. Yani,

$$E_n(f, \Gamma) = \inf_{\{R_n\}} \max_{z \in \Gamma} |f(z) - R_n(z)|$$

dir.

3.2 Ortogonal Fonksiyonlar Sistemi ve Fonksiyonun Fourier Serisi

Tanım 3.13 $[a, b]$ parçasında tanımlanmış $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları,

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) d\mu(x) = 0$$

şartını sağlandığında, $\mu(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre **ortogonal fonksiyonlardır** denir. (Nasibov, 2013)

Tanım 3.14 $[a, b]$ parçasında tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonu için,

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x) d\mu(x) = 1$$

olduğunda $f(x)$, $\mu(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre **normal fonksiyondur** denir. Özel halde $d\mu(x) = dx$, ($\mu(x) = x$) veya $d\mu(x) = \mu'(x)dx = p(x)dx$ de olabilir. (Ferhat Nasibov, 2013)

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ fonksiyonlar sistemi verilmiş olsun.

Tanım 3.15 $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ fonksiyonlar sistemi için

$$\int_a^b \alpha_i(x) \alpha_j(x) d\mu(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_j, & i = j (\lambda_j > 0) \end{cases}$$

ise $\{\alpha_k(x)\}_1^n$ sistemi $\mu(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre **ortogonal sistemdir** denir.

Özel halde; $\lambda_j = 1 (j = 1, 2, \dots, n)$ olduğunda $\{\alpha_k(x)\}_1^n$ sistemi ortonormaldir denir.

Eğer, $\{\alpha_k(x)\}_1^n$ ortogonal sistem (o.s.) ise $\left\{ \frac{\alpha_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_1^n$ ortonormal sistemdir (o.n.s.).

Tanım 3.16 $\{\alpha_k(x)\}_0^\infty$ sistemi;

$$\int_a^b \alpha_k(x) \alpha_m(x) d\mu(x) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \lambda_m, & k = m \end{cases}$$

şartını sağladığında $[a, b]$ parçasında $\mu(x)$ fonksiyonuna göre (o.s.) denir.

(Nasibov, 2013)

Tanım 3.17 $\{\alpha_k(x)\}$ (sonlu veya sonsuz) (o.s), $g(x) \in L_2$ herhangi bir fonksiyon olduğunda,

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k} \cdot \int_a^b g(x) \cdot \alpha_k(x) d\mu(x) \quad (k=1,2,3,\dots)$$

formüllerine **Fourier formülleri**, bu formüller ile hesaplanan a_k sayılarına ise $f(x)$ in $\{\varphi_k\}$ sistemi üzerindeki **Fourier katsayıları** denir. (Nasibov, 2013)

Tanım 3.18 a_n ve b_n ($n=0,1,2,\dots$) sabit sayılar olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

serisine **trigonometrik seri** denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

serisine de $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ serisinin **eşlenik serisi** denir. (Suetin, 1998).

Tanım 3.19 $n \in \mathbb{N}$ a_k ve b_k ($k=0,1,2,\dots,n$) sabit sayılar ve $|a_n| + |b_n| \neq 0$ olmak üzere

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^n (a_p \cos px + b_p \sin px), \quad n=1,2,3,\dots$$

ifadesine **n . dereceden bir trigonometrik polinom** denir. (Suetin, 1998).

Tanım 3.20 $A_0(g, x) := \frac{a_0}{2}$, $A_n(g, x) := a_n(g) \cos nx + b_n(g) \sin nx$, $n=1,2,3,\dots$ olsun.

$$S_n(g, x) := \sum_{p=0}^n A_p(g, x), \quad n=0,1,2,\dots$$

dizisine g fonksiyonunun Fourier serisinin **kısmi toplamlar dizisi** denir. (Suetin, 1998)

$$S_n(f, x) := \sum_{p=0}^n A_p(f, x), \quad n=0,1,2,\dots$$

serisinin **Fejer toplamları** ise

$$\sigma_n(g) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n S_p(x, g)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.21 $g \in L^1$ ve $g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ olsun.

$$\sum_{p=1}^{\infty} (a_p \sin px - b_p \cos px)$$

serisi bir fonksiyonun Fourier serisi ise bu fonksiyona g fonksiyonunun **eşlenik fonksiyonu** denir ve g şeklinde gösterilir. (Suetin 1998).

3.3 Orlicz uzayı ve yüksek mertebeden düzgünlük modülü

Konveks ve sürekli bir $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{M(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = \infty$$

şartları sağlansın. Bu durumda M fonksiyonu N - fonksiyon olarak adlandırılır. N fonksiyonunun tamamlayıcı fonksiyonu

$$N(y) := \max_{x \geq 0} (xy - M(x)), \quad y \geq 0.$$

şeklinde tanımlanır.

G bölgesi $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde, Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı bölge olsun.

M bir N - fonksiyon ve N ise onun tamamlayıcı fonksiyonu olsun. $\alpha > 0$ için

$$\int_{\Gamma} M[\beta |g(z)|] |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan, Lebesgue ölçülebilir $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarının doğrusal uzayını $L_M(\Gamma)$ ile gösterelim. $L_M(\Gamma)$ de f fonksiyonunun donatılmış normu

$$\|g\|_{L_M(\Gamma)} := \sup \left\{ \int_{\Gamma} |g(z)h(z)| |dz| : h \in L_N(\Gamma), \rho(h, N) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$\rho(h, N) := \int_{\Gamma} N(|h(z)|) |dz|,$$

dir, $L_M(\Gamma)$ uzayı bir Banach uzayıdır (Rao ve Ren, 1991).

$\|\cdot\|_{L_M(\Gamma)}$ normu, Orlicz normu, $L_M(\Gamma)$ Banach uzayı da **Orlicz uzayı** olarak adlandırılır.

Bilindiği gibi $L_M(\Gamma)$ uzayındaki her fonksiyon Γ de integrallenebilir, yani,

$$L_M(\Gamma) \subset L_1(\Gamma).$$

dir.

M bir N fonksiyon olmak üzere $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M(2x)}{M(x)} < \infty$ ise, M fonksiyonu Δ_2

koşulunu sağlar denir.

Orlicz uzayının özellikleri Krasnoselskii ve Rutickii (1961) ve Rao ve Ren (1991) kaynaklarında ele alınmıştır.

M bir N fonksiyon ve $M^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ise M nin ters fonksiyonu olsun.

$$h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty], \quad h(x) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M^{-1}(t)}{M^{-1}\left(\frac{t}{x}\right)}, \quad x > 0$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının α_M alt indisi ve β_M üst indisi

$$\alpha_M := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log h(x)}{\log x}, \quad \beta_M := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log h(x)}{\log x}$$

biçiminde verilir. $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının **Boyd indisleri** olarak adlandırılmıştır.

Bilindiği gibi

$$0 \leq \alpha_M \leq \beta_M \leq 1$$

ve

$$\alpha_N + \beta_M = 1, \quad \alpha_M + \beta_N = 1.$$

Eğer $0 < \alpha_M$ ve $\beta_M < 1$ ise α_M, β_M Boyd indisleri, **trivial (aşikar) değildir** denir.

$L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının yansılmalı olması için gerekli ve yeterli koşulun $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ şartının sağlanmasıdır. Başka bir deyişle Boyd indisleri trivial olmadığı durumda $L_M(\Gamma)$ uzayı yansılalıdır. $L_M(T)$ uzayı ancak ve ancak $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ ise refleksivdir (dönüşümlüdür).

Tanım 3.22 ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $g\omega \in L^M$ biçimindeki ölçülebilir, $g: T \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonların kümesi L_ω^M ile gösterilir.

$$\|g\|_{M,\omega} := \|g\omega\|_M$$

fonksiyonu L^M_ω üzerinde bir normu ifade eder. L^M_ω normlu uzayına **ağırlıklı Orlicz uzayı** denir.

Tanım 3.23 (Kokilashvili, 1968) M bir N -fonksiyonu, g ise B bölgesinde analitik fonksiyon olsun.

$$\int_{\Gamma_r} M(|g(z)|) |dz| < \infty$$

şartı sağlanırsa, bu durumda $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarının sınıfı $E_M(B)$ ile gösterilir, burada Γ_r , $|w| < 1$ dairesinin B bölgesine konform dönüşümü altında, $\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$, $0 < r < 1$ çemberinin görüntüsüdür.

Tanım 3.24 (Kokilashvili, 1968) $E_M(B)$ sınıfı **Smirnov-Orlicz sınıfı** olarak adlandırılır.

Eğer $M(u) = |u|^p$ ($1 < p < \infty$), ise $E_M(B)$ sınıfı iyi tanımlanmış $E_p(B)$ Smirnov sınıfı ile çakışır.

