

JURİ ÜYELERİ

Prof.Dr.Ekrem SAVAŞ

E. Savas

Prof.Dr.Hüseyin AYDIN

H. Aydın

Doç.Dr.Ramazan DİKİCİ

R. Dikici

Yrd.Doç.Dr.Ahmet KÜÇÜK

A. Küçük

Yrd.Doç.Dr.Abdullah KOPUZLU

A. Kopuslu

16.03.2001 tarihinde 09/67 kararla kurulan jürimiz iş bu Doktora tezini 27.04.2001 tarihinde kabul etmiştir.

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Pozitif Conway Polinomuna Sahip Pozitif Düğümler

105298

Hakan ŞİMŞEK

Yönetici: Y.Doç.Dr. Ahmet KÜÇÜK

105298

Doktora Tezi

T.C. YÜKSEK ÖĞRETİM
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ÖZET

Bu çalışmada, Conway' in metodunu kullanarak 8_{10} , 10_5 , 10_{47} , 10_{62} düğümlerinin Conway polinomlarını ve bu düğümlerin örgülerini bulduk. J. M. Van Buskirk'in makalesinde verdiği teoremler yardımıyla bu düğümler için pozitiflik kavramları incelenmiştir. Bu düğümlerin örgülerinden hareketle çeşitli grup temsilleri elde edilmiş, yaklaşık olarak verilen Conway polinomlarının katsayıları çizimlerle desteklenerek tam olarak verilmiştir.



SUMMARY

In this Thesis, we found out the Conway polynomials of 8_{10} , 10_5 , 10_{47} , 10_{62} knots via The Conway Methods and Braids relations for the same knots. Secondly, in view of Buskirk's paper we examine the positivity structure for these knots. We gave special groups representations of these braids obtained respectively 8_{10} , 10_5 , 10_{47} , 10_{62} knots. At this time, we obtain the exact coefficient of the Conway polynomials of 8_{10} , 10_5 , 10_{47} , 10_{62} knots. This observations supported by figures.



TEŞEKKÜR

Bu alıőmada bana her tűrlű kolaylıęı saęlayan ve desteklerini esirgemeyen sayın danıőman hocam Y. Doç. Dr. Ahmet KŪŪK 'e, Y. Doç. Dr. Abdullah KOPUZLU baőta olmak űzere bűlűműműzűn deęerli űęretim elemanlarına teőekkűr eder saygılarımı sunarım.

Çok sevdiğim aileme, eőime ve oğluma, arkadaőlarıma bana verdikleri destekleri için teőekkűr eder saygılarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
SUMMARY.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1 GİRİŞ.....	1
2 DÜĞÜM TEORİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI.....	3
2.1.1 Düğüm Teorisinin Esas kavramları.....	3
2.2.1 Basit Düğüm Hareketleri.....	4
2.2.2 Reidemester Hareketleri.....	5
2.2.3 Düğümlerin Denkliği.....	8
2.2.4 Halkalar.....	13
2.2.5 Düğüm Ayrışım ve Düğümün Yarı Grubu.....	15
2.2.6 Regüler Diyagramlar ve Alterne Düğümler.....	20
2.3 DÜĞÜM TEORİSİNİN PROBLEMLERİ.....	22
2.3.1 Global Problemler.....	23
2.3.2 Lokal Problemler.....	25
2.4. DÜĞÜM POLİNOMLARI.....	28
2.4.1 Alexander Polinomu.....	28
2.4.2 Conway Polinomu.....	32
2.4.3 Jones Polinomu.....	34
2.4.4. Kauffman Polinomu.....	36

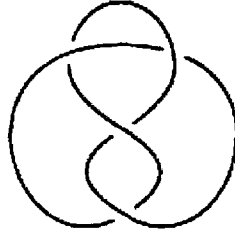
2.5. ÖRGÜ KAVRAMI.....	39
2.5.1 Örgüler.....	39
2.5.2 Örgü Grubu.....	41
2.5.3 Düğümde Örgünün Elde Edilmesi.....	42
2.5.4 Örgü İndeksi.....	46
2.6 POZİTİFLİK KAVRAMI.....	46
3 $8_{10}, 10_5, 10_{47}, 10_{62}$ DÜĞÜMLERİNİN ÖRGÜSÜ.....	49
3.1 8_{10} Düğümünün Örgüsü.....	57
3.2 10_5 Düğümünün Örgüsü.....	58
3.3 10_{47} Düğümünün Örgüsü.....	61
3.4 10_{62} Düğümünün Örgüsü.....	62
4 $8_{10}, 10_5, 10_{47}, 10_{62}$ DÜĞÜMLERİNİN CONWAY POLİNOMU.....	64
4.1 8_{10} Düğümünün Conway Polinomu.....	65
4.2 10_5 Düğümünün Conway Polinomu.....	67
4.3 10_{47} Düğümünün Conway Polinomu.....	72
4.4 10_{62} Düğümünün Conway Polinomu.....	77
5 POZİTİFLİK KAVRAMI.....	84
6 SONUÇLAR.....	91
7 KAYNAKLAR.....	93

KISALTMALAR VE SİMGELER

$A_i(t)$	gömülme dönüşümü
$\#A$	A kümesinin eleman sayısı
$B(n)$	Örgü grubu
B^3	Üç boyutlu yuvar
D	K düğümünün regüler izdüşümü
F	K düğümünün Seifert yüzeyi
$F_n(M)$	n katlı ayırık ikililerin $M \times M \times \dots \times M$ çarpımı
$F_{m,n}(M)$	$F_n(M/Q_m)$
$H(n)$	Soyut grup
K	Herhangi bir düğüm
K^*	K düğümünün ayna görüntüsü
$L(D)$	$S(D)$ nin sınırı
n	örgünün geren sayısı
$P_D(A)$	Kauffman Polinomu
S^1	Birim çember
S^2	B^3 topunun sınırı
S^3	R^3 e sonsuz noktasının eklenmesiyle elde edilen üç boyutlu yüzey
$S(D)$	D ye Seifert algoritmasını uygulayarak elde edilen yüzey
$V_K(t)$	K Düğümünün Jones polinomu
$X_>(D)$	Pozitif geçişlerin kümesi
$X_<(D)$	Negatif geçişlerin kümesi
σ	Örgünün gerenleri
β	Örgünün bağıntısı
∇_K	K düğümünün Conway polinomu
$\Gamma(D)$	Seifert Grafi
Σ_n	$\{1, 2, \dots, n\}$ üzerindeki tüm permütasyonların grubu
$\pi_1(C_n(M), c_0)$	homotopi sınıfı
\amalg	Ayrık çarpım

1. GİRİŞ

Düğüm teorisi ile ilk olarak, kimin ne zaman ilgilendiğini söylemek zordur. Son dönemde, Gauss'un bu alana biraz ilgi duyduğu bilinmektedir. Ancak onun öğrencisi olan ve düğüm teorisi ile ilgili çalışmaları üzerine alan Listing bu konuya gerekli önemi vermemiştir. Ama orijinal olarak onun becerisinin bir nişanı olarak özellikle 8-şekilli düğüm olarak bilinen Şekil 1.1 deki düğüm Listing düğümü olarak adlandırılır.



Şekil 1.1 Listing Düğümü

Amerikalı matematikçi J.W. Alexander düğüm teorisinin 3-boyutlu topoloji çalışmalarında ne kadar önemli olduğunu gösteren ilk kişidir. Diğerleri arasında Alman matematikçi H. Seifert 1920'lerin başından 1930'a kadar yaptığı çalışmalarda bu teorisinin önemini belirtmiştir. Ayrıca cebirsel geometri ile düğüm teorisi arasındaki ilişki ile alakalı gözle görülür çalışmalarda yine bu dönemde Almanya'da yapıldı.

İkinci dünya savaşından sonra 1950' lerde A.B.D.' de düğüm teorisi ile ilgili büyük ilerlemeler görüldü. Bu araştırmaların etkisi altında Japonya'da büyük atılımlar yapıldı. 1970'lerin düğüm teorisinde ise periyodik dönüşümlerle alakalı Smith tahmininin çözümünden dolayı, düğüm teorisinin, cebirsel sayı teorisi ile bağlantısının olabileceği görüldü.

1980'lerin başında V. F. R. Jones'un düğüm sabitlerini keşfinden dolayı düğüm teorisi topoloji başlığı altından çıkmış matematiksel fiziğe taşınmıştır. Bu durum düğüm teorisinin çözülebilir istatistiksel mekanikle yakınlığını göstermiştir. Düğüm teorisi büyüyüp geliştiği için onun sınırları da devamlı olarak değişmektedir. Matematiksel biyoloji ve kimyanın belli alanlarında da gelişmeler göstermiştir. Daha açık olarak biyolojide DNA moleküllerinin belli tiplerinin, bazı düğüm tiplerinin şeklini aldığı görülmüştür[Murasugi,K.1996].

Bizde bu çalışmamızda Dügüm teorisinin çalışma alanlarından olan E. Artin, J. Birman, W. Brau gibi Matematikçilerin çalıştıkları Örgü kavramı, Conway tarafından verilen algoritmanın ışığında ortaya çıkan Conway polinomları ve A.Stoimenow, R. Lee, J.V. Buskirk ve diğerleri, tarafından çalışılan Pozitiflik kavramıyla ilgili olarak 8_{10} , 10_5 , 10_{47} , 10_{62} düğümlerini çalışacağız.



2. DÜĞÜM TEORİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI

Bu kısım diğer kısımlarda kullanılan temel kavramlardan oluşacaktır

2.1.1 Düğüm Teorisinin Esas Kavramları

Bir düğüm kısaca bükülmüş bir çemberdir. Bir düğümü Şekil 2.1.1(a) da görüldüğü gibi 3-boyutlu uzayda bükülmüş veya dolaştırılmış bir poligon olarak düşüneceğiz. Matematik dilinde ise düğüm, bir S^1 çemberinin Euclidean 3-uzaya, R^3 , yada S^3 , 3-yuvarına gömülmesidir. Bir tek $i : S^1 \rightarrow S^3$ gömülmesi tabii olarak o kadar ilginç yapılar meydana getirmez. Düğümle ilgili esas problem düğümün yapısını bozmadan belirli tip hareketlerle 3-uzaya taşımaktır. Topolojik yapılar bu hareketlerle alakalı gömülmelerin sınıfından doğar. Bir K düğümü, $i(S^1) = K$ (basit kapalı eğri) gömülmesinin (daha çok gömülme dönüşümleri sınıfının) görüntüsüdür veya böyle eğrilerin bir sınıfıdır. İzotopinin pek çok farklı notasyonu vardır. Biz Burde'nin vermiş olduğu kavramlardan hareket edeceğiz[Burde,G.1985].

X ve Y birer Hausdorff uzay olsun. Eğer, $f : X \rightarrow f(X)$ homoemorfizm ise $f : X \rightarrow Y$ ye gömme(gömülme) dönüşümü adı verilir.

TANIM 2.1.1: Eğer $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ iki gömme dönüşümü izotop ise bu taktirde $F(x, t) = ((f(x), t), t) \quad x \in X, t \in I = [0, 1] \quad \text{ve} \quad f(x, 0) = f_0(x), f(x, 1) = f_1(x)$ olacak şekilde bir

$$F : X \times I \rightarrow Y \times I$$

gömme dönüşümü vardır. Bu F dönüşümüne f_0 ve f_1 arasında seviyeyi koruyan izotopi denir.

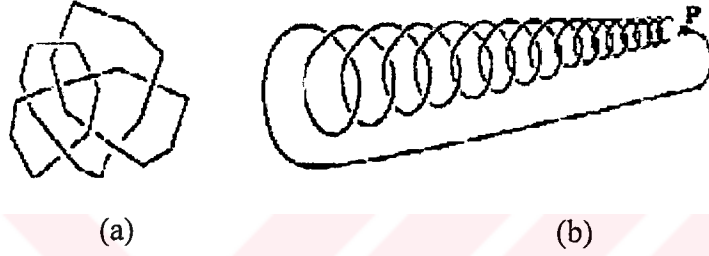
TANIM 2.1.2: Eğer

$$H : Y \times I \rightarrow Y \times I, H(y, t) = (h_t(y), t), f_1 = h_1 f_0, h_0 = Id_Y$$

seviyeyi koruyan izotopisi varsa f_0 ve f_1 gömülmelerine ambient izotop denir. H ' a ambient izotopi denir. Bir F ambient izotopisi, f_0 ve f_1 arasında $F(x, t) = (h_t f_0(x), t)$ şeklinde bir izotopi doğurur.

TANIM 2.1.3: Eğer K , R^3 de basit kapalı bir poligona izotop ise, K düğümüne uysal(tame), aksi halde vahşi düğüm adı verilir. Vahşi düğümlere bir örnek Şekil 2.1.1(b)'de görülebilir[Burde,G.,Zieschang,H.,1985].

Bir P noktası seçelim bu nokta bir anlamda "limit" noktasıdır ve düğüm akordiyonik bir tavırla demetler halinde başlayarak bu noktaya doğru gider. Böyle bir noktanın komşuluğunda düğüm kendi doğal durumunu gösterir. Bu yüzden, ayırım yapmaksızın, her şeyi topolojinin görüş noktası doğrultusunda farz edeceğiz.



Şekil 2.1.1

2.2.1 Basit Düğüm Hareketleri

Poligonal bir biçimde olan bir düğümü düşünürsek, bir düğüm sınırsız sayıda kenarların bir birleşimi olduğu için düğüm poligonal yaylardan ziyade daha yumuşak daha düz bir şekilde resmedilir. Ancak matematiksel anlamda poligonal doğruların bir koleksiyonudur.

Bir düğümü kesin (matematiksel) bir şekilde izah etmeyi sürdürürsek, düğümün biçiminde değişiklik yapabildiğimizi kolayca görebiliriz. Örneğin bir K düğümü üzerindeki AB kenarını AC ve CB kenarlarıyla değiştirmek mümkündür. Bu değişikliğin tersini de yapabiliriz. Böyle yer değiştirmeler basit düğüm hareketleri olarak adlandırılır. Bu değişim hareketlerini şimdi tam olarak tanımlayacağız.

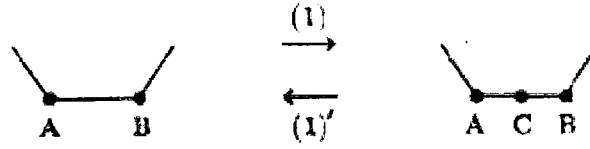
TANIM 2.2.1: Verilen bir K düğümü üzerinde aşağıdaki dört işlemi uygulayabiliriz.

(1) Şekil 2.2.2 de görüldüğü gibi bir K düğümü üzerindeki AB kenarını bir C kenarı referans alınarak AC ve CB şeklinde iki kenara bölebiliriz.

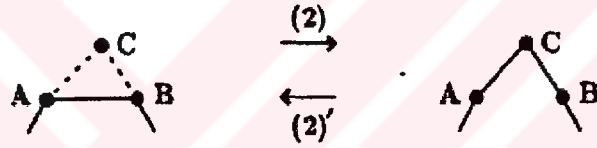
(1)' ((1) in tersi) Yine Şekil 2.2.2 de görüldüğü gibi bir K düğümü üzerinde bitişik AC ve CB kenarlarından oluşan bir doğru varsa bu C kenarı silinerek bir AB kenarı elde edilebilir.

(2) K düğümü üzerinde bulunmayan bir C noktasını düşünelim. AB ve C ile biçimlendirdiğimiz ABC üçgeni AB kenarı hariç K düğümünü kesmezse bu durumda AB kenarını ortadan kaldırabilir ve AC ve CB kenarlarını ekleyebiliriz (Şekil 2.2.3).

(2)' ((2) nin tersi) K düğümü üzerinde K nin AC ve CB bitişik iki kenarını ihtiva eden bir ABC üçgeni mevcutsa ve bu üçgen AC ve CB kenarları hariç K düğümünü kesmezse Şekil 2.2.3 de görüldüğü gibi AC ve CB kenarlarını silebilir ve AB kenarını ekleyebiliriz.



Şekil 2.2.2 Basit Düğüm Hareketleri (1) ve (1)'

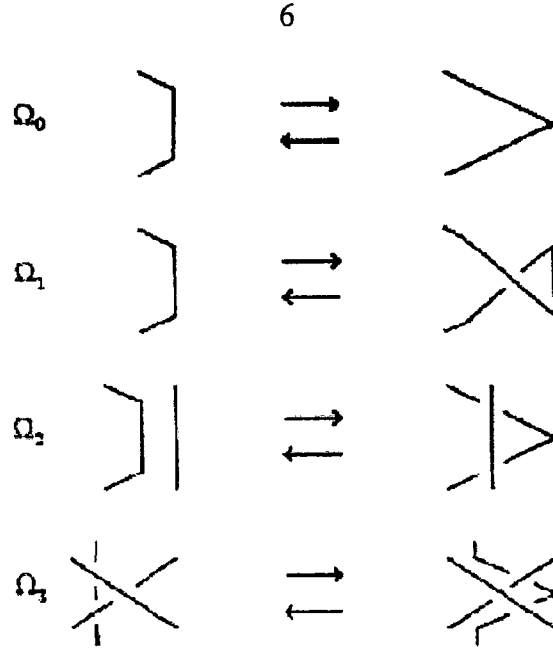


Şekil 2.2.3 Basit Düğüm Hareketleri (2) ve (2)'

Bu dört işlem basit düğüm hareketleri olarak adlandırılır.

2.2.2 Reidemester Hareketleri

Beklenildiği gibi yalnız bir basit düğüm hareketi regüler diyagramda çeşitli değişikliklerin olmasına sebep olur. Bununla birlikte, kendimizi şimdilik Şekil 2.2.4 de gösterilen dört harekete ve onların terslerine kısıtlamamız mümkündür.



Şekil 2.2.4 Reidemester Hareketleri

Gerçekten bu hareketlerin yapılabilmesi için onları anlamak gereklidir. Örneğin Ω_1 Şekil 2.2.4 de gösterildiği gibi, $AC \cup CB$ ile AB yi yer değiştiren regüler diyagram üzerinde bir basit düğüm hareketine karşılık gelen hareket olarak düşünülebilir.



Şekil 2.2.5 Ω_1 Hareketi

Ω_1, Ω_2 ve Ω_3 den doğal yapıları farklı olan bu izotopik deformasyonlar altında D (K düğümünü regüler izdüşümü) zorunlu olarak değişmeden kalır. Böylece D nin yeterli sayısı kadar düzenli diyagram üzerinde herhangi bir yere oldukça serbest bir şekilde izotopik olan bu deformasyonları uygulayabiliriz. Bu parçaların yeterliliğinden emin olmak için D nin ilk olarak köşelerinin sayısını artırmamız gerekebilir. D üzerindeki köşelerin toplamına tam olarak Tanım 2.2.1 de verilen basit düğüm hareketleri (1) veya (1)' karşılık gelir. Aynı sebepten (1) ve (1)' hareketleri olarak gözönüne alınması gerekmektedir. Biz onları bu hareketlerin bir toplamı olarak sınıflandıramayacağız.

Bunları akılda tutarsak K ve K' düğümlerinin iki regüler diyagramı D ve D' arasında bir denklik tanımlayabiliriz.

TANIM 2.2.2: Eğer regüler bir D diyagramını Ω_1, Ω_2 ve Ω_3 veya onların terslerini sonlu kez uygulayarak diğer bir D' diyagramına dönüştürebilsek, bu taktirde D ve D' diyagramları denktir denir ve bu denkliği $D \simeq D'$ ile göstereceğiz.

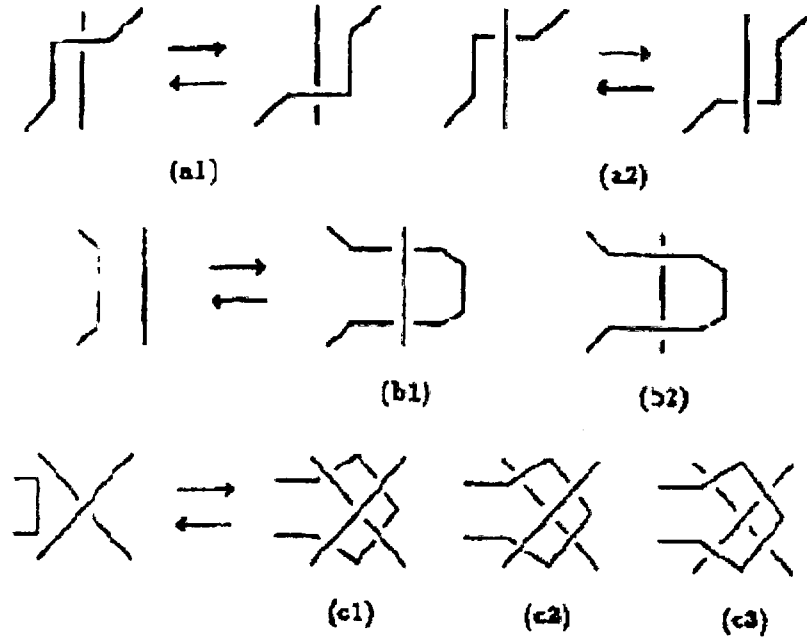
Bu üç hareket Ω_1, Ω_2 ve Ω_3 ve onların terslerine Reidemeister hareketleri denir. Bu söylenenler ışığında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 2.2.1: D ve D' nün, K ve K' düğümlerinin regüler diyagramları olduklarını kabul edelim. Bu taktirde,

$$K \simeq K' \Leftrightarrow D \simeq D'$$

olur[Murasugi,K.,1996].

Yukarıdaki teoremden düğümlerin denkliği probleminin aslında bu düğümlerin regüler diyagramlarının bir denkliği problemi olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Böylece bir düğüm sabitinin bir regüler diyagrama herhangi bir Reidemeister hareketinin biri uygulandığı zaman değişmeden kalan bir nicelik olduğu düşünülebilir. Reidemeister hareketlerini aşağıdakileri elde etmek için sonlu kez lokal olarak uygulamamız gerekecektir. Basitleştirmek için bu hareketleri R-hareketleri olarak da adlandırabiliriz.

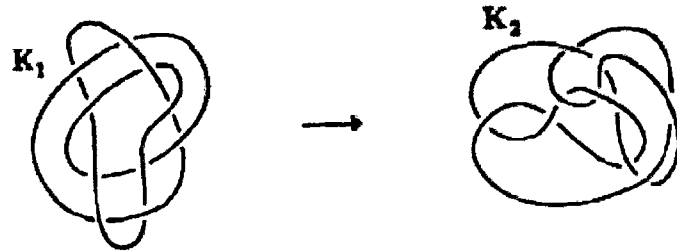


Şekil 2.2.6 Reidemester Hareketleri

LEMMA 2.2.1: Şekil 2.2.6 de gösterilen hareketler R-hareketleridir[Murasugi,K.1996].

2.2.3 Düğümlerin Denkliği (I)

Eğer bir düğüme tek bir temel düğüm hareketini uygularsak, o düğüm değişmez. Ancak farklı yerlerde bu işlemi birkaç kez tekrarlırsak, meydana gelen düğümün görünüş itibarıyla tamamen farklı bir düğüm olduğu görülür. Örneğin, Perko çifti olarak adlandırılan Şekil 2.2.7 deki K_1 ve K_2 düğümlerini gözönüne alalım.



Şekil 2.2.7 Perko Çifti

Görünüşte yukarıdaki düğümlerin birbirinden tamamen farklı olduğu düşünülebilir. Aslında yüzyıllar boyunca da hiç kimse aksini düşünmedi. Ancak temel düğüm hareketlerini anlamlı bir şekilde birkaç kez uygulayarak, K_1 düğümünü K_2 düğümüne

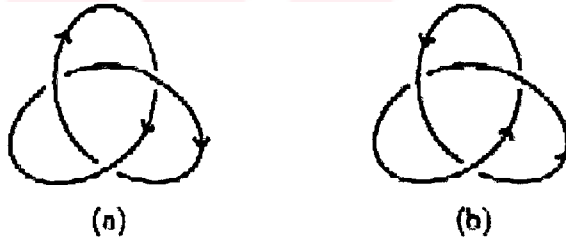
dönüştürmek mümkündür. Bu ispat 1970 yılında Amerikalı avukat K. A. Perko tarafından yapıldı.

Temel düğüm hareketlerini uygulayarak birinden diğerine dönüştürülebilen düğümlerin denk veya eşit olduğu söylenebilir. Bu yüzden Şekil 2.2.7 deki iki düğüm denktir.

TANIM 2.2.3.1: Temel düğüm hareketlerini sonlu kez uygulayarak K düğümünden K' düğümü elde ediliyorsa K düğümünün K' düğümüne denk olduğu söylenir. Uzayda, sürekli bir dönüşüm altında bir düğüm, diğer bir düğüm üzerine dönüştürülebiliyorsa bu iki düğüm denktir denir.

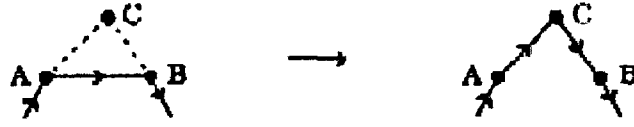
Eğer K düğümü K' düğümüne denk ise, K' de K ya denk olduğu için, K ve K' düğümlerinin denk (eşit) olduğunu söyleyebiliriz. Bu denkliği $K \equiv K'$ ile göstereceğiz. Düğüm teorisinde denk düğümlerin birbirinden farklarının olmadığı kabul edildiği için, onları aynı düğümler olarak düşüneceğiz.

Bir düğüm başlangıç ve bitiş noktasına sahip değildir. Bir düğüm basit kapalı bir eğridir. Bu yüzden eğriye bir yönlendirme verebiliriz. Alışılmış olarak, bir düğümün yönlendirmesini bir ok vasıtasıyla göstereceğiz. Herhangi bir düğümün yönlendirmesinin iki türlü olacağı, Şekil 2.2.8 de görüldüğü gibidir.



Şekil 2.2.8 Sağ ve Sol El Yönlendirilmiş Yonca Yaprağı

Eğer yönlendirilmiş K ve K' düğümleri, yönlendirilmiş temel düğüm hareketleri vasıtasıyla birbirlerine dönüştürülebiliyorsa K ve K' düğümlerinin yönlendirmeleri korunarak denk oldukları söylenir ve $K \equiv K'$ şeklinde yazılır.



Şekil 2.2.9 Basit Düğüm Hareketleri

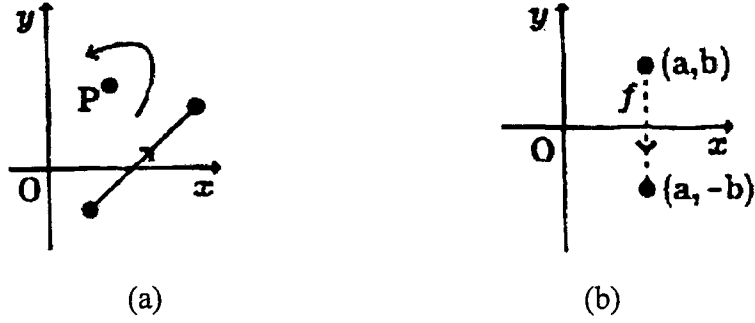
Denk iki düğüme herhangi bir yönlendirme yapılmaz ise bu iki düğümün kesinlikle denk olduğu düşünülür. Ancak bu iki düğüme herhangi bir yönlendirme yapılırsa bu iki düğümün denk olup olmadığı konusunda bir netlik yoktur.

2.2.3 Dğümlerin Denkliği (II)

Bir düğüm üzerindeki temel düğüm hareketleri, bir düğümün yalnızca bir bölümüne uygulanan "lokal" hareketler veya dönüşümlerdir. Böyle "lokal" dönüşümler yerine, "global" dönüşümler veya hareketlere dayalı olarak dğümlerin denkliğini yeniden tanımlayabiliriz. Bu dönüşümler uzaydaki mevcut bütün dğümler için geçerlidir. Ancak daha önce, bazı temel kavramları verelim.

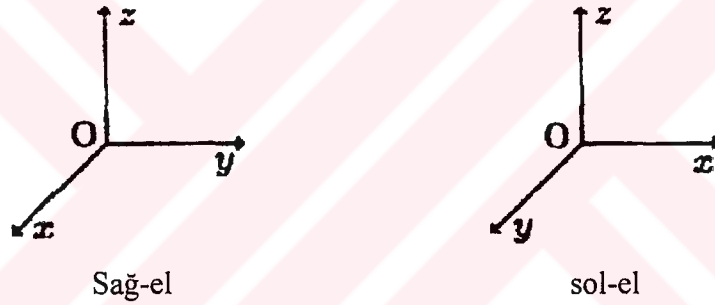
f bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir dönüşüm olsun. Öncelikle bu X ve Y uzaylarının 3-boyutlu Euclid uzayında olduklarını veya bu uzayın alt uzayı olduklarını kabul edeceğiz. Eğer f bire-bir, üzerine bir dönüşüm ise, $f^{-1} : X \rightarrow Y$ ters dönüşümünü tanımlayabiliriz. Ayrıca hem f hem de f^{-1} sürekli dönüşümler ise, bu durumda X den Y ye f dönüşümü, homeomorfizm olarak adlandırılır ve X ve Y uzaylarına homeomorfik uzaylar denir. Cebirsel topoloji açısından bakıldığında, X ve Y uzaylarının tamamen aynı uzaylar oldukları söylenebilir. X ve Y bir yönlendirmeye sahip olduğunda, eğer, Y nin orijinal yönlendirmesi Y ye verdiğimiz yönlendirmeyi uyuyorsa, yani, f nin etkisiyle X in yönlendirmesi de aynı şekilde uyuyorsa, f nin yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizme sahip olduğu söylenir. Sonuç olarak $X = Y$ olacak şekilde X den kendi üzerine bir homeomorfizm, oto-homeomorfizm olarak adlandırılır.

ÖRNEK 2.2.2: Hem X hem de Y nin R^2 olduğunu farz edelim. Bu durumda $(x, y) = (x + a, y + b)$ ile verilen bir doğru boyunca bir paralel öteleme ve bir sabit nokta etrafında (örneğin orijin etrafında) yapılan bir dönme, yönlendirmeyi koruyan oto-homeomorfizm örnekleridir (Şekil 2.2.10(a)).



