ANKARA
HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Euler Polinomlarını İçeren Szász-Baskakov Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Yüksek Lisans Tezi

Nilüfer Piliç

Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Programı
Ankara, 2025

Euler Polinomlarını İçeren Szász-Baskakov Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Nilüfer Piliç

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Kadir Kanat

Tez Jürisi

Doç. Dr. Kadir Kanat

Dr. Öğr. Üyesi Melek Sofyalıoğlu Aksoy

Dr. Öğr. Üyesi Şule Yüksel Güngör

Yüksek Lisans

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Ankara - 2025

ETİK BEYAN

Bu tezi, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Tez ve Proje Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığımı; tezin/projenin tamamında akademik kurallara ve etik ilkelere uyduğumu ifade ederim. Yararlandığım eserlerin tamamını metin içinde referanslandırdığımı ve kaynakçada kılavuzda tanımlanan şekilde yer verdiğimi, haricindeki ifadelerin bana ait olduğunu, herhangi bir kaynaktan kopyalama yapmadığımı ya da yapay zeka aracılığı ile üretilmiş ifadelere metinde yer vermediğimi beyan ederim. Herhangi bir zamanda bu beyanıma uygun olmayan bir durumun tespit edilmesi halinde, aleyhime doğacak bütün hak kayıpları dahil tüm hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Nilüfer PİLİÇ

18.04.2025

ONAY

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi Nilüfer PİLİÇ tarafından hazırlanan "Euler Polinomlarını İçeren Szász-Baskakov Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri" başlıklı tez çalışması 18/04/2025 tarih ve 16:00 saatinde yapılan tez savunma sınavında aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile YÜKSEK LİSANS olarak KABUL edilmiştir.

	Kabul	Ret
Başkan (Unvan/Ad-Soyad/Kurum):	☒	☐
Dr. Öğr. Üyesi Şule Yüksel GÜNGÖR / Gazi Üniversitesi		
Üye (Unvan/Ad-Soyad/Kurum):	☒	☐
Doç. Dr. Kadir KANAT / Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi		
Üye (Unvan/Ad-Soyad/Kurum):	☒	☐
Dr. Öğr. Üyesi Melek SOFYALIOĞLU AKSOY / Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi		

Euler Polinomlarını İçeren Szász-Baskakov Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Nilüfer PİLİÇ

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Kadir KANAT
T.C. Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2025, Ankara

ÖZET

Bu tezde öncelikle lineer pozitif operatörler ile ilgili temel tanımlar, Korovkin teoreminin ifadesi ve ispatı verilmiştir. Ayrıca süreklilik modülünün tanımı ve özellikleri incelenmiş olup Weierstrass yaklaşım teoremi ifade edilmiştir. Daha sonra Szász operatörleri, Baskakov operatörleri ve Szász operatörlerinin Euler tipli genelleştirilmesinin momentleri ve merkezi momentleri verilmiştir. Ardından Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörleri tanımlanıp, bu operatörlerin yaklaşım hızı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmıştır. Son olarak, Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörlerinin hata analizi sunulan tablolar ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer Pozitif Operatörler, Korovkin Teoremi, Euler Polinomunu İçeren Szász-Baskakov Operatörleri, Süreklilik Modülü, Voronovskaya Tip Teorem

Approximation Properties of Szász-Baskakov Operators Including Euler Polynomials

Nilüfer PİLİÇ

Master's Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Kadir KANAT
Ankara Haci Bayram Veli University, Institute of Graduate Programs
Department of Mathematics
2025, Ankara

ABSTRACT

In this thesis, firstly the basic definitions related to linear positive operators, the definition and proof of Korovkin theorem are given. Also the definition and properties of the modulus of continuity are examined and Weierstrass approximation theorem is stated. Then moments and central moments of Szász operators, Baskakov operators and Euler type generalization of Szász operators are given. Then Szász-Baskakov operators including Euler polynomials are defined and the approximation rate of these operators is calculated with the help of modulus of continuity. Finally, error analysis of Szász-Baskakov operators including Euler polynomials is shown with the presented tables.

Keywords: Linear Positive Operators, Korovkin Theorem, Szász- Baskakov Operators involving Euler Polynomials, Modulus of Continuity,Voronovskaya Type Theorem

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimlerim boyunca engin bilgileri, bilimsel yönlendirmeleri ve her konuda destek sağlayan sayın danışmanım DOÇ. DR. KADİR KANAT 'a şükranlarımı sunarım. Tez çalışmalarım süresince yardım ve önerilerini benden esirgemeyen başta sayın hocam DR. ÖĞR. ÜYESİ MELEK SOFYALIOĞLU AKSOY olmak üzere tüm değerli Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümü öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım. Hayatımın her aşamasında beni destekleyen, fedakârlıkları ve varlıklarıyla güç bulduğum fikirleri yolumu aydınlatan en büyük destekçilerim çok kıymetli annem-babam HANİFE-NAZMİ PİLİÇ 'e ve çok değerli abim NURETTİN PİLİÇ 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLARIN LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{C[a,b]}$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$\Vert\boldsymbol{\eta}\Vert_{C[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$	$C[a,b]$ uzayında $\vert\vert\eta\vert\vert_{C[a,b]} = \underset{a\leq x\leq b}{\text{maks}}\vert\eta(x)\vert$ ile tanımlı norm
$\boldsymbol{M_\eta}$	η fonksiyonuna bağlı bir sabit
$\boldsymbol{\omega(\eta,\delta)}$	η fonksiyonunun süreklilik modülü
$[\vert\boldsymbol{\lambda}\vert]$	$\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı
$\boldsymbol{S_\psi(f,x)}$	Szász operatörleri
$\boldsymbol{B^*{}_\psi(f,x)}$	Baskakov operatörleri
$\boldsymbol{P_ç(x)}$	Euler polinomu
$\boldsymbol{E_\psi(f,x)}$	Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörleri
$\boldsymbol{E^*_\psi(f,x)}$	Euler polinomlarını içeren Szász operatörleri.

1. GİRİŞ

Matematikteki yaklaşım teorisi, fonksiyonların daha basit fonksiyonlarla en etkili şekilde tahmin edilebileceğini ve bu fonksiyonlarda meydana gelen niceliksel hataları tanımlar. Yaklaşım teorisinin günden güne öneminin artması, sadece matematikte değil, temel bilimler ve mühendislik gibi diğer alanlarda çok sayıda bilimsel probleme odaklanmasından kaynaklanmaktadır. Çalışılan fonksiyona alt uzayda en uygun yaklaşım elemanının var olup olmadığı, yaklaşım teorisinin önemli bir sorunudur. Bir parametrenin yaklaşım sayısı olarak da bilinen sıfıra yakınsaması problemi, en iyi yaklaşım elemanının var oluşuyla araştırılmaktadır. Bu nedenle, yaklaşım hızının değerlendirilmesi ile ilgili bir sorun ortaya çıkar. Bu sorunun çözümü için çeşitli yaklaşımlar kullanılmıştır. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) cebirsel ve trigonometrik polinomların ortaya koymuştur. Weierstrass ın sonlu bir aralıktaki herhangi bir sabit işlemin polinomlar tarafından keyfi bir hassasiyetle tahmin edilebileceğini belirten yaklaşım teoremi, bu prosedürün önemli bir örneğidir ve analiz gelişimini etkilemiştir. Bernstein [Bernstein, 1912] Weierstrass teoremini doğrulamak için Bernstein polinomları olarak bilinen yaklaşım polinomlarını tanımlamıştır. Szász [Szász, 1950] $f \in C[0,\infty), \psi \in \mathbb{N}, x \geq 0$ olmak üzere aşağıda verilen Szász operatörlerini tanımlamış yaklaşım özelliklerini incelemiş ve analiz etmiştir:

$$S_\psi(f;x) = e^{-\psi x} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} f\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right) \frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!}$$

Baskakov operatörleri 1957 yılında Baskakov [Baskakov, 1957] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$B_\psi^*(f;x) = \frac{1}{(1+x)^\psi} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} \frac{x^\varsigma}{(1+x)^\varsigma} f\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right),\ \psi \in \mathbb{N}^+, x \in [0,\infty).$$

1983 yılında Prasad ve diğerleri [Prasad ve ark., 1983] tarafından Szász-Mirakyan-Baskakov operatörleri:

$$M_\psi^*(f;x) = (\psi-1) \sum_{\varsigma=0}^{\infty} e^{-\psi x} \frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!} \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} \frac{t^\varsigma}{(t+1)^{\psi+\varsigma}} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmı, ikinci bölümde ele alınan temel kavramlar başlığı altında lineer pozitif operatörlerin tanımı, yakınsaklığı ve bazı temel tanımlar, üçüncü bölümde Szász operatörleri ve bazı sonuçlar, dördüncü bölümde Baskakov operatörleri ve bazı sonuçlar, beşinci bölümde Euler polinomunı içeren Szász operatörü ve bazı sonuçlar, altıncı bölümde Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörlerinin oluşturulması, yaklaşım özellikleri ve Voronovskaya tip teorem, yedinci bölümde ise Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörlerinin hata tablosu verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Bu bölümde lineer pozitif operatörler ve sundukları temel özellikler açıklanacaktır.

Tanım 2.1.

Operatör, lineer normlu fonksiyon uzayları üzerinde tanımlanan dönüşümleri ifade eder.

Tanım 2.2.

H ve N fonksiyon uzayları için

$$\mathcal{F}: H \to N$$

şeklindeki $\mathcal{F}$ operatörünü ele alalım. Eğer $\eta\,, r \in H$ ve her $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{F}(\theta\eta + \gamma r) = \theta\mathcal{F}(\eta) + \gamma\mathcal{F}(r)$$

koşulu sağlanıyor ise $\mathcal{F}$ operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.3.

r bir fonksiyon ve $\mathcal{F}$ bir operatör olmak üzere

$$r \geq 0 \text{ iken } \mathcal{F}(r) \geq 0$$

koşulundan $\mathcal{F}$ operatörüne pozitif operatör denir.

Lemma 2.1.

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Böylece

$$r \leq \eta \Rightarrow H(r) \leq H(\eta)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$r \leq \eta$ olsun. $\eta - r \geq 0$ olduğu için ve $\mathcal{F}$ operatörü pozitif olduğundan

$$\mathcal{F}(\eta - r) \geq 0 \qquad (2.1)$$

dir. $\mathcal{F}$ operatörünün lineerlik özelliğinden

$$\mathcal{F}(\eta - r) = \mathcal{F}(\eta) - \mathcal{F}(r)$$

olup (2.1) den ispat sona erer.

Lemma 2.2

$\mathcal{F}$ bir lineer pozitif operatör ise

$$\mathcal{F}|(r)| \leq \mathcal{F}(|r|)$$

ifade edilir.

İspat

Herhangi η fonksiyonu için

$$-|\eta| \leq \eta \leq |\eta| \tag{2.2}$$

gerçeklenir.

Lemma 2.1 ve (2.2)'den

$$\mathcal{F}(-|\eta|) \leq \mathcal{F}(\eta) \leq \mathcal{F}(|\eta|) \tag{2.3}$$

bulunur.

$\mathcal{F}$ lineer olduğundan

$$\mathcal{F}(-|\eta|) = -\mathcal{F}(|\eta|)$$

dir. Bu ifadenin (2.3)'ün kullanılması ile

$$-\mathcal{F}(|\eta|) \leq \mathcal{F}(\eta) \leq \mathcal{F}(|\eta|)$$

olur. Bu nedenle ispat tamamlanmıştır.