$E_M(B)$ sınıfına ait herhangi bir $f(z)$ analitik fonksiyonu, aynı zamanda $E_1(B)$ sınıfına da ait olacaktır, yani,

$$\int_{\Gamma_r} |g(z)| |dz| \leq c < \infty,$$

yakınsaması, r , ($0 < r < 1$) ye göre düzgün yakınsamadır.

$E_M(B)$ sınıfında norm

$$\|g\|_{E_M(B)} := \|g\|_{L_M(\Gamma)}$$

dir.

B bölgesi $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde, Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı bölge olsun. $E_M(B, \omega)$, ω - **ağırlıklı Smirnov-Orlicz** sınıfı

$$E_M(B, \omega) := \{g \in E^1(B) : g \in L_M(\Gamma, \omega)\}.$$

biçiminde tanımlanır. Ağırlıklı Smirnov-Orlicz sınıfı, $E^p(G)$ - Smirnov sınıfının genelleştirilmesidir. Özel olarak $M(x) = x^p$, $1 < p < \infty$ ise bu durumda $E_M(G, \omega)$ ağırlıklı Smirnov-Orlicz sınıfı, $E^p(G, \omega)$ ağırlıklı Smirnov sınıfı ile çakışmaktadır. Ayrıca $\omega = 1$ ise bu $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıfı ile çakışır. .

$L_M(T, \omega)$ uzayı $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ Boyd indisleri ile ağırlıklı bir Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M}(T) \cap A_{1/\beta_M}(T)$ olsun. $g \in L_M(T, \omega)$ için kaydırma operatörü

$$g_h(x) := \frac{1}{2h} \int_{-h}^h g(x+t) dt, \quad 0 < h < \pi, \quad x \in T.$$

şeklinde tanımlanır.

$$\Omega_{M, \omega}^k(\delta, g) := \sup_{\substack{0 < h_i < \delta \\ 1 \leq i \leq k}} \left\| \prod_{i=1}^k (I - g_{h_i}) g \right\|_{L_M(T, \omega)}, \quad \delta > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

fonksiyonuna g 'nin ***k-inci düzgünlük modülü*** denir, burada I özdeşlik operatörüdür.

g_h 'nin $L_M(T, \omega)$ üzerinde sınırlı bir lineer (doğrusal) operatör olduğu bilinmektedir.

Eğer $k = 0$ ise $\Omega_{M, \omega}^0(\delta, g) := \|g\|_{L_M(T, \omega)}$ ve $k = 1$ ise $\Omega_{M, \omega}(\delta, g) := \Omega_{M, \omega}^1(\delta, g)$ yazılır.

$[-\pi, \pi]$ üzerinde 2π -periyodik toplanabilir fonksiyonuna

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{g(x+t) - g(x-t)}{2 \tan \frac{t}{2}} dt \right\} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{g(x+t) - g(x-t)}{2 \tan \frac{t}{2}} dt$$

ile verilen eşlenik fonksiyonu hemen hemen her yerde (h.h.y.) vardır.

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, g), \quad A_n(x, f) := a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$g \in L_1(T)$ fonksiyonunun Fourier serisi olsun. O halde

$$-i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sign} k c_k e^{ikx} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

biçiminde yazılan eşlenik trigonometrik serisi, bazı g fonksiyonunun Fourier serisi olur. Not edelim ki $g \in L_{[0, 2\pi]}$ nin Fourier serisinin eşlenik serisinin her zaman Fourier serisi olmayacağı bilinmektedir (bkz, örneğin, A. F. Timan, 1994)

$g \in L_M(T, \omega)$ için g 'nin türevini

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (g(x+h) - g(x)) - g_1(x) \right\|_{L_M(T, \omega)} = 0$$

şartını sağlayan bir g fonksiyonu olarak tanımlarız ve bu durumda $g_1 = g'$ yazarız. Bu durumda $g \in L_M(T, \omega)$ fonksiyonunun $L_M(T, \omega)$ anlamında türevi olduğunu söyleriz.

Derecesi n 'den büyük olmayan trigonometrik polinomların Π_n sınıfında $g \in L_M(T, \omega)$ fonksiyonunun en iyi yaklaşımı

$$E_n(g)_{M, \omega} := \inf_{T_n \in \Pi_n} \|f - T_n\|_{L_M(T, \omega)}$$

olsun. Not edelim ki,

$$E_n(g)_{M, \omega} := \|f - T_n^*\|_{L_M(T, \omega)}$$

gibi $T_n^* \in \Pi_n$ 'nin varlığı, örneğin (De Vore ve Lorentz, 1993 s. 59) çalışmasındaki Teorem 1.1'den elde edilir.

$B, \mathbb{C}$ kompleks düzlemde 'de, γ_1 ve γ_2 düzeltilebilir Jordan eğrileri ile sınırlandırılmış çift bağlantılı bir bölge olsun. (kapalı γ_2 eğrisi, γ_1 kapalı eğrisinin içindedir). Genelliği bozmadan $0 \in \text{int } \gamma_2$ olduğunu kabul edelim. $B_1^0 := \text{int } \gamma_1$, $B_1^\infty := \text{ext } \gamma_1$, $B_2^0 := \text{int } \gamma_2$, $B_2^\infty := \text{ext } \gamma_2$ olsun. $\omega = \alpha(z)$ fonksiyonu

$$\alpha(z) = \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\alpha(z)}{z} = 1$$

normalleştirilmiş şartıyla B_1^∞ bölgesini $D_1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| > 1\}$ bölgesine konform dönüştüren fonksiyon olsun ve β ' ise α 'nin ters fonksiyonu olsun.

Ayrıca $w = \alpha(z)$ ile B_2^0 ' bölgesini $\alpha(0) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} (z \alpha(z)) = 1$ normalleştirilmiş şartıyla $D_2 := \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$ bölgesine dönüştüren fonksiyonu gösterelim. β_1 ' fonksiyonu ise α_1 'nin ters fonksiyonu olsun.

$$\Gamma_{\rho_0} := \{z : |\alpha(z)| = \rho_0 > 1\}, K_{r_0} := \{z : |\alpha_1(z)| = r_0 > 1\}.$$

gösterelim.

α ' fonksiyonu $z = \infty$ noktasının komşuluğunda

$$\alpha(z) = \mu z + \mu_0 + \frac{\mu_1}{z} + \frac{\mu_2}{z^2} + \dots +$$

biçiminde Laurent seri açılımına sahip olsun ve dolayısıyla

$$[\alpha(z)]^n = \mu^n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n,k} z^k + \sum_{k<0} \mu_{n,k} z^k$$

elde ederiz.

$$\Phi_n(z) := \mu^n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n,k} z^k$$

polinomuna B_1^0 bölgesi için n . **dereceden Faber polinomu** denir.

α_1 fonksiyonu, başlangıç noktasının bazı komşuluklarında

$$\alpha_1(z) = \frac{1}{z} + \eta_0 + \eta_1 z + \dots + \eta_k z^k + \dots$$

seri açılımına sahiptir. Bu fonksiyonun n kuvveti için

$$[\alpha_1(z)]^n = F_n\left(\frac{1}{z}\right) - L_n(z), \quad z \in B_2^0$$

elde ederiz; burada $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$, z 'nin negatif kuvvetlerinin polinomunu belirtir ve $L_n(z)$ terimi, z 'nin negatif olmayan kuvvetlerini içerir. Dolayısıyla bu B_2^0 bölgesinde bir analitik fonksiyondur.