Şekil 2.2.10 Dönme ve Öteleme

Bununla birlikte $f(x, y) = (x, -y)$ homeomorfizmi ile verilen x-eksenine göre ayna görüntü, yönlendirmeyi koruyan bir oto-homeomorfizm değildir. Çünkü burada yönlendirme Şekil 2.2.10(b) de görüldüğü gibi ters çevrilir. (Bu şekilde y-ekseni üzerindeki f dönüşümünün etkisi y-ekseninin orijinal yönlendirmesini ters çevirecektir.)



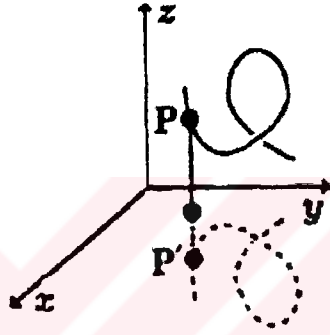
Şekil 2.2.11 Sağ ve Sol Yönlenme

Şekil 2.2.11 de görüldüğü gibi R^3 uzayında xyz -eksenine göre sağ-el kuralı vasıtasıyla yapılan bir yönlendirmenin tayininin doğal bir yolu daha vardır.

TANIM 2.2.3.2: K_1 ve K_2 iki düğüm olmak üzere, K_1 düğümünü K_2 düğümüne dönüştüren R^3 ün yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizmi varsa, K_1 ve K_2 düğümlerinin denk olduğunu söyleriz.

Şimdiye kadar Tanım 2.2.3.1 ve Tanım 2.2.3.2 başlığı altında denkleğin iki tanımını yapmamıza rağmen matematiksel anlamda bu tanımlar aynıdır. Bu denkleğin ispatı Kawauchi'nin "A Survey of Knot Theory" adlı eserinde verilir (Kawauchi'nin ispatında kullanılan dönüşümün bir PL dönüşümü olduğu kabul edilmez)[Kawauchi, A.,1996].

Örnek 2.2.2 deki (Öklid) uzaylar 2-boyutludur. Ancak, bu uzayları bir üst boyutta düşünürsek, bu durumda sabit bir nokta (veya sabit bir eksen) etrafındaki bir dönme ve paralel ötelemenin R^3 ün yönlendirmesini koruyan oto-homeomorfizmlerin örnekleri olduğunu görmek zor değildir. Ancak, xy -düzlemine göre, $j(x, y, z) = (x, y, -z)$ dönüşümü ile verilen ayna görüntüyü gözönüne alırsak, bu durumda, bu dönüşüm yönlendirmeyi ters çevirir. xy -düzleminin bir ayna olduğu kabul edildiği için, j dönüşümünü, Şekil 2.2.12 de görüldüğü gibi P noktasının aynada P' noktasına yansması olarak düşünebiliriz. Aynı şekilde sağ-el kuralına göre üç eksen, sol-el kuralına göre oluşan üç eksene yansır (dönüşür). Bu yüzden j yönlendirmeyi korumaz.

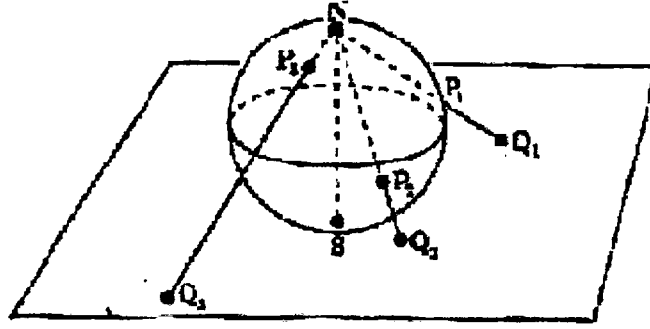


Şekil 2.2.12 P noktasının Ayna Görüntüsü

Genelde, R^3 deki bir keyfi noktayı E düzlemine göre bu noktanın yansması olan noktaya dönüştürebiliyorsak, bu j dönüşümünün E düzlemine göre bir ayna görüntü (veya bir simetri) olduğunu söyleyebiliriz. K düğümü üzerinde j ayna görüntüsünün etkisiyle elde edilen $j(K)$ görüntüsü, K nin ayna görüntüsü olarak adlandırılır. Eğer K tayin edilmiş bir yönlendirmeye sahipse, açıkça K nin yönlendirmesinden K nin ayna görüntüsü için de bir yönlendirme tayin ederiz.

Şimdi her ikisinin de yönlendirmesi tayin edilmiş, K_1 ve K_2 şeklinde iki düğüm düşünelim. Ne K_1 in ne de K_2 nin yönlendirmesini değiştirmeyen, R^3 ün yönlendirmeyi koruyan bir oto-homeomorfizmi vasıtasıyla K_1 i K_2 ye dönüştürebilsek, K_1 ve K_2 düğümlerinin yönlendirmeyle denk olduğunu söyleyebiliriz.

Hatırlayacağımız gibi basit düğüm hareketlerine bağlı olarak tarif edilen Tanım 2.2.1 den ziyade, Tanım 2.2.2 üzerinde dikkatimizi yoğunlaştırmamızın sebebi, Tanım 2.2.2 in sezgisel olarak ve açıkça birçok düğüm denkleğini görmemizi sağlamasıdır.



Şekil 2.2.13 Düzlem ve S^2 Arasındaki Eşleme

Şekil 2.2.13, düzlemin tümü ve kuzey kutbu çıkarılmış 2 boyutlu S^2 küresi arasında bire-bir bir eşlemeyi gösterir. Böylece eğer R^2 düzlemine "sonsuzda bir nokta" yani ∞ noktasını ilave edersek bu durumda $R^2 \cup \infty$ ve S^2 homeomorf uzaylar olurlar. Benzer olarak 3 boyutlu S^3 küresi, R^3 e sonsuzda ilave edilen ∞ noktasıyla elde edilen $R^3 \cup \infty$ uzayına homeomorf olur. Bazen bir düğümün R^3 de bulunması yerine S^3 de bulunmasını düşünmek daha uygun olacaktır. (Tanım 2.2.2 de R^3 ile S^3 ün yer değiştirmesi gerekir. Bu sebepten K düğümünün sonsuzda bir nokta ihtiva etmediğini kabul ederiz.)

Bu yeni tanımı kullanarak aşağıdaki teoremin sağlandığını görebiliriz.

TEOREM 2.2.3.1: Eğer S^3 içinde bulunan K_1 ve K_2 düğümleri denk iseler o zaman onların tümleyenleri olan $S^3 - K_1$ ve $S^3 - K_2$ homeomorftur[Murasugi,K.1996].

2.2.4 Halkalar

Şimdiye kadar düğümler kümesi olarak adlandırdığımız kendi başına ilginç olan kümeye spesifik olarak baktık. Bu kısımda bu kümenin bir genelleştirmesi yapılacaktır. Yani, çok sayıda düğümün birbiriyle bağlandığında ne olacağını inceleyeceğiz.

TANIM 2.2.4.1: Bir halka, biri diğerini kesmeyen düğümlerin sonlu ve sıralanmış bir koleksiyonudur. Her bir K_i düğümüne halkanın bir bileşeni adı verilir.

TANIM 2.2.4.2: Eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa, $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ ve $L' = \{K'_1, K'_2, \dots, K'_m\}$ halkaları denktirler (veya eşittirler).

(1) $m = n$ yani L ve L' aynı sayıda bileşene sahiptir.

(2) Sonlu sayıda basit düğüm hareketini uygulayarak L yi L' ne dönüştürebiliriz.

Daha doğrusu basit düğüm hareketlerini kullanarak K_1 i K'_1 ne, K_2 yi K'_2 ne, ve K_m yi K'_m ne dönüştürebiliriz ($m = n$) (Bir bileşen üzerinde yapılan hareketin diğer herhangi bir bileşeni kesmediğini vurgulamamız gerekir).

Yukarda verilen (2) şartı yerine (2)' şartını yazabiliriz.

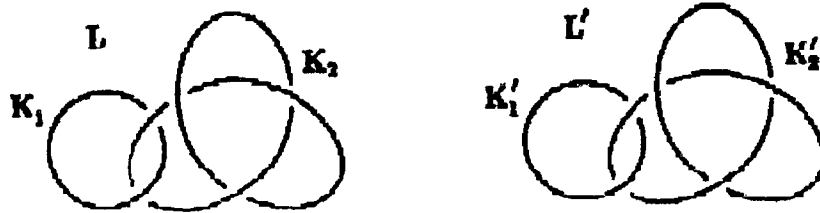
(2)' $j(K_1) = K'_1, j(K_2) = K'_2, \dots, j(K_m) = K'_m$ olan ve R^3 ün yönlendirmesini koruyan bir j oto-homeomorfizmi vardır.

Daha açık bir şekilde söylenirse, halkaların denkliği bileşenleri nasıl sıraladığımıza da bağlı olacaktır. Bileşenleri yeniden sıralama imkanına sahip olduğumuzdan genelde böyle bir şartı koymak gereksizdir. Genellikle bu sebepten (2)' aşağıdaki (2A) ile değişmiştir.

(2A) $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$ yi $K'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_m$ ailesine dönüştüren ve R^3 ün yönlendirmesini koruyan bir oto-homeomorfizm vardır.

Biz daha çok (2)' den ziyade (2A) şartını kullanacağız. Eğer halkanın her bir bileşeni yönlendirilmiş ise bu durumda denklik tanımları düğümdekinin tamamen bir genişlemesi olacaktır.

ÖRNEK 2.2.4.1: Şekil 2.2.14 deki L ve L' halkaları tamamen aynı olduğundan, bu halkalar denktir. Bununla beraber eğer, L nin bileşenlerinin sırasını değiştirirsek, bu durumda Tanım 2.2.3.2 nin (2) şartı sağlanmaz ve halkalar denk olmaz. Fakat (2A) şartı sağlanmıştır. Böylece onları denk olarak düşüneceğiz.



Şekil 2.2.14 Denk Halkalar

Şimdi Şekil 2.2.15 de L ve L' ne bir yön verelim. İki halkaya bir yön verilmesi (2) şartının sağlanmamasına sebep olur. Böylece bu yönlendirilmiş halkalar denk olmaz.



Şekil 2.2.15 Yönlendirilmiş Halkalar

Bu sebepten düğümlerin denkliği probleminde göre daha çok karışık olan halkaların denkliği problemini incelerken daha dikkatli olmalıyız.

Beklenileceği gibi halkaların durumuna göre aşikar düğüm kavramını genişletebiliriz. Örneğin, n -bileşenli aşikar halka gibi. Halkaların genişlemesinde uygun halka n -ayrık aşikar düğümden meydana gelir Şekil 2.2.16.



Şekil 2.2.16 n -bileşenli Aşikar Halka

Her bir n için sadece bir aşikar n -bileşenli halka vardır (aşikar halkayı yönlendirme fazla işe yaramaz). Düğümler için verilen önermeler halkalar içinde genişletilebilir.

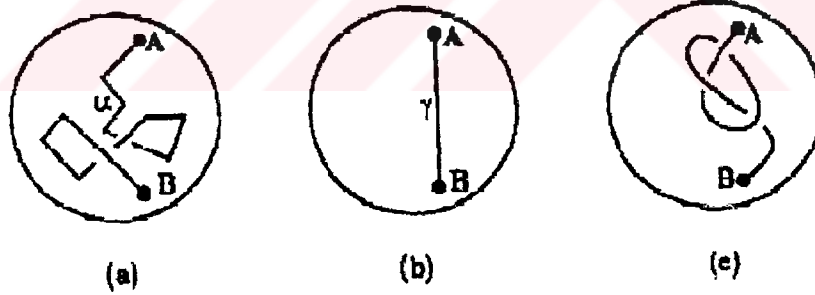
2.2.5. Düğüm Ayrışımı ve Bir Düğümün Yarı Grubu

Bütün düğümleri ihtiva eden küme üzerinde bir toplam veya çarpım işlemi tanımlayabiliriz. Bu küme bahsettiğimiz böyle bir işlem vasıtasıyla grup oluyorsa, teorik grup tekniklerini düğüm teorisine uygulayabiliriz. Bu durum mümkünse, bu teknikleri uygulamadan önce böyle işlemler tanımlamamız gerekir. Bu nedenle bu bölümde, iki düğümün toplamı olarak adlandırılan, iki düğümden tek bir düğümün nasıl elde edilebildiğine göz atacağız. Bu yaklaşımdan bir sonuç çıkarmak için ters işlem üzerine

yoğunlaşacağız. Örneğin, bir düğümü (veya halkayı) daha basit iki düğüme ayrıştıracağız.

Şimdi, S^3 de (veya R^3) bir S küresini ve S ile sınırlanmış, örneğin, sınırı S olan 3-boyutlu, B^3 topunu gözönüne alalım. B^3 ün içinde, A, B uç noktaları S yüzeyinde bulunan bir α basit eğrilmiş doğrusunu (aslında, poligonal bir doğru) alalım. Eğer bu α eğrisi S yi sadece A ve B noktalarında kesiyorsa, Şekil 2.2.17 de de görüleceği gibi, bu eğri, (1,1)-tangle olarak adlandırılır. ((n,n)-tangles gibi, genelleştirilmiş tanglesları daha sonraki kısımlarda vereceğiz). Bir (1,1)-tangle nin basit kapalı eğrilere bölünmüş olabileceğine dikkat etmemiz gerekir.

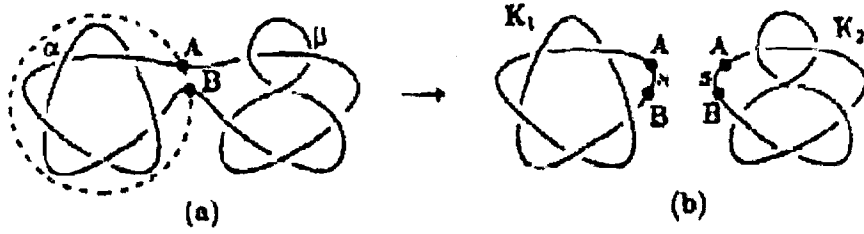
B^3 ün içinde bulunan α düğümlenmiş (1,1)-tangle'nin parçalarına basit düğüm hareketlerini uygulayabiliriz. Bunu yaparak da, sabitlenmiş A ve B noktalarına sahip γ eğrisini, Şekil 1.2.17(b) de görüldüğü gibi (1,1)-tangle'a değiştirdiğimizi düşünebiliriz. Böyle bir γ eğrisi bir aşikar (1,1)-tangle olarak adlandırılır. Burada Şekil 2.2.17(c) aşikar olmayan (1,1)-tangle'a örnek teşkil ederken, Şekil 2.2.17(a) ve Şekil 2.2.17(b) de aşikar (1,1)-tangle örnekleridir.



Şekil 2.2.17 (1,1)-tangle Örnekleri

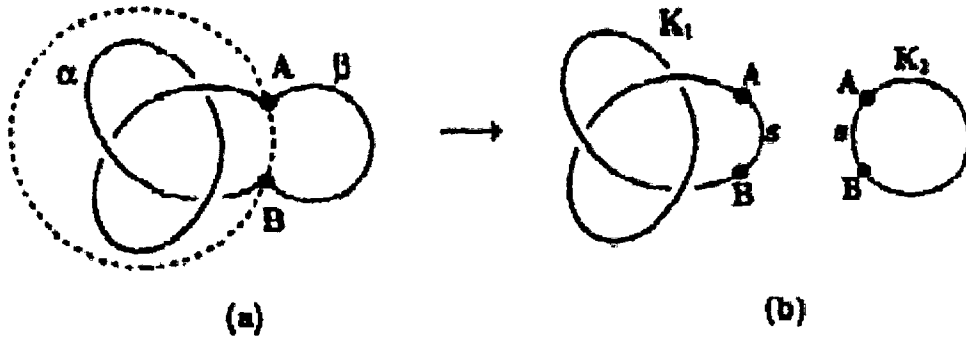
K nin S^3 de bir düğüm (veya halka) olduğunu kabul edelim. Üstelik, K yi tam olarak A ve B şeklinde iki noktada kesen (dik açıda) bir 2-boyutlu S küresinin mevcut olduğunu farz edelim. S nin, yukarıda tanımlanan S nin rolünü üstlendiğini fark edebiliriz. Ancak K , S^3 de bulunduğu için, K, S vasıtasıyla, Şekil 2.2.18(a) ve Şekil 2.2.18(b) de görüldüğü gibi biri S nin içinde diğeri S nin dışında bulunan α ve β şeklinde iki (1,1)-tangles'a bölünür (S , biri S den ve onun içinden, diğeri S den ve onun dışından oluşmuş iki 3-boyutlu topun sınırı olduğu için, iki (1,1)-tangles meydana gelir). S^3 ün, sınırlarına 2-boyutlu küre diyebileceğimiz, sınırları boyunca birbirlerine yapıştırılmış iki

(3-boyutlu) toptan yapıldığını düşünebiliriz. Eğer boyutu bir aşağı düşürsek, yapıştırma işlemi daha kolay anlaşılır. Eğer iki disk alır ve onları sınırları boyunca yapıştırırsak ki burada sınırlar çemberlerdir, bu durumda iki boyutlu küre elde edebiliriz). Şimdi S de bulunan bir s basit poligonal doğrusu vasıtasıyla A yı B ye bağlayalım. Böylece s yi α ya ve s yi β ya birleştirerek, sırasıyla K_1 ve K_2 düğümlerini elde ederiz.



Şekil 2.2.18 Düğümlerin Ayrışımı

Göstermiş olduğumuz şey bir K düğümünün Şekil 2.2.18 deki gibi K_1 ve K_2 şeklinde iki düğüme ayrışabilmesidir. s nin seçimi keyfidir. Çünkü, S üzerinde bulunan bir başka basit poligonal doğru vasıtasıyla A yı B ye bağlayabiliyorsak, K yi bir kez daha K'_1 ve K'_2 denen iki düğüme ayrıştırabiliriz. K_1 ve K_2 ile K'_1 ve K'_2 nün denk düğümler olduğunu görmek oldukça kolaydır. α veya β nın biri aşikar bir (1,1)-tangle ise, K'_1 aşikar bir düğümdür. Böyle durumlarda, K_1 ve K_2 , tam anlamıyla söylersek, K nin "gerçek" bir ayrışımı değildir (Bakınız Şekil 2.2.19).



Şekil 2.2.19 K nın Ayrışımı

Aslında K ve K_1 denktir, bu yüzden, K nin daha basit düğümlere ayrışabildiğini düşünmeyeceğiz. K için bir gerçek (aşikar olmayan) ayrışım bulunamadığından, K nin

asal düğüm olduğunu söyleyebiliriz. Buradan, bir K düğümü ya asal bir düğümdür, ya da aşikar olmayan en az iki düğüme ayrışabilir. Bu aşikar olmayan düğümler, ya kendi kendine asal ya da bizim tarafımızdan asallaştırılarak, aşikar olmayan düğümlere, birisi ya da diğeri ya da her ikisi de ayrışabilir. Bu işlemi bir sonraki, asal olmayan düğümler için sürdüreceğiz. Bu işlem sonsuzluk durumunda sürdürülemeyecektir. Aslında bu işlem yalnız sonlu değil aynı zamanda asal düğümler içerisinde bir düğümün tek bir ayrışımına yol açar. Bu durum kısaca aşağıdaki teoremle ifade edilir.

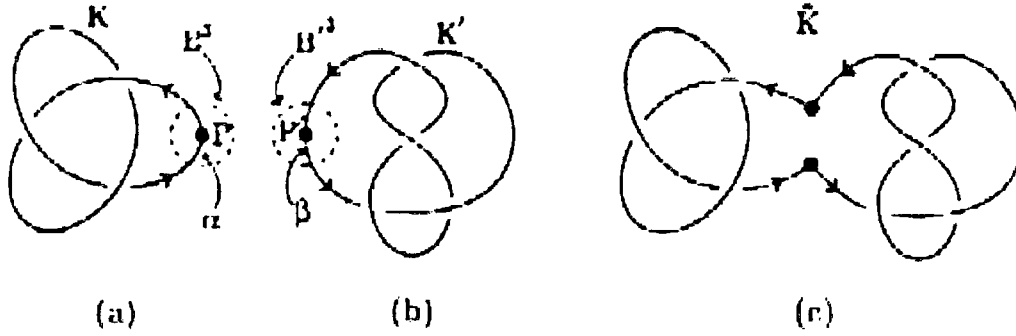
TEOREM 2.2.4.1: (Düğümün Ayrışımının Varlığı ve Tekliği) (1) Herhangi bir düğüm sonlu sayıda asal düğüme ayrışabilir.

(2) Bu ayrışım mertebesi hariç tektir. Yani K_1, K_2, \dots, K_m ve K'_1, K'_2, \dots, K'_m şeklinde iki halde K yi ayrıştırabildiğimizi söyleyebiliriz. Böylece $n = m$ ve üstelik, K_1, K_2, \dots, K_m nin indis sayısını uygun bir şekilde seçersek $K_1 \approx K'_1, K_2 \approx K'_2, \dots, K_m \approx K'_m$ olur.

Bu teoremin ispatı Schubert'te [Schubert,H.,1949] bulunabilir. Yukarıdaki teorem halkalar için de sağlanır.

Şimdi yukarıdaki ayrışımın tersine sebep olan birleşmeyi düşünelim. Esasen aradığımız şey iki düğümün toplamıdır. Ancak ilk olarak bu toplamın ayrışım işleminden neden daha zor olduğunu açıklayalım. Örneğin iki halka alırsak birleştirmeye ihtiyaç duyduğumuz bu halkanın birleşimi hiç de net değildir. Şöyle ki bu halkaların toplamı olan tek bir halka elde edilebilir. Düğümlerle çalışırken de üstesinden gelinmesi gereken birçok engel vardır. Bir düğüm üzerinde yönlendirmeyi ters çevirirsek, bir düğümün yönlendirmeyi koruyan oto-homeomorfizm vasıtasıyla orijinal yönlendirmeli düğüme mutlaka denk olmayacağını biliyoruz. İki düğümü birleştirdiğimiz zaman onların yönlendirmeleri önemli olur. Yönlendirilmiş bu iki düğümlerle ilgili engelin nasıl üstesinden geleceğimizi göstereceğiz. P nin S^3 de bir K düğümü üzerinde bir nokta olduğunu farzedelim. Burada P yi Şekil 2.2.20 (a) (b) de de görüldüğü gibi aşağıdaki özelliklere sahip çok küçük yarıçaplı B^3 topunun merkezi olarak düşünebiliriz.

- (1) K tam olarak (dik açıda) B^3 sınırlı küresinin yüzeyindeki iki noktayı keser.
- (2) B^3 ün içinde K dan elde edilen a, (1,1)-tangle aşikar bir tangle'dir.



Şekil 2.2.20 Dügümlerin Birleşimi

Benzer olarak diğer bir 3-boyutlu S^3 küresinden bir başka K' düğümü için, bir P' noktası seçebiliriz. Yukarıdaki gibi $B^{3'}$ küresi Şekil 2.2.20(b) de görüldüğü gibi bir β aşık (1,1)-tangle K' den elde edilir. Doğal bir şekilde K ve K' den elde ettiğimiz sırasıyla α ve β (1,1)-tangle'leri için bir yönlendirme tayin edebiliriz. $\overline{B^3}$, B^3 ün iç noktalarını S^3 den çıkararak elde edilen top olsun. Benzer olarak $\overline{B^{3'}}$ de $\overline{B^3}$ ün iç noktalarının S^3 den çıkarılmasıyla elde edilen top olsun bu topların her birinin yüzeyi bir (2-boyutlu) küredir. Eğer biz bu topları, küresinin yönlendirmesini baştan başa ters çeviren bir homeomorfizm uygulayarak bu küre boyunca iki topu yapıştırırsak 3-boyutlu S^3 küresini elde etmiş oluruz. Bu yapıştırma işlemi α ve β nin uç noktalarını birleştirir. Böylece bu yeni, tek, yönlendirilmiş K düğümü bu 3-boyutlu S^3 küresinde biçimlenir (Şekil 2.2.20(c)). Bu inşa nedeniyle bu K düğümünün ya K ya da K' düğümünün orijinal yönlendirmesiyle çelişki teşkil etmemektedir.

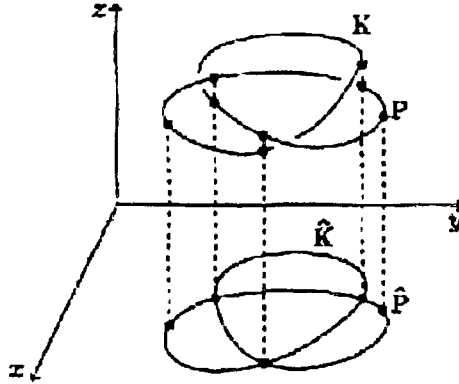
Yukarıdaki işlemle meydana gelen \hat{K} düğümü K ve K' düğümünün toplamı olarak adlandırılır ve $K \# K'$ ile gösterilir. Üstelik bu $K \# K'$ toplamı orijinal olarak seçilen P ve P' noktalarından bağımsızdır. Böylece $K \# K'$ toplamının K ve K' ile tek bir şekilde tayin edildiğini söyleyebiliriz. Dügümlerin toplamı tanımından aşağıdaki önerme kolayca söylenebilir.

ÖNERME 2.2.4.1: İki düğümün toplamı komütatiftir. Yani, $K_1 \# K_2 = K_2 \# K_1$ dir. Daha açık olarak, $K_1 \# K_2$ ve $K_2 \# K_1$ yönlendirmeleriyle denktir. Ayrıca birleşme kanunları da sağlanır. $K_1 \# (K_2 \# K_3) \equiv (K_1 \# K_2) \# K_3$.

Yukarıdaki düğümlerin toplamı tanımı bütün düğümlerin \mathcal{A} kümesi için tanımlanır. Ancak bu tanım \mathcal{A} yı bir grup yapmaz. Bunun sebebi aşık düğümün \mathcal{A} nın birim elemanı olmasına rağmen \mathcal{A} nın ters elemanı ihtiva etmemesindedir.

2.2.6. Regüler Diyagramlar ve Alterne Düğümler

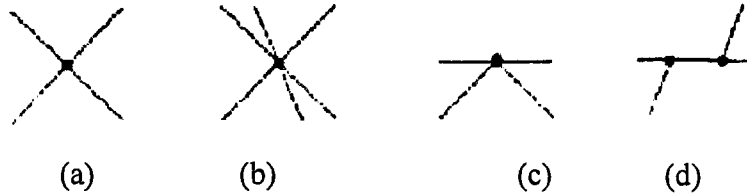
R^3 deki $P(x, y, z)$ noktasını xy -düzlemindeki $\hat{P}(x, y, 0)$ noktasına izdüştüren dönüşümü p ile gösterelim. Şekil 2.2.21



Şekil 2.2.21 Düğümün İzdüşümü

Eğer K bir düğüm(veya halka) ise $p(K) = \hat{K}$ ya K nin izdüşümü denir. Dahası K bir yöne sahipse o zaman \hat{K} da K nin yönüne bağlı bir yön kazanır. Bununla beraber \hat{K} birkaç arakesit noktasına sahip olduğundan düzlemde basit kapalı bir eğri değildir. K düğümü üzerinde birkaç basit düğüm hareketi yapmak suretiyle aşağıdaki şartları verebiliriz.

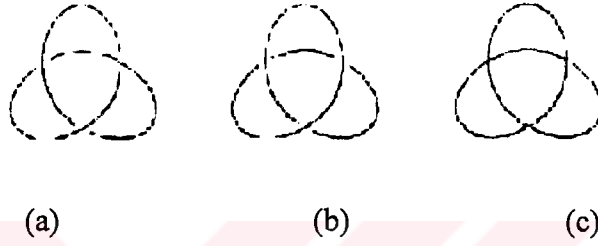
1. \hat{K} sonlu sayıda arakesit noktasına sahiptir.
2. Eğer Q , \hat{K} nin bir arakesit noktası ise Q nun $p^{-1}(Q) \cap K$ ters görüntüsü K da iki noktaya sahiptir. Yani Q , \hat{K} nin bir katlı noktasıdır (Bakınız Şekil 2.2.22.(a)). Şekil 2.2.2.(b) de gösterildiği gibi ikiden fazla noktaya müsaade edilmez.
3. K nin bir köşesi (düğüm bir poligonal olarak düşünüldüğünde) \hat{K} nin bir katlı noktasına dönüşmez. Şekil 2.2.22(c) ve (d) deki örneklerin ikisinde de bir poligonal doğru \hat{K} nin bir köşesine izdüşmüştür. Bu durumların ikisine de müsaade edilmez.



Şekil 2.2.22 Katlı Nokta

Yukarıdaki şartları sağlayan izdüşümünün bir regüler izdüşüm olduğu söylenir.

İzdüşümün bu katlı noktasında düğümün kendi kendisinin altından mı üstünden mi geçtiği belli değildir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için, düğümün kesim noktasını çizerek, katlı nokta civarında düğümü bir miktar değiştirebiliriz. Böylece düğümün geçit noktasının alttan mı üstten mi olduğu konusunda orijinaline uymasa da gerçek görüntüsünü çizebiliriz. Böyle değiştirilmiş izdüşümler bir regüler diyagram olarak adlandırılır. Şekil 2.2.23(a),(b).

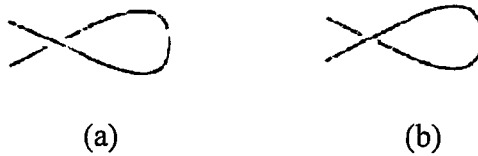


Şekil 2.2.23 Değiştirilmiş İzdüşümler

Bir regüler diyagram aslında düğümün üç boyutlu uzayda nasıl bulunduğunu verir. Yani düzlemde uzaysal bir çizim vermemize imkan verir. Dahası izdüşümde kaybolan bilgiyi elde etmek için regüler diyagramı kullanırız. Örneğin Şekil 2.2.23(c), Şekil 2.2.23(a) ve (b) deki (farklı) iki düğümün izdüşümüdür.