Tanım 2.4.

Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. $C[a, b]$ uzayındaki norm

$\eta \in C[a, b]$ olmak üzere

$$\|\eta\|_{C[a,b]} = \operatorname*{maks}_{a \leq x \leq b} |\eta(x)|$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.5.

$\psi \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\eta_\psi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde ifade edilen (η_ψ) dizisine fonksiyon dizisi denir.

Tanım 2.6.

$\psi \in \mathbb{N}$ olduğundan $\mathcal{F}_\psi : H \to N$, $\mathcal{F}_\psi(\eta; x) = \left(\mathcal{F}_\psi(\eta)\right)(x)$ şeklinde tanımlanan (η_ψ) dizisine operatör dizisi denir.

Tanım 2.7.

Her $x \in [a, b]$ için

$$\lim_{\psi\to\infty} \left\|\eta_\psi - \eta\right\|_{C[a,b]} = \lim_{\psi\to\infty} \operatorname{maks}_{a\le x\le b} \left|\eta_\psi(x) - \eta(x)\right| = 0$$

koşulu sağlanıyor ise (η_ψ) fonksiyonlar dizisi η fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve

$$\eta_\psi(x) \rightrightarrows \eta(x)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.8.

$\vartheta_{\psi,s}(x) = \mathcal{F}_\psi((t - x)^s; x), \{s = 0, 1, 2, \dots .\}$

ile ifade edilen $(\mathcal{F}_\psi)$ operatör dizisinin s −yinci merkezi momenti denir

[Lorentz, 1953].

Teorem 2.1.

$\eta \in C[a, b]$ ve tüm reel eksende

$$|\eta(x)| \le M_\eta \tag{2.5}$$

olur. Eğer $(\mathcal{F}_\psi)$ lineer pozitif operatör dizisi, her $x \in [a, b]$ için

$i.$ $\mathcal{F}_\psi(1; x) \rightrightarrows 1$

$ii.$ $\mathcal{F}_\psi(t; x) \rightrightarrows x$

$iii.$ $\mathcal{F}_\psi(t^2; x) \rightrightarrows x^2$

koşullarını sağlıyor ise her $\eta \in C[a,b]$ için $[a,b]$ de $\mathcal{F}_{\psi}(\eta;x) \rightrightarrows \eta(x)$ dir [Korovkin, 1953].

İspat

Kabul edelim ki, $\eta \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki, $|t-x| \leq \delta$ için

$$|\eta(t)-\eta(x)| < \varepsilon$$

olur. (2.5) ve üçgen eşitsizliğinden

$$|\eta(t)-\eta(x)| \leq |\eta(t)| + |\eta(x)| \leq 2M_{\eta} \tag{2.6}$$

yazılabilir.

Eğer $|t-x| > \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta^2} > 1$ olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{2.7}$$

olur. (2.5) ve (2.7)' den

$$|\eta(t)-\eta(x)| \leq 2M_{\eta}\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir.

O halde $|t-x| \leq \delta$ için

$$|\eta(t)-\eta(x)| < \varepsilon$$

ve $|t-x| > \delta$ için

$$|\eta(t)-\eta(x)| \leq 2M_{\eta}\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olur.

Dolayısıyla $x, t \in [a,b]$ için

$$|\eta(t)-\eta(x)| < \varepsilon + 2M_{\eta}\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.8}$$

olur.

(i), (ii), (iii) şartlarını sağlayan $(\mathcal{F}_{\psi})$ operatör dizisinin

$$\lim_{\psi\to\infty}\left\|\mathcal{F}_\psi(\eta)-\eta\right\|_{C[a,b]}=0$$

eşitliğini sağladığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

Operatörün lineerlik özelliğinden ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}_\psi(\eta(t);x)-\eta(x)\right| &= \left|\mathcal{F}_\psi(\eta(t);x)-\eta(x)+\mathcal{F}_\psi(\eta(x);x)-\mathcal{F}_\psi(\eta(x);x)\right|\\ &= \left|\mathcal{F}_\psi(\eta(t);x)-\mathcal{F}_\psi(\eta(x);x)+\mathcal{F}_\psi(\eta(x);x)-\eta(x)\right|\\ &= \left|\mathcal{F}_\psi((\eta(t)-\eta(x));x)+\eta(x)\big(\mathcal{F}_\psi(1;x)-1\big)\right|\end{aligned}$$

ve

$$\left|\mathcal{F}_\psi(\eta(t);x)-\eta(x)\right| \le \left|\mathcal{F}_\psi((\eta(t)-\eta(x));x)\right|+|\eta(x)|\left|\mathcal{F}_\psi(1;x)-1\right|$$

yazılabilir.

Lemma 2.2’den

$$\left|\mathcal{F}_\psi(\eta(t);x)-\eta(x)\right| \le \mathcal{F}_\psi((|\eta(t)-\eta(x)|);x)+|\eta(x)|\left|\mathcal{F}_\psi(1;x)-1\right|$$

olup (2.5)’den

$$\left|\mathcal{F}_\psi(\eta(t);x)-\eta(x)\right| \le \mathcal{F}_\psi(|\eta(t)-\eta(x)|;x)+M_\eta\left|\mathcal{F}_\psi(1;x)-1\right|$$

yazabiliriz.

$(\mathcal{F}_\psi)$ monoton artan olduğundan (2.8)’den

$$\left|\mathcal{F}_\psi(\eta(t);x)-\eta(x)\right| \le \mathcal{F}_\psi\left(\varepsilon+2\frac{M_\eta}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+M_\eta\left|\mathcal{F}_\psi(1;x)-1\right| \quad (2.9)$$

olur.

Bununla birlikte, $(\mathcal{F}_\psi)$ lineer olduğundan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\psi\left(\varepsilon+2\frac{M_\eta}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= \mathcal{F}_\psi(\varepsilon;x)+\mathcal{F}_\psi\left(2\frac{M_\eta}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)\\ &= \varepsilon\mathcal{F}_\psi(1;x)+2\frac{M_\eta}{\delta^2}\mathcal{F}_\psi(t^2-2xt+x^2;x)\\ &= \varepsilon\mathcal{F}_\psi(1;x)+2\frac{M_\eta}{\delta^2}\big\{\mathcal{F}_\psi(t^2;x)-x^2-x^2\\ &\quad +2x^2-2x\mathcal{F}_\psi(t;x)+x^2\mathcal{F}_\psi(1;x)\big\}\end{aligned}$$

$$= \varepsilon \mathcal{F}_\psi(1;x) + 2\frac{M_\eta}{\delta^2}\{\mathcal{F}_\psi(t^2;x) - x^2 + 2x^2$$

$$-2x\mathcal{F}_\psi(t;x) + x^2\mathcal{F}_\psi(1;x) - x^2\}$$

$$= \varepsilon \mathcal{F}_\psi(1;x) + 2\frac{M_\eta}{\delta^2}\{(\mathcal{F}_\psi(t^2;x) - x^2)$$

$$+2x\left(x - \mathcal{F}_\psi(t;x)\right) + x^2(\mathcal{F}_\psi(1;x) - 1)\}$$

yazılabilir. Bu ifade (2.9)'da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}_\psi(\eta(t);x) - p(x)| \\
&\qquad \leq \varepsilon \mathcal{F}_\psi(1;x) + 2\frac{M_\eta}{\delta^2}\{(\mathcal{F}_\psi(t^2;x) - x^2) \\
&\qquad + 2x\left(x - \mathcal{F}_\psi(t;x)\right) + x^2(\mathcal{F}_\psi(1;x) - 1)\} \\
&\qquad + M_\eta|(\mathcal{F}_\psi(1;x) - 1)| \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(i), (ii), (iii) koşullarının (2.10)'da kullanılmasıyla

$$\|\mathcal{F}_\psi(\eta) - \eta\| = \lim_{\psi\to\infty}\left\{\operatorname*{maks}_{a\leq x\leq b}|\mathcal{F}_\psi(\eta;x) - \eta(x)|\right\} = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.9.

$\eta \in C[a,b]$ ve $\forall\ \delta > 0$ için

$$\omega(\eta,\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |t-x|\leq\delta}} |\eta(t) - \eta(x)| \qquad (2.11)$$

ile ifade edilen $\omega(\eta,\delta)$ ifadesine η fonksiyonunun süreklilik modülü denir [Altomare ve ark., 1994].

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\omega(\eta,\delta) \geq 0$,
ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(\eta,\delta_1) \leq \omega(\eta,\delta_2)$,
iii. $\mu \in \mathbb{N}$ için $\omega(\eta,\mu\delta) = \mu\omega(\eta,\delta)$,
iv. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(\eta,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(\eta,\delta)$,

v. $\lim_{\delta \to 0} \omega(\eta, \delta) = 0,$

vi. $\omega(\eta, |t-x|) \geq |\eta(t) - \eta(x)|,$

vii. $|\eta(t) - \eta(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(\eta, \delta).$

İspat

i. Süreklilik modülü, tanımı gereğince bir mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|t-x| \leq \delta_2$ aralık $|t-x| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğudur. Küme genişledikçe supremum büyüyeceğinden ispat sonlanır.

iii. Süreklilik modülünün tanımından

$$\omega(\eta, \mu\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |t-x| \leq \mu\delta}} |\eta(t) - \eta(x)|$$

yazılır.

Burada

$$|t-x| \leq \mu\delta \Rightarrow x - \mu\delta \leq t \leq x + \mu\delta$$

olup $t = x + \mu h$ seçimiyle $|h| \leq \delta$ ve

$$\omega(\eta, \mu\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |\eta(x + \mu h) - \eta(x)|$$

yazılır.

Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |\eta(x + \mu h) - \eta(x)| = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{\zeta=0}^{\mu-1} [\eta(x + (\zeta+1)h) - \eta(x + \zeta h)] \right|$$

olup sağ taraftaki eşitliğe üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |\eta(x + \mu h) - \eta(x)| &\leq \sum_{\zeta=0}^{\mu-1} \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |\eta(x + (\zeta+1)h) - \eta(x + \zeta h)| \\ &\leq \omega(\eta, \delta) + \cdots + \omega(\eta, \delta) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\omega(\eta, \mu\delta) \leq \mu\omega(\eta, \delta)$$

olur.

iv. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmını $[|\lambda|]$ ile ifade edilirse

$$[|\lambda|] \leq \lambda < [|\lambda|] + 1$$

eşitsizliklerinin yazılabileceği açıktır. O halde bu eşitsizlikleri ve $\omega(\eta, \delta)$'nın azalmayan fonksiyon olmasını kullanarak

$$\omega(\eta, \lambda\delta) \leq \omega(\eta, ([|\lambda|] + 1)\delta)$$

eşitsizliği yazılır. $[|\lambda|]$ pozitif bir tam sayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanır. Bu durumda

$$\omega(\eta, ([|\lambda|] + 1)\delta) \leq ([|\lambda|] + 1)\omega(\eta, \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$[|\lambda|] + 1 \leq \lambda + 1$$

olduğundan

$$\omega(\eta, ([|\lambda|] + 1)\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\eta, \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak

$\omega(\eta, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\eta, \delta)$ yazılır. İspat tamamlanır.

v. $|t - x| \leq \delta$ eşitsizliğindeki δ'nın sıfıra yaklaşması $t \to x$ olması anlamına gelmektedir. η fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımına göre $t \to x$ için $|\eta(t) - \eta(x)| \to 0$ olduğundan ispat açıktır.

vi. $\omega(\eta, \delta)$ ifadesinde $\delta = |t - x|$ seçilirse

$$\omega(\eta, |t - x|) = \sup_{x \in [a,b]} |\eta(t) - \eta(x)|$$

olur. O halde $|\eta(t) - \eta(x)|$ lerin supremumu $\omega(\eta, |t - x|)$ olacağından ispat aşikârdır.

vii. (vi) özelliğinden

$$|\eta(t) - \eta(x)| \leq \omega\left(\eta, \frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılır. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$$|\eta(t) - \eta(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right)\omega(\eta, \delta)$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.10. (Seri İçin Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

Cauchy-Schwarz eşitsizliği seri için

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_i d_i| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |d_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.11. (İntegral için Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği integral için

$$\int |c_i d_i| \leq \left(\int (c_i)^2\right)^{1/2} \left(\int (d_i)^2\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.12.

Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

olarak tanımlıdır. $\Gamma(x) = (x-1)!$ $(x > 0, \Gamma(0) = 1)$ özelliğine sahiptir.

Tanım 2.13.

$Re(x) > 0$ ve $Re(y) > 0$ için Beta fonksiyonu

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-t} dt$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Beta fonksiyonu

$$B(\varsigma,\psi)=\int_0^\infty \frac{t^{\varsigma-1}}{(t+1)^{\varsigma+\psi}}dt=\frac{\Gamma(\varsigma)\Gamma(\psi)}{\Gamma(\varsigma+\psi)}=\frac{(\varsigma-1)!\,(\psi-1)!}{(\varsigma+\psi-1)!} \tag{2.12}$$

özelliğine sahiptir.

Tanım 2.14.

$f\in C_D[0,\infty)$ ve $\delta\geq 0$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{x,t\in[0,\infty)\\ |x-t|\leq\delta}}|f(t)-f(x)|$$

dir. Düzgün sabit işlemler kümesi $C_D[0,\infty)$ ile gösterilir.

Tanım 2.15.

$f\in C[a,b)$ fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\omega_2(f,\delta)=\sup_{0<t\leq 1}\|f(.+2t)-2f(.+t)+f(.)\|$$

ve burada $\|f\|=\max_{0<t\leq 1}|f(x)|$ şeklindedir.

Tanım 2.16.

$C^2[0,a]$ içinde $(G_\psi)_{\psi\geq 0}$, $G_\psi(1;x)=1$ özelliklerine sahip bir lineer pozitif operatörler dizisi olsun. O halde

$$\left|G_\psi(g;x)-g(x)\right|\leq\|g'\|G_\psi\sqrt{((t-x)^2;x)}+\frac{1}{2}\|g''\|G_\psi((t-x)^2;x)$$

şeklinde ifade edilir [Gavrea ve Raşa, 1993].

Tanım 2.17.

Steklov fonksiyonu f_λ,

$$f_\lambda(t)=\frac{1}{\lambda}\int_{t-\frac{\lambda}{2}}^{t+\frac{\lambda}{2}}f(u)du=\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f\,(t+s)ds$$

biçiminde tanımlanır. Buradan f kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur.

Bu fonksiyonun hemen hemen her noktadaki türevi şu şekilde verilir:

$$f'_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} f\left(t + \frac{\lambda}{2}\right) - f\left(t - \frac{\lambda}{2}\right)$$

ifade edilir.

Eğer f türevi reel eksen üzerinde düzgün sürekli ise, aşağıdaki eşitlikler elde edilir [Fink, 1982]:

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |f(t) - f_\lambda(t)| \leq \omega\left(\frac{\lambda}{2}, f\right),$$

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |f'_\lambda(t)| \leq \frac{1}{2}\omega(\lambda, f).$$

Tanım 2.18.

$f \in C[a,b]$ içinde, $\lambda \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ olsun. f fonksiyonu için f_λ onun ikinci dereceden Steklov fonksiyonu olsun. Aşağıdaki verilen eşitlikler

i. $\|f_\lambda - f\| \leq \frac{3}{4}\omega_2(f,\lambda)$

ii. $\|f''_\lambda\| \leq \frac{3}{2k^2}\omega_2(f,\lambda)$

elde edilir.

Teorem 2.2. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

$f(x) \in C[a,b]$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\|f(x) - \eta(x)\| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\eta(x)$ polinomu vardır [Weierstrass, 1885].

3. SZÁSZ OPERATÖRLERİ

Szász operatörleri $[0, \infty)$ aralığında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [Szász, 1950]:

$$S_\psi(f;x) = e^{-\psi x} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} f\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right) \frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!}.$$

Lemma 3.1.

Szász operatörleri lineer ve pozitiftir.

İspat

Her $l, n \in \mathbb{R}$ ve $f, r \in C[0, A]$ için

$$\begin{aligned} S_\psi\big((lp + nr)(t);x\big) &= e^{-\psi x} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} (lf + nr)\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right) \frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!} \\ &= e^{-\psi x} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \left(lf\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right) + nr\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right)\right) \frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!} \\ &= le^{-mx} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} f\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right) \frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!} + ne^{-\psi x} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} r\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right) \frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!} \\ &= lS_\psi(f;x) + nS_\psi(r;x) \end{aligned}$$

olduğundan S_ψ operatörleri lineerdir.. Ayrıca $\varsigma = 0, 1, 2, \dots, \psi \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, A]$ için $e^{-\psi x} \frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!} \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ ise $S_\psi(f;x) \geq 0$ dır. Yani (S_ψ) operatörler dizisidir.

Lemma 3.2.

(S_ψ) lineer pozitif operatörler dizisi, her $x \in [0, A]$ için

i. $S_\psi(1;x) = 1$

ii. $S_\psi(t;x) = x$

iii. $S_\psi(t^2;x) = x^2 + \frac{x}{\psi}$

şeklinde ifade edilir.

İspat

i. İlk olarak

$$S_\psi(1;x) = e^{-\psi x}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!} = e^{-\psi x}e^{\psi x} = 1 \tag{3.1}$$

yani

$$\lim_{\psi\to\infty}\left\|S_\psi(1;x) - 1\right\|_{C[0,A]} = 0$$

olur.

ii. İkinci olarak

$$S_\psi(t;x) = e^{-\psi x}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{\varsigma}{\psi}\frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!}$$

$$= e^{-\psi x}\sum_{\varsigma=1}^{\infty}\frac{\varsigma}{\psi}\frac{\psi^\varsigma x^\varsigma}{\varsigma!}$$

$$= e^{-\psi x}\sum_{\varsigma=1}^{\infty}\frac{\psi^{\varsigma-1}x^{\varsigma-1}x}{(\varsigma-1)!}$$

$$= xe^{-\psi x}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{\psi^\varsigma x^\varsigma}{\varsigma!}$$

$$= xe^{-\psi x}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!}$$

$$= xe^{-\psi x}e^{\psi x} = x \tag{3.2}$$

elde edilir.

Yani

$$\lim_{\psi\to\infty}\left\|S_\psi(t;x) - x\right\|_{C[0,A]} = 0$$

olur.

iii. Son olarak

$$S_\psi(t^2;x) = e^{-\psi x}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{\varsigma^2}{\psi^2}\frac{(\psi x)^\varsigma}{\varsigma!}$$

$$= e^{-\psi x}\sum_{\varsigma=1}^{\infty}\frac{\varsigma^2}{\psi^2}\frac{\psi^{\varsigma}x^{\varsigma}}{\varsigma!}$$

$$= e^{-\psi x}\sum_{\varsigma=1}^{\infty}\frac{\varsigma}{\psi}\frac{\psi^{\varsigma-1}x^{\varsigma-1}x}{(\varsigma-1)!}$$

$$= e^{-\psi x}\sum_{\varsigma=1}^{\infty}(\frac{\varsigma-1}{\psi}+\frac{1}{\psi})\frac{\psi^{\varsigma-1}x^{\varsigma-1}x}{(\varsigma-1)!}$$

$$= e^{-\psi x}(\sum_{\varsigma=1}^{\infty}\frac{\varsigma-1}{\psi}\frac{\psi^{\varsigma-1}x^{\varsigma-1}x}{(\varsigma-1)!}+\sum_{\varsigma=1}^{\infty}\frac{1}{\psi}\frac{\psi^{\varsigma-1}x^{\varsigma-1}x}{(\varsigma-1)!})$$

$$= e^{-\psi x}(\sum_{\varsigma=2}^{\infty}\frac{\varsigma-1}{\psi}\frac{\psi^{\varsigma-1}x^{\varsigma-1}x}{(\varsigma-1)!}+\sum_{\varsigma=1}^{\infty}\frac{1}{\psi}\frac{\psi^{\varsigma-1}x^{\varsigma-1}x}{(\varsigma-1)!})$$

$$= e^{-\psi x}(\sum_{\varsigma=2}^{\infty}\frac{\psi^{\varsigma-2}x^{\varsigma-2}x^2}{(\varsigma-2)!}+\sum_{\varsigma=1}^{\infty}\frac{1}{\varsigma}\frac{\psi^{\varsigma-1}x^{\varsigma-1}x}{(\varsigma-1)!})$$

$$= e^{-\psi x}(x^2\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{\psi^{\varsigma}x^{\varsigma}}{\varsigma!}+\frac{x}{\psi}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{\psi^{\varsigma}x^{\varsigma}}{\varsigma!})$$

$$= e^{-\psi x}(x^2\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{(x\psi)^{\varsigma}}{\varsigma!}+\frac{x}{\psi}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{(x\psi)^{\varsigma}}{\varsigma!})$$

$$= x^2e^{-\psi x}e^{mx}+\frac{x}{\psi}e^{-\psi x}e^{\psi x}$$

$$= x^2+\frac{x}{\psi} \tag{3.3}$$

elde edilir.

Buradan,

$$0 \le \lim_{\psi\to\infty}\left\|S_{\psi}(t^2;x)-x^2\right\|_{C[0,A]} = \max_{0\le x\le A}\left|x^2+\frac{x}{\psi}-x^2\right| \le \frac{A}{\psi}$$

eşitsizliği bulunur.

Yani

$$\lim_{\psi\to\infty}\left\|S_{\psi}(t^2;x)-x^2\right\|_{C[0,A]} = 0$$

olur.[Genç, 2021].

Teorem 3.1.

Szász operatörleri $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, A]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende sınırlı olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar.

Yani $f \in C[0, A]$ ise

$$\lim_{\psi\to\infty} \left\| S_\psi(f; x) - f(x) \right\|_{C[0,A]} = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eğer

i. $\lim_{\psi\to\infty} \left\| S_\psi(1; x) - 1 \right\|_{C[0,A]} = 0$

ii. $\lim_{\psi\to\infty} \left\| S_\psi(t; x) - x \right\|_{C[0,A]} = 0$

iii. $\lim_{\psi\to\infty} \left\| S_\psi(t^2; x) - x^2 \right\|_{C[0,A]} = 0$

olduğu gösterilirse Korovkin teoreminin şartlarından

$$\lim_{\psi\to\infty} \left\| S_\psi(f; x) - f(x) \right\|_{C[0,A]} = 0$$

bulunur Teorem 3.1. kanıtlanmış olur.

Lemma 3.3.