$\Phi_n(z)$ ve $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$ için aşağıdaki integral gösterimleri geçerlidir (Markushevich, 1968)':

1. Eğer $z \in \Gamma \text{int}_{\rho_0}$ ise, o zaman

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho_0}} \frac{[\alpha(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=\rho_0} \frac{\beta'(\omega)\omega^n}{\beta(\omega) - z} d\omega. \quad (3.2)$$

2. Eğer $z \in \text{ext}\Gamma_{\rho_0}$ ise bu durumda

$$\Phi_n(z) = [\alpha(z)]^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho_0}} \frac{[\alpha(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.3)$$

3. Eğer $z \in \text{int}\Gamma_{r_0}$ ise bu durumda

$$F_n\left(\frac{1}{z}\right) = [\alpha_1(z)]^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r_0}} \frac{[\alpha_1(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

4. Eğer $z \in \text{ext}\Gamma_{r_0}$ ise bu durumda

$$F_n\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho_0}} \frac{[\alpha_1(\zeta)]^n}{\zeta-z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=\rho_0} \frac{\beta_1'(\omega)\omega^n}{\beta_1(\omega)-z} d\omega \quad (3.4)$$

Eğer $g(z)$ fonksiyonu, Γ_{ρ_0} ve K_{r_0} eğrilerle sınırlı çift bağlantılı bölgede analitik ise bu durumda söz konusu bölgede aşağıdakilerle Laurent seri açılımı geçerlidir (Suetin, 1998):

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k F_k\left(\frac{1}{z}\right)$$

burada

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{g(z)\alpha_1'(z)}{[\alpha_1(z)]^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=\rho_1} \frac{g[\beta_1(\omega)]}{\omega^{k+1}} d\omega, \quad (1 < \rho_1 < \rho_0)$$

ve

$$d_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{g(z)\alpha_1'(z)}{[\alpha_1(z)]^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=r_1} \frac{g[\beta_1(\omega)]}{\omega^{k+1}} d\omega, \quad (1 < r_1 < r_0). \quad (3.5)$$

Dir. $z \in B$ için kompleks analizden bilinen Cauchy teoremine göre

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\xi)}{\xi-z} d\xi$$

olur. $z \in \text{int } \gamma_2$ ve $z \in \text{ext } \gamma_1$ için bu durumda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\xi)}{\xi-z} d\xi = 0. \quad (3.6)$$

olur.

$$M_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \quad M_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\xi)}{\xi-z} d\xi,$$

olduğunu gösterelim.

$M_1(z)$ fonksiyonu $M_1^+(z)$ ve $M_1^-(z)$ fonksiyonlarını belirtir, $M_2(z)$, fonksiyonu ise $M_2^+(z)$ ve $M_2^-(z)$ fonksiyonlarını belirtir. $M_1^+(z)$ fonksiyonu $\text{int } \gamma_1$ de ve $M_1^-(z)$ fonksiyonu ise $\text{ext } \gamma_1$ 'de analitiktir. $M_2^+(z)$ fonksiyonu ise $\text{int } \gamma_2$ de ve $M_2^-(z)$ fonksiyonu ise $\text{ext } \gamma_2$ 'de analitiktir.

T birim çemberi $L_M(T)$ ise T birim çemberi üzerinde tanımlanmış Orlicz uzayı olsun. $r > 0$ için $g \in L_M(T)$ fonksiyonun r - inci düzgünlük modülü

$$\omega_r(g, \delta)_M := \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^r g\|_{L_M(T)}, \quad \delta > 0, \quad r > 0$$

olarak tanımlanır, burada

$$\Delta_h^r g(x) := \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} g(x + (r-k)h)$$

dir.

Eğer γ_1 ve γ_2 Dini-düzgün eğriler ise, bu durumda (Warschawskii, 1932)'daki sonuçlardan

$$0 < c_1 < |\alpha'(z)| < c_2 < \infty, \quad 0 < c_3 < |\alpha'_1(z)| < c_4 < \infty$$

ve

(3.7)

$$0 < c_5 < |\beta'(\omega)| < c_6 < \infty, \quad 0 < c_7 < |\beta'_1(\omega)| < c_8 < \infty$$

çıkar; burada c_1, c_2, c_3, c_4 ve c_5, c_6, c_7, c_8 sabitleri $z \in \bar{B}^-$ 'den bağımsızdır ve $|\omega| \geq 1$ dir.

Eğer B_1^0 ve B_2^0 bölgeleri kapalı Dini-düzgün eğrileri ile sınırlı ise bu durumda diyeceğiz ki çift bağlantılı B bölgesi Dini-düzgün eğri ile sınırlıdır.

$\gamma_i (i=1,2)$ Dini düzgün bir eğri olsun ve $g \in L_M(\gamma_1)$ için $g_0 := g \circ \beta$ olsun. ve $g \in L_M(\gamma_2)$ için $g_1 := g \circ \beta_1$ olsun. Bu durumda (1.8) gereğince $g_0 \in L_M(T)$ ve $g_1 \in L_M(T)$ elde ederiz. T üzerinde g_0^+ ve g_1^+ in açısallık yollar boyunca sınır değerlerini kullanarak $r > 0$ için

$$\omega_{r,\gamma}(g, \delta)_M := \omega_r(g_0^+, \delta)_M, \quad \delta > 0,$$

$$\tilde{\omega}_{r,\gamma}(g, \delta)_M := \omega_r(g_1^+, \delta)_M, \quad \delta > 0,$$

tanımlayalım.

$g_0, g_1 \in L_M(T)$ olduğundan $g_0^+, g_1^+ \in E_M(D)$ ve $g_0^-, g_1^- \in E_M(D^-)$ elde ederiz, öyle ki $g_0^-(\infty) = \infty, g_1^-(\infty) = 0$ ve T üzerinde h. h. her yerde

$$\left. \begin{aligned} g_0(\omega) &= g_0^+(\omega) - g_0^-(\omega) \\ g_1(\omega) &= g_1^+(\omega) - g_1^-(\omega) \end{aligned} \right\}$$

eşitliği doğrudur.

$$R_n(f, z) := \sum_{k=0}^n a_k \Phi_k(z) + \sum_{k=0}^n b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right)$$

gösterelim.

$R_n(f, z)$ rasyonel fonksiyonuna f fonksiyonunun n . **dereceden Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu** denir.

Faber polinomları serisi, Taylor serisinin basit bağlantılı bir bölgede genelleştirilmesi olduğundan, Laurent serisinin çift bağlantılı bir bölge durumuna benzer bir genellemesinin oluşturulmasını düşünmek doğaldır.

Şimdi çift bağlantılı bölgede Smirnov-Orlicz sınıfını tanımlayalım γ_r eğrisi, $0 < r_2 < |\omega| < r_1 < 1$ halkasının çift bağlantılı B bölgesine konformal dönüşümünde $|\omega| = r$ ($r_2 < r < r_1$) çemberinin görüntüsü ve M bir N -fonksiyonu olsun. Eğer

$$\int_{\gamma_r} M\left[|g(z)|\right] |dz| < \infty$$

şartı sağlanırsa B bölgesinde tanımlanan $g(z)$ analitik fonksiyonlarının sınıfı $E_M(B)$ **Smirnov-Orlicz sınıfı** olarak adlandırılacaktır.

Tez çalışmasında güncel ilgi alanlarına yönelik sorular için yalnızca önemli olmayan niceliklere bağlı $c, c_1, c_2, \dots$ (genel olarak farklı değerlendirmelerde farklıdır) sabitlerini kullanıyoruz.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1 Yardımcı Sonuçlar

Orlicz uzayları için aşağıda verilen Bernstein eşitsizliği esas sonuçların ispatında önemli bir rol oynamaktadır.

Lemma 4.1 (Israfilov, Güven 2006; Kokilashvili, 1968). $L_M(T)$ refleksiv (dönüşlü) bir Orlicz uzayı olsun. Bu durumda n dereceli her trigonometrik T_n polinomu için

$$\|T_n'\|_{L_M(T)} \leq cn \|T_n\|_{L_M(T)} \quad (4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir, burada c sabiti n 'den bağımsız bir sabittir.

Lemma 4.2 (Akgün, Israfilov, 2008). N -fonksiyonu M , hem de onun tamamlayıcı fonksiyonunu Δ_2 koşulunu sağlasın. Bu durumda öyle $c_9 > 0$ sabiti bulunabilir ki,

$$\left\| g(\omega) - \sum_{s=0}^n d_s \omega^s \right\|_{L_M(T)} \leq c_9 \omega_r(g, \frac{1}{n})_M, \quad \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $d_k, (k=0,1,2,\dots)$ kat sayıları $g \in E_M(D)$ fonksiyonunun orijin noktası komşuluğundaki Taylor seri açılımında k 'inci Taylor katsayılarıdır.

4.2 Orlicz uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım üzerine

T ile $[-\pi, \pi]$ parçasını gösterelim. Tez çalışmasının bu bölümünde $L_M(T)$ Orlicz uzayında fonksiyonların trigonometrik polinomlarla yaklaşımı için bazı teoremler ispatlanmıştır. Belirli koşullar altında, $L_M(T)$ Orlicz uzayına ait fonksiyonların türevlerinin varlığı ispat edilir ve trigonometrik polinomların türevlerinin yaklaşım özellikleri incelenir. Not edilmelidir ki, fonksiyonların türevleri ile trigonometrik polinomların türevleri arasında elde edilen değerlendirme, $L_M(T)$ Orlicz uzayındaki en iyi yaklaşımlar dizisine bağlıdır.