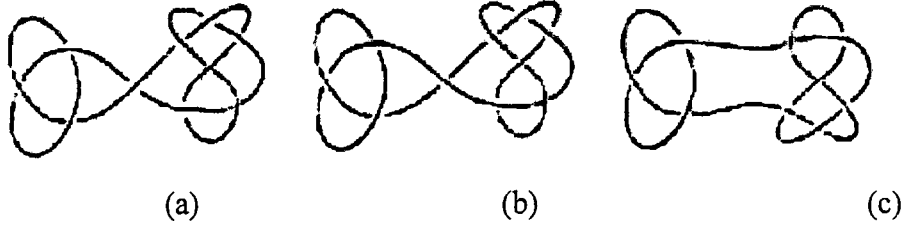
Özel bir K düğümü (veya halka) için regüler diyagram sayısı numaralandırılmaz. Daha kesin olarak, R^3 de bir K düğümünün yalnız bir regüler diyagramı vardır. Bununla beraber bir önceki bölümdeki tartışmamızdan basit düğüm hareketlerini uygulayarak K düğümünden elde edilen, K' düğümü ve K düğümü aynı düğüm olarak düşünülebilir. Böylece K düğümü için regüler bir diyagram olarak K' nün regüler diyagramını düşünebiliriz. Buradan K' düğümü için regüler diyagram sayısı numaralandırılmaz.

Düzenli bir diyagramın Şekil 2.2.24(a) ve Şekil 2.2.24(b) de gösterilen şeklin geçit noktalarına sahip olabilmesi mümkündür.



Şekil 2.2.24 İlmek

Daha genel olarak, iki düğümün (veya halkanın) iki regüler diyagramının tek bir burulmuş şerit ile bağlandığını kabul edelim. Örnek olarak Şekil 2.2.25(a) veya 2.2.25(b) ye bakınız. Gerçekten Şekil 2.2.25(c) de görüldüğü gibi, bu düğüme bir burulma uygulayarak bu merkezci geçit noktalarını kaldırabiliriz. Herhangi bir geçit noktası olmayan bu tipteki regüler bir diyagrama, indirgenmiş regüler diyagram denir.



Şekil 2.2.25 İndirgenmiş Regüler Diyagram

Bir K düğümünün regüler bir D diyagramı üzerinde keyfi bir P noktası alalım ve P noktasını D etrafında bir kez döndürelim. Eğer D nin geçit noktalarındaki P noktası alternatif olarak alt ve üst geçit noktası arasındaki hareketi gösteriyorsa bu taktirde bu regüler diyagrama alterne (regüler) diyagram denir. Şekil 2.2.25 alterne regüler bir diyagram örneğidir. En az bir alterne diyagrama sahip düğüme alterne düğüm denir. Bu düğümlerin karakterlerinin çoğunun bilinmesine rağmen, düğümlerin bu tipleri düğüm teorisinde büyük bir önem taşır. Aşık düğümde alterne bir düğümdür. Çoğu basit düğümler alterne düğümlerdir. Buradan daha düğüm teorisinin ilk zamanlarında bütün düğümlerin alterne düğümler olduğunu düşünebiliriz.

2.3 Düğüm Teorisinin Problemleri

Düğüm teorisi çalışmalarında ortaya çıkan problemler esasen iki kısma ayrılır. Bunları global problemler ve lokal problemler olarak adlandıracağız..

Global problemler bütün düğümler kümesinin kendisinin nasıl davrandığını inceler. Tersine lokal problemler ise verilen bir düğümün sırf kendisi ile ilgilenir. Global problemleri çözmek için genellikle çeşitli lokal problemlerin çözümünü bulmak gerekir. Tersine lokal problemlerin tayini ise global problemlerin içinde bu problemlerin nasıl yer alacağına bağlıdır.

Bu bölümde, bu iki tip problemin örneklerini verecek ve açıklayacağız. Düğüm teorisindeki problemleri global ve lokal problemler şeklinde iki başlıkla kesin bir şekilde sınırlandırmak doğru olmaz.

2.3.1 Global Problemler

Klasik global problemlerin tiplerinden biri sınıflandırma problemidir.

2.3.1.1 Sınıflandırma Problemi

Sınıflandırma problemi, tanım olarak, tam (bütün) bir düğüm tablosu meydana getirme problemidir. Bütün bir tabloyla anlatılmak istenen, önce iki düğümün asla denk olmamasının ve ikinci olarak keyfi bir düğümün bu tablodaki bazı düğümlere denk olduğunun tam olarak ne anlama gelmesidir.

Yukarıda bahsedilen tablo, 13 geçitli asal düğümlere kadar derlenmiştir. Bir sonraki problem bu tabloyu biraz daha genişletmek içindir. Orijinal sınıflandırma probleminden direkt olarak üretilen bir diğer (alt) problem alterne düğümler gibi sadece belli ve özel düğüm tiplerinden bir bütün düğüm tablosu meydana getirmek içindir. Diğer düğüm tipleriyle karşılaştıkça, onları tam olarak sınıflandırıp sınıflandıramayacağımız sorusu kendi kendimize soracağımız soruların daima öncüsü olacaktır.

2.3.1.2 Esas Tahmin

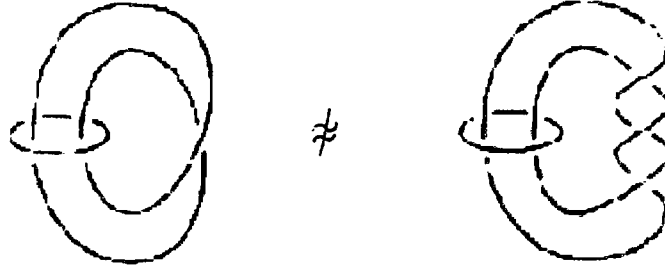
Bu tahmin doğrudan doğruya aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

K_1 ve K_2 düğümleri için, genellikle tümleyen uzayları olarak adlandırılan $S^3 - K_1$ ve $S^3 - K_2$, eğer homeomorf ise, bu taktirde düğümler denktir.

Bu tahmin 1980'lerin sonlarında Gordon ve Leucke tarafından ispatlandı. Bu söylenenlerin bir neticesi olarak, S^3 deki düğüm problemi S^3 deki düğümün şeklini ilgilendiren relatif bir problem olarak adlandırabileceğimiz durumdan artık tümleyen uzaylardaki bir çalışmayı ilgilendiren soyut bir problem haline dönüşür. Bununla beraber bu dönüştürmeyi korkarız ki her zaman yapamayız. Yani relatif problemi soyut

bir problem içine her zaman dönüştüremeyiz. Bu tahminin ters örnek verilerek halkalar için geçerli olmadığı görülür.

ÖRNEK 2.3.1.1: Şekil 2.3.1 deki iki halka denk olmamasına rağmen, onların tümleyen uzayları homeomorftur.



Şekil 2.3.1 Denk Olmayan Düğümler

Genelde düğümler için sağlanan bu sonuçlar halkalar içinde sağlanır. Ancak yukarıdaki örnekte de gösterildiği gibi, bu durumu istismar edemeyiz.

2.3.1.3 Düğüm Sabitleri

İki düğümün denk olup olmadığını tayin etmenin bir yolu olarak düğüm sabitleri çok önemli bir rol oynar. Düğüm sabiti tipleri şimdilik sayısal miktar bakımından sınırsızdır. Bu düğüm sabitleri yaygın olarak grup ve halkalar gibi matematiksel kavramların kullanımına da bağlıdır.

Her K düğümünü, özel bir $r(K)$ niceliği ile işaretlediğimizi farzedelim. Eğer iki denk düğüm için işaretlediğimiz nicelik daima denkse, böyle $r(K)$ niceliği düğüm sabiti olarak adlandırılır. İnceleme altında bazı objeler için işaretlenen bazı matematiksel nicelikler kavramı matematiğin birçok dalında bulunmasına rağmen, düğüm teorisi için şimdilik sınırlı değildir. Galiba en kolay benzer örnek grup teorisinde ortaya çıkar. Grubun mertebesi olarak adlandırdığımız gruptaki eleman sayısı izomorf gruplar için, ayrı ayrı mertebeleri denk olduğu için, bir grup sabitidir.

K ve K' düğümleri denkse, bu durumda K düğümüne sonlu sayıda basit düğüm hareketini uygulayarak K düğümünü K' düğümüne dönüştürebilmenin mümkün olduğunu biliyoruz. Böylece, düğüm sabiti olan $r(K)$ niceliğinin, K düğümüne uygulanan sonlu sayıda basit düğüm hareketinden sonra değişmemesi gerekir. Örneğin bir düğümün kenar sayısının bir düğüm sabiti olmadığı bundan dolayı görülebilir. Genelde bir düğüm sabiti tek yönlüdür. Yani;

eğer iki düğüm denkse \rightarrow sabitleri de eşittir.

İki düğümün sabiti farklıysa bu durumda düğümlerin kendileri denk olamaz. Bu yüzden, bir düğüm sabiti bize iki düğümün denk olup olmadığını gösteren oldukça etkili bir metot verir. Düğüm teorisi tarihinin, düğüm sabitlerinin nasıl keşfedildiğini ve sonraki çeşitli problemlere nasıl uygulandığının cevabını verdiği söylenebilir. Bu şekildeki düğüm sabitlerini bulmak global problemden dolayıdır. Öte yandan, bu düğüm sabitlerinin gerçekte sayısını hesaplamak oldukça zordur. Üstelik bu düğüm sabitlerini hesaplamak için bir metot bulmakta global bir problemdir.

2.3.2. Lokal Problemler

Lokal problemlerin neler olduğu fikrini açıklamak için birkaç örnek verelim.

(1) Bir K düğümü ve onun ayna görüntüsü olan K^* düğümü ne zaman denktir?

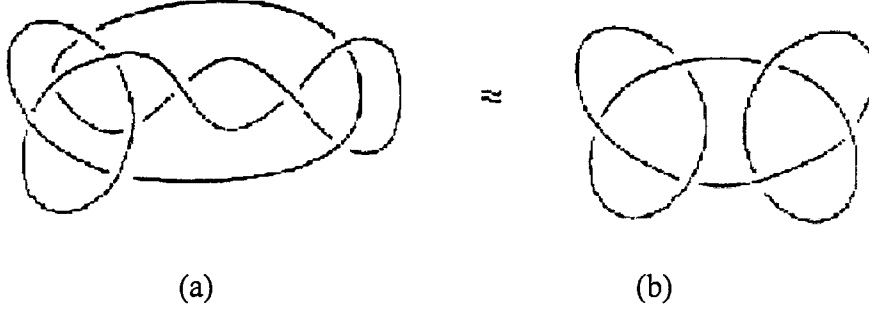
K ve K^* denkse K nin bir amphicherial(bazen achiral düğüm de denir.) olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin sağ-el trefoil düğümü ve onun ayna görüntüsü olan sol-el trefoil düğümü denk olmadığı için trefoil düğümü amphicherial değildir. Öte yandan sekiz şekilli düğüm amphicherialdir. Amphicherial düğümlerin çok özel bir yapısı olduğu için relatif terimlerde çok az bir şekilde kullanılır. Bu (lokal) problem oldukça yoğun bir şekilde çalışılmış ve düğümlerin özel tipleri için çok önemli sonuçlar bulunmuştur.

(2) Verilen bir düğüm ne zaman asaldır.

K_1 ve K_2 nin bağlantılı toplamı olan $K_1 \# K_2$ nin regüler diyagramı K_1 ve K_2 nin regüler diyagramlarını yan yana koyarak ve daha sonra onları iki paralel daire parçası vasıtasıyla bağlayarak yapabiliriz. Bu yüzden bir K düğümü K_1 ve K_2 ye ayrılabilirse o zaman K düğümü Şekil 2.2.20 de gösterilen regüler diyagram tipine sahip olur. Üstelik, teori bu uygulamada bulunmasına rağmen asal olmayan düğümlerin diyagramları, genel

olarak böyle bulunamadığı için bir düğümün asal olup olmadığı regüler diyagramdan çıkaramayız.

ÖRNEK 2.3.2.1: Şekil 2.3.2 de gösterilen K düğümünün regüler diyagramı Şekil 2.2.25 formunda değildir. Fakat K asal düğüm değildir.

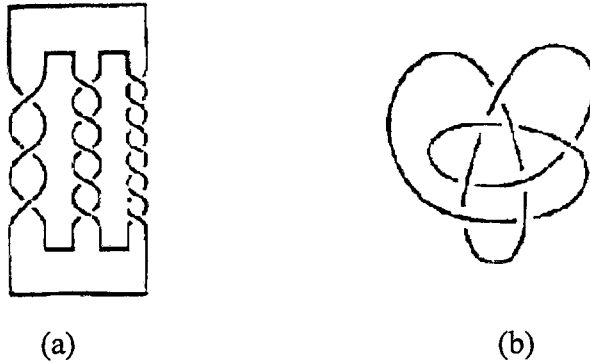


Şekil 2.3.2 Asal Olmayan Düğüm

(3) Bir düğüm ne zaman ters çevrilir.

Zıt yönlü olan iki farklı düğümü işaretleyebiliriz. Bu düğümlerin birini K ile diğerini de $-K$ ile gösterelim. Biz K ve $-K$ nin denk olup olmadığını belirlemeyi isteriz. K ve $-K$ denk olduğu zaman K nin ters çevrilebilir olduğu söylenir. Az sayıda geçit noktasına sahip düğümler genelde ters çevrilebilirlerdir.

Ters çevrilir düğümlerin varlığı ilk olarak H. F. Trotter tarafından 1963'de gösterildi. Şekil 2.3.3(a) daki düğüm Trotter tarafından verilen bir örnektir. Aşağıda verilen çoğu ters çevrilir düğümler son zamanlarda bulundu.



Şekil 2.3.3 Ters Çevrilebilen ve Çevrilemeyen Düğümler

1963 yılında aksi düşünülmesine karşın şimdi neredeyse bütün düğümlerin ters çevrilemez olduğunu söylemek kolaydır. En basit ters çevrilemeyen düğüm Şekil 2.3.3 (b) de gösterilmiştir.

(4) Bir düğümün periyodu nedir?

z – eksenini etrafında p açısıyla Şekil 2.3.4(a) da ki sekiz şekilli düğümü döndürürsek, şekil orijinal şekline dönecektir. Böylece bu düğümün 2 periyoda sahip olduğu söylenebilir. Şekil 2.3.4(b) de ki sol-el trefoil düğümü z – eksenini etrafında $\frac{2\pi}{3}$ açısıyla döndürülürse bu düğümde orijinal şekle dönecektir. Genelde, düğümün orijinal şeklini elde etmek için belirli bir eksen etrafında $\frac{2\pi}{n}$ açısıyla döndürürsek, bu düğümün n periyoda sahip olduğunu söyleriz. Bu durumda, lokal problem verilen bir düğüm için bütün periyotları belirlemektir. Bu problem aynı zamanda geniş olarak çalışılmış ve düğümlerin özel tipleri için tamamen çözülmüştür.



Şekil 2.3.4 Düğümün Periyodu

(5) Bir düğüm ne zaman bir dilim düğümdür.

Bu şimdikiye kadar tartıştığımız, lokal problemlerin belki de en zorudur. Burada pratik olarak dilim düğüm olabilmesi için sadece gerekli birkaç şartın bilinmesi gereklidir. B^4 de sınırı D olan ve sınırında hiçbir singüler nokta bulunmayan düğüm dilim düğüm olarak adlandırılır. Üstelik dilim düğümleri belirlemek için etkili metotlarda yoktur. Bu yüzden lokal problem oldukça zorlu gibi görülür.

2.4 Dügüm Polinomları

Dügüm polinomları Dügüm Teorisi' nin çalışma konularından olan sınıflandırma probleminde kullanılan araçlardan birisi olup, dügüm invaryantları arasında önemli yer tutar. Alexander'den [Alexander,J,W. 1928] başlayarak günümüze kadar çeşitli Matematikçiler tarafından birçok polinom verildi.

2.4.1. Alexander Polinomu

Alexander 1928 de düğümler ve halkalar için $\Delta(t)$ ile gösterilen bir polinomu tanımladığı zaman pozitif geçişe sahip L_+ halkasının (onun pozitif geçişinin negatife çevrilmesiyle elde edilen) L_- halkasının ve (geçitlerin elimine edilmesiyle elde edilen) L_0 halkasının polinomları arasında

$$\Delta_{L_+}(t) = \Delta_{L_-}(t) + (t - 1)\Delta_{L_0}(t)$$

şeklinde bir bağıntı olduğunu keşfetti[Alexander,J.W.1928].

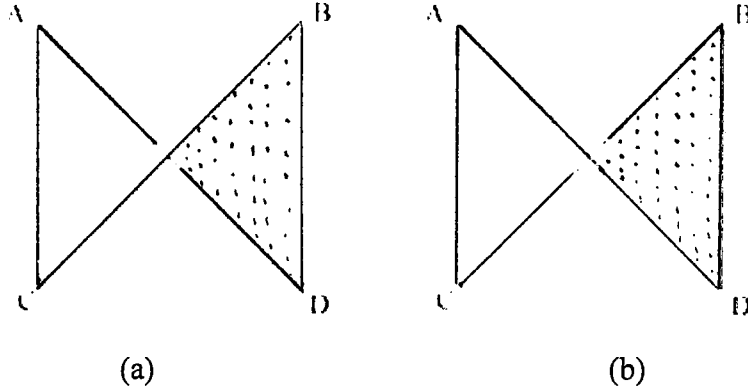
Yukardaki tanıma göre $\Delta_L(t)$, L nin regüler diyagramının ve L nin projeksiyonunun tümleyenindeki bölgelerin seçimine bağlı olan ve $\mp t^n$ çarpımı kadar değişen bir sabittir.Gerçekten Alexander bu bağıntının aynı dügüm için L_+ ve L_- nin ayrılmış iki yüzeyi işaret ettiğini ve $\Delta_{L_0}(t)$ nin 0 olduğunu gözlemledi.

Bir dügümün Alexander matrisini bulmak için Seifert matrislerini ve bunu gerçekleştirmek için de Seifert yüzeyini sonrada Seifert grafını elde etmek gerekir. Buradan, eğrilerin halkalanma sayılarından hareketle Seifert Matrisi bulunur. Bu noktadan sonra bir dügümün Alexander polinomu elde edilir.

Genelde sınırı yönlendirilmiş K dügümü (veya halkası) olan bir yönlendirilmiş bağlantılı yüzey K nın Seifert yüzeyi olarak belirtilir. F nin yönlendirmesi onun sınırı olan K nın yönlendirmesinden tabii olarak oluşur. Bu şekilde inşa edilen Seifert yüzeyi K nın D regüler diyagramına bağlıdır. Böylece bu yüzeye K nın D regüler diyagramından elde edilen Seifert yüzeyi denir.

Bir dügümden Seifert yüzeyi elde edilirken, dügümün geçit noktaları kesme işlemiyle kesilerek bağlantısız yüzeyler elde edilir. Bu disklerden basit bir yüzey elde etmek için,

verilen bir basit burulma ile bu disklere küçük şeritler iliştiirmemiz gerekecektir. Bunu yapmak için ilk olarak $abcd$ karesi alalım ve ona bir basit pozitif veya negatif burulma verelim(sırasıyla Şekil 2.4.1 (a) ve (b) deki gibi). Bu burulmuş kareler istenilen şeritlerdir.



Şekil 2.4.1 Burulmuş Kareler

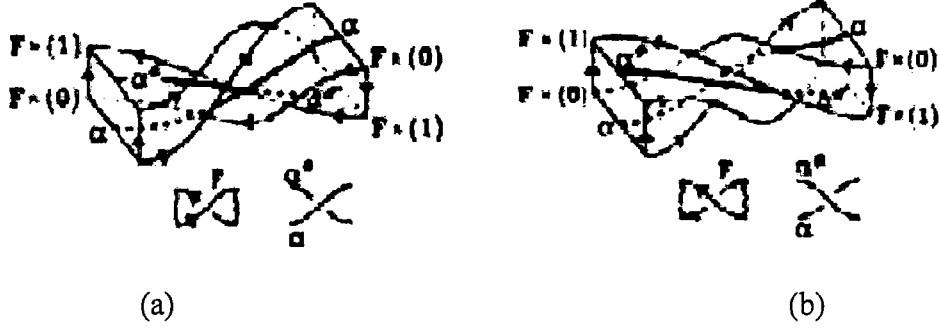
Eğer D nin bantlarına pozitif (negatif) bantları iliştiirsek, (bu bölgeleri kesmeden önce bu bölgeler pozitif (negatif) geçit bölgelerine karşılık gelir) bir bağlantılı yönlendirilebilir F yüzeyi elde edilir. (K nın bir halka olması halinde eğer K nın izdüşümü bağlantılı olacak şekilde K yı değiştirirsek yukarıdaki metotla yine bir bağlantılı yüzey elde ederiz). Bu yüzeyin sınırı açıkça orijinal K düğümüdür. Yukarıdakilere ilaveten K aynı zamanda bir yönlendirilebilir yüzeydir.

TEOREM 2.4.1: Bir keyfi yönlendirilmiş K düğümü verildiğinde (veya halkası) R^3 de sınırı K olan bir yönlendirilmiş, bağlantılı F yüzeyi vardır(Yani K yı geren bir yönlendirilmiş bağlantılı yüzey vardır) [Murasugi,K.1996].

Şimdi F yüzeyinin yukarıda tanımlandığı gibi K düğümünün disk ve bantlarından elde edilen Seifert yüzeyi olduğunu kabul edelim. Eğer, her bir diski bir noktaya büzersek ve aynı zamanda geniş bantları dar düğümlere çekersek bu nokta ve doğrulardan bir graf elde edilir. Öyle ki bu grafa K nın Seifert grafi adı verilir ve $\Gamma(D)$ ile gösterilir.Gerçekte bu graflar düzlemde bulunur. Yani onlar düzlemsel graflardır.

K düğümünü oluşturan ve F yüzeyinin sınırını teşkil eden bu eğriler K düğümünün belli karakteristiklerini gösterecektir. (Bu durumda Seifert yüzeyinin S^3 de ya da R^3 de olması gerekir). Bu eğriler bize bir düğüm sabiti verecektir. α_1, α_2 nin kesişme

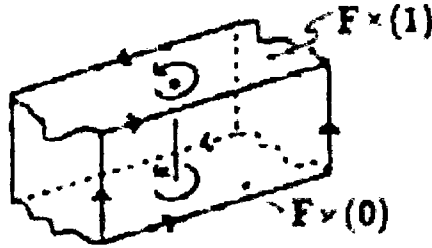
noktalarına sahip olabileceği kuvvetle muhtemeldir. Böylece $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi bir halka değildir. Ancak yeni $\alpha_2^\#$ eğrisi α_2 ye paralel olacak şekilde α_2 yi yüzeyin üzerinden biraz kaldırırsak bu kesişme noktalarını ortadan kaldırabiliriz. Böylece $\{\alpha_1, \alpha_2^\#\}$ kümesi halka yapılabilir.



Şekil 2.4.2 Geçit Noktalarının İzdüşümleri

Bu kaldırma işlemini biraz daha kolay anlaşılır yapmak için Şekil 2.4.3 de gösterilen matematiksel yapıları gözönüne alalım.

İlk olarak F yi biraz daha kalınlaştırmamız gerekir. Bir başka deyişle $F \times [0, 1]$ kartezyen çarpımını oluşturalım (Şekil 2.4.4). Bu kalınlaştırma işlemi boyunca hem F hem de $[0, 1]$ aralığının yönlendirilmesinin sağ el kuralına göre yapılmış olması gerektiği gibi işlemlere dikkat etmeliyiz.



Şekil 2.4.4 Yüzeyde Sağ El Yönlendirme

Orijinal F yüzeyi $F \times (0)$ olarak düşünülmüş olabilir ve böylece hem α_1 , hem de α_2 nin $F \times (0)$ da bulunduğunu söyleyebiliriz. Bunu kesinleştirmek için α_1 ve α_2 yi sırasıyla $\alpha_1 \times (0)$ ve $\alpha_2 \times (0)$ olarak adlandırmamız gerekir. Basitleştirmek için orijinal notasyonu el altında bulduracağız ve bu amaç doğrultusunda sırasıyla $\alpha_1^\#$ ve $\alpha_2^\#$ den dolayı $\alpha_1 \times (1)$ ve $\alpha_2 \times (1)$ ile göstereceğiz.

α_1 ve α_2 ye keyfi bir biçimde bir yönlendirme verebiliriz. Bu yönlendirmeler $\alpha_1^\#$ ve $\alpha_2^\#$ üzerinde bir tabii manada yönlendirmeye oluşur. Buradan $lk(\alpha_1, \alpha_2^\#)$ halkalanma sayısını hesaplayabiliriz. Böylece $lk(\alpha_2, \alpha_1^\#)$, $lk(\alpha_1, \alpha_1^\#)$ ve $lk(\alpha_2, \alpha_2^\#)$ halkalanma sayılarını benzer olarak tanımlamakta mümkündür. Bu dört halkalanma sayısı aşağıdaki 2×2 tipinde matris formunda yeniden düzenlenebilir:

$$M = \begin{pmatrix} lk(\alpha_1, \alpha_1^\#) & lk(\alpha_1, \alpha_2^\#) \\ lk(\alpha_2, \alpha_1^\#) & lk(\alpha_2, \alpha_2^\#) \end{pmatrix}$$

Bu M matrisine Şekil 2.4.7 (sağ el yönlenmiş yonca yaprağı) de verilen K düğümünün Seifert matrisi adı verilir. Halkalanma sayıları tam sayılar olduğundan bu matris tamsayıların matrisi denir (dikkat etmeliyiz ki M matrisi α_1 ve α_2 nin yönlendirmelerine bağlıdır, aynı zamanda bu matris K düğümü için bir invaryant değildir).

ÖNERME 2.4.1.: Eğer M bir K düğümünün (veya halkasının) bir Seifert matrisi ise bu durumda

$$|\det(M + M^T)|$$

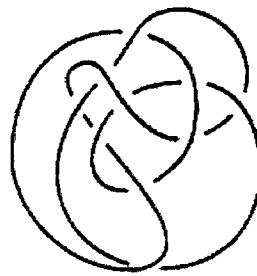
K düğümünün sabitidir. Bu sabite K nın determinanı denir.

Bir düğümün determinant sabiti oldukça eski bir sabittir. Onun faydalı özelliklerinden biri aşikar düğümün determinanı 1 olduğundan (boş matrisin $\det = 1$ olarak tanımlanır) belirli düğümlerin aşikar düğüm olmadığı yıllardan beri ispatlanmaktadır.

ÖRNEK 2.4.1: Yonca yaprağı düğümünün determinanı 3 olduğu için aşikar düğüme denk değildir. Bununla beraber, determinanı 1 olan fakat aşikar düğüme denk olmayan düğümlerde vardır. Şekil 2.4.5(a) ve (b) deki örnekler böyle örneklerdir.



(a)



(b)

Şekil 2.4.5 Aşikar Düğüme Denk Olmayan Düğümler

Bu safhada M nin karakteristik polinomuna benzeyen polinomu gözönüne almak için yukarıdaki determinant yerine $\det(M - tM^T)$ alalım. Determinant şimdi t ye bağılı bir polinomdur.

TEOREM 2.4.3: M_1 ve M_2 bir K düğümünün (veya halkasının) Seifert matrisleri olsun. Eğer r ve s sırasıyla M_1 ve M_2 nin mertebeleri ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$t^{-\frac{r}{2}} \det(M_1 - tM_1^T) = t^{-\frac{s}{2}} \det(M_2 - tM_2^T)$$

Böylece ,eğer M mertebesi k olan K nın bir Seifert matrisi ise bu durumda

$$t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T)$$

K nın bir sabiti olur. Bu sabit K nın Alexander polinomu olarak bilinir ve $\Delta_K(t)$ ile gösterilir. Çoğu durumda $\Delta_K(t)$ negatif üslü terimlere sahiptir. Bununla beraber $\Delta_K(t)$ yi uygun bir çarpanla çarparsak yalnız pozitif üslü bir polinom elde edebiliriz. Bazen, $\Delta_K(t)$ nin yeni yazılışı çalışmalarda tercih edilir.

TEOREM 2.4.4: K bir düğüm olsun. Bu durumda $\Delta_K(t)$ polinomu simetrik Laurent polinomudur. Yani,

$$\Delta_K(t) = a_{-n}t^{-n} + a_{-(n-1)}t^{-(n-1)} + \dots + a_n t^n$$

ÖRNEK 2.4.3: Eğer K sağ-el yönlendirilmiş yonca yaprağı düğümü ise M Seifert matrisi

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dir. Bunun Alexander polinomu ise,

$$\Delta_K(t) = t^{-1} \det(M - tM^T) = t^{-1} \det \begin{pmatrix} -(1-t) & -t \\ 1 & -(1-t) \end{pmatrix}$$

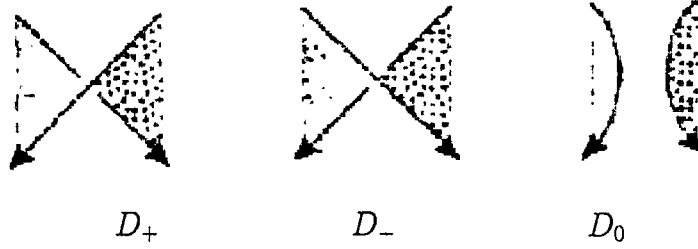
ve buradan $\Delta_K(t) = t^{-1} - 1 + t$ dir.

2.4.2. Conway Polinomları

1970 de Conway [Conway,J,H.,1970] kendine ait bir polinom olan $\nabla_L(z)$ i tanımladı.

TANIM 2.4.2.1: Bir yönlendirilmiş K düğümü (veya halkası) verilsin. Aşağıdaki iki aksiom vasıtasıyla z değişkenine bağılı $\nabla_K(z)$ Laurent polinomunu tanımlayabiliriz:

- (1) K aşıkâr düğüm ise $\nabla_K(z) = 1$ dir.
- (2) K_+, K_-, K_0 düğümlerinin (veya halkalarının) regüler diyagramlarının sırasıyla D_+, D_-, D_0 olduğunu kabul edelim. Bu regüler diyagramlar bir geçit noktasının komşuluğu haricinde tamamen aynıdır. Bu komşulukta regüler diyagramlar Şekil 2.4.6 de gösterilen manada farklıdır (Not: Bu komşuluğun içinde D_+ nın (D_-) olması durumunda sadece bir pozitif (negatif) geçit vardır).



