

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KESİRLİ MERTEBEDEN ÇİFT ALLEE ETKİLİ
LOJİSTİK DENKLEMİN ÇATALLANMA DAVRANIŞI**

**Hazırlayan
Engin MORKOYUNLU**

**Danışman
Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU**

Doktora Tezi

**Mayıs 2025
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KESİRLİ MERTEBEDEN ÇİFT ALLEE ETKİLİ
LOJİSTİK DENKLEMİN ÇATALLANMA DAVRANIŞI
(Doktora Tezi)**

**Hazırlayan
Engin MORKOYUNLU**

**Danışman
Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU**

**Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu
(TÜBİTAK) tarafından 2211 kodlu Yurt İçi Doktora Bursu
kapsamında desteklenmiştir.**

**Mayıs 2025
KAYSERİ**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Engin MORKOYUNLU



“Kesirli Mertebeden Çift Allee Etkili Lojistik Denklemin Çatallanma Davranışı”
adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma
Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan

Engin MORKOYUNLU

Danışman

Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgi, tecrübe ve desteğiyle yanımda olan, akademik gelişimime büyük katkılar sunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisinin rehberliği, sabrı ve yönlendirmeleri bu çalışmanın şekillenmesinde belirleyici olmuştur.

Aynı alanda doktora çalışması yürüten ve bu zorlu süreçte tecrübelerini benimle paylaşarak akademik ve kişisel anlamda bana rehberlik eden değerli arkadaşım Dr. Hatice ÇİZMECİ'ye de içten teşekkürlerimi sunuyorum. Desteği ve paylaşımları, bu çalışmanın ilerlemesinde yol gösterici olmuştur.

Hayatımın her anında yanımda olan, desteğini ve sevgisini esirgemeyen sevgili eşim Zeynep MORKOYUNLU'ya, yalnızca bir abi değil, aynı zamanda hayatımın her döneminde bana öğretmenlik yaparak yolumu aydınlatan Mehmet MORKOYUNLU'ya, ve tüm eğitim hayatım boyunca dualarıyla, özverili emekleriyle her zaman arkamda duran kıymetli annem Ayşe MORKOYUNLU ve babam Yaşar MORKOYUNLU'ya sonsuz teşekkür ederim. Varlığınız, bu zorlu süreçte bana güç verdi.

Doktora süreci boyunca zamanımın büyük bir kısmını akademik çalışmalarına ayırmak zorunda kaldığım için, birlikte geçireceğimiz nice değerli anlardan feragat eden, sabırları, anlayışları ve koşulsuz sevgileriyle bana en büyük desteği sunan canım evlatlarım Yaşar MORKOYUNLU ve Mehmet MORKOYUNLU'ya kalpten teşekkür ediyorum. Gülüşünüz, bu yolculuğun en kıymetli ışığı oldu.

Ayrıca, bu tez çalışması Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından “2211 kodlu Yurt İçi Doktora Bursu” kapsamında desteklenmiştir. Sağlanan bu destek, araştırmamın ilerlemesinde önemli bir katkı sağlamıştır. TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Emek veren, destek olan, katkı sunan herkese teşekkürlerimi sunuyorum.

Engin MORKOYUNLU

Mayıs 2025, KAYSERİ

KESİRLİ MERTEBEDEN ÇİFT ALLEE ETKİLİ LOJİSTİK DENKLEMİN ÇATALLANMA DAVRANIŞI

Engin MORKOYUNLU

**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Mayıs 2025
Danışman: Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU**

ÖZET

Bu çalışmamızda, çift Allee etkisinin Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden lojistik fark denklem sistemine olan etkisi incelenmiştir. Yapılan analizlerde, çift Allee etkisinin tek Allee etkisine kıyasla sistemin kararlılık bölgesini belirgin bir şekilde genişlettiği ve daha güçlü bir dengeleyici mekanizma sağladığı gözlemlenmiştir. Modelin dinamikleri, Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev tanımıyla ifade edilmiş ve bu sistem, Adams-Bashforth ayrıklaştırma yöntemi kullanılarak iki boyutlu fark denklem sistemine dönüştürülmüştür. Elde edilen fark denklem sisteminin sabit noktaları belirlenmiş ve bu noktaların kararlılığı incelenmiştir. Flip çatallanması, belirli parametre aralıklarında sistemde gözlemlenen önemli bir dinamik değişim olarak tespit edilmiştir.

Çalışmanın diğer kısmında, kaotik davranışın başlangıcını geciktirerek sistemin kararlılığını artırmak amacıyla hibrit kaos kontrol stratejisi uygulanmıştır. Hibrit kontrolün, çatallanma noktasını öteleyerek kaotik geçişi geciktirdiği ve sistemin kararlı bir şekilde davranmasını sağladığı gözlemlenmiştir.

Sayısal simülasyonlar, çatallanma diyagramları ve maksimum Lyapunov üstel analizleri ile kontrol stratejisinin etkinliği doğrulanmış ve sistemin daha geniş bir parametre aralığında kararlı kalabilmesi sağlanmıştır. Bu çalışma, çift Allee etkisi ve hibrit kaos kontrol stratejilerinin, kesirli mertebeden türevli lojistik sistemlerin dinamikleri üzerindeki etkilerini başarılı bir şekilde ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Lojistik model, Allee etkisi, Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden diferansiyel denklem, Fark denklemleri, Flip çatallanma, Hibrit kaos kontrolü.

BIFURCATION BEHAVIOR OF A FRACTIONAL ORDER LOGISTIC EQUATION WITH DUAL ALLEE EFFECT

Engin MORKOYUNLU

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

PhD Thesis, May 2025

Supervisor: Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU

ABSTRACT

In this study, the influence of the dual Allee effect on a Caputo–Fabrizio fractional-order logistic difference equation system is investigated. The analyses reveal that, compared to the single Allee effect, the dual Allee effect significantly expands the stability region of the system and provides a stronger stabilizing mechanism. The system dynamics are modeled using the Caputo–Fabrizio definition of fractional-order derivatives, and the model is discretized into a two-dimensional difference equation system via the Adams–Bashforth discretization method. The equilibrium points of the resulting difference system are identified, and their stability is analyzed. A flip bifurcation is detected as a critical dynamical transition within specific parameter intervals.

In the subsequent part of the study, a hybrid chaos control strategy is implemented to delay the onset of chaotic behavior and enhance system stability. The hybrid control approach successfully shifts the bifurcation point, postpones the transition to chaos, and ensures more stable system behavior.

The effectiveness of the control strategy is validated through numerical simulations, bifurcation diagrams, and maximum Lyapunov exponent analyses, demonstrating that the system can remain stable over a broader range of parameter values. This study successfully highlights the impact of the dual Allee effect and hybrid chaos control strategy on the dynamics of fractional-order logistic systems.

Keywords: Logistic model, Allee effect, Caputo–Fabrizio fractional-order differential equation, Difference equations, Flip bifurcation, Hybrid chaos control.

İÇİNDEKİLER

KESİRLİ MERTEBEDEN ÇİFT ALLEE ETKİLİ LOJİSTİK DENKLEMİN ÇATALLANMA DAVRANIŞI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK.....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
KABUL VE ONAY:.....	iv
TEŞEKKÜR	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
TABLolar LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Caputo–Fabrizio Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler.....	10
1.2. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Sistemlerde Adams-Bashforth Ayrıklaştırması	9
1.2.1. Adams–Bashforth Dönüşümü.....	9
1.3. Fark Denklem Sistemleri	11
1.3.1. Fark Denklem Sistemlerinde Kararlılık.....	12
1.3.2. Fark Denklem Sistemlerinde Çatallanma Analizi [71-73]	14
1.3.2.1. Fold (Saddle-Node) Çatallanması	16
1.3.2.2. Flip (Period-Doubling) Çatallanması	17
1.3.2.3. Neimark–Sacker (Hopf) Çatallanması.....	24
1.4. Hibrit Kontrol Yöntemi	31

1.4.1. Hibrit Kontrol Formülasyonu	31
1.4.2. Hibrit Kontrolün Dinamik Etkileri	32

2. BÖLÜM

KESİRSEL MERTEBEDEN ÇİFT ALLEE ETKİLİ LOJİSTİK DENKLEMİN ÇATALLANMA DAVRANIŞI

2.1. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Çift Allee Etkili Lojistik Model	35
2.2. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Çift Allee Etkili Lojistik Denklem Sisteminin Denge Noktaları Civarında Kararlılık Analizi	37
2.3. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Çift Allee Etkili Lojistik Denklem Sisteminin E_2 Denge Noktası Civarında Çatallanma Analizi	40
2.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Çift Allee Etkili Lojistik Denklem Sisteminin E_2 Denge Noktası Civarında Nümerik Analizi	43
2.4.2. Tek ve Çift Allee Etkilerinin Nümerik Olarak Karşılaştırılması	62
2.6. Sonuç	66

3. BÖLÜM

HİBRİT KONTROLLÜ CAPUTO-FABRİZİO KESİRSEL MERTEBEDEN TÜREVLİ ÇİFT ALLEE ETKİLİ LOJİSTİK DENKLEM SİSTEMİNİN DİNAMİK ANALİZİ

3.1. Kararlılık Analizi	69
3.2. Flip Çatallanma Analizi	70
3.3. Hibrit Kontrollü (3.1) Sisteminin E_2 Denge Noktası Civarında Nümerik Analizi	72
3.3. Hibrit Kontrollü Sistem ile Orijinal Sistem Karşılaştırması	75
3.4. Sonuç	84

4. BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇ

KAYNAKÇA	89
ÖZGEÇMİŞ	97

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1. (2.3) denklem sisteminde verilen parametreler ile bu parametrelerin anlamı ve tanım aralığı.....	36
Tablo 2. $K = 100$, $\alpha = 0.9$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ parametreleri için farklı h parametreleri için elde edilen çatallanma parametre değerleri.....	56
Tablo 3. $K = 100$, $\alpha = 0.9$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ parametreleri için farklı ρ değerlerinde çatallanma elde edilen çatallanma parametre değerleri ve bu değerlerdeki özdeğerler.....	79



ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 1. $a = 0.65$, $b = 0.6$ ve $1.8 < r < 3$ parametre değerleri ile $(0.3, 0.4, 0.5)$ başlangıç değerinde (1.6) sisteminin period-doubling (flip) çatallanma grafiği [70]. 24
- Şekil 2. $a = 0.4$, $b = 1.5$ ve $0 < r < 0.9$ parametre değerleri ile $(0.3, 0.4, 0.5)$ başlangıç değerinde (1.6) sisteminin Neimark-Sacker çatallanma grafiği [70]. 30
- Şekil 3. $a = 0.65$, $b = 0.6$, $\rho = 0.5$ ve $0 < r < 6$ parametre değerleri ile $(0.3, 0.4, 0.5)$ başlangıç değerlerinde (1.7) sisteminin flip çatallanma grafiği (parametre değerleri [70]). 33
- Şekil 4. $a = 0.4$, $b = 1.5$, $\rho = 0.5$ ve $0 < r < 1.5$ parametre değerleri ile $(0.3, 0.4, 0.5)$ başlangıç değerlerinde (1.7) sisteminin Neimark-Sacker çatallanma grafiği (parametre değerleri [70]). 34
- Şekil 5. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $r = 3$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşullarında güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası için $X(n) - n$ kararlılık diyagramı. 44
- Şekil 6. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $r = 3$ parametre değerleri ve $X(1) = 30$, $Y(1) = 30$ başlangıç koşullarında (2.3) sisteminin mavi eğri ile güçlü Allee etkisi ($m = 40$) ve kırmızı eğri ile zayıf Allee etkisi ($m = -5$) için E_2 denge noktası civarında $X(n) - n$ kararlılık diyagramı. 45
- Şekil 7. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ parametre değerleri ve $X(1) = 110$, $Y(1) = 110$ başlangıç koşulları ile a) $r = 3$, b) $r = 5$, c) $r = 6$, d) $r = 6.5$, e) $r = 6.77684$, f) $r = 7$, g) $r = 7.5$, h) $r = 8.5$ için güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki $X(n) - Y(n)$ diyagramı. 46
- Şekil 8. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $0 < r < 15$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma diyagramı. 48
- Şekil 9. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = -5$, $0 < r < 7.2$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için zayıf Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma diyagramı. 49
- Şekil 10. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $0 < r < 8$ parametre değerleri ve $X(1) = 30$, $Y(1) = 30$ başlangıç koşullarında kırmızı eğri ile zayıf Allee etkili ($m = -5$) ve mavi eğri ile güçlü Allee etkili ($m = 40$) (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma diyagramı. 50

Şekil 11. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $r = 7$ parametre değerlerinde E_2 denge noktası civarında güçlü çift Allee etkili sistem için farklı başlangıç koşullarına duyarlılık grafiği. Mavi eğri: $X(1) = Y(1) = 50$ (düşük başlangıç), Kırmızı eğri: $X(1) = Y(1) = 70$ (orta başlangıç), Yeşil eğri: $X(1) = Y(1) = 90$ (yüksek başlangıç). 52

Şekil 12. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $0 < r < 30$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $m = 20$, b) $m = 30$, c) $m = 40$, d) $m = 50$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları..... 53

Şekil 13. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $m = 40$, $0 < r < 20$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $n = 10$, b) $n = 20$, c) $n = 30$, d) $n = 40$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları..... 54

Şekil 14. $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile $h = 0.05$, $m = 40$, $n = 10$, $\alpha = 0.8$, $M = 0.88715$, $0 < r < 14$ parametre değerleri ve a) $K = 100$, b) $K = 1000$, c) $K = 10000$ ve d) $K = 100000$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramı. 55

Şekil 15. $K = 100$, $h = 0.05$, $m = 40$, $n = 10$ ve $0 < r < 25$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $\alpha = 0.6$ ve $M = 0.8029$, b) $\alpha = 0.7$ ve $M = 0.83927$, c) $\alpha = 0.8$ ve $M = 0.88715$, d) $\alpha = 0.9$ ve $M = 0.9422$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları..... 57

Şekil 16. $K = 100$, $h = 0.05$, $m = 40$, $n = 10$ ve $r = 8$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $\alpha = 0.9$ ve $M = 0.9422$, b) $\alpha = 0.8$ ve $M = 0.88715$, b) $\alpha = 0.7$ ve $M = 0.83927$, d) $\alpha = 0.6$ ve $M = 0.8029$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında zaman serisi $(X(n) - n)$ diyagramları. 58

Şekil 17. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ ve $0 < r < 15$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü çift Allee etkili sistemin E_2 denge noktası civarında çatallanma genliği – r grafiği 59

Şekil 18. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ ve $0 < r < 15$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü çift Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında Maximum Lyapunov Üsteli grafiği 61

Şekil 19. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$ (çift Allee), $m = 40$ (tek ve çift Allee), $r = 0.03$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için Allee etkisiz (mavi eğri), güçlü tek Allee etkili (kırmızı eğri) ve güçlü çift Allee etkili (yeşil eğri) ayrık zamanlı Caputo Fabrizio lojistik denklem sistemlerinin E_2 denge noktası için kararlılık diyagramı. 63

Şekil 20. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$ (çift Allee), $m = 40$ (tek ve çift Allee), $r = 0.03$ parametre değerleri ve $X(1) = 30$, $Y(1) = 30$ başlangıç koşulları için Allee etkisiz (mavi eğri), güçlü tek Allee etkili (kırmızı eğri) ve güçlü çift Allee etkili (yeşil eğri) ayrık zamanlı Caputo Fabrizio lojistik denklem sistemlerinin E_2 denge noktası için kararlılık diyagramı. 64

Şekil 21. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ ve $0 < r < 15$ parametre değerleri ile $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ altında elde edilen ayrık zamanlı Caputo–Fabrizio lojistik denklem sistemlerine ait E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları gösterilmektedir. Grafiklerde sırasıyla a) Allee etkisiz sistem (mavi eğri), b) güçlü tek Allee etkili sistem (kırmızı eğri), c) güçlü çift Allee etkili sistem (yeşil eğri) ve d) üç sistemin çatallanma davranışlarının karşılaştırmalı gösterimi 65

Şekil 22. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $\rho = 0.9$ ve $r = 7.5$ parametre değerleri ile $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü Allee etkili (3.1) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki kararlılık diyagramı. 73

Şekil 23. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ (güçlü Allee etkisi), $0 < r < 25$, $\rho = 0.9$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü Allee etkili (3.1) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma diyagramı. 74

Şekil 24. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $\rho = 0.9$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $r = 6$, b) $r = 8$, c) $r = 12$, d) $r = 15$ için güçlü çift Allee etkili (mavi eğri), kontrol parametrelili güçlü çift Allee etkili (kırmızı eğri) ayrık zamanlı Caputo Fabrizio lojistik denklem sistemlerinin E_2 denge noktası civarında $X_n - n$ diyagramları. 75

Şekil 25. $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ parametre değerleri ve $0 < r < 25$ için güçlü çift Allee etkili sistem mavi ile; kontrol parametrelili sistem $\rho = 0.91$ için pembe ile, $\rho = 0.94$ için yeşil ile, $\rho = 0.97$ için kırmızı ile gösterilmek üzere, (2.3) ve (3.1) sistemlerinin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları..... 76

Şekil 26. $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ parametre değerleri ve $0 < r < 35$ için güçlü çift Allee

etkili sistem mavi ile; kontrol parametrelili sistem $\rho = 0.7$ için pembe ile, $\rho = 0.8$ için yeşil ile, $\rho = 0.9$ için kırmızı ile gösterilmek üzere, (2.3) ve (3.1) sistemlerinin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları..... 78

Şekil 27. Hibrit kontrol parametresi ρ değerinin çatallanma parametresi r ve birinci karakteristik değer λ_1 üzerindeki etkisini gösteren grafik 80

Şekil 28. $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ve $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ parametre değerleri ile a) $\rho = 0.7$, b) $\rho = 0.8$, c) $\rho = 0.9$, d) $\rho = 1$ için Hibrit kontrol parametrelili güçlü çift Allee etkili (3.1) sisteminin E_2 denge noktası civarında Maximum Lyapunov Üsteli grafiği. 81

Şekil 29. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $r = 9$, $\rho = 0.9$ parametre değerleri ile $X(1) = 60 - Y(1) = 60$ ve $X(1) = 70 - Y(1) = 70$ başlangıç değerleri için başlangıç koşuluna duyarlılık diyagramı..... 83

GİRİŞ

Lojistik model, popülasyon dinamiklerini anlamak için kullanılan temel matematiksel modellerden biridir. Bu model, başlangıçta Verhulst tarafından 1838 yılında önerilen ve popülasyon büyümesinin çevresel kaynakların kısıtlamaları altında nasıl bir dengeye ulaşacağını açıklayan bir diferansiyel denklem olarak şekillenmiştir [1]. Verhulst'un lojistik modelinin matematiksel formülü şu şekildedir:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (1)$$

Burada, $N \equiv N(t)$ ve t zaman parametrelerini göstermek üzere $N(t)$ popülasyon büyüklüğünü, r popülasyonun büyüme oranını ve K popülasyonun taşıma kapasitesini temsil eder. Bu denklem, sınırsız büyümenin gerçekçi olmadığını kabul eder ve popülasyon büyümesinin zamanla sınırlı bir düzeye ulaşacağına işaret eder. Modelin bu yapısı, biyolojik sistemler ve ekosistemler gibi sınırlı kaynaklara sahip ortamlarda oldukça geçerlidir [2].

Lojistik modelin ilk olarak popülasyon büyümesi üzerine yapılan çalışmalarla ilişkilendirildiği söylenebilir. Bu model, biyolojik popülasyonların büyüme oranlarının başlangıçta yüksek olabileceğini, ancak bir noktadan sonra çevresel kısıtlamalar (gıda, yaşam alanı vb.) nedeniyle büyüme hızının yavaşlayarak belirli bir denge noktasına ulaşacağını öngörür [3]. Lojistik büyüme modeli, Verhulst tarafından ortaya konan orijinal haliyle yalnızca insan ve hayvan popülasyonlarının değil, çok çeşitli biyolojik sistemlerin matematiksel modellenmesinde önemli bir rol oynamıştır.

Örneğin, Carlson [4] ile Pearl [5, 6], modelin bakteri büyümesini açıklamadaki etkinliğini göstermiş; Morgan [7], Afrika fillerinin sürü davranışlarını analiz etmekte bu modeli kullanmıştır. Ayrıca Krebs [8], Verhulst'un modeliyle Perulu hamsi popülasyonunun büyümesini başarılı şekilde ifade etmiştir.

Lojistik model, özellikle sınırlı kaynaklarla büyüyen ve gelişen popülasyonlar için önemli bir matematiksel araçtır ve biyoloji, ekonomi, mühendislik ve diğer bilim dallarında geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu çeşitlilik, modelin esnekliğini ve birçok disipline uygulanabilirliğini açıkça göstermektedir. Örneğin, Fisher ve Fry [9], teknolojik ürünlerin pazara giriş süreçlerinin modellenmesinde lojistik denklemden yararlanmıştır. Ayrıca bu model, diğer daha karmaşık modellerin temeli olarak kabul edilmektedir ve birçok farklı biyolojik veya fiziksel süreç için genelleştirilmiş versiyonları geliştirilmiştir [10]. Bu modelin daha fazla genişletilmiş versiyonları, genellikle çevresel faktörlerin ve diğer etkileşimlerin daha detaylı bir şekilde ele alındığı sistemleri modellemek için kullanılır [2].

Popülasyon büyümesini etkileyen önemli olgulardan biri de Allee etkisidir. İlk kez Warder Clyde Allee (1931) tarafından tanımlanan bu kavram, bir türün düşük popülasyonlarda, popülasyonun büyüme hızının azalması ya da negatif büyüme göstermesi şeklinde ortaya çıkar [11].

Düşük yoğunluktaki popülasyonlarda, bireylerin yaşam şansı ve doğurganlık oranı azalır. Ancak popülasyon yoğunluğu belirli bir eşik değerin üzerine çıktığında, bireylerin yaşam şansı ve doğurganlık oranı artarak popülasyonun büyümesini destekler. Böylece Allee etkisi, popülasyon yoğunluğuna bağlı olarak büyüme dinamiklerinde çift yönlü bir etkiye neden olur. Ekolojik açıdan bu durum, bireylerin eş bulamaması, yırtıcılardan korunamaması veya grupsal davranışların zayıflaması gibi mekanizmalarla açıklanabilir [12]. Matematiksel modellerde ise Allee etkisi, klasik lojistik modele doğrusal olmayan terimlerin eklenmesiyle ifade edilir [13].

Allee etkisi genellikle iki ana kategoride sınıflandırılır: Güçlü ve zayıf Allee etkisi. Güçlü Allee etkisinde, popülasyon belirli bir eşik değerin (kritik popülasyon seviyesinin) altına düştüğünde büyüme oranı negatiftir ve bu da türün yok olma riskini artırır. Zayıf Allee etkisinde ise büyüme hızı düşük olmasına rağmen popülasyon sürdürülebilirliğini koruyabilir [14]. Allee etkisini tanımlamak üzere birçok matematiksel yapı önerilmiş olsa da tek popülasyonlu sistemler için en yaygın kullanılan form aşağıdaki gibidir [15-17]:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) (N - m). \quad (2)$$

Burada, m Allee eşik değerini temsil eder. Bu yapı, $0 < m < K$ durumunda güçlü Allee etkisini, $-K < m \leq 0$ durumunda ise zayıf Allee etkisini göstermektedir [16, 17]. Ayrıca güçlü Allee etkisinin sistem dinamikleri üzerindeki etkileri birçok çalışmada detaylı olarak incelenmiştir. Örneğin, Yousef ve Bozkurt Yousef [18] çalışmasında, Allee etkisi içeren bitki–otçul etkileşimli bir kesirli mertebeden model önermiş ve sistemdeki flip çatallanması göstererek kararlılık analizi yapmış; Ma [19] ise bu etkinin uzay-zamansal dinamiklerin oluşumunda belirleyici rol oynayabileceğini göstermiştir.

Son yıllarda yapılan ekolojik araştırmalar, bazı popülasyonların birden fazla Allee etkisine maruz kalabileceğini göstermiştir. Bu durum çift (veya çoklu) Allee etkisi olarak adlandırılır ve bir popülasyonun hem düşük hem de yüksek yoğunluk seviyelerinde büyümesinin engellenmesiyle sonuçlanır [20-24]. Düşük yoğunluklu Allee etkisi, bireylerin eş bulma veya iş birliği yapma gibi temel biyolojik işlevleri yerine getirememeleri nedeniyle ortaya çıkar. Yüksek yoğunluklu Allee etkisi ise bireyler arasındaki kaynak rekabetinin artmasına ve hastalıkların yayılması nedeniyle büyümenin baskılanmasına yol açar [21, 23].

Çift Allee etkili lojistik denklem, aşağıdaki matematiksel modelle ifade edilir [22]:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \left(1 - \frac{m+n}{N+n} \right). \quad (3)$$

Burada n , doğurgan olmayan bireyleri, m ise Allee eşik değerini ifade etmektedir. Çift Allee etkisi, tür içi etkileşimlerin karmaşıklığı nedeniyle biyolojik koruma stratejileri açısından büyük önem taşımaktadır [24-26]. Çift Allee etkisi, tam sayılı türevli sistemlerde çeşitli dinamik davranışlara yol açtığı için birçok çalışmada ele alınmıştır. Wang vd. [27], çift Allee etkili bir yırtıcı–av modelinde Turing desenlerinin oluşumunu göstermiştir. Mandal vd. [28], bu etkinin çoklu denge durumlarına ve karmaşık çatallanmalara neden olduğunu ortaya koymuştur. Li vd. [15], çevresel değişkenliğe duyarlı bir modelde çift Allee etkisinin Hopf çatallanması üzerindeki belirleyici rolünü vurgulamıştır. Shang ve Qiao [29], bu etki altında çoklu limit döngülerin ve yüksek mertebeden çatallanma yapıların oluşabildiğini göstermiştir.

Çift Allee etkili bir av–avcı modeli aşağıdaki şekilde tanımlanır [22, 30]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{r}{x+n} \left(1 - \frac{x}{K} \right) (x-m) - qy \right) x, \\ \frac{dy}{dt} = (px - c)y. \end{cases} \quad (4)$$

Burada, $x(t)$ av popülasyonunu, $y(t)$ avcı popülasyonunu temsil etmektedir. Ayrıca, n çift Allee etkisini temsil eden parametreyi, q avlanma oranını, p avın avcıya dönüşüm oranını ve c de avcının doğal ölüm oranını ifade etmektedir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerde, hafıza etkisiyle birlikte çift Allee etkisinin dinamik yapıyı daha da karmaşıklaştırdığı görülmektedir. Xia ve Li [31], ayırtlaştırılmış bir modelde Neimark–Sacker çatallanmasının varlığını göstermiştir. Rahmi vd. [32], Caputo türevli bir modelde güçlü ve zayıf Allee etkilerinin kararlılık üzerindeki etkilerini incelemiş, daha sonraki çalışmalarında [33] bu yapının hastalık dinamikleriyle birleştğinde yok olma riskini artırabileceğini belirtmişlerdir.

Yukarıda bahsedilen çalışmalar, çift Allee etkisinin hem tam hem de kesirli mertebeden modellerde popülasyon dinamiklerine nasıl yön verdiğini ortaya koymakta ve kesirli mertebeden türevlerin bu sistemlerdeki rolünü daha yakından anlamayı gerekli kılmaktadır. Son yıllarda bu tür etkilerin kesirli mertebeden modeller çerçevesinde incelenmesi, sistemlerin hafıza yapısı da dikkate alınarak daha gerçekçi sonuçlara ulaşılmasını sağlamaktadır [34–36]. Klasik kesirli mertebeden türev operatörleri arasında Riemann-Liouville ve Caputo türevleri yaygın olarak kullanılsa da bu operatörlerin tekil çekirdek yapıları nedeniyle çözüm süreçleri karmaşık hale gelebilmektedir [37, 38]. Bu yönüyle, Caputo-Fabrizio gibi tekil olmayan hafıza çekirdeği içeren kesirli türevler, biyolojik sistemlerin geçmişe bağımlı dinamiklerini modellemek açısından oldukça uygundur [39, 40]. Bu bağlamda yapılan çalışmalar, Allee etkili kesirli mertebeden türevli lojistik modellerin denge noktaları ve kararlılık analizlerinde klasik modellere kıyasla önemli farklılıklar gösterdiğini ortaya koymuştur [41, 42]. Dolayısıyla, Allee etkisi ve çift Allee etkisinin kesirli mertebeden türevli sistemlerde incelenmesi hem modelleme doğruluğunu artırmakta hem de biyolojik sistemlerin karmaşık dinamiklerinin anlaşılmasına önemli katkılar sunmaktadır. Bu bağlamda, Panigoro vd. [43] çalışmalarında, Allee etkisi ve orantılı hasat içeren Caputo

kesirli mertebeden lojistik model ayırıklaştırmış ve elde ettikleri sistemde saddle-node ve flip çatallanması ile kaotik davranışlar analiz etmişlerdir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, hafıza etkisi gibi özellikleri nedeniyle klasik diferansiyel denklemlerden ayrılmakta ve bu durum, çözüm yöntemlerinin geliştirilmesinde birtakım zorluklar doğurmaktadır [44]. Bu tür denklemler için geliştirilen bazı analitik ve yarı-analitik yöntemler arasında homotopi analiz yöntemi [45-47], homotopi pertürbasyon yöntemi [48, 49], varyasyonel iterasyon yöntemi [50] ve Laplace dönüşümüne dayalı teknikler [51, 52] yer almaktadır. Bununla birlikte, karmaşık yapıları nedeniyle birçok kesirli modelin bu yöntemlerle çözümü ya mümkün olmamakta ya da oldukça sınırlı kalmaktadır [53]. Bu nedenle, kesirli diferansiyel denklemler için çeşitli nümerik çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Euler yöntemi [54], sonlu fark yöntemi [55], Runge–Kutta türevleri [56, 57] ve exponential Runge–Kutta yöntemi [58] gibi yöntemler, özellikle doğrusal veya yarı doğrusal sistemlerde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Kesirli diferansiyel denklemler için sayısal çözüm yöntemleri arasında Adams–Bashforth yaklaşımı önemli bir yer tutmaktadır. Bu yöntem, hafıza etkisini ortadan kaldırmayacak şekilde hassas ayırıklaştırmalar sağlar. Özellikle Caputo–Fabrizio tanımına dayalı modellerde, klasik Adams–Bashforth yönteminin doğrudan uygulanabilir olmaması nedeniyle özel bir uyarılma gerekmektedir.

Adams–Bashforth ayırıklaştırma yönteminin Caputo–Fabrizio kesirli türevli lojistik modellerdeki uygulanabilirliği üzerine literatürde çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Noupoue vd. [59], kesirli mertebeden lojistik diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için farklı yöntemleri karşılaştırmalı olarak ele almış ve Caputo–Fabrizio türevi için Adams–Bashforth şemasının uygunluğunu vurgulamıştır. Karakaya ve Kartal [60], Allee etkisi içeren kesirli mertebeden ayırık zamanlı bir Caputo–Fabrizio lojistik model önererek, modelin dinamik özelliklerini Adams–Bashforth yöntemiyle elde edilen nümerik çözümler üzerinden incelemişlerdir. Karakaya vd. [61] ise toplamsal Allee etkisini içeren Caputo–Fabrizio kesirli lojistik modele dayalı olarak, ayırıklaştırılmış sistemin karmaşık dinamik davranışlarını analiz etmişlerdir. Bu çalışmalara ek olarak, Karakaya vd. [62], Caputo–Fabrizio türevli klasik lojistik modelin Adams–Bashforth yöntemi ile ayırıklaştırılmasının ardından sistemin kararlılığı

ve çatallanma özelliklerini incelemişlerdir. Bu literatür, Caputo–Fabrizio türevinin hafıza etkisini dikkate alan yapısının Adams–Bashforth ayrıklaştırmasıyla uyumlu olduğunu ve sistemlerin nümerik analizinde etkin bir yaklaşım sunduğunu ortaya koymaktadır.

Adams-Bashforth yöntemiyle sistemin sayısal olarak modellenmesi, kaotik davranışların zamana bağlı olarak nasıl geliştiğini daha ayrıntılı biçimde inceleme olanağı sunar [53, 63]. Bu sayısal yaklaşım, özellikle kesirli mertebeden türevli sistemlerin geçmişe bağımlı yapısından kaynaklanan karmaşık dinamikleri gözlemlemeyi mümkün kılar. Gerçekleştirilen simülasyon sonuçları, sistemin belirli parametre aralıklarında düzensiz ve öngörülemez davranışlar sergilediğini ortaya koymuştur. Bu bulgular, incelenen sistemin kaotik doğasını açıkça göstermekte ve dolayısıyla bu tür sistemlerde kaotik rejimlerin kontrol altına alınmasına yönelik yöntemlerin geliştirilmesini gerekli kılmaktadır.