$L_M(T)$ bir Orlicz uzayı olsun. Varsayalım ki x, h reel sayılar olsun ve

$$\begin{aligned}
\Delta_h^\alpha g(x) &= \sum_{s=0}^{\alpha} (-1)^s \binom{\alpha}{s} g(x + (\alpha - s)h) \\
&= \sum_{s=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-s} \binom{\alpha}{s} g(x + sh), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad f \in L_M(T)
\end{aligned}$$

gösterelim. $g \in L_M(T)$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (g(\cdot + h) - g(\cdot)) - h(\cdot) \right\|_{L_M(T)} = 0 \quad (4.2)$$

şartı sağlanırsa, bu durumda g **fonksiyonunu** f 'nin türevi olarak tanımlarız, bu durumda $g = f'$ yazarız.

$g \in L_M(T)$ fonksiyonunun derecesi n 'yi aşmayan trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımını $E_n(g)_M$ ile gösteriyoruz, yani

$$E_n(g)_M = \inf \left\{ \|g - T_n\|_{L_M(T)} : T_n \in \Pi_n \right\},$$

burada Π_n derecesi en fazla n olan trigonometrik polinomlar sınıfını gösterir. Ayrıca

$$E_n(f)_M = \|f - T_n\|_{L_M(T)}$$

dir.

Bu bölümün ana sonuçları aşağıdaki teoremlerdir.

Teorem 4.1 $L_M(T)$ bir refleksiv (dönüşlü) Orlicz uzayı ve T_n ise $L_M(T)$ uzayında g' ye trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşım olsun. Eğer $g \in L_M(T)$ fonksiyonu bazı doğal r için

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{r-1} E_m(g)_M < \infty$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda f' nin (1.1) anlamında r . mertebesinden bir türevi var ve

$$\left\| g^{(r)} - T_n^{(r)} \right\|_{L_M(T)} \leq c \left\{ n^r E_n(g)_M + \left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_{\mu}(g)_M \right) \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Öyle bir $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ trigonometrik polinomlar dizisi vardır ki

$$\|g - T_n\|_{L_M(T)} = E_n(g)_M.$$

olur. Teorem 4.1'in koşuluna göre aşağıdaki değerlendirmeler geçerlidir:

$$\|T_{2^i} - T_{2^{i-1}}\|_{L_M(T)} \leq 2E_{2^{i-1}}(g)_M,$$

$$g = T_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (T_{2^k} - T_{2^{k-1}}) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{2^k}.$$

Şimdi $j = 1, \dots, r$ için

$$\psi_j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} W_{2^i}^{(j)}(x) \quad \text{ve} \quad \psi_j(x) = g^{(j)}(x)$$

olacak şekilde $\psi_j(x) \in L_M(T)$ fonksiyonlarının var olduğunu gösterelim.

(4.1) i kullanarak $j = 1$ için

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g(\cdot+h) - g(\cdot)}{h} - \varphi_1(\cdot) \right\|_{L_M(T)} &\leq \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{W_{2^i}(\cdot+h) - W_{2^i}(\cdot)}{h} - \sum_{i=0}^{\infty} W_{2^i}'(\cdot) \right\|_{L_M(T)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n_0} \left\| \frac{W_{2^i}(\cdot+h) - W_{2^i}(\cdot)}{h} - W_{2^i}'(\cdot) \right\|_{L_M(T)} \\ &\quad + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\left\| \frac{W_{2^i}(\cdot+h) - W_{2^i}(\cdot)}{h} \right\|_{L_M(T)} + \|W_{2^i}\|_{L_M(T)} \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n_0} \left\| \frac{V_{2^i}(\cdot+h) - V_{2^i}(\cdot)}{h} - V_{2^i}'(\cdot) \right\|_{L_M(T)} + c_1 \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^i \|W_{2^i}\|_{L_M(T)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde ederiz.

(4.3) eşitsizliğinden $h \rightarrow 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$g'(x) = \psi_1(x)$$

bulunur. $j = 2, \dots, r$ için Teorem 4.1'i ispat etmek için tümevarım yöntemini kullanırız.

(4.1) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|T_n^{(r)} - f^{(r)}\|_{L_M(T)} &\leq \|T_n^{(r)} - T_{2^m}^{(r)}\|_{L_M(T)} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \|T_{2^i}^{(r)} - T_{2^{i-1}}^{(r)}\|_{L_M(T)} \\
&\leq c_2 \left\{ n^r E_n(f)_M + \sum_{i=m+1}^{\infty} 2^{ir} E_{2^{i-1}}(f)_M \right\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde ederiz.

$i = 1, 2, \dots$, için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$2^{ir} E_{2^{i-1}}(g)_M \leq 2^{2r} \sum_{\mu=2^{i-1}+1}^{2^i-1} \mu^{r-1} E_{\mu}(g)_M. \tag{4.5}$$

$2^{m-1} \leq n < 2^m$ olacak şekilde m seçilirse (4.4) ve (4.5) değerlendirmeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|T_n^{(r)} - g^{(r)}\|_{L_M(T)} &\leq c_3 \left\{ n^r E_n(g)_M + \sum_{i=m+1}^{\infty} 2^{2r} \sum_{\mu=2^{i-2}+1}^{2^i-1} \mu^{r-1} E_{\mu}(g)_M \right\} \\
&\leq c_4 \left\{ n^r E_n(f)_M + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_{\mu}(f)_M \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1'in ispatını tamamlanmış olur.

Teorem 4.2 $L_M(T)$ bir refleksiv (dönüşlü) Orlicz uzayı ve T_n aşağıdaki koşulları sağlayan n dereceli trigonometrik polinomlar dizisi olsun:

$$\|f - T_n\|_{L_M(T)} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ve} \quad \|g - T_n'\|_{L_M(T)} = o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

Bu durumda $f' = g$ elde ederiz. Yani g fonksiyonu (4.2) koşulunu sağlar.

İspat: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısını alıyoruz. $n \geq n_0$ için

$$\|g - T_n\|_{L_M(T)} \leq \varepsilon \frac{1}{n}, \quad \|u - T_n'\|_{L_M(T)} \leq \varepsilon \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı seçiyoruz. $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{n} \leq h \leq \frac{1}{n}$ koşulunu sağlayan h için (4.6) dikkate alınırsa

$$\left\| \frac{g(\cdot + h) - g(\cdot)}{h} - \frac{T(\cdot + h) - T_n(\cdot)}{h} \right\|_{L_M(T)} \leq 2\sqrt{\varepsilon} \tag{4.7}$$

elde ederiz.

(Ditzian, Hristov ve Ivanov,1995) referansından $-\frac{r}{2} < \eta(r, j) < \frac{r}{2}$ ve $j-r$ tek olduğunda $\eta(r, j) = 0$ ise

$$\begin{aligned}\Delta_h^r T_n(x) &= 0 \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k T_n \left(x + \left(\frac{r}{2} - k \right) h \right) \\ &= \sum_{j=r}^{\infty} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \left(\frac{r}{2} - k \right)^j \frac{h^j}{j!} T_n^{(j)}(x) \\ &= h^r T_n^{(r)}(x) + \sum_{j=r+1}^{\infty} \eta(r, j)^{j-r} T_n^{(j)}(x)\end{aligned}\quad (4.8)$$

eşitliği yazılabilir. . Daha sonra $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{n} \leq h < \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{n}$ için (2.7) ve Lemma 4.1'i kullanarak

$$\begin{aligned}\left\| \frac{T_n(\cdot + h) - T_n(\cdot)}{h} - T_n'(\cdot) \right\|_{L_M(T)} &\leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{h^{m-1}}{m!} \|T_n^{(m)}\|_{L_M(T)} \leq \sum_{m=2}^{\infty} (hn)^{m-1} \|T_n\|_{L_M(T)} \\ &\leq 4 \frac{\varepsilon}{1 - 2\varepsilon^{1/2}} \|T_n\|_{L_M(T)} \leq c_5 \varepsilon \|T_n\|_{L_M(T)}\end{aligned}\quad (4.9)$$

elde ederiz.

$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{n} \leq h < \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{n}$ için (4.7), (4.9) ve (4.6) i kullanarak,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{g(\cdot + h) - g(\cdot)}{h} - u \right\|_{L_M(T)} &= \left\| \frac{g(\cdot + h) - g(\cdot)}{h} - \frac{T_n(\cdot + h) - T_n(\cdot)}{h} \right\|_{L_M(T)} \\ &\quad + \left\| \frac{T_n(\cdot + h) - T_n(\cdot)}{h} - T_n'(\cdot) \right\|_{L_M(T)} + \|T_n' - u\|_{L_M(T)} \\ &\leq c_6 \left(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon \|g\|_{L_M(T)} + \varepsilon \right)\end{aligned}\quad (4.10)$$

ulaşırız. (4.10) eşitsizliğinden (4.2) anlamında $g = f'$ elde ederiz ki bu da Teorem 4.2'nin ispatını tamamlar.