Şekil 2.4.6 D_+, D_-, D_0 'in Diyagramları

Buradan

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z) \quad (2.4.1)$$

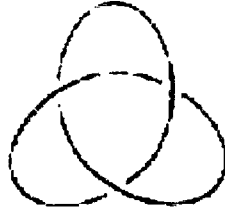
bağıntısı verilir. Yukarıdaki gibi şekillendirilen D_+, D_-, D_0 regüler diyagramları, skein diyagramları olarak adlandırılırlar. K_+, K_-, K_0 in Laurent polinomları arasındaki 2.4.1 bağıntısı Skein bağıntısı olarak adlandırılır. D_+, D_-, D_0 lerden herhangi birisinin diğer ikisiyle yer değiştirilmesi operasyonuna Skein operasyonu denir.

K_+, K_-, K_0 ve bunların regüler diyagramları D_+, D_-, D_0 arasında bir farka gerek olmadığından $\nabla_{K_+}(z)$ nin yerine $\nabla_{D_+}(z)$ yazacağız.

Eğer L bir μ -bileşenli halka ise μ nin tek veya çift olmasına göre $\nabla_L(z)$ bir çift fonksiyon olup $\nabla_{L_+}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ L nin Alexander polinomu olur veya $\nabla_L(z)$ tek ise bu taktirde $(t^{\frac{1}{2}}\nabla_L(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}))$ ifadesi L nin Alexander polinomudur. Hatırlatmalıyız ki $\mu > 0$ ise bu durumda $\Delta_L(t) = (t-1)\Delta_L(t, t, \dots, t)$ ifadesini L nin $\Delta(t_1, t_2, \dots, t_\mu)$ polinomunu Alexander polinomu olarak ifade ederiz.

Herhangi bir düğümün geçitlerinin en çok yarısı kadarının alt üst edilmesiyle (üst geçitlerin alt geçitlere) açılabiliyorsa bu durumda Conway ' in metodu $\nabla_K(z)$ in hesaplanmasında etkili bir metod vermektedir. Bu indirgeme işlemi kökleri K düğümünde olan, dalları ise daha basit düğümlere indirgeyerek açılma ve ayrılmış halkalara doğru giden ağaç şeklinde ve T_K ile gösterilen bir işlemle verilmektedir.

T_K ağacında geçitlerin açılması veya döndürülmesi geçidin pozitif veya negatif olmasına göre (2.4.1) işleminde yatay hareketi \xrightarrow{z} veya $\xrightarrow{-z}$ ile işaretlerken geçitlerin döndürülmesi işlemini düşey hareketle takip ederiz. Sırasıyla düğümlenmemeye ve ayrılmış halkaların Conway polinomlarını 0 ve 1 ile işaretledikten sonra T_K nın dallarından ağaca geriye doğru her halka gözönüne alınarak, (2.4.1) ın kullanımıyla $\nabla(z)$ in değeri belirlenir.



Şekil 2.4.7 Yonca Yaprağı Düğümü

ÖRNEK 2.4.2: Yukardaki şekilde verilen sağ el yönlendirilmiş yonca yaprağının Conway polinomu ise

$$\nabla_K(z) = 1\nabla_O(z) + z\nabla_{OO}(z) + z^2\nabla_O(z)$$

olup $\nabla_O(z) = 1$ ve $\nabla_{OO}(z) = 0$ olduğundan $\nabla_K(z) = 1 + z^2$ dir.

2.4.3. Jones Polinomu

Jones polinomunun tanımını düğümlere bağlı olarak vereceğiz. Çünkü bu tanımlı operatör cebiri veya fiziğin kavramlarına bağlı olarak vermek çok daha fazla tanım ve yeni notasyon verilmesini gerektirecektir. Jones polinomlarının kullanım alanı oldukça geniştir.

TANIM 2.4.3.1: K yönlendirilmiş düğüm ve D de onun regüler diyagramı olsun. Bu durumda K nın $V_K(t)$ ile gösterilen Jones polinomu aşağıda verilen iki aksiyomla tek olarak tanımlanır. Polinomun kendisi \sqrt{t} nin bir Laurent polinomudur. \sqrt{t} negatif üstlere sahiptir ($(\sqrt{t})^2 = t$ olduğu kabul edilir). $V_K(t)$, K nın bir invaryantıdır.

Aksiyom 1. K aşıkardüğümse $V_K(t) = 1$

Aksiyom 2. D_+ , D_- ve D_0 skein diyagramları ise (Şekil 2.4.6) aşağıdaki skein işlemleri sağlanır.

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{D_0}(t) \quad (2.4.2)$$

Özellikle (2.4.1) ve (2.4.2) eşitliklerinin Alexander'in yaptığından farklı olduğunu fakat Jones'in buluşundan çok kısa bir süre sonra Alexander polinomu ve Jones polinomunun kısaltılmış formları arasında beklenmeyen bir bağıntı olduğu keşfedildi. Jones polinomunu açıkladığında Alexander polinomunun pek önemli olmayan yazılışını değiştirdi. Jones polinomunun ispatı yukardaki aksiyoma dayalı olarak Lickorish Millet ve Jones tarafından verildi[Lickorish, W.B.R and et al., 1987],[Jones, V.F.R²., 1989].

Jones polinomunu hesaplayan algoritma Alexander polinomu kısmında verilen Skein ağaç diyagramına benzerdir. Bununla beraber Skein ağaç diyagramını katsayıları farklı olduğundan Jones polinomunun bulunması oldukça uzun işlemlere ihtiyaç duyar. Eğer μ -bileşenli aşık halkaların Jones polinomu, ayrı ayrı halkaların Jones polinomlarının toplamı olarak yazılırsa bu güçlük görülür. O_μ - skein ağaç diyagramının kullanımıyla

$$V_K(t) = f_1(t)V_{O_0}(t) + f_2(t)V_{O_1}(t) + \dots + f_n(t)V_{O_n}(t)$$

olur.

Alexander Polinomu hesaplanması esnasında yukardaki yazılıma benzer bir durum vardır. $\mu \geq 2$ için O_μ nın Alexander polinomunun 0 olduğu bilinirken Jones durumunda temelde aynı kalmakla beraber 0 değildir. Bu yüzden O_μ nın Jones polinomu $V_{O_\mu}(t)$ yi hesaplamak için ilk adımımızdır.

ÖNERME 2.4.3.1: μ bileşenli O_μ aşık halkası için

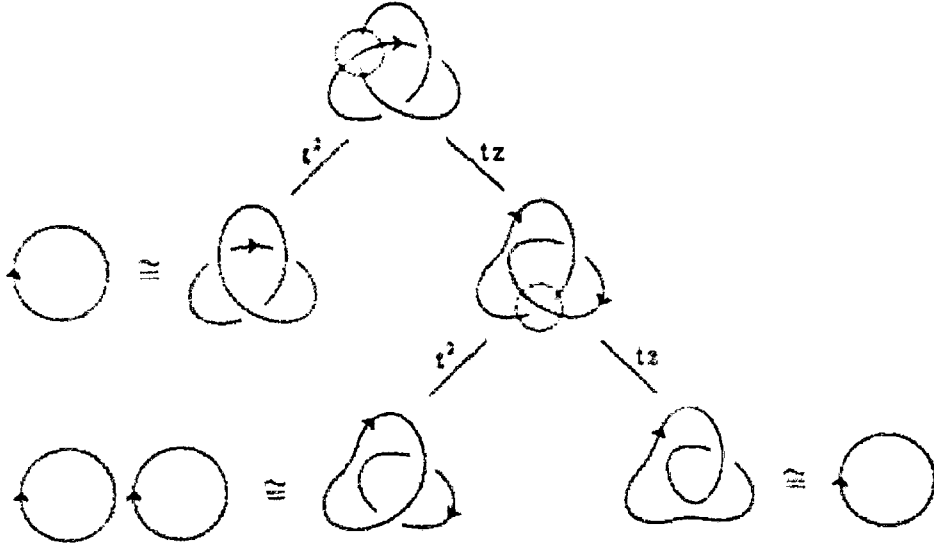
$$V_{O_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1}(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}})^{\mu-2} \quad (2.4.3)$$

olur[Murasugi, K., 1996].

Şimdi Jones polinomunun hesaplanmasının temellerini vermek için bir örnek verelim. Alexander Polinomunun hesaplanması aşamasında aşağıdakileri yazarız.

$$\begin{aligned} V_{D_+}(t) &= t^2V_{D_-}(t) + tzV_{D_0}(t) \\ V_{D_-}(t) &= t^{-2}V_{D_+}(t) - t^{-1}zV_{D_0}(t) \end{aligned}$$

Burada kısalık için $z = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$ olarak yazılmıştır.



Şekil 2.4.7 Yonca Yaprığı Düğümünün Jones Polinomu

ÖRNEK 2.4.3.1: Şekil 2.4.7 de Sağ el yönlenmiş yonca yaprağı düğümünün Jones polinomunun hesaplanması için skein ağaç diyagramını çizdik. Skein ağaç diyagramından

$$\begin{aligned} V_K(t) &= t^2 V_O(t) + t^3 z V_{OO}(t) + t^2 z^2 V_O(t) \\ V_K(t) &= t + t^3 - t^4 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.4.4 Kauffman Polinomu

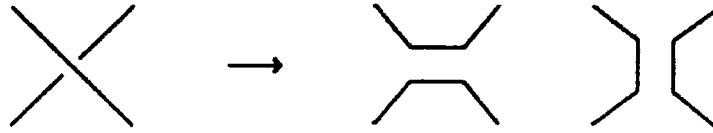
Bu kısımda daha önceki kısımlarda verilen Reidemester hareketlerinden faydalanacağız.

TANIM 2.4.4.1: Ω_2, Ω_3 veya onların tersleri olan Reidemester hareketlerine düzenli hareketler adı verilir. Herhangi bir düğümün (halkanın) regüler diyagramına düzenli regüler hareketlerin sonlu sayıda uygulanmasıyla D' regüler diyagramı elde edebiliyorsa D ve D' ye düzenli olarak denk diyagramlar denir.

Kauffman Prensibi: Kabul edelimki t ye bağlı f fonksiyonu regüler hareketler altında invariant olsun. Eğer uygun bir şekilde seçebiliyorsak (sadece regüler diyagrama bağlı) $t^n f$ ifadesi düğüm (halka) için bir invarianttır.

Temelde Jones ile aynı olmakla beraber bu polinom, alterne düğüm ve halkalarda olduğu gibi çeşitli özelliklere sahiptir. Sonuç olarak, bu polinomun alterne düğümler için önemli bir yeri vardır.

K yönlendirilmemiş bir düğüm ve bunun regüler diyagramı D olsun. Şekil 2.4.8 de gösterildiği gibi D nin herbir geçidi iki şekilde kesilebilir (bu işleme Splicing denir). Bu işlem geçidin işaretinden bağımsızdır. Bu kesme tekniği Kauffman'ın parantez polinomunun tanımında kullandığı tekniktir.



Şekil 2.4.8 Geçitleri Kesme Yolları

Eğer D yi yönlendirirsek daha sonra geçitleri kestiğimizde ortaya çıkan regüler diyagramın yönlendirilmesi uygun olmayabilir (Şekil 2.4.9).



Şekil 2.4.9 Yönlendirilmiş Geçitlerin Kesilmesi

TEOREM 2.4.4.2: K düğümünün (veya halkasının) yönlendirilmemiş regüler diyagramı D olsun. Bu durumda aşağıdaki dört şartı sağlayan tek değişkenli bir tek $P_D(A)$ tamsayı polinomu (muhtemelen negatif üstlerle birlikte) vardır[Kauffman,L.H¹.,1987].

(1) $P_D(A)$ regüler denklik altında invarianttır.

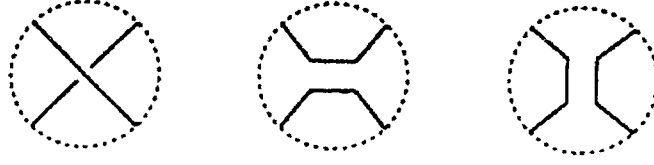
(2) O aşık düğümünün aşık diyagramı D olsun. $P_O(A) = 1$ (2.4.4)

(3) Eğer D , iki split regüler D_1, D_2 regüler diyagramından oluşuyorsa, yani $D = D_1 \amalg D_2$ ise (D_1 ve D_2 nin ayrık toplamı)

$$P_D(A) = -(A^2 + A^{-2})P_{D_1}(A)P_{D_2}(A) \quad (2.4.5)$$

(4) Şekil 2.4.10 da verilen Skein diyagramlar sırasıyla D, \hat{D}, \hat{D}' olsun. Bu durumda

$$P_D(A) = AP_{\hat{D}}(A) + A^{-1}P_{\hat{D}'}(A) \quad (2.4.6)$$



Şekil 2.4.10 Skein Diyagramlar

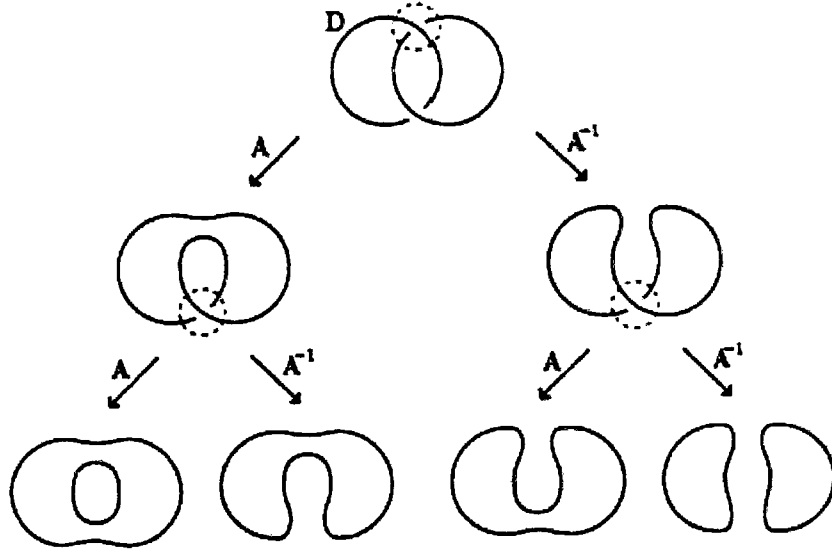
Düğüm veya halkanın D regüler diyagramından elde edilen $P_D(A)$ ya Kauffman parantez polinomu denir. Örneğin, aşıkır K düğümü için (2.4.4) $P_K(A) = 1$, yani onun polinomunun 1 olması anlamına gelmez. $D = \infty$ için $P_D(A)$ yi hesaplamayı (2.4.6) dan yapmak gerekir ve $P_\infty(A) = -A^{-3}$ dir. Ayrıca $P_D(A)$, Ω_1 hareketi altında invaryant değildir. Bununla beraber $P_D(A)$ dan elde edilen ve Ω_1 hareketi altında invaryant olan yeni bir invaryant tanımlanabilir. Bu Kauffman prensibinin uygulamasıdır. Benzeri çalışmalar için bakınız [Küçük,A.,Kopuzlu,A.,1997], [Kauffman,L.H³,1983], [Kauffman,L.H²,1990], [Kauffman,L.H¹,1987] .

TEOREM 2.4.4.3: Yönlendirilmiş bir K düğümünün yönlendirilmiş regüler diyagramı D olsun. $P_D(A)$, yönlendirilmemiş D diyagramının Kauffman parantez polinomuysa ve $w(D)$ de D nin (writhe olan) Tait sayısı (işareti) ise bu durumda

$$\hat{P}_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} P_D(A) \quad (2.4.7)$$

şeklinde tanımlanan $\hat{P}_D(A)$ yönlendirilmiş K düğümü için bir invaryanttır. Eğer, $A = t^{-\frac{1}{4}}$ yazılırsa $\hat{P}_D(A)$ Jones polinomuyla çakışır[Kauffman,L¹.,1987].

ÖRNEK 2.4.4.1: Pozitif Hopf halkasının Kauffman polinomu aşağıdadır.



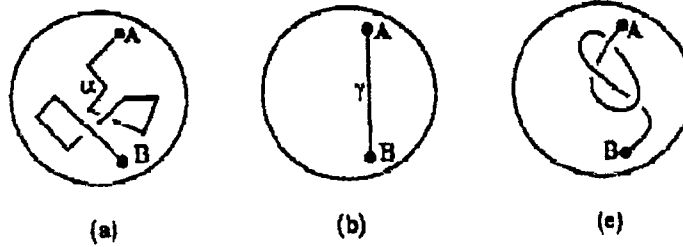
Buradan

$P(A) = A^2(- (A^2 + A^{-2})) + 1 + 1 + A^{-2}(- (A^2 + A^{-2})) = -A^4 - A^{-4}$ olur.

2.5. Örgü Kavramı

2.5.1 Örgüler

Bir n -örgü çok özel bir (n, n) - tangles dir. Bir tangles denildiğinde şu anlaşılır: B^3 yuvarının sınırı S^2 yüzeyi üzerinde $2n$ tane nokta yerleştirelim. Bir (n, n) -tangles , T , şu şekilde oluşturulur. B^3 içerisinde kalan n tane birbirini kesmeyen kapalı eğriyle bu $2n$ noktayı birleştirelim. Bu eğriler poligonal eğridir. Tam olarak (B^3, T) kümesine tangles denir. Aşağıda tangles örnekleri Şekil 2.5.1.(a),(b) de verilmiştir.



Şekil 2.5.1 Tangles Örnekleri

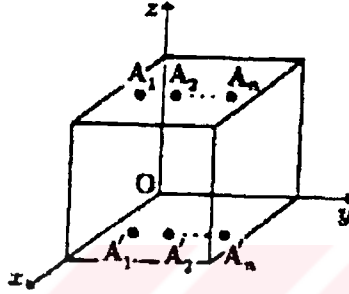
Şimdi, bir küpün üst yüzeyinde n tane nokta A_1, A_2, \dots, A_n , ve alt yüzeyindeki n tane noktayı da A'_1, A'_2, \dots, A'_n ile işaretleyelim. Bu noktalar tamamen keyfi yerleştirilmiş olup

bunları özel koordinatlar olarak isimlendireceğiz. R^3 de B nin koordinatları $B = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ şeklindedir. A_1, A_2, \dots, A_n , ve A'_1, A'_2, \dots, A'_n noktalarını aşağıdaki şekilde seçelim:

$$A_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1\right), \dots, A_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1\right)$$

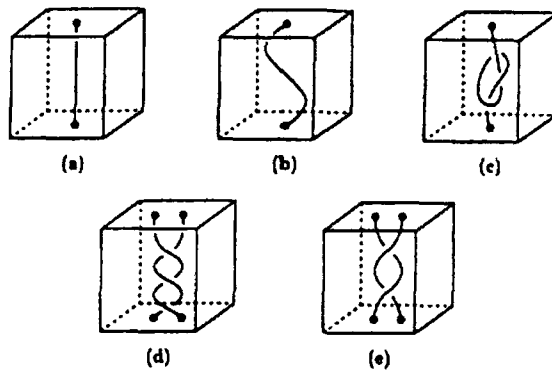
$$A'_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0\right), \dots, A'_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0\right)$$

A'_i nin inşasından dolayı A_i nin altında kalır.



Şekil 2.5.2 B nin Şekli

Şimdi de B de A_1, A_2, \dots, A_n , ve A'_1, A'_2, \dots, A'_n yi n tane eğri yoluyla birleştirelim (bunlar poligonal eğridir). Daha öncede belirtilmiş olduğu gibi bu n eğri birbirini kesmez. A_i yi A'_i ye birleştirilmesi gerekmez fakat A_i yi A_j ile (i ve j ayrık indislerdir) birleştirmemeliyiz. Bu poligonal eğriyi sicim olarak adlandıracağız. Şimdi B yi ikiye bölen ve B nin tabanına paralel olan keyfi bir E düzlemini düşünelim. Eğer E herbir sicimi en çok bir kez keserse B deki n eğriye n – örgü denir.

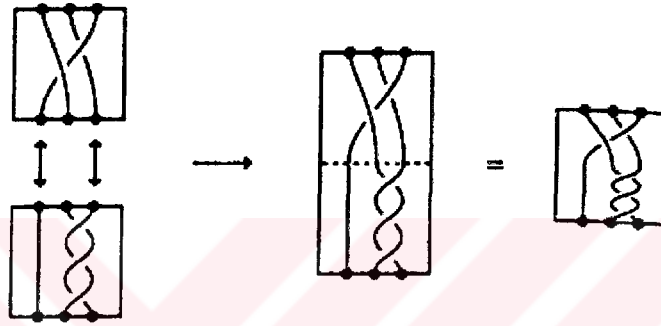


Şekil 2.5.3 Örgü ve Örgü Olmayan Örnekler

ÖRNEK 2.5.1: Şekil 2.5.3(a),(b) deki örgüler 1 – örgüdür. Şekil 2.5.3(c) örgü değildir. Şekil 2.5.3.(d),(e) ise 2 – örgüdür.

2.5.2. Örgü Grubu

Kabul edelimki B_n tüm n -örgülerin bir sınıfı olsun (tam olarak örgülerin denklik sınıflarının kümesi olsun). B_n nin iki n -örgüsü α ve β olmak üzere α ve β nın çarpımı olan örgü tanımlanabilir. İlk olarak α yı içeren küp β yi içeren küple yapıştırılır. Bu küp α ve β nın dik olarak yapıştırılmayla elde edilir Şekil 2.5.4(açık olarak bu karesel katı cisim küp olarak iyileştirebiliriz.).



Şekil 2.5.4 Örgünün Çarpımı

Bu örgü α ve β örgülerinin çarpımı olarak adlandırılır ve $\alpha\beta$ olarak yazılır. Benzer olarak $\beta\alpha$ çarpımında tanımlanır. Genel olarak $\alpha\beta = \beta\alpha$ yazılamaz. Yani $\alpha\beta$ ve $\beta\alpha$ nin denk örgüler olması gerekmez. Örgüler değişmeli olmamasına rağmen birleşmelidir. Yani,

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

olur. Şu ana kadar B_n kümesi için çarpımları tanımladık ve bileşmeli olduğunu gördük. Doğal olarak çarpım işlemi altında B_n de grup yapısı tanımlanabilir mi sorusunu sorabiliriz. Bunu göstermek için birim eleman ve ters elemanı bulmalıyız. Birim eleman e basit olarak aşık örgüdür ve $\alpha e = \alpha$ dir.

Herhangi bir α nın tersini bulmak için α nın ayna görüntüsü olan α^* ya bakalım. Eğer kübün ayna görüntüsünü düşünersek α nın görüntüsü de ayna görüntüsü olarak bu aynada yansıtılır. $\alpha^*\alpha = e$ ve $\alpha\alpha^* = e$ yazarız. α nın ters elemanı olan α^* yi α^{-1} ile gösteririz.

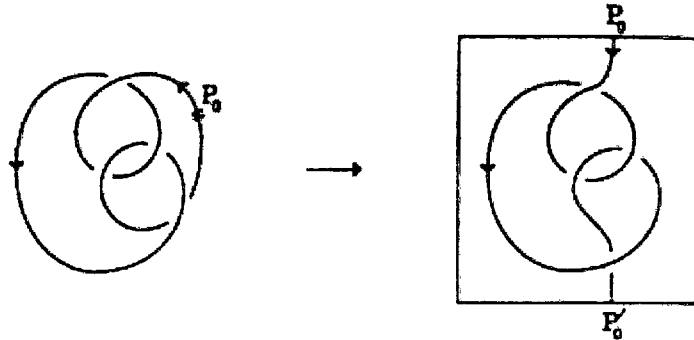
Bunların hepsi B_n nin grup olması için temel teşkil eder. Bu gruba n -örgü grubu denir.

2.5.3 Dügümden Örgünün Elde Edilmesi

Herhangi bir düğüm verildiğinde bu düğümden bir örgünün nasıl elde edileceğini vereceğiz. Örgüyü bir küp içerisinde verilen iplikcikler olarak düşünelim. Bu iplikciklerin küpün üst yüzeyini kestikleri noktaları A_1, A_2, \dots, A_n ve alt yüzeyini kestiği noktalarını da A'_1, A'_2, \dots, A'_n ile gösterelim. Küpün üst yüzeyinde bulunan A_1, A_2, \dots, A_n noktalarını paralel yaylarla küpün dışından A'_1, A'_2, \dots, A'_n noktalarıyla birleştirelim (Şekil 2.5.2 deki küpün dışından bu noktaları birleştireceğiz). Bu doğal yolla örgüden bir düğüm veya bir halkanın regüler diyagramını elde ederiz. Bu yolla elde edilen düğüme α örgüsünden elde edilen K düğümü(halkası) denir. Aksine olarak K ya kapalı örgü(α nın kapanışı) denir. Alışılmış olarak her bir iplikciğin yönlendirmesini A_i den A'_i ye doğru veririz. Böylece yönlendirilmiş bir düğüm(halka) elde ederiz. Tersine olarak yönlendirilmiş bir düğümden(halkadan da) uygun değişiklikleri yaparak yönlendirilmiş kapalı örgüler elde ederiz. Örnek 2.5.3.1 de ve onun diyagramında bir düğümden nasıl örgü elde edileceği verilmiştir. Aşağıdaki teorem bununla ilgilidir.

TEOREM 2.5.3.1(Alexander Teoremi): Bir yönlendirilmiş düğüm(halka) verildiği zaman, ona yönlendirilmesiyle birlikte denk olan ve bir örgü tarafından oluşturulmuş bir düğüm (halka) vardır.

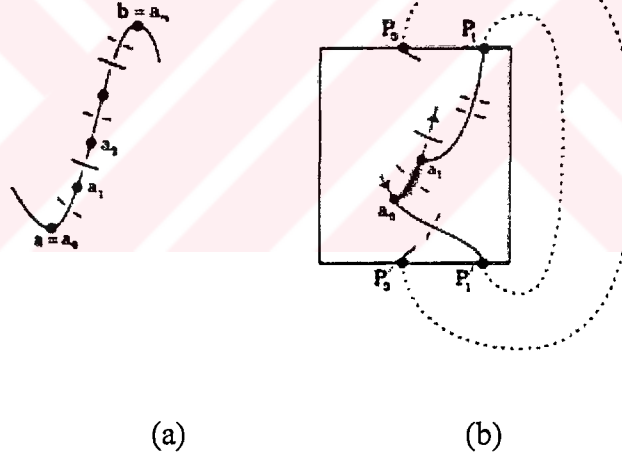
İSPAT: Kabul edelimki K düğümünün regüler diyagramı D olsun. İlk olarak düğümü bir geçit noktası olmayan P_0 noktasından keselim. Daha sonra o noktadan asalım. Böylece Şekil 2.5.5 de gösterilen bir $(1, 1)$ -tangles elde etmiş oluruz. Bu tanglesin bir α örgüsü verdiğini göstermek istiyoruz. Daha önce ifade edildiği gibi örgüden elde edilen düğüm K ya denktir.



Şekil 2.5.5 (1,1) Tangle

Eğer T tanglesi m tane lokal maksimuma sahipse m tanede lokal minimuma sahiptir. $m = 0$ olması durumunda T , 1-örgü olup ispata gerek yoktur.

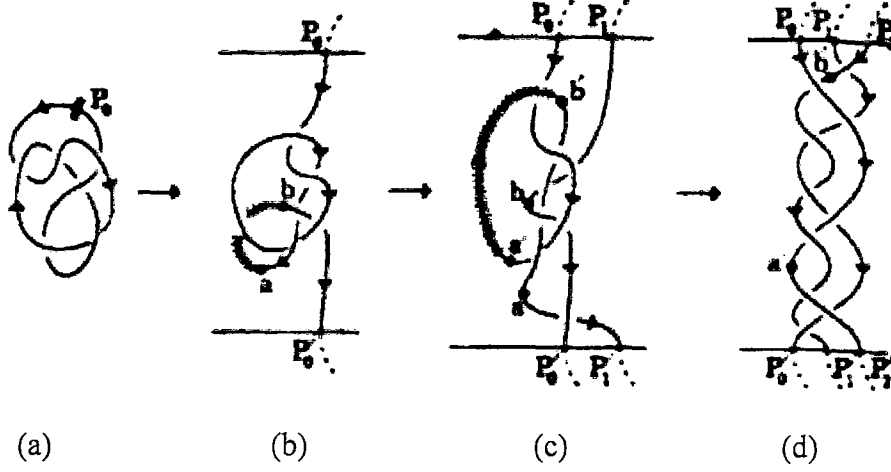
Kabul edelimki $m > 0$ olsun. Bu durumda Şekil 2.5.6(a) da gösterilen T de a lokal minimumunu b lokal maksimumuna götüren bir \overline{ab} yayını düşünelim. Üstelik kabul edelimki \overline{ab} yayı diğer tanglesleri n tane noktada kessin. \overline{ab} de $n + 1$ noktayı $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ ile gösterelim ve herbir $\overline{a_i a_{i+1}}$ yayı diğer tangleslerin sadece bir noktasını ihtiva etsin Şekil 2.5.6(a). Daha sonra $\overline{a_0 a_1}$ yayını daha büyük olan $\overline{a_0 P'_1 P_1 a_1}$ yayıyla yer değiştirelim. T tanglesi dışında daha büyük $\overline{P_1 P'_1}$ yayı vardır ve $a_0 P'_1$ yayı ve $a_0 P_1$ yayını eğer $\overline{a_0 a_1}$ yayı diğer kısımların üzerinden (veya altından) geçiyorsa bu durumda $a_0 P'_1$ ve $a_1 P_1$ yayları da diğer kısımlarından herbirinin üzerinden (veya altından) geçecek şekilde seçelim. Bu işlemin sonucundan $(2, 2)$ -tangles elde edilir. Bakınız Şekil 2.5.6(b).



Şekil 2.5.6 Geçit Noktalarında Durum

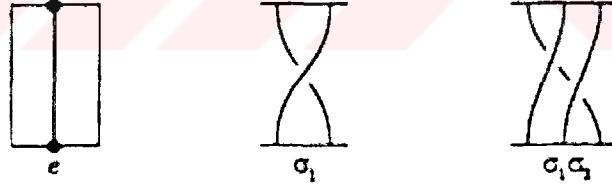
Bu $(2, 2)$ -tanglesin dört bitim noktasından eğrilerle birleştirirsek orjinal düğüme denk olan bir düğüm elde ederiz (bu tangle de $a (= a_0)$ artık bir lokal minimum değildir ve a_1 yeni lokal minimumdur). Benzer olarak $\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \dots, \overline{a_{n-1} a_n}$ yaylarından hareketle $(n + 1, n + 1)$ -tangles elde edilir ki burada a ve b de lokal maksimum veya lokal minimum yoktur ve en fazla $n - 1$ lokal maksimum veya lokal minimum vardır. Bu şekilde devam ederek hiçbir lokal maksimum veya lokal minimumun olmadığı duruma ulaşılır. Bu tangles bizim istediğimiz örgüdür. Bu işlem halka içinde yapılabilir.