Kaos, doğal sistemlerin temel bir özelliği olup başlangıç koşullarına duyarlılık gösteren dinamik sistemlerde karmaşık ve öngörülemez davranışların ortaya çıkmasına neden olur. Bu tür karmaşık dinamikler, özellikle biyolojik sistemlerde ve ekosistem modellerinde ciddi problemlere yol açabilmektedir. Bu bağlamda, kaos kontrolü, belirli bir dinamik sistemde ortaya çıkan kaotik davranışların engellenmesi amacıyla matematiksel yöntemlerin uygulanmasını ifade eder. Kaos kontrol teknikleri, istikrarsız bir sistemi stabilize ederek onun daha öngörülebilir bir davranış sergilemesini sağlamayı amaçlamaktadır [53, 63].

Kaotik sistemlerin denetiminde çeşitli kontrol yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlardan biri olan geri besleme kontrolü (feedback control), sistemin mevcut durumuna bağlı olarak uygulanan kontrol girdileriyle dinamiğin yönlendirilmesini sağlar. Doğrusal geri besleme kontrolü pratik olsa da doğrusal olmayan sistemlerde etkisi sınırlı olabilir; doğrusal olmayan geri besleme ise daha güçlü ancak daha karmaşık bir yaklaşım sunar [64]. OGY yöntemi [65, 66] (Ott-Grebogi-Yorke), sistem yörüngesi kararsız bir periyodik noktaya yaklaştığında, küçük parametre değişiklikleriyle bu yörüngeyi kararlı hale getirmeyi amaçlar. Bu yöntem, sistemin doğal yapısını bozmadan düşük müdahalelerle kontrol sağlar; ancak uygulamada hassasiyet gerektirir. Hibrit kontrol yöntemi ise, birden fazla stratejinin eş zamanlı veya ardışık uygulanmasına dayanır ve

özellikle tekil yöntemlerle başarı sağlanamayan durumlarda etkili sonuçlar verir. Geri besleme kontrolü ile parametre modifikasyonunu birleştiren bu yapı, esneklik, uyarlanabilirlik ve kararlılık açısından önemli avantajlar sunar [67, 68]. Sistem durumuna göre farklı kontrol yasaları arasında geçiş yapılmasına olanak tanıyarak çeşitli dinamik rejimlerde optimal tepkiler elde edilmesini sağlar [69]. Bu bütünleşik yaklaşım sayesinde, sistem parametreleri ile geri besleme sinyalleri arasındaki etkileşim uyumlu hale getirilerek kaotik davranışlar başarılı bir şekilde bastırılabilir.

Bu tez çalışmasında, Caputo–Fabrizio anlamında kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle tanımlanan çift Allee etkili bir lojistik sistem ele alınmış; bu sistemin kararlılık yapısı ve çatallanma davranışları ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Literatürde yer alan tek Allee etkili modellere kıyasla, popülasyon yoğunluğunun hem düşük hem de yüksek seviyelerinde gözlemlenen çift yönlü Allee etkisinin dinamik yapıya katkısı matematiksel olarak analiz edilmiştir.

Bu kapsamda, Karakaya vd. [62] tarafından Caputo–Fabrizio türevli tek Allee etkili sistemler için elde edilen gözlemler temel alınmış; bu gözlemler çift Allee etkisinin eklenmesiyle nasıl değiştiği açısından karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca, Ali vd. [70] çalışmasında Wen, Yao ve Chen [71–73] tarafından geliştirilen n -boyutlu flip ve Neimark–Sacker çatallanma kriterleri daha yüksek boyutlu sistemlere uygulanmıştır. Bu tezde ise söz konusu kriterler iki boyutlu Caputo–Fabrizio kesirli türevli çift Allee etkili sistem için uyarlanmış ve çatallanma koşulları teoremlleştirilerek ayrıntılı şekilde analiz edilmiştir.

Bunun yanı sıra, Ali vd. [70] tarafından kullanılan hibrit kontrol yöntemi, bu çalışmada ele alınan iki boyutlu sisteme uyarlanmış ve yöntemin dinamik yapı üzerindeki etkileri değerlendirilmiştir. Sayısal analizler sonucunda, hibrit kontrol stratejisinin çatallanma noktalarını ötelediği, sistemin kaotik davranışlarını bastırdığı ve kararlılık bölgesini genişlettiği gösterilmiştir. Böylece, çift Allee etkili lojistik model ve hibrit kontrol yönteminin birlikte ele alınması ile bunların yanında yüksek boyutlu çatallanma analizlerinin düşük boyutlu kesirli sistemlere uygulanması açısından çalışmanın literatüre özgün bir katkı sunduğu ortaya konulmuştur.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle ve fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler sunulacaktır. Öncelikle, Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türev operatörünün yapısı detaylı biçimde incelenecektir. Daha sonra, sistemin nümerik çözümünde kullanılan Adams–Bashforth ayırıklaştırma yönteminin Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türevli modellere uygulanışı gösterilecektir. Devamında, fark denklem sistemlerinde kararlılık, çatallanma türleri ve çatallanma koşullarına ilişkin teorik temeller sunulacaktır. Son olarak, tez kapsamında önerilen hibrit kaos kontrol yaklaşımının kuramsal çerçevesi ortaya konacak ve bu yöntemin sistem dinamikleri üzerindeki etkilerini analiz edebilmek için gerekli matematiksel zemin oluşturulacaktır.

1.1. Caputo–Fabrizio Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Tanım 1.1.

Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türevi; $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [a, b]$ olmak üzere, f fonksiyonunun α -ıncı mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi şu şekildedir:

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right) d\tau.$$

Buradaki $M(\alpha)$, $M(0) = M(1) = 1$ şartını sağlayan normalize edici sabittir ve genellikle

$$M(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

şeklinde tanımlanır [36, 44, 84].

Bu tanımda kullanılan çekirdek fonksiyonu üstel biçimde olup klasik kesirli türev tanımlarının aksine tekillik içermez. Bu özellik sayesinde Caputo–Fabrizio türevi, sayısal hesaplamalarda daha kararlı sonuçlar verir ve hafıza etkisi kısa süreli süreçlerde daha gerçekçi şekilde temsil edilir [74]. Özellikle fiziksel ve biyolojik sistemlere yönelik modellerde Caputo–Fabrizio türevi son yıllarda artan biçimde kullanılmaktadır [75].

1.2. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Sistemlerde Adams-Bashforth Ayırıklaştırması

1.2.1. Adams–Bashforth Dönüşümü

Kesirli mertebeden türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü, tam mertebeli diferansiyel denklemlere göre daha karmaşık yapılar içerir. Özellikle, hafıza etkisi içeren kesirli sistemlerde, sayısal çözüm yöntemlerinin hem doğruluk hem de verimlilik açısından dikkatli seçilmesi gerekir. Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türev tanımı, çekirdeğinde tekillik içermeyen üstel sönümlü yapı barındırdığından, bu tür sistemlerde sayısal ayırıklaştırma işlemleri daha istikrarlı şekilde gerçekleştirilebilir.

Bu bölümde, Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türevli sistemlerin ayırıklaştırılmasında kullanılan Adams–Bashforth yöntemi tanıtılmakta ve yöntem, sistemin ayrık zamanlı fark denklemi biçimine dönüştürülmesini sağlamaktadır.

Tanım 1.2. (Caputo–Fabrizio Türevli Sistemlerde Adams–Bashforth Ayırıklaştırması [63])

Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türevli diferansiyel denklem şu şekilde verilsin:

$${}^{CF}D_t^\alpha y(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t y'(t) \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] d\tau = f(t, y(t)), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Burada $M(\alpha)$, normalize edici bir sabittir ve $M(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ eşitliği ile hesaplanır. Temel kalkülüs teoremi kullanılarak yukarıdaki denklem şu şekilde yeniden düzenlenir:

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Bu ifade, ayrık zaman noktaları t_n ve t_{n+1} için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$y(t_{n+1}) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_n, y(t_n)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt,$$

$$y(t_n) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^{t_n} f(t, y(t)) dt.$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (1.1)$$

elde edilir. Buradaki integral terimi şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{f(t_n, y_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} dt \\ &= \frac{3h}{2} f(t_n, y_n) - \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Buradan, bu terim (1.1)'de yerine yazıldığında:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})] + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} f(t_n, y_n) - \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

bulunur. Sonuç olarak, bu ifade düzenlendiğinde:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} \right) f(t_n, y_n) - \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} \right) f(t_{n-1}, y_{n-1}) \quad (1.2)$$

denklemini elde edilir.

Böylece, Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türevli sistem, iki adımlı Adams–Bashforth yöntemiyle ayrıklaştırılmış olur. Bu yöntem, sistemin kesirli doğasını dikkate alarak zaman adımı üzerinden hesaplamaya olanak sağlar ve dinamik davranışların yapısal özelliklerini büyük oranda korur.

Not: Bu çalışmada kullanılan Adams–Bashforth ayırıklaştırma formülü, Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türevli sistemler için Atangana ve Owolabi (2017) tarafından önerilen yöntemi temel almaktadır. Ancak bu yöntemin düzenlenmesi ile elde edilen denklem şu şekildedir:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} \right) f(t_n, y_n) + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} \right) f(t_{n-1}, y_{n-1}).$$

Bu düzenlemede, ” $f(t_{n-1}, y_{n-1})$ ” teriminin işareti negatif olacak şekilde yapılan modifikasyonla elde edilen (1.2) denklemi, ayırıklaştırma süreciyle daha uyumlu hale getirilmiş ve modelin davranışsal tutarlılığı açısından anlamlı bir iyileştirme sağlamıştır. Bu doğrultuda, söz konusu ayırıklaştırma yöntemi, çalışmamızın dinamik yapısına küçük fakat etkili bir düzenlemeyle uyarlanmış; böylece sürekli lojistik modelde gözlemlenen flip çatallanmasının ayırıklaştırılmış sistemde de korunması mümkün kılınmıştır. Yapılan bu değişiklik, yalnızca nümerik çözümün doğruluğunu artırmakla kalmamış, aynı zamanda sistemin özgün çatallanma yapısının bozulmadan analiz edilmesine de olanak tanımıştır.

1.3. Fark Denklem Sistemleri

Tanım 1.3.

Fark denklemleri birden fazla değişken içerdiğinde, bu tür yapılar fark denklem sistemleri olarak adlandırılır. Bu sistemler, genellikle vektör ve matris notasyonu kullanılarak aşağıdaki genel formda ifade edilir [85]:

$$X(n+1) = AX(n) + B(n), \quad (1.3)$$

Burada:

- $X(n) \in \mathbb{R}^k$ sistemin durum vektörünü,
- $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ sabit bir katsayı matrisini,
- $B(n) \in \mathbb{R}^k$ ise zamana bağlı dışsal girdi (etki) vektörünü temsil eder.

Eğer $B(n)=0$ ise sistem homojen, aksi takdirde inhomojen olarak adlandırılır. Ayrıca A sabit bir matris olduğunda sistem zamanla değişmeyen (otonom), aksi halde zamanla değişen (non-otonom) bir yapıdadır.

Tanım 1.4. Denge Noktası (Sabit Nokta)

(1.3) şeklinde verilmiş bir fark denklem sisteminde, $X^* \in \mathbb{R}^k$ için:

$$X^* = AX^* + B \quad (1.4)$$

eşitliğini sağlayan X^* noktasına (1.3) sistemine ait denge noktası denir. Bu ifade, sistemin belirli bir durumda kaldığında, bir sonraki adımda da aynı durumda kalmaya devam ettiğini, dolayısıyla sistemin zamanla değişmeyen bir konuma ulaştığını ifade eder. (1.4) denklemi, uygun koşullar altında şu şekilde çözülerek denge noktası açıkça elde edilebilir:

$$X^* = (I - A)^{-1} B, \text{ eğer } (I - A) \text{ matrisi tersinir ise.} \quad (1.5)$$

Burada I , A ile aynı boyutta birim matristir. Denge noktası, sistemin uzun vadeli davranışını analiz etmek ve kararlılık koşullarını değerlendirmek açısından temel bir kavramdır [85].

Tanım 1.5. (Spektral Yarıçap)

Spektral yarıçap, bir matrisin tüm özdeğerlerinin mutlak değerlerinin en büyüğü olarak tanımlanır. Matematiksel olarak, bir A matrisinin spektral yarıçapı şu şekilde ifade edilir:

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda, A \text{ matrisinin bir özdeğeridir} \}.$$

Bu tanıma göre, fark denklem sistemlerinde kararlılık analizi, sabit noktalar etrafında yapılan lineerleştirme sonucu elde edilen matrisin spektral yarıçapı kullanılarak gerçekleştirilir [77,85].

1.3.1. Fark Denklem Sistemlerinde Kararlılık

Fark denklem sistemlerinde kararlılık analizi, genellikle sabit noktalar civarında lineerleştirme yolu ile yapılır. Lineer sistemin genel formu şu şekilde gösterilir:

$$X(n+1) = AX(n).$$

Denge noktası $X^* = 0$ ise, sistemin kararlılığı matrisin spektral yarıçapı $\rho(A)$ ile belirlenir:

- $\rho(A) < 1$ için, sabit nokta lokal asimptotik kararlıdır.
- $\rho(A) > 1$ için, sabit nokta kararsızdır.
- $\rho(A) = 1$ için ise durum kritik olup, kararlılık için ilave inceleme gerekir.

Lineer olmayan sistemler için Taylor açılımı kullanılarak sistem, sabit nokta etrafında yaklaşık olarak lineerleştirilir:

$$f(X) \approx f(X^*) + Df(X^*)(X - X^*)$$

ve yeni değişken $Y = X - X^*$ ile sistem şu şekilde yeniden tanımlanır:

$$Y(n+1) = AY(n) + O(|Y|),$$

burada $O(|Y|)$ terimi, doğrusal olmayan terimlerin büyüklüğünü temsil eden asimptotik bir ifadedir. Bu terim, $Y \rightarrow 0$ iken doğrusal modele göre daha küçük mertebeden kalanları belirtir. Daha açık bir ifadeyle, bu terim sistemin doğrusal olmayan bileşenlerinden kaynaklanan hatayı temsil eder ve $|Y|$ küçüldükçe bu hata da küçülür. Dolayısıyla, denge noktasına yakın bölgelerde $O(|Y|)$ terimi ihmal edilebilir düzeyde olduğundan, kararlılık analizi genellikle yalnızca doğrusal kısmın $AY(n)$ üzerinden gerçekleştirilir.

Burada $A = Df(X^*)$, sistemin Jacobian matrisidir. Bu matrisin özdeğerleri, sistemin kararlılığı hakkında bilgi verir. Özellikle 2x2 sistemler için karakteristik polinomun ($n=2$ için $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ ve $n=3$ için $P(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$) köklerinin birim çember içinde kalması, Schur-Cohn koşullarıyla sınanabilir [77, 82, 83]:

- $n=2$: $|a_1| < 1 + a_0 < 2$,
- $n=3$: $|a_1 + a_0| < 1 + a_2$, $|a_2 - a_1a_0| < 1 - a_0^2$.

1.3.2. Fark Denklem Sistemlerinde Çatallanma Analizi [71-73]

Bu bölümde, fark denklem sistemlerinde ortaya çıkabilen temel çatallanma türleri ele alınacaktır. Her bir çatallanma tipi, Ali vd. [70] çalışmasında incelenen üç rakip türden oluşan ayrık zamanlı sistem örneği üzerinden somut biçimde açıklanacaktır. Böylece, teorik çatallanma tanımları ile bu tanımların gerçek modeller üzerindeki yansımaları arasında doğrudan bir ilişki kurulması amaçlanmaktadır.

Fark denklem sistemlerinde çatallanma analizinin sağlıklı bir şekilde gerçekleştirilebilmesi için sabit noktalar civarındaki lineerleştirilmiş sistemin karakteristik polinomu ve bu polinomu oluşturan katsayılar üzerinden bazı özel matrislerin tanımlanması gereklidir. Bu bölümde, çatallanma analizinde temel alınan karakteristik polinom yapısı, determinant dizileri ve ilgili matris tanımları sunulacaktır.

Genel olarak, n -boyutlu bir ayrık zamanlı sistem:

$$X_{k+1} = f_r(X_k)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $X_k \in \mathbb{R}^n$ durum vektörünü, $r \in \mathbb{R}$ ise çatallanma parametresini temsil etmektedir. Sistemin sabit noktası X^* , $f_r(X^*) = X^*$ eşitliğini sağlar. Sabit noktanın civarındaki dinamik yapı, X^* noktasında hesaplanan Jacobian matrisi $J(X^*)$ ile incelenir. Bu matrise ait karakteristik polinom şu şekilde yazılır:

$$P_r(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n.$$

Katsayılar, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $c_i = c_i(r, u)$ olmak üzere sistem parametrelerine bağlıdır.

Burada r çatallanma parametresi ve u diğer parametreleri temsil etmektedir.

Çatallanma analizinde kullanılacak iki özel matris şu şekildedir:

- M_1 matrisi:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{i-1} \\ 0 & 1 & c_1 & \cdots & c_{i-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{i-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

- M_2 matrisi:

$$M_1 = \begin{bmatrix} c_{n-i+1} & c_{n-i+2} & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_{n-i+2} & c_{n-i+3} & \cdots & c_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & 0 & 0 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu matrisler yardımıyla tanımlanan determinant dizileri, çatallanma analizinin temelini oluşturur:

$$\Delta_i^\pm(r, u) = \det(M_1 \pm M_2), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Bu yapılar, sabit noktaların kararlılığı, flip çatallanması ve Neimark–Sacker çatallanmasının belirlenmesinde temel rol oynamaktadır. İlerleyen bölümlerde bu iki çatallanma türüne ilişkin koşullar da bu yapıların temelinde formüle edilecektir. Ayrıca inceleyeceğimiz çatallanma türlerini örneklendirmek üzere aşağıdaki üç boyutlu fark denklem sisteminden yararlanılacaktır:

Tanım 1.6. Üç Rekabetçi Türden Oluşan Ricker Tip Ayrık Zamanlı Model

Ali vd. [70] tarafından incelenen üç rekabetçi türden oluşan model aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n e^{r(1-x_n-ay_n-bz_n)}, \\ y_{n+1} &= y_n e^{r(1-y_n-az_n-bx_n)}, \\ z_{n+1} &= z_n e^{r(1-z_n-ax_n-by_n)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Burada:

- x_n, y_n, z_n popülasyon yoğunluklarını,
- r çatallanma parametresini,
- a ve b ise türler arasındaki pozitif rekabet katsayılarını temsil etmektedir.

Bu sistem, hem sabit noktadaki kararlılık yapısının değişimi hem de farklı çatallanma türlerinin incelenmesi açısından zengin bir dinamik yapı sunmaktadır.

1.3.2.1. Fold (Saddle-Node) Çatallanması

f fonksiyonu yeterli türevlenebilirliğe sahip olmak üzere, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde tanımlı olsun ve sistem aşağıdaki gibi verilsin:

$$x_{n+1} = f(x_n, r).$$

Burada $r \in \mathbb{R}$ çatallanma parametresidir.

Sistemin bir denge noktası x^* , uygun değişken dönüşümleri ile orijine taşınabilir. Eğer bu denge noktasında sistemin Jacobian matrisinin bir özdeğeri $\lambda = 1$ ise ve aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa çatallanma türü belirlenebilir [78]:

- $\frac{\partial F}{\partial r}(0,0) \neq 0, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(0,0) \neq 0$: Saddle-node çatallanması,
- $\frac{\partial F}{\partial r}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(0,0) = 0$: Pitchfork çatallanması [76, 80],
- $\frac{\partial F}{\partial r}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(0,0) \neq 0$: Transkritik çatallanması [81].

Bu ayrım, sistemin çatallanma türünü belirlemek için kritik öneme sahiptir. Fold çatallanmasında, iki sabit nokta birleşerek yok olur veya ortaya çıkar; bu durum sistemin topolojisinde ani bir değişime neden olur [79].

Uygulama: (1.6) Ayrık Zamanlı Sisteminin Fold Çatallanma Analizi

Ali vd. [70] tarafından çalışılan üç türden oluşan ayrık zamanlı (1.6) sisteminin pozitif denge noktası:

$$E^* = (x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{1+a+b}, \frac{1}{1+a+b}, \frac{1}{1+a+b} \right)$$

şeklindedir. Denge noktası civarındaki lineer dinamikler için sistemin Jacobian matrisi:

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} 1-x^*r & -x^*ra & -x^*rb \\ -y^*rb & 1-y^*r & -y^*ra \\ -z^*ra & -z^*rb & 1-z^*r \end{bmatrix}$$

dir. Bu Jacobian matrisine ait karakteristik polinom aşağıdaki gibidir:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3.$$

Bu karakteristik denklemin katsayıları aşağıdaki gibidir:

- $C_1 = \frac{3r}{1+a+b} - 3,$
- $C_2 = \frac{r^2}{(1+a+b)^2} \left(-3ab - 3 + \frac{6(1+a+b)}{r} - \frac{3(1+a+b)^2}{r^2} \right),$
- $C_3 = \frac{r^3}{(1+a+b)^3} (a^3 + b^3 - 3ab + 1) + \frac{r^2}{(1+a+b)^2} (3ab - 3) + \frac{3r}{1+a+b} - 1.$

Fold çatallanmasının meydana gelebilmesi için gerekli olan temel koşul, Jacobian matrisinin bir özdeğerinin $\lambda = 1$ olmasıdır. Diğer bir ifadeyle, karakteristik polinomun $P(1) = 0$ koşulunu sağlaması gerekir. Bu bağlamda:

$$P(1) = 1 + C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

eşitliğinin herhangi bir pozitif r değeri için sağlanıp sağlanmadığı analiz edilmiştir. Yukarıda verilen C_1 , C_2 ve C_3 katsayıları yerine konulduğunda, $P(1) = 0$ eşitliği, hiçbir $r > 0$ değeri için sağlanmamaktadır. Bundan dolayı, (1.6) sisteminde Fold çatallanması meydana gelmez.

1.3.2.2. Flip (Period-Doubling) Çatallanması [80, 81]

Flip çatallanması, sabit bir noktanın kararlılığını kaybederek çözümün iki periyoda geçtiği (period-doubling) yeni bir yörüngeye çatallanması durumudur. Bu çatallanma, sistemin Jacobian matrisine ait bir özdeğerin $\lambda = -1$ olması ve belirli ek koşulların sağlanması ile ortaya çıkar.

İki boyutlu bir ayrık zamanlı sistem şu şekilde tanımlansın:

$$x_{n+1} = f(x_n, r).$$

Burada $x_n \in \mathbb{R}^2$ sistemin durum vektörünü, $r \in \mathbb{R}$ ise çatallanma parametresini temsil etmektedir. Sistemin denge noktası x^* ve bu noktadaki Jacobian matrisi $J(x^*)$ ile gösterilsin.

Flip çatallanmasının meydana gelmesi için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir:

- Denge noktasındaki Jacobian matrisinin bir özdeğeri $\lambda = -1$ olmalıdır,
- Geçişlilik koşulu sağlanmalıdır: $\left. \frac{d\lambda(r)}{dr} \right|_{r=r_0} \neq 0$ olmalıdır,
- $\lambda = -1$ dışındaki özdeğerlerin mutlak değeri birden küçük olmalıdır: $|\lambda_i| < 1$ ($\lambda_i \neq -1$).

Bu durumda sistem, x^* denge noktası etrafında Taylor açılımı ile yaklaşık olarak şöyle ifade edilir:

$$x_{n+1} = -x_n + ax_n^2 + bx_n^3 + \dots$$

Kararlılık analizi aşağıdaki ifade üzerinden yapılır:

$$\alpha = \langle w, D^2 f(x^*, r_0)(v, v) \rangle.$$

Burada v ve w , $\lambda = -1$ özdeğerine karşılık gelen sağ ve sol özvektörlerdir. Eğer $\alpha < 0$ ise ortaya çıkan 2-periyotlu yörünge kararlıdır; $\alpha > 0$ ise kararsızdır.

Genel Flip Çatallanması Koşulları

Wen vd. [71] tarafından sunulan genel n -boyutlu flip çatallanması kriterine göre, sistemin karakteristik polinomu:

$$P_r(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n$$

şeklindedir.

Flip çatallanmasının meydana gelmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

- (H1) Özdeğer Atama Koşulu:

- $P_r(-1) = 0$,

- $P_r(1) > 0$,
- Gerekli öncül determinantların pozitif olması ($\Delta_i^\pm > 0$).

ii. (H2) Geçişlilik Koşulu:

i. Aşağıdaki türev ifadesi sıfırdan farklıdır:

$$\left. \frac{d}{dr} P_r(-1) \right|_{r=r_0} \neq 0.$$

Teorem 1.1. (n=2 Durumu İçin Flip Çatallanması Koşulları [71])

İki boyutlu ayrık zamanlı dinamik sistemde sabit noktanın karakteristik polinomu:

$$P_r(\lambda) = \lambda^2 + c_1(r)\lambda + c_2(r)$$

şeklinde verilsin.

Sistemin sabit nokta civarında, $r = r_0$ kritik parametre değerinde period-doubling (flip) çatallanması geçirmesi için gerek ve yeter şartlar şunlardır:

i. Özdeğer Atama Koşulu:

$$P_{r_0}(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 - c_1(r_0) + c_2(r_0) = 0,$$

ii. Kararlılık Koşulu:

$$P_{r_0}(1) > 0 \Leftrightarrow 1 + c_1(r_0) + c_2(r_0) > 0,$$

iii. Determinant Pozitiflik Koşulları:

$$1 + c_2(r_0) > 0 \text{ ve } 1 - c_2(r_0) > 0,$$

(bu şartlar Δ_1^+ ve Δ_1^- determinantlarının pozitifliğini garanti eder),

iv. Geçişlilik Koşulu:

$$\left. \frac{d\lambda(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{-c_1'(r) + c_2'(r)}{-2 + c_1(r)} \right|_{r=r_0} \neq 0.$$

İspat:

Sabit noktanın karakteristik polinomu:

$$P_r(\lambda) = \lambda^2 + c_1(r)\lambda + c_2(r)$$

olarak verilsin.

Flip (Period-doubling) çatallanmasının meydana gelmesi için aşağıdaki koşullar gereklidir:

i. $\lambda = -1$ Özdeğer Şartı:

Özdeğer $\lambda = -1$ çatallanma anında sabit noktada kök olmalıdır. Bunun için:

$$P_r(-1) = 0$$

şartı gereklidir. Açarsak:

$$P_r(-1) = 1 - c_1(r) + c_2(r) = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlik ile $r = r_0$ çatallanma noktası belirlenir.

ii. $\lambda = 1$ Değerinde Kararlılık Şartı:

Sistemin sabit noktası $\lambda = 1$ noktasında kararlılığı korumalıdır. Buradan:

$$P_r(1) = 1 + c_1(r) + c_2(r)$$

elde edilir. Bu eşitlik ile $r = r_0$ çatallanma noktası bulunmaktadır. Çatallanma anında:

$$P_{r_0}(1) > 0$$

olmalıdır.

iii. Determinant Pozitiflik Şartları:

Sabit noktanın kararlılığı için ayrıca ilgili determinantların pozitif olması gerekir. Çatallanma analizinde:

$$\Delta_1^+ = \det(M_1 + M_2) = (1 + c_2(r)),$$

$$\Delta_1^- = \det(M_1 - M_2) = (1 - c_2(r))$$

olarak bulunur (buradaki M_1 ve M_2 matrisleri 1.3.2. başlığı altında verilmiştir).

Dolayısıyla:

$$(1 + c_2(r)) > 0 \text{ ve } (1 - c_2(r)) > 0,$$

şartlarının sağlanması gerekir.

iv. Geçişlilik Koşulu:

$\lambda = -1$ etrafında sistemin parametre değişimiyle düzgün bir çatallanma oluşturabilmesi için özdeğerin r değişimiyle birim çemberi kesme hızının sıfırdan farklı olması gerekir. Bunun için $P_r(\lambda(r)) = 0$ bileşik fonksiyonu üzerinde zincir kuralı uygulanır:

$$\frac{d}{dr} P_r(\lambda(r)) = \frac{\partial P_r}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{\partial P_r}{\partial r} = 0.$$

Buradan:

$$\frac{d\lambda}{dr} = -\frac{\frac{\partial P_r}{\partial r}}{\frac{\partial P_r}{\partial \lambda}}$$

elde edilir. Karakteristik polinomdan:

$$\frac{\partial P_r}{\partial \lambda} = 2\lambda + c_1(r) \text{ ve } \frac{\partial P_r}{\partial r} = c_1'(r)\lambda + c_2'(r)$$

türetilir. Özdeğer $\lambda = -1$ için:

$$\left. \frac{\partial P_r}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=-1} = -2 + c_1(r) \text{ ve } \left. \frac{\partial P_r}{\partial r} \right|_{\lambda=-1} = -c_1'(r) + c_2'(r)$$

elde edilir.

Bu nedenle:

$$\left. \frac{d\lambda}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{c_1'(r_0) - c_2'(r_0)}{-2 + c_1(r_0)},$$

geçişlilik koşulu:

$$\left. \frac{-c_1'(r) + c_2'(r)}{-2 + c_1(r)} \right|_{r=r_0} \neq 0$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç olarak bu dört koşul birlikte sağlandığında, sistem $r = r_0$ kritik parametre değerinde sistemin sabit noktası civarında period-doubling (flip) çatallanması meydana gelir ve sabit noktanın kararlılığı kaybedilerek yeni bir periyodik çözüm doğar.

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 1.2. (n=3 Durumu İçin Flip Çatallanması Koşulları [70])

Üç boyutlu sistem için karakteristik polinom:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3$$

şeklindedir.

Bu durumda flip çatallanmasının gerçekleşebilmesi için aşağıdaki beş koşulun sağlanması gerekir [70]:

- i. $-1 + C_1 - C_2 + C_3 = 0$ (özdeğer $\lambda = -1$ için karakteristik polinom sıfırlanır),
- ii. $1 + C_1 + C_2 + C_3 > 0$ (pozitif kararlılık şartı),
- iii. $1 - C_2 + C_3(C_1 - C_3) > 0$ (determinant pozitifliği şartı),
- iv. $1 + C_2 - C_3(C_1 + C_3) > 0$ (determinant pozitifliği şartı),
- v. Geçişlilik koşulu:

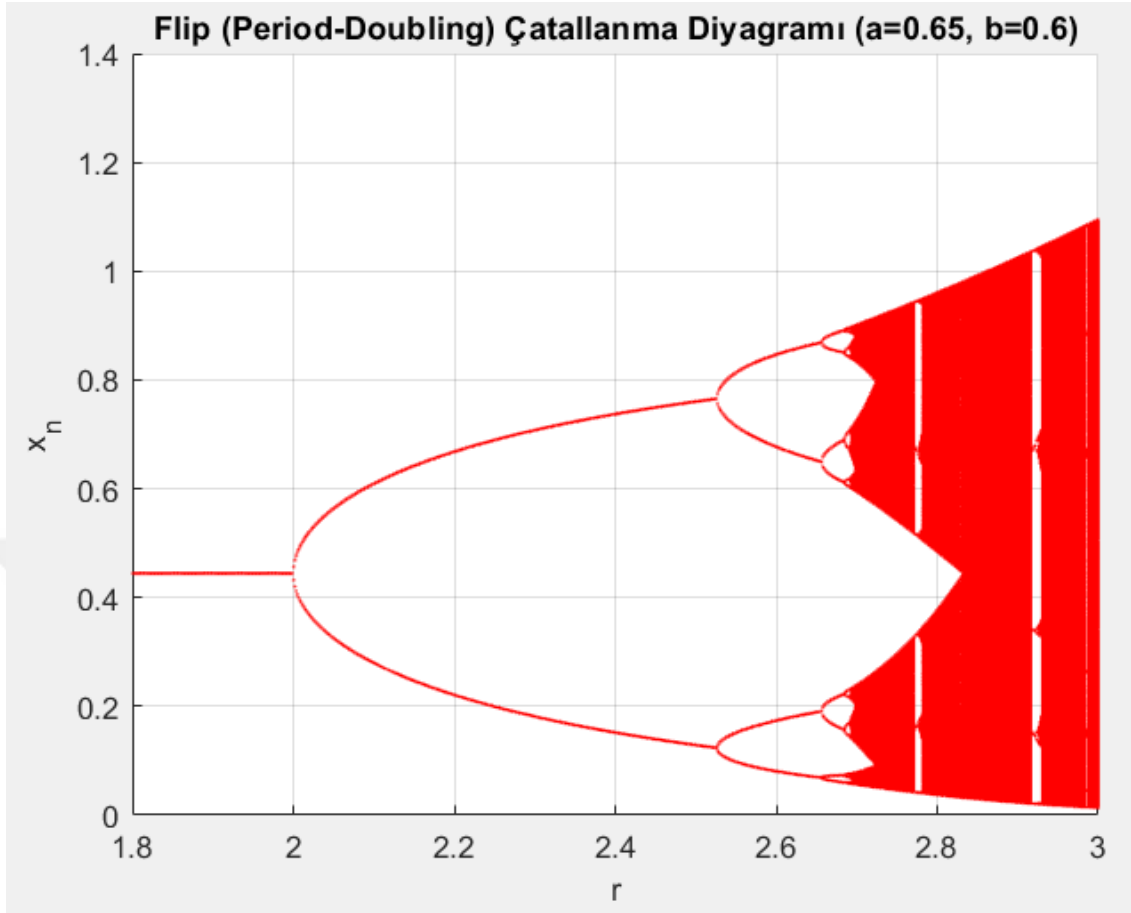
$$\left. \frac{d}{dr} P_r(-1) \right|_{r=r_0} \neq 0.$$

Uygulama: (1.6) Ayrık Zamanlı Sisteminin Flip Çatallanma Analizi

Ali *el al.* [70] tarafından çalışılan (1.6) sistemi üzerinde Wen vd. [71] tarafından geliştirilen kriterler uygulanarak yapılan analizlerde:

- i. $-1 + C_1 - C_2 + C_3 = 0$ özdeğer atama şartı sağlanmış,
- ii. $1 + C_1 + C_2 + C_3 > 0$ kararlılık şartı sağlanmış,
- iii. Determinant pozitiflik şartları sağlanmış,
- iv. Geçişlilik koşulu doğrulanmıştır.