(S_ψ) operatörler dizisinin birinci ve ikinci merkezi momenti

i. $S_\psi(t-x;x)=0$

ii. $S_\psi((t-x)^2;x)=\frac{x}{\psi}$

şeklindedir [Lorentz, 1953].

4. BASKAKOV OPERATÖRLERİ

$f \in C[0,\infty)$ ve her $\psi > 0$ tam sayısı için Baskakov operatörleri

$$B_{\psi}^{*}(f;x) = \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{\psi+\varsigma-1}{v} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{v}} f\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right)$$

biçiminde tanımlanmıştır [Baskakov, 1957].

Lemma 4.1.

(B_{ψ}^{*}) lineer pozitif operatörler dizisi, her $x \in [0,\infty)$ için

i. $B_{\psi}^{*}(1;x) = 1$

ii. $B_{\psi}^{*}(t;x) = x$

iii. $B_{\psi}^{*}(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1+x)}{\psi}$

şeklinde ifade edilir.

İspat

i. İlk olarak

$$B_{\psi}^{*}(1;x) = \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} 1 \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}} = 1$$

elde edilir.

ii. İkinci olarak

$$\begin{aligned}
B_{\psi}^{*}(t;x) &= \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \binom{\psi+\varsigma-1}{v} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}} \frac{\varsigma}{\psi} \\
&= \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=1}^{\infty} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{(\psi-1)!} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}} \frac{\varsigma}{\psi} \\
&= \frac{x}{(x+1)} \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=1}^{\infty} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\psi!\,(\psi-1)!} \frac{x^{\varsigma-1}}{(x+1)^{\varsigma-1}} \\
&= \frac{x}{(x+1)} \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{(\psi+\varsigma)!}{\psi!\,\varsigma!} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{(x+1)} \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \binom{\psi+\varsigma}{\varsigma} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}}$$

$$= \frac{x}{(x+1)} \frac{1}{(x+1)^{\psi}} (1+x)^{v+1}$$

$$= x$$

olur.

iii. Son olarak,

$$B_{\psi}^{*}(t^2;x) = \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}} \frac{\varsigma^2}{\psi^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{\varsigma(\varsigma-1)}{\psi^2} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{(\psi-1)!\,\varsigma!} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}}$$

$$+ \frac{1}{\psi} \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{\varsigma}{\psi} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{(\psi-1)!\,\varsigma!} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)^2} \frac{1}{\psi} \frac{1}{(x+1)^{\psi}} \sum_{\varsigma=2}^{\infty} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{(\psi-2)!\,\varsigma!} \frac{x^{\varsigma-2}}{(x+1)^{\varsigma-2}} + \frac{1}{\psi} B_{\psi}(t;x)$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)^2} \frac{1}{\psi} \frac{1}{(1+x)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{(\psi+\varsigma+1)!}{\psi!\,\varsigma!} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}} + \frac{x}{\psi}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)^2} \frac{\psi+1}{\psi} \frac{1}{(1+x)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{(\psi+\varsigma+1)!}{(\psi+1)!\,\varsigma!} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}} + \frac{x}{\psi}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)^2} \frac{\psi+1}{\psi} \frac{1}{(1+x)^{\psi}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \binom{\psi+\varsigma+1}{\varsigma} \frac{x^{\varsigma}}{(x+1)^{\varsigma}} + \frac{x}{\psi}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)^2} \frac{\psi+1}{\psi} \frac{1}{(x+1)^{\psi}} (1+x)^{\psi+2} + \frac{x}{\psi}$$

$$= x^2 + \frac{x(1+x)}{\psi}$$

elde edilir.

Korovkin teoremi kullanılarak operatörlerinin sonlu aralıkta kendisini oluşturan f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu görülür. Yani

$$\lim_{\psi \to \infty} B_{\psi}^{*}(f;x) = f(x)$$

yakınsaması düzgündür [Deniz, 2021].

Lemma 4.2.

(B_{ψ}^{*}) operatörler dizisinin birinci ve ikinci merkezi momenti

i. $B_{\psi}^{*}(t-x;x) = 0$

ii. $B_{\psi}^{*}((t-x)^2;x) = \frac{x(x+1)}{\psi}$

şeklindedir [Baskakov, 1957].

5. EULER POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $\psi \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$, $f \in C[0,\infty)$ için Euler polinomlarını içeren Szász operatörleri ve bu operatörlerin bazı yakınsama özellikleri ifade edilmiştir.

ε_ς^* Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varepsilon_\varsigma^*(x)\frac{t^\varsigma}{\varsigma!} = \frac{1+e^t}{2}e^{xt}$$

olarak verilmiştir. Euler polinomlarını içeren Szász operatörleri [Agyuz, 2021] tarafından

$$E_\psi^*(f;x) = \left(\frac{2e^{-\psi x}}{1+e}\right)\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_\varsigma^*(x)}{\varsigma!}f\left(\frac{\varsigma}{\psi}\right)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Lemma 5.1.

$x \in [0,\infty)$ ve $e_n = t^n$ $n = 0,1,2,3,4$ için E_ψ^* operatörleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i. $E_\psi^*(e_0;x) = 1,$

ii. $E_\psi^*(e_1;x) = x + \frac{e}{\psi(1+e)},$

iii. $E_\psi^*(e_2;x) = x^2 + \left(\frac{3e+1}{1+e}\right)\frac{x}{\psi} + \left(\frac{2e}{1+e}\right)\frac{1}{\psi^2}.$

Lemma 5.2.

(E_ψ^*) operatör dizisinin birinci ve ikinci merkezi momenti

i. $E_\psi^*(t-x;x) = \frac{e}{\psi(e+1)}$

ii. $E_\psi^*((t-x)^2;x) = \frac{5e+1}{\psi(e+1)}x + \frac{2e}{\psi^2(e+1)}$

şeklinde ifade edilir [Agyuz, 2021].

6. EULER POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ-BASKAKOV OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda $\psi \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$, $f \in C[0,\infty)$ için Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörlerinin yaklaşım özellikleri elde edilmiştir.

6.1. Operatörlerin Oluşturulması

$f(1) \neq 0$ seçilerek $f(t) = \sum_{\varsigma=0}^{\infty} A_\varsigma(x) t^\varsigma$ $(A_0 \neq 0)$ analitik bir fonksiyon olsun. Bir $A_\varsigma(x)$ Appell polinomunun üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$f(t)e^{tx} = \sum_{\varsigma=0}^{\infty} A_\varsigma(x) t^\varsigma. \tag{6.1}$$

Aşağıdaki üretici fonksiyonlar sırasıyla klasik Bernoulli polinomları $B_\varsigma(x)$ ve Genocchi polinomları $G_\varsigma(x)$ [Cheon, 2003] ve [Horadam, 1990], Fubini polinomları $F_\varsigma(x)$, [Kilar ve Şimşek, 2017] bunların iyi bilinen genellemeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} B_\varsigma(x) \frac{t^\varsigma}{\varsigma!} = (\frac{t}{-1+e^t})e^{xt} \quad (|t| < 2\pi) \tag{6.2}$$

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} G_\varsigma(x) \frac{t^\varsigma}{\varsigma!} = (\frac{2t}{1+e^t})e^{xt} \quad (|t| < \pi) \tag{6.3}$$

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} F_\varsigma(x) \frac{t^\varsigma}{\varsigma!} = \frac{2}{(2-e^t)^2} e^{xt} \quad (|k| < \log 2) \tag{6.4}$$

Burada Lin Jiu, Victor H. Moll ve Christophone Vignat'ın [Jiu ve ark., 2014] özel polinomlar ve bunlara bağlı özel sayılar ailesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Euler polinomları $P_\varsigma(x)$

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} P_\varsigma(x) \frac{t^\varsigma}{\varsigma!} = \frac{2e^{xt}}{1+e^t} \tag{6.5}$$

üreteç fonksiyonu ile ifade edilmiştir.

Euler polinomları, Appell polinomlarının özel örneklerinden biridir.

Bu bilgiler ışığında, Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörleri aşağıdaki gibi oluşturulmuştur:

$$E_{\psi}(f;x)=\frac{(\psi-1)(e+1)}{2e^{\psi x}}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_{\varsigma}(\psi x)}{\varsigma!}\int_{0}^{\infty}\binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^{\varsigma}}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}f(t)dt. \tag{6.6}$$

Burada $\psi\in\mathbb{N}, x\geq 0$ ve $f\in C[0,\infty)$ alınmıştır.

6.2. Euler Polinomlarını İçeren Szász-Baskakov Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde E_{ψ} operatörlerinin yaklaşım özellikleri verilecektir.

Lemma 6.1.

Aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir:

i.

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma\frac{P_{\varsigma}(x)}{\varsigma!}=\frac{2}{e+1}xe^{x}+\frac{-2e^{x+1}}{(e+1)^{2}} \tag{6.7}$$

ii.

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma^{2}\frac{P_{\varsigma}(x)}{\varsigma!}=\frac{-4e^{x+1}}{(e+1)^{2}}+\frac{4e^{x+2}}{(e+1)^{3}}+\left(\frac{2e^{x}}{e+1}-\frac{4e^{x+1}}{(e+1)^{2}}\right)x+\left(\frac{2e^{x}}{e+1}\right)x^{2} \tag{6.8}$$

iii.

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma^{3}\frac{P_{\varsigma}(x)}{\varsigma!}=\frac{-10e^{x+1}}{(e+1)^{2}}+\frac{24e^{x+2}}{(e+1)^{3}}-\frac{12e^{x+3}}{(e+1)^{4}}+\left(\frac{2e^{x}}{e+1}-\frac{18e^{x+1}}{(e+1)^{2}}+\frac{12e^{x+2}}{(e+1)^{3}}\right)x+\left(\frac{6e^{x}}{(e+1)^{2}}\right)x^{2}+\left(\frac{2e^{x}}{e+1}\right)x^{3} \tag{6.9}$$

iv.