ÖRNEK 2.5.3.1: Şekil 2.5.7(a)-(d) de yukardaki ispatın bir düğüm için pratikte işleyişi verilmiştir. Bu örgüden oluşturulan düğüm yukardaki düğüme denktir.



Şekil 2.5.7 Düğümden Örgü Elde Edilmesi

Şimdi eğer iki örgü denk ise bu durumda onların düğümlerinin de (örgünün kapanışı olan) denk olduğu hemen söylenebilir. Uyarmalıyız ki denk olmayan örgülerin kapanışlarından denk düğümlerde elde etmek mümkündür. Örneğin Şekil 2.5.8 de verilen denk olmayan düğümlerin kapanışları aşikar düğüme denktir.



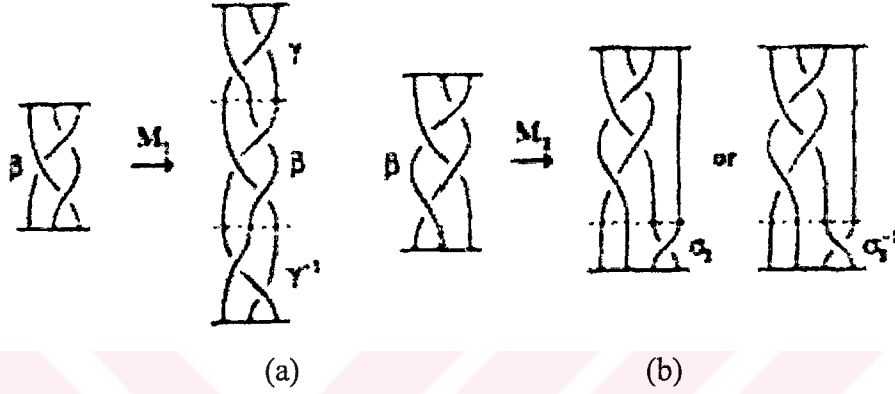
Şekil 2.5.8 Denk Olmayan Düğümlerin Örgüleri

Ayrıca eğer örgü teorisini düğüm teorisine uygulamak istersek denk düğümleri elde etmek için örgüleri nasıl kısıtlayacağımızı öncelikle açıklamalıyız. Bunun için örgülerin M -denkliği kavramını verelim.

TANIM 2.5.3.1: $B_\infty = \bigcup_{k \geq 1} B_k$ olsun. Yani B_∞ , tüm B_1, B_2, \dots, B_n gruplarının birleşimi olsun. B_∞ da aşağıdaki işlemleri tanımlayalım. Bunlara Markov hareketleride denir.

(1) Eğer β , B_n grubunun elemanı ise (yani β bir n -örgüyse) M_1 operasyonu β yi $\gamma\beta\gamma^{-1}$ n -örgüsüne dönüştürür. Burada $\gamma\beta\gamma^{-1}$ ye β nin konjugesi denir. γ ise B_n de herhangi bir n -örgüdür. Bakınız Şekil 2.5.9(a).

(2) M_2 operasyonu β yi ya iki tane $(n+1)$ -örgü olan $\beta\sigma_n$ veya $\beta\sigma_n^{-1}$ ye dönüştürür. Burada σ_n , $(n+1)$ -örgü olan B_{n+1} in bir gerenidir. Bakınız Şekil 2.5.9(b).



Şekil 2.5.9 Markov Hareketlerinin Etkisi

ÖRNEK 2.5.3.2: Şekil 2.5.9(a) de B_3 ün bir $\beta = \sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$ elemanının M_1 operasyonu altında nasıl değiştiğini göstermektedir. Kısaca, β , $\gamma\beta\gamma^{-1}$ olmaktadır. Burada $\gamma = \sigma_2\sigma_1^{-1}$ olmaktadır. Şekil 2.5.9(b) de B_3 ün bir $\beta = \sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$ elemanının M_2 operasyonu altında nasıl değiştiğini göstermektedir. Yani, B_4 ün $\beta\sigma_3$ veya $\beta\sigma_3^{-1}$ elemanı olmaktadır.

TANIM 2.5.3.2: B_∞ in iki elemanı α ve β olsun. Eğer α ya Markov hareketleri M_1 ve M_2 yi ve onların tersleri olan M_1^{-1} ve M_2^{-1} yi sonlu kez uygulayarak α dan β ya dönüştürebiliyorsak bu taktirde α yı β ya Markov denktir (M -denk) deriz ve $\alpha \sim_M \beta$ yazarız. Eğer $\alpha \sim_M \beta$ ise ve $\beta \sim_M \alpha$ ise bu durumda α ve β ya Markov denktir denir.

Aşağıdaki teorem Markov denkliğin Örgü ve Düğüm arasında temel kavram olduğunu gösterir.

TEOREM 2.5.3.2 (Markov Teoremi): β_1 ve β_2 örgülerinden türeyen iki yönlendirilmiş düğüm K_1, K_2 olsun. Bu taktirde

$$K_1 \equiv K_2 \Leftrightarrow B_1 \sim_M B_1$$

Yukardaki Teorem Markov tarafından 1936 da verildi. Tam ispatı ise Birman tarafından verilmiştir[Birman,J.,1974].

2.5.4 Örgü İndeksi

Bir K düğümü (halkası)(sonsuz sayıda) örgüden oluşturulabilir. Böylece örgülerin cümlesinde (K yı oluşturan) en küçük bileşen sayısına sahip α ile gösterilen örgü vardır. Bu α örgüsünde K nın minimum örgüsü(temsili) ve K nın sicimlerinin sayısına K nın örgü indeksi denir ve $b(K)$ ile gösterilir(K nın minimum örgü temsili tek değildir). Örneğin örgü indeksi 1 olan tek düğüm aşık düğümdür.

ÖNERME 2.5.4.1 : K nın örgü indeksi $b(K)$ bir invaryanttır.

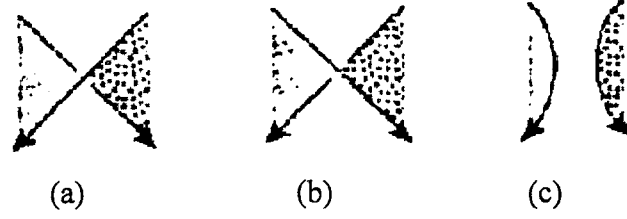
Örgü indeksi 2 olan düğümler elementer tor düğümleridir.Yani $n \neq 0, \mp 1$ için sadece $(n,2)$ tipindeki tor düğümleridir.

Örgü indeksi 3 olan düğümleri genelde listelemek zordur. Örgü indeksini belirleyen genel bir algoritma şu ana kadar verilmemiştir.Henüz örgü indeksini belirleyen genel bir algoritma yoktur[Murasugi,K.,1996].

2.6 Pozitiflik Kavramı

Düğüm teorisi çalışmalarının en eski kısımlarından biriside pozitiflik kavramıdır. Bu kısımda pozitiflik kavramlarının çeşitli tanımlarını vereceğiz. Bu kısım şu ana kadar verilen tüm kavramlarla yakından ilgilidir. Bu kavram düğüm polinomları, düğümlenme, düğümün işareti gibi kavramlar ile birlikte anılmaktadır. İlk olarak regüler diyagram üzerinde pozitiflik ne demektir onu tanımlayalım.

Herhangi bir düğümün diyagramında herbir geçişi Writhe (kıvrım noktası) adı verdiğimiz noktayı (∓ 1) ile işaretleyelim. Şekil 2.6.1(a) da verilen geçişi +1 ile işaretleyelim ve pozitif olarak adlandıralım. Şekil 2.6.1(b) de verilen geçişide -1 ile işaretleyelim ve negatif olarak adlandıralım. Şekil 2.6.1(c) de geçişin çözülmesiyle elde edilen durum ise geçişsiz olarak adlandırılır.

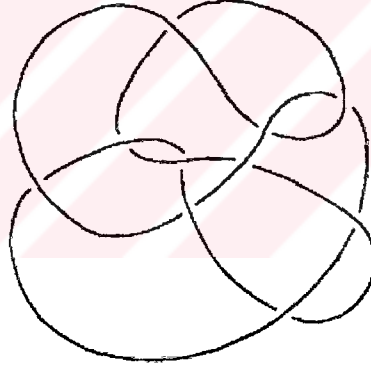


Şekil 2.6.1 Writhe (Kıvrım Noktası)

TANIM 2.6.1: Bir düğüm pozitif diyagrama sahipse, yani tüm geçitleri pozitif ise düğüme pozitif adı verilir.

TANIM 2.6.2: Bir geçit hariç diğer geçitleri pozitif ise düğüme Almost pozitif düğüm denir [Stoimenow, A.¹, 1999].

ÖRNEK 2.6.1: 10_{145} düğümü almost pozitif olup aynı zamanda pozitif olmadığı bilinmektedir (Şekil 2.6.1) [Cromwell, P.R., 1989].

Şekil 2.6.1 10_{145} Düğümünün Regüler Diyagramı

Örgü kavramının gelişimiyle pozitiflik kavramı yeni bir anlam kazandı.

TANIM 2.6.3: Gerenleri $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ olan n-bileşenli örgünün kapanışının kelimesi hiçbir σ_i^{-1} gerenini ihtiva etmiyorsa bu halkaya pozitifdir denir. σ_i ler ile örgünün sicimlerinden bahsedilmektedir.

TANIM 2.6.4: Bir düğüm eğer kapalı bir örgü olarak pozitif diyagrama sahipse, pozitif örgüye sahiptir denir. Bununla beraber pozitif örgülü düğümler literatürde pozitif düğümler olarak da isimlendirilir [Stoimenow, A.², 1999].

ÖRNEK 2.6.2: 5_2 düğümü pozitiftir[Kauffman,L.H.²,1990]. Bu düğüm pozitif olmasına rağmen kapalı pozitif örgü olarak ifade edilemez [Stoimenow,A.³,2000]. Bu gerçek 7_2 ve 7_4 içinde geçerlidir[Stoimenow,A.¹,1999].

Bu kavramlar Lee Rudolph tarafından Seifert yüzeylerine bağlı olarak tanımlanmıştır. Yönlendirilmiş bir D halka diyagramı verilsin. $X_>(D)$ ile pozitif geçişlerin kümesini ve buna benzer olarak $X_<(D)$ ile negatif geçişlerin kümesini gösterelim. $\#A$ ile A kümesinin eleman sayısını işaret edersek, D ye Seifert algoritmasını uygulayarak elde edilen yüzey $S(D)$ olsun. $L(D) = \partial S(D)$ diyelim.

TANIM 2.6.5: L yönlendirilmiş bir halka olsun. Eğer,bazı D ler için $\#X_<(D) = 0$ iken $L, L(D)$ ye izotop ise L ye pozitif denir.

Eğer L pozitif değil fakat bazı D ler için $\#X_<(D) = 1$ iken $L, L(D)$ ye izotop ise L ye Almost pozitif denir.

3. $8_{10}, 10_5, 10_{47}, 10_{62}$ DÜĞÜMLERİNİN ÖRGÜSÜ

İkinci bölümde birinci bölümdeki kavramların ışığı altında $8_{10}, 10_5, 10_{47}, 10_{62}$ düğümlerinin örgülerini hesaplayacağız. Bu hesaplama sonucunda bu değerlerden örgünün indekslerini, pozitiflik durumlarını hesaplayacağız.

2. Bölüm 5. alt başlıkta incelenen kavramları biraz daha açmaya çalışacağız. Bu kavramları manifold yapısından başlayarak inceleyelim.

M boyutu 2 veya daha fazla olan bir bağlantılı manifold olsun. $n \geq 1$ tamsayısı için $F_n(M)$ ile ikişer ikişer ayrık olan n -lileri içeren $M \times M \times \dots \times M$ çarpımını gösterelim. Yani

$$F_n(M) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M \times M \times \dots \times M : x_i \neq x_j, i \neq j\}$$

M deki n tane sıralı nokta kümesi üzerinde $F_n(M)$ nin konfigürasyon uzayı olduğunu düşünebiliriz. Manifoldların boyutu 2 yada daha fazla olduğu için $M \times M \times \dots \times M$ nin herhangi iki koordinatı aynı olan sonlu adetteki alt manifoldlarının ayrılmasıyla oluşan bu yapı bağlantılıdır. $m \geq 0$ bir tamsayı olsun. $Q_m = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ ile M nin m tane ayrık çiftlerinden oluşan $(q_i \in M)$ alt kümesini gösterelim. $m = 0$ ise Q_0 boş kümedir.

$$F_{m,n}(M) = F_n(M/Q_m)$$

olsun. Bu yapının E^2 üzerine taşınmasıyla şunu elde ederiz.

TEOREM 3.1: $F_n(E^2)$, E^2 düzleminin n -sıralı noktalarının konfigürasyon uzayı için

$$\pi_i(F_n(E^2)) = 0, i \geq 2$$

dir. Daha genel olarak, $n \geq 1, m \geq 0$ için

$$\pi_i(F_{n,m}(E^2)) = 0, i \geq 2$$

dir[Fadell, E. and et al.1962].

$\{1, 2, \dots, n\}$ üzerindeki tüm permütasyonların grubu Σ_n olsun. $F_n(M)$ üzerinde Σ_n nin bir doğal sağ işlemi vardır. Bu işlem,

$$\mu : F_n(M) \times \Sigma_n \rightarrow F_n(M)$$

dönüşümü olup koordinatlarının permutasyonları yoluyla

$$\mu((x_1, x_2, \dots, x_n)\sigma) = (x_1, \dots, x_n)\sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

ile tanımlanır. μ serbest rolü için orbit uzayını $C_n(M)$ veya standart bağıntı yoluyla $C_n(M) = F_n(M)/\Sigma_n$ ile isimlendirelim. $F_n(M)$ nin μ işlemi altında n -li farklı elemanların ($x_i \in M$) yörüngeleri permutasyon yoluyla ayırık iseler aynı yörüngededirler. Buradan $C_n(M)$ uzayı M deki sıralanmamış n ayırık noktaların muhtemel bir uzayıdır. Bu uzay sıralanmamış n noktanın konfigürasyon uzayıdır. $F_n(M)$ den $C_n(M)$ ye bir dönüşüm Σ_n bundle'sini tanımlar. $p_n : F_n(M) \rightarrow C_n(M)$ dönüşümü özel olarak $n!$ -katlı örtü uzayıdır.

Fox'a ait olan aşağıdaki kavramı verelim. M deki örgü uzayının konfigürasyon uzayına bakalım[Fox,R.H, and et al.,1962]. Bu $M = E^2$ için Artin'in geometrik örgüsüdür. $F_n(M)$ de \bar{c}_0 taban noktasını gözönüne alalım. $c_0 = p_n(\bar{c}_0)$, $C_n(M)$ de bir taban noktasıdır. $C_n(M)$ nin esas grubunda keyfi bir $\beta \in \pi_1(C_n(M), c_0)$ eleman olan β yı $f : [0, 1] \rightarrow C_n(M)$, $f(0) = f(1) = c_0$ ilmeğiyle temsil edelim. $p_n : F_n(M) \rightarrow C_n(M)$ örtü dönüşümünde $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow F_n(M)$, $\bar{f}(0) = \bar{c}_0$ olan f nin bir lifti vardır. $t \in [0, 1]$, $i \neq j$ için $\bar{f}_i(t) \neq \bar{f}_j$ ve M de $1 \leq i \leq n$, için $\bar{f}_i : [0, 1] \rightarrow M$ şeklinde $\bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)$ yayını düşünebiliriz. M de $(\bar{f}_1(0), \bar{f}_2(0), \dots, \bar{f}_n(0))$ ve $p_n(\bar{f}(1)) = p_n(\bar{f}(0)) = c_0$ olduğundan τ permutasyonu olup $(\bar{f}_1(0), \bar{f}_2(0), \dots, \bar{f}_n(0))$ da M dedir.

$\mathcal{A}_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{A}_i(t) = (f_i(t), t)$ gömme dönüşümü tanımlayalım. Burada $\mathcal{A} = \Sigma_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ ifadesi $M \times [0, 1]$ üzerinde n bileşenli olup örgü tanım ve şartlarını sağlar. Özel olarak $M \times [0, 1]$ deki \mathcal{A} sistemi $M = M \times [0, 1]$ in P_1, P_2, \dots, P_n noktalarını $\bar{c}_0 \in F_n(M)$ koordinatları yardımıyla $\bar{f}(0)$ den $\bar{f}(1)$ e olan τ permutasyonu yoluyla $M \times \{1\}$ nin P'_1, P'_2, \dots, P'_n ye götüren özel bir sistemdir.

Fox bu \mathcal{A} sistemini veya daha genel olarak $\beta \in \pi_1(C_n(M), c_0)$ homotopi sınıfını n bileşen üzerinde M deki τ permutasyonlarının örgüsü olarak adlandırır. $\pi_1(C_n(M), \bar{c}_0)$ grubu n bileşenli M üzerinde renklendirilmiş grup olarak adlandırır.

TEOREM 3.2: Artin örgü grubu $B(n)$, $\pi_1(C_n(E^2), c_0)$ esas grubuyla kanonik özdeşlenebilir[Hansen,V.L.,1990].

Aşağıda $B(n)$ ve $\pi_1(C_n(E^2), c_0)$ in serbest olarak özdeşlenmesi vardır. Temel Σ_n bundlesi için homotopi dizisi $p_n : F_n(E^2) \rightarrow C_n(E^2)$ aşağıdaki temel bağıntıya indirgenir.

$$1 \rightarrow \pi_1(F_n(E^2), \bar{c}_0) \rightarrow {}^{p_n} \pi_1(C_n(E^2), c_0) \rightarrow {}^{\tau_n} \Sigma_n \rightarrow 1$$

Eğer $B(n) = \pi_1(C_n(E^2), c_0)$ özdeşlemesini kullanır ve $H(n) = \pi_1(F_n(E^2), \bar{c}_0)$ dersek $H(n)$ nin elemanları bileşenlerin permutasyonu ile birlikte n bileşenli örgüdür. Bir önceki paragrafta bu örgüye renklendirilmiş örgü adı verilir.

SONUÇ 3.1: $B(n)$ grubu hiçbir aşikar olmayan sonlu mertebeli eleman içermez [Dyer, J.L., 1980].

Şimdi bu kavramlar ışığı altında şu kavramları verelim. $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, ..., $P_n = (n, 0)$ noktaları örgünün başlangıç noktalarının kümesi olsun. Bu taktirde temel σ_i ($1 \leq i \leq n-1$) n örgüsü $\bar{f}: [0, 1] \rightarrow F_n(E^2)$ dönüşümü yardımıyla

$$\bar{f}(t) = (P_1, \dots, P_{i-1}, \bar{f}_i(t), \bar{f}_{i+1}(t), P_{i+2}, \dots, P_n)$$

olarak tanımlanır. Burada, $\bar{f}_i(t) = (i + \sin \frac{\pi}{2} t, \sin \pi t)$ ve

$\bar{f}_{i+1}(t) = (i + \cos \frac{\pi}{2} t, -\sin \pi t)$ ile verilmiştir. $\bar{f}(0) = (P_1, \dots, P_i, P_{i+1}, \dots, P_n)$

ve $\bar{f}(1) = (P_1, \dots, P_i, P_{i+1}, \dots, P_n)$ olduğunda $\bar{f}: [0, 1] \rightarrow F_n(E^2)$ yayı ilmeği

$f: [0, 1] \rightarrow C_n(E^2)$ $f(0) = f(1) = c_0$ a dönüştürür ve bu ilmek σ_i yi $\pi_1(C_n(E^2), c_0)$ de temsil eder.

TEOREM 3.3 (Artin Temsili): n bileşenli geometrik örgünün $B(n)$ grubu gerenleri $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ olan ve tanımlanan bağıntıları aşağıdaki şekilde verilen bir temsile sahiptir [Artin, E., 1947] [Birman, J., 1969].

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & |i - j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n-1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned}$$

LEMMA 3.1: $l_n: B_n \rightarrow B(n)$ nin bir homeomorfizm olması için gerek ve yeter şart $l'_n: H_n \rightarrow H(n)$ homeomorfizminin bir izomorfizm olmasıdır. $H(n)$ grubu

$$H(n) = \pi_1(F_n(E^3), \bar{c}_0)$$

ile verilen renklendirilmiş örgü grubudur ve B_n ise, gerenleri $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_{n-1}$ ve temsili

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j &= \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_i & |i - j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n-1 \\ \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i &= \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned}$$

ile verilen soyut gruptur. $H_n = \ker \bar{\tau}_n$ ile verilen $\bar{\tau}_n: B_n \rightarrow \Sigma_n$ dönüşümü $\bar{\sigma}_i$ yi Σ_n de $(i, i+1)$ e resmeden doğal surjektif homeomorfizmin çekirdeğidir [Hansen, J.V., 1990].

$l'_n : H_n \rightarrow H(n)$ nin izomorfizm olması için H_n nin temsilini bilmemize gerek vardır.

LEMMA 3.2: H_n grubu şu temsile sahiptir. Gerenleri

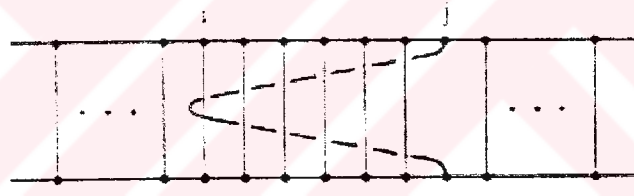
$$a_{ij} = \bar{\sigma}_{j-1} \bar{\sigma}_{j-2} \dots \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i^2 \bar{\sigma}_{i+1}^{-1} \dots \bar{\sigma}_{j-2}^{-1} \bar{\sigma}_{j-1}^{-1} \quad 1 \leq i < j \leq n$$

olan ve tanımlama bağıntıları ise

$$a_{rs}^{-1} a_{ij} a_{rs} = \begin{cases} a_{ij} & i < r < s < j \text{ veya } r < s < j \\ a_{rj} a_{ij} a_{rj}^{-1} & r < i = s < j \\ a_{rj} a_{sj} a_{ij} a_{sj}^{-1} a_{rj}^{-1} & i = r < s < j \\ a_{rs} a_{sj} a_{rj}^{-1} a_{sj}^{-1} a_{ij} a_{sj} a_{rj} a_{sj}^{-1} a_{rj}^{-1} & r < i < s < j \end{cases}$$

şeklindedir.

a_{ij} ye karşılık gelen n -örgü ($1 \leq i < j \leq n$) yani $\sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}$ örgüsü j nin sadece bir kez i etrafında dolaşması ve aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi standart projeksiyonda j nin diğerlerinden herbirinin iki kez altlarından geçtiğini görebiliriz.



Şekil 3.1 β Örgüsü

a_{ij}^{-1} e karşılık gelen örgü i iplikciği etrafında ilmek oluşturan j nin i etrafındaki dönme yönü terstir. Buna bağlı olarak renklendirilmiş örgü a_{ij} ve onun terslerinin çarpımı olarak yazılabilir. Bu işlem örgüyü birleştirmek olarak adlandırılır. Bir başka deyişle $\{a_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ sistemine karşılık gelen örgülerin sistemi $H(n)$ sisteminin gerenlerinin bir sistemidir[Hansen, V.L.,1990].

Geçen yıllarda sadece bir lineer temsil biliniyordu. Bu temsil Alexander matrisine bağlı olarak tanımlanmaktaydı. Bu temsil Brau temsili olarak adlandırılmıştır. Bu kavram sezgisel olarak açık özelliklere sahipti. Bu özelliklerden faydalanarak Baumslag, örgü grubunun rezidü olarak sonsuz olduğunu ve sonsuz görüntülerinin pek çok sayıda lineer temsile sahip olduklarını belirtmiştir. Üstelik bir φ lineer temsilini $\varphi^*(\sigma) = \varphi(\sigma)t^{\alpha(\sigma)}$ ile tanımlayabiliriz.

$\alpha: B_n \rightarrow Z$ abelyenleştirme dönüşümü ve t ise bir belirleyici olarak verilmiştir. Bu temsil sonlu temsilden daha ilginç özelliklere sahiptir.

Brau temsilinde pek çok önemli tanım vardır. Bu tanımları serbest türeve bağlı klasik anlamda verelim. Rankı n olan serbest grubun gerenlerini x_1, x_2, \dots, x_n ile işaret edersek $C[f_n]$ grup halkası üzerinde türev aşağıdaki gibi tanımlanır. Serbest grubun bir elemanının türevi

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{\partial(x_j)}{\partial x_i} = \delta_{ij} \\ ii) \quad & \frac{\partial(x_j w)}{\partial x_i} = \delta_{ij} + x_j \frac{\partial(w)}{\partial x_i}, w \in F_n \end{aligned}$$

nin kullanımıyla elde edilir. Bütün grup halkasına bunu lineer olarak genişletebiliriz. Buradan δ , n örgüsüne karşılık gelen matris

$$\beta_n(\sigma) = \left(\alpha \frac{\partial(\sigma(x_j))}{\partial x_i} \right)$$

dir. Burada α dönüşümü yukarıda verilen abelyenleştirme dönüşümüdür. Bu temsilden indirgenemez $n - 1$ temsil ve aşikar 1 temsil elde edilebilir. $n - 1$ boyutlu temsile Brau temsili denir ve β_n^r ile gösterilir.

Bir diğer temsil tanımı ise örtü uzaylarından elde edilir. Eğer D_n n - disk olarak baz noktasında sınırında seçersek bu durumda $\pi_1(D_n)$ esas grubunu oluşturabilir ve bunu aşikar olarak F_n ile özdeşleriz. $r: \pi_1(D_n) \rightarrow Z$ dönüşümü herhangi bir gereni Z nin bir t gerene götüren homomorfizmdir. Bu homomorfizm $p: \hat{D} \rightarrow D_n$ örtüsünü tanımlar. Rankı $n - 1$ olan sonlu gerilmiş $\Lambda = Z[t, t^{-1}]$ modülü üzerinde $H_1(\bar{D}_n)$ homoloji grubunu gözönüne alalım. D_n nin yönlendirmeyi koruyan homomorfizmi olarak örgü grubunun tanımı vardır. Böyle iki homomorfizm, eğer sınırlarına göre izotop ise denk olarak düşünülür. Bu tanıma göre B_n örgü grubu \hat{D}_n ve $H(\bar{D}_n)$ üzerinde rol oynar. Bu modül homomorfizmi üzerindeki rolden örgü grubunun $GL(n - 1, \Lambda)$ üzerindeki indirgenmiş Brau temsili elde edilir [J.Birman, et al, 1992].

Homoloji gruplarından indirgenemez temsili ise şu yolla elde edilir. p_0, D_n de bir baz noktası ve \hat{p}_0 da bu noktanın \hat{D}_n deki tüm öngörüntüsü olsun. Bu taktirde indirgenemeyen Brau temsili $H_1(\hat{D}_n, \hat{p}_0)$ üzerindeki örgünün rolünden çıkar. Bu n ranklı Λ modüldür. Aşikar ve indirgenemeyen temsilde $H_1(\bar{D}_n) \rightarrow H_1(\hat{D}_n, \hat{p}_0)$

$\rightarrow H_1(\widehat{p_0})$ doğal dizisini verir. Buradan Brau temsili ve Alexander polinomu arasında bağıntı kurulabilir. Eğer bir α örgüsünün kapanışı düğüm ise normalleştirme çarpanından $\widehat{\alpha}$ nin Alexander polinomu $\det(\beta_n^r(\alpha - id))$ ile verilir. Diğer taraftan β_n örgü grubu $\text{Aut}(F_n)$ nin alt grubudur. Kompakt açık topolojiyle birlikte F nin değişiminin temsili $R = R(F_n, SU(2, c))$ olsun. F nin tüm gerenlerinin cümlesi x_1, x_2, \dots, x_n olsun. Bu bazın kullanılmasıyla F_n matris temsiliyle bulunabilir. $SU(2, c)$ grubu S^3 e homeomorf olduğu için bu R temsilini $R = S^3 \times S^3 \times \dots \times S^3$ ile özdeşleyelim. B_n nin elemanları F_n otomorfizminin elemanları olarak rol oynar ve R nin diffeomorfizmini üretirler. $B_n \rightarrow \text{Diff}(R)$ doğal dönüşümü birebir grup homomorfizmidir. Buradan seçilen noktanın eğrisine dönecek olursak $e^{2\pi it}$ parametrik denklemden tanjant uzaydan R ye seçilen doğru işlemi B_n nin bir temsilini verir. Bu noktadan hareketle B_n nin Brau temsiline de içeren temsil bulunmuş olur[Birman, J. et. al. 1992].

Temsilin yeni bir ailesinde Jones [Jones, V.F.R¹.1987] tarafından verilmiştir. Bu temsil Hecke cebirinden hareketle elde edilmiştir. g_1, g_2, \dots, g_{n+1} gerenleri tarafından üretilen aşağıdaki bağıntılara sahip olan ve 1 ile beraber C cebiridir.

- i) $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$
- ii) $g_i g_j = g_j g_i, |i-j| > 1$
- iii) $g_i^2 = (q-1)g_i + q.$

Bu cebiri $H_n(q)$ ile adlandıralım. Bu cebirden ilk olarak görebileceğimiz Σ_n simetrik grubunun kompleks grup cebirinin bozulmuş halinin $H_n(1)$ olduğudur. Bunun çoğu özelliğini aşağıdaki teoremden bulabiliriz.

TEOREM 3.5: i) $H_n(q)$ cebiri q gereni için $n!$ kompleks boyutuna sahiptir.

ii) 1 e yeteri kadar yakın olan q için $H_n(q)$ semi simple dir.

iii) Basit $H_n(q)$ modülü Yaung diyagramlarıyla birebir karşılık gelir ve onların ayrışım kuralları ve boyutları Σ_n de olduğu gibidir [Bourbaki, N., 1982].