Teorem 4.2'nin ispatındaki aynı yöntemi kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1 $g, u_1, \dots, u_k \in L_M(T)$, $k = 1, 2, \dots$, ve T_n ise $i = 1, \dots, k$ için

$$\|g - T_n\|_{L_M(T)} = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\|u_i - T_n^{(i)}\|_{L_M(T)} = o\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

koşullarını sağlayan trigonometrik polinomlar dizisi olsun. Bu durumda (4.2) anlamında $u_i = u'_{i-1}(g = u_0)$ elde ederiz.

Not edelim ki Teorem 4.1 ve 4.2' nin varsayımlarının karşılaştırılması mantıklıdır. Açık ki

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{r-1} E_m(f)_M < \infty$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda $m^r E_m(f)_M \rightarrow 0$ olur.

4.3 Ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonların trigonometrik polinomlarla yaklaşımı

Fonksiyonların türevinin varlığı, fonksiyonun ve eşlenik fonksiyonun türevinin polinomlarla yaklaşımı problemleri çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir: (Örneğin, bkz. Bari ve Stechkin, 1956; Stechkin, 1961; Timan, 1962; Zhizhiashvili, 1990)

Bu bölümde $L_M(T, \omega)$ ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonun Fourier serilerinin Fejér toplamları ile eşlenik fonksiyonunun yaklaşımı incelenmektedir. Belirli koşullar altında, eşlenik fonksiyonların türevleri ile $L_M(T, \omega)$ ağırlıklı Orlicz uzayında eşlenik trigonometrik polinomların türevleri arasındaki değerlendirme elde edilir. Not edelim ki eşlenik fonksiyonunun türevleri ile eşlenik trigonometrik polinomlarının türevleri arasındaki değerlendirme $L_M(T, \omega)$ ağırlıklı Orlicz uzayında en iyi yaklaşım dizisine bağlıdır.

Ayrıca $L_M(T, \omega)$ ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonların türevleri için yaklaşım teorisinin ters teoremi elde edilir.

Esas sonuçlarımız aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.3 $L_M(T, \omega)$ uzayı $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ Boyd indisleri ile ağırlıklı Orlicz uzayı ve

$g \in L_M(T, \omega)$, $\omega \in A_{1/\alpha_M}(T) \cap A_{1/\beta_M}(T)$ olsun. Bu durumda $g^{(r)} \in L_M(T, \omega)$ ve

$$\|g(x) - \sigma_{n-1}(g)\|_{L_M(T, \omega)} \leq c_1 \left(\Omega_{M, \omega} \left(\frac{1}{k+1}, f \right) + E_{k+1}(\tilde{f})_{M, \omega} \right), \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

değerlendirmesi doğrudur, burada $c_1 > 0$ ise n 'den bağımsız bir sabittir.

İspat:

$$T_{2n}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} S_k(x, f)$$

Gösterelim. Burada $S_k(x, f)$ $g \in L_1(T)$ fonksiyonunun n -inci kısmi toplamlarıdır.

(İsrafilov ve Güven 2006) çalışmasına göre

$$\|g(x) - T_{2n}(x)\|_{L_M(T, \omega)} \leq c_4 E_{n+1}(g)_{M, \omega} \quad (4.11)$$

olur. (Golinskii, 1960) çalışması gereğince herhangi bir $g \in L_M(T, \omega)$ ve $u \in L_M(T, \omega)$ fonksiyonu için

$$\|g\|_{L_M(T, \omega)} \leq c_5 \|g\|_{L_M(T, \omega)}, \quad \|\sigma_{n-1}(u)\|_{L_M(T, \omega)} \leq c_6 \|u\|_{L_M(T, \omega)} \quad (4.12)$$

elde ederiz.

Bu durumda (4.12) ve üçgen eşitsizliği dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \|u - \sigma_{n-1}(u)\|_{L_M(T, \omega)} &= \|u - T_{2n}(u) + T_{2n}(u) - \sigma_{n-1}(u)\|_{L_M(T, \omega)} \\ &\leq \|u - T_{2n}(u)\|_{L_M(T, \omega)} + \|T_{2n}(u) - \sigma_{n-1}(u)\|_{L_M(T, \omega)} \\ &= \|u - T_{2n}(u)\|_{L_M(T, \omega)} + \|\sigma_{n-1}(T_{2n}(u) - u)\|_{L_M(T, \omega)} \\ &\leq \|u - T_{2n}(u)\|_{L_M(T, \omega)} + c_7 \|u - T_{2n}(u)\|_{L_M(T, \omega)} \\ &\leq (1 + c_8) \|u - T_{2n}(u)\|_{L_M(T, \omega)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde ederiz. (4.11) ve (4.13)' e göre

$$\|u - \sigma_{n-1}(u)\|_{L_M(T, \omega)} \leq c_9 E_{n+1}(u)_{M, \omega}$$

bulunur. Şimdi bu eşitsizlikte $g = \tilde{f}$ yazılırsa,

$$\|g - \sigma_{n-1}(g)\|_{L_M(T, \omega)} \leq c_{10} E_{n+1}(g)_{M, \omega} \quad (4.14)$$

elde edilir.

Bilindiği gibi (Jafarov, Mamedkhanov, 2012) çalışmasına göre

$$E_n(g)_{M, \omega} \leq c_{11} \Omega_{M, \omega}^k \left(\frac{1}{n+1}, g \right) \quad (4.15)$$

değerlendirilmesi doğrudur. (4.14) ve (4.15) değerlendirilmeleri dikkate alınır,

$$\|g - \sigma_{n-1}(g)\|_{L_M(T, \omega)} \leq c_{12} \left\{ \Omega_{M, \omega} \left(\frac{1}{n+1}, g \right) + E_{n+1}(g)_{M, \omega} \right\}$$

elde ederiz. Teorem 4.3'ün ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 $L_M(T, \omega)$ uzayı $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ Boyd indisleri ile ağırlıklı bir Orlicz uzayı ve $g \in L_M(T, \omega)$, $\omega \in A_{1/\alpha_M}(T) \cap A_{1/\beta_M}(T)$ olsun. Bu durumda $g^{(r)} \in L_M(T, \omega)$ olur ve eğer T_n , $L_M(T, \omega)$ uzayında g 'ye en iyi yaklaşan trigonometrik polinom ise ve bazı doğal r 'ler için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(g)_{M, \omega} < \infty \quad (4.16)$$

şartı sağlanıyorsa

$$\left\| g^{(r)} - \tilde{T}_n^{(r)} \right\|_{L_M(T, \omega)} \leq c_2 \left\{ n^r E_n(g)_{M, \omega} + \left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_{\mu}(g)_{M, \omega} \right) \right\}$$

değerlendirilmesi geçerlidir.

İspat: (4.16) koşulundan $g^{(r)} \in L_M(T, \omega)$ olduğu sonucu çıkar. Sonuç olarak, adjoint operatörün sınırlılığı nedeniyle $g^{(r)} \in L_M(T, \omega)$ elde ederiz. n doğal sayısı için $i = 0, 1, \dots$ olmak üzere $T_{2^i n}$ trigonometrik polinomunu göz önüne alırsak aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$g(x) = T_n(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (T_{2^{k+1}n}(x) - T_{2^k n}(x)) \quad (4.17)$$

T_n trigonometrik polinomu f 'ye en iyi yaklaşan polinom olduğundan, (4.17) serisinin sağ tarafı $L_M(T, \omega)$ uzayının normuna göre yakınsar. Bu durumda (4.17) gereğince her n doğal sayısı için

$$\begin{aligned} \left\| T_{2^{k+1}n}(x) - T_{2^k n}(x) \right\|_{L_M(T, \omega)} &\leq \left\| T_{2^{k+1}n}(x) - g(x) \right\|_{L_M(T, \omega)} + \left\| g(x) - T_{2^k n}(x) \right\|_{L_M(T, \omega)} \\ &\leq E_{2^{k+1}n}(g)_{M, \omega} + E_{2^k n}(g)_{M, \omega} \leq 2E_{2^k n}(g)_{M, \omega} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$T_{2^{k+1}n}(x) - T_{2^k n}(x)$ polinomumun derecesi en fazla $2^{i+1}n$ olan trigonometrik polinom olduğu açıktır. $E_n(g)_{M, \omega} \leq cE_n(g)_{M, \omega}$ (Israfilov ve Güven, 2006) ve

$\{E_n(g)_{M,\omega}\}$ dizisi monoton olduğundan, bu durumda ağırlıklı Orlicz uzayları için Bernstein eşitsizliğini kullanılırsa (Israfilov ve Güven, 2006)

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{T}_{2^{k+1}n}^{(r)}(x) - \tilde{T}_{2^k n}^{(r)}(x) \right\|_{L_M(T,\omega)} &\leq \left(2^{k+1}n \right)^r \left\| \tilde{T}_{2^{k+1}n}(x) - \tilde{T}_{2^k n}(x) \right\|_{L_M(T,\omega)} \\
&\leq \left(2^{k+1}n \right)^r \left(\left\| g - \tilde{T}_{2^{k+1}n} \right\|_{L_M(T,\omega)} + \left\| g - \tilde{T}_{2^k n} \right\|_{L_M(T,\omega)} \right) \\
&\leq \left(2^{k+1}n \right)^r \left(E_{2^{k+1}n}(g)_{M,\omega} + E_{2^k n}(g)_{M,\omega} \right) \\
&\leq \left(2^{k+1}n \right)^r 2E_{2^k n}(f)_{M,\omega} \\
&\leq 2^{r+1} \left(2^k n \right)^r E_{2^k n}(g)_{M,\omega}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur.