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma^4\frac{P_\varsigma(x)}{\varsigma!}=\frac{-30e^{x+1}}{(e+1)^2}+\frac{128e^{x+2}}{(e+1)^3}-\frac{144e^{x+3}}{(e+1)^4}+\frac{48e^{x+4}}{(e+1)^5}$$
$$+\left(\frac{2e^x}{e+1}-\frac{72e^{x+1}}{(e+1)^2}+\frac{120e^{x+2}}{(e+1)^3}-\frac{48e^{x+3}}{(e+1)^4}\right)x$$
$$+\left(\frac{14e^x-34e^{x+1}}{(e+1)^2}+\frac{24e^{x+2}}{(e+1)^3}\right)x^2+\left(\frac{4e^{x+1}+12e^x}{(e+1)^2}\right)x^3$$
$$+\left(\frac{2e^x}{e+1}\right)x^4. \qquad (6.10)$$

İspat

i. (6.5) denklemi ile verilen

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}P_\varsigma(x)\frac{t^\varsigma}{\varsigma!}=\frac{2e^{xt}}{1+e^t}$$

Euler polinomunun üreteç fonksiyonunun t ye göre türevi alındığında

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma P_\varsigma(x)\frac{t^{\varsigma-1}}{\varsigma!}=\frac{2}{e^t+1}xe^{xt}+\frac{-2e^{t(x+1)}}{(e^t+1)^2} \qquad (6.11)$$

olur. Buradan $t=1$ kabul edilir ise,

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma\frac{P_\varsigma(x)}{\varsigma!}=\frac{2}{e+1}xe^x+\frac{-2e^{x+1}}{(e+1)^2}$$

ifadesi elde edilir.

ii. (6.11) eşitliğinin t ye göre türevi alındığında

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma(\varsigma-1)P_\varsigma(x)\frac{t^{\varsigma-2}}{\varsigma!}$$
$$=\frac{4e^{2t+tx}}{(1+e^t)^3}-\frac{2e^{t+tx}x}{(1+e^t)^2}+\frac{2e^{tx}x^2}{1+e^t}-\frac{2e^{t+tx}(1+x)}{(1+e^t)^2} \qquad (6.12)$$

olur. (6.12) de $t=1$ kabul edilirse,

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma^2\frac{P_\varsigma(x)}{\varsigma!}= \frac{-4e^{x+1}}{(e+1)^2}+\frac{4e^{x+2}}{(e+1)^3}+\left(\frac{2e^x}{e+1}-\frac{4e^{x+1}}{(e+1)^2}\right)x+\left(\frac{2e^x}{e+1}\right)x^2$$

ifadesi elde edilir.

iii. (6.12) eşitliğinin t ye göre türevi alındığında

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma(\varsigma-1)(\varsigma-2)P_\varsigma(x)\frac{t^{\varsigma-3}}{\varsigma!}$$

$$=-\frac{12e^{3t+tx}}{(1+e^t)^4}+\frac{4e^{2t+tx}x}{(1+e^t)^3}-\frac{2e^{t+tx}x^2}{(1+e^t)^2}+\frac{2e^{tx}x^3}{1+e^t}$$
$$+\frac{4e^{2t+tx}(1+x)}{(1+e^t)^3}-\frac{2e^{t+tx}x(1+x)}{(1+e^t)^2}-\frac{2e^{t+tx}(1+x)^2}{(1+e^t)^2}$$
$$+\frac{4e^{2t+tx}(2+x)}{(1+e^t)^3} \tag{6.13}$$

olur. (6.13) eşitlğinde $t=1$ kabul edilir ise,

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma^3\frac{P_v(x)}{\varsigma!}=\frac{-10e^{x+1}}{(e+1)^2}+\frac{24e^{x+2}}{(e+1)^3}-\frac{12e^{x+3}}{(e+1)^4}$$
$$+\left(\frac{2e^x}{e+1}-\frac{18e^{x+1}}{(e+1)^2}+\frac{12e^{x+2}}{(e+1)^3}\right)x+\left(\frac{6e^x}{(e+1)^2}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{2e^x}{e+1}\right)x^3$$

ifadesi elde edilir.

iv. (6.13) eşitliğinin t ye göre türevi alındığında

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma(\varsigma-1)(\varsigma-2)(\varsigma-3)P_\varsigma(x)\frac{t^{\varsigma-4}}{\varsigma!}$$

$$=-\frac{12e^{3t+tx}}{(1+e^t)^4}+\frac{4e^{2t+tx}x}{(1+e^t)^3}-\frac{2e^{t+tx}x^2}{(1+e^t)^2}+\frac{2e^{tx}x^3}{1+e^t}$$
$$+\frac{4e^{2t+tx}(1+x)}{(1+e^t)^3}-\frac{2e^{t+tx}x(1+x)}{(1+e^t)^2}-\frac{2e^{t+tx}(1+x)^2}{(1+e^t)^2}$$
$$+\frac{4e^{2t+tx}(2+x)}{(1+e^t)^3} \tag{6.14}$$

olur. (6.14) te $t = 1$ kabul edilirse,

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma^4 \frac{P_\varsigma(x)}{\varsigma!} = \frac{-30e^{x+1}}{(e+1)^2} + \frac{128e^{x+2}}{(e+1)^3} - \frac{144e^{x+3}}{(e+1)^4} + \frac{48e^{x+4}}{(e+1)^5}$$
$$+ \left(\frac{2e^x}{e+1} - \frac{72e^{x+1}}{(e+1)^2} + \frac{120e^{x+2}}{(e+1)^3} - \frac{48e^{x+3}}{(e+1)^4}\right) x$$
$$+ \left(\frac{14e^x - 34e^{x+1}}{(e+1)^2} + \frac{24e^{x+2}}{(e+1)^3}\right) x^2 + \left(\frac{4e^{x+1} + 12e^x}{(e+1)^2}\right) x^3$$
$$+ \left(\frac{2e^x}{e+1}\right) x^4$$

ifadesi elde edilir. İspat tamamlanır.

Lemma 6.2.

$x \in [0, \infty)$ ve $e_n = t^n$ $n = 0, 1, 2, 3, 4$ için E_ψ operatörleri için

i. $E_\psi(e_0; x) = 1$

ii. $E_\psi(e_1; x) = \frac{1}{(-2+\psi)(e+1)} + \frac{x(\psi+e\psi)}{(-2+\psi)(e+1)}$

iii. $E_\psi(e_2; x) = \frac{2-e-e^2}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2} + \frac{x(4\psi+6e\psi+2e^2\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2} + \frac{x^2(\psi^2+2e\psi^2+e^2\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2}$

iv. $E_\psi(e_3; x) = \frac{6-10e-14e^2-4e^3}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} + \frac{x(18\psi+33e\psi+18e^2\psi+3e^3\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} +$
$\frac{x^2(9\psi^2+24e\psi^2+21e^2\psi^2+6e^3\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} + \frac{x^3(\psi^3+3\psi^3+3e^2\psi^3+e^3\psi^3)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3}$

v. $E_\psi(e_4; x) = \frac{24-89e-157e^2-83e^3-15e^4}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} +$
$\frac{x(96\psi+188e\psi+108e^2\psi+12e^3\psi-4e^4\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} +$
$\frac{x^2(72\psi^2+234e\psi^2+282e^2\psi^2+150e^3\psi^2+30e^4\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} +$
$\frac{x^3(16\psi^3+60e\psi^3+84e^2\psi^3+52e^3\psi^3+12e^4\psi^3)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} +$
$\frac{x^4(\psi^4+4e\psi^4+6e^2\psi^4+4e^3\psi^4+e^4\psi^4)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4}$ (6.15)

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Öncelikle momentleri hesaplamak için kullanılacak eşitlikler elde edilsin. İlk olarak Eşitlik (6.5) te x yerine ψx yazılır ve $t = 1$ alınırsa,

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} = \left(\frac{2}{1+e}\right) e^{\psi x} \tag{6.16}$$

elde edilir.

i. (6.6) operatörlerinde $f(t) = e_0 = 1$ alındığında;

$$E_\psi(e_0;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)}{2e^{\psi x}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} \frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}} dt \tag{6.17}$$

olur. Operatörlerin içindeki integrali ele alırsak, (2.12) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t^\varsigma}{(t+1)^{\varsigma+\psi}} dt &= B(\varsigma+1, \psi-1) \\ &= \frac{\Gamma(\varsigma+1)\Gamma(\psi-1)}{\Gamma(\varsigma+\psi)} \\ &= \frac{\varsigma!\,(\psi-2)!}{(\varsigma+\psi-1)!}\end{aligned} \tag{6.18}$$

bulunur.

Eşitlik (6.16) ve Eşitlik (6.18) kullanıldığında,

$$E_\psi(e_0;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} B(\varsigma+1, \psi-1)$$

$$= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)!} \frac{\varsigma!\,(\psi-2)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)(-2+\psi)!} \frac{\varsigma!\,(\psi-2)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \frac{1}{(-1+\psi)} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-2+\psi)!} \frac{\varsigma!\,(\psi-2)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$E_\psi(e_0;x) = \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} = 1$$

bulunur.

ii. (6.6) operatörlerinde $f(t)=e_1=t$ alındığında

$$E_\psi(e_1;x)=\frac{(\psi-1)(e+1)}{2e^{\psi x}}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}\int_0^\infty\binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^{v+1}}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}dt$$

olur. Operatörlerin içindeki integrali ele alırsak, (2.12) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{t^{v+1}}{(t+1)^{\varsigma+\psi}}dt&=B(\varsigma+2,\psi-2)\\&=\frac{\Gamma(\varsigma+2)\Gamma(\psi-2)}{\Gamma(\varsigma+\psi)}\\&=\frac{(\varsigma+1)!\,(\psi-3)!}{(\varsigma+\psi-1)!}\end{aligned}\tag{6.19}$$

bulunur.

Eşitlik (6.7), Eşitlik (6.16) ve Eşitlik (6.19) kullanıldığında,

$$E_\psi(e_1;x)=\frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_v(\psi x)}{\varsigma!}\binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}B(\varsigma+2,\psi-2)$$

$$=\frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}\frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)(-2+\psi)(-3+\psi)!}\frac{(\varsigma+1)\varsigma!\,(\psi-3)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$=\frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\frac{1}{(-1+\psi)(-2+\psi)}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}(\varsigma+1)$$

$$=\frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2}\frac{1}{(-2+\psi)}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}(\varsigma+1)$$

$$=\frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2(-2+\psi)}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}(\varsigma+1)$$

$$=\frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2(-2+\psi)}\left(\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\varsigma\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}+\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}\right)$$

$$E_\psi(e_1;x)=\frac{1}{(-2+\psi)(e+1)}+\frac{x(\psi+e\psi)}{(-2+\psi)(e+1)}$$

bulunur.

iii. (6.6) operatörlerinde $f(t) = e_2 = t^2$ alındığında

$$E_\psi(e_2;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)}{2e^{\psi x}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_v(\psi x)}{\varsigma!} \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} \frac{t^{\varsigma+2}}{(1+t)^{\psi+\varsigma}} dt$$

olur. Operatörlerin içindeki integrali ele alırsak (2.12) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t^{\varsigma+2}}{(t+1)^{v+\psi}} dt &= B(\varsigma+3,\psi-3) \\ &= \frac{\Gamma(\varsigma+3)\Gamma(\psi-3)}{\Gamma(\varsigma+\psi)} \\ &= \frac{(\varsigma+2)!\,(\psi-4)!}{(\varsigma+\psi-1)!} \end{aligned} \tag{6.20}$$

bulunur.

Eşitlik (6.7), Eşitlik (6.8), Eşitlik (6.16), Eşitlik (6.20) kullanıldığında

$$E_\psi(e_2;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} B(\varsigma+3,\psi-3)$$

$$= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)!} \frac{(\varsigma+2)!\,(\psi-4)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}$$

$$\times \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+v-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)!} \frac{(\varsigma+2)(\varsigma+1)\varsigma!\,(\psi-4)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \frac{1}{(-1+\psi)(-2+\psi)(-3+\psi)} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} (\varsigma+2)(\varsigma+1)$$

$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2} \frac{1}{(-2+\psi)(-3+\psi)} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} (\varsigma+2)(\varsigma+1)$$

$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2(-2+\psi)(-3+\psi)} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} (\varsigma^2+3\varsigma+1)$$

$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2(-2+\psi)(-3+\psi)} \left(\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma^2 \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} + 3\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} + \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \right)$$

$$E_\psi(e_2;x) = \frac{2-e-e^2}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2} + \frac{x(4\psi+6e\psi+2e^2\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2} + \frac{x^2(\psi^2+2e\psi^2+e^2\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2}$$

bulunur.

iv. (6.6) operatörlerinde $f(t) = e_3 = t^3$ alındığında

$$E_\psi(e_3;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)}{2e^{\psi x}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} \frac{t^{\varsigma+3}}{(1+t)^{\psi+\varsigma}} dt$$

olur. Operatörlerin içindeki integrali ele alırsak (2.12) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t^{\varsigma+3}}{(t+1)^{v+\psi}} dt &= B(\varsigma+4,\psi-4) \\
&= \frac{\Gamma(\varsigma+4)\Gamma(\psi-4)}{\Gamma(\varsigma+\psi)} \\
&= \frac{(\varsigma+3)!\,(\psi-5)!}{(\varsigma+\psi-1)!} \qquad (6.21)
\end{aligned}$$

bulunur.