B_n nin Jones temsiline $\sigma \rightarrow g_i$ dönüşümüyle sol regüler temsiline elde ederiz. Teorem 3.5, Σ_n grubunun temsiline Yaung diyagramına karşılık olarak indirgenmiş yada indirgenmemiş temsiline bulmamıza yarar[Birman, J. and et al., 1992].

Teorem 3.3 deki temsile ek olarak şu ifadeleri verebiliriz: Pozitif genlere sahip olan pozitif kelimelerin ilginç özellikleri vardır. Örneğin,

$$\Delta = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_2 \sigma_1)(\sigma_1)$$

kabul edilirse bu taktirde Garside' e göre her bir $\beta \in B_n$ elemanı

$$\beta = \Delta^m P, m \text{ tamsayı, } P \text{ pozitif kelime} \quad (3.1)$$

formunda bir yazılışa sahiptir. m tamsayısına β nin gücü ve P kelimesine de β nin kuyruğu denir. Kabaca, m ve P aşağıdaki anlama sahiptir. β nin elemanını temsil eden

keyfi bir W kelimesiyle başladığımızda mümkün olan tüm kelimeler k tamsayıların dizisi olmak üzere $\Delta^{-k}W$ formundadır. Bu taktirde $\Delta^{-m}V, B_n$ de pozitif P kelimesine denk olacak şekilde mümkün olan en büyük tamsayı m dir.

Teorem 3.6 de verilen B_n örgü grubunun bağıntılarından hiçbirinde negatif üstlü geren yoktur. Buradan soyut S_n alt grubunun s_1, s_2, \dots, s_n gerenleriyle örgünün bağıntılarında $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}$ den çıkan sonuçlar yazabiliriz. Garside' nin temel fikri S_n den B_n ye dönüşüm yoluyla kolayca S_n de bağıntıların elde edilmesidir. Bu transfer Teorem 3.6 yardımıyla yapılabilir. S_n yarı grubu doğal olarak B_n e gömülebilir. Buradan ilk gözlemimiz kelime probleminin S_n de kolayca çözülebilmesidir.

Teorem 3.6 ün ispatında çıkan S_n nin $\Delta^\#$ kelimesi S_n nin B_n ye transferinde önemli olup,

$$\Delta^\# = (s_1s_2\dots s_{n-1})(s_1s_2\dots s_{n-2})\dots(s_1s_2)(s_1)$$

olarak tanımlayalım.

LEMMA 3.3 : S_n de $\Delta^\#$ kelimesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- (i) Herbir $V \in S_n$ kelimesi için $\Delta^\#V = \bar{V} \Delta^\#$ dir.
- (ii) Herbir j için $(1 \leq j \leq n-1)$ $D(\Delta^\#)$ kelimesi başlangıç harfi s_j bitim harfi s_i olan kelime içerir.

TEOREM 3.6: $e : s_i \rightarrow \sigma_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ dönüşümü S_n den B_n ye bir gömülme dönüşümü doğurur.

Buradan S_n yarı grubu B_n de $e(S_n)$ ile özdeşlenebilir. Bu durum $s_1 \equiv \sigma_1, s_2 \equiv \sigma_2, \dots, s_{n-1} \equiv \sigma_{n-1}$ olarak gösterilir ve hiçbir ters eleman içermez. S_n nin elemanları pozitif kelime olarak adlandırılır. S_n de $\Delta^\#, B_n$ de ise Δ pozitif kelimesiyle yer değiştirebilir. Eğer, W ve V nin her ikisinde pozitif ve S_n (denk olarak B_n) de aynı elemanları tanımlarsa W ve V pozitif olarak eşittir denir ve $W = V$ yazılır. Eğer $\bar{W} = \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\dots\sigma_{\mu_r}$ olarak tanımlanırsa ve W pozitif ise bu taktirde $\bar{W} = \sigma_{n-\mu_1}\sigma_{n-\mu_2}\dots\sigma_{n-\mu_r}$ de pozitif kelimedir.

Lemma 3.3 in aşağıdaki versiyonu B_n için geçerlidir.

LEMMA 3.4 : Her bir $j(1 \leq j \leq n-1)$ için $\sigma_j^{-1} = \Delta^{-1}X_j$ olacak şekilde pozitif bir X_j kelimesi vardır. Aynı zamanda her V örgü kelimesi Lemma 3.3 ile beraber $\Delta\sigma_j^{-1} = \sigma_{n-j}^{-1}\Delta$ ile birlikte $\Delta^{-1}V = \bar{V}\Delta^{-1}$ sağlanır.

İSPAT: İlk durum Lemma 2.3 den çıkar ve ikinci durum ise Lemma 3.4 (ii) nin uygulanmasıyla elde edilir.

TANIM 3.1: Eğer, $D(P)$ de hiçbir kelime ΔQ formunda değilse P pozitif kelimesine Δ ya göre pozitif denir. Aksi halde P , Δ da ihtiva edilir denir. Eğer, P_1 ve P_2 aynı harf uzunluğuna sahip pozitif kelime ise yani $P_1 \equiv \sigma_{\mu_1}, \dots, \sigma_{\mu_k}$, $P_2 \equiv \sigma_{\lambda_1} \dots \sigma_{\lambda_k}$ ise bu taktirde eğer, n tabanından nümerik olarak genişletilmiş olan μ_1, \dots, μ_k sayıları $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sayılarından daha küçük ise bu durumda P_1 sayısı P_2 den daha küçük olarak tanımlanabilir. Açık olarak herhangi $D(P)$ diyagramında bir tek en küçük kelime vardır ve bu kelime (P) nin tabanı olarak adlandırılabilir. Eğer P , Δ ya göre asal ise bu taktirde $D(P)$ tabanı için bir \bar{P} yazarız. \bar{P} sembolu sadece P pozitif yani Δ ya göre asal ise ve $D(P)$ nin bazı ise kullanılır.

TEOREM 3.7 (B_n için Garside Çözümü): Eğer $\beta \in B_n$ ise β , $\Delta^m \bar{P}$ şeklinde tek bir şekilde temsil edilebilir. Burada m tamsayı ve \bar{P} pozitif kelimesi de β bağıntısının herhangi bir $\sigma_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{\mu_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{\mu_r}^{\varepsilon_r}$ temsilinden aşağıdaki anlamda elde edilebilir.

- (i) X_1, \dots, X_{n-1} pozitif kelimelerinin listesi Lemma 3.4 den kurulur.
- (ii) Herbir $\sigma_{\mu_i}^{-1}$ harfi örgü $\sigma_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{\mu_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{\mu_r}^{\varepsilon_r}$ kelimesinde $\Delta^{-1} X_{\mu_i}$ ile yer değiştirir.
- (iii) $\Delta^{-1} V = \bar{V} \Delta^{-1}$ (Lemma 3.3) kullanılarak (ii) deki β , $\Delta^k P_0$ formunda temsil edilmek üzere tüm Δ^{-1} ler solda toplanır. P_0 pozitifdir ve $k \leq 0$ dir.
- (iv) $D(P_0)$ inşa edilir.
- (v) $D(P_0)$ da $(\Delta^h P)$ kelimesi h maksimal olacak şekilde seçilir $m = h + k$, $h \geq 0$.
- (vi) $D(P)$ oluşturulur. \bar{P} da $D(P)$ nin bir tabanı olur. [Birman, J. 1974,].

Örneğin $n = 3$ ve $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ alınırsa bu durumda $\sigma_2^{-1} = \Delta^{-1} \sigma_2 \sigma_1$ ve buradan

$$\beta = \sigma_1 (\Delta^{-1} \sigma_2 \sigma_1) \sigma_1 (\Delta^{-1} \sigma_2 \sigma_1) = \Delta^{-2} \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1$$

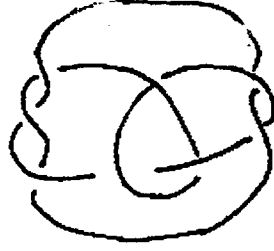
$$D(\sigma_1^2 \sigma_2^3 \sigma_1) = \{\sigma_1^2 \sigma_2^3 \sigma_1\}$$

ve $\Delta^{-2} \sigma_1^2 \sigma_2^3 \sigma_1$ de β nin temsilidir.

Bu kavramlarla ilgili olarak benzeri çalışmalar [Joan, B., Ko, K., H., Lee, S., J., 1998], [Elrifai, E., A., Morton H., R., 1994], [Epstein, D. B. A., 1992] de bulunabilir. Şimdi yukarıda bahsedilen düğümlerin örgülerini hesaplayalım. Anlatılan bu kavramlarla örgülerin bağlantılarını örgü temsilini yazdıktan sonra vereceğiz.

3.1 8_{10} Düğümünün Örgüsü

Bu düğümün regüler diyagramı Şekil 3.1 de verilmiştir. Bu düğümün sağ-el yönlendirilmiş olduğunu düşünelim. İkinci bölüm 2.5.3 başlığında verilen işlemler takip edilerek Şekil 3.2 de verilen örgü elde edilmiştir.

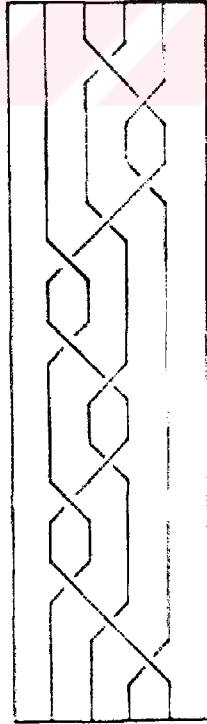


Şekil 3.1 8_{10} Düğümünün Regüler Diyagramı

Bu örgü temsilinden bu düğüm karşılık gelen örgü grubunun temsili

$$B_4 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3, \\ \sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1}\sigma_3^2\}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.2 8_{10} Düğümünün Örgüsü

Şimdi bu temsildeki bağıntılara ek olarak Lemma 3.2 ye benzeterek bu örgüyü

$$\beta' = a_{13}a_{24}^{-1}a_{23}^{-1}a_{34}^{-1}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu $H(n)$ grubunun temsilidir. Ayrıca bu düğümün örgü indeksi 4 dür. Aynı örgünün Teorem 3.7 formundaki yazılışını verelim. Teorem 3.7 de $n = 4$ ise , $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ olarak bulunur. Buradan, $\sigma_1^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1$, $\sigma_3^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ bağıntıları elde edilir. Bu bağıntıları yukarda elde edilen bağıntıda yerine yazarsak, yani

$$\beta = \sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2\sigma_1^{-3}\sigma_2^2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$$

de yerine yazılırsa,

$$\beta = \Delta^{-6}\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3^2\sigma_1^2\sigma_3^2\sigma_2\sigma_3^3\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3\sigma_2^2\sigma_1\sigma_3\sigma_2^2\sigma_3\sigma_2^3\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3^3\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2$$

olarak bulunur. $\beta = \Delta^{-6}C\sigma_1^2\sigma_2ABABC\sigma_3^2$ yazarız. Burada $A = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3$, $B = \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$, $C = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3$ olur.

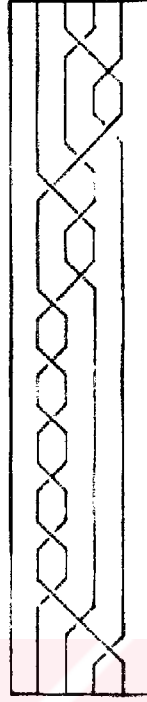
3.2 10_5 Düğümünün Örgüsü

Bu düğümün sağ-el yönlenmiş regüler diyagramı ve örgüsünün diyagramı Şekil 3.3 de verilmiştir.



Şekil 3.3 10_5 Düğümünün Regüler Diyagramı

Bu düğümün örgüsü aşağıda Şekil 3.4 de verilmiştir.

Şekil 3.4 10_5 Düğümünün Örgüsü

Buradan örgü grubu

$$\beta = \sigma_2^{-1} \sigma_3^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^2 \sigma_1^{-6} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1}$$

dir. Bu düğümün de örgü indeksi 4 dür. Lemma 3.2 den bu örgüye karşılık gelen $H(n)$ grubunun temsili ise

$$\beta' = a_{24}^{-1} a_{13} a_{12}^{-5}$$

olarak bulunur.

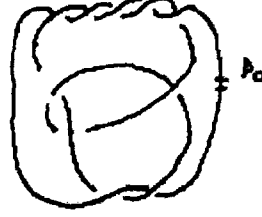
Bu örgünün Teorem 3.7 formundaki yazılışını verelim. Teorem 3.7 de $n = 4$ ise , $\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ olarak bulunur. Buradan, $\sigma_1^{-1} = \Delta^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2$, $\sigma_2^{-1} = \Delta^{-1} \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1$, $\sigma_3^{-1} = \Delta^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ bağıntıları elde edilir. Bu bağıntıları yukarda elde edilen bağıntıda yerine yazarsak,

$$\beta = \Delta^{-11} A \sigma_3^2 A C \sigma_2^2 (BC)^6 A (\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)$$

elde edilir. Burada kısaltmak amacıyla $A = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3$, $B = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2$ $C = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2$ olarak alınmıştır.

3.3 10_{47} Düğümünün Örgüsü

Bu düğümün regüler diyagramı Şekil 3.5 da verilmiştir. Bu düğümün sağ-el yönlendirilmiş olduğu varsayılarak Şekil 3.6 de verilen örgü elde edilmiştir.



Şekil 3.5 10_{47} Düğümünün Regüler Diyagramı

Bu örgü temsilinden bu düğümüne karşılık gelen örgünün temsili,

$$\beta = \sigma_2^{-1} \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^2 \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1}$$

olarak bulunur. Bu düğümün de örgü indeksi 4 dır. Bu örgüden

$$\beta' = a_{24} a_{12}^4 a_{13} a_{12}^{-1}$$

bağıntısı da yazılabilir. Temsile ek olarak bu düğümün gerenlerini pozitif olarak yazmak istersek, Teorem 3.7 den

$$\beta = \Delta^{-5} A \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^2 (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2) A (\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)$$

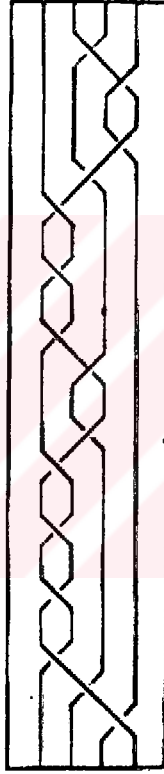
yazarız. Burada kısaltma amacıyla $A = \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1$ yazılmıştır.

$$\beta = a_{24}a_{12}^{-2}a_{13}a_{12}^{-3}$$

ile verilir. Teorem 3.7 uygulanırsa yine $n = 4$ olup, $\sigma_1^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1$, $\sigma_3^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ bağıntıları β da yerine yazılırsa,

$$\beta = \Delta^{-10}A(\sigma_1^2\sigma_2)(BC)^3(BAC)$$

bulunur. $A = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3$, $B = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2$, $C = \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$ olarak alınmıştır. Bu yazılış β nın temsilidir.



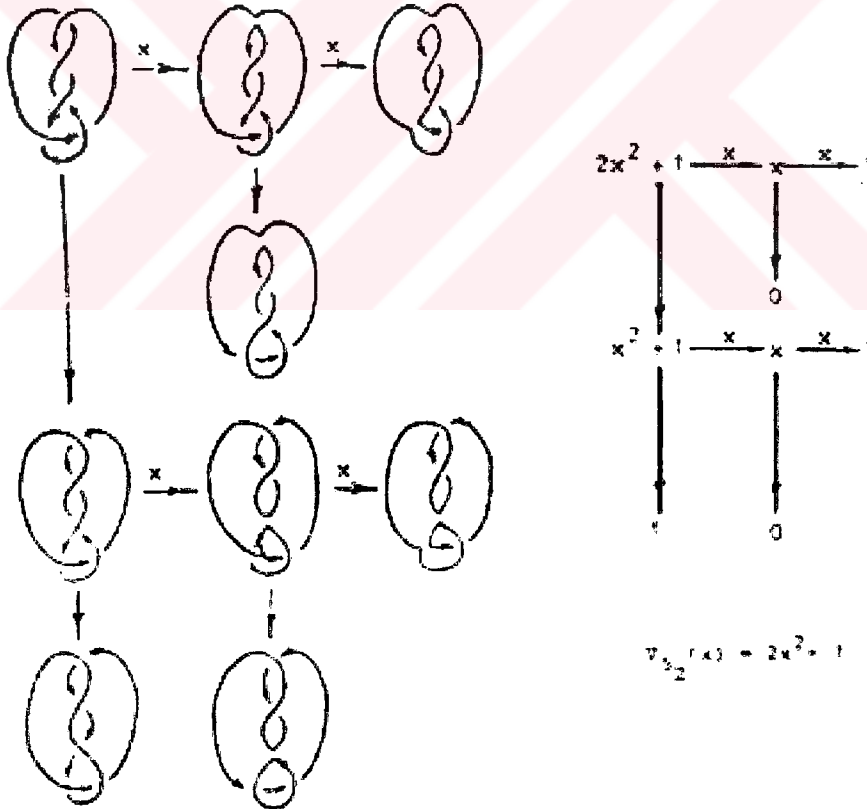
Şekil 3.8 10_{62} Düğümünün Örgüsü

4. $8_{10}, 10_5, 10_{47}, 10_{62}$ DÜĞÜMLERİNİN CONWAY POLİNOMLARI

Herhangi bir düğüm geçitlerinin en çok yarısı kadarının (üst geçitlerinin alt geçitlere) çevrilmesiyle açılabilirse Conway'in (*) metodu $\nabla_K(x)$ in hesabında etkili bir metod verir. Bu indirgeme işlemi kökleri K düğümünde olan dalları ise daha basit düğümlere indirgenerek açılma ve ayrılmış halkalara doğru giden bir T_K işlemi ağacıdır. Şekil 4.1 de 5_2 twenny düğümünün ağacı verilmiştir. T_K ağacında geçitlerin eliminasyonu veya düzeltilmesi geçidin pozitif veya negatif olması durumuna göre

$$\nabla_{L_+}(x) = \nabla_{L_-}(x) + x\nabla_{L_0}(x) \quad (*)$$

ifadesinde yatay hareketi \xrightarrow{x} veya $\xrightarrow{-x}$ ile işaretlerken geçitlerin döndürülmesi işlemi düşey hareketle takip ederiz. Sırasıyla düğümlenmeme ve ayrılmış halkaların Conway polinomlarını 1 ve 0 ile işaretler ve daha sonra geriye doğru her halka gözönüne alınarak, (*) in kullanılmasıyla $\nabla(x)$ değeri belirlenir.



Şekil 4.1 5_2 Düğümünün Ağacı

Bir L halkası n -bileşenli örgütün kapanışı formuyla tanımlanmış ise bu durumda Conway'in indirgeme metoduyla $\nabla_L(x)$ i , L nin projeksiyonundaki değişimlere gerek

kalmaksızın hesaplayabiliriz. Şekil 4.1 de granny düğümünün ve 2,5 tor düğümünün Conway polinomu verilmiştir [Buskirk,V.,1983].

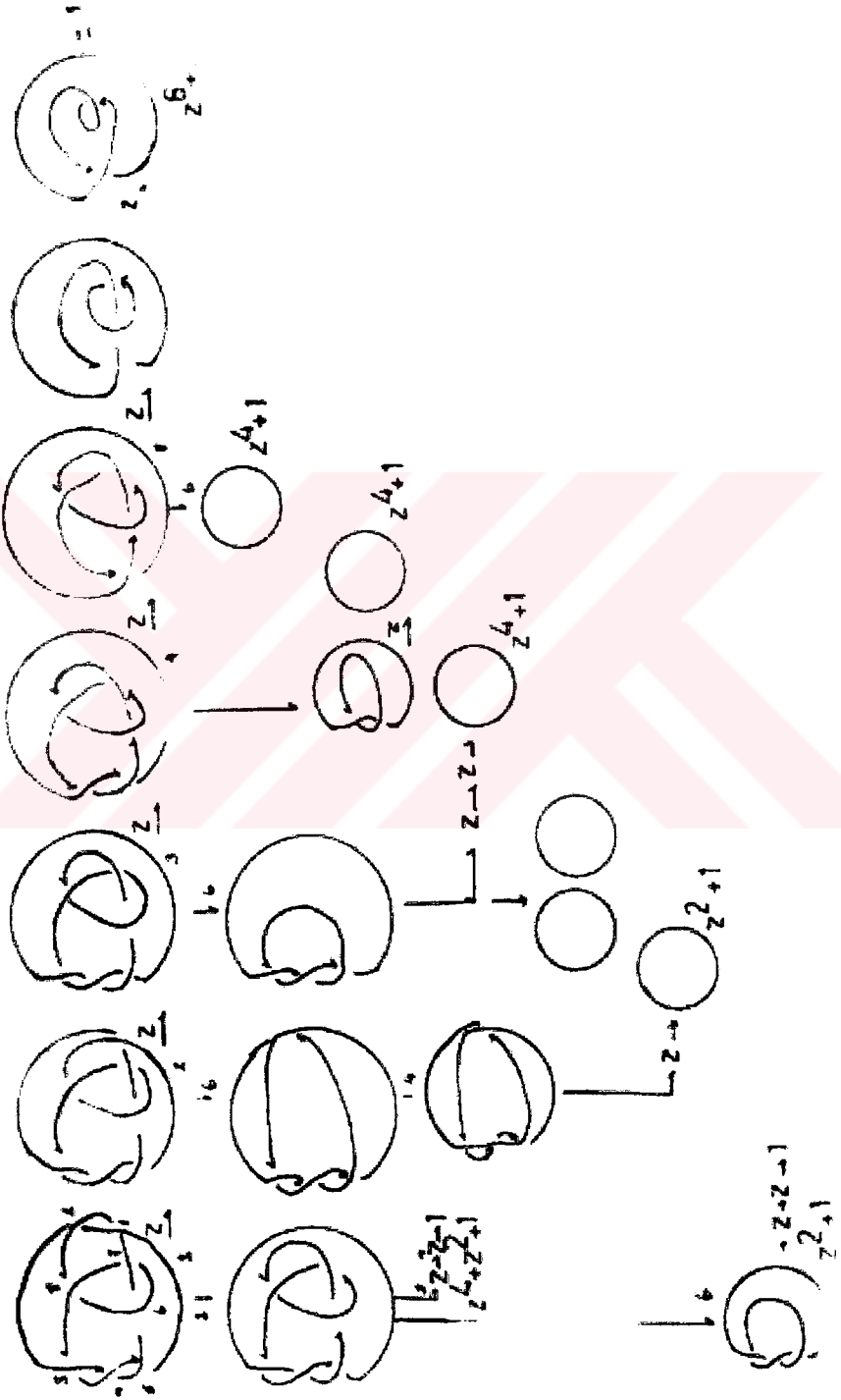
Bu bölümde temel amacımız yukarda sözü edilen kavramlar ve 2. Bölüm 2.4 Düğüm polinomları başlığında incelenen kavramların kullanılmasıyla 8_{10} , 10_5 , 10_{47} , 10_{62} düğümlerinin Conway polinomlarını hesaplamaktır. Belirtmeliyiz ki, bu şekiller herbir aşamada dallanan ve gelişen, zaman zaman birbirini tekrar eden aşamaları dikkate alınmış, bunun sonucunda en sade biçimde yazılmıştır.

4.1 8_{10} Düğümünün Conway Polinomu

8_{10} düğümünün regüler diyagramı Şekil 3.1. de verilmiştir. Conway'in indirgeme metodu kullanılarak bu düğümün geçitlerinin indirgenmesi veya çözülmesiyle elde edilen ağaç diyagramı Şekil 4.2. de verilmiştir. Ağaç diyagramı bu şeklin okunmasıyla elde edilecektir. Ayrılmış halkalara giden açılımlar ihmal edilmiş, düğümlenmemenin değeri 1 yazılmıştır. Burada geçitlerin sadece 3 tanesi pozitif geçit geriye kalan geçitler ise negatif geçit olmasına rağmen polinomun hesaplanmasında bu geçitlerin işareti polinomda işaret değişimine yol açmamıştır. Yani negatif geçit açıldığında polinoma $-z$, pozitif geçit açıldığında $+z$ yazıldıktan sonra bağıntılar okunurken bu katsayıların önemi kalmamış ve negatif çarpanlar pozitif olmuştur. Bu düğümün Conway polinomu ağacın okunmasıyla

$$\nabla_{8_{10}} = z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1$$

olarak bulunur. Ya da $(1, 3, 3, 1)$ şeklinde yazılır.



Şekil 4.2 8_{10} Düğümünün Ağacı

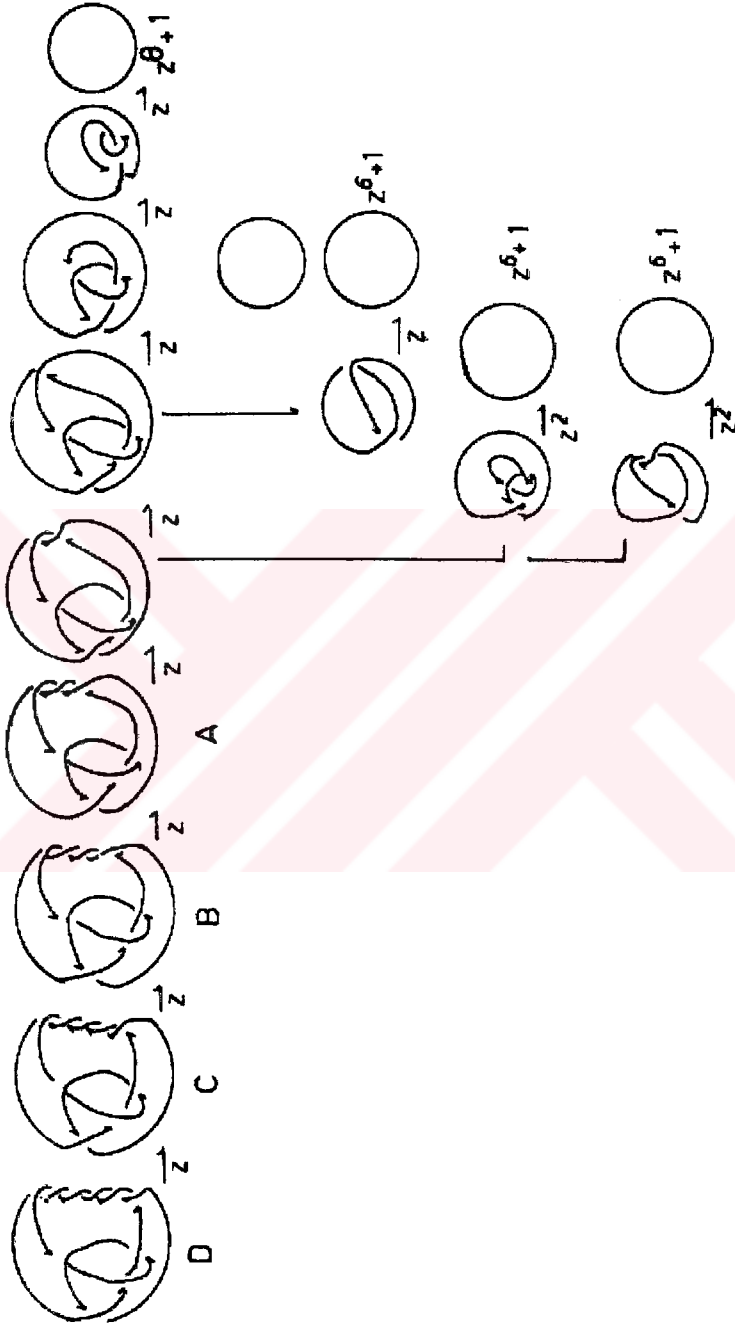
4.2. 10_5 Düğümünün Conway Polinomu

10_5 düğümünün regüler diyagramı Şekil 3.3 de verilmiştir. Bir önceki kısımda verilen işlemlerin benzeri uygulamayla bu düğümün Conway polinomunun hesaplama aşamaları Şekil 4.3, Şekil 4.4(a), Şekil 4.4(b), Şekil 4.4(c), Şekil 4.4(d) de verilmiştir. Bu şekillerin birlikte düşünülmesiyle 10_5 düğümünün Conway polinomu

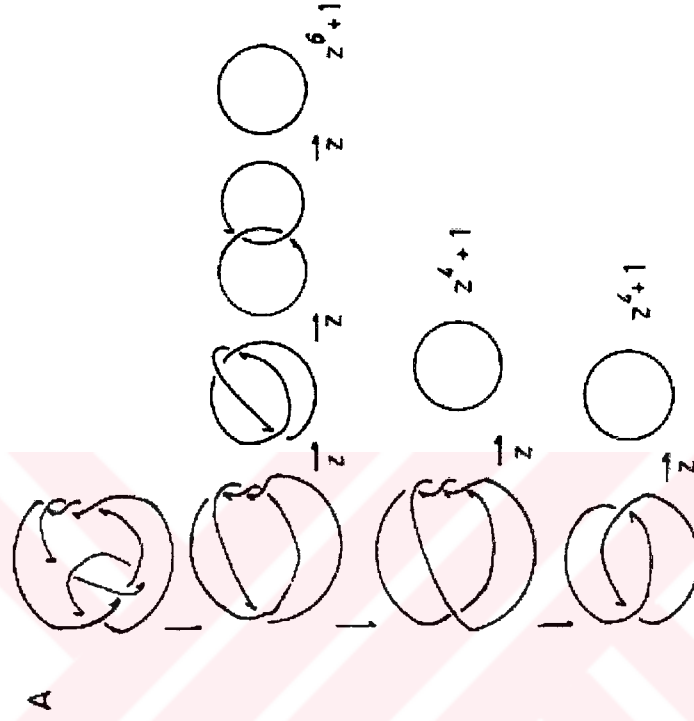
$$\nabla_{10_5} = z^8 + 4z^6 + 7z^4 + 5z^2 + 1$$

olarak bulunur. Ya da $(1, 4, 7, 5, 1)$ olarak verilir.

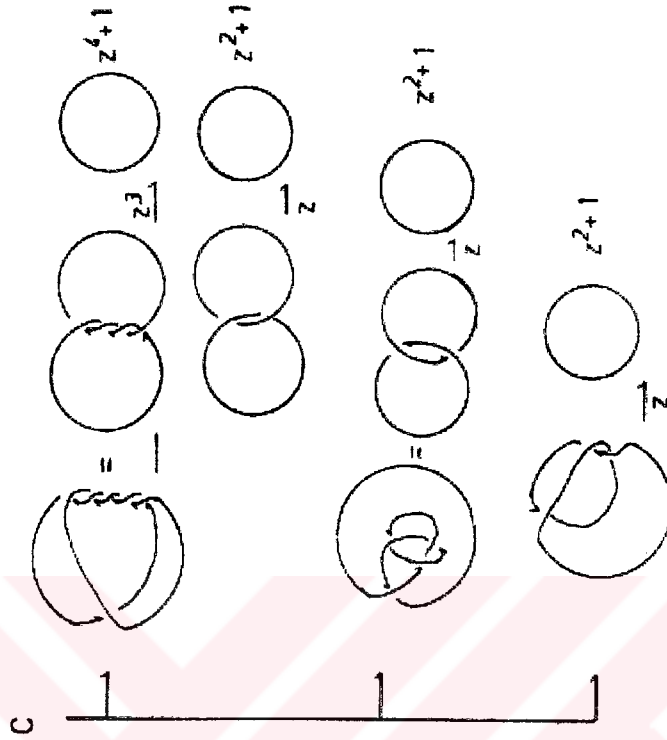




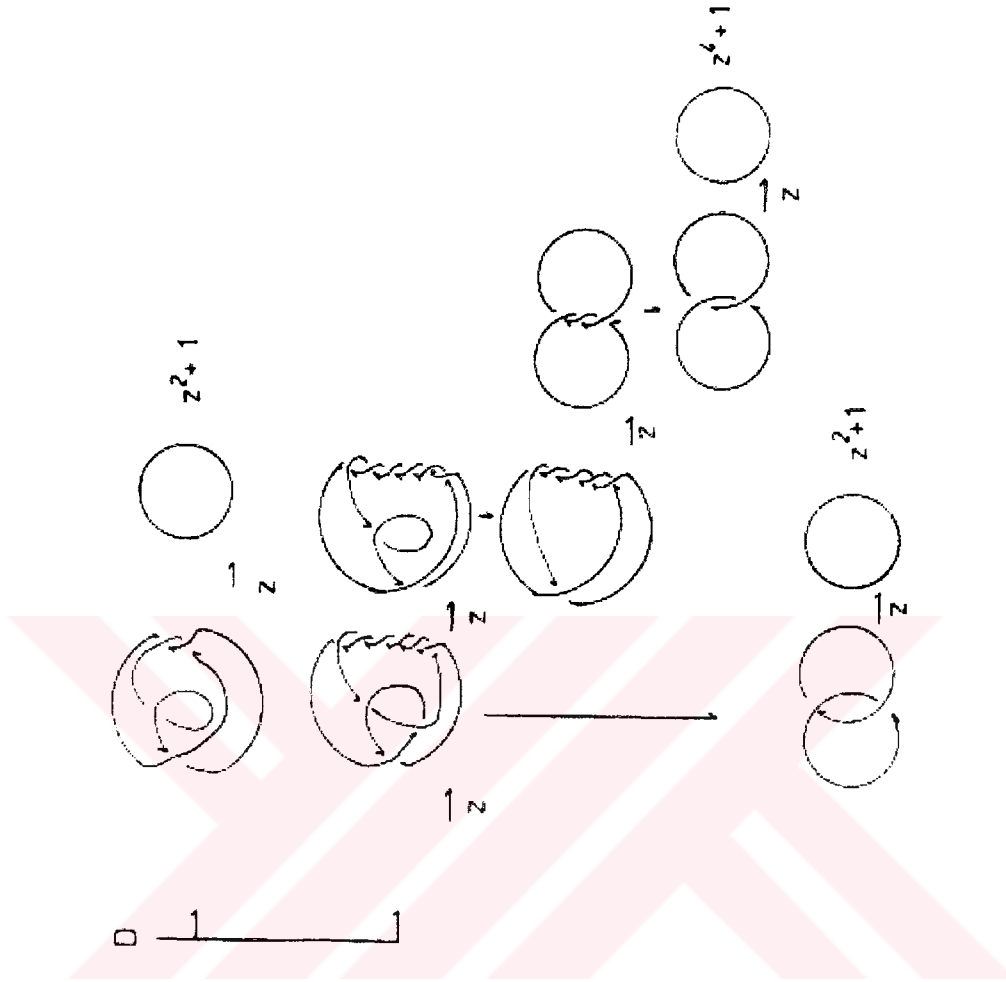
Şekil 4.3 10_5 Düğümünün Conway Polinomu 1.Adım



Şekil 4.4(a) 10_5 Düğümünün Conway Polinomu 2.Adım



Şekil 4.4(c) 10_5 Düğümünün Conway Polinomu 4.Adım



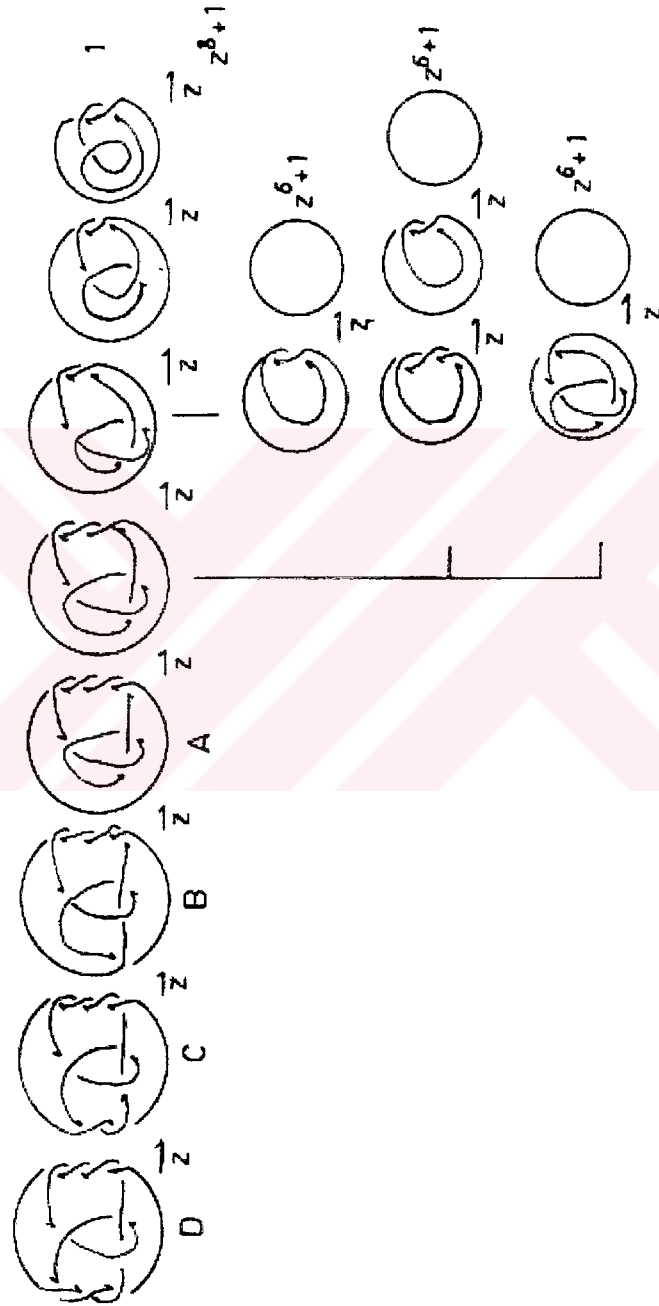
Şekil 4.4(d) 10_5 Düğümünün Conway Polinomu 5.Adım

4.3. 10_{47} Düğümünün Conway polinomu

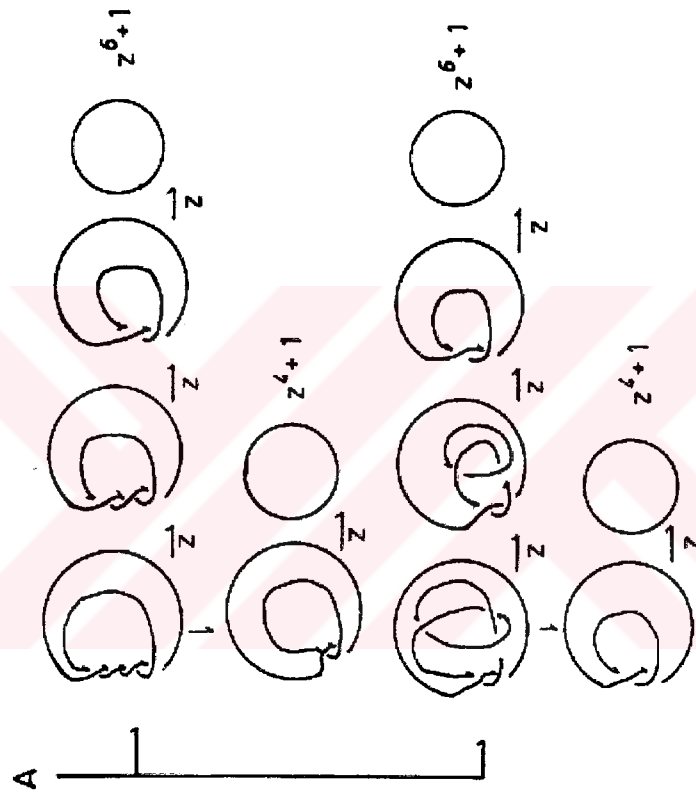
10_{47} düğümünün regüler diyagramı Şekil 3.5 da verilmiştir. Bu düğümün Conway polinomu Şekil 4.5-Şekil 4.6(a)-(d) diyagramlarından sonra bağıntıların birleştirilmesiyle

$$\nabla_{10_{47}} = z^8 + 6z^6 + 8z^4 + 5z^2 + 1$$

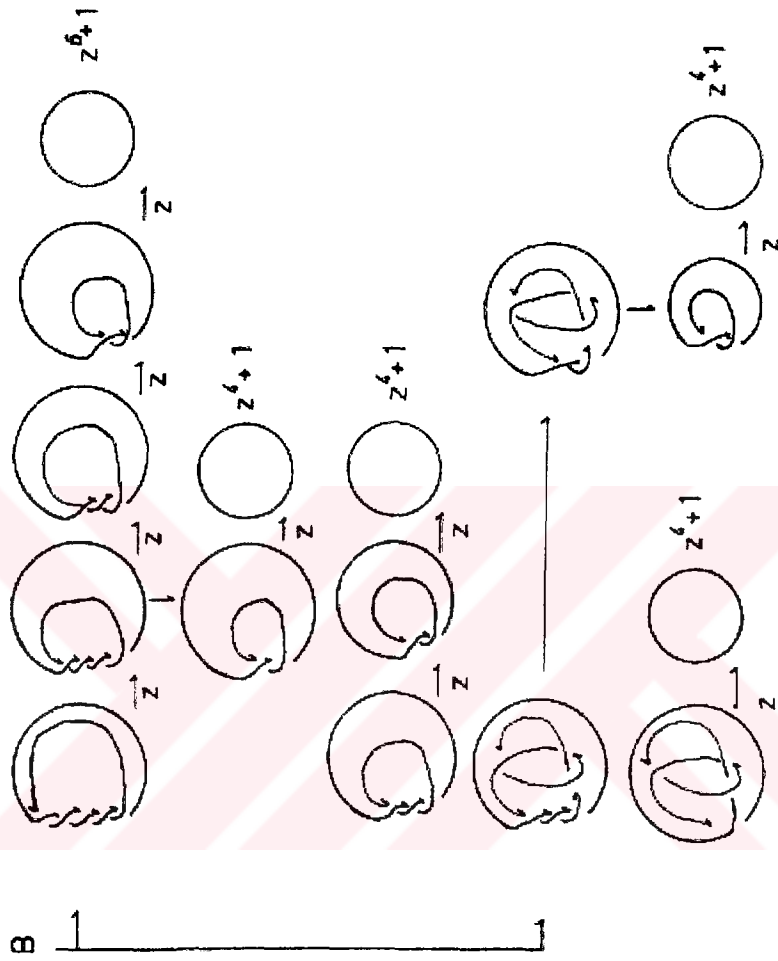
olarak bulunur. Bu form $(1, 6, 8, 5, 1)$ şeklinde yazılabilir.



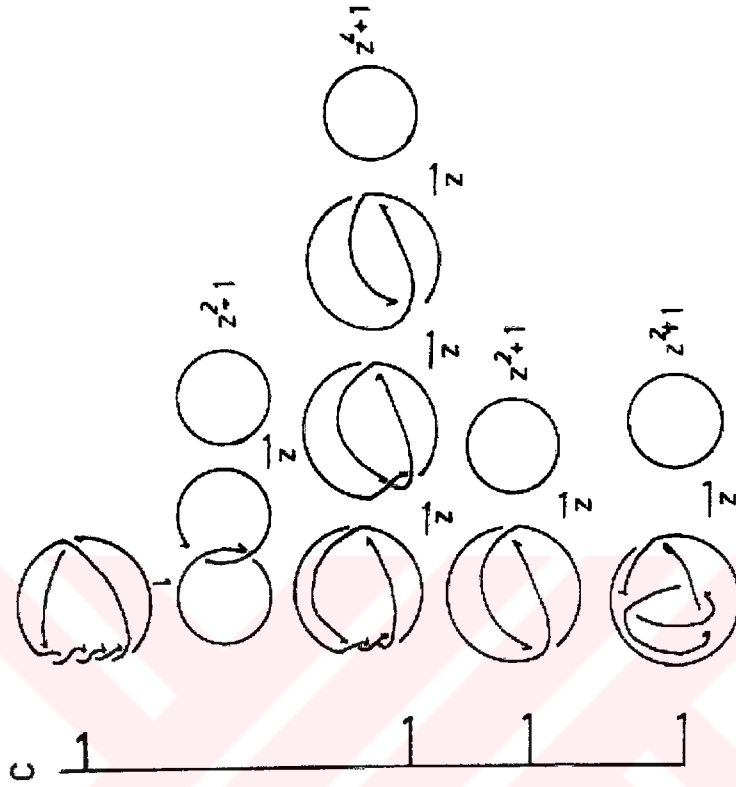
Şekil 4.5 10_{47} Düğümünün Conway Polinomu 1. Adım



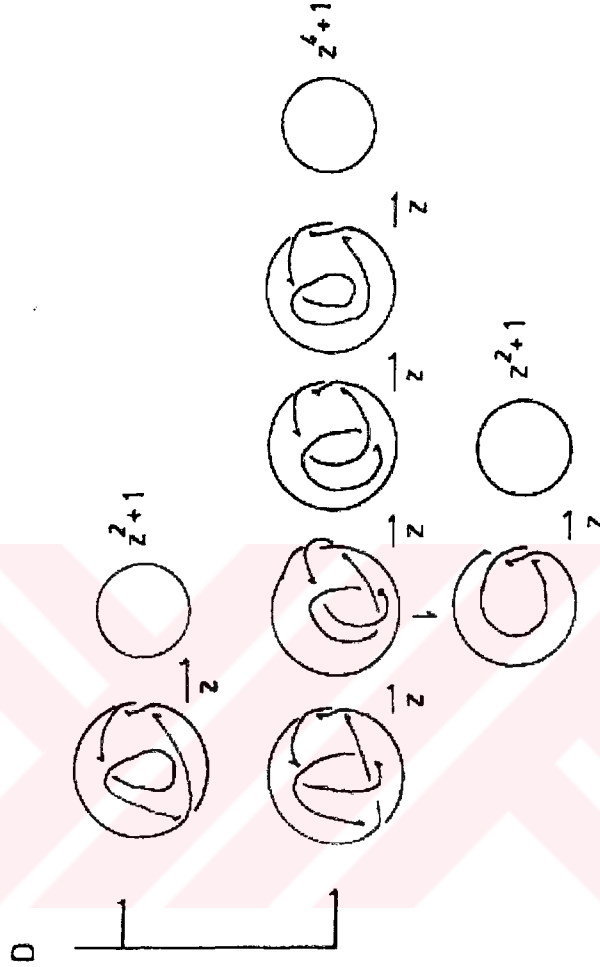
Şekil 4.6(a) 10_{47} Düğümünün Conway Polinomu 2. Adım



Şekil 4.6(b) 10_{47} Düğümünün Conway Polinomu 3. Adım



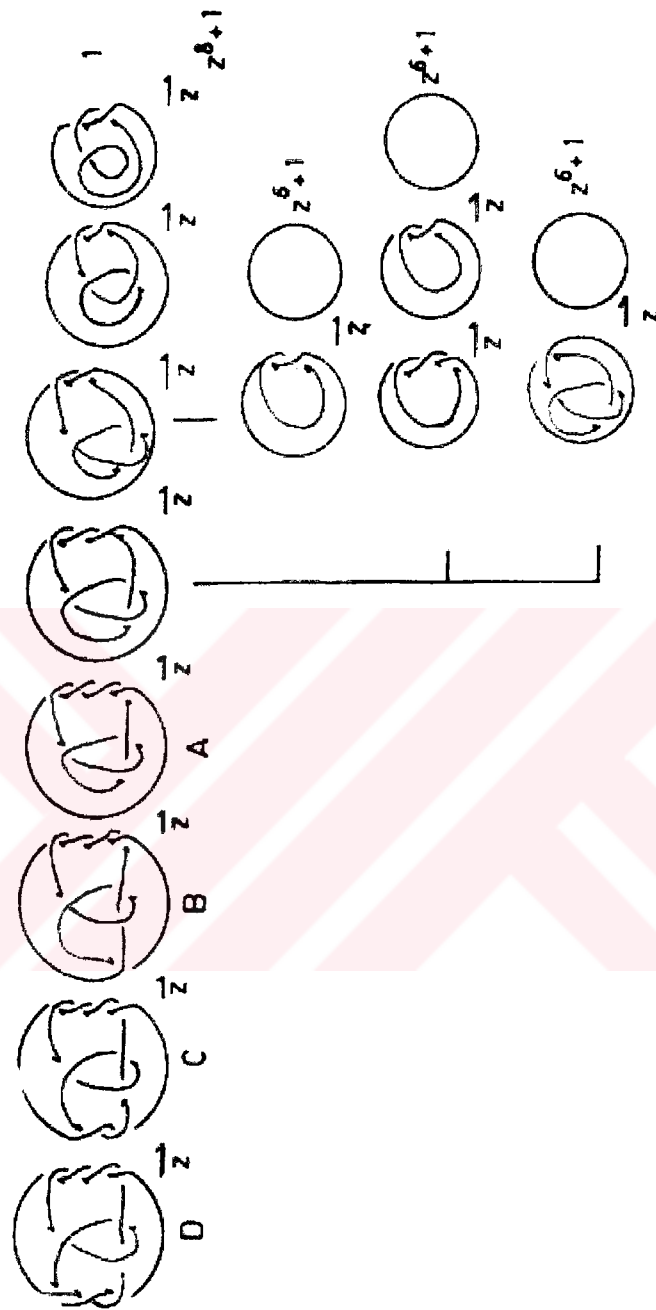
Şekil 4.6(c) 10_{47} Düğümünün Conway Polinomu 4. Adım



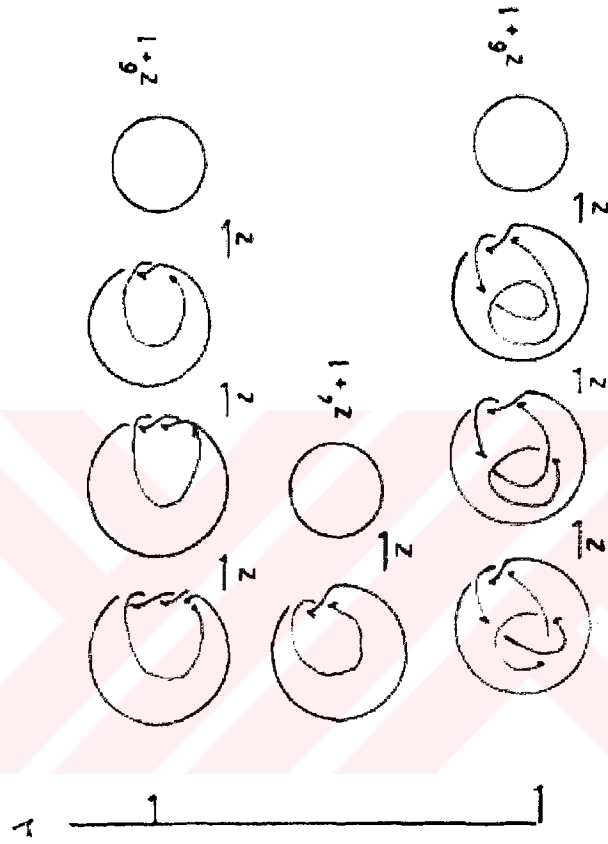
Şekil 4.6(d) 10_{47} Düğümünün Conway Polinomu 4. Adım

4.4. 10_{62} Düğümünün Conway polinomu

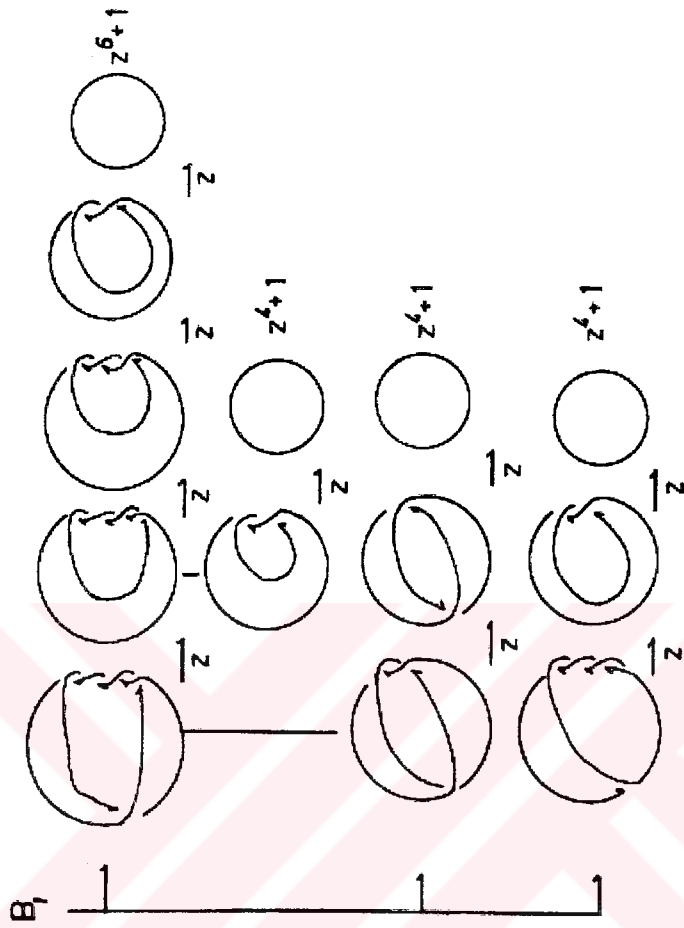
10_{62} düğümünün regüler diyagramı Şekil 3.7 de verilmiştir. Bu düğümün Conway metoduyla açılımı ise Şekil 4.7, Şekil 4.8.(a), Şekil 4.8(b), Şekil 4.8(c), Şekil 4.8(d), Şekil 4.8(e) de verilmiştir.



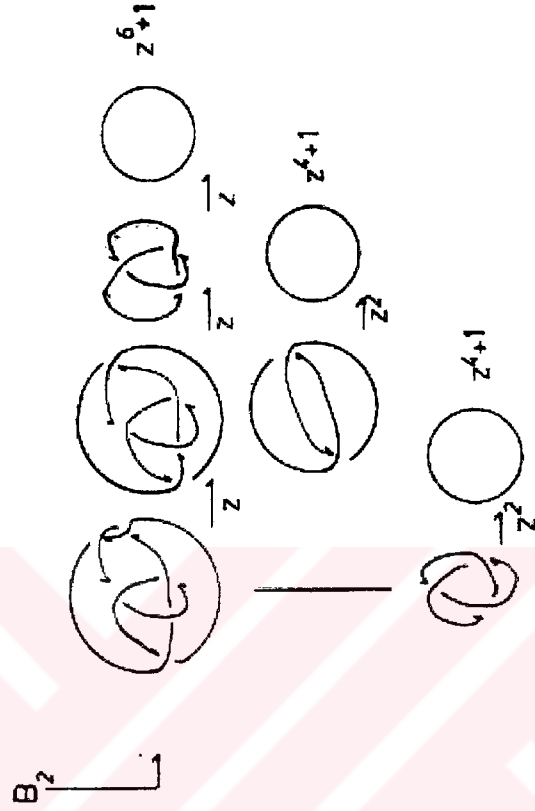
Şekil 4.7 10_{62} Düğümünün Conway Polinomu 1. Adım



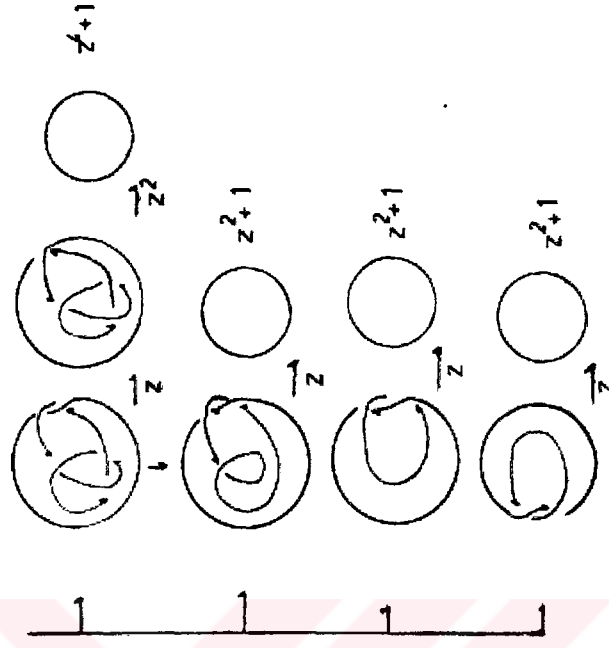
Şekil 4.8(a) 10_{62} Düğümünün Conway Polinomu 2. Adım



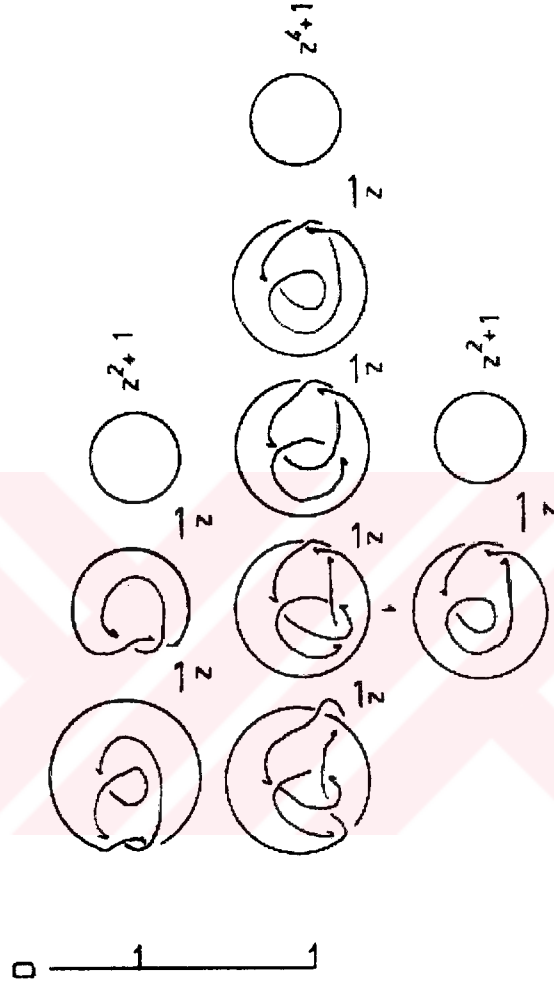
Şekil 4.8(b) 10_{62} Düğümünün Conway Polinomu 3. Adım



Şekil 4.8(c) 10_{62} Düğümünün Conway Polinomu 3. Adım



Şekil 4.8(d) 10_{62} Düğümünün Conway Polinomu 4. Adım



Şekil 4.8(e) 10_{62} Düğümünün Conway Polinomu 5. Adım

Bu şekillerin kullanılmasıyla ve bağıntıların birleştirilmesiyle

$$\nabla_{10_{62}} = z^8 + 5z^6 + 8z^4 + 5z^2 + 1$$

elde edilir. Buradan (1, 5, 8, 5, 1) formunu yazmak mümkündür.

5. POZİTİFLİK KAVRAMI

Bu kısımda pozitif örgüler için verilen ifadeleri 4. Bölümde verilen örgülere uygulayacağız. Bunun için önce pozitiflikle ilgili teoremleri verelim.

LEMMA 5.1: Pozitif n bileşenli b örgüsü $1 \leq i \leq n - 1$ aralığındaki bazı σ_i örgü gerenlerinin tek bir oluşumunu içerirse bu durumda bir kaç pozitif $n - 1$ bileşenli örgü aynı kapanışa sahiptir.