Dolayısıyla, sistem parametresi $r = r_0$ kritik değerine ulaştığında sistemin sabit noktası civarında flip (period-doubling) çatallanması meydana geldiği teorik ve sayısal analizlerle gösterilmiştir.



Şekil 1. $a = 0.65$, $b = 0.6$ ve $1.8 < r < 3$ parametre değerleri ile $(0.3, 0.4, 0.5)$ başlangıç değerinde (1.6) sisteminin period-doubling (flip) çatallanma grafiği [70].

1.3.2.3. Neimark–Sacker (Hopf) Çatallanması [80, 81]

Bu çatallanma tipi, karmaşık eşlenik özdeğerlere sahip sistemlerde ortaya çıkar. Denge noktasındaki Jacobian matrisin özdeğerleri:

$$\lambda_{1,2}(\mu) = r(\mu)e^{\pm i\phi(\mu)}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $r(0) = 1$, $r'(0) \neq 0$ ve belirli rezonans olmama koşulları sağlanıyorsa, sistemde sabit noktadan kapalı yörüngeye çatallanma oluşur.

Çatallanmanın yönü ve kararlılığı şu katsayı ile belirlenir:

$$a(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\vartheta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1-2e^{i\vartheta_0})e^{-2i\vartheta_0}}{2(1-e^{i\vartheta_0})} g_{20} g_{11} \right) - \frac{1}{2} |g_{11}|^2 - \frac{1}{4} |g_{02}|^2.$$

Burada g_{20} , g_{11} , g_{02} ve g_{21} , ikinci mertebeden Taylor açılımı sonrası elde edilen karmaşık katsayılardır ve sistemin doğrusal olmayan dinamiklerini tanımlar. Bu katsayılar, orijinal sistemin Taylor açılımından ve merkez manifold üzerinde yapılan indirgeme işlemlerinden elde edilir. Eğer $a(0) < 0$ ise çatallanma süperkritik, $a(0) > 0$ ise subkritiktir. Bu ifade, Taylor genişlemesi ve özvektör-özdeğer analizine dayalı olarak elde edilir.

Genel Neimark–Sacker Çatallanması Koşulları

Wen [72] ve Yao [73] tarafından sunulan n -boyutlu ayrık zamanlı sistemlerde Neimark–Sacker çatallanmasının meydana gelmesi için sistemin karakteristik polinomu:

$$P_r(\lambda) = \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \lambda + C_n$$

şeklinde olmalıdır.

Neimark–Sacker çatallanmasının gerçekleşebilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

i. (H1) Özdeğer Atama Koşulu:

- $\Delta_{n-1}^-(r_0) = 0$,
- $\Delta_{n-1}^+(r_0) > 0$,
- $P_r(0) > 0$,
- $(-1)P_r(-1) > 0$,
- Ön minör determinantlar $(\Delta_i^\pm)$ pozitif olmalıdır ($i = n-3, n-5, \dots, 1$ veya 2).

ii. (H2) Geçişlilik Koşulu:

$$\left. \frac{d}{dr} \Delta_{n-1}^-(r) \right|_{r=r_0} \neq 0.$$

iii. (H3) Rezonans Koşulu:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \neq \psi, \quad m = 3, 4, 5, \dots$$

Burada:

$$\psi = -1 + 0.5 \times \frac{P_r(1) \times \Delta_{n-3}^-(r_0)}{\Delta_{n-2}^+(r_0)}$$

şeklindedir.

Teorem 1.3. (n=2 Durumu İçin Neimark–Sacker Çatallanması Koşulları [72, 73])

Bir fark denklem sisteminin karakteristik polinomu:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + c_1(r)\lambda + c_2(r)$$

şeklinde verilsin.

r çatallanma parametresi olmak üzere, eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa bu fark denklem sisteminde $r = r_0$ kritik parametre değerinde Neimark–Sacker çatallanması meydana gelir:

i. Özdeğer Atama Koşulu:

$$\Delta_1^-(r_0) = 0 \Leftrightarrow 1 - c_2(r_0) = 0$$

ve aynı zamanda:

$$\Delta_1^+(r_0) = 1 + c_2(r_0) > 0$$

olmalıdır.

ii. Kararlılık Koşulları:

$$P_{r_0}(1) > 0 \Leftrightarrow 1 + c_1(r_0) + c_2(r_0) > 0$$

ve

$$(-1)^2 P_{r_0}(-1) > 0 \Leftrightarrow P_{r_0}(-1) > 0$$

olmalıdır. Burada:

$$P_{r_0}(-1) = 1 - c_1(r) + c_2(r)$$

şeklindedir.

iii. Geçişlilik Koşulu:

$$\left. \frac{d}{dr} \Delta_1^-(r) \right|_{r=r_0} \neq 0 \Leftrightarrow \left. \frac{d}{dr} (1 - c_2(r)) \right|_{r=r_0} \neq 0 \Leftrightarrow -c_2'(r) \neq 0.$$

iv. Rezonans Olmama Koşulu:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \neq \psi, \quad m = 3, 4, 5, \dots$$

Burada:

$$\psi = -1 + 0.5 \times \frac{P_{r_0}(1) \Delta_0^-(r_0)}{\Delta_0^+(r_0)},$$

şeklindedir.

İspat:

Tezin önceki bölümlerinde tanımlandığı gibi, bir n -boyutlu ayrık zamanlı sistemin sabit noktasındaki lineerleştirilmiş dinamik yapı, o noktada hesaplanan Jacobian matrisinin karakteristik polinomu ile analiz edilir. Bu polinom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + c_1(r)\lambda + c_2(r)$$

şeklindedir ve $c_1(r)$, $c_2(r)$ katsayıları sistem parametrelerine bağlıdır.

Sistemin sabit noktasının civarındaki kararlılık ve çatallanma analizinde 1.3.2. başlığı altında tanımlanan determinant dizileri kullanılır:

$$\Delta_1^\pm(r) = \det(M_1 \pm M_2),$$

burada M_1 ve M_2 matrisi daha önce tanımlanmış olup, $n = 2$ için

$$M_1 = [1] \text{ ve } M_2 = [c_2(r)]$$

olarak elde edilir. Bu matrisler kullanılarak $n = 2$ için Neimark-Sacker çatallanma şartları şu şekilde elde edilir:

- i. Neimark–Sacker çatallanmasının temel şartı, karakteristik özdeğerlerin birim çember üzerinde karmaşık eşlenik kökler olmasıdır. Bu koşul:

$$\Delta_1^-(r_0) = 0 \Rightarrow \det(M_1 - M_2) = 0 \Rightarrow c_2(r_0) = 1$$

ile sağlanır. Aynı zamanda kararlılığın sağlanması için:

$$\Delta_1^+(r_0) = 1 + c_2(r_0) > 0$$

olmalıdır.

- ii. Karakteristik polinomun $\lambda = \pm 1$ noktalarında pozitif değer olarak sabit noktanın çatallanmasına kadar kararlı kalması gerekir:

$$P_r(1) = 1 + c_1(r) + c_2(r) > 0 \text{ ve } P_r(-1) = 1 - c_1(r) + c_2(r) > 0.$$

- iii. Determinant fonksiyonunun kritik noktada türevinin sıfır olmaması gerekir. Bu şart çatallanmanın gerçekleşmesini garantiler:

$$\frac{d}{dr} \Delta_1^-(r) = \frac{d}{dr} (1 - c_2(r)) = -c_2'(r) \neq 0.$$

- iv. Sistem rezonansa girmemelidir. Bu, ψ 'nin

$$\psi = -1 + 0.5 \times \frac{P_{r_0}(1) \Delta_0^-(r_0)}{\Delta_0^+(r_0)}$$

eşitliği ile hesaplanır ve hiçbir $m = 3, 4, \dots$ için $\cos(2\pi / m) = \psi$ olmamalıdır.

Bütün bu şartlar birlikte sağlandığında, sistem sabit noktasında Neimark–Sacker çatallanması gerçekleşir.

Teorem 1.4. (n=3 Durumu İçin Neimark–Sacker Çatallanması Koşulları [70])

Üç boyutlu sistem için karakteristik polinom:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3$$

şeklindedir.

Üç boyutlu sistemde Neimark–Sacker çatallanmasının meydana gelebilmesi için gerekli şartlar [70]:

i. $1 - C_2 + C_3(C_1 - C_3) = 0,$

ii. $1 + C_2 - C_3(C_1 + C_3) > 0,$

iii. $1 + C_1 + C_2 + C_3 > 0,$

iv. $1 - C_1 + C_2 - C_3 > 0,$

v. Geçişlilik Koşulu:

$$\left. \frac{d}{dr} (1 - C_2 + C_3(C_1 - C_3)) \right|_{r=r_0} \neq 0,$$

vi. Rezonans Koşulu:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \neq \psi, \quad m = 3, 4, 5, \dots$$

Burada:

$$\psi = -1 + 0.5 \times \frac{1 + C_1 + C_2 + C_3}{\Delta_2^+}$$

ile hesaplanır.

Uygulama: (1.6) Ayrık Zamanlı Sisteminin Neimark–Sacker Çatallanma Analizi

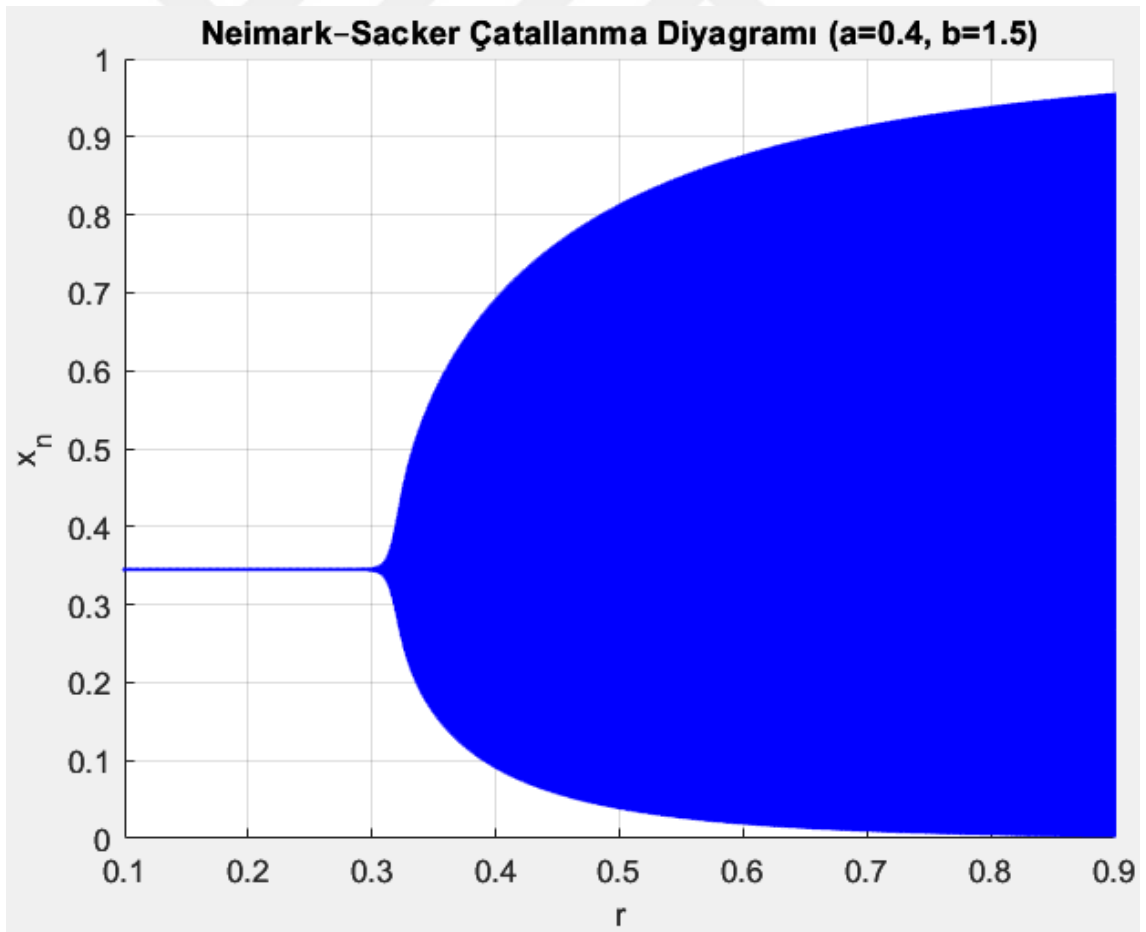
Ali vd. [70], Wen [72] ve Yao [73] tarafından geliştirilen Neimark–Sacker çatallanma kriterlerini kullanarak (1.6) sisteminde çatallanma analizini gerçekleştirmişlerdir.

Bu sistemde yapılan analizlerde:

- $1 - C_2 + C_3(C_1 - C_3) = 0$ özdeğer atama koşulu sağlanmıştır,

- $1 + C_2 - C_3(C_1 + C_3) > 0$,
- $1 + C_1 + C_2 + C_3 > 0$,
- $1 - C_1 + C_2 - C_3 > 0$ pozitiflik ve kararlılık koşulları sağlanmış,
- Geçişlilik koşulu doğrulanmış,
- Rezonans koşulu sağlanmış ve rezonans olmadığı gösterilmiştir.

Böylece, analiz edilen sistemde parametre değişimiyle birlikte Neimark–Sacker çatallanmasının meydana geldiği hem teorik hem de sayısal analizlerle desteklenmiştir.



Şekil 2. $a = 0.4$, $b = 1.5$ ve $0 < r < 0.9$ parametre değerleri ile $(0.3, 0.4, 0.5)$ başlangıç değerinde (1.6) sisteminin Neimark-Sacker çatallanma grafiği [70].

1.4. Hibrit Kontrol Yöntemi

Son yıllarda, ayırık zamanlı sistemlerde çatallanmayı kontrol etmek ve kaotik rejimlerin ortaya çıkışını geciktirmek amacıyla hibrit kontrol stratejileri yaygın biçimde kullanılmaktadır. Hibrit kontrol yöntemleri, orijinal sistem dinamiği ile sistemin mevcut durumunun uygun bir bileşimi alınarak sistemin davranışının stabilize edilmesini amaçlar [25, 64, 67].

Bu yöntem, sistemin doğal dinamik yapısına minimal etki yaparak, kararlı davranışın sürdürülmesi ve kaotik rejimlerin geciktirilmesi amacına hizmet eder.

1.4.1. Hibrit Kontrol Formülasyonu

Genel bir ayırık zamanlı sistem:

$$x(n+1) = f(x(n))$$

şeklinde tanımlansın.

Hibrit kontrol uygulandığında, sistemin güncellenmiş hali aşağıdaki gibi formüle edilir:

$$x(n+1) = \rho.f(x(n)) + (1-\rho).x(n), \quad 0 < \rho < 1.$$

Bu ifade şu şekilde yorumlanır:

- ρ hibrit kontrol parametresi olup, kontrolün ağırlığını belirler,
- $(1-\rho)$ mevcut durumun ağırlığını belirler.

Bu yapı sayesinde:

- $\rho = 1$ olduğunda tamamen orijinal sistem elde edilir,
- $\rho = 0$ olduğunda sistem sabit kalır,
- $0 < \rho < 1$ aralığında ise sistem davranışı hem mevcut duruma hem de doğal evrimine bağlı olarak yönlendirilir [25, 67, 70].

Bu formülasyon, sistemin ani kontrol değişimlerine maruz kalmadan dengeli bir şekilde stabilize edilmesini sağlar.

1.4.2. Hibrit Kontrolün Dinamik Etkileri

Hibrit kontrol mekanizması aşağıdaki avantajları sunar:

- Çatallanma noktalarını ileriye öteleyerek kaotik rejimlerin başlangıcını geciktirir [25, 67],
- Sabit noktaların kararlılık aralığını genişletir,
- Kontrollü sistemin dinamik yapısını, orijinal sisteme göre daha esnek hale getirir [64, 69].

Hibrit kontrol mekanizmasında, ρ parametresinin küçük seçilmesi, sistem güncellemesinde mevcut konumun (x_n) ağırlığının artmasına yol açar. Bu durum, sistemin anlık dinamiğinde daha temkinli bir ilerlemeye neden olur, orijinal sistem davranışından uzaklaşarak mevcut kararlı bölgedeki kalış süresini uzatır ve kaotik rejimlere geçişi geciktirir.

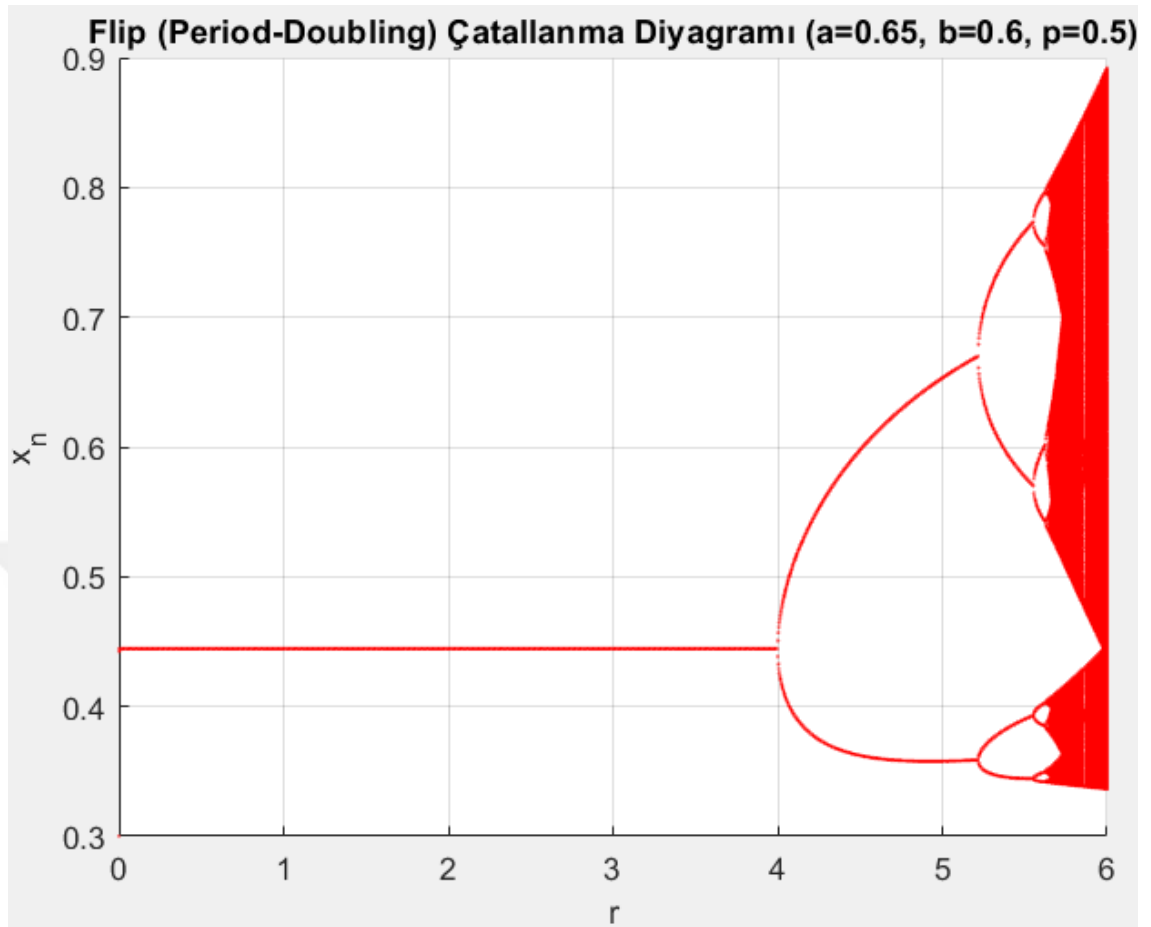
Uygulama: (1.6) Ayırık Zamanlı Sistemi Üzerinde Hibrit Kontrolü

Ali vd. [70] tarafından incelenen üç rakip türden oluşan (1.6) ayırık zamanlı sistemine hibrit kontrol yöntemi uygulanmıştır.

Elde edilen yeni kaos kontrollü sistem şu şekildedir:

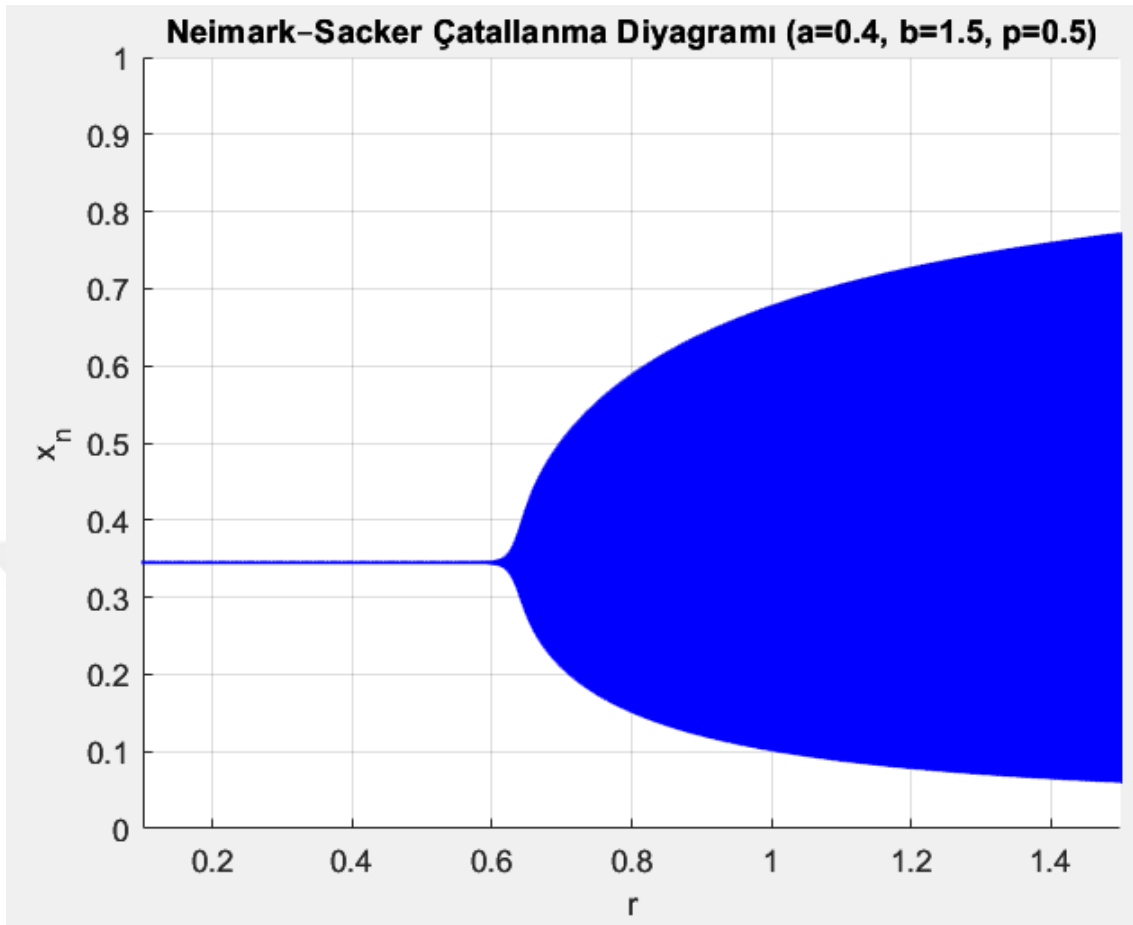
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \rho.(x_n e^{r(1-x_n-ay_n-bz_n)}) + (1-\rho).x_n, \\ y_{n+1} &= \rho.(y_n e^{r(1-y_n-az_n-bx_n)}) + (1-\rho).y_n, \\ z_{n+1} &= \rho.(z_n e^{r(1-z_n-ax_n-by_n)}) + (1-\rho).z_n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Bu sistemin yukarıda verilen Neimark-Sacker ve flip çatallanmaları elde edilen parametre değerlerindeki grafikleri şu şekildedir:



Şekil 3. $a = 0.65$, $b = 0.6$, $\rho = 0.5$ ve $0 < r < 6$ parametre değerleri ile $(0.3, 0.4, 0.5)$ başlangıç değerlerinde (1.7) sistemin flip çatallanma grafiği (parametre değerleri [70]).

Şekil 1 ile Şekil 3 karşılaştırıldığında, açıkça görülmektedir ki (1.6) sistemine uygulanan hibrit kontrol yöntemi, başarılı bir şekilde çatallanma noktalarını öteleyerek kararlılık bölgelerinin genişlemesini sağlamıştır.



Şekil 4. $a=0.4$, $b=1.5$, $\rho=0.5$ ve $0 < r < 1.5$ parametre değerleri ile $(0.3, 0.4, 0.5)$ başlangıç değerlerinde (1.7) sistemin Neimark-Sacker çatallanma grafiği (parametre değerleri [70])

Şekil 2 ile Şekil 4 karşılaştırıldığında, hibrit kontrol yönteminin (1.6) sisteminde çatallanma noktalarını ileriye taşıdığı ve böylece kararlılık bölgelerini genişlettiği açıkça gözlemlenmektedir.

2. BÖLÜM

KESİRSEL MERTEBEDEN ÇİFT ALLEE ETKİLİ LOJİSTİK DENKLEMİN ÇATALLANMA DAVRANIŞI

Bu bölümde, Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türevli çift Allee etkili lojistik modelde ortaya çıkan çatallanma türleri incelenecektir. Bunun için Atangana [63]'den yararlanılarak, kesirli mertebeden sürekli denklem, Adams-Bashforth yöntemi ile fark denklem sistemine dönüştürülecek ve elde edilen sistemin dinamik analizi yapılacaktır.

2.1. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Çift Allee Etkili Lojistik Model

Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türevli çift Allee etkili lojistik model:

$${}_{CF}D_t^\alpha N(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\left(1 - \frac{m+n}{N(t)+n}\right) \quad (2.1)$$

şeklindedir. Burada $K > 0$ taşıma kapasitesini, m Allee eşik değerini ve $n > 0$ doğurgan olmayan bireyleri temsil etmektedir. Güçlü Allee etki için $0 < m < K$, zayıf Allee etki için $-n < m \leq 0$ dır. (2.1) denkleminde Atangana [63] Adams-Bashforth yöntemi (1.1) eşitliğindeki gibi uygulanırsa:

$$\begin{aligned} N_{CF}(t_{n+1}) &= N(t_n) + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)}\right) rN(t_n)\left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right)\left(1 - \frac{m+n}{N(t_n)+n}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)}\right) rN(t_{n-1})\left(1 - \frac{N(t_{n-1})}{K}\right)\left(1 - \frac{m+n}{N(t_{n-1})+n}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

eşitliği bulunur. Burada, $0 < \alpha \leq 1$ kesirli türev mertebesini, $0 < h$ adım sayısını ve $0 < M(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonunu temsil etmektedir. (2.2) denklemine $N(t_n) = x(n)$ ve $N(t_{n-1}) = y(n)$ değişken değiştirmesi uygulandığında:

$$\begin{aligned}
 x(n+1) &= x(n) + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} \right) r x(n) \left(1 - \frac{x(n)}{K} \right) \left(1 - \frac{m+n}{x(n)+n} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} \right) r y(n) \left(1 - \frac{y(n)}{K} \right) \left(1 - \frac{m+n}{y(n)+n} \right), \\
 y(n+1) &= x(n),
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

iki boyutlu fark denklem sistemi elde edilir. (2.1), (2.2) ve (2.3) denklemlerinde verilen parametrelerle ilgili bilgiler Tablo 1’de verilmiştir [12,14].

Tablo 1. (2.3) denklem sisteminde verilen parametreler ile bu parametrelerin anlamı ve tanım aralığı

Parametre	Tanım	Aralık
r	Büyüme oranı	$(0, +\infty)$
K	Taşıma kapasitesi	$(0, +\infty)$
$M(\alpha)$	Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev için normalizasyon fonksiyonu	$(0, +\infty)$
m	Allee eşik değeri	$(0, K)$ (güçlü Allee etki), $(-n, 0]$ (zayıf Allee etki)
n	Doğurgan olmayan bireylerin etkisi	$(0, +\infty)$
h	Adım sayısı	$(0, +\infty)$
α	Türev mertebesi	$(0, 1]$

2.2. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Çift Allee Etkili Lojistik Denklem Sisteminin Denge Noktaları Civarında Kararlılık Analizi

Bu bölümde, (2.3) fark denklem sisteminin denge noktalarının kararlılık analizi yapılacaktır. Bu denklem sisteminin denge noktası $E_0(0,0)$, $E_1(m,m)$ ve $E_2(K,K)$ olmak üzere üç tanedir.

Teorem 2.1.

(2.3) sisteminin, E_0 denge noktası civarında lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart, $0 < m < K$ (güçlü Allee etkisi) ve $r < \frac{Mn}{m(1+(h-1)\alpha)}$ eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

İspat:

(2.3) sisteminin, E_0 denge noktasındaki Jacobian matrisi aşağıdaki gibidir:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)rm}{n} & \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)rm}{n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisin karakteristik denklemi $P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$, bu denklemin katsayıları

$$p_1 = -1 + \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)rm}{n} \text{ ve } p_2 = -\frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)rm}{n} \text{ şeklindedir. Buradan;}$$

$$\text{a) } -n < m \leq 0 \text{ (zayıf Allee etkisi) için } 1 + p_1 + p_2 = \frac{rm\alpha h}{Mn} < 0 \text{ elde edilir. Schur-}$$

Cohn kriteri sağlanmadığından, sistem E_0 noktası civarında kararsızdır.

$$\text{b) } 0 < m < K \text{ (güçlü Allee etkisi) için;}$$

$$\text{i. } 0 < 1 + p_1 + p_2 = \frac{rm\alpha h}{Mn},$$

$$\text{ii. } r < \frac{Mn}{m(1+(h-1)\alpha)} \text{ koşulu altında}$$

$$0 < 1 - p_1 + p_2 = \frac{-2r(1+(h-1)\alpha)m + 2Mn}{Mn},$$

$$\text{iii. } 0 < 1 - p_2 = \frac{(2 + (h-2)\alpha)rm + 2Mn}{2Mn}$$

elde edilir. Bütün Schur-Cohn kriterleri sağlandığından, (2.3) sistemi E_0 denge noktası civarında lokal asimptotik kararlıdır.

Teorem 2.2.

(2.3) fark denklem sisteminin, E_1 denge noktası civarında lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart, $-n < m < 0$ (zayıf Allee etkisi) ve

$$\frac{MK(m+n)}{(1+(h-1)\alpha)(K-m)m} < r < \frac{2MK(m+n)}{(2+(h-2)\alpha)(K-m)m} \text{ eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.}$$

İspat:

(2.3) sisteminin E_1 denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)r\left(1-\frac{m}{K}\right)m}{m+n} & -\frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)r\left(1-\frac{m}{K}\right)m}{m+n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve karakteristik}$$

denklemini $P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$ 'dir. Karakteristik denklemin katsayıları

$$p_1 = -1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)r\left(1-\frac{m}{K}\right)m}{m+n} \text{ ve } p_2 = \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)r\left(1-\frac{m}{K}\right)m}{m+n} \text{ şeklindedir.}$$

Sistem güçlü ve zayıf Allee etkilerine göre incelendiğinde:

$$\text{a) } 0 < m < K \text{ (güçlü Allee etkisi) için } 1 + p_1 + p_2 = -\frac{r(K-m)m\alpha h}{M(m+n)K} < 0 \text{ elde}$$

edilir.