Eşitlik (6.7), Eşitlik (6.8), Eşitlik (6.9), Eşitlik (6.10), Eşitlik (6.16), Eşitlik (6.21) kullanılarak,

$$E_\psi(e_3;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} B(\varsigma+4,\psi-4)$$

$$E_\psi(e_3;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)!} \frac{(\varsigma+3)!\,(\psi-5)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}$$

$$\times \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)!}$$

$$\times \frac{(\varsigma+3)(\varsigma+2)(\varsigma+1)\varsigma!\,(\psi-5)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \frac{1}{(-1+\psi)(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)}$$

$$\times \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}(\varsigma+3)(\varsigma+2)(\varsigma+1)$$

$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2} \frac{1}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}(\varsigma+3)(\varsigma+2)(\varsigma+1)$$

$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}(\varsigma^3+6\varsigma^2+11\varsigma+6)$$

$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)} \left(\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma^3 \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} + 6\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma^2 \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} + 11\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} + \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \right)$$

$$E_\psi(e_3;x) = \frac{6-10e-14e^2-4e^3}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} + \frac{x(18\psi+33e\psi+18e^2\psi+3e^3\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} + \frac{x^2(9\psi^2+24e\psi^2+21e^2\psi^2+6e^3\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} + \frac{x^3(\psi^3+3\psi^3+3e^2\psi^3+e^3\psi^3)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3}$$

bulunur.

v. (6.6) operatörlerinde $f(t) = e_4 = t^4$ alındığında

$$E_\psi(e_4;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)}{2e^{\psi x}} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} \frac{t^{\varsigma+4}}{(1+t)^{\psi+\varsigma}} dt$$

olur. Operatörlerin içindeki integrali ele alırsak (2.12) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{t^{\varsigma+4}}{(t+1)^{\varsigma+\psi}} dt &= B(\varsigma+5,\psi-5) \\ &= \frac{\Gamma(\varsigma+5)\Gamma(\psi-5)}{\Gamma(\varsigma+\psi)} \\ &= \frac{(\varsigma+4)!\,(\psi-6)!}{(\varsigma+\psi-1)!} \end{aligned} \tag{6.22}$$

bulunur.

Eşitlik (6.7), Eşitlik (6.8), Eşitlik (6.9), Eşitlik (6.16), Eşitlik (6.22) kullanılarak,

$$E_\psi(e_4;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma} B(\varsigma+5,\psi-5)$$

olduğundan

$$E_\psi(e_4;x) = \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)!} \frac{(\varsigma+4)!\,(\psi-6)!}{(\varsigma+\psi-1)!}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \\ &\times \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \frac{(\psi+\varsigma-1)!}{\varsigma!\,(-1+\psi)(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(-6+\psi)!} \\ &\times \frac{(\varsigma+4)(\varsigma+3)(\varsigma+2)(\varsigma+1)\varsigma!\,(\psi-6)!}{(\varsigma+\psi-1)!} \\ &= \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2} \frac{1}{(-1+\psi)(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)} \\ &\qquad \times \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} (\varsigma+4)(\varsigma+3)(\varsigma+2)(\varsigma+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2} \frac{1}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)}$$
$$\times \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} (\varsigma+4)(\varsigma+3)(\varsigma+2)(\varsigma+1)$$
$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} (\varsigma^4 + 10\varsigma^3 + 35\varsigma^2$$
$$+ 50\varsigma + 24)$$
$$= \frac{(e+1)e^{-\psi x}}{2(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)}$$
$$\times \left(\sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma^4 \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} + 10 \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma^3 \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} + 35 \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma^2 \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \right.$$
$$\left. + 50 \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \varsigma \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} + 24 \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \right)$$
$$E_\psi(e_4; x) = \frac{24 - 89e - 157e^2 - 83e^3 - 15e^4}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4}$$
$$+ \frac{x(96\psi + 188e\psi + 108e^2\psi + 12e^3\psi - 4e^4\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4}$$
$$+ \frac{x^2(72\psi^2 + 234e\psi^2 + 282e^2\psi^2 + 150e^3\psi^2 + 30e^4\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4}$$
$$+ \frac{x^3(16\psi^3 + 60e\psi^3 + 84e^2\psi^3 + 52e^3\psi^3 + 12e^4\psi^3)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4}$$
$$+ \frac{x^4(\psi^4 + 4e\psi^4 + 6e^2\psi^4 + 4e^3\psi^4 + e^4\psi^4)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 6.3.

$x \in [0, \infty)$ olmak üzere E_ψ operatörleri için

i. $E_\psi(t - x; x) = \frac{1}{(1+e)(-2+\psi)}(1 + 2x(1+e))$,

ii. $E_{\psi}((t-x)^2;x) = \frac{1}{(1+e)^2(-2+\psi)(-3+\psi)}\big(2 - e - e^2 + x(6 + 6e + 2\psi + 4e\psi + 2e^2\psi) + x^2(6 + 12e + 6e^2 + \psi + 2e\psi + e^2\psi)\big)$,

iii. $E_{\psi}((t-x)^4;x) = \frac{1}{(1+e)^4(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)}(24 - 89e - 157e^2 - 83e^3 - 15e^4 + x(120 + 72\psi - 80e + 72\psi - 480e^2 + 204\psi e^2 - 360e^3 + 84\psi e^3 - 80e^4 + 12\psi e^4) + x^2(240 + 360e - 120e^2 - 360e^3 - 120e^4 + 252\psi + 858e\psi + 1074e^2\psi + 582e^3\psi + 114e^4\psi + 12\psi^2 + 48e\psi^2 + 72e^2\psi^2 + 48e^3\psi^2 + 12e^4\psi^2) + x^3(240 + 720e + 720e^2 + 240e^3 + 292\psi + 1116\psi e + 1596e^2\psi + 1012e^3\psi + 240e^4\psi + 12\psi^2 + 48e\psi^2 + 72e^2\psi^2 + 48e^3\psi^2 + 12e^4\psi^2) + x^4(120 + 480e + 720e^2 + 480e^3 + 120e^4 + 86\psi + 344\psi e + 516e^2\psi + 344e^3\psi + 86e^4\psi + 3\psi^2 + 12e\psi^2 + 18e^2\psi^2 + 12e^3\psi^2 + 3e^4\psi^2))$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

E_{ψ} operatörlerinin lineerlik özelliği ve Lemma 6.2. kullanılarak

i. Birinci merkezi moment

$$E_{\psi}(t-x;x) = E_{\psi}(e_1;x) - xE_{\psi}(e_0;x)$$
$$= \frac{1}{(-2+\psi)(e+1)} + \frac{x(\psi+e\psi)}{(-2+\psi)(e+1)} - \mathrm{x}$$
$$= \frac{1}{(1+e)(-2+\psi)}(1 + 2x(1+e))$$

elde edilir.

ii. İkinci merkezi moment

$$E_{\psi}((t-x)^2;x) = E_{\psi}(e_2;x) - 2xE_{\psi}(e_1;x) + x^2E_{\psi}(e_0;x)$$
$$= \frac{2-e-e^2}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2} + \frac{x(4\psi + 6e\psi + 2e^2\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2}$$
$$+ \frac{x^2(\psi^2 + 2e\psi^2 + e^2\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2}$$
$$- 2x\left(\frac{1}{(-2+\psi)(e+1)} + \frac{x(\psi+e\psi)}{(-2+\psi)(e+1)}\right) + x^2$$

$$= \frac{1}{(1+e)^2(-2+\psi)(-3+\psi)}(2-e-e^2 + x(6+6e+2\psi+4e\psi+2e^2\psi) + x^2(6+12e+6e^2+\psi + 2e\psi+e^2\psi))$$

elde edilir.

iii. Son olarak, dördüncü merkezi moment

$$E_\psi((t-x)^4;x) = E_\psi(e_4;x) - 4xE_\psi(e_3;x) + 6x^2E_\psi(e_2;x) - 4x^3E_\psi(e_1;x) + x^4E_\psi(e_0;x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{24-89e-157e^2-83e^3-15e^4}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} \\
&\quad + \frac{x(96\psi+188e\psi+108e^2\psi+12e^3\psi-4e^4\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} \\
&\quad + \frac{x^2(72\psi^2+234e\psi^2+282e^2\psi^2+150e^3\psi^2+30e^4\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} \\
&\quad + \frac{x^3(16\psi^3+60e\psi^3+84e^2\psi^3+52e^3\psi^3+12e^4\psi^3)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} \\
&\quad + \frac{x^4(\psi^4+4e\psi^4+6e^2\psi^4+4e^3\psi^4+e^4\psi^4)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)(e+1)^4} \\
&\quad - 4x\left(\frac{6-10e-14e^2-4e^3}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} + \frac{x(18\psi+33e\psi+18e^2\psi+3e^3\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^2(9\psi^2+24e\psi^2+21e^2\psi^2+6e^3\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3} + \frac{x^3(\psi^3+3\psi^3+3e^2\psi^3+e^3\psi^3)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(e+1)^3}\right) \\
&\quad + 6x^2\left(\frac{2-e-e^2}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2} + \frac{x(4\psi+6e\psi+2e^2\psi)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2} + \frac{x^2(\psi^2+2e\psi^2+e^2\psi^2)}{(-2+\psi)(-3+\psi)(e+1)^2}\right) \\
&\quad - 4x^3\left(\frac{1}{(-2+\psi)(e+1)} + \frac{x(\psi+e\psi)}{(-2+\psi)(e+1)}\right) + x^4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&E_\psi((t-x)^4;x)\\
&\quad=\frac{1}{(1+e)^4(-2+\psi)(-3+\psi)(-4+\psi)(-5+\psi)}(24-89e\\
&\quad-157e^2-83e^3-15e^4\\
&\quad+x(120+72\psi-80e+72\psi-480e^2+204\psi e^2-360e^3\\
&\quad+84\psi e^3-80e^4+12\psi e^4)\\
&\quad+x^2(240+360e-120e^2-360e^3-120e^4+252\psi\\
&\quad+858e\psi+1074e^2\psi+582e^3\psi+114e^4\psi+12\psi^2+48e\psi^2\\
&\quad+72e^2\psi^2+48e^3\psi^2+12e^4\psi^2)\\
&\quad+x^3(240+720e+720e^2+240e^3+292\psi+1116\psi e\\
&\quad+1596e^2\psi+1012e^3\psi+240e^4\psi+12\psi^2+48e\psi^2\\
&\quad+72e^2\psi^2+48e^3\psi^2+12e^4\psi^2)\\
&\quad+x^4(120+480e+720e^2+480e^3+120e^4+86\psi\\
&\quad+344\psi e+516e^2\psi+344e^3\psi+86e^4\psi+3\psi^2+12e\psi^2\\
&\quad+18e^2\psi^2+12e^3\psi^2+3e^4\psi^2))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.