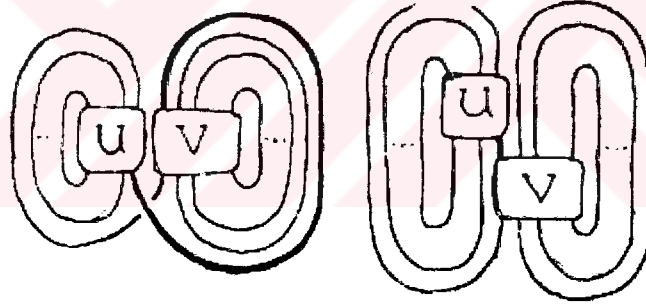
İSPAT: Eğer bazı σ_i den bağımsız w kelimeleri için

$$b = w(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \dots, \sigma_{n-1})\sigma_i$$

ise bu taktirde σ_i ardışık olmayan indeksleri için değişmeli olduğundan

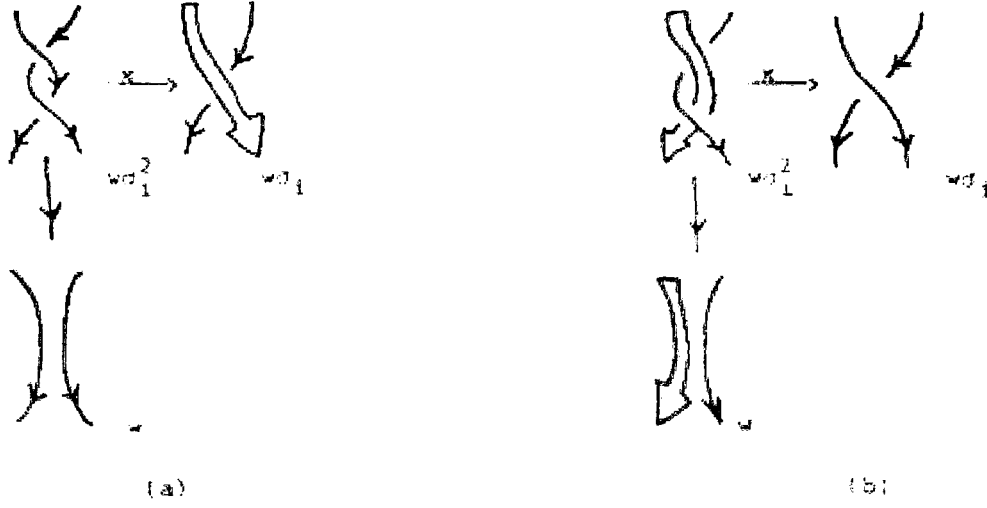
$$b = u(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1})v(\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{n-1})\sigma_i$$

ifadesi Şekil 5.1 de gösterildiği gibi $n - 1$ bileşenli $u(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1})v(\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{n-1})$ ile benzer kapanışa sahiptir.



Şekil 5.1 $n - 1$ Bileşenli Örgü İçin Bağıntı

Pozitif bir K düğümü için Conway'in indirgeme metodu pozitif halkaların bir T_K ağacını üretir. T_K daki dallar (geçitlerin döndürülmesi yada geçitlerin açılmasıyla) sadece aynı iplikcikteki geçitleri içeren bitişik çiftlerin bir tanesi olarak görüldüğünde geçitlerin değiştirilmesi şartıyla pozitif halkaların ağacı üretilir. Bu şartlar aşağıdaki lemmaya göre düzenlenir. $w\sigma_i^2$ nin kapanışının aynı veya farklı bileşenlerini içeren σ_i^2 geçişlerine göre $w\sigma_i$ ye olan bu güçlü etkisi Şekil 5.2 (a) veya (b) de verilmiştir.

Şekil 5.2 $w\sigma_i$ nin Etkisi

Hatırlatmalıyız ki pozitif n örgüsünün kapanışının bileşenlerinin bir çiftinin halkalanma sayısı olan p tam olarak bu bileşenleri içeren geçitlerin yarısı kadar olduğunda $p, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ örgü gerenlerini en az bir kez içerir ise bir düğümdür veya ayrılamayan halkadır.

LEMMA 5.2: p kapanışı aşık olmayan düğüme veya 2-yuvara bölünemeyen bir halka olan pozitif örgü olsun. Bu taktirde σ_i^2 lerin görüldüğü benzer kapanışa sahip (fakat muhtemelen daha az geçitli) pozitif örgü vardır[Buskirk,V.,1983].

İSPAT: Eğer p, σ_1 in tek bir oluşumunu ihtiva ederse Lemma 1 den aynı kapanışa sahip fakat bir tane daha az bileşene sahip bir örgü vardır. p aşık olmayan düğüm veya ayrılamayan halka olduğunda bir örgü en azından σ_1 in iki oluşumuna sahip olmalıdır. Kabulden Lemma 5.2 şu sonucu çıkarmayı başaramaz? : Eğer σ_1 in p de iki ardışık oluşumu σ_i nin ardarda gelmeyen indislerinin çarpımlarının komutatifliğinin kullanılmasıyla mümkün oldukça yakındırlar. Bu durumda,

$$p \sim \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m-2} \sigma_{m-1} \sigma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_1 \dots$$

yazılır. Burada birinci m, σ_i lerin indislerinin artma miktarıdır ve \sim ise kelimedeki harflerin devirli permutasyonlarının denkliklerini işaret eder.

$$\sigma_{m-1} \sigma_m \sigma_{m-1} = \sigma_m \sigma_{m-1} \sigma_m$$

örgü bağıntısından,

$$p \sim \sigma_m \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m-2} \sigma_{m-1} \sigma_m \dots \sigma_1 \dots$$

ifadesinde σ_1 ler birbirlerine daha yakındırlar. Bu şekilde devam edilirse σ_1 in daha az olduğu $p \sim \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \dots$ pozitif örgüsü vardır. Eğer bu σ_1 in oluşumundan ayrılırsa bu durumda Lemma 5.1 den dolayı p örgüsü bir kare içerisinde bir daha az geçit içeren pozitif örgü olur. Bu ise çelişkidir. Eğer böyle değilse bu duruma gelinceye kadar devam edilir.

İşaret etmeliyiz ki bu durum sözü edilen ve bazı σ_i^2 leri içeren pozitif örgü üretir ve Lemma 5.1 in herhangi bir uygulaması geçişler ve bileşenlerin sayıları arasındaki farkın invariant olmasından uzaklaşır.

LEMMA 5.3: Eğer n bileşenli herhangi bir pozitif örgünün kapanışı düğüm veya ayrılamayan halka ise bu durumda Conway polinomunun derecesi $c - n + 1$ dir. Burada c örgünün geçişleri sayısıdır [Birman, J.², 1969].

İSPAT: İfade etmeliyizki bu sonuç düğümlememe ($n - 1$ geçit) için de sağlanır. Lemma 5.2 den ve onu takip eden uyarıdan sonuç çıkarmanın mümkün olmadığı minimal geçişli pozitif örgünün, $c - 2$ geçişli w örgüsü $w(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})\sigma_i^2$ formunadır. Bu durumda 4. bölümde verilen (*) ifadesinden eğer w ayrılmış halka ise (yani w, σ_i lerden bağımsız ise) şunu yazarız.

$$\deg \nabla_{w\sigma_i\sigma_i}(x) = \deg[x \nabla_{w\sigma_i}(x)] = 1 + (c - 1) - n + 1 = c - n + 1$$

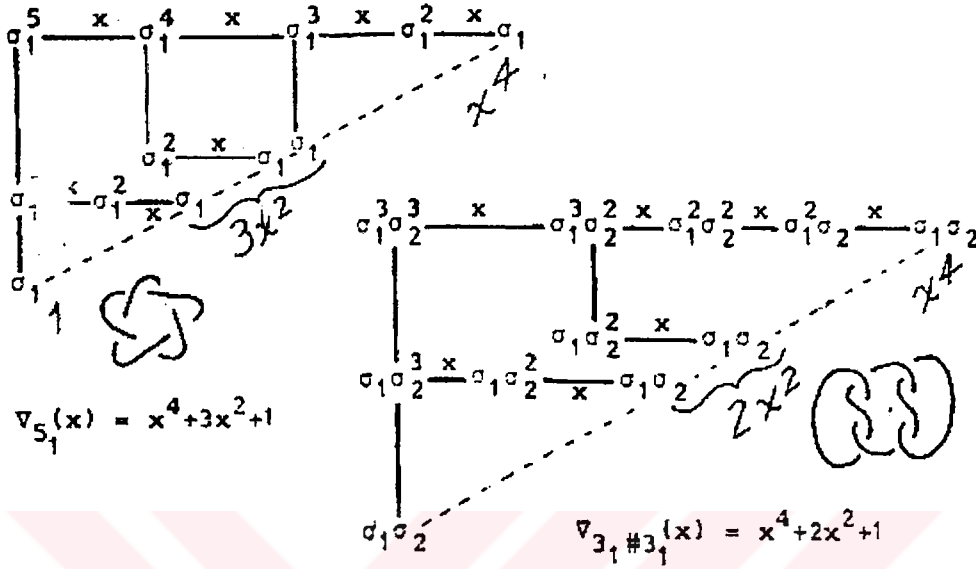
Eğer böyle değilse bu taktirde

$$\begin{aligned} \deg \nabla_{w\sigma_i\sigma_i}(x) &= \max\{\deg \nabla_w(x), \deg \nabla_{w\sigma_i}(x)\} \\ &= \max\{c - n - 1, c - n + 1\} = c - n + 1 \end{aligned}$$

yazarız. Her iki durumda çelişkidir.

Aşağıdaki teorem şunu ifade eder: Pozitif bir düğüm $2m$ inci mertebeden Conway polinomuna sahipse onun polinomunun derecesi great-great-...granny düğümünün

kapanışı olan $\sigma_1^3 \sigma_2^3 \dots \sigma_m^3$ ile kapanışı σ_1^{2m+1} olan $2m + 1$ tor düğümünün derecesi olan 2 arasındadır.



Şekil 5.3 5_1 nin ve $3_1 \# 3_1$ in Ağacı

Şekil 5.5 de bu sınır değer olan 2 nin ispatı verilmiştir. Şekil 5.5 de $m = 2$ için bu sınırın inşasında ayrılmış halkalara olan kenarlar $\nabla(x)$ e katkısı olmadığından ihmal edilmiştir.

TEOREM 5.1: Eğer pozitif K düğümü $2m$ mertebeden Conway polinomuna sahipse bu takdirde,

$$\nabla_K(x) = x^{2m} + a_{2m-2}x^{2m-2} + \dots + a_4x^4 + a_2x^2 + 1$$

şeklindedir. Burada $\binom{m}{k} \leq a_{(m-k)} \leq \binom{2m-k}{k}$ ile tanımlanmıştır [Buskirk, J.,V.,1983].

Herhangi bir düğümün minimal geçitli projeksiyonunun geçit sayısı c' Conway polinomunun derecesinden en az bir daha fazladır [Alexander,J.W.,1928], [Rolfsen,D.,1976]. Pozitif düğüm olması durumunda ise c' için üst sınır aşağıdaki sonucu sağlar. Bu sonuç herhangi bir pozitif K düğümünün minimal ipliklikli kapalı örgü projeksiyonundaki σ_i lerin üstlerinin (total) toplamlarının en çok K nın Conway polinomunun derecesinin iki katından 3 daha az olduğudur.

LEMMA 5.4: Eğer K , $2m$ inci dereceden Conway polinomuna sahip bir esas düğüm (trefoil hariç) ise bu taktirde kapanışı K olan ve en çok $4m - 3$ geçiş içeren , minimal geçişe sahip bir p pozitif örgüsü vardır.

İSPAT: Lemma 5.3 den, $2m$ dereceli Conway polinomuna sahip 2 bileşenli σ_1^{2m+1} kapanışına sahip örgü $m \geq 2$ olması şartıyla , $4m - 3$ den fazla geçit ihtiva etmez . Eğer, K düğümünün, c geçişli n bileşenli minimal geçişli örgüsünü p ile temsil edersek Lemma 5.1 den dolayı $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ lerin herbiri en az iki kez p de yer alır ve buradan $c \geq 2n - 2$ dir. $4m - 3 \geq c$ olduğunu ispatlamak için lemma 5.3 den dolayı $4m - 3 = 2c - (2n + 1)$ olduğunda $c \geq 2n + 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki σ_1 nin p de oluşumunun minimal sayısı r olsun. Yani ne p nin devirli konjugesinde ne de örgü bağıntıları olan $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($i > j + 1$) yi sağlayan pozitif örgüde bulunan en küçük σ_1 in üstel değerlerinin toplamının minimal sayısı r dir. Eğer, p sayısı $\sigma_1^r w(\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1})$ formunda ise r nin tek veya çift olmasına göre kapanışı karmaşık düğüm(düğüm toplama) veya halkadır(birinci iplikciği birinci bileşen olan). Her iki durumda çelişkidir. Şu halde p $\sigma_1^{r_1} w_1(\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}) \sigma_1^{r_2} w_2(\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}) \dots \sigma_1^{r_s} w_s(\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1})$ olmalıdır. Burada $s \geq 2$ ve w_i ler de σ_2 den bağımsız olmamalıdır. Gerçekten eğer herhangi bir w_i 2 den daha az σ_2 içerirse bu durumda,

$$\begin{aligned} \sigma_1 w_i(\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}) \sigma_1 &= w'_i(\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 w'_1(\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}) \\ &= w'_i(\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}) \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 w'_1(\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}) \end{aligned}$$

ifadesi r nin minimalliğine aykırıdır. Şu halde, p de en azından dört tane σ_2 vardır(her bir σ_{n-1} , σ_i ile toplandığında σ_{n-2} hariç). Benzer olarak p de en az dört σ_{n-2} vardır.

Şu halde eğer $n \geq 5$ ise $c > 2n + 1$ dir. Bununla beraber eğer $n = 4$ ve p de $2n + 1$ geçişten daha az geçit içerdiği zaman K nin düğüm olmasına karşıt olmasına rağmen ya $p \sim \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2$ ve p nin kapanışı 4 bileşenli halkadır veya $p \sim \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2$ ve p nin kapanışı üçüncü iplikciği bir bileşen olarak kabul eden halkadır.

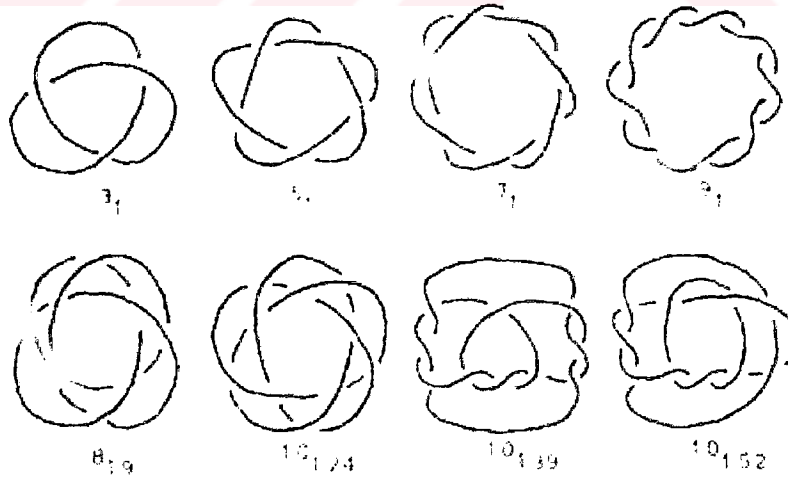
Sonuç olarak, eğer $n = 3$ ise $p \sim \sigma_1 \sigma_2^{s'} \sigma_1 \sigma_2^{s''}$ ve hem s' hemde s'' tektir(böyle değilse p nin kapanışı halkadır) ve buradan $c > 2n + 1$, veya $r \geq 3$ ve (p en az 4 tane σ_2 ihtiva

ettiği için) $c \geq 2n + 1$ olur. Gerçekten eğer n çift ve en az 6 ise $c \geq 2n + 3$ ve n tek ise $c \geq 2n - 2$ dir. Lemma 5.3 den n ve c karşılıklı çifttir [Buskirk, J., V., 1983].

W. Brau 1936 da monic Alexander polinomuna sahip on ve daha az geçişli düğümlerden 132 tane esas düğümü muhtemel pozitif düğüm olarak ele aldı (twenty düğümü 5_2 de dahil). Diğer 41 düğüm ise (10_{99} i' de içeren ve kapanışı $\sigma_1^3 \sigma_2^3 \sigma_3^3 \sigma_4^3$ olan karmaşık toplam düğümü ile aynı Conway polinomunu paylaşan amphichiral düğümle beraber) 1982 de L. Rudolph tarafından pozitif düğümler sıfırdan farklı işarete sahiptirler şeklinde sınıflandırıldı.

10 geçitten daha az geçitli olan 60 esas düğüm Teoremden dolayı pozitif olmayan olarak verildi. Bunlardan 57 tanesinin (sahte aşık düğümü 8_5 dahil) Conway polinomunun katsayıları çok küçük ve 3 tanesinin (Perko düğümü 10_{161} dahil) katsayıları ise çok büyüktür.

Bir diğer 10 geçitli düğüm Lemma 5.4 ve ondan önceki uyarıdan (özel olarak kapanışı $\sigma_1^3 \sigma_2^3 \sigma_3^3$ olan pozitif karmaşık düğümü olan 10_{143} düğümü) pozitif olmayan olarak adlandırılır ve 10 geçitli bir pozitif düğümün Conway polinomunun derecesi 8 olmalıdır. Dikkat edilirse Lemma 5.4 tek başına en çok 38 tane pozitif düğümün olabileceği sonucunu verecek kadar kısıtlayıcıdır.



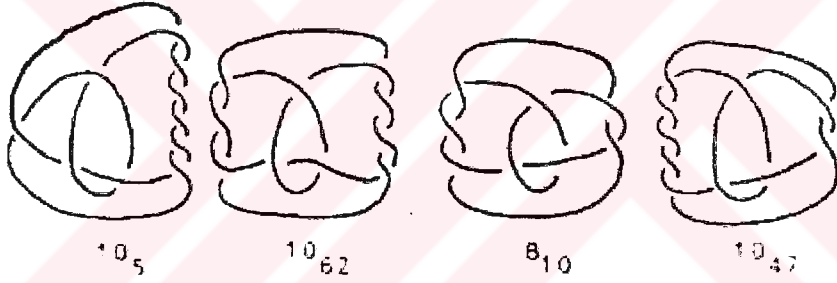
Şekil 5.4 Pozitif Düğümler

Bir düzine düğümden Şekil 5.4 de gösterilen 8 tanesinin (gerçek aşık düğümü 8_{19} dahil ve 5 diğer tor düğümü dahil) pozitif olduğu gözlenmiştir [Buskirk, J. V., 1983].

Şekil 5.5 de verilen 4 düğümün(kapanışları pozitif karmaşık $3_1\#3_1\#3_1$ düğümünün kapanışı ve $5_1\#3_1\#3_1$ düğümünün kapanışıyla aynı Conway polinomunu paylaşan 8_{10} ve 10_{62} düğümleride dahil pozitif değillerdir.

Bu düğümlerin örgülerinin kapanışları r, s pozitif olmak üzere $\sigma_1^r \sigma_2^{-1} \sigma_1^s \sigma_2^{-2}$ formunda olup homogeneous olmaları Stallings tarafından düşünülmüştür[Stallings,J., 1978].

UYARI: Pozitif bir K düğümü için Conway polinomunun katsayılarının üst sınırını yukarıda K nin (ayrılmış halkaları giden dallar ihmal edilerek) ağacını verdik. Bu durumda σ_1^{2m+1} kapanışına sahip ağacın $\deg \nabla_K(x) = 2m$ olan alt ağacı bulunabilir. Bununla beraber, dallanmaya düğümlenmemenin ayrılmış halkaları elde edilmeye kadar devam etmiş olsaydık bu durumda tersine olarak σ_1^{2m+1} kapanışının ağacı $\sigma_1^m \sigma_2^{m+2}$ ve $\sigma_1^{m+1} \sigma_2^{m+1}$ ($m \geq 2$) nin kapanışının ağacından daha kuvvetli olmalıydı.



Şekil 5.5 İncelediğimiz Düğümler

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada temelde J.V. Buskirk tarafından pozitif olup olmadıkları incelenmediği belirtilen dört düğümün pozitiflik kavramları üzerinde durmaya çalıştık. Bu amaçla verilen düğümlerin örgülerini çıkardık ve bunların temsillerini verdik. Bu düğümler için Buskirk tarafından verilen Lemma ve teoremleri kullanarak ve örgülerinden hareketle bu düğümlerin pozitif olmadıklarını verdik. Ayrıca bu düğümlerin Conway polinomlarını , Conway'in metodunu uygulayarak elde ettik.

$8_{10}, 10_5, 10_{47}, 10_{62}$ düğümlerinin örgüleri ve Conway polinomları sırasıyla 4. ve 5. bölümlerde incelendi. 8_{10} düğümünün polinomu $\nabla_{8_{10}} = z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1$, 10_5 düğümünün polinomu $\nabla_{10_5} = z^8 + 4z^6 + 7z^4 + 5z^2 + 1$, 10_{47} düğümünün polinomu $\nabla_{10_{47}} = z^8 + 6z^6 + 8z^4 + 5z^2 + 1$ ve 10_{62} düğümünün polinomuysa $\nabla_{8_{10}} = z^8 + 5z^6 + 8z^4 + 5z^2 + 1$ olarak yazıldı. Lemma 5.3 e göre n bileşenli pozitif örgünün Conway polinomunun derecesi $c - n + 1$ olmalıdır. c örgünün geçişleri sayısı ve n de örgünün iplikcikleri sayısı olarak verilmiştir. Bu değerleri yukardaki 4 düğüm için araştırınca 8_{10} için polinomun derecesi 9 , $10_5, 10_{47}, 10_{62}$ düğümleri içinse 12 olarak bulunur. Bu değerler asıl değerlerden yüksek olmaktadır. Dolayısıyla bu düğümler için pozitif olmadıkları yorumunu yaparız.

Benzer olarak, Teorem 5.1 uygulanırsa

$$\begin{aligned} 8_{10} \text{ düğümü için } & 3 \leq a_2 \leq 6, 3 \leq a_4 \leq 5, a_6 = 1 \\ 10_5 \text{ düğümü için } & 4 \leq a_2 \leq 10, 6 \leq a_4 \leq 15, 4 \leq a_6 \leq 7, a_8 = 1, \\ 10_{47} \text{ düğümü için } & 4 \leq a_2 \leq 10, 6 \leq a_4 \leq 15, 4 \leq a_6 \leq 7, a_8 = 1, \\ 10_{62} \text{ düğümü için } & 4 \leq a_2 \leq 10, 6 \leq a_4 \leq 15, 4 \leq a_6 \leq 7, a_8 = 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Biz ise bu değerleri 5.bölümde tam olarak verdik.

Ayrıca bu 4 düğüm için ilave olarak şu şekilde bir bağıntının bulunduğunu keşfettik: Bu dört düğümün regüler diyagramları gözlemlendiği zaman z^2 li terimin katsayısı düğümün iplikciklerinin birbirleriyle yapmış oldukları tam ilmeklerin sayısı kadardır. Benzer olarak Conway polinomunun en yüksek dereceli ifadesi ise bu tam ilmeklerin sayısı ve geride kalan geçitlerin toplamı kadardır. Bu durumda z^4 ve z^6 li terimlerin sayısını hesaplamak problemi kalmaktadır.

Herhangi bir düğümün minimal geçitli projeksiyonunun geçit sayısı c' Conway polinomunun derecesinden en az bir daha fazladır. Pozitif düğüm olması durumunda ise c' için üst sınır aşağıdaki sonucu sağlar. Bu sonuç herhangi bir pozitif K düğümünün minimal iplikcikli kapalı örgü projeksiyonundaki σ_i lerin üstlerinin (total) toplamlarının en çok K nın Conway polinomunun derecesinin iki katından 3 daha az olduğudur(Lemma 5.4). Bu durumu bizim çalıştığımız 4 düğüme uyarlamaya çalışırsak 8_{10} düğümünün polinomunun derecesi 6 olup $c' = 8$ dir. 8_{10} için Lemma 5.4 uygulanmaya çalışılırsa 9 geçitli minimal pozitif örgü bulunmalıdır. Biz ise 12 geçitli örgü bulduk. 10_5 düğümü için $c' = 10$ polinomu ise 8. derecedendir. Örgüsü ise 15 geçitlidir. 10_{47} düğümünün Conway polinomunun derecesi 8, örgüsünün geçit sayısı 15 olurken $c' = 10$ olmaktadır. 10_{62} düğümü için $c' = 10$ olurken polinomunun derecesi 8, örgüsünün geçit sayısı ise 15 dir. Bu düğümlerin örgülerinde minimal durumu gözönüne alırsak dahi geçit sayıları 11 olmaktadır.

Ayrıca Stallings tarafından $\sigma_1^r \sigma_2^{-1} \sigma_1^s \sigma_2^{-2}$ formunda düşünülen bu düğümler [Stallings, J., 1978] için $\sigma_1 = \sigma_3$ formunda ise bu düğümlerin örgüleri bu formu sağlamaz. Yani 8_{10} için $\beta = \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_1^{-2} \sigma_2^2 \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-1} \sigma_1^3 \sigma_2^{-1}$ elde edilir. Diğer düğümler içinde bu söz konusudur.

8_{10} , 10_5 , 10_{47} ve 10_{62} düğümleri için bulduğumuz örgü temsillerini şöyle özetleyebiliriz.

Düğüm	Artin Gerenlerine Göre	$H(n)$ Grubuna göre	Garside Gerenlerine göre
8_{10}	$\beta = \sigma_2^{-1} \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1^{-2} \sigma_2^2 \sigma_1^{-3} \sigma_2^{-1} \sigma_3^2$	$\beta' = a_{13} a_{24}^{-1} a_{23}^{-1} a_{34}^{-1}$	$\beta = \Delta^{-6} C \sigma_1^2 \sigma_2 A B A B C \sigma_3^2$
10_5	$\beta = \sigma_2^{-1} \sigma_3^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^2 \sigma_1^{-6} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1}$	$\beta' = a_{24}^4 a_{13} a_{12}^{-5}$	$\beta = \Delta^{-11} A \sigma_3^2 A C \sigma_2^2 (B C)^6 A (\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)$
10_{47}	$\beta = \sigma_2^{-1} \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_3^{-3} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1}$	$\beta' = a_{24} a_{12}^4 a_{13} a_{12}^{-1}$	$\beta = \Delta^{-5} A \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1^2 (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2) A (\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)$
10_{62}	$\beta = \sigma_2^{-1} \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1^{-3} \sigma_2^2 \sigma_1^{-4} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1}$	$\beta' = a_{24} a_{12}^2 a_{13} a_{12}^{-3}$	$\beta = \Delta^{-10} A (\sigma_1^2 \sigma_2) (B C)^3 (B A C)$

KAYNAKLAR

- Alexander, J.W., 1928, *Topological Invariants of Knots and Links*. Trans. Amer. Math. Soc. 30, 275-306.
- Artin, E., 1947, *Theory of Braids*, Ann. Math. (2) 48 ,101-126.
- Birman, J., Ko, K., H., Lee, S., J., 1998, *A New Approach To The Word And Conjugacy Problems In The Braid Groups*, Advances in Math. 139, 322-353.
- Birman, J., Long, D. D., Moody, J. A., 1992, *Finite dimensional Representations of Artin's Braid Group*, Contemporary Math. 169 .
- Birman, J.¹, 1975, *Braids and Links and Mapping Class Groups*. Princeton University Press, New Jersey.
- Birman, J.², 1969, *On Braids Groups*, Comm. Pure and App. Math. 22 , 41-72.
- Bourbaki, N., 1982, *Groupes et Algebras de Lie IV, V, VI*, Masson, Paris.
- Burde, G., Zieschang, H., *Knots*, 1985, Walter De Gruyter, Berlin, New York.
- Buskirk, J., V., 1983, *Positive Links Have Positive Conway Polynomial*, Springer Lecture Notes in Math. 1144, 146-159.
- Conway, J. H., 1970, *An Enumeration of Knots and Links and Some of Their Algebraic Properties. Computational Problems in Abstract Algebra*. Pergamon Press. New York, N.Y., 329-358.
- Cromwell, P. R., 1989, *Homogeneous Links*, J. London Math. Soc. (S 2) 39 ,535-552.
- Dyer, J. L. , 1980, *The Algebraic Braids Groups Are Torsion Free: An algebraic Proof*. Math. Zeitschrift 172, 157-160.
- Elrifai, E., A., Morton H., R., 1994, *Algorithms for Positive Braids*, Quart. J. Math Oxford 45, No 2, 479-497.

- Epstein, D.B.A., 1992, *Word Processing in Groups*, Jones and Barlett, Boston.
- Fadell, E. and Neuwirth, L., 1962, *Configuration spaces*, Math. Scand. 10, 111-118.
- Fox, R. H. and Neuwirth, L., 1962, *The Braids groups*, Math. Scand. 10, 119-126.
- Hansen, V. L. 1990, *Braids and Coverings*, London Math. Soc. Students Text 18.
- Jones, V. F. R¹., 1987, *Hecke Algebras Rep. of Braids Groups and Link Polynomials*.
Ann. of Math. vol 126, pp335-388.
- Jones, V. F. R²., 1989, *On knot Invariants related To Some Statistical Mechanical Models*, Pacific. Jour. Math. 137, 311-334.
- Kauffman, L. H¹., 1987, *State Models and The Jones Polynomial*, Topology 26, 395-407.
- Kauffman, L. H²., 1990, *An Invariant of Regular Isotopy*. Trans. Amer. Math. Soc. 318, 417-471.
- Kauffman, L. H³., 1983, *Formal Knot Theory*, Math. Notes 30, Princeton University Press.
- Kawauchi, A. 1996, *A survey of Knot Theory*. Birkhauser Verlag Basel, Boston, Berlin.
- Küçük, A., Kopuzlu, A., 1996, *On the Unknotting Number of $K_{(n,n)}$* , Jour. of The Faculty of Sci. Ege University,
- Lickorish, W. B. R. and Millett, K. C., 1987, *A Polynomial Invariant of Oriented Links*, Topology 26, 107-141.
- Murasugi, K., 1996, *Knot Theory and Its Application*, Birkhauser, Translated by Bohdan Kurpita.

- Przytycki, J. H., 1989, *Positive Knots Have Negative Signature* . Bull. Ac. Pol. Math.37, 559-562.
- Rudolph, L¹. , 1982, *Non-trivial Positive Braids Have Positive Signature*. Topology 21, 325-327.
- Rudolph, L²., *Positive Links Are Strongly Quasipositive*, 1999, Geometry & Topology Monograph Vol 2 : Proceedings of The Kirbyfest, 555-562.
- Rolfsen, D., 1976, *Knots and Links*, Publish and Perish, Inc. Wilmington.
- Schubert, H. 1949, *Die eindeutige Zerlagbarkeiteines Knotns in Primknoten*, Sitzungsber Heidelberger Akad. Wiss. Math. Nat. Kl 3, 57-104.
- Stallings, J., 1978, *Constructions of fibred Knots and Links*, Proc. Sympos. Pure Math.32
- Steimenov, A¹., *Gauss Sums On Almost Positive Knots*. Math. GT/9803073 v27 Sep 1999
- Steimenov, A²., *Positive Knots, Closed Braids and The Jones Polynomials*. Math.GT/9805078v2.7 Sep 1999.