

**KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONUNA SAHİP NEARLY
KOSİMPLİKTİK MANİFOLDLARA AİT BAZI EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma SATTUF

Matematik Anabilim Dalı

HAZİRAN 2025

**KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONUNA SAHİP NEARLY
KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARA AİT BAZI EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Fatma SATTUF
230801029**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gülhan AYAR

HAZİRAN 2025

TEZ ONAYI

Fatma SATTUF tarafından hazırlanan ‘‘Schouten-Van Kampen Konneksiyonuna sahip Nearly Kosimplektik Manifoldlara Ait Bazı Eğrilik Özellikleri’’ adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:

Doç. Dr. Gülhan AYAR

Jüri Üyeleri

İmza:

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Prof. Dr. Ahmet İPEK

Doç. Dr. Gülhan AYAR

Tez Savunma Tarihi: 20/06/2025

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Murat MAYDA
Enstitü Müdürü



BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Fatma SATTUF







Aileme ve Değerli Hocama,



ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi sunduğum bu çalışma, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda bu üniversitenin tez yazım kurallarına göre hazırlanmıştır.

Bu yüksek lisans tezinin hazırlanmasında değerli bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, her aşamada destek olan danışmanım Doç. Dr. Gülhan AYAR'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Onun rehberliği ve sürekli teşviki olmadan bu çalışmayı tamamlamak mümkün olmazdı. Ayrıca, bu süreçte yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma verdikleri destek ve sabır için minnettarım.

Haziran 2025

Fatma SATTUF
(Matematik Öğretmeni)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SEMBOLLER	xiii
ÖZET.....	xv
ABSTRACT.....	xvii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Riemann Manifoldlar	5
2.2 Hemen Hemen Değme (Kontak) Manifoldlar.....	10
3. NEARLY KOSİMPLEKTİK MANİFOLD	13
4. BULGULAR	17
4.1 Schouten-Van Kampen Konneksiyonuna Sahip Nearly Kosimplektik Manifoldlar.....	17
4.2 Schouten-Van Kampen Konneksiyonuna Sahip Nearly Kosimplektik Manifoldlarda Konharmonik Eğrilik Tensörü.....	27
4.3 Schouten-Van Kampen Konneksiyonuna Göre Nearly Kosimplektik Manifoldların Konharmonik Flat Olması.....	31
4.4 Schouten-Van Kampen Konneksiyonuna Göre Nearly Kosimplektik Manifoldların Konsirkular Eğrilik Tensörü	33
4.5 Schouten-Van Kampen Konneksiyonuna Göre Nearly Kosimplektik Manifoldların Konsirkular Flat Olması.....	35
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	43
ÖZ GEÇMİŞ	45



SEMBOLLER

\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
M	: Manifold
$C^\infty(M, \mathbb{R})$: M 'den \mathbb{R} 'ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
J	: Kompleks yapı
div	: Diverjans operatörü
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
$U(n)$: Üniter grup
$[,]$: Lie parantez operatörü
L	: Lie türev operatörü
L_X	: X vektör alanına göre Lie türevi
η	: 1-form
π	: Dik izdüşüm
∂	: Kısmi türev
ϕ	: Temel 2-form
ξ	: Killing vektör alanı
$\chi(M)$: M 'nin teğet vektör alanlarının uzayı
∇_X	: X vektör alanına göre kovaryant türev
$T_P M$: P noktasındaki teğet uzay
\wedge	: Dış çarpım
TM	: M üzerindeki tanjant demeti
g	: Metrik tensör
\otimes	: tensör çarpım
R	: M 'nin Riemann eğrilik tensör alanı
S	: Ricci eğriliği tensör alanı
Q	: Ricci operatörü
r	: Skaler eğrilik
∂	: Kısmi türev
ϕ	: Temel 2-form
svk	
∇	: Shouten-Van Kampen konneksiyonu



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONUNA SAHİP NEARLY KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARA AİT BAZI EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Fatma SATTUF

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülhan AYAR

Haziran, 2025, 45 sayfa

Bu çalışmanın amacı, Schouten–Van Kampen koneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldların eğrilik özelliklerini incelemektir. Özellikle, Schouten–Van Kampen koneksiyonu altında, söz konusu manifoldlarda konharmonik eğrilik tensörü ve konsirkular eğrilik tensörü ele alınmıştır.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve kapsamı özetlenmiş, konuyla ilgili genel literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde ise kuramsal temeller sunulmuş; tez süresince kullanılan kavramlar, tanımlar ve temel teoremler açıklanmıştır. Bu bağlamda, Riemann manifoldları üzerindeki temel kavramlar ile eğrilik ve bağlantı türleri detaylandırılmıştır. Üçüncü bölümde, nearly kosimplektik manifoldların tanımına geçilmiş, çalışmamızda ulaştığımız sonuçlara dayanarak teşkil eden bu yapılar detaylandırılmıştır. Dördüncü bölüm, çalışmanın özgün katkılarını içermektedir. Bu bölümde, Schouten–Van Kampen koneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldların sağladığı eğrilik özellikleri analiz edilmiş; konharmonik ve konsirkular eğrilik tensörlerinin özel durumları tartışılmıştır. Ayrıca, bu tensörlerin flat (düzlemsel) olma koşulları da incelenmiştir. Ayrıca, nearly kosimplektik manifoldlara dair bir örnek verilmiş; bu bölümde elde edilen bazı teorem ve sonuçların orijinal olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde ise, elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve çalışmanın olası devam çalışmaları için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Schouten-Van kampen koneksiyonu; Nearly kosimplektik manifoldlar; Konharmonik eğrilik tensör; Konsirkular eğrilik tensörü.



ABSTRACT

MsThesis

Conharmonic And Concircular Tensors On Nearly Cosymplectic Manifolds With Schouten-Van Kampen Connection

Fatma SATTUF

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Gülhan AYAR

JUNE, 2025, 45 pages

The aim of this study is to examine the curvature properties of nearly cosymplectic manifolds equipped with the Schouten–Van Kampen connection. In particular, the focus is on the concircular and conformal curvature tensors associated with this connection on such manifolds.

This thesis consists of five chapters. The first chapter introduces the purpose and scope of the study, along with a general overview of the relevant literature. The second chapter presents the theoretical foundations, including definitions and theorems related to the key concepts used throughout the thesis. In this section, fundamental concepts of Riemannian manifolds, along with various curvature tensors and types of connections, are discussed. In the third chapter, the definitions of nearly cosymplectic manifolds are presented, and the structures that form the basis of the results obtained in our study are elaborated in detail. The fourth chapter contains the main findings of the study. Here, the curvature characteristics of nearly cosymplectic manifolds admitting a Schouten–Van Kampen connection are analyzed in detail. Special cases involving concircular and conformal curvature tensors are examined, and conditions under which these tensors become flat are discussed. Additionally, an example of nearly cosymplectic manifolds is provided; this section includes some theorems and results that are shown to be original.

The final chapter provides a general evaluation of the results obtained and offers suggestions for future research in this area.

Keywords: Schouten–Van Kampen connection; Nearly cosymplectic manifolds; Conharmonic curvature tensor; Concircular curvature tensor.



1. GİRİŞ

Öklid geometrisi düzlemdeki ve uzaydaki şekillerin incelenmesini sağlar, ancak daha karmaşık yapıları incelemek için diferansiyel geometriye ihtiyaç duyulur. Diferansiyel geometri, eğriler, yüzeyler ve manifoldlar gibi daha genel yapıların özelliklerini incelemek için diferansiyel ve integral hesap tekniklerini kullanır. Bir manifold, yerel olarak Öklidyen uzaya benzeyen, ancak genel olarak daha karmaşık yapılar gösterebilen bir uzaydır. Örneğin, bir küre yüzeyi iki boyutlu bir manifoldtur.

Gauss, yüzeylerin içsel geometrisini incelemiş ve "Theorema Egregium" adlı teoremiyle bir yüzeyin eğriliğinin, o yüzeyin nasıl yerleştirildiğinden bağımsız olduğunu göstermiştir. Bu çalışma, yüzeylerin ve daha genel olarak manifoldların içsel özelliklerini anlamak için önemli bir adımdır.