$f \in [0,\infty) \cap E$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Burada

$$E=\left\{f:\frac{f(x)}{1+x^2},x\to\infty\right\}$$

şeklindedir.

Bu durumda $[0,\infty)$ aralığının kompakt alt kümelerinde E_ψ operatörleri f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat

$$\lim_{\psi\to\infty} E_\psi\left(t^i;x\right)=x^i\,,i=0,1,2$$

olduğu görülür.

Bu sayede $[0,\infty)$ aralığının kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaklık sağlandığı gösterilir. Böylece ispat Korovkin teoremi [Altomare ve Campiti, 1994] yardımı ile tamamlanır.

6.3. Euler Polinomlarını İçeren Szász-Baskakov Operatörlerinin Yaklaşım Hızı

Bu kısımda oluşturulan operatörlerin yaklaşım hızı süreklilik modülü kullanılarak hesaplanacaktır.

Teorem 6.2.

$f \in [0,\infty) \cap E$ olmak üzere E_ψ operatörleri için

$$\left|E_\psi(f;x) - f(x)\right| \leq 2\omega(f, \sqrt{\lambda_m(x)})$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,

$$\begin{aligned}\lambda_\psi(x) = E_\psi((t-x)^2;x) \\ &= \frac{1}{(1+e)^2(-2+\psi)(-3+\psi)}(2-e-e^2 \\ &+ x(6+6e+2\psi+4e\psi+2e^2\psi) + x^2(6+12e+6e^2+\psi \\ &+ 2e\psi+e^2\psi))\end{aligned}$$

olarak verilmiştir.

İspat

Tanım 2.9. (vii) özelliğinden

$$
\begin{aligned}
&\left|E_\psi(f;x)-f(x)\right| \\
&\qquad \le \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \\
&\qquad \times \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}|f(t)-f(x)|d(t) \\
&\qquad \le \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|E_\psi(f;x)-f(x)\right| \\
&\qquad \le \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_v(\psi x)}{\varsigma!} \\
&\qquad \times \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}|f(t)-f(x)|d(t) \\
&\qquad \le \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \\
&\qquad \times \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f,\delta)dt \\
&\qquad \le \left(+\frac{1}{\delta}\left(\frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\times \int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}|t-x|dt\right)\right)\omega(f,\delta)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Verilen integral üzerinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|E_\psi(f;x)-f(x)\right| \\
&\qquad \leq (1 \\
&\qquad + \frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\frac{1}{\delta}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!} \\
&\qquad \times\left(\int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \times\left(\int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}|t-x|^2dt\right)^{\frac{1}{2}})\omega(f,\delta)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Verilen toplam üzerinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|E_\psi(f;x)-f(x)\right| \leq (1+\frac{1}{\delta} \\
&\times\left(\frac{(\psi-1)(e+1)e^{-\psi x}}{2}\frac{1}{\delta}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{P_\varsigma(\psi x)}{\varsigma!}\int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left(\int_0^\infty \binom{\psi+\varsigma-1}{\varsigma}\frac{t^\varsigma}{(1+t)^{\psi+\varsigma}}|t-x|^2dt\right)^{\frac{1}{2}})\omega(f,\delta) \\
&=\left(1+\frac{1}{\delta}(E_\psi(e_0;x))^{\frac{1}{2}}(E_\psi((t-x)^2;x))^{\frac{1}{2}}\right)\omega(f,\delta) \\
&=\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\lambda_\psi(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(f,\delta)
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde,

$$
\left|E_\psi(f;x)-f(x)\right| \leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{E_\psi((t-x)^2;x)}\right)\omega(f,\delta)
$$

elde edilir.

Burada, $\delta=\sqrt{E_\psi((t-x)^2;x)}$ seçildiğinde

$$
\begin{aligned}
\lambda \coloneqq \lambda_\psi(x) = E_\psi((t-x)^2;x) \\
&= \frac{1}{(1+e)^2(-2+\psi)(-3+\psi)}(2-e-e^2 \\
&+ x(6+6e+2\psi+4e\psi+2e^2\psi)+x^2(6+12e+6e^2+\psi \\
&+2e\psi+e^2\psi))
\end{aligned}
$$

istenilen sonuca ulaşılır.

Teorem 6.3.

$f \in C[0,a]$ aralığında,

$$\left|E_\psi(f;x) - f(x)\right| \leq \frac{2}{a}\|f\|\lambda^2 + \frac{3}{4}(a+2+\lambda^2)\omega(f,\lambda)$$

ve

$$\lambda = \lambda_\psi(x) = \sqrt[4]{E_\psi((t-x)^2;x)}$$

f_λ ikinci dereceden Steklov fonksiyonu olmak üzere $E_\psi(e_0;x) = 1$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
&\left|E_\psi(f;x) - f(x)\right| \\
&\qquad \leq \left|E_\psi(f;x) - f(x) + E_\psi(f_\lambda;x) - E_\psi(f_\lambda;x) + f_\lambda(x) - f_\lambda(x)\right| \\
&\qquad \leq \left|E_\psi(f;x) - E_\psi(f_\lambda;x)\right| + \left|E_\psi(f_\lambda;x) - f_\lambda(x)\right| \\
&\qquad + |f_\lambda(x) - f(x)| \\
&\qquad \leq \left|E_\psi(f - f_\lambda;x)\right| + \left|E_\psi(f_\lambda;x) - f_\lambda(x)\right| + |f_\lambda(x) - f(x)| \\
&\qquad \leq 2\|f_\lambda - f\| + \left|E_\psi(f_\lambda;x) - f_\lambda(x)\right|
\end{aligned}$$

kullanılarak

$$\left|E_\psi(f;x) - f(x)\right| \leq \left\|f'_\lambda\right\|\sqrt{E_\psi((t-x)^2;x)} + \frac{1}{2}\left\|f''_\lambda\right\|E_\psi((t-x)^2;x)$$

ifade edilir.

6.4. Voronovskaya-Tip Teorem

Bu bölümde Voronovskaya-tip teorem kullanılarak asimptotik yaklaşım sonuçları elde edilmiştir.

Lemma 6.4.

E_ψ operatörleri için

$$\lim_{\psi\to\infty} \psi E_\psi\big((t-x);x\big) = 2x + \frac{1}{1+e} \tag{6.23}$$

$$\lim_{\psi\to\infty} \psi E_\psi((t-x)^2;x) = x(2+x) \tag{6.24}$$

$$\lim_{\psi\to\infty} \psi^2 E_\psi((t-x)^4;x) = 3x^2(2+x)^2 \tag{6.25}$$

sonuçları sağlanır.

Teorem 6.4.

$f, f', f'' \in C[0,\infty)$ ve $x \in [0,\infty)$ için

$$\lim_{\psi\to\infty} \psi\left(E_\psi(f;x) - f(x)\right) = \left(2x + \frac{1}{1+e}\right) f'(x) + \frac{1}{2} x(2+x) f''(x) \tag{6.26}$$

ifadesi gerçeklenir.

İspat

f fonksiyonunun x civarında Taylor açılımı

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + (t-x)^2 \frac{1}{2} f''(x) + (t-x)^2 g(t,x). \tag{6.27}$$

Burada $\lim_{t\to x} g(t,x) = 0$ şeklindedir.

Eşitlik (6.27)'nin iki tarafına E_ψ operatörlerini uygulayarak şunlar elde edilir:

$$E_\psi(f;x) = f(x) + E_\psi\big((t-x);x\big)f'(x) + \frac{f''(x)}{2} E_\psi((t-x)^2;x)$$
$$+ E_\psi((t-x)^2 g(t,x);x).$$

$\psi \to \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{\psi\to\infty} \psi\left(E_\psi(f;x) - f(x)\right)$$
$$= f'(x) \lim_{\psi\to\infty} \psi E_\psi\big((t-x);x\big) + \frac{f''(x)}{2} \lim_{\psi\to\infty} \psi\, E_\psi((t-x)^2;x)$$
$$+ \lim_{\psi\to\infty} E_\psi((t-x)^2 g(t,x);x) \tag{6.28}$$

bulunur.

$\lim\limits_{\psi\to\infty} \psi E_\psi((t-x)^2 g(t,x);x)$ terimi için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanır ise

$$\psi E_\psi((t-x)^2 g(t,x);x) \leq \sqrt{E_\psi(g^2(t,x);x)}\sqrt{\psi^2 E_\psi((t-x)^4;x)}$$

elde edilir.

Verilen $g(t,x) \to 0$ ve $t \to x$ şeklindedir,

$$\lim_{\psi\to\infty} E_\psi\,(g^2(t,x);x) = 0 \tag{6.29}$$

$[0,\infty)$'ın kompakt bir alt kümesinde doğrulanır. Bu şekilde (6.28) ifadesinde (6.23), (6.24) ve (6.29) yerine yazıldığında

$$\lim_{\psi\to\infty} \psi\left(E_\psi(f;x) - f(x)\right) = f'(x)\left(2x + \frac{1}{1+e}\right) + \frac{f''(x)}{2}\left(x(2+x)\right)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

7. HATA ANALİZİ

Bu bölümde çeşitli f fonksiyonları için Euler tipi Szász -Baskakov operatörlerinin süreklilik modülü kullanılarak hata analizlerinden bahsedilmiştir.

Örnek 7.1.

$f(x) = \frac{\log(e^{-x}+1)}{1000}$ ve $x \in [0,10]$ aralığında olsun. Euler tipi Szász-Baskakov operatörleri $E_\psi(f;x)$ göz önüne alındığında elde edilen hatalar süreklilik modülü kullanılarak elde edilmiş olup, sonuçlar Tablo 7.1'de verilmiştir.

ψ	$\left\lvert E_\psi(f;x) - \frac{\log(e^{-x}+1)}{1000} \right\rvert$
10	0.00137957
10^2	0.000837097
10^3	0.000318015
10^4	0.000106599
10^5	0.0000343428
10^6	0.0000109314

Tablo 7.1: $f(x) = \frac{\log(e^{-x}+1)}{1000}$ fonksiyonu için $E_\psi(f;x)$ operatörlerinin hata analizi.

Örnek 7.2.

$f(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ ve $x \in [0,10]$ aralığında olsun. Euler polinomunu içeren Szász-Baskakov operatörleri $E_\psi(f;x)$ göz önüne alındığında elde edilen hatalar süreklilik modülü kullanılarak elde edilmiş olup, sonuçlar Tablo 7.2'de sunulmuştur.

ψ	$\left\lvert E_\psi(f;x) - \frac{e^{-x}}{2} \right\rvert$
10	0.996634
10^2	0.683997
10^3	0.29402
10^4	0.103807
10^5	0.0340496
10^6	0.0108947

Tablo 7.2: $f(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ fonksiyonu için $E_\psi(f;x)$ operatörlerinin hata analizi.

Örnek 7.3.

$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ve $x \in [0,10]$ aralığında olsun. Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörleri $E_\psi(f;x)$ göz önüne alındığında elde edilen hatalar süreklilik modülü kullanılarak elde edilmiş olup, sonuçlar Tablo 7.3'de listelenmiştir.

ψ	$\left\lvert E_\psi(f;x) - \left(\frac{1}{4}\right)^x \right\rvert$
10	1.99925
10^2	1.59500
10^3	0.765725
10^4	0.281916
10^5	0.0937802
10^6	0.0301428

Tablo 7.3: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ fonksiyonu için $E_\psi(f;x)$ operatörlerinin hata analizi.