Schur-Cohn kararlılık kriteri sağlanmadığından, sistem E_1 denge noktası civarında kararsızdır.

b) $-n < m < 0$ (zayıf Allee etkisi) için:

$$\text{i. } 0 < 1 + p_1 + p_2 = -\frac{r(K-m)m\alpha h}{M(m+n)K},$$

ii. $\frac{MK(m+n)}{(1+(h-1)\alpha)(K-m)m} < r$ olduğu kabul edilirse

$$0 < 1 - p_1 + p_2 = \frac{-2(1+(h-1)\alpha)rm^2 + 2((1+(h-1)\alpha)r + M)Km + 2MKn}{M(m+n)K},$$

iii. $r < \frac{2MK(m+n)}{(2+(h-2)\alpha)(K-m)m}$ şartı altında

$$0 < 1 - p_2 = \frac{(2+(h-2)\alpha)rm^2 + 2K((-1+(-\frac{h}{2}+1)\alpha)r + M)m + 2MKn}{2M(m+n)K}$$

bulunur. O halde, $-n < m < 0$ için son iki kriter birlikte düşünüldüğünde,

$$\frac{MK(m+n)}{(1+(h-1)\alpha)(K-m)m} < r < \frac{2MK(m+n)}{(2+(h-2)\alpha)(K-m)m} \text{ şartı altında bütün Schur-Cohn}$$

kriterleri sağlanır. O halde, bu şartlar altında (2.3) sistemi E_1 denge noktası civarında lokal asimptotik kararlıdır.

Teorem 2.3.

(2.3) fark denklem sisteminin, E_2 denge noktası civarında lokal asimptotik kararlı

olması için gerek ve yeter şart, $r < \frac{M(K+n)}{(K-m)(1+(h-1)\alpha)}$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat:

(2.3) sisteminin, E_2 denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n} & \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve bu matrisin}$$

karakteristik denklemi $P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$ 'dir. Burada, katsayılar

$$p_1 = -1 + \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n} \text{ ve } p_2 = -\frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n} \text{ 'dır. Hem}$$

$0 < m < K$ (güçlü Allee etkisi) hem de $-n < m \leq 0$ (zayıf Allee etkisi) için:

$$i. \quad 0 < 1 + p_1 + p_2 = \frac{r(K-m)\alpha h}{M(K+n)},$$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } r &< \frac{M(K+n)}{(K-m)(1+(h-1)\alpha)} \text{ koşulu altında} \\
0 < 1 - p_1 + p_2 &= \frac{-2(1+(h-1)\alpha)(K-m)r + 2M(K+n)}{M(K+n)}, \\
\text{iii. } 0 < 1 - p_2 &= \frac{(K-m)(2+(h-2)\alpha)r + 2M(K+n)}{2M(K+n)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bütün Schur-Cohn kararlılık şartları sağlandığından, E_2 denge noktası civarında (2.3) sistemi lokal asimptotik kararlıdır.

2.3. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Çift Allee Etkili Lojistik Denklem Sisteminin E_2 Denge Noktası Civarında Çatallanma Analizi

Bu bölümde, (2.3) numaralı sistemin $E_2(K, K)$ denge noktası civarındaki dinamik davranışı, büyüme oranı r 'nin çatallanma parametresi olarak değerlendirilmesi çerçevesinde incelenmiştir. Yapılan analizler sonucunda, r parametresindeki değişimlerin sistemin nitel çözüm yapısını önemli ölçüde etkilediği görülmüştür. Özellikle, r 'nin belirli bir eşik değerin altındayken sistemin kararlı bir sabit noktada seyrettiği; bu eşik aşıldığında ise periyot-2 yörüngelere çatallandığı, yani flip çatallanmasının meydana geldiği tespit edilmiştir. r parametresinin daha da artmasıyla sistemin kaotik rejime geçtiği sayısal simülasyonlarla ortaya konmuştur. Diğer yandan, pozitif denge noktası olan $E_1(m, m)$ civarındaki değerlendirmelerde, güçlü Allee etkisi altında çatallanma parametresi olan büyüme oranının negatif değer aldığı gözlemlenmiş; bu nedenle söz konusu denge noktası etrafında çatallanma analizi gerçekleştirilmemiştir.

Teorem 2.4.

Kabul edelim ki, $K \neq m$ ve $h \neq \frac{1-\alpha}{\alpha}$ olsun. O halde, $r = \frac{M(K+n)}{(K-m)(\alpha h - \alpha + 1)}$ çatallanma parametresi için (2.3) sisteminde E_2 denge noktası civarında flip çatallanması görülür.

İspat:

(2.3) sisteminin E_2 noktasındaki Jacobian matrisi ve bu matrisin karakteristik denklemi Teorem 2.3'te verilmiştir.

r çatallanma parametresi olmak üzere, Teorem 1.1'in (i) şartı gereği r^* değeri

$$r^* = \frac{M(K+n)}{(K-m)(\alpha h - \alpha + 1)}$$

şeklinde elde edilir. Jacobian matrisi, r 'nin bu değeri için

düzenlendiğinde,

$$J(r^*) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)M}{\alpha h - \alpha + 1} & \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisin karakteristik denklemi $P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$, özdeğerleri $\lambda_1 = -1$

ve $\lambda_2 = \frac{\alpha h - 2\alpha + 2}{2(\alpha h - \alpha + 1)}$ 'dir. $0 < h$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olduğundan, $|\lambda_2| < 1$ eşitsizliğinin

sağlandığı açıktır. Ayrıca $J(r^*)$ 'den $p_1 = -1 + \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n}$ ve

$p_2 = -\frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n}$ bulunur. Tablo 1'den yararlanarak p_1 ve p_2 için:

- i. $0 < 1 + p_1 + p_2 = \frac{h\alpha}{1 + (h-1)\alpha},$
- ii. $0 < 1 + p_2 = \frac{h\alpha}{2 + (2h-2)\alpha},$
- iii. $0 < 1 - p_2 = \frac{4 + (3h-4)\alpha}{2 + (2h-2)\alpha}$

bulunur. Ayrıca, geçişlilik şartı gereği,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n=2} p_i'(-1)^{n-i}}{\sum_{i=1}^{n=2} (n-i+1)(-1)^{n-i} p_{i-1}} = \frac{(-2)(K-m)^2(\alpha h - \alpha + 1)^2}{M^2(K+n)^2} \neq 0$$

olmalıdır. Kabulümüz gereği, $K \neq m$ ve $h \neq \frac{1-\alpha}{\alpha}$ olduğundan, geçişlilik koşulu da sağlanmaktadır.

O halde, $K \neq m$, $h \neq \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ve $r^* = \frac{M(K+n)}{(K-m)(\alpha h - \alpha + 1)}$ ise (2.3) sisteminde E_2 sabit noktası civarında flip çatallanması elde edilir.

Teorem 2.5.

r çatallanma parametresi olmak üzere, (2.3) sisteminde E_2 denge noktası civarında Neimark-Sacker çatallanması meydana gelmez.

İspat:

(2.3) sisteminin E_2 noktasındaki Jacobian matrisi ve bu matrisin karakteristik denklemi Teorem 2.3'te verilmiştir.

r çatallanma parametresi olmak üzere:

- Teorem 1.3.'ün (i) şartı gereği r^* değeri, $r^* = -\frac{2M(K+n)}{(\alpha h - 2\alpha + 2)(K-m)}$ şeklinde bulunur. Jacobian matrisi, r 'nin bu değeri için düzenlendiğinde

$$J(r^*) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n} & \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisin karakteristik denklemi, $P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$ şeklindedir. Bu

karakteristik denklemin katsayıları $p_1 = -1 + \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n}$ ve

$$p_2 = -\frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M}\right)r(K-m)}{K+n} \text{ 'dir.}$$

- Teorem 1.3.'ün (ii) şartı gereği $1 + p_1 + p_2 > 0$ olmalıdır. Yukarıda bulduğumuz

$$p_1 \text{ ve } p_2 \text{ değerini yerine yazdığımızda, } 1 + p_1 + p_2 = -\frac{2\alpha h}{2 + (h-2)\alpha} \text{ bulunur.}$$

$$h > 0 \text{ ve } 0 < \alpha < 1 \text{ için } 1 + p_1 + p_2 = -\frac{2\alpha h}{2 + (h-2)\alpha} < 0 \text{ olduğundan, bu koşul}$$

sağlanmaz.

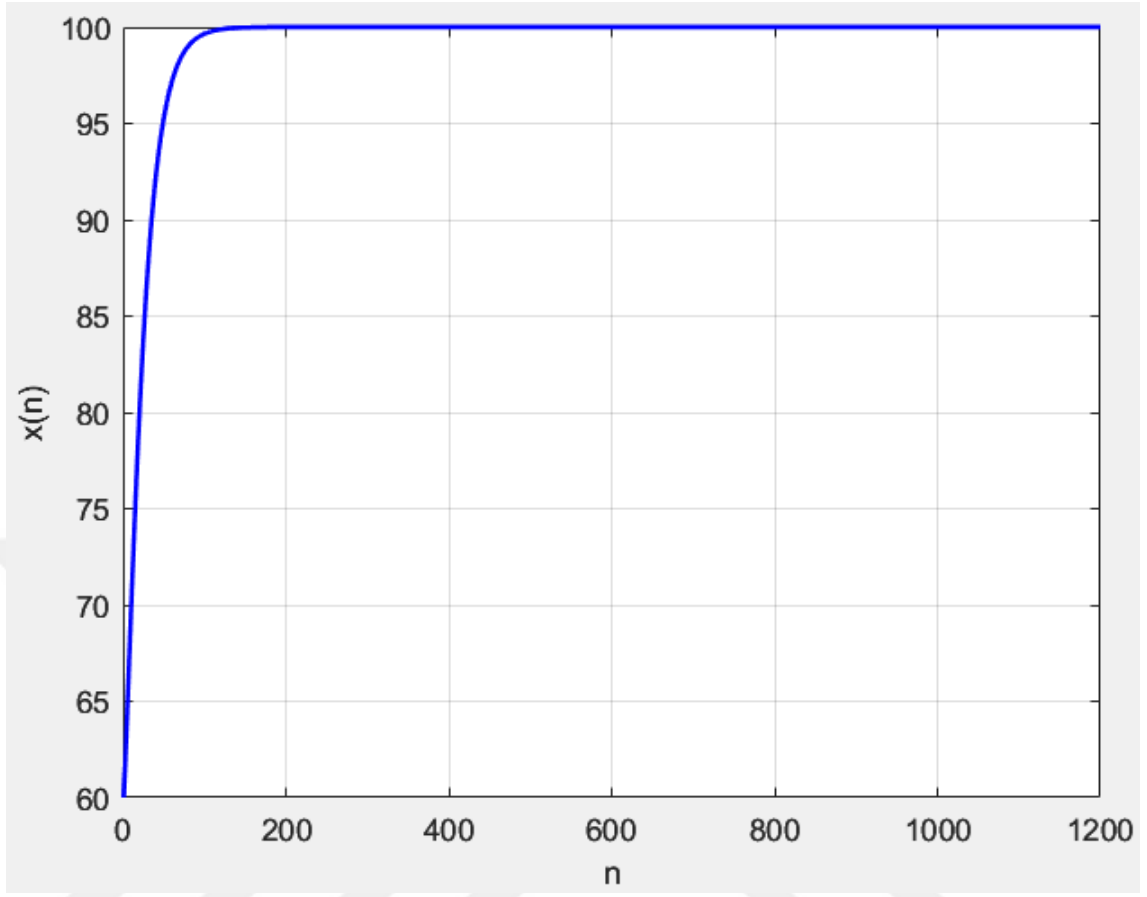
O halde, (2.3) sisteminde $E_2(K, K)$ noktası civarında Neimark-Sacker çatallanması meydana gelmez.

2.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Mertebeden Türevli Çift Allee Etkili Lojistik Denklem Sisteminin E_2 Denge Noktası Civarında Nümerik Analizi

Bu bölümde, Caputo–Fabrizio kesirli türevli çift Allee etkili lojistik denklem sisteminin E_2 denge noktası civarındaki dinamik davranışları, nümerik yöntemlerle ayrıntılı biçimde analiz edilmektedir. Teorik olarak elde edilen kararlılık ve çatallanma koşulları, sistemin zamana bağlı evrimi, çatallanma yapısı ve Lyapunov üssü gibi göstergeler üzerinden sayısal simülasyonlarla test edilmiştir. Modelin temel parametrelerine ait değişimlerin sistem dinamiği üzerindeki etkileri karşılaştırmalı grafiklerle sunulmakta; özellikle Allee etkisinin yapısı (tek / çift; zayıf / güçlü), kesirli türev mertebesi, taşıma kapasitesi, büyüme katsayısı gibi faktörlerin, sistemin kararlılığı ve kaotik rejime geçişi üzerindeki rolleri ortaya konmaktadır. Bu kapsamda elde edilen zaman serisi, faz diyagramı, çatallanma ve Lyapunov üssü grafiklerinin her biri, sistemin doğrusal olmayan dinamik yapısının görsel olarak yorumlanmasına olanak sağlamaktadır.

2.4.1. (2.3) Denklem Sisteminin Dinamik Analizi

Bu kısımda, yalnızca (2.3) sistemine ait nümerik simülasyonlara yer verilecektir.

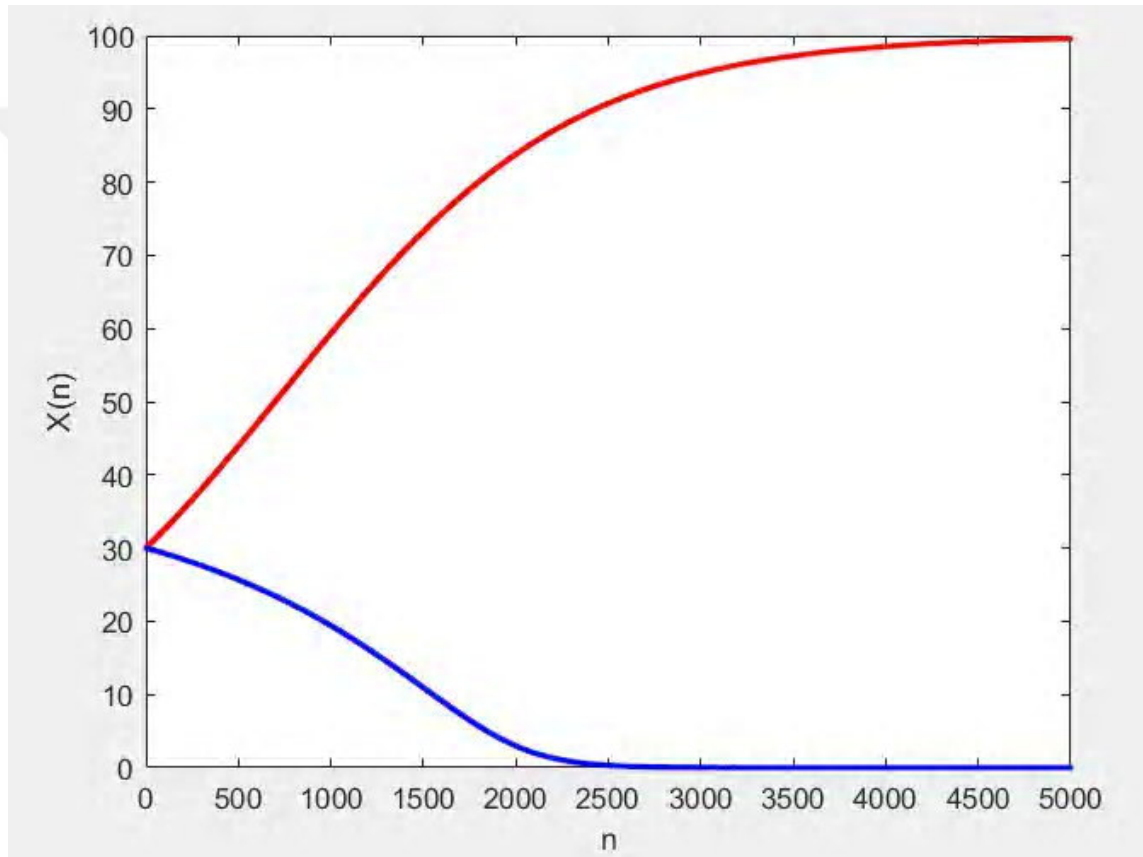


Şekil 5. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $r = 3$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşullarında güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası için $X(n) - n$ kararlılık diyagramı.

Şekil 5'te, güçlü Allee etkisi altında tanımlanan (2.3) sisteminin kararlılık davranışı incelenmiştir. Simülasyon, başlangıç koşulları $X(1) = 60$ ve $Y(1) = 60$ olarak seçilerek gerçekleştirilmiştir. Seçilen büyüme oranı $r = 3$, çatallanma eşiğinin oldukça altında olup, sistemin kararlı bölge içinde kaldığı parametre aralığını temsil etmektedir.

Grafikte gözlemlendiği üzere, (2.3) sistemi, iterasyon ilerledikçe taşıma kapasitesi olan $K = 100$ seviyesine hızlı biçimde yakınsar. Bu durum, sistemin $E_2(K, K)$ denge noktasında asimptotik kararlı olduğunu ve herhangi bir çatallanma ya da kaotik davranış göstermediğini açıkça ortaya koymaktadır.

Ayrıca, kullanılan kesirli türev mertebesi, sistemde belirgin bir hafıza etkisinin bulunduğunu göstermekte olup; bu durum, popülasyonun geçmiş değerlerine duyarlı bir şekilde evrilmesini sağlamaktadır. Elde edilen sonuçlar, modelde yer alan güçlü Allee etkisinin yok oluş riskini artıran yapısına rağmen, sistemin uygun başlangıç koşulları altında dengeye ulaşabildiğini ortaya koymaktadır.

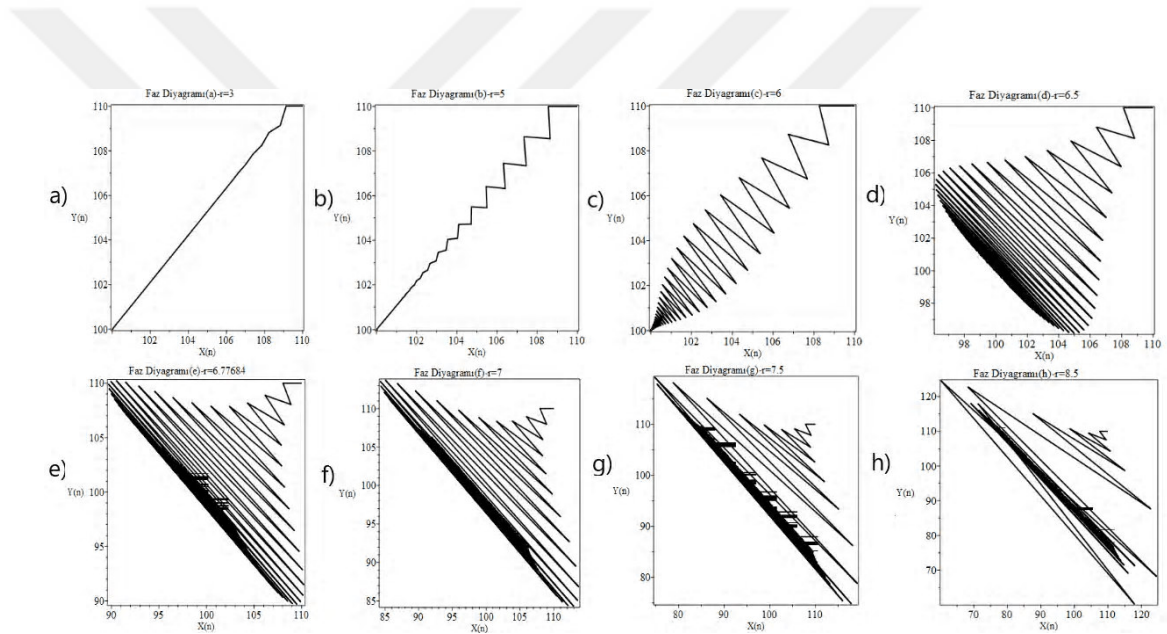


Şekil 6. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $r = 3$ parametre değerleri ve $X(1) = 30$, $Y(1) = 30$ başlangıç koşullarında (2.3) sisteminin mavi eğri ile güçlü Allee etkisi ($m = 40$) ve kırmızı eğri ile zayıf Allee etkisi ($m = -5$) için E_2 denge noktası civarında $X(n) - n$ kararlılık diyagramı.

Şekil 6'da açıkça görüldüğü üzere, güçlü Allee etkisi durumunda (mavi eğri) popülasyon azalarak yok olma seviyesine gerilemekte; sistem, E_2 denge noktasından uzaklaşmaktadır. Buna karşılık, zayıf Allee etkisi uygulandığında (kırmızı eğri), aynı

başlangıç koşulları altında popülasyon zamanla artmakta ve taşıma kapasitesi K civarında kararlı bir dengeye ulaşmaktadır.

Bu durum, Allee etkisinin şiddetinin sistemin uzun vadeli davranışları üzerinde belirleyici bir rol oynadığını ve güçlü Allee etkisinin popülasyon yok oluşunu tetikleyici bir unsur olduğunu açıkça göstermektedir. Özellikle düşük başlangıç popülasyonları altında, sistemin hayatta kalma ya da yok olma eğilimi, Allee parametresi m 'nin büyüklüğüne duyarlı hale gelmekte, bu da kritik eşiğin konumunu doğrudan etkilemektedir.

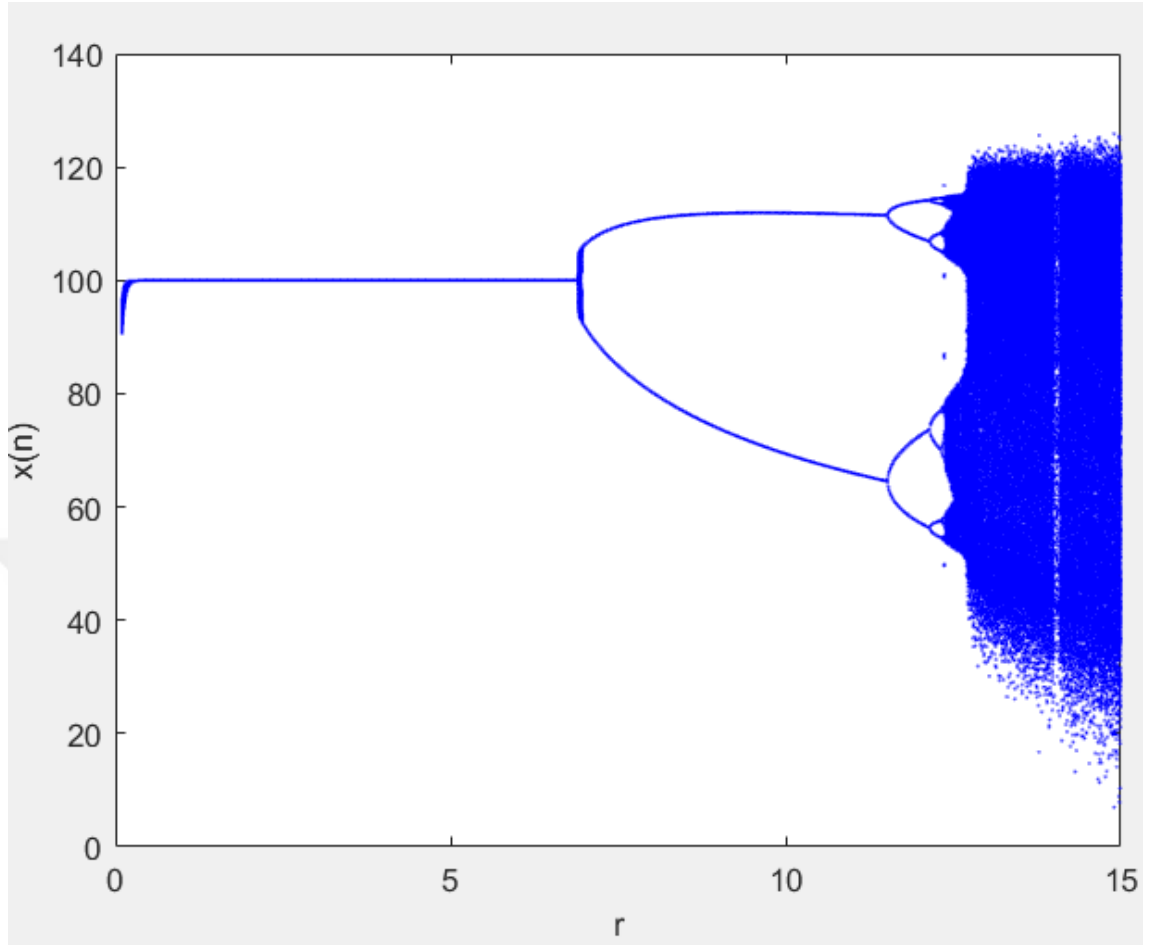


Şekil 7. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ parametre değerleri ve $X(1) = 110$, $Y(1) = 110$ başlangıç koşulları ile a) $r = 3$, b) $r = 5$, c) $r = 6$, d) $r = 6.5$, e) $r = 6.77684$, f) $r = 7$, g) $r = 7.5$, h) $r = 8.5$ için güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki $X(n) - Y(n)$ diyagramı.

Şekil 7'de güçlü Allee etkisi altında tanımlanan (2.3) sisteminin $X(n) - Y(n)$ düzlemindeki faz diyagramları sunulmuştur. Çeşitli r değerleri için sistemin yörünge davranışı incelenmiş, denge noktasına yakınsama, periyodik salınım ve kaotik yapıya geçiş gibi dinamikler gözlemlenmiştir:

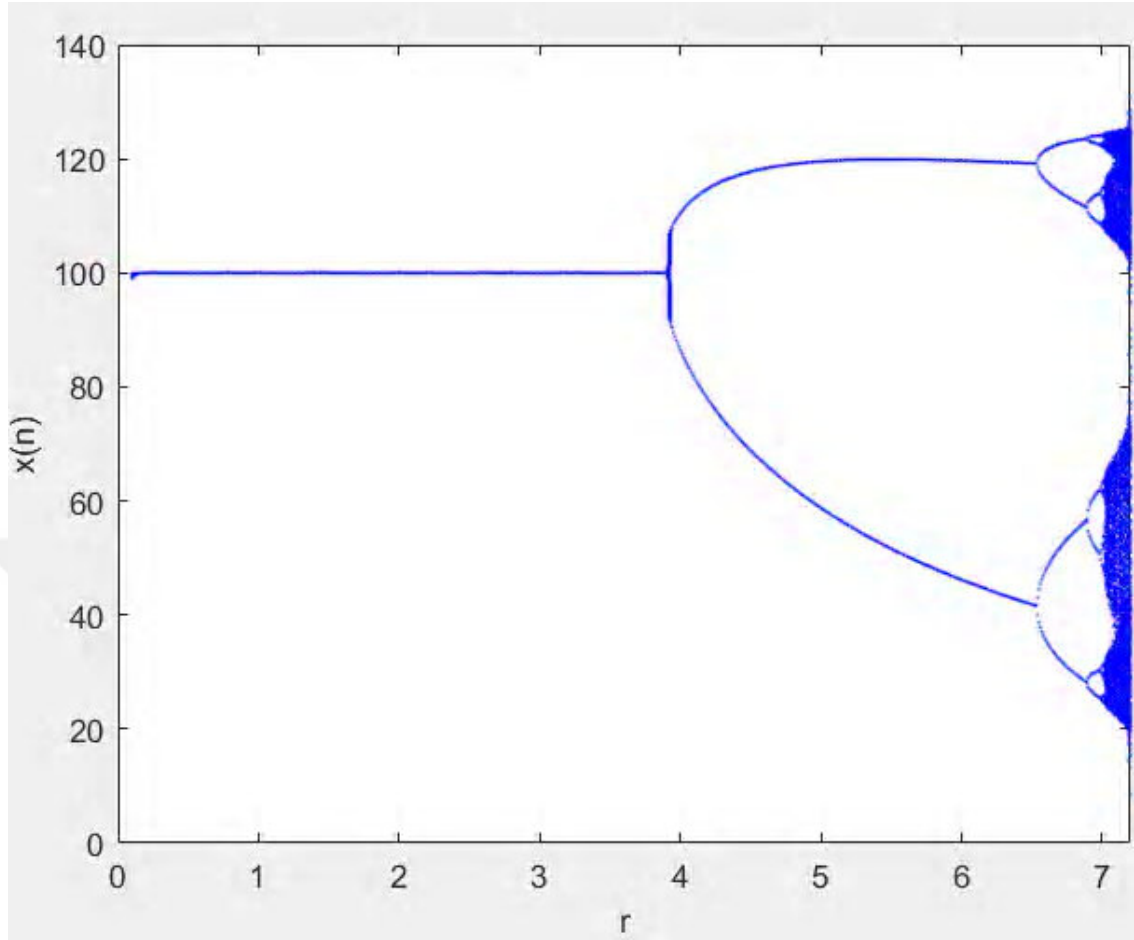
- (a) ve (b) alt grafiklerinde ($r = 3$ ve $r = 5$), sistem sabit denge noktasına düzgün biçimde yakınsamakta, yörüngeler dengeye hızla ulaşmaktadır. (c) de ise yavaş yavaş salınımlar yaparak denge noktasına yakınsamakta olduğu görülmektedir.
- (d)–(f) aralığında ($r = 6.5 - 7$), periyot-2 ve periyot-4 çatallanma davranışları açık biçimde ortaya çıkmakta ve flip çatallanmasının izleri görülmektedir.
- (g)–(h) grafiklerinde ise artan r değerleriyle sistemin periyotlu davranıştan kaotik rejime geçiş yaptığı gözlemlenmektedir.

Bu faz diyagramları, çatallanma parametresi r 'nin sistem dinamikleri üzerindeki etkisini güçlü bir şekilde ortaya koymaktadır. Özellikle güçlü Allee etkisinin, belirli bir eşik değere kadar sistemi dengede tutabildiği ancak bu eşiğin aşılması durumunda karmaşık yapıya geçişe zemin hazırladığı anlaşılmaktadır.



Şekil 8. $K=100$, $\alpha=0.8$, $h=0.05$, $M=0.88715$, $n=10$, $m=40$, $0 < r < 15$ parametre değerleri ve $X(1)=60, Y(1)=60$ başlangıç koşulları için güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma diyagramı.

Şekil 8’de, büyüme oranı arttıkça sistemin dinamik yapısında meydana gelen değişim gözlemlenmektedir. Başlangıçta sistem, sabit bir denge noktasına yakınsar şekilde kararlı davranış sergilemekte; ancak $r \approx 6.78$ değerinden itibaren flip çatallanması ortaya çıkmaktadır. Bu eşik değerden sonra sistem önce periyot-2, ardından periyot-4 ve daha yüksek periyotlara dallanarak kaotik rejime geçmektedir. Çatallanma sonrası çözüm yörüngelerinin giderek daha karmaşık hale geldiği görülmekte olup, bu durum sistemin başlangıçta güçlü Allee etkisiyle dengeye tutunmasına rağmen, büyüme oranındaki artışın kararlılığı bozarak karmaşık dinamikleri tetiklediğini göstermektedir.

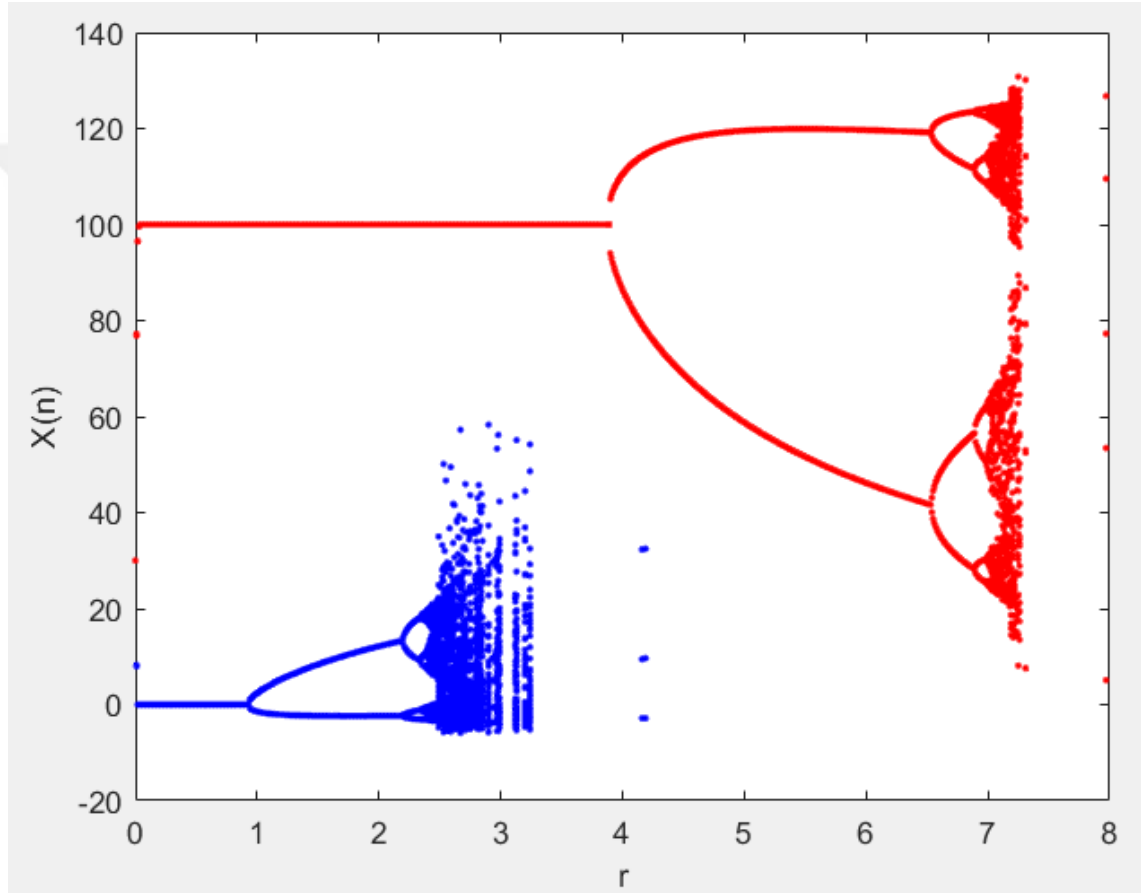


Şekil 9. $K=100$, $\alpha=0.8$, $h=0.05$, $M=0.88715$, $n=10$, $m=-5$, $0 < r < 7.2$ parametre değerleri ve $X(1)=60$, $Y(1)=60$ başlangıç koşulları için zayıf Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma diyagramı.