$\tilde{T}_n(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{T}_{2^{k+1}n}(x) - \tilde{T}_{2^k n}(x))$ serisi (4.17) serisinin eşlenik serisi olsun. Bu

durumda (4.18) 'yi dikkate alarak,

$$\left\| \tilde{T}_n^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{T}_{2^{i+1}n}^{(r)}(x) - \tilde{T}_{2^i n}^{(r)}(x)) \right\|_{L_M(T,\omega)} \leq c_{13} 2^{r+1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i n \right)^r E_{2^i n}(f)_{M,\omega} \tag{4.19}$$

elde ederiz. (4.16) koşulu geçerli olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{r-1} E_m(g)_{M,\omega} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2^k n+1}^{2^{k+1}n} m^{r-1} E_m(g)_{M,\omega} \\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k n \right)^{r-1} E_{2^{k+1}n}(g)_{M,\omega} 2^k n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k n \right)^r E_{2^{k+1}n}(g)_{M,\omega}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k n \right)^r E_{2^k n}(g)_{M,\omega} &= n^r E_n(g)_{M,\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k+1}n \right)^r E_{2^{k+1}n}(g)_{M,\omega} \\
&\leq n^r E_n(g)_{M,\omega} + 2^r \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{r-1} E_m(g)_{M,\omega}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik

$$2^{r+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k n \right)^r E_{2^k n}(g)_{M,\omega} \leq c_{14} \left\{ n^r E_n(g)_{M,\omega} + \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{r-1} E_m(g)_{M,\omega} \right\} \tag{4.20}$$

eşitsizliğini verir.

(4.19) ve (4.20) 'ye göre

$$\tilde{T}_n^{(r)}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{T}_{2^{k+1}n}^{(r)}(x) - \tilde{T}_{2^k n}^{(r)}(x)) \tag{4.21}$$

serisi $L_M(T, \omega)$ uzayının normuna göre bazı fonksiyonlara yakınsar. $L_M(T, \omega)$ anlamında $\tilde{f}^{(r)}$ türevi için

$$g^{(r)}(x) = \tilde{T}_n^{(r)}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{T}_{2^{k+1}n}^{(r)}(x) - \tilde{T}_{2^k n}^{(r)}(x) \right)$$

olduğu açıktır. (4.20) ve (4.21) 'u kullanarak

$$\begin{aligned} \left\| g^{(r)}(x) - \tilde{T}_n^{(r)}(x) \right\|_{L_M(T, \omega)} &\leq 2^{r+1} \sum_{k=0}^{\infty} (2^k n)^r E_{2^k n}(g)_{M, \omega} \\ &\leq c_{15} \left\{ n^r E_n(g)_{M, \omega} + \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{r-1} E_m(g)_{M, \omega} \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem 4.4' in ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.5 $L_M(T, \omega)$ uzayı $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ Boyd indisleri ile ağırlıklı bir Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M}(T) \cap A_{1/\beta_M}(T)$ olsun. Eğer $g \in L_M(T, \omega)$ fonksiyonu bazı doğal r sayıları için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(g)_{M, \omega} < \infty$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda $g^{(r)} \in L_M(T, \omega)$ ve her n doğal sayısı için

$$\Omega_{M, \omega}^k \left(\frac{1}{n}, g^{(r)} \right) \leq c_3 \left\{ \frac{1}{n^{2k}} E_0(g)_{M, \omega} + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{2k+r-1} E_q(g)_{M, \omega} + \sum_{q=n+1}^{\infty} q^{r-1} E_q(g)_{M, \omega} \right\}$$

$k = 1, 2, 3, \dots,$

değerlendirmesi doğrudur, burada c_3 sabiti n ' den bağımsızdır.

İspat: Teorem 4.4' e göre $g^{(r)} \in L_M(T, \omega)$ ve

$$E_n \left(g^{(r)} \right)_{M, \omega} \leq c_{16} \left\{ n^r E_n(g)_{M, \omega} + \left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_{\mu}(g)_{M, \omega} \right) \right\} \quad (4.22)$$

olur.

$\Omega_{M, \omega}^k(\cdot, f)$ k -düzgünlük modülü için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir (Israfilov ve Güven, 2006):

$$\Omega_{M,\omega}^k \left(\frac{1}{n}, g \right) \leq \frac{c_{17}}{n^{2k}} \left\{ E_0(g)_{M,\omega} + \sum_{m=1}^n m^{2k-1} E_m(g)_{M,\omega} \right\} \quad (4.23)$$

Eğer (4.23) eşitsizliği $\tilde{f}^{(r)}$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$\Omega_{M,\omega}^k \left(\frac{1}{n}, g^{(r)} \right) \leq \frac{c_{18}}{n^{2k}} \left\{ E_0(g^{(r)})_{M,\omega} + \sum_{m=1}^n m^{2k-1} E_m(g^{(r)})_{M,\omega} \right\} \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.22) ve (4.24) değerlendirmelerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \Omega_{M,\omega}^k \left(\frac{1}{n}, g^{(r)} \right)_{M,\omega} &\leq \frac{c_{19}}{n^{2k}} \left\{ E_0(g^{(r)})_{M,\omega} + \sum_{\nu=1}^n \nu^{2k-1} E_\nu(g^{(r)})_{M,\omega} \right\} \\ &\leq \frac{c_{20}}{n^{2k}} \left\{ E_0(g)_{M,\omega} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(g)_{M,\omega} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n m^{2k-1} \left[m^r E_m(g)_{M,\omega} + \sum_{p=m+1}^{\infty} p^{r-1} E_p(g)_{M,\omega} \right] \right\} \\ &\leq \frac{c_{21}}{n^{2k}} \left\{ E_0(g)_{M,\omega} + \sum_{\nu=1}^n \nu^{2k+r-1} E_\nu(g)_{M,\omega} + \sum_{\nu=1}^n \nu^{2k-1} \sum_{p=\nu}^{\infty} \nu^{r-1} E_p(g)_{M,\omega} \right\} \\ &\leq \frac{c_{22}}{n^{2k}} \left\{ E_0(g)_{M,\omega} + \sum_{\nu=1}^n \nu^{2k+r-1} E_\nu(g)_{M,\omega} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n m^{2k-1} \left[\sum_{p=m}^n p^{r-1} E_p(g)_{M,\omega} + \sum_{p=n+1}^{\infty} p^{r-1} E_p(g)_{M,\omega} \right] \right\} \\ &\leq c_{23} \left\{ \frac{1}{n^{2k}} E_0(g)_{M,\omega} + \frac{1}{n^k} \sum_{m=1}^n m^{2k+r-1} E_m(g)_{M,\omega} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{p=1}^n p^{n-1} E_p(g)_{M,\omega} \sum_{m=1}^n m^{2k-1} + \sum_{p=n+1}^{\infty} p^{r-1} E_p(g)_{M,\omega} \right\} \\ &\leq c_{24} \left\{ \frac{1}{n^{2k}} E_0(g)_{M,\omega} + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{m=1}^n m^{2k+r-1} E_m(g)_{M,\omega} + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{p=1}^n p^{2k+r-1} E_p(g)_{M,\omega} \right\} \\ &\leq c_{25} \left\{ \frac{1}{n^{2k}} E_0(g)_{M,\omega} + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{q=1}^n q^{2k+r-1} E_q(g)_{M,\omega} + \sum_{q=n+1}^{\infty} q^{r-1} E_q(g)_{M,\omega} \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem 4.5' in ispatı tamamlanmıştır.

4.4 Smirnov-Orlicz Sınıflarında Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşımı

Faber polinomları serisi, Taylor serisinin basit bağlantılı bir bölgede genelleştirilmesi olduğundan, Laurent serisinin çift bağlantılı bir bölge durumuna benzer bir genellemesini düşünmek doğaldır.