8. SONUÇ

Bu tez, Szász operatörlerinin çeşitli modifikasyonlarını inceleyerek yaklaşım teorisi alanında yapılan çalışmalara bir örnek teşkil etmektedir. Öncelikle, Euler polinomları yardımıyla oluşturulan Szász operatörleri verilmiştir. Sonrasında, Euler polinomlarını içeren Szász-Baskakov operatörleri oluşturulmuştur. Yeni operatörlerin yaklaşım özellikleri araştırılmış, yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Voronovskaya-tip teoremi kullanılarak incelenmiştir. Bu operatörlerin yaklaşımının daha iyi anlaşılması için seçilmiş fonksiyonlara olan yaklaşımlar tablolar halinde sunulmuştur. Tezde elde edilen sonuçlar, yaklaşım teorisi üzerine çalışmak isteyen araştırmacılar için bir kaynak niteliğindedir.

EXTENDED ABSTRACT

Approximation Properties of Szász-Baskakov Operators Including Euler Polynomials

Approximation theory in mathematics describes the most efficient approximation of functions by using simpler functions and the quantitative errors that occur in these functions. Approximation theory is becoming increasingly important as a result of its focus on a large number of scientific problems, not only in mathematics but also in other fields such as basic sciences and engineering. In approximation theory, an important problem is whether there exists an optimal approximator for the function under study. The best approximator studies the problem of convergence of a parameter to zero. Therefore, there is a problem to evaluate the speed of approximation. A number of different methods have been used to solve this problem. This thesis is an example of the study of approximation theory. First, basic concepts are introduced. A linear positive operator is defined. The central moment of the operator sequence is stated. Korovkin's theorem is defined and its proof is obtained. The continuity module is defined. Properties of the continuity module are given. The given properties are proved in order. The Cauchy-Schwarz inequality is expressed for the sum. Cauchy-Schwarz inequality is expressed for the integral. Gamma function definition, Beta function definition are given. The second modulus of continuity is defined. Steklov function is defined. Weierstrass approximation theorem is given. Then, the operators that will help by continuing the studies are examined. Detailed investigations were made. As a result of the findings obtained as a result of the researches, some definitions and proofs were made. Szász operator is one of the auxiliary operators. Szász operator and some convergence properties of these operators are expressed. The operator is defined. It is stated that the Szász operator is linear and positive and supported by proofs. Korovkin's theorem is used for the Szász operator and it is proved with the help of Korovkin's theorem. The central moments of the Szász operator are given. Thus, the necessary investigation of the Szász operator is completed. Another auxiliary operator was investigated. As a result of the necessary research, the Baskakov operator was analyzed since it is helpful for the thesis. The Baskakov operator and some convergence properties of these operators are stated. The definition of Baskakov operator is given. Korovkin's theorem is used for Baskakov operator and it is proved with the help of Korovkin's theorem. The central moments of the Baskakov operator are given. Thus, the necessary investigation of Baskakov operator is completed. Another auxiliary operator was investigated. Step by step investigations were made for the thesis study. Meticulousness was taken as a basis in the investigations. The next auxiliary operator is an indication that the findings of the Szász operator involving Euler polynomials will help the thesis after detailed research. In order to obtain the results of the Szász operator involving Euler polynomials, previous studies on this subject were examined in detail. The Szász operator involving Euler polynomials and some convergence properties of these operators are expressed. The generator function of the Euler polynomial is defined. Korovkin's theorem is used for the Szász operator involving Euler polynomials and it is proved with the help of Korovkin's theorem. The central moments of the Szász operator involving Euler polynomials are given. Thus, the necessary investigation of the Szász operator involving Euler polynomials is completed. The studies and findings for auxiliary operators are useful and the subject of the thesis is continued. The Szász-Baskakov operator involving Euler polynomials was obtained as a thesis study. Necessary investigations have been made for this study. The aim of this study is to serve as an example for the studies in the field of approximation theory. Various modifications of Szász operators are investigated. First, some definitions and results will be given for the construction of the operator. The generating function of an analytic function Appell polynomial is defined. For generating Bernoulli polynomials, Genocchi polynomials and Fubini polynomials and their well-known generalizations are defined. The generating function of Euler polynomials, which is of great help in this work, is expressed. A detailed literature review has been done for this study. Many references have been analyzed. Euler polynomials are one of the exceptional examples of Appell polynomials. In the light of this information, Szász-Baskakov operators involving Euler polynomials are constructed. Then the approximation properties of Szász-Baskakov operators involving Euler polynomials are given. The necessary operations for the approximation properties of Szász-Baskakov operators involving Euler polynomials are expressed. The definitions that should be used for Szász-Baskakov operators involving Euler polynomials are established. Using the definition of the generator function of Euler polynomials given earlier, some results will be obtained. These results will be helpful in the newly established Szász-Baskakov operators involving Euler polynomials. Derivatives of the generator function are taken using the definition of the generator function of Euler polynomials. The derivatives continue until the fourth derivative. After taking the fourth derivative, the proof of these derivatives is started. First, the generating function of Euler polynomials is given and the derivative of the given generating function with respect to t is taken. The derivative is replaced by one and the proof is continued from where we left off. As a result, the first derivative is obtained. It is time to prove the second derivative. The first derivative of the generating function of Euler polynomials was used. Then the derivative of this first derivative was taken with respect to t. And thus the second derivative is obtained. In this second derivative, one was substituted and the proof was continued from where it was left. Thus, the necessary steps for the third derivative are provided. Then the derivative of this second derivative was taken according to t. And thus the third derivative was obtained. In this third derivative, one was substituted and the proof was continued from where it was left. Thus, the necessary steps for the fourth derivative are provided. Then the derivative of this third derivative was taken according to t. The fourth derivative was obtained by performing similar operations to the other steps. As a result of the operations performed, the proof is complete. A new definition is given. The aim of the definition is to obtain the moments of the Szász-Baskakov operator involving Euler polynomials given .After making the necessary choices in the generator function of the given Euler polynomial, the proof is continued. First of all, the integral in the Szász-Baskakov operator containing the Euler polynomials for the first moment is taken and substituted into the operator with the help of the previously defined Beta-Gamma function. The first moment is obtained by providing the necessary operations. In order to continue the proof, the second moment will be obtained. Similar operations are performed for the second moment and the second moment is obtained. Similar operations are performed for the third moment and the fourth moment. This concludes the definition and proof of the given moment. A new definition was needed to continue the thesis work. This definition is the expression of central moments together with their proofs. First, the first, second and fourth central moment results are given. Considering these results, the proof is started. In the proof, the moments previously defined for the first central moment were used by taking advantage of the linearity of the operator. The same process was continued for the second central moment. And finally, the fourth central moment is obtained by using the moment definition given for the fourth central moment. This concludes the proof. Then the definition of Korovkin's theorem is given. Then definitions are given for the approximation speed of Szász-Baskakov operators involving Euler polynomials using modulus of continuity. The second central moment is used in this definition. The necessary operations were performed using modulus of continuity property given in the basic concepts. Then, if the Cauchy-Schwarz inequality is applied to both the integral and the sum, the desired result is obtained. The definition of the quadratic Steklov function is expressed by making the necessary placements. Another definition is to obtain asymptotic approximation results using Voronovskaya-type theorem. The limit is obtained using the central moments. Then the theorem is given and for its proof, the central moments are substituted in the Taylor expansion. And the desired result is obtained. Finally, the error analysis of Euler type Szász-Baskakov operators using modulus of continuity is mentioned. And different error tables were obtained in the error analysis. This concludes the thesis. The results obtained in the thesis are a resource for researchers who want to work on approximation theory.

KAYNAKÇA

Agyuz, E. (2021). Convergence by Szász type operators based on Euler type polynomials. *PROCEEDINGS BOOK OF MICOPAM 2020-2021*, 64.

Altomare, F., Campiti, M. (1994). Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications, De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 266-274.

Baskakov, V. A. (1957). An instance of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. In Doklady Akademii Nauk (Vol. 113, No. 2, pp. 249-251). Russian Academy of Sciences.

Bernstein, S. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités, Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(1), 1-2.

Cheon, G. S. (2003). A note on the Bernoulli and Euler polynomials. Applied Mathematics Letters, 16(3), 365-368.

Deniz, E. (2021) q-Baskakov Operatörünün Yakınsaklık Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi Kırıkkale Üniversitesi.

Fink, A.M. (1982). "Kolmogorov-Landau inequalities for monotone functions".In: J.Math. Anal. Appl 90 (1) pp. 251–258.

Gavrea, I., & Raşa, I. (1993). Remarks on some quantitative Korovkin-type results. Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, 22(2), 173-176.

Genç. D., Ö. (2021) İki Değişkenli Fonksiyonların Szász Operatörü İle Yaklaşım Özelliklerinin Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi.

Horadam, A.F. (1990). "Genocchi polynomials." Applications of Fibonacci Numbers: Volume 4 Proceedings of 'The Fourth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications', Wake Forest University, NC, USA, July 30–August 3. Dordrecht: Springer Netherlands, 1991.

Jiu, L., Moll, V. H., & Vignat, C. (2014). Identities for generalized Euler polynomials. Integral Transforms and Special Functions, *25*(10), 777-789.

Khan, H.H. (1974) Approximation of classes of function, AMU, Aligarh, (Ph.D. thesis).

Kılıç, S.A. and Erdem, M. (1987). Fonksiyonel Analize Giri¸s. Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları, 62-100.

Kilar, N., & Simsek, Y. (2017). A new family of Fubini type numbers and polynomials associated with Apostol-Bernoulli numbers and polynomials. Journal of the Korean Mathematical Society, 54(5), 1605-1621.

Korovkin, P.P. (1953). On convergence of linear operators in the space of continuous functions (Russian). Dokl Akad Nauk SSSR (N.S.) 90:961-–964 .

Lorentz, G.G. (1953). "Bernstein polynomials", University of Toronto Press, Mathematical Expositions, 10-130.

Prasad, G., Agrawal, P. N., & Kasana, H. S. (1983). Approximation of functions on [0,∞] by a new sequence of modified Szász operators. In *Math. Forum* (Vol. 6, No. 2, pp. 1-11).

Soydan, Y. (2012). Fonksiyonel Analiz. Ankara: Nobel Yayınları, 1-184.

Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. J. Res. Nat. Bur. Standards, 45(3), 239-245.

Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogennanter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin, 633–639, 789–805.

Zhuk, V. V. (1989). Lip1 sınıfının fonksiyonları ve S. N. Bernstein polinomları (Rusça), Vestnik Leningrad, Univ. Mat. Mekh. Astronomi, 1 (1989), 25–30; Vestnik Leningrad Univ. Math., 22 , 38–44.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, ad : PİLİÇ, Nilüfer

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet**
Yüksek lisans	Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi / Matematik Bölümü	2022
Lise	Malatya Fatih Lisesi	2016

Yıl	**Yer**	**Görev**
Yok	Yok	Yok

Yayınlar

Yok

Ulusal Bildiriler

1. Kanat, K., & Piliç, N. (23-24 Mayıs). Euler Polinomlarını İçeren Lineer Pozitif Operatörler 15. Ankara Matematik Günleri (AMG 2024), Ankara, Türkiye.

Hobiler

Kitap okumak, müzik dinlemek.