Şekil 9’da, zayıf Allee etkisi altında tanımlanan sistemin çatallanma davranışı gözlemlenmektedir. Grafik, büyüme oranı parametresi r ’nin artmasıyla sistemin E_2 denge noktası civarındaki dinamik değişimini ortaya koymaktadır. Bifurkasyon yapısına bakıldığında, sistem başlangıçta sabit bir dengeye yakınsamakta, ancak r belirli bir eşik değere ulaştığında (yaklaşık $r \approx 3.87$) flip çatallanması meydana gelmektedir. Bu noktadan sonra sistem periyot-2, ardından periyot-4 ve daha yüksek periyotlara dallanarak nihayet kaotik rejime geçmektedir. Grafik, zayıf Allee etkisinin sistemin çatallanma eşiğini güçlü Allee etkisine kıyasla daha düşük bir büyüme oranında ortaya çıkardığını ve sistemin kararlılığını daha erken kaybettiğini göstermektedir. Bu durum,

zayıf Allee etkisinin dengeleyici etkisinin sınırlı olduğunu ve sistemin daha düşük büyüme oranlarında karmaşık dinamiklere geçebileceğini ortaya koymaktadır.

Elde edilen bu grafikler, güçlü Allee etkisinin çatallanmayı daha yüksek r değerlerine ötelediğini ve sistemin kaosa geçişini geciktirdiğini açık biçimde ortaya koymaktadır.



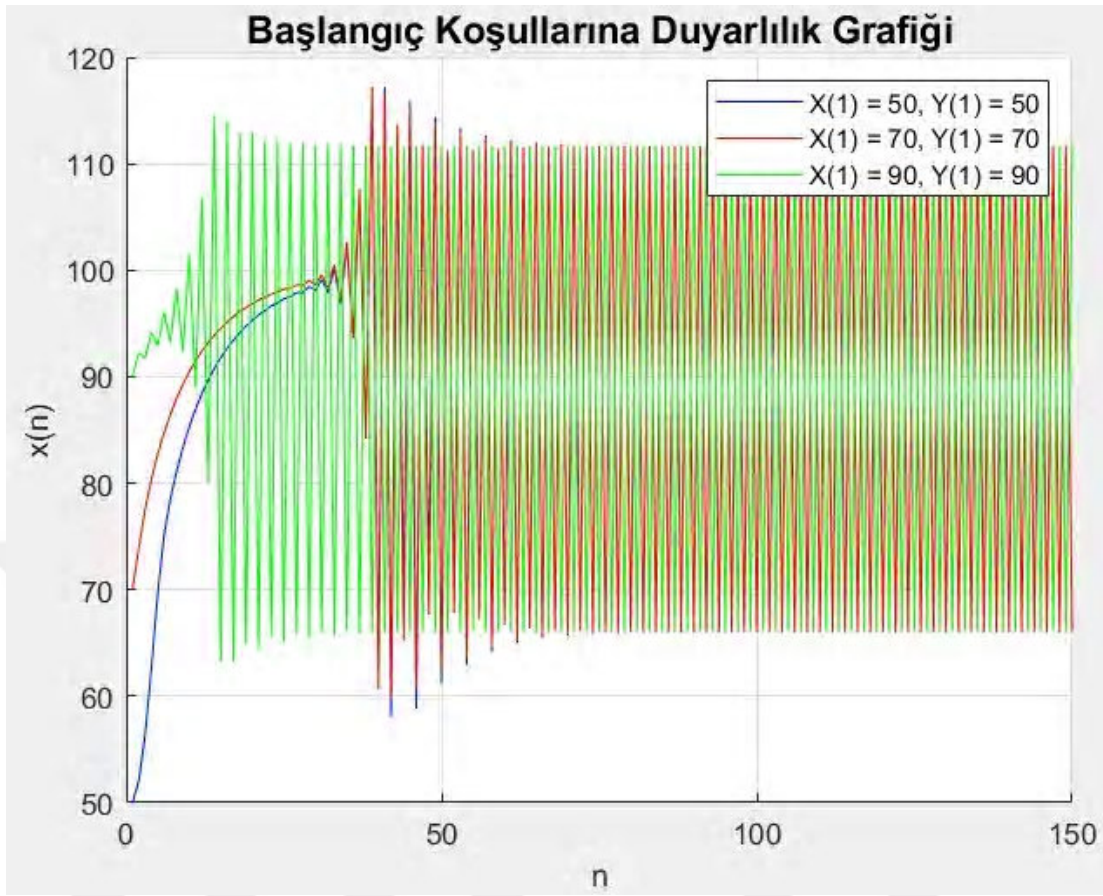
Şekil 10. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $0 < r < 8$ parametre değerleri ve $X(1) = 30$, $Y(1) = 30$ başlangıç koşullarında kırmızı eğri ile zayıf Allee etkili ($m = -5$) ve mavi eğri ile güçlü Allee etkili ($m = 40$) (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma diyagramı.

Şekil 10'da, sistem parametreleri kırmızı eğriyle zayıf Allee etkisi ($m = -5$), mavi eğriyle ise güçlü Allee etkisi ($m = 40$) altındaki sistem davranışı temsil edilmektedir. Grafik, sistemin E_2 denge noktası etrafındaki çatallanma yapısını ortaya koymaktadır.

Zayıf Allee etkisi durumunda (kırmızı eğri), sistem r parametresinin geniş bir aralığında kararlı kalmakta, yalnızca $r \approx 3.87$ civarında klasik bir flip çatallanması göstermektedir. Bu durum, zayıf Allee etkisinin sistem üzerinde yok olmaya sebep olmadığını, buna karşın büyümeyi yavaşlatarak çatallanmayı geciktirdiğini göstermektedir.

Buna karşın, güçlü Allee etkisi (mavi eğri) altında sistemin davranışı oldukça farklıdır. Grafik incelendiğinde, düşük başlangıç koşullarında sistemin r parametresine bağlı olarak erken dönemde hızla sifıra yakınsadığı gözlemlenmektedir. Bu, popülasyonun yok oluşuna işaret etmektedir. Ancak bu yok oluş kararlılığına rağmen, r değerinin belirli bir eşiği aşması durumunda sistem tekrar çatallanma göstermekte ve dinamik bir yapıya geçmektedir.

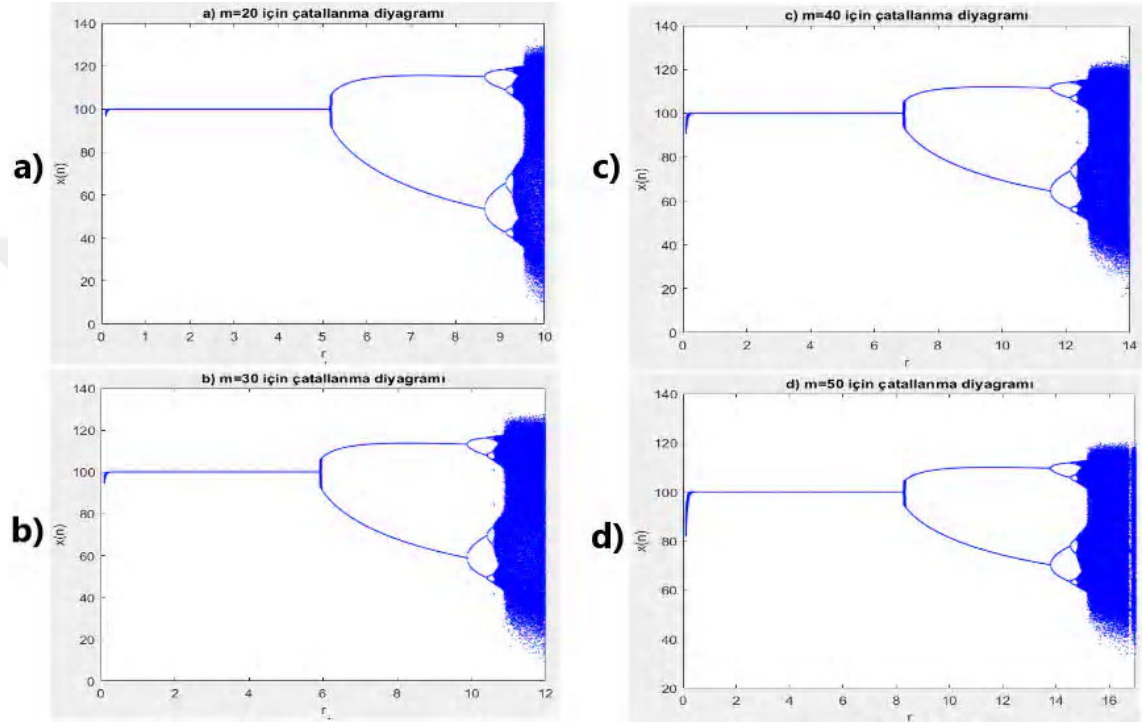
Bu davranış, güçlü Allee etkisinin düşük popülasyon seviyelerinde hayatta kalmayı zorlaştırdığını ve yok oluş riskini artırdığını açıkça ortaya koymaktadır. Mavi eğrinin uzun süre boyunca sıfır ekseninde kalması, sistemin biyolojik olarak tükenmiş durumda olduğunu göstermektedir. Ancak büyüme oranının artırılmasıyla birlikte, sistemde yeniden dinamik yapıların oluşması mümkün hale gelmektedir. Dolayısıyla, güçlü Allee etkisi sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığını ciddi ölçüde artırmakta, popülasyonun yok oluş ya da toparlanma kaderini belirleyen kritik bir eşik oluşturmaktadır.



Şekil 11. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $r = 7$ parametre değerlerinde E_2 denge noktası civarında güçlü çift Allee etkili sistem için farklı başlangıç koşullarına duyarlılık grafiği. Mavi eğri: $X(1) = Y(1) = 50$ (düşük başlangıç), Kırmızı eğri: $X(1) = Y(1) = 70$ (orta başlangıç), Yeşil eğri: $X(1) = Y(1) = 90$ (yüksek başlangıç).

Bu grafik, güçlü çift Allee etkisi altındaki sistemin başlangıç koşullarına karşı duyarlılığını ortaya koymaktadır. Aynı sistem parametreleri altında, yalnızca başlangıç popülasyon seviyeleri değiştirilerek yapılan simülasyonlarda, yüksek başlangıç koşullarında sistemin daha kısa sürede çatallanma davranışı sergilediği gözlemlenmektedir. Özellikle, yüksek popülasyon seviyelerinde sistem yaklaşık 10 adımda periyodik rejime geçerken, orta ve düşük seviyelerde bu geçiş yaklaşık 40 adımda gerçekleşmektedir. Bu durum, aynı çatallanma parametresi altında sistemin başlangıç koşullarına bağlı olarak geçici davranış süresinin değişebileceğini ve erken

kararsızlık oluşumunun yüksek başlangıç değerlerinde daha belirgin olduğunu göstermektedir.



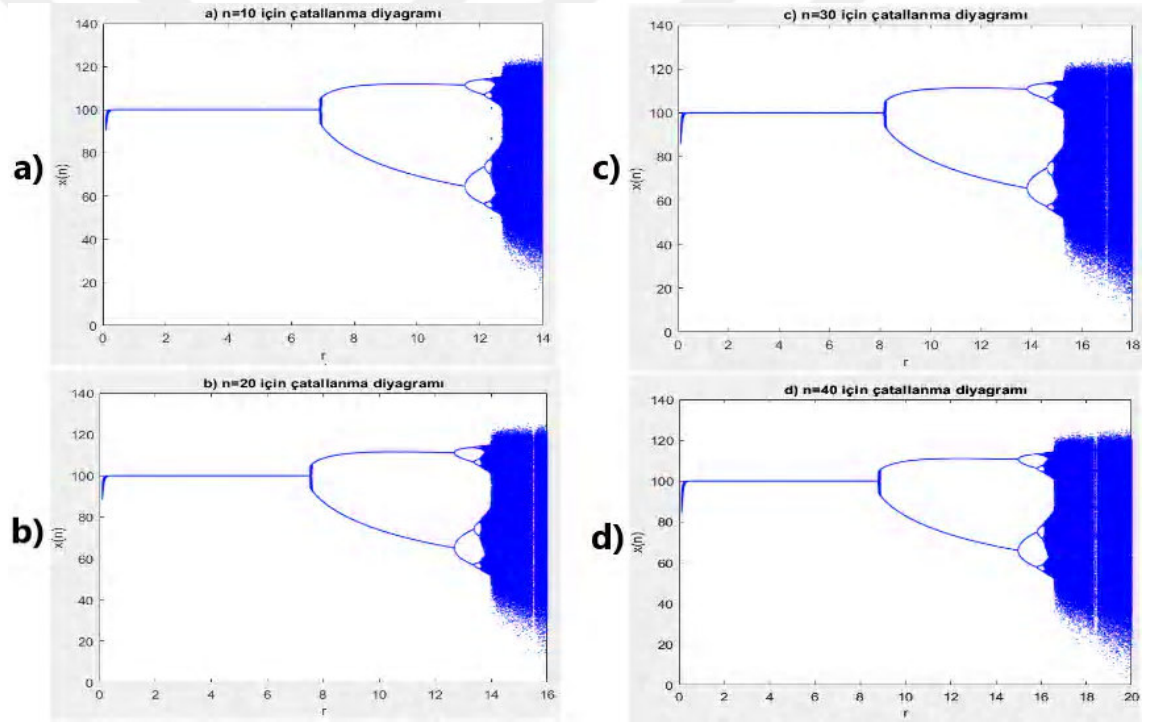
Şekil 12. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $0 < r < 30$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $m = 20$, b) $m = 30$, c) $m = 40$, d) $m = 50$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları.

Şekil 12, güçlü Allee etkisi altında tanımlı sistemin r parametresine bağlı çatallanma davranışını, farklı m parametre değerleri için karşılaştırmalı olarak sunmaktadır. Dört alt grafikte sırasıyla $m = 20, 30, 40$ ve 50 değerleri ele alınmış ve sistemin E_2 denge noktası civarındaki dinamikleri gözlemlenmiştir.

Grafiklerden elde edilen sonuçlara göre, m parametresi arttıkça çatallanma noktası daha yüksek r değerlerine ötelenmektedir. Özellikle, çatallanma $m = 20$ için yaklaşık $r = 5.08$, $m = 30$ için $r = 5.81$, $m = 40$ için $r = 6.78$ ve $m = 50$ için $r = 8.13$ civarında

gerçekleşmektedir. Bu durum, güçlü Allee etkisinin şiddetini temsil eden m değerinin artmasının, sistemin daha uzun süre kararlı kalmasına ve kaotik rejime daha geç geçmesine neden olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.

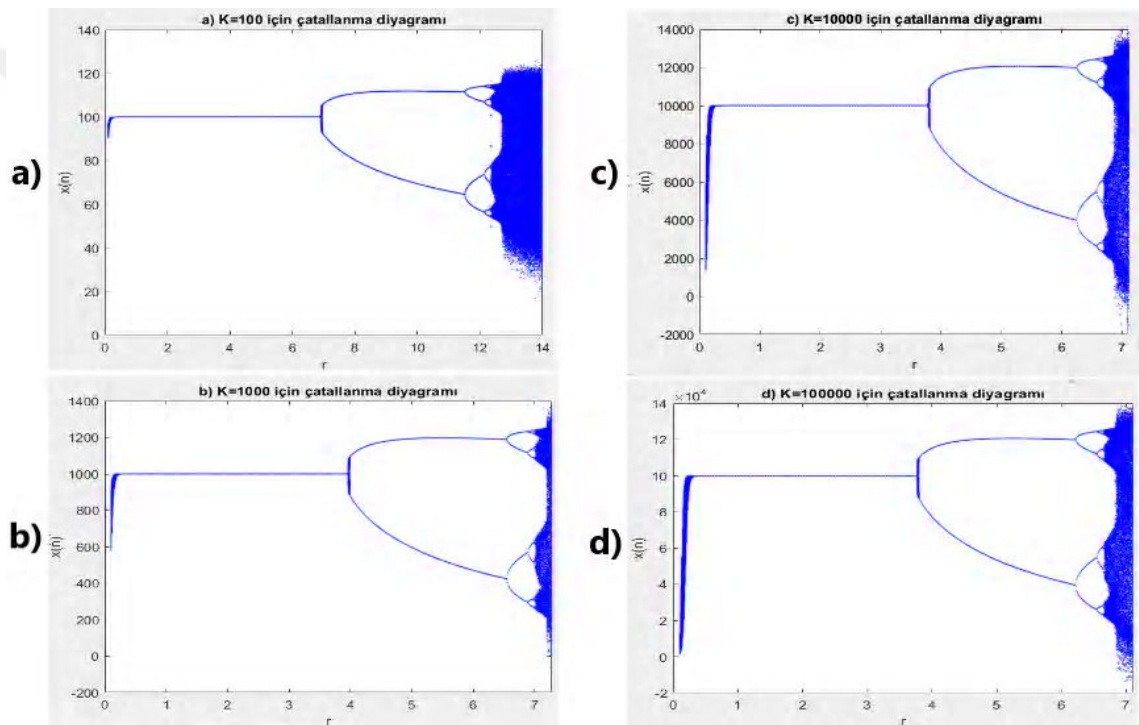
Ayrıca, periyodik yörüngelerin ortaya çıkışı ve ardından gelen kaotik bölgeler, m değerine bağlı olarak daha geniş r aralıklarına yayılmaktadır. Bu bulgular, Allee eşiğinin yalnızca türün yok oluş eşiğini belirlemekle kalmayıp, aynı zamanda sistemin genel dinamik yapısında da belirleyici bir rol oynadığını göstermektedir.



Şekil 13. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $m = 40$, $0 < r < 20$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $n = 10$, b) $n = 20$, c) $n = 30$, d) $n = 40$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları.

Şekil 13'te, farklı n parametreleri için güçlü Allee etkili sistemin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma davranışı gösterilmektedir. Çatallanma noktaları sırasıyla $n = 10$

için $r \approx 6.78$, $n = 20$ için $r \approx 7.39$, $n = 30$ için $r \approx 8.01$ ve $n = 40$ için $r \approx 8.62$ olarak belirlenmiştir. Bu bulgular, doğurgan olmayan birey sayısının artmasıyla birlikte sistemin daha uzun süre kararlı kaldığını ve çatallanmanın daha yüksek büyüme oranlarında gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. Böylece, n parametresinin artışı sistemin kararlılık bölgesini genişletmekte ve güçlü Allee etkisinin dengeleyici rolünü pekiştirmektedir.



Şekil 14. $X(1)=60$, $Y(1)=60$ başlangıç koşulları ile $h=0.05$, $m=40$, $n=10$, $\alpha=0.8$, $M=0.88715$, $0 < r < 14$ parametre değerleri ve a) $K=100$, b) $K=1000$, c) $K=10000$ ve d) $K=100000$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramı.

Şekil 14, $K=100$, $K=1000$, $K=10000$ ve $K=100000$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları verilmiştir. Grafikler, K taşıma kapasitesi arttıkça sistemin çatallanma davranışında

belirgin bir değişim olduğunu göstermektedir. Özellikle, $K=100$ için çatallanma yaklaşık $r=6.78$ civarında meydana gelirken, $K=1000$ için bu değer $r=3.89$, $K=10000$ için $r=3.72$ ve $K=100000$ için $r=3.698$ seviyelerine düşmektedir. Bu bulgular, K değeri büyüdükçe sistemin çatallanma noktasının Caputo Fabrizio kesirli mertebeden lojistik denklem sistemine (Allee etkisiz) özgü yaklaşık $r=3.6964$ değerine yakınsadığını ve çift Allee etkisinin sistem üzerindeki etkisinin azaldığını ortaya koymaktadır. Böylece, taşıma kapasitesinin artışı, sistemin dinamik yapısını Allee etkisinden arındırarak klasik modele benzer hale getirmektedir.

Tablo 2. $K=100$, $\alpha=0.9$, $M=0.88715$, $n=10$, $m=40$ parametreleri için farklı h parametreleri için elde edilen çatallanma parametre değerleri.

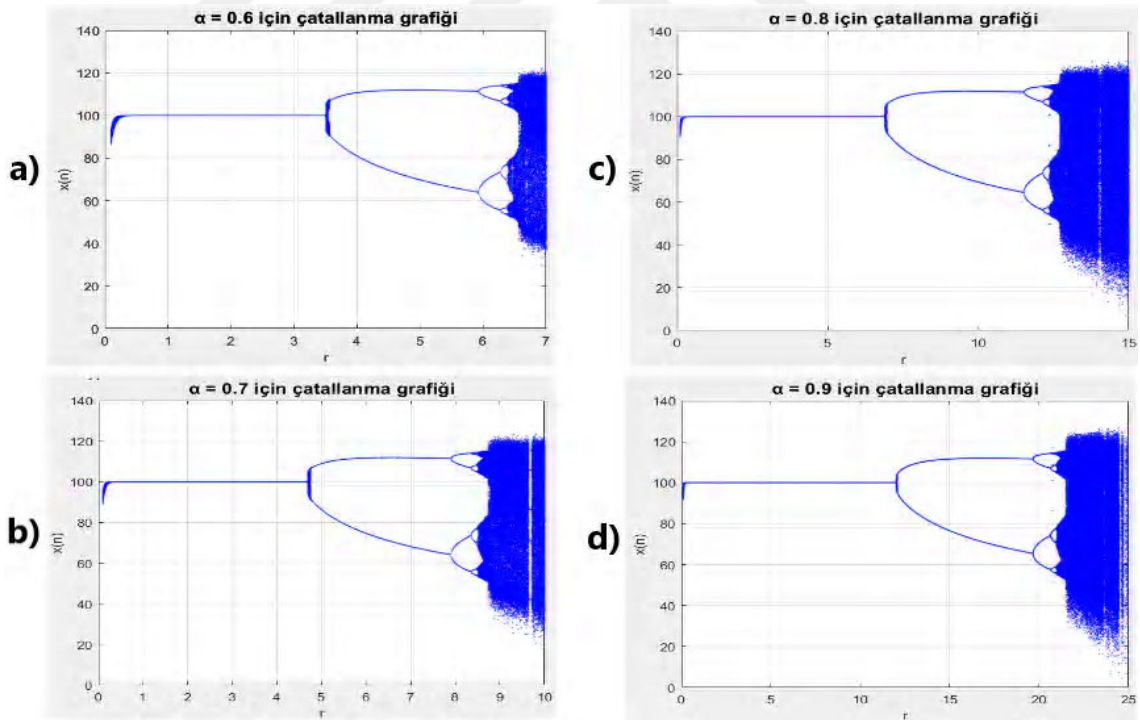
h	r ($\approx$)
0.5	2.71
0.05	6.78
0.005	7.97
0.0005	8.12
0.00005	8.13

Tablo 2'de, verilen sabit parametre değerleri altında yalnızca adım boyu h parametresi değiştirilerek elde edilen çatallanma değerleri sunulmuştur. Görüldüğü üzere, h azaldıkça çatallanma parametresi r artmakta ve belirli bir sınır değere, yaklaşık olarak $r \approx 8.13$ değerine doğru yakınsamaktadır. Özellikle $h=0.0005$ ile $h=0.00005$ arasında çatallanma değerindeki değişimin ihmal edilebilir düzeyde olması, bu aralıkta sistemin nümerik çözüm açısından doyum noktasına ulaştığını göstermektedir.

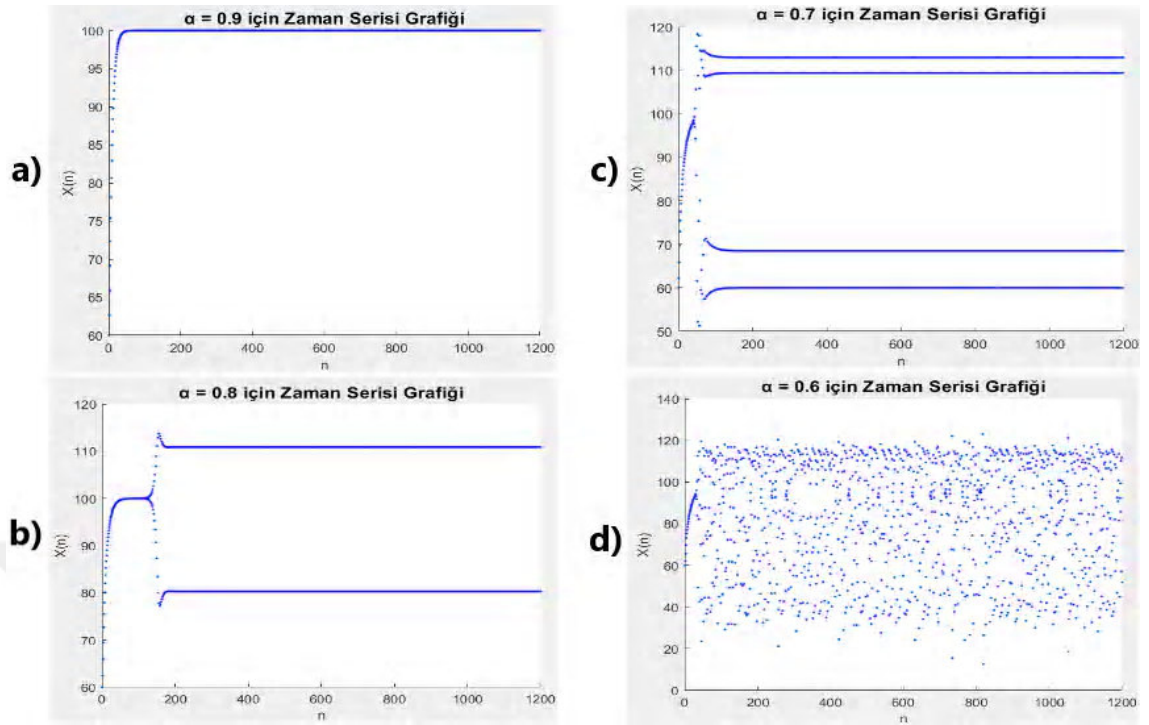
Bu davranış, aynı yöntemle analiz edilen Allee etkisiz kesirli lojistik sistem ile karşılaştırıldığında çok daha belirgindir. Çünkü Allee etkisiz modelde $h \rightarrow 0$

durumunda çatallanma değeri yalnızca $r \approx 4.44$ seviyesinde kalmakta, yani çift Allee etkili modele kıyasla çok daha erken çatallanma göstermektedir. Bu fark, çift Allee etkisinin sistemin kararlılığını uzattığını, çatallanma ve kaotik rejim geçişlerini ileriye ötelediğini açıkça ortaya koymaktadır.

Ayrıca yapılan analizler, (2.3) sistemi için h parametresinin yalnızca çatallanma eşiğinin konumunu etkilediğini; sistemin genel dinamik yapısını, örneğin periyodik davranış tiplerini ya da kaotik geçiş kalıplarını niteliksel olarak değiştirmediğini göstermiştir. Dolayısıyla adım boyunun çok küçük alınması sayısal çözüm doğruluğunu artırmakla birlikte, sistemin dinamik karakterini değiştirmemekte ve hesaplama maliyetini gereksiz yere artırabilmektedir. Bu nedenle çalışmada, doğruluk ve verimlilik arasında makul bir denge sağlayan $h = 0.05$ değeri tercih edilmiştir.



Şekil 15. $K = 100$, $h = 0.05$, $m = 40$, $n = 10$ ve $0 < r < 25$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $\alpha = 0.6$ ve $M = 0.8029$, b) $\alpha = 0.7$ ve $M = 0.83927$, c) $\alpha = 0.8$ ve $M = 0.88715$, d) $\alpha = 0.9$ ve $M = 0.9422$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları.

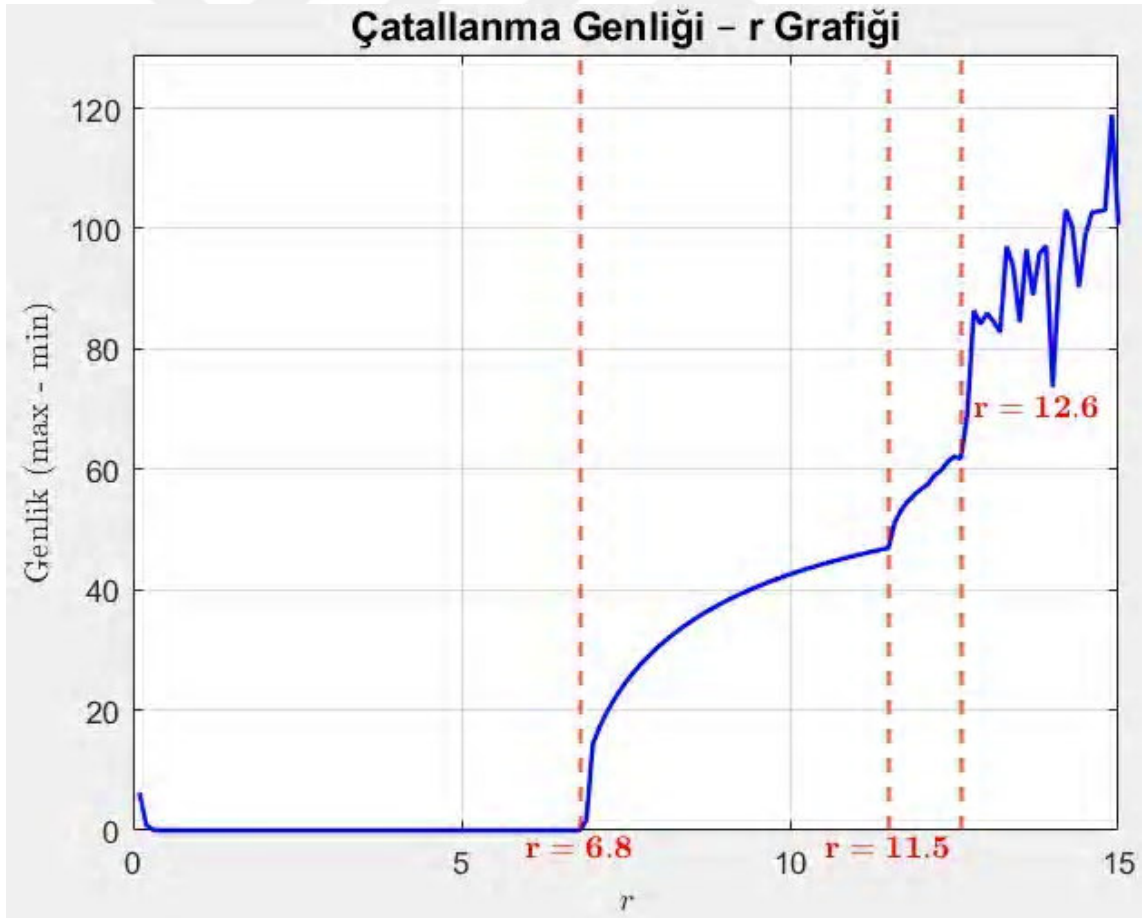


Şekil 16. $K=100$, $h=0.05$, $m=40$, $n=10$ ve $r=8$ parametre değerleri ve $X(1)=60$, $Y(1)=60$ başlangıç koşulları ile a) $\alpha=0.9$ ve $M=0.9422$, b) $\alpha=0.8$ ve $M=0.88715$, c) $\alpha=0.7$ ve $M=0.83927$, d) $\alpha=0.6$ ve $M=0.8029$ parametrelerine karşılık gelen güçlü Allee (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında zaman serisi $(X(n)-n)$ diyagramları.