Tez çalışmasının bu bölümünde Dini-düzgün eğri ile sınırlanan çift bağlantılı bölgelerde tanımlanan Smirnov-Orlicz sınıflarında yaklaşım teorisinin düz teoremi ispatlanmıştır. Benzer problemler çift bağlantılı bölgelerde rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı çoğu yazarlar tarafından çalışmalarında incelenmiştir.(Örneğin bk. Tietz, 1957; ve Ji-fieng, Ming 2005)

γ Dini-düzgün eğri ile sınırlanan basit bağlantılı bölgede tanımlanan Orlicz sınıflarında fonksiyonların polinomlarla yaklaşım problemi, (Akgün ve Israfilov, 2008) tarafından incelenmiştir.

Not edelim ki, reel sayılar doğrusunun aralıklarında tanımlanan Orlicz uzaylarında fonksiyonların polinomlar ve rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı Ramazanov tarafından incelenmiştir (Ramazanov,1984) .

Bu bölümün esas sonuçları aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.6 $B, \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ Dini-düzgün eğri ile sınırlı sonlu çift bağlantılı bir bölge olsun. $E_M(B)$, B üzerinde refleksiv bir Smirnov-Orlicz sınıfı olsun. Eğer $g \in E_M(B)$ ise herhangi bir $n = 1, 2, 3, \dots$ için bir $c_{10} > 0$ sabiti vardır, öyle ki

$$\|g - R_n(., g)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_{10} \left\{ \tilde{\omega}_{r,\gamma} \left(g, \frac{1}{n} \right)_M + \omega_{r,\gamma} \left(g, \frac{1}{n} \right)_M \right\}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $R_n(., g)$, g fonksiyonunun Faber-Laurent serisinin n 'inci kısmi toplamıdır.

İspat: (3.2)-(3.4) ve (3.5) formüllerinde sırasıyla $\gamma_1, \gamma_2 \vee T := \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}$ eğrilerini integral eğrileri olarak alalım. (Bu, teorem 1'in koşulları nedeniyle mümkündür). $g \in E_M(B)$ olsun. O halde $f_0, f_1 \in L_M(T)$ olur. (3.7) gereğince

$$g(\zeta) = g_0^+(\alpha(\zeta)) - g_0^-(\alpha(\zeta)), g(\xi) = g_1^+(\alpha_1(\xi)) - g_1^-(\alpha_1(\xi)) \quad (4.25)$$

olur.

$z \in \text{ext}\gamma_1$ olsun. O halde (3.3) ve (4.25) den

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n a_k \Phi_k(z) &= \sum_{k=0}^n c_k [\alpha(z)]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\sum_{k=0}^n c_k [\alpha(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \sum_{k=0}^n c_k [\alpha(z)]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\sum_{k=0}^n c_k [\alpha(\zeta)]^k - g_0^+[\alpha(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - g_0^-[\alpha(z)]
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

elde ederiz.

$z \in \text{ext}\gamma_2$ için (3.4) ve (4.25) dikkate alınır

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n d_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\sum_{k=1}^n d_k [\alpha_1(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\sum_{k=0}^n d_k [\alpha_1(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g_1^+[\alpha_1(\xi)] - \sum_{k=0}^n d_k [\alpha_1(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

bulunur.

$z \in \text{ext}\gamma_1$ için (4.26), (4.27) ve (3.6)'yı kullanarak,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n c_k [\Phi_k(z)]^k + \sum_{k=1}^n d_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{k=0}^n c_k [\alpha(z)]^k - g_0^-[\alpha(z)] \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g_0^+[\alpha(\zeta)] - \sum_{k=0}^n c_k [\alpha(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g_1^+[\alpha_1(\xi)] - \sum_{k=0}^n d_k [\alpha_1(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

γ_1 dışındaki tüm açısız olmayan yollar boyunca $z \rightarrow z^* \in \gamma_1$ limiti alınırsa, γ_1 eğrisi üzerinde h. h. her yerde

$$\begin{aligned}
 g(z^*) - \sum_{k=0}^n a_k \Phi_k(z^*) - \sum_{k=1}^n b_k F_k\left(\frac{1}{z^*}\right) \\
 = g_0^+[\varphi(z^*)] - \sum_{k=0}^n c_k [\alpha(z^*)]^k + \frac{1}{2} \left(g_0^+[\alpha(z^*)] - \sum_{k=0}^n c_k [\alpha(z^*)]^k \right) \\
 + S_{\gamma_1} \left[(g_0^+ \circ \alpha) - \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k \right] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g_1^+[\alpha_1(\xi)] - \sum_{k=1}^n d_k [\alpha_1(\xi)]^k}{\xi - z^*} d\xi
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

yazılabilir.

Şimdi (4.28), Minkowski eşitsizliğini ve S_{γ_1} operatörünün Orlicz uzayında sınırlı olduğu dikkate alınırsa

$$\|g - R_n(g, z)\|_{L_M(\Gamma_1)} \leq c_{11} \left\| g_0^+(\omega) - \sum_{k=0}^n c_k \omega^k \right\|_{L_M(T)} + c_{12} \left\| g_1^+(\omega) - \sum_{k=0}^n d_k \omega^k \right\|_{L_M(T)} \tag{4.29}$$

elde ederiz.

Yani, g fonksiyonunun c_k ve d_k Faber-Laurent katsayıları sırasıyla f_0^+ ve f_1^+ fonksiyonlarının Taylor katsayılarıdır. Bu durumda Lemma 4.2 ve (4.29) gereğince

$$\|g - R_n(f, z)\|_{L_M(\gamma_2)} \leq c_{13} \left\{ \tilde{\omega}_{r,\gamma}(g, \gamma_n)_M + \omega_{r,\gamma}(g, \gamma_n)_M \right\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$z \in \text{int } \gamma_2$ olsun. O halde (3.4) ve (4.25) 'e göre

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n d_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{k=1}^n d_k [\alpha_1(z)]^k - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\sum_{k=0}^n d_k [\alpha_1(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi \\
 &= \sum_{k=1}^n d_k [\alpha_1(z)]^k - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\left(\sum_{k=1}^n d_k [\alpha_1(\xi)]^k - g_1^+[\alpha_1(\xi)] \right)}{\xi - z} d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi - g_1^-[\alpha_1(z)]
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

elde ederiz.

$z \in \text{int } \gamma_1$ için 3.2 ve (4.25)'den

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\sum_{k=1}^n c_k [\alpha(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\left(\sum_{k=1}^n c_k [\alpha(\zeta)]^k - f_0^+[\alpha(\zeta)] \right)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned} \quad (4.31)$$

bulunur.

$z \in \text{int } \gamma_2$ için (4.30) ve (4.31)'nin kullanımını bize

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(z) + \sum_{k=1}^n d_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\left(\sum_{k=0}^n c_k [\alpha(\zeta)]^k - g_0^+[\alpha(\zeta)] \right)}{\zeta - z} d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\left(\sum_{k=1}^n d_k [\alpha_1(\xi)]^k - g_1^+[\alpha_1(\xi)] \right)}{\xi - z} d\xi \\ &\quad - g_1^-[\alpha_1(z)] + \sum_{k=1}^n d_k [\alpha_1(z)]^k \end{aligned}$$

verir.

γ_2 eğrisi içinde açısız olmayan yollar boyunca $z \rightarrow z^* \in \gamma_2$ limiti alınır, γ_2 üzerinde h.h. her yerde

$$\begin{aligned} g(z^*) - \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(z^*) - \sum_{k=1}^n d_k F_k\left(\frac{1}{z^*}\right) &= g_1^+[\alpha_1(z^*)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n d_k [\alpha_1(z^*)]^k - g_1^+[\alpha_1(z^*)] \right] - S_{\Gamma_2} \left[\sum_{k=1}^n d_k \alpha_1^k - (g_1^+ \circ \alpha_1) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\left(\sum_{k=0}^n c_k [\alpha(\zeta)]^k - g_0^+[\alpha(\zeta)] \right)}{\zeta - z^*} d\zeta \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde ederiz.

(4.32) eşitliği, Minkowski eşitsizliği ve S_{γ_2} operatörünün Orlicz uzayında sınırlı olduğu dikkate alınır,

$$\|g - R_n(g, z)\|_{L_M(\gamma_2)} \leq c_{14} \left\| g_1^+(\omega) - \sum_{k=1}^n d_k \omega^k \right\|_{L_M(T)} + c_{15} \left\| g_0^+(\omega) - \sum_{k=0}^n c_k \omega^k \right\|_{L_M(T)} \quad (4.33)$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.2 ve (4.33) kullanılırsa,

$$\|g - R_n(f, z)\|_{L_M(\gamma_2)} \leq c_{16} \{ \tilde{\omega}_{r,\gamma}(g, \frac{1}{n})_M + \omega_{r,\gamma}(g, \frac{1}{n})_M \}$$

bulunur. Teorem 4.6 'in ispatı tamamlanmış olur.



5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında ilk önce T , $[-\pi, \pi]$ olmak üzere $L_M(T)$ Orlicz uzayında fonksiyonların trigonometrik polinomlarla yaklaşımı incelenir. Belirli şartlar altında, $L_M(T)$ Orlicz uzayına ait fonksiyonların türevlerinin varlığı ispat edilir ve fonksiyonun yüksek mertebeden türevleri ile trigonometrik polinomların yüksek mertebeden türevlerinin yaklaşımı incelenir. Ayrıca gösterilir ki, fonksiyonların türevleri ile trigonometrik polinomların türevleri arasında elde edilen değerlendirme, $L_M(T)$ Orlicz uzayındaki en iyi yaklaşımlar dizisine bağlıdır. Daha sonra Fourier serilerinin Fejér toplamaları ile eşlenik fonksiyonlarının yaklaşımı incelenir ve Muckenhoupt ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonların türevleri ile eşlenik trigonometrik polinomların türevleri arasındaki değerlendirme elde edilir.

Ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonların türevleri için yaklaşım teorisinin ters teoremini ispat edilir. Ayrıca, Dini-düzgün eğri ile sınırlanmış çift bağlantılı bölgelerde tanımlanan Smirnov-Orlicz sınıflarında fonksiyonların Faber-Laurent fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili yaklaşım teorisinin düz teoremi ispatlanmıştır.

5.2 Öneriler

Bu tez çalışmasında Orlicz uzayında fonksiyonların ve eşlenik fonksiyonların trigonometrik polinomlarla yaklaşımı, başka uzaylarda (Morrey, Değişken üslü Lebesgue, Lorentz Uzaylarında) incelenebilir. Ayrıca, çift bağlantılı bölgelerde Fonksiyonların Faber-Laurent fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili teorem Morrey-Smirnov, Smirnov-Değişkenüslü Lebesgue uzaylarında ispat edilebilir.

KAYNAKLAR

- Akgün, R, Israfilov, D. M, 2008. Approximation and moduli of fractional orders in Smirnov Orlicz classes, *Glas. Mat.* 43 (63), 121–136.
- Andrievskii, V. V., and Blatt, H.P., 2002, Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation, *Springer-Verlag New York*.
- Bari N. K, and Steckin S. B., ,1956. Best approximation and differential properties of two conjugate functions, *Trudy Moskov. Matem. Obshestva*, 5, 1, 483–522.
- Başkan, T., 1998, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, *Baskı Vipaş*, 360 S.
- Bernstein, S.N., 1912, Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes, *Proceedings of 5th International Mathematical Congress* Vol. 1, 256-266.
- Böttcher, A., Karlovich, Yu.I., 1997, Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Teoplitz Operators, *Birkhäuser*, Basel.
- Cavus, A., Israfilov, D., 1995, Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of calls $L_p(\Gamma)$ With $1 < p < \infty$, *Approximation Theory and its Applications*, 11 (1), 105-118.
- Chebyshev, P.L., 1953, Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, *Mémoires de l' Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg*, 7 (1854). 539-568.
- David G., 1984, Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 17, 157-189.
- De Vore, R.A. and Lorentz, G. G., 1993, Constructive Approximation, *Springer Berlin Heidelberg* New York.
- Duren., P. L., 2001, “Univalent Functions”, *Springer-Verlag*, New York, 384 s
- Dzyadyk, V., 1977, Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials, *Nauka*, Moscow.
- Dzyadyk, V.K., and Shevchuk, I.A. 2009. Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomils, *Brill Academic Publishers*.
- Ditzian, Z, Hristov, V. H and K. G. Ivanov, K, G. 1995. Moduli of smoothness and K functionals in L_p , $0 < p < 1$, *Constr. Approx.* 11, no. 1, 67–83.
- Golinskii, B.L. 1960. Lokal approximation of two conjugate functions by trigonometric polynomials, *Mat. Sb.* 51, 4, 401–426 (in Russian).
- Ilyasov, N. A., 1986.. Approximation of periodic functions by Zygmund means, *Mat. Zametki*, 39 (3), 367-382. (in Russian).
- Israfilov D. M and A. Guven,A, 2006. Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces, *Studia Math.* 174, no. 2, 147–168.
- Jackson, D., 1911, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganzerationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegeneber Ordnung, *Diss., Göttingen*.

- Jackson, D., 1912. On approximation by trigonometric sums and polynomials, *Transaction American Mathematica Society*, 13, 491-515.
- Jafarov. S. Z, Mamedkhanov J. I, 2012. On approximation by trigonometric polynomials in Orlicz spaces, *Georgian Mathematical Journal*, 9, no. 4, 687-695.
- Ji-feng, X., Ming, Z. 2005. A complex approximation on doubly-connected domain, *J. Fudan Univ. Nat. Sci*, 44 (2), 328-331.
- Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York
- Krasnoselskii, M.A, Rutickii, Ya.B, 1961. *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Norrdhoff Ltd., Groningen,
- Kokilashvili, V.M, 1968. On approximation of periodic functions, *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. im. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR* 340, 51–81 (in Russian).
- Kokilashvili, V. 1968. On analytic functions of Smirnov–Orlicz classes, *Studia Math.* 31, 43–59. (Bölüm 4.4)
- Kokilashvili V. and Tsanava, Ts., 2010. On the norm estimate of deviation by linear summability means and extension of the Bernstein inequality, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 154, 144-146.
- Markushevich A.I., 1968. *Theory of Analytical Functions* (in 2 V.), Vol. 2, *Nauka*, Moscow.
- Markushevich, A.I., 1977. *Theory of Functions of a Complex Variable*, *III Chelsea Publishing Company*, New York.
- Muckenhoupt, B, 1972. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 165, 207–226.
- Nasibov F, 2013. *Reel değişkenli fonksiyonlar teorisi*, Nobel Yayınları, 583 s.
- Pekarskii, A. A. 1994. Uniform retnal approximation and Hardy-Sobolev spaces, *Math. Notes*, 56(4), 1082-1088.
- Ch. Pommerenke, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992
- Ramazanov, A.-R.K. 1984. On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces, *Analysis Mathematica*, 10, 117-132.
- Rao, M. M, Ren, Z.D. 1991. *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York.
- Stechkin, S. B. 1951. On the order of approximation of continuous function, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskii*, 15, 219-242.
- Stechkin, S.B. 1961. The approximation of periodic functions by Fej'er sums, *Trudy Mat. Ins. Steklov*, 62, 522–524 (in Russian).
- Suetin, P. K, 1998. *Series of Faber Polynomials*, *Cordon and Breach Science Publishers*.
- Tietz, H. 1957. Faber series and the Laurent decomposition, *Michigan Mathematical Journal*, 4 (2), 157-179.
- Timan, A. F. 1994, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*. *Dover Publications. Russian original*, Moscow: Fizmatgiz, 1960. First English edition, Oxford: *Pergamon Press*, 1963.
- Timan, M. F, 1962. Certain linear processes of summation of Fourier series and best approximation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR [Soviet Math. Dokl.]* 145 (4), 74-743

- Warschawski, S. E, Über das Verhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, *Math. Z.* 35 (1932) 321–456.
- Walsh, J.L. 1935. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, *American Mathematical Soc. Russian transl.* Moscow (IL): 1961.
- Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellung sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Sitzungsberichte der Akad. zu. Berlin*, 633-639, 789-805.
- Zhizhiashvili, L.V, 1990. On the summation of multiple conjugate trigonometric series in the metric of the space L_p , $p \in (0,1)$, *Sobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR* 140, 3, 465–467.
- Zill, D. G, Shanahan, P., 2003. A First Course in Complex Analysis with Applications. *Jones and Barlett Publishers*, USA, 449 S. (Bölüm 4.3)
- Zygmund, A., 1959. Trigonometric series, 2nd ed. Voll I,II, *Cambridge University Press, Cambridge*

ÖZGEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Cihat ÇOKÇA

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Namık Kemal Lisesi/Bağlar/Diyarbakır	2004
Üniversite	: Siirt Üniversitesi/Merkez/Siirt	2012
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi/Merkez/Muş	2025
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013-2015	Hikmet Uluğbay Ortaokulu	Öğretmen
2015-2017	2071 Melikşah Ortaokulu	Öğretmen
2017-2025	Gülbüz İmam Hatip Ortaokulu	Öğretmen