Riemann, Gauss'un çalışmalarını genişleterek daha yüksek boyutlu manifoldların incelenmesini sağlamıştır. Riemann'ın 1854 tarihli "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" adlı doktora tezi, Riemann geometrisinin temelini atmış ve diferansiyel geometri kavramlarını tanıtmıştır. Riemann, manifoldların genel tanımını yapmış ve metrik tensör kavramını tanıtarak manifoldlar üzerindeki mesafe ve açılar gibi ölçümleri mümkün kılmıştır. Bu tanımın açıklaması, 1923'da Weyl tarafından yapılmıştır. Ancak elimizdeki manifoldun tanımı bilinen formu Whitney tarafından yazılmıştır (Şahin, 2013).

Bir uzayın manifold olabilmesi için üç şartı sağlaması gerekir; birincisi bu uzay Hausdorff uzayı olması gerek, ikincisi her noktanın komşuluğu (harita) öklid uzayının bir parçası olması gerek, üçüncü şart ise bu haritaların birleşimi manifoldun atlasını oluşturması gerektir (Ünal, 2019).

Manifold kavramı çok geniş bir kavram olup, bu alanda özellikle değme (kontak) manifoldların yapısı ve eğrilik özellikleri birçok bilim insanı tarafından incelenmiş ve geliştirilmiştir.

Hemen hemen değme manifoldları üzerine literatürde oldukça farklı çalışmalar yapılmıştır. Bu doğrultuda, $(2n + 1)$ –boyutta C sınıfından diferensiyellenebilir bir M manifoldunun tanjant demetlerinin yapısı $U(n) \times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M 'ye hemen hemen değme manifold denir.

İlk olarak, J. Gray'ın 1959 yılında tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı araştırmaya göre $U(n) \times 1$ yapısal grubunun indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlanmıştır. Buna göre, $(2n + 1)$ –boyutlu hemen hemen değme yapısı,

$$\phi^2 X = X + \eta(X)\xi$$

$$\eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$ tipli tensör alanı ϕ , vektör alanı ξ ve bir 1–form olan η ile oluşturulan (ϕ, ξ, η) üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra Sasaki, (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı üzerine ek olarak,

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayıp hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak açıklamıştır. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

Hemen hemen değme metrik yapıya dayanarak, Goldberg ve Yano (Goldberg ve Yano, 1969) kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır. Kosimplektik manifoldun, bir parçası Kähler olan tek boyutlu manifoldlar olduğunu Lipperman ve Blair 1959'de tanımlamıştır (Lipperman ve Blair 1959). Olszak'ın çalışmalarına paralel olarak Endo da nearly kosimplektik manifoldların geometrisini incelemiştir (Olszak, 1979,1980; Endo, 2005).

Hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) , $(\nabla_X \phi)X = 0$ 'ı sağlıyorsa, buna nearly kosimplektik manifold denir (Blair,1971) Blair ve Showers (Blair ve Showers, 1974).

Schouten-Van Kampen konneksiyonu, 20. yüzyılın başlarında Jan Arnoldus Schouten ve Egbert van Kampen tarafından geliştirilen bir matematiksel araçtır. Schouten'in diferansiyel geometri ve tensor analizi ile van Kampen'in cebirsel topoloji alanındaki katkılarını birleştirir. Bu konneksiyonu, manifoldlar üzerindeki diferansiyel formların ve tensorların davranışlarını incelemek için kullanılır ve topolojik uzayların homotopi tiplerini anlamak için önemli bir araçtır (Schouten ve Kampen 1930).

İkinci bölümde, Riemann manifoldlar ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, nearly kosimplektik yapılar tanıtılmış ve temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifold ile ilgili önemli bir sonuç elde edilmiştir. Bu bölüm tez çalışmasının orijinal sonuçlarını

içermektedir. Beşinci bölüm sonuç ve önerilere ayrılarak, bu konuda çalışma yapmak isteyenlere ışık tutulmuştur.





2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, tez için temel alınacak kavramları içerecektir.

2.1 Riemann Manifolddar

Tanım 2.1. M n –boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$g: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

simetrik, 2 – lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, \mathbb{R}) ikilisiyle verilen manifoldta bir Riemann manifoldu denir (O’neill,1983). M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M^n ye bağlantılı manifold adı verilir (O’neill,1983).

Tanım 2.2. V , reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $u, v, w \in V$ için,

- i. $g(u, v) = g(v, u)$
- ii. $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$
- iii. $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklere sahip olan g dönüşümüne, V reel vektör uzayındaki simetrik bilinear form adı verilir (O’neill, 1983).

Tanım 2.3. (M^n, g) bir Riemann manifold olsun. M^n , de vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

ile tanımlanan g , 2 –lineer (bilinear) formu, pozitif tanımlı ve simetrik ise, yani her $X, Y \in \chi(M)$ için,

- i. $g(X, Y) = g(Y, X)$
- ii. $g(X, X) \geq 0$ ve her X için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartlarını sağlıyorsa g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü veya g bilineer formuna Riemann metriği ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifoldta bir Riemann manifoldu adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M^n)$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M^n, \mathbb{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

- i. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- ii. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- iii. $\nabla_X(fY + gZ) = f\nabla_X Y + X(f)Y + g\nabla_X Z + X(g)Z$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ 'ya M^n 'de bir afin konneksiyon adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M^n 'de bir afin konneksiyonu olsun.

Buna göre, ∇ dönüşümü; $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

- i. $\nabla_X Y + \nabla_Y X = [X, Y]$ (konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği),
- ii. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrik ile bağdaşma özelliği),

şartları sağlanırsa ∇ 'ya M^n 'de sıfır torsiyonlu(burulmasız) bir Riemann konneksiyonu veya M^n 'nin Levi-Civita konneksiyonu adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.6. V, K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümü,

- i. 2-lineer
- ii. Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)
- iii. $\forall X, Y, Z \in V$ için,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

olmak üzere $[,]$ dönüşümüne, V 'de bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü) adı verilir (Hacısalihoglu, 1980).

Tanım 2.7. (M^n, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M^n 'de bir Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$R: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow \chi(M^n)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.1)$$

ile tanımlanan (1,3) – tipli tensör alanı R ye M^n 'nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca $\forall X, Y, Z, V \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

- i. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,
- ii. $g(R(X, Y)Z, V) = -g(R(X, Y)V, Z)$,
- iii. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,
- iv. $g(R(X, Y)Z, V) = g(R(Z, V)X, Y)$

özelliklerini sağlar (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M^n 'de bir Levi-Civita konneksiyonu ve ϕ , (1,1) tipli tensör alanı olsun,

$$(\nabla_X \phi)Y = \nabla_X(\phi Y) - \phi(\nabla_X Y)$$

dir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. A simetrik bir tensör alan olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

$$g((\nabla_X A)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X A)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. B ters simetrik bir tensör alan olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

$$g((\nabla_X B)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X B)Z)$$

dır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.8. (M^n, g) bir Riemann manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2} [X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X, Y]]$$

ile ifade edilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.9. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortanormal vektör alanları olmak üzere,

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X, Y, e_i) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlı (0,2) –tipinde S tensör alanına M 'nin Ricci eğrilik tensörü adı verilir.

Ayrıca, (0,2) – tipli Q Ricci operatörü

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (2.3)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.10. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortanormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) = \text{tr}Q = \sum_{i=1}^n g(Qe_i, e_i) \quad (2.4)$$

değerine M^n 'nin skaler eğrilik denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.11. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ , M^n 'de bir Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere,

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ile tanımlanan tensör alanı T 'ye M^n 'nin torsiyon tensörü denir. Buradaki T tensör alanına burulma adı verilir (Hacısalihoglu, 2003).

Özel olarak $T = 0$ olması durumunda yani,

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (2.5)$$

ise ∇ 'ye M^n üzerinde sıfır torsiyonlu konneksiyon (burulmasız konneksiyon) adı verilir.

Ayrıca, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ olmak üzere, T torsiyon tensörü,

$$i. \quad T(X, Y, Z) = (\nabla_{X,Y}^2 \phi)Z + (\nabla_{X,Z}^2 \phi)Y$$

$$ii. \quad T(X, Y, Z) = T(X, Z, Y)$$

$$iii. \quad T(X, Y, Z, W) = g(T(X, Y, Z), W)$$

özelliklerini sağlar (Hacısalihoglu ve Ekmekçi, 2003).