Şekil 15, güçlü Allee etkili (2.3) sisteminde kesirli türev mertebesi α ve buna karşılık gelen $M(\alpha)$ normalizasyon parametrelerinin değişimine bağlı olarak E_2 denge noktası civarında gözlemlenen çatallanma davranışlarını göstermektedir. Sabit başlangıç koşulları ve sabit parametreler altında yapılan simülasyonlar sonucunda, çatallanma noktaları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

- $\alpha=0.6$, $M=0.8029$ için $r \approx 3.42$,
- $\alpha=0.7$, $M=0.83927$ için $r \approx 4.59$,
- $\alpha=0.8$, $M=0.88715$ için $r \approx 6.78$,
- $\alpha=0.9$, $M=0.9422$ için $r \approx 11.91$.

Elde edilen sonuçlar, sistemin çatallanma parametresinin, kesirli türev mertebesi α değerinden önemli derecede etkilendiğini göstermektedir. Özellikle α parametresindeki değişimlerin, sistemin denge davranışı üzerinde belirgin etkiler yarattığı ve çatallanmanın ortaya çıkış koşullarını değiştirebildiği gözlemlenmiştir. Buna göre, kesirli mertebenin sistemin hafıza yapısını temsil etmesi, çatallanma parametresinin konumunu dolaylı olarak etkileyerek sistemin kararlılık özelliklerini yeniden şekillendirmektedir. Bu durum Şekil 16’da açık bir şekilde anlaşılmaktadır. Grafiklerde $r = 8$ alındığında $\alpha = 0.9$ için görülen kararlılık durumu, $\alpha = 0.8$ de yerini 2 periyotlu çatallanmaya, $\alpha = 0.7$ alındığında ise 4 periyotlu çatallanmaya bırakmış ve $\alpha = 0.6$ için kaos meydana gelmiştir.



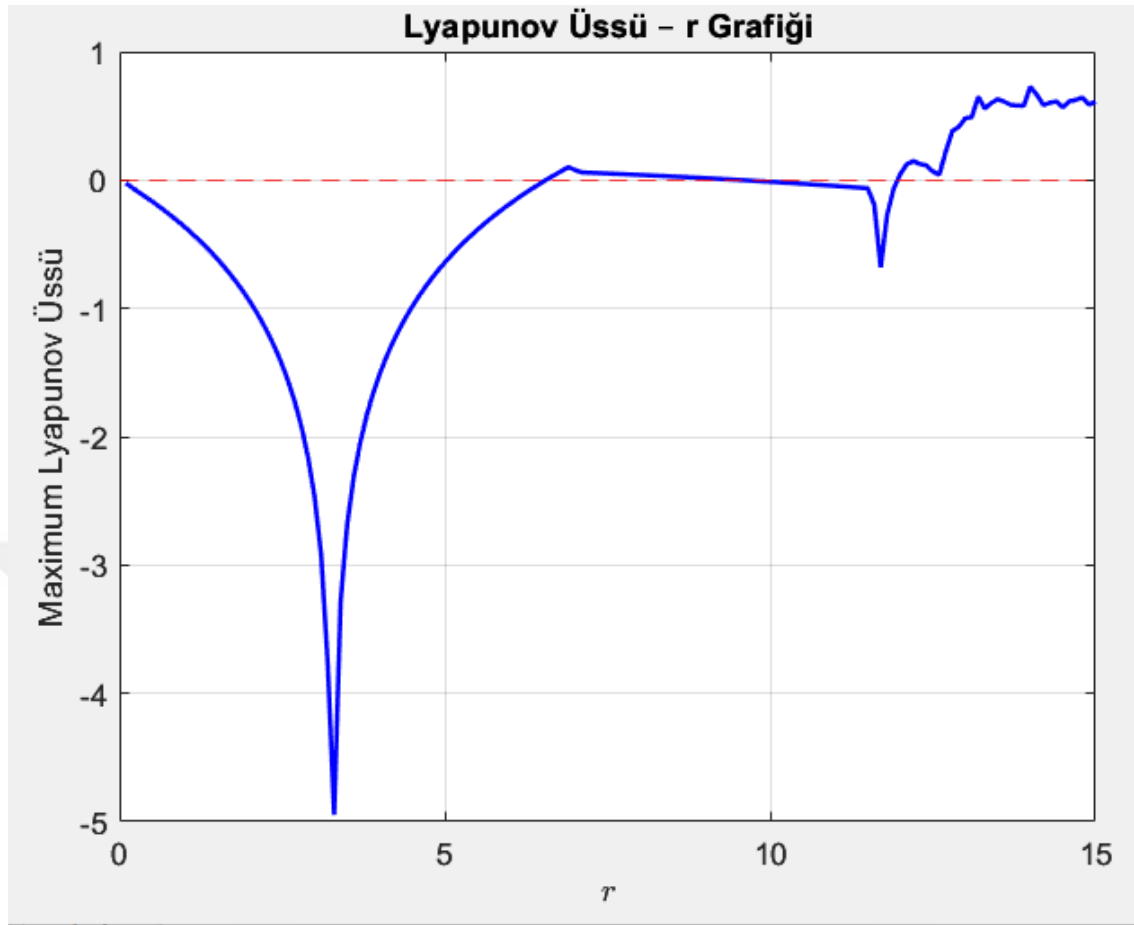
Şekil 17. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ ve $0 < r < 15$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü çift Allee etkili sistemin E_2 denge noktası civarında çatallanma genliği - r grafiği

Bu grafik, sistemin çatallanma genliğinin kontrol parametresi r 'ye bağlı olarak nasıl değiştiğini göstermektedir. Yatay eksen r parametresi, dikey eksen ise her bir r değeri için sistemin dengeye oturduğu aralıktaki maksimum ve minimum değerler arasındaki fark, yani çatallanma genliği yer almaktadır.

Grafikte üç karakteristik bölge dikkat çekmektedir:

- $r = 6.8$ civarında ilk kırılma noktasında sistemde çatallanma başlamakta ve genlik sıfırdan pozitif değerlere geçmektedir. Bu nokta, sistemin periyodik kararlı rejimden ayrılıp periyot ikiye katlama (flip çatallanması) ile daha karmaşık bir rejime geçtiği eşiği temsil etmektedir.
- $r = 11.5$ civarında ikinci bir kırılma gözlemlenmektedir. Bu noktadan itibaren genlikteki artış hızlanmakta ve sistemin davranışı daha düzensiz bir hale gelmektedir. Bu durum, sistemin daha yüksek periyotlara geçtiğini göstermektedir.
- $r = 12.6$ noktasından sonra ise çatallanma genliği oldukça hızlı ve dalgalı bir şekilde artmaktadır. Bu da sistemin kaotik bir rejime geçtiğinin güçlü bir göstergesidir.

Sonuç olarak, bu grafik yalnızca çatallanma noktalarının belirlenmesinde değil, aynı zamanda sistemin hangi bölgelerde kararlı, periyodik ya da kaotik bir rejimde davrandığını da açık biçimde ortaya koymaktadır. Özellikle belirtilen üç kırılma noktası sistemin dinamik rejim değişimlerine karşı ne derece hassas olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.



Şekil 18. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ ve $0 < r < 15$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü çift Allee etkili (2.3) sisteminin E_2 denge noktası civarında Maximum Lyapunov Üsteli grafiği

Şekil 18, güçlü çift Allee etkili (2.3) sisteminin, $0 < r < 15$ aralığında değişen çatallanma parametresi için hesaplanan maksimum Lyapunov üssü değerlerini göstermektedir. Analiz, sistemin E_2 denge noktası civarındaki dinamik davranışının hassasiyetini değerlendirmek amacıyla gerçekleştirilmiştir. Başlangıç koşulları $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ olacak şekilde yapılan simülasyon sonuçlarına göre:

- Lyapunov üssü $\lambda_{\max} < 0$ olduğunda sistem asimptotik olarak kararlıdır,
- $\lambda_{\max} = 0$ civarında sistem periyodik yörüngelere sahiptir,
- $\lambda_{\max} > 0$ olduğu bölgelerde sistemin kaotik rejime geçtiği görülmektedir.

Grafikte, belirli çatallanma noktalarından sonra Lyapunov üssünün pozitif değerlere ulaşması, sistemin kaotik dinamikler sergilemeye başladığını açıkça göstermektedir. Bu da, çatallanma sonrası ortaya çıkan karmaşık davranışın kararsızlık ve duyarlılık içerdiğini doğrulayan nicel bir göstergedir.

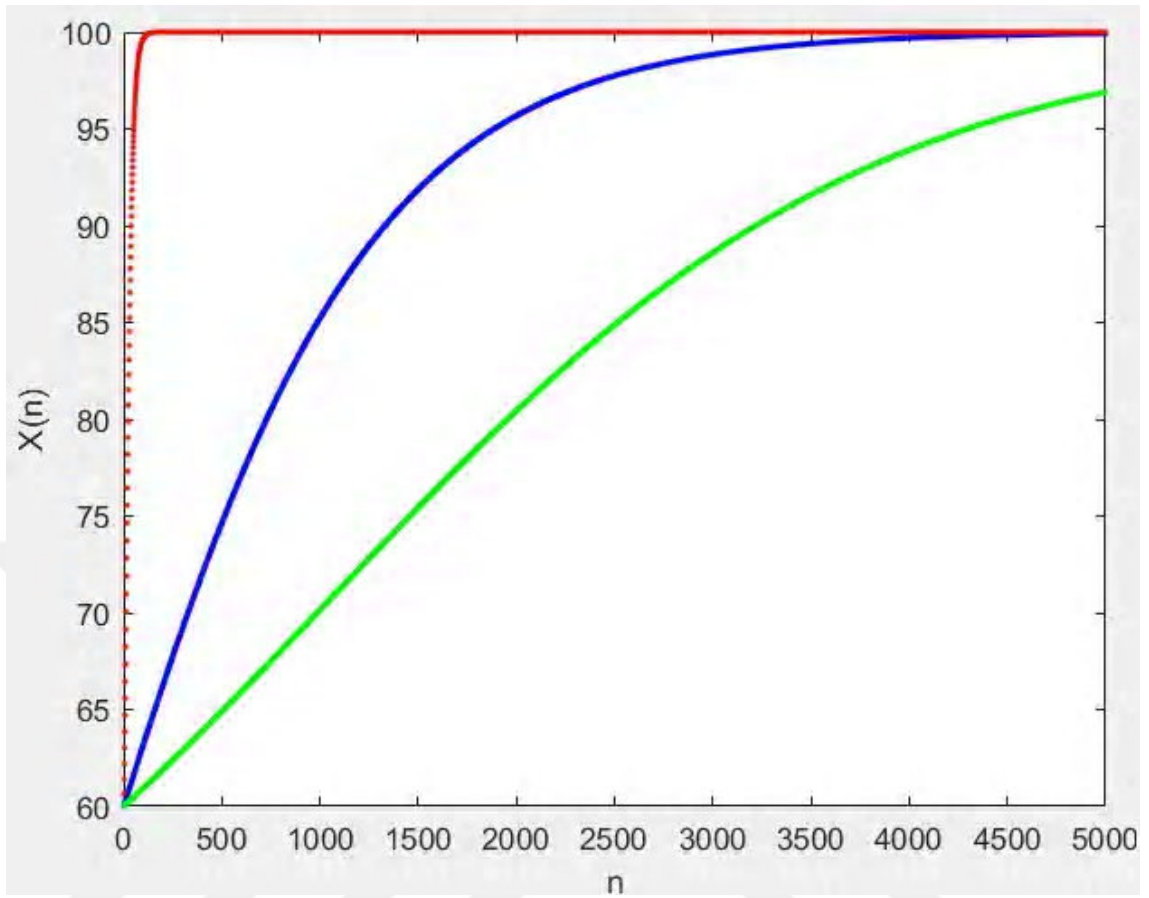
2.4.2. Tek ve Çift Allee Etkilerinin Nümerik Olarak Karşılaştırılması

Bu bölümde, Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türev operatörüyle tanımlanan ayırık zamanlı lojistik modele uygulanan tek ve çift Allee etkilerinin sistemin kararlılık yapısı üzerindeki etkileri nümerik olarak incelenmiştir. Karşılaştırmalı analizlerde farklı başlangıç koşullarına ve farklı Allee eşik değerlerine tek ve çift Allee etkisinin nasıl tepki verildiği gözlemlenmiştir.

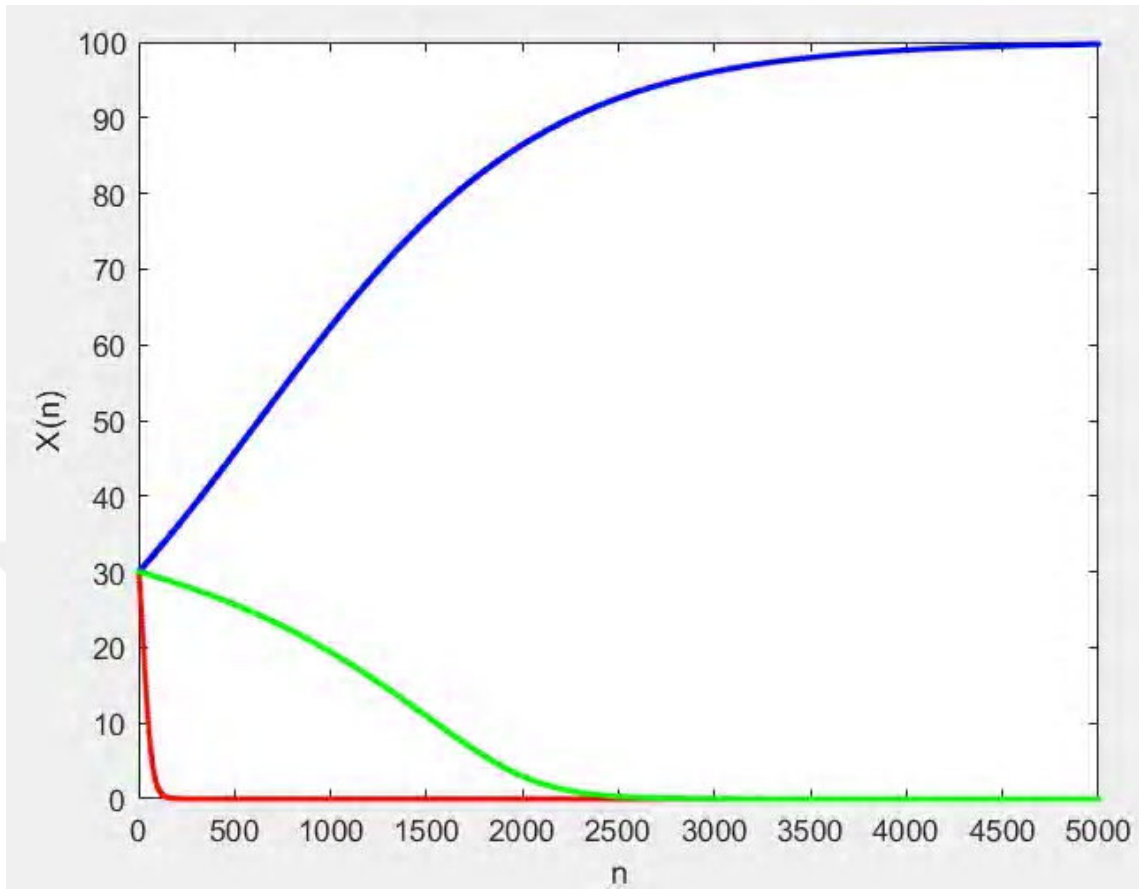
Simülasyonlar kapsamında oluşturulan grafiklerde:

- Mavi eğri, Allee etkisi içermeyen klasik kesirli lojistik modeli,
- Kırmızı eğri, yalnızca tek Allee etkisi içeren modeli,
- Yeşil eğri, çift Allee etkisi ile genişletilmiş modeli temsil etmektedir.

Bu görsel karşılaştırmalar ile, her bir Allee türünün sistemin dengeye yakınsama hızına ve geçici davranışına olan etkisi açık biçimde ortaya konmaktadır.

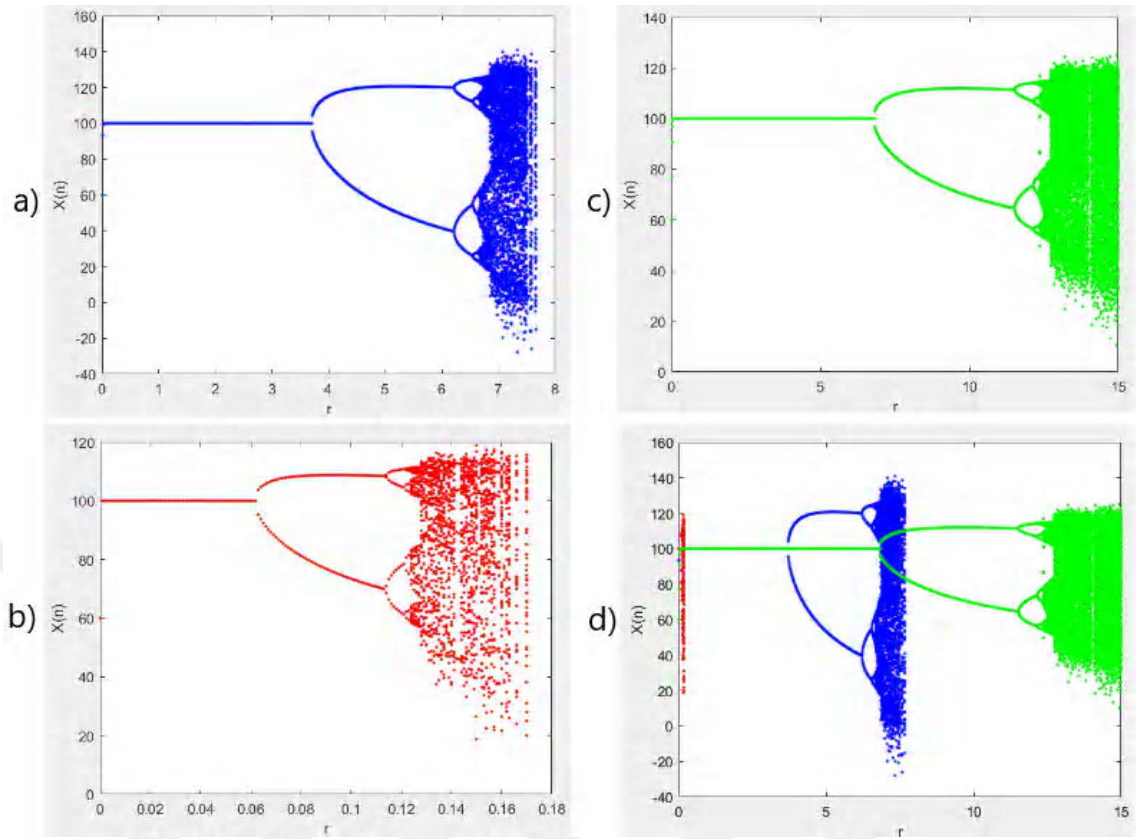


Şekil 19. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$ (çift Allee), $m = 40$ (tek ve çift Allee), $r = 0.03$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için Allee etkisiz (mavi eğri), güçlü tek Allee etkili (kırmızı eğri) ve güçlü çift Allee etkili (yeşil eğri) ayrık zamanlı Caputo Fabrizio lojistik denklem sistemlerinin E_2 denge noktası için kararlılık diyagramı.



Şekil 20. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$ (çift Allee), $m = 40$ (tek ve çift Allee), $r = 0.03$ parametre değerleri ve $X(1) = 30$, $Y(1) = 30$ başlangıç koşulları için Allee etkisiz (mavi eğri), güçlü tek Allee etkili (kırmızı eğri) ve güçlü çift Allee etkili (yeşil eğri) ayrık zamanlı Caputo Fabrizio lojistik denklem sisteminin E_2 denge noktası için kararlılık diyagramı.

Şekil 19 ve Şekil 20 birlikte değerlendirildiğinde Allee etkisiz lojistik sistem her koşulda büyüyerek denge noktasına yakınsayan bir davranış gösterirken; Allee eşik değerinin üzerindeki popülasyon başlangıç değerlerinde hem tek Allee etkisi hem de çift Allee etkisi denge noktasına yakınsamaktadır. Buna karşın, Allee eşik değerinin altındaki popülasyon başlangıç değerleri için her iki Allee etkisinde de (tek ve çift) popülasyon sifıra yakınsamakta ve yok olmaktadır. Fakat her iki grafikte de güçlü tek Allee etkisi sistemi çok hızlı bir şekilde denge noktasına ya da yok olmaya sürüklerken, güçlü çift Allee etkisi her iki durumda da bu geçişi Allee etkisiz sisteme göre yavaşlatmakta ve bu sayede de sistemde çatallanma daha geç meydana gelmektedir.



Şekil 21. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ ve $0 < r < 15$ parametre değerleri ile $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ altında elde edilen ayrık zamanlı Caputo–Fabrizio lojistik denklem sistemlerine ait E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları gösterilmektedir. Grafiklerde sırasıyla a) Allee etkisiz sistem (mavi eğri), b) güçlü tek Allee etkili sistem (kırmızı eğri), c) güçlü çift Allee etkili sistem (yeşil eğri) ve d) üç sistemin çatallanma davranışlarının karşılaştırmalı gösterimi

Şekil 21’de verilen çatallanma diyagramları bu gözlemleri destekler niteliktedir. Allee etkisiz sistem (a), $r \approx 3.70$ civarında ilk çatallanmayı yaşarken; tek Allee etkili sistem (b), çok daha düşük bir çatallanma eşğine ($r \approx 0.0616$) sahiptir ve sistemin kaotik davranışa daha erken geçme eğiliminde olduğunu ortaya koymaktadır. Buna karşın, çift Allee etkili sistem (c), ancak $r \approx 6.78$ gibi oldukça yüksek bir parametre değerinde çatallanma göstermekte ve bu durum sistemin daha uzun süre kararlı kaldığını göstermektedir. Bütün sistemlerin karşılaştırmalı olarak sunulduğu (d) alt grafikte bu fark net biçimde izlenebilmektedir.

Sonuç olarak, tek Allee etkisi sistemde çatallanma geçişini daha erken değerlere taşıırken, çift Allee etkisi bu geçişi geciktirmekte ve sistemin kararlılığını daha uzun bir parametre aralığında sürdürebilmesine olanak tanımaktadır. Ancak bu gecikmeli geçiş, sistem dinamiklerinin daha yavaş tepki vermesine ve belirli parametre aralıklarında daha karmaşık davranış biçimlerinin (örneğin yüksek periyotlu salınımlar veya parametreye duyarlı geçişler) ortaya çıkmasına zemin hazırlayabilmektedir. Dolayısıyla, Allee etkisinin türü yalnızca büyüme sürecini değil, sistemin uzun vadeli dinamik tepkisini de önemli ölçüde belirlemektedir. Ayrıca Allee eşiğinin altındaki başlangıçlarda, popülasyon güçlü Allee etkisi altında yok olurken; zayıf Allee etkisi altında büyüme hızı azalsa da popülasyon varlığını sürdürmektedir.

2.6. Sonuç

Bu bölümde, güçlü ve zayıf çift Allee etkisi altında tanımlanmış Caputo–Fabrizio kesirli türevli ayrık zamanlı lojistik modelin dinamik davranışı ayrıntılı olarak incelenmiştir. Yapılan simülasyonlar, çatallanma parametresi r başta olmak üzere, Allee parametreleri (m, n) , taşıma kapasitesi K , kesirli türev mertebesi α ve başlangıç koşulları gibi birçok değişkenin sistemin kararlılığı ve karmaşıklığı üzerindeki etkisini açıkça ortaya koymuştur.

Öncelikle, sabit ve düşük büyüme oranlarında sistemin E_2 denge noktasına asimptotik olarak yakınsadığı ve Allee etkisinin baskılayıcı yapısına rağmen dengeye ulaşabildiği gözlemlenmiştir. Ancak r parametresinin artırılmasıyla birlikte sistem, önce periyodik rejime, ardından kaotik davranışlara geçerek tipik bir flip çatallanması sergilemiştir. Bu geçiş süreci, faz diyagramları ve Lyapunov üssü analizleriyle nicel olarak doğrulanmıştır.

Sistem parametrelerinin etkisi ayrı ayrı değerlendirildiğinde; Allee eşiği m ve doğurgan olmayan birey sayısı n arttıkça çatallanmanın daha yüksek r değerlerine ötelenerek sistemin kararlılığını uzattığı belirlenmiştir. Kesirli türev mertebesi α 'nın sistem üzerindeki etkisi belirgin olup, belleğe dayalı dinamik yapının çatallanma davranışlarını önemli ölçüde şekillendirdiği görülmüştür. Taşıma kapasitesinin artırılması ise çift Allee etkisinin etkisini zayıflatarak çatallanma dinamiklerinin kesirli mertebeden lojistik denklem sisteminin dinamiklerine yakınsadığını ortaya koymuştur.

Başlangıç koşullarına duyarlılık analizinde ise, aynı parametre altında farklı başlangıç değerlerinin yalnızca çatallanma zamanlamasını etkilediği; yüksek başlangıç popülasyonlarının daha erken kararsızlık gösterdiği saptanmıştır. Ayrıca Allee eşiğinin altındaki başlangıç durumlarında zayıf Allee etkisi altında popülasyonun devamlılığını koruduğu, güçlü Allee etkisi altında ise yok olduğu görülmüştür. Son olarak, tek ve çift Allee etkisinin dinamik yapıya etkisi karşılaştırmalı olarak ele alınmış, çift Allee etkisinin sistemin kararlılığını önemli derecede uzattığı belirlenmiştir.

Genel olarak bu bölümde yapılan analizler, Caputo–Fabrizio kesirli türevli sistemlerde Allee etkisinin sadece yok oluş eşiğini değil, sistemin uzun dönemli dinamik yapısını da belirlediğini göstermiştir. Bu yapılarda meydana gelen çatallanma davranışı ve kaotik yapının kontrol edilebilirliği ise sonraki bölümde hibrit kontrol yöntemiyle ele alınacaktır.

3. BÖLÜM

HİBRİT KONTROLLÜ CAPUTO-FABRİZIO KESİRSEL MERTEBEDEN TÜREVLİ ÇİFT ALLEE ETKİLİ LOJİSTİK DENKLEM SİSTEMİNİN DİNAMİK ANALİZİ

Bu bölümde, önceki bölümde kararlılık ve çatallanma analizi gerçekleştirilen (2.3) sistemine Hibrit Kontrol Metodu uygulanarak, kaotik davranışları bastırmaya yönelik yeni bir fark denklem sistemi elde edildi. Hibrit kontrol parametresinin sisteme dahil edilmesiyle oluşturulan bu yeni yapının denge noktaları civarındaki kararlılık ve çatallanma özellikleri ayrıntılı biçimde analiz edildi. Ayrıca, önerilen kontrollü sistemin dinamik davranışı, orijinal (2.3) sistemi ile nümerik olarak karşılaştırıldı ve kontrol mekanizmasının kararlılık üzerindeki etkisi değerlendirildi.

(2.3) denklem sistemine Hibrit kontrol parametresi eklenerek elde edilen yeni kaos kontrollü fark denklem sistemi aşağıdaki gibidir [25]:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \rho(x(n)) + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} \right) \frac{rx(n)}{x(n)+n} \left(1 - \frac{x(n)}{K} \right) (x(n)-m) \\ &\quad - \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} \right) \frac{ry(n)}{y(n)+n} \left(1 - \frac{y(n)}{K} \right) (y(n)-m) + (1-\rho)x(n), \\ y(n+1) &= \rho y(n) + (1-\rho)y(n). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada $0 < \rho < 1$ dir. Bu denklem sisteminin denge noktaları, (2.3) sisteminde olduğu gibi, $E_0(0,0)$, $E_1(m,m)$ ve $E_2(K,K)$ olmak üzere üç tanedir.

3.1.Kararlılık Analizi

Bu bölümde, hibrit kontrol uygulanmış (3.1) numaralı fark denklem sisteminin $E_2(K, K)$ denge noktası civarındaki lokal asimptotik kararlılığı analiz edilecektir. Diğer denge noktaları için de benzer analiz yapılabilmeyle birlikte, sistemin dinamik yapısı üzerindeki etkilerin daha net gözlemlenebilmesi açısından analizler E_2 noktası etrafında yoğunlaştırılmıştır.

Teorem 3.1.

(3.1) kontrollü fark denklem sisteminin, E_2 denge noktası civarında lokal asimptotik

$$\text{kararlı olması için gerek ve yeter şart } \rho < \frac{2M(K+n)}{(1-\alpha)(K-m)r+M(K+n)} \text{ ve} \\ \frac{M(K+n)}{(K-m)(-1+(1+(\rho-\frac{3}{2})h)\alpha)} < r < \frac{2M(K+n)(\rho-2)}{\rho(K-m)(-2+(2+(\rho-3)h)\alpha)} \text{ koşullarının}$$

birlikte sağlanmasıdır. Burada ρ hibrit kontrol parametresi ve diğer parametreler Tablo 1’de belirtildiği gibidir.

İspat:

(3.1) fark denklem sisteminin, E_2 denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} \rho \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M} \right) r(K-m)}{K+n} \right) & 1-\rho \frac{\rho \left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M} \right) r(K-m)}{K+n} \\ \rho & 1-\rho \end{pmatrix} \text{ şeklinde}$$

hesaplanır. bu matrisin karakteristik denklemi $P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$ ve katsayıları

$$\bullet \quad p_1 = -\rho \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M} \right) r(K-m)}{K+n} \right) - 2 + 2\rho$$

$$\bullet \quad p_2 = \left(-\rho \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M} \right) r(K-m)}{K+n} \right) - 1 + \rho \right) (-1 + \rho) - \frac{\rho^2 \left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M} \right) r(K-m)}{K+n}$$

şeklindedir.

Bu eşitliklerde $0 < \rho < 1$ ve diğer parametreler Tablo 1’de verildiği gibi olmak üzere;

i. $0 < 1 + p_1 + p_2 = \frac{\alpha h r \rho^2 (K-m)}{M(K+n)}$ ‘dır.

ii. $r < \frac{2M(K+n)(\rho-2)}{\rho(K-m)(-2+(2+(\rho-3)h)\alpha)}$ olduğu kabul edilirse

$$0 < 1 - p_1 + p_2 = \frac{\alpha h r \rho^2 (K-m) + \left(-3 \left(\frac{2}{3} + \left(h - \frac{2}{3} \right) \alpha \right) (K-m)r - 2M(K+n) \right) \rho + 4M(K+n)}{M(K+n)}$$

bulunur. Ayrıca $0 < h$ eşitsizliğinin sağlanması için

$$\rho < \frac{2M(K+n)}{(1-\alpha)(K-m)r + M(K+n)}$$
 olmalıdır.

iii. Kabul edelim ki $\frac{M(K+n)}{(K-m)(-1+(1+(\rho-\frac{3}{2})h)\alpha)} < r$ olsun. O halde

$$0 < 1 - p_2 = \frac{\rho \left(\left(1 - \left(1 + \left(\rho - \frac{3}{2} \right) h \right) \alpha \right) (K-m)r + M(K+n) \right)}{M(K+n)}$$
 elde edilir.

Son iki koşul birlikte düşünüldüğünde, $\rho < \frac{2M(K+n)}{(1-\alpha)(K-m)r + M(K+n)}$ ve

$$\frac{M(K+n)}{(K-m)(-1+(1+(\rho-\frac{3}{2})h)\alpha)} < r < \frac{2M(K+n)(\rho-2)}{\rho(K-m)(-2+(2+(\rho-3)h)\alpha)}$$
 koşulları altında

(3.1) fark denklem sistemi, E_2 denge noktası civarında lokal asimptotik kararlıdır.

3.2. Flip Çatallanma Analizi

Bu bölümde, çatallanma parametresi olarak popülasyonun büyüme oranı r seçilerek (2.3) sisteminde analiz edilen $E_2(K, K)$ denge noktası civarında, hibrit kontrol

uygulanmış (3.1) sisteminin flip çatallanma analizi gerçekleştirilecektir. Amaç, hibrit kontrol mekanizmasının sistemin dinamik yapısını nasıl etkilediğini ve çatallanma davranışını nasıl değiştirdiğini belirlemektir. Analiz kapsamında, sabit noktanın özdeğerleri incelenecek ve periyodu ikiye katlanması durumuna karşılık gelen flip çatallanma koşulları doğrultusunda sistemin davranışı değerlendirilecektir.

Teorem 3.2.

Popülasyon büyüme oranı r çatallanma parametresi olmak üzere, (3.1) sisteminde E_2 sabit noktası civarında flip çatallanması elde edilmesi için gerek ve yeter şart şudur:

$$r^* = \frac{2(-2 + \rho)M(K + n)}{\rho(K - m)(\alpha h \rho - 3\alpha h + 2\alpha - 2)}.$$

Burada ρ hibrit kontrol parametresi ve diğer parametreler Tablo 1’de belirtildiği gibidir.