Teorem 2.1. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için ∇ lineer konneksiyonu M^n üzerinde,

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \quad (2.6)$$

ve

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

koşullarını gerçekleyen yegane konneksiyondur (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.12. (M^n, g) bir Riemann manifold ve M^n 'deki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilen lokal dönüşümlü 1-parametrel grup ϕ_t ise o zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M^n$ için,

$$(L_X K)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [K_p - (\phi_t K)_p]$$

şeklinde tanımlanan $L_X K$ dönüşümüne X yönünde K 'nın Lie türevi denir ve $L_X K$ şeklinde gösterilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.13. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve L_X, X vektör alanına göre Lie türev operatörü olmak üzere, eğer her X vektör alanı için,

$$L_X g = 0$$

ise yani, X 'in 1-parametrel dönüşüm grubu altında invariant (M 'nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen dönüşümlerin lokal

1-parametrel grubu lokal izometrilere dönüşürse) ise X 'e g 'nin Killing vektör alanı denir (Yano ve Kon, 1984).

Sonuç 2.1. Eğer X , bir Killing vektör alanı ise $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$(L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y)$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.14. (M^n, g) bir Riemann manifold, M^n 'deki bir vektör alanı X ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$div X = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

değerine X vektör alanının diverjansı denir (De ve Shaikh, 2007).

2.2 Hemen Hemen Değme (Kontak) Manifolddar

Bu kısımda hemen hemen değme manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.15. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere M 'deki her noktada,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlayan bir η diferansiyel 1 –formu varsa η 'ya kontak form, (M^n, η) ikilisine de kontak manifold adı verilir. Ayrıca $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ ifadesi manifold üzerinde bir hacim elementine karşılık gelmektedir.

Burada $(d\eta)^n$, $d\eta$ 'nın kendisi ile n –defa tekrar eden çarpımını gösterir ve

$$\underbrace{(d\eta)^n = d\eta \wedge d\eta \wedge \dots \wedge d\eta}_{n \text{ defa}}$$

dir. η , 1 –form olduğu için $d\eta$, 2 –form ve $\eta \wedge (d\eta)^n$ ifadesi ise $(2n + 1)$ –form olur.

Dolayısıyla kontak manifoldların boyutu $(2n + 1)$ olup bu nedenle yapı olarak

$(2n + 1)$ –boyutlu manifoldlardır (Blair, 1976; Blair, 2002).

Tanım 2.16. (M^n, g) bir Riemann manifoldda, M^n üzerinde sırasıyla, ϕ (1,1) –tipinde tensör alanı, ξ karakteristik vektör alanı, η 1 –form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, M^n 'de herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (2.7)$$

$$\eta(\xi) = 1 \quad (2.8)$$

şartları sağlanırsa (ϕ, ξ, η) sıralı üçlüsüne M^n 'de hemen hemen değme yapı ve bu yapı yapıya ek olarak (M^n, ϕ, ξ, η) sıralı dördülsüne de hemen hemen değme manifold adı verilir (Yano ve Kon, 1984). Ayrıca burada,

$$\phi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer antisimetrik}} \chi(M) ; (1,1) \text{ tensör}$$

$$\eta : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer diferansiyellenebilir}} C^\infty(M, \mathbb{R}) ; (1,0) \text{ tensör}$$

$$\xi : M \xrightarrow{1-1 \text{ örten}} \chi(M) ; (0,1) \text{ tensör}$$

dir.

Tanım 2.17. (M^n, g) bir Riemann manifold ve (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı olsun. M^n üzerinde manifoldun bir p noktasındaki g Riemann metriği,

$$g : T_p M \times T_p M \xrightarrow{\substack{2\text{-lineer} \\ \text{simetrik} \\ \text{poz.tanımlı}}} \mathbb{R}$$

olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için,

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.9)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (2.10)$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^n 'de hemen hemen değme metrik tensör, (ϕ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M^n 'ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

Sonuç 2.2. (M^n, g) bir Riemann manifold, (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilmek üzere bu durumda,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad (2.11)$$

olduğundan g metriğine göre