İspat:

(3.1) sisteminin E_2 noktasındaki Jacobian matrisi ve bu matrisin karakteristik denklemi Teorem 3.1’de verilmiştir.

r çatallanma parametresi ve $0 < \rho < 1$ olmak üzere, Teorem 1.1’in (i) şartından r^*

değeri, $r^* = \frac{2(-2 + \rho)M(K + n)}{\rho(K - m)(\alpha h \rho - 3\alpha h + 2\alpha - 2)}$ olarak bulunur. r ’nin bu değeri için

Jacobian matrisi yeniden düzenlendiğinde;

$$J(r^*) = \begin{pmatrix} \rho \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{3\alpha h}{2M} \right) r(K-m)}{K+n} \right) & \rho \left(\frac{1-\alpha}{M} + \frac{\alpha h}{2M} \right) r(K-m) \\ \rho & 1-\rho \end{pmatrix}$$

olur. Bu matrisin özdeğerleri, $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = \frac{\alpha h \rho^2 - 3\alpha h \rho + 3\alpha h - 2\alpha + 2}{3\alpha h - \alpha h \rho - 2\alpha + 2}$ dir. Tablo

1’de verilen parametre değerleri ve $0 < \rho < 1$ için $|\lambda_2| < 1$ olduğu açıktır. $J(r^*)$ matrisinin karakteristik denkleminde;

$$i. \quad 0 < 1 + p_1 + p_2 = \frac{2\rho\alpha h(-2 + \rho)}{-2 + (2 + (\rho - 3)h)\alpha},$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } 0 < 1 + p_2 &= \frac{\rho \alpha h(-2 + \rho)}{-2 + (2 + (\rho - 3)h)\alpha}, \\ \text{iii. } 0 < 1 - p_2 &= \frac{-4 + (4 + (-\rho^2 + 4\rho - 6)h)\alpha}{-2 + (2 + (\rho - 3)h)\alpha} \end{aligned}$$

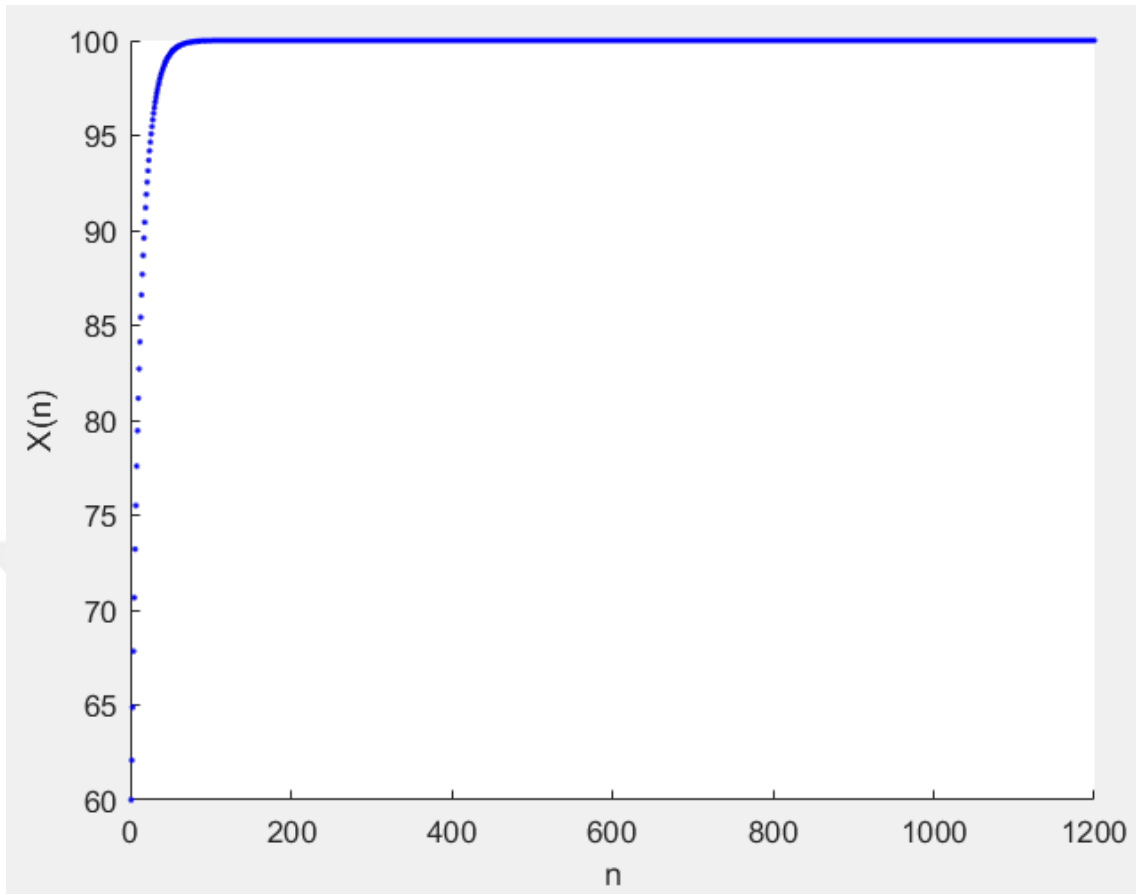
eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca geçişlilik şartı gereği,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n=2} p_i' (-1)^{n-i}}{\sum_{i=1}^{n=2} (n-i+1)(-1)^{n-i} p_{i-1}} = \frac{(-2 + (2 + (\rho - 3)h)\alpha)^2 \rho (K - m)}{M(4 + (-4 + (\rho^2 - 4 + 6)h)\alpha)(K + n)} \neq 0$$

olmalıdır. Verilen parametre değerleri için geçişlilik koşulu da sağlanmaktadır. Bütün çatallanma şartları sağlandığından, (3.1) sisteminde, E_2 denge noktası civarında flip çatallanması meydana gelmektedir.

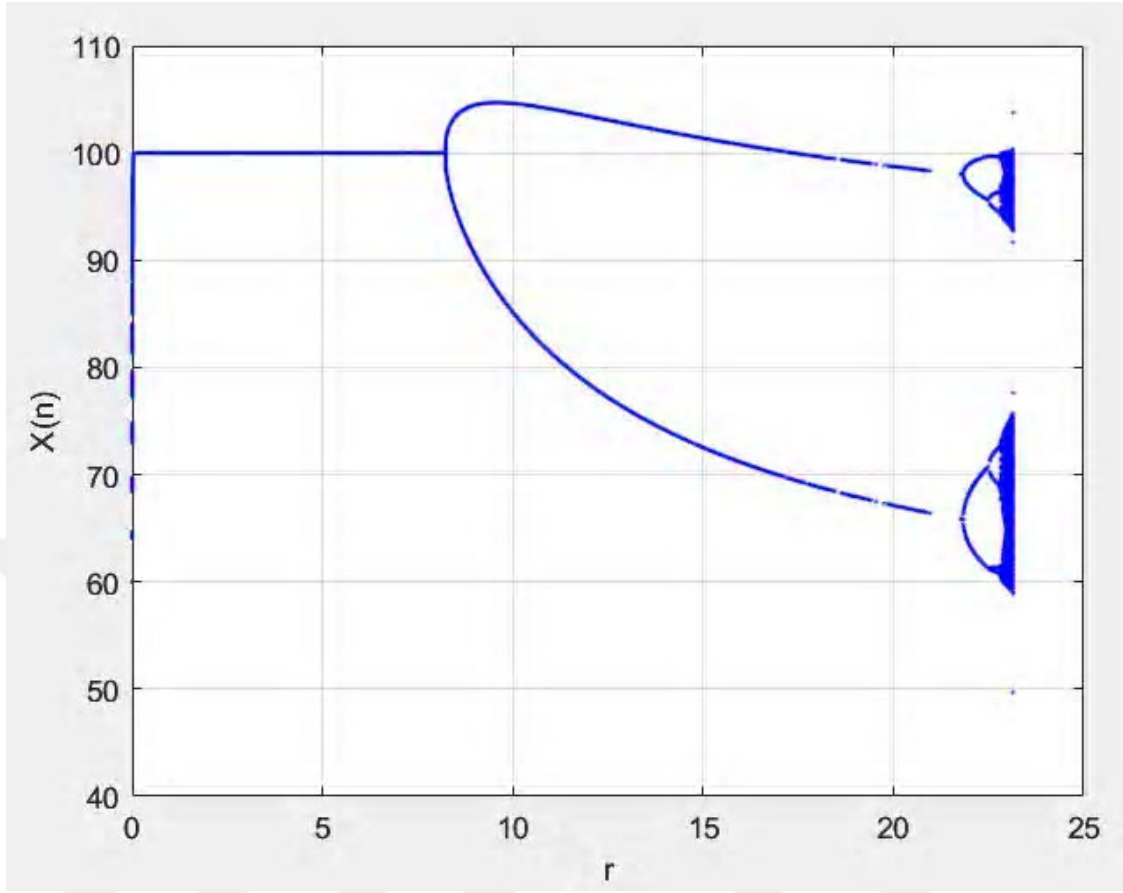
3.3. Hibrit Kontrollü (3.1) Sisteminin E_2 Denge Noktası Civarında Nümerik Analizi

Bu bölümde, Caputo–Fabrizio kesirli türev tanımıyla modellenmiş ve çift Allee etkisini içeren lojistik sistemin, hibrit kontrol mekanizması altında E_2 denge noktası civarındaki nümerik davranışı analiz edilmektedir. Önceki bölümlerde teorik olarak elde edilen denge noktalarının kararlılığı, bu kısımda sayısal çözümler yardımıyla doğrulanmakta; sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığı ile parametre değişimlerine verdiği tepki grafiksel olarak değerlendirilmektedir. Özellikle hibrit kontrol parametresi ρ ve büyüme oranı r değişkenleri dikkate alınarak sistemin zamana bağlı evrimi ve iki yakın başlangıç durumunun zamanla birbirinden uzaklaşıp uzaklaşmadığı incelenmiştir. Böylece hem sistemin kararlılık doğası hem de kaotik rejime geçiş eşiği hakkında sayısal düzeyde bilgi edinilmesi hedeflenmiştir.



Şekil 22. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $\rho = 0.9$ ve $r = 7.5$ parametre değerleri ile $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü Allee etkili (3.1) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki kararlılık diyagramı.

Şekil 22’de, hibrit kontrol uygulanmış sistemin $r = 7.5$ değeri için başlangıç koşullarına bağlı zamana göre davranışı incelenmiştir. Orijinal sistemde aynı parametre değeri altında 2-periyotlu çatallanma gözlenirken, hibrit kontrol mekanizması sayesinde sistemin E_2 denge noktası civarında asimptotik olarak kararlı hale geldiği ve zamanla sabit bir değere yakınsadığı görülmektedir. Bu sonuç, kontrolün etkisiyle sistemin periyodik ya da kaotik rejimlere girmediğini ve belirli bir parametre aralığında kararlılığını koruduğunu göstermektedir.



Şekil 23. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ (güçlü Allee etkisi), $0 < r < 25$, $\rho = 0.9$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları için güçlü Allee etkili (3.1) sisteminin E_2 denge noktası civarındaki çatallanma diyagramı.

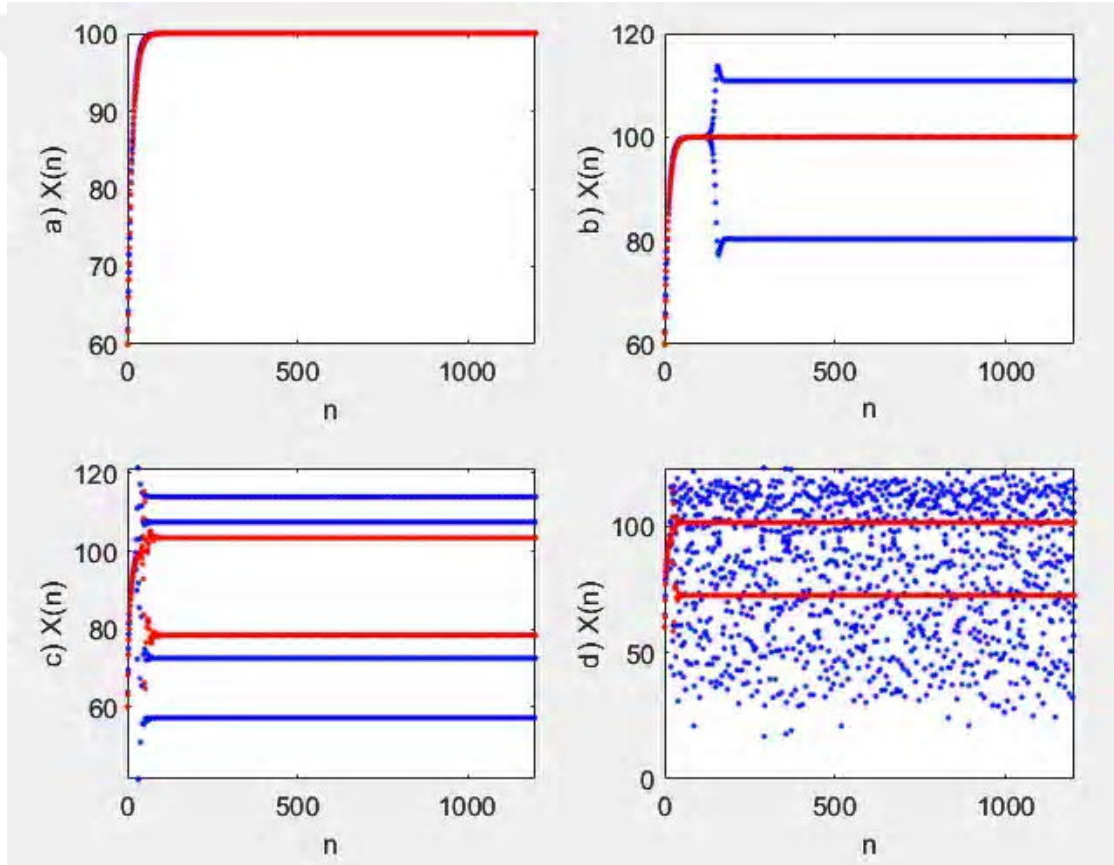
Şekil 23'te, hibrit kontrol uygulanmış sisteme ait çatallanma diyagramı sunulmaktadır. Bu grafikte, kontrol uygulanan sistemin yaklaşık $r \approx 8.21$ değerinden itibaren çatallanma bölgesine geçtiği gözlemlenmektedir. Karşılaştırıldığında, orijinal (kontrolsüz) sistemin çok daha erken, yaklaşık $r \approx 6.78$ değerinde çatallanma gösterdiği bilinmektedir. Bu durum, hibrit kontrol mekanizmasının çatallanma eşiğini ileriye ötelediğini ve sistemin daha geniş bir parametre aralığında kararlılığını sürdürmesini sağladığını ortaya koymaktadır.

Dolayısıyla hem zaman serisi hem de çatallanma analizleri bir arada değerlendirildiğinde, hibrit kontrol yapısının sistemi çatallanmadan önceki denge

bölgesinde tutma kapasitesi vurgulanmış olmakta; bu da kontrol yaklaşımının sistem dinamiği üzerindeki düzenleyici etkisini doğrulamaktadır.

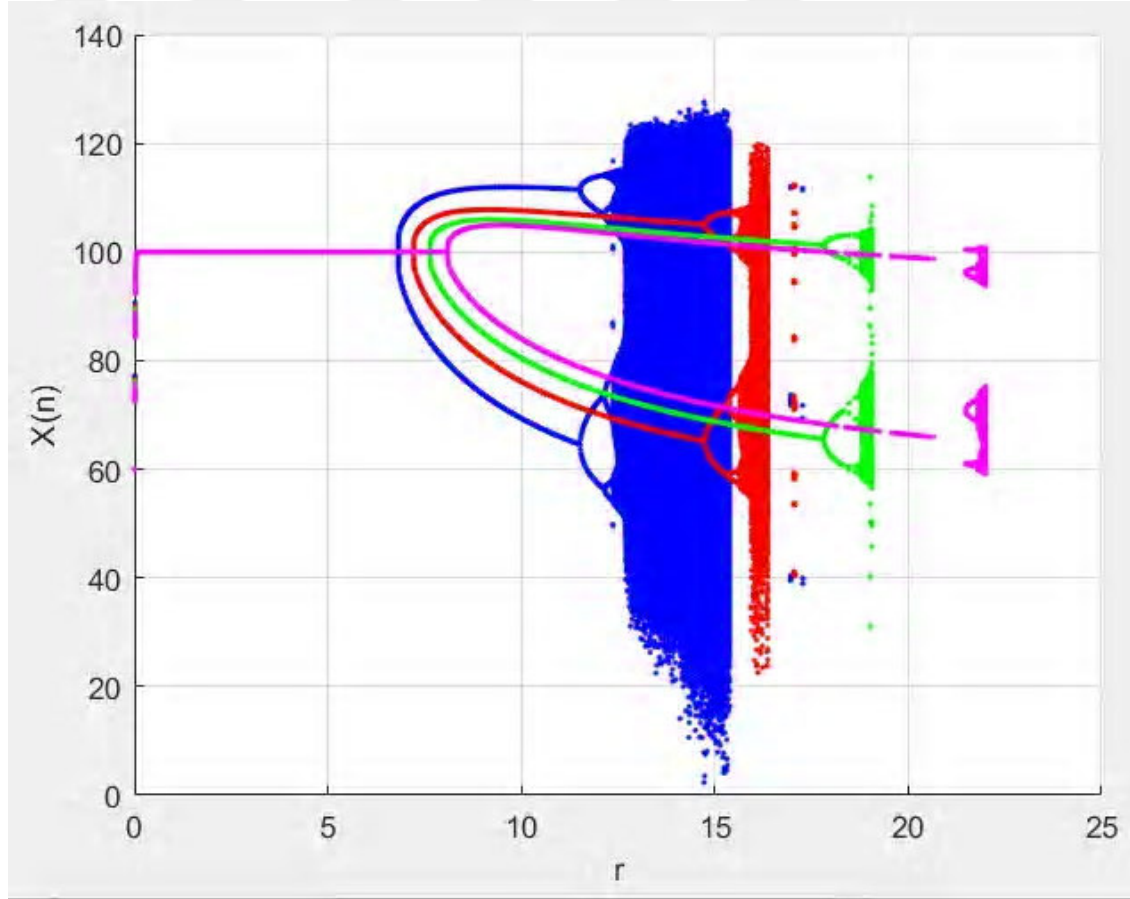
3.3. Hibrit Kontrollü Sistem ile Orijinal Sistem Karşılaştırması

Bu kısımda, Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türevli çift Allee etkili lojistik denklem sistemi ile bu denklem sistemine eklenen Hibrit kontrol parametrelili sistemin kararlılık ve çatallanma bölgesi üzerindeki etkileri analiz edilecektir.



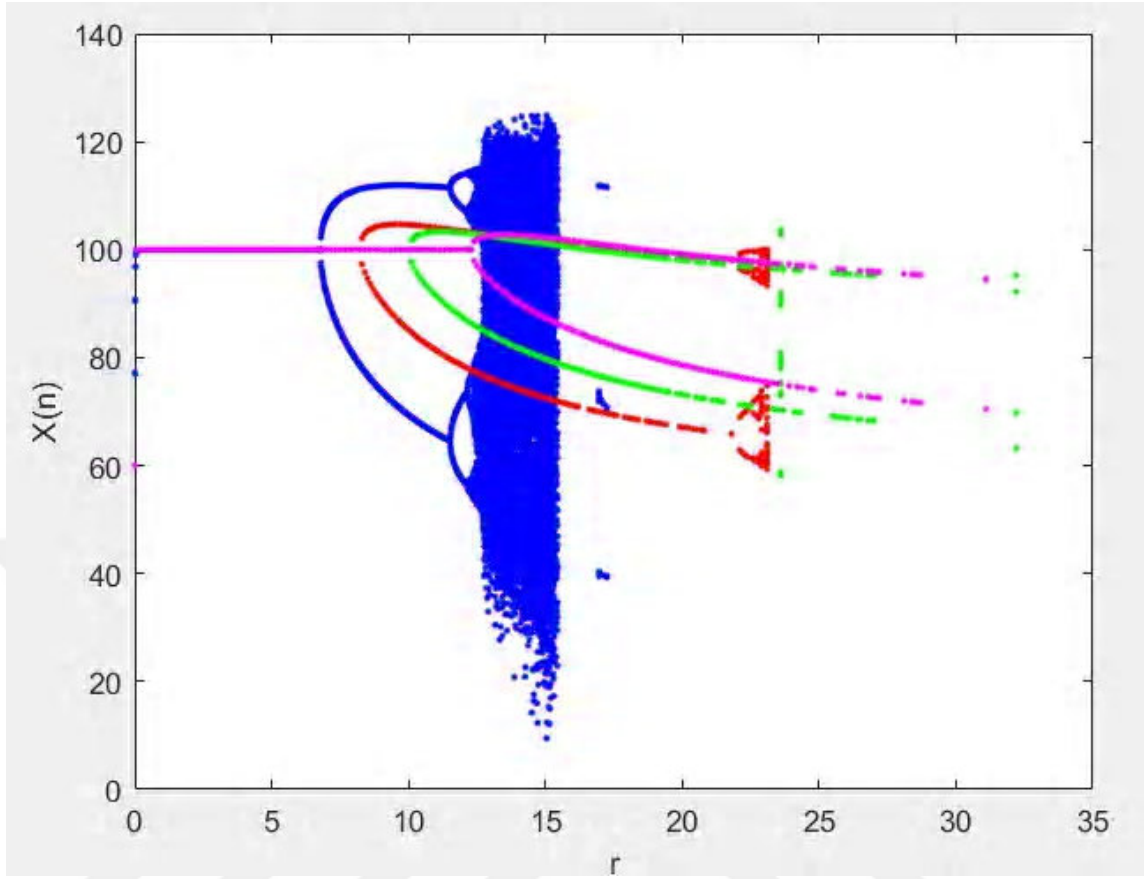
Şekil 24. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $\rho = 0.9$ parametre değerleri ve $X(1) = 60$, $Y(1) = 60$ başlangıç koşulları ile a) $r = 6$, b) $r = 8$, c) $r = 12$, d) $r = 15$ için güçlü çift Allee etkili (mavi eğri), kontrol parametrelili güçlü çift Allee etkili (kırmızı eğri) ayrık zamanlı Caputo Fabrizio lojistik denklem sistemlerinin E_2 denge noktası civarında $X_n - n$ diyagramları.

Şekil 24'te, güçlü çift Allee etkili sistemin hibrit kontrollü (kırmızı) ve orijinal (mavi) versiyonları, farklı r değerleri için $X(n)-n$ diyagramlarıyla karşılaştırılmıştır. $r = 6$ için her iki sistem de kararlı bir şekilde denge noktasına yakınmaktadır. $r = 8$ değerinde orijinal sistemde 2-periyotlu davranış görülürken, hibrit kontrolü sistemi sabit denge noktasında tutmaktadır. $r = 12$ için orijinal sistem 4-periyotlu rejime geçerken, kontrollü sistem 2-periyotlu davranışını sürdürmektedir. $r = 15$ değerinde ise orijinal sistem kaotik rejime girerken, hibrit kontrollü sistem hâlâ 2-periyotlu yapısını korumaktadır.



Şekil 25. $X(1)=60$, $Y(1)=60$ başlangıç koşulları ile $K=100$, $\alpha=0.8$, $h=0.05$, $M=0.88715$, $n=10$, $m=40$ parametre değerleri ve $0 < r < 25$ için güçlü çift Allee etkili sistem mavi ile; kontrol parametrelili sistem $\rho=0.91$ için pembe ile, $\rho=0.94$ için yeşil ile, $\rho=0.97$ için kırmızı ile gösterilmek üzere, (2.3) ve (3.1) sistemlerinin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları.

Şekil 25'te, güçlü çift Allee etkili sistemin orijinal hâli (mavi) ile farklı hibrit kontrol parametrelerine (ρ) sahip sistemlerin $X(n) - r$ düzlemindeki çatallanma diyagramları karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Kontrolsüz sistemde çatallanma yaklaşık $r \approx 6.78$ civarında başlamakta ve artan r ile kaotik rejime geçiş gözlenmektedir. Kontrol parametresi kademeli olarak azaldıkça ($\rho = 0.97, 0.94, 0.91$), sistemin çatallanma eşiği belirgin şekilde ileriye ötelenmiş; daha geniş bir r aralığında kararlı veya düşük periyotlu dinamikler korunmuştur. Özellikle $\rho = 0.91$ değerinde, sistemin yalnızca çatallanmayı geciktirmekle kalmayıp aynı zamanda kaotik yapıya geçişini de önemli ölçüde baskıladığı gözlenmektedir. Bu durum, hibrit kontrol yaklaşımının sistem dinamiğini istikrara kavuşturma açısından etkili bir araç olduğunu ortaya koymaktadır.



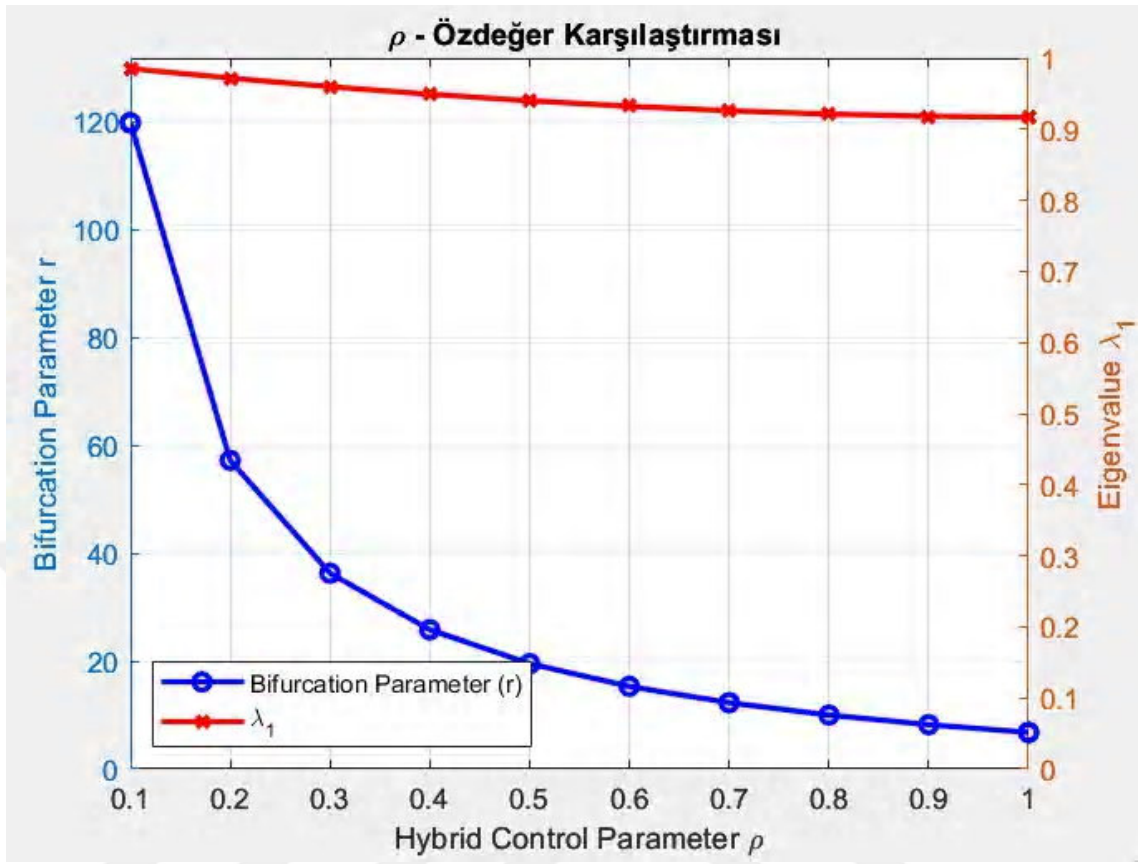
Şekil 26. $X(1)=60$, $Y(1)=60$ başlangıç koşulları ile $K=100$, $\alpha=0.8$, $h=0.05$, $M=0.88715$, $n=10$, $m=40$ parametre değerleri ve $0 < r < 35$ için güçlü çift Allee etkili sistem mavi ile; kontrol parametrelili sistem $\rho=0.7$ için pembe ile, $\rho=0.8$ için yeşil ile, $\rho=0.9$ için kırmızı ile gösterilmek üzere, (2.3) ve (3.1) sistemlerinin E_2 denge noktası civarında çatallanma diyagramları.

Şekil 26'da, orijinal sistem ($\rho=1$) ile farklı hibrit kontrol parametrelerine sahip sistemlerin ($\rho=0.9, 0.8, 0.7$) çatallanma diyagramları sunulmuştur. Kontrol parametresi azaldıkça, yani kontrol etkisi arttıkça, çatallanma noktalarının daha ileri r değerlerine ötelenerek sistemin kararlılığının daha uzun süre korunduğu gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, düşük ρ değerlerinde (örneğin $\rho=0.70$) belirli r değerlerinden sonra grafikte yapısal bozulmalar ve düzensiz sıçramalar meydana gelmektedir. Bu durumun çatallanma parametresinden değil, kontrol etkisinin artmasıyla sistemin nümerik çözümünde ortaya çıkan duyarlılık artışından kaynaklandığı değerlendirilmektedir. Dolayısıyla, hibrit kontrol uygulaması sistemin kaotik rejime

geçişini geciktirse de, aşırı kontrol altında bazı parametre aralıklarında çözümün sayısal stabilitesinde bozulmalar gözlemlenebilmektedir.

Tablo 3. $K = 100$, $\alpha = 0.9$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$ parametreleri için farklı ρ değerlerinde çatallanma elde edilen çatallanma parametre değerleri ve bu değerlerdeki özdeğerler

ρ Değeri	Çatallanma Parametre Değeri (r)	λ_1	λ_2
0.1	119.78	0.9852	-1
0.2	57.20	0.9719	-1
0.3	36.29	0.9598	-1
0.4	25.82	0.9492	-1
0.5	19.52	0.9400	-1
0.6	15.30	0.9323	-1
0.7	12.28	0.9260	-1
0.8	10	0.9213	-1
0.9	8.21	0.9182	-1
1	6.78	0.9166	-1



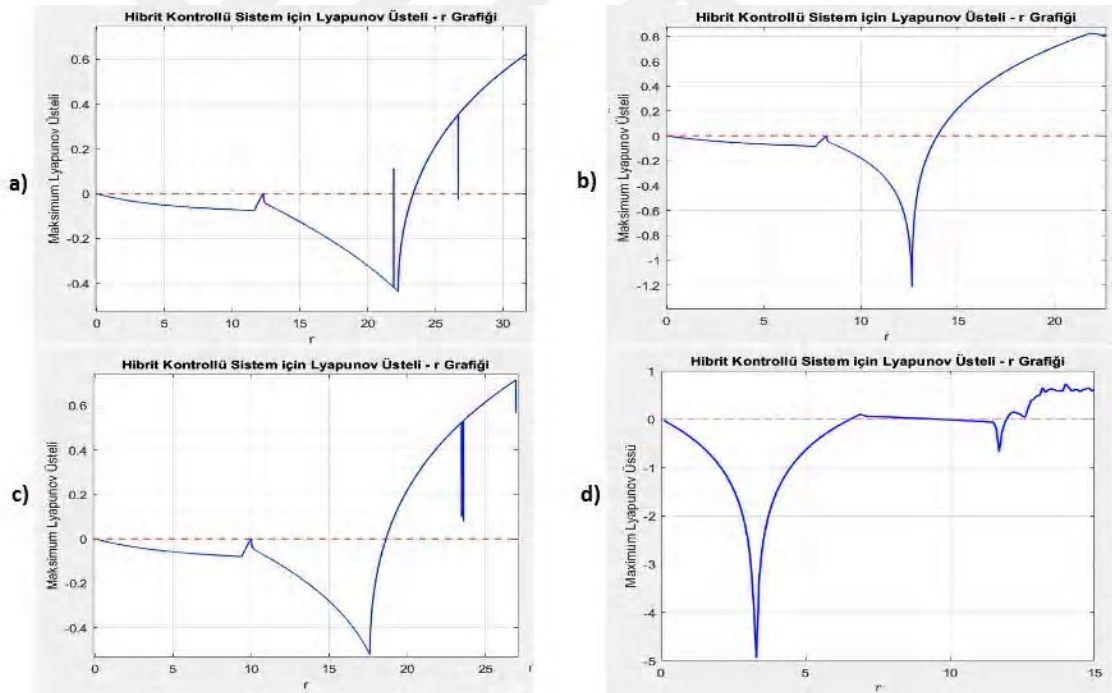
Şekil 27. Hibrit kontrol parametresi ρ değerinin çatallanma parametresi r ve birinci karakteristik değer λ_1 üzerindeki etkisini gösteren grafik

Tablo 3 ve Şekil 27’de hibrit kontrol parametresi ρ ’nun çatallanma parametresi r ve birinci karakteristik özdeğer λ_1 üzerindeki etkisi sayısal olarak analiz edilmiştir. Elde edilen bulgular, ρ azaldıkça çatallanma parametresinin belirgin biçimde arttığını ve sistemin daha yüksek r değerlerinde çatallandığını göstermektedir. Bu durum, hibrit kontrol uygulamasının çatallanma sürecini geciktirici bir etki oluşturduğunu ve sistemin kararlılığını geniş bir parametre aralığında koruduğunu ortaya koymaktadır.

Tabloda verilen λ_1 değerleri incelendiğinde, kontrol gücü arttıkça (yani ρ azaldıkça) sistemin spektral olarak birim özdeğere daha yakın davrandığı ve $\lambda_2 = -1$ çatallanma koşulunun yalnızca çok daha büyük r değerlerinde sağlandığı görülmektedir. Bu, teorik olarak da kontrolün çatallanmayı geciktirme etkisini doğrulamaktadır.

Ancak çok düşük ρ değerlerinde (örneğin $\rho=0.1$ veya 0.2), bazı grafiklerde bozulmaların başladığı gözlemlenmiştir. Bu bozulmalar, çatallanma parametresi r 'nin büyümesinden ziyade, kontrol etkisinin aşırılışmasıyla birlikte sistemin nümerik çözümünde oluşan kararsızlıklardan kaynaklanmaktadır. Başka bir ifadeyle, kontrol gücü arttıkça çatallanma ötelenmekte ancak bu durum aynı zamanda sistemin sayısal hassasiyetini artırarak bazı bölgelerde bozulmalara neden olabilmektedir.

Sonuç olarak, bu analiz hibrit kontrolün yalnızca çatallanma eşiğini ileriye ötelediğini, aynı zamanda sistemin dinamik yapısını denge civarında tutmakta etkili olduğunu; ancak düşük ρ değerlerinde dikkatli nümerik çözümleme gerektiğini göstermektedir.



Şekil 28. $X(1)=60$, $Y(1)=60$ başlangıç koşulları ve $K=100$, $\alpha=0.8$, $h=0.05$, $M=0.88715$, $n=10$, $m=40$ parametre değerleri ile a) $\rho=0.7$, b) $\rho=0.8$, c) $\rho=0.9$, d) $\rho=1$ için Hibrit kontrol parametrelili güçlü çift Allee etkili (3.1) sisteminin E_2 denge noktası civarında Maximum Lyapunov Üsteli grafiği.

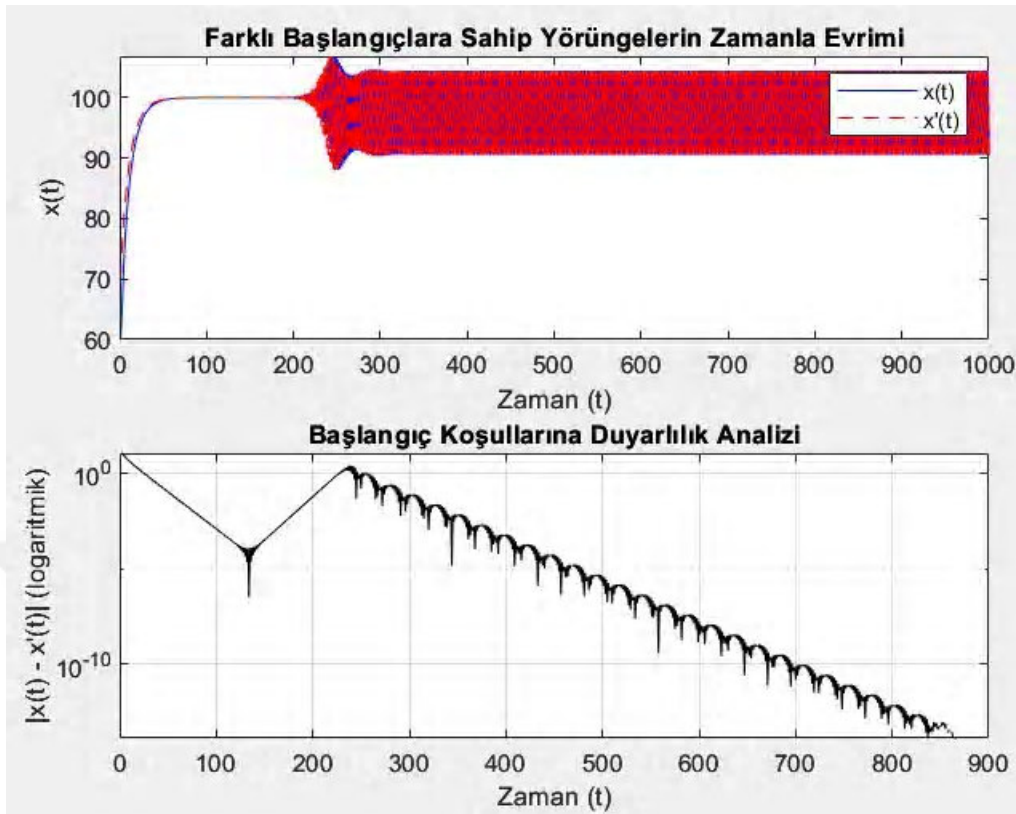
Şekil 28’de, hibrit kontrol parametresi ρ ’nun farklı değerleri ($\rho = 0.7, 0.8, 0.9$) için güçlü çift Allee etkili sistemin maksimum Lyapunov üssüne göre çatallanma karakteristiği analiz edilmiştir. Tüm grafiklerde $X(1) = Y(1) = 60$ başlangıç koşulları altında elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Alt grafik (d)’ye karşılık gelen $\rho = 1$ değeri orijinal sistemi temsil etmekte olup, sistemin yaklaşık $r = 11$ değerinden sonra pozitif Lyapunov üssü almaya başladığı ve bu noktadan sonra kaotik rejime geçtiği gözlemlenmektedir. Bu değer, önceki çatallanma analizleriyle de uyumludur (Şekil 7).

Kontrol parametresi ρ azaldıkça, yani hibrit kontrol etkisi arttıkça ($c \rightarrow b \rightarrow a$), sistemin pozitif Lyapunov üssüne geçtiği r değeri yukarı doğru ötelenmektedir. Özellikle $\rho = 0.7$ için Lyapunov üssü çok daha geniş bir r aralığında negatif kalmakta ve sistemin daha uzun süre kaotik olmayan rejimde kaldığı anlaşılmaktadır. Bu, hibrit kontrol mekanizmasının çatallanma ve kaotik geçişi etkin biçimde geciktirdiğini göstermektedir.

Ayrıca, bazı grafiklerde pozitif Lyapunov bölgesine geçerken ani sıçramalar ya da düzensizlikler gözlemlenmektedir. Bu geçişler, sistemin kararlılık sınırına yaklaşırken artan duyarlılığına ve sayısal çözümlemelerdeki hassaslığa işaret etmektedir. Bununla birlikte, kontrol uygulanan sistemlerde bu geçişlerin daha kontrollü ve gecikmeli olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak, Lyapunov üssü analizleri hibrit kontrolün yalnızca çatallanma noktasını değil, aynı zamanda sistemin kaotik rejime geçiş eşiğini de ileriye ötelediğini; kontrol parametresi düştükçe sistemin uzun süreli kararlılığının arttığını göstermektedir.



Şekil 29. $K = 100$, $\alpha = 0.8$, $h = 0.05$, $M = 0.88715$, $n = 10$, $m = 40$, $r = 9$, $\rho = 0.9$ parametre değerleri ile $X(1) = 60 - Y(1) = 60$ ve $X(1) = 70 - Y(1) = 70$ başlangıç değerleri için başlangıç koşuluna duyarlılık diyagramı.

Şekil 29’da, hibrit kontrollü güçlü çift Allee etkili sistemin $r = 9$ için başlangıç koşullarına olan duyarlılığı analiz edilmiştir. Aynı parametreler altında, yalnızca başlangıç değerleri farklı olan iki yörüngenin zamana bağlı evrimi (üstte) ve bu yörüngeler arasındaki farkın logaritmik ölçekte değişimi (altta) sunulmuştur.

Gözlemler, $X(1) = Y(1) = 60$ ve $X(1) = Y(1) = 70$ başlangıç koşullarına sahip iki yörüngenin, ilk farklılaşmanın ardından kısa sürede birbirine yakınsadığını ve uzun vadede aynı rejime oturduğunu göstermektedir. Logaritmik ölçekte azalan fark, sistemin bu parametre altında başlangıç koşullarına duyarlı olmadığını ve kararlı davrandığını ortaya koymaktadır.

Bu bulgu, Lyapunov üssü analizleriyle de örtüşmektedir. $r = 9$ için hesaplanan maksimum Lyapunov üssü negatiftir ve sistemin kaotik davranış göstermediğini

doğrulamaktadır. Ancak daha büyük r değerlerinde sistemin çatallanma ve kaotik rejime geçtiği daha önceki analizlerle gösterilmiştir. Dolayısıyla bu grafik, sistemin $r = 9$ için kararlı ve başlangıç koşullarına duyarsız olduğunu; fakat dinamik yapının r arttıkça değiştiğini açıkça ortaya koymaktadır.

3.4. Sonuç

Bu bölümde, Caputo–Fabrizio kesirli türevli ve çift Allee etkili ayırık zamanlı lojistik modele hibrit kontrol mekanizması entegre edilerek sistemin kararlılık ve çatallanma yapısına etkisi detaylı biçimde incelenmiştir. Orijinal sistemle yapılan karşılaştırmalar, hibrit kontrolün sistemi daha geniş bir parametre aralığında denge bölgesinde tutabildiğini ve çatallanma ile kaotik geçişleri önemli ölçüde geciktirdiğini göstermektedir. Ancak, bu kontrol mekanizması çatallanma ve kaotik davranışları (2.3) sisteminde tamamen ortadan kaldırmamakta, yalnızca bu geçişlerin daha geç ortaya çıkmasını sağlamaktadır.

Zaman serisi ve çatallanma analizleri, orijinal sistemde çatallanma eşiği $r \approx 6.78$ civarındayken, hibrit kontrol uygulanması durumunda sistemin aynı parametre altında hâlâ kararlı kaldığını ortaya koymuştur. Ayrıca farklı r değerleri için yapılan karşılaştırmalı analizlerde, kontrolsüz sistem periyotlu veya kaotik rejime geçerken, hibrit kontrol altında sistemin daha sade periyotlu davranışlar sergilediği ve kararlılığını daha uzun süre sürdürdüğü gözlemlenmiştir.

Farklı kontrol parametrelerine (ρ) karşılık gelen çatallanma diyagramlarında, ρ azaldıkça sistemin çatallanma noktalarının ileriye ötelenmesiyle kararlılığın uzadığı; ancak çok düşük kontrol değerlerinde sayısal çözümün duyarlılığının arttığı ve bazı bozulmaların meydana geldiği gözlenmiştir. Bu, kontrolün düşük ρ değerlerinde nümerik çözümlemenin dikkatle ele alınması gerektiğini göstermektedir.

Lyapunov üssü analizleri, kontrolsüz sistemin belirli bir r eşiğinden sonra pozitif Lyapunov değerleriyle kaotik rejime geçtiğini; buna karşın hibrit kontrol altında bu geçişin ileriye ötelenerek daha uzun süre negatif Lyapunov üssü ile kararlı rejimlerde kalındığını nicel olarak göstermiştir. Aynı şekilde, başlangıç koşullarına duyarlılık analizi de, kontrol etkisinin sistemin yalnızca dengeye yönelmesini değil, başlangıç değerlerine olan hassasiyetini de azalttığını ortaya koymuştur.

Sonuç olarak, bu bölümde elde edilen bulgular, hibrit kontrol mekanizmasının güçlü Allee etkili kesirli mertebeden lojistik sistemler üzerinde kararlılığı destekleyici, çatallanmayı geciktirici ve kaotik rejime geçişi baskılayıcı etkiler sunduğunu ortaya koymaktadır.



4.BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde incelenen sistem, güçlü çift Allee etkili sürekli lojistik modele Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türev uygulanarak elde edilmiştir. Öncelikle, klasik çift Allee etkili lojistik diferansiyel denklem üzerine Caputo–Fabrizio kesirli türev operatörü uygulanmış; ardından bu kesirli model, Adams–Bashforth yöntemi temel alınarak ayrık zamana aktarılmıştır. Elde edilen ayrık kesirli modelde, hafıza etkisini de içeren ifadelerin çözümünü kolaylaştırmak amacıyla uygun değişken değiştirme işlemleri yapılmış ve böylece analiz edilebilir iki boyutlu bir fark denklem sistemi elde edilmiştir.

Bu yapı temel alınarak, Caputo–Fabrizio kesirli mertebeden türevli, çift Allee etkili ayrık zamanlı lojistik modelin dinamik davranışları ve çatallanma yapısı ayrıntılı biçimde incelenmiş, ayrıca modele entegre edilen hibrit kontrol mekanizmasının sistem üzerindeki etkileri değerlendirilmiştir. Çalışma hem teorik dayanaklara hem de kapsamlı nümerik simülasyonlara dayandırılmış, elde edilen fark denklem sistemi üzerinde kararlılık, periyodik yapı ve kaotik rejim geçişleri çok yönlü olarak analiz edilmiştir.

İkinci bölümde gerçekleştirilen analizlerde, çatallanma parametresi r , Allee parametreleri (m, n) , taşıma kapasitesi K , kesirli türev mertebesi α ve başlangıç koşulları gibi sistem parametrelerinin dinamik davranış üzerindeki belirleyici rolleri ortaya konmuştur. Özellikle güçlü Allee etkisinin sistemin dengeye tutunmasını kolaylaştırdığı, ancak bu etkinin belirli eşik değerlerin aşılmasıyla birlikte çatallanma ve kaotik geçişe engel olamadığı gösterilmiştir. Ayrıca Allee eşiğinin altında kalan başlangıç değerlerinin, güçlü Allee etkisi için sistemi yok olmaya sürüklediği, buna karşın zayıf Allee etkisi altında popülasyonun varlığını sürdürebildiği gösterilmiştir.

Kesirli türev yaklaşımı sayesinde belleğe dayalı dinamiklerin sisteme entegre edilmesiyle daha gerçekçi ve biyolojik olarak tutarlı modeller elde edilmiş, özellikle α parametresi üzerinden hafıza etkisinin çatallanma davranışını doğrudan şekillendirdiği gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, hibrit kontrol yaklaşımının bu sistem üzerindeki etkisi çok yönlü olarak değerlendirilmiştir. Zaman serisi, çatallanma diyagramı, Lyapunov üssü ve başlangıç koşullarına duyarlılık analizleri birlikte ele alınarak, kontrol uygulanmış sistemin hem lokal hem global düzeyde daha uzun süre kararlı kaldığı ve çatallanma eşiğinin ileriye ötelenerek kaotik geçişin geciktirildiği gösterilmiştir. Farklı hibrit kontrol parametreleri (ρ) altında yapılan simülasyonlar, kontrol gücü arttıkça sistemin daha istikrarlı bir yapıda kaldığını, ancak çok düşük ρ değerlerinde sayısal çözüm hassasiyetinin artabileceğini ortaya koymuştur. Bu bulgu, kontrolün etkinliğini vurgulamakla birlikte, nümerik analizlerin dikkatle yürütülmesi gerektiğine de işaret etmektedir.

Çalışmanın genelinde elde edilen bulgular, çift Allee etkili kesirli mertebeden türevli sistemlerde hem biyolojik gerçekliğe yakınlık hem de dinamik çeşitlilik açısından zengin bir davranış repertuarı ortaya koymaktadır. Hibrit kontrol yöntemi ise bu çeşitliliği yönetilebilir hâle getiren güçlü bir araç olarak ön plana çıkmaktadır. Kontrolsüz durumda sistemin periyot-2, periyot-4 ve kaotik yapıya geçişi, hibrit kontrolle daha uzun süreli kararlılıkla yer değiştirmekte; bu da modelin uygulamalı sistemler için daha öngörülebilir ve denetlenebilir hâle gelmesini sağlamaktadır.

Bu tez çalışması hem kesirli türevli hem de çift Allee etkili modelleri bir araya getirerek literatürde nadiren ele alınan kapsamlı bir analiz sunmaktadır. Ayrıca, hibrit kontrol yönteminin bu tür karmaşık sistemlerde ne ölçüde etkili olabileceğini hem sayısal hem de yapısal açıdan ortaya koymaktadır. Elde edilen bulgular yalnızca teorik katkılarla sınırlı kalmayıp; ekolojik modelleme, hastalık yayılımı (epidemioloji) ve nüfus dinamiklerinin kontrolü gibi birçok uygulama alanı için kullanılabilir yöntemsel bir temel sunmaktadır.

Bu tezde elde edilen bulgular, sistemin dinamik yapısının hibrit kontrol yöntemiyle etkin bir şekilde şekillendirilebileceğini ortaya koymakla birlikte, gelecekte yapılabilecek daha ileri çalışmalara da zemin hazırlamaktadır. Öncelikle, bu çalışmada

uygulanan hibrit kontrol yöntemi, farklı kontrol stratejileriyle (örneğin geri beslemeli kontrol, zaman gecikmeli kontrol veya OGY (Ott–Grebogi–Yorke) kontrolü gibi) karşılaştırmalı olarak analiz edilebilir. Bu sayede, farklı kontrol yapılarının çatallanma ve kaotik rejim üzerindeki etkileri daha kapsamlı şekilde değerlendirilmiş olur. Ayrıca, modeldeki parametrelerin belirsizlik içermesi veya çevresel koşullara bağlı olarak değişkenlik göstermesi durumunda, sistemin kararlılığını sürdürebilmesi için dayanıklı (robust) kontrol stratejilerinin geliştirilmesi önemli bir katkı sağlayabilir. Bunun yanında, teorik olarak elde edilen sonuçların ampirik doğrulaması yapılması da önerilmektedir. Bu doğrultuda, modelin biyolojik sistemlerde gözlenen gerçek verilerle karşılaştırılması ve uygulamalı senaryolar üzerinden geçerliliğinin test edilmesi, çalışmanın uygulama potansiyelini artıracaktır. Böylece hem modelin genellenebilirliği sınanmış olacak hem de kesirli türevli, çift Allee etkili ve kontrol mekanizmaları içeren sistemlerin gerçek dünyadaki dinamikleriyle ne ölçüde örtüştüğü değerlendirilmiş olacaktır.

KAYNAKÇA

1. Verhulst, P. F., 1838. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. **Correspondance Mathématique et Physique**, **10**: 113–126.
2. Hughes-Hallett, D., Lock, P. F., Quinney, D., Gleason, A. M., Lomen, D. O., Rhea, K. R., McCallum, W. G., Lovelock, D., Tecosky-Feldman, J., Flath, D. E., Osgood, B. G., Tucker, T. W., 2009. Calculus. John Wiley & Sons, New York, 1130 s/pp.
3. Ünal, H., 2011. Lojistik Fark Denkleminin Çözümlerinin Karakterleri. Erciyes Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, Kayseri, 82 s.
4. Carlson, T., 1913. Über geschwindigkeit und grösse der hefevermehrung in würze. **Biochemische Zeitschrift**, **57(1)**: 313–316.
5. Pearl, R., 1927. The growth of populations. **The Quarterly Review of Biology**, **2(4)**: 532–548.
6. Pearl, R., 1930. Introduction to Medical Biometry and Statistics. W. B. Saunders Company, Philadelphia, 459 s/pp.
7. Morgan, B. J. T., 1976. Stochastic models of groupings changes. **Advances in Applied Probability**, **8(1)**: 30–43.
8. Krebs, C. J., 1985. The Experimental Analysis of Distribution and Abundance. Harper and Row, New York, 594 s/pp.
9. Fisher, T. C., Fry, R. H., 1971. Technical forecasting. **Societal Changes**, **3(1)**: 75–83.
10. Özalp, N., 2006. Fen, Mühendislik ve Sosyal Bilimlerde Matematiksel Modelleme. Gazi Kitabevi, Ankara, 263 s/pp.
11. Allee, W. C., 1931. Animal Aggregations: A Study in General Sociology. University of Chicago Press, Chicago, 431 s/pp.
12. Courchamp, F., Clutton-Brock, T., Grenfell, B., 1999. Inverse density dependence and the Allee effect. **Trends in Ecology & Evolution**, **14(10)**: 405–410.
13. Wang, M. H., Kot, M., Neubert, M. G., 2002. Integrodifference equations, Allee effects, and invasions. **Journal of Mathematical Biology**, **44(2)**: 150–168.

14. Boukal, D. S., Berec, L., 2002. Single-species models of the Allee effect: extinction boundaries, sex ratios and mate encounters. **Journal of Theoretical Biology**, **218(3)**: 375–394.
15. Li, X., Pang, D., Wallhead, P., Bellerby, R. G. J., 2023. Dynamics of an aquatic diffusive predator–prey model with double Allee effect and pH-dependent capture rate. **Chaos, Solitons and Fractals**, **169**: 113234.
16. Conway, E., Smoller, J., 1986. Global analysis of a system of predator–prey equations. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, **46(4)**: 630–642.
17. Bazykin, A. D., 1998. Nonlinear Dynamics of Interacting Populations. World Scientific, Singapore, 350 s/pp.
18. Yousef, A., Bozkurt Yousef, F., 2019. Bifurcation and stability analysis of a system of fractional-order differential equations for a plant–herbivore model with Allee effect. **Mathematics**, **7(5)**: 468.
19. Ma, Z., 2019. Spatiotemporal dynamics of a diffusive Leslie–Gower prey–predator model with strong Allee effect. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, **50**: 651–674.
20. Berec, L., Angulo, E., Courchamp, F., 2007. Multiple Allee effects and population management. **Trends in Ecology & Evolution**, **22(4)**: 185–191.
21. Feng, P., Kang, Y., 2015. Dynamics of a modified Leslie–Gower model with double Allee effects. **Nonlinear Dynamics**, **80(1–2)**: 1051–1062.
22. González-Olivares, E., González-Yañez, B., Lorca, J. M., Rojas-Palma, A., Flores, J. D., 2011. Consequences of double Allee effect on the number of limit cycles in a predator–prey model. **Computers and Mathematics with Applications**, **62**: 3449–3463.
23. Jiao, J., Chen, C., 2021. Bogdanov–Takens bifurcation analysis of a delayed predator–prey system with double Allee effect. **Nonlinear Dynamics**, **104(2)**: 1697–1707.
24. Huang, J., Gong, Y., Chen, J., 2013. Multiple bifurcations in a predator–prey system of Holling and Leslie type with constant-yield prey harvesting. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, **23(10)**: 50164.

25. Luo, X. S., Chen, G., Wang, B. H., Fang, J. Q., 2003. Hybrid control of period-doubling bifurcation and chaos in discrete nonlinear dynamical systems. **Chaos, Solitons and Fractals**, **18(4)**: 775–783.
26. Shang, Z., Qiao, Y., 2023. Multiple bifurcations in a predator–prey system of modified Holling and Leslie type with double Allee effect and nonlinear harvesting. **Mathematics and Computers in Simulation**, **205**: 745–764.
27. Wang, F., Yang, R., Zhang, X., 2024. Turing patterns in a predator–prey model with double Allee effect. **Mathematics and Computers in Simulation**, **220**: 170–191.
28. Mandal, G., Guin, L. N., Chakravarty, S., Han, R., 2025. Dynamic complexities in a predator–prey model with prey refuge influenced by double Allee effects. **Mathematics and Computers in Simulation**, **227**: 527–552.
29. Shang, Z., Qiao, Y., 2023. Multiple bifurcations in a predator–prey system of modified Holling and Leslie type with double Allee effect and nonlinear harvesting. **Mathematics and Computers in Simulation**, **205**: 745–764.
30. Flores, J. D., Mena-Lorca, J., González-Yañez, B., González-Olivares, E., 2007. Consequences of depensation in a Smith's bioeconomic model for open-access fishery, s. 219–232. *In*: Proceedings of the 2006 International Symposium on Mathematical and Computational Biology (Eds: R. Mondaini). E-Papers Serviços Editoriais Ltda., Río de Janeiro.
31. Xia, S., Li, X., 2022. Complicate dynamics of a discrete predator–prey model with double Allee effect. **Mathematics and Mathematical Computation (MMC)**, **2(4)**: 282–295.
32. Rahmi, E., Darti, I., Suryanto, A., Trisilowati, T., 2021. A modified Leslie–Gower model incorporating Beddington–DeAngelis functional response, double Allee effect and memory effect. **Fractal and Fractional**, **5**: 84.
33. Rahmi, E., Darti, I., Suryanto, A., Trisilowati, T., 2023. A fractional-order eco-epidemiological Leslie–Gower model with double Allee effect and disease in predator. **Journal of Applied Mathematics**, **Article ID 1234567**.

34. Li, C., Chen, Y., Podlubny, I., 2009. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. **Automatica**, **45(8)**: 1965–1969.
35. Caputo, M., 1969. *Elasticità e Dissipazione*. Zani-Chelli, Bologna, 270 s/pp.
36. Caputo, M., Fabrizio, M., 2015. A new definition of fractional derivative without singular kernel. **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, **2**: 73–85.
37. Butt, S. I., Nadeem, M., Farid, G., 2020. On Caputo fractional derivatives via exponential (s,m)-convex functions. **Engineering Applications of Science Letters**, **3**: 32–39.
38. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 523 s/pp.
39. Li, Q., Saleem, M. S., Yan, P., Zahoor, M. S., Imran, M., 2021. On strongly convex functions via Caputo–Fabrizio-type fractional integral and some applications. **Journal of Mathematics**, **2021**: 6625597.
40. Morales-Delgado, V. F., Gómez-Aguilar, J. F., Yépez-Martínez, H., Baleanu, D., Escobar-Jimenez, R. F., Olivares-Peregrino, V. H., 2016. Laplace homotopy analysis method for solving linear partial differential equations using a fractional derivative with and without kernel singular. **Advances in Difference Equations**, **2016**: 164.
41. Ahmad, B., Alsaedi, A., 2017. Existence and stability analysis for fractional order logistic equations with Allee effect. **Advances in Difference Equations**, **2017(1)**: 1–13.
42. Li, Q., Yang, X., Chen, L., 2021. Dynamics of a fractional-order logistic model with strong and weak Allee effects. **Chaos, Solitons & Fractals**, **146**: 110923.
43. Panigoro, H. S., Rayungsari, M., Suryanto, A., 2023. Bifurcation and chaos in a discrete-time fractional-order logistic model with Allee effect and proportional harvesting. **International Journal of Dynamics and Control**, **11(3)**: 1544–1558.

44. Karakaya, H., 2022. Ayırık Zamanlı Dinamik Sistemlerde Caputo-Fabrizio Kesirsel Mertebeden Türev ve Uygulamaları. Erciyes Üniversitesi, Doktora Tezi, Kayseri, 90 s.
45. Abbasbandy, S., 2007. Homotopy analysis method for heat radiation equations. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, **34**: 380–387.
46. Abbasbandy, S., 2006. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. **Physics Letters A**, **360**: 109–113.
47. Liao, S., 2004. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. **Applied Mathematics and Computation**, **147**: 499–513.
48. He, J., 2009. An elementary introduction to the homotopy perturbation method. **Computers and Mathematics with Applications**, **57**: 410–412.
49. He, J., 2003. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. **Applied Mathematics and Computation**, **135**: 73–79.
50. Odibat, Z., Momani, S., 2006. Application of variation iteration method to nonlinear differential equations of fractional order. **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, **7**: 15–27.
51. Kazem, S., 2013. Exact solution of some linear fractional differential equations by Laplace transform. **International Journal of Nonlinear Science**, **1**: 3–11.
52. Akgül, K. E., Akgül, A., Baleanu, D., 2020. Laplace transform method for economics models with constant proportional Caputo derivative. **Fractal and Fractional**, **4**: 30.
53. Atangana, A., Alqahtani, R., 2020. Numerical approximation of the space-time Caputo–Fabrizio fractional derivative and application to groundwater pollution equation. **Advances in Difference Equations**, DOI: 10.1186/s13662-016-0871-x.
54. Zhang, T., Li, Y., 2022. Exponential Euler scheme of multi-delay Caputo–Fabrizio fractional-order differential equations. **Applied Mathematics Letters**, **124**: 107709.

55. Çelik, A., 2018. Schrödinger denkleminin sonlu fark yöntemi çözümünde Chebyshev noktaları kullanımı. **Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi**, **1**: 53–62.
56. Anastassi, Z. A., Simos, T. E., 2005. An optimized Runge–Kutta method for solution of orbital problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, **175**: 1–9.
57. Parsoni, M., Ketcheson, D. I., 2013. Optimized explicit Runge–Kutta schemes for the spectral difference method applied to wave propagation problems. **SIAM Journal on Scientific Computing**, **35**: A957–A986.
58. Hochbruck, M., Ostermann, A., 2005. Exponential Runge–Kutta methods for parabolic problems. **Applied Numerical Mathematics**, **53**: 323–339.
59. Noupoue, Y. Y., Tandogan, Y., Awadalla, M., 2019. On numerical techniques for solving the fractional logistic differential equation. **Advances in Difference Equations**, **2019**: 108.
60. Karakaya, H., Kartal, Ş., 2024. Qualitative behavior of discrete-time Caputo–Fabrizio logistic model with Allee effect. **International Journal of Biomathematics**, **17(4)**: 2350039, 18 s/pp.
61. Karakaya, H., Kartal, Ş., Öztürk, İ., 2023. Complex dynamics of a discretized Caputo–Fabrizio fractional logistic model with additive Allee effect. (Web sayfası: <https://www.researchgate.net/publication/XYZ>), (Erişim tarihi: Mayıs 2025).
62. Karakaya, H., Öztürk, İ., Kartal, Ş., Gürcan, F., 2021. Dynamical analysis of discretized logistic model with Caputo–Fabrizio fractional derivative. **Computational Ecology and Software**, **11(1)**: 21–34.
63. Atangana, A., Owolabi, K. M., 2017. New numerical approach for fractional differential equations. (Web sayfası: <https://arxiv.org/abs/1707.08177>), (Erişim tarihi: Ocak 2025).
64. Chen, G., Dong, X., 1998. From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications. World Scientific, Singapore, 372 s/pp.

65. Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J. A., 1990. Controlling chaos. **Physical Review Letters**, **64**(11): 1196–1199.
66. Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y. C., Mancini, H., Maza, D., 2000. The control of chaos: theory and applications. **Physics Reports**, **329**(3): 103–197.
67. Li, C., Chen, G., 2004. Chaos control of fractional order systems via hybrid feedback techniques. **Chaos, Solitons & Fractals**, **22**(3): 549–554.
68. Zhu, H., Lü, J., Chen, G., 2008. Hybrid control and synchronization of chaotic systems. **Applied Mathematics and Computation**, **200**(1): 327–336.
69. Zhang, Y., Li, Q., Luo, A., 2012. Hybrid control of fractional-order chaotic systems using switching strategies. **Nonlinear Dynamics**, **67**(4): 2845–2855.
70. Ali, I., Saeed, U., Din, Q., 2020. Bifurcation analysis and chaos control in discrete-time system of three competing species. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, **2020**: 8871205.
71. Wen, G., Chen, S., Jin, Q., 2008. A new criterion of period-doubling bifurcation in maps and its application to an inertial impact shaker. **Journal of Sound and Vibration**, **311**(1–2): 212–223.
72. Wen, G., 2005. Criterion to identify Hopf bifurcations in maps of arbitrary dimension. **Physical Review E**, **72**(2): 026201.
73. Yao, S., 2012. New bifurcation critical criterion of flip–Neimark–Sacker bifurcations for two-parameterized family of n-dimensional discrete systems. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, **2012**: 312594.
74. Atangana, A., Baleanu, D., 2016. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. **Thermal Science**, **20**(2): 763–769.
75. Abdeljawad, T., Baleanu, D., 2016. Discrete fractional derivatives with nonsingular kernels and their applications. **Advances in Difference Equations**, **2016**(1): 1–17.

76. Elaydi, S., 2005. An Introduction to Difference Equations (3rd ed.). Springer, New York, 539 s/pp.
77. Kelley, W. G., Peterson, A. C., 2010. Difference Equations: An Introduction with Applications (2nd ed.). Academic Press, Amsterdam, 432 s/pp.
78. Kuznetsov, Y. A., 2004. Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, New York, 631 s/pp.
79. Hale, J. K., Koçak, H., 1991. Dynamics and Bifurcations. Springer, New York, 577 s/pp.
80. Guckenheimer, J., Holmes, P., 1983. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York, 459 s/pp.
81. Wiggins, S., 2003. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer, New York, 844 s/pp.
82. Allen, L.J.S., 2007. An Introduction to Mathematical Biology, Pearson Education, 450pp.
83. Balcı, E., 2022. Kesirsel Mertebeden Bazı Tümör-Bağıışıklık Matematiksel Modelleri ve Kararlılık Analizleri. Erciyes Üniversitesi, Doktora Tezi, Kayseri, 113 s.
84. Bastos, N. R. O., 2018. calculus of variations involving caputo-fabrizio fractional differentiation. **Statistics, Optimization and Information Computing**, **6**: s.12–21.
85. Allen, L. J. S., 2007. An Introduction to Mathematical Biology. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 378 s/pp.

ÖZGEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı: Engin MORKOYUNLU

Uyruğu: Türkiye (T.C)

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü	2015
Lisans	Erciyes Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2011
Lise	75.Yıl Cumhuriyet Lisesi	2007

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2012-Halen	MEB’de Matematik Öğretmeni	12 yıl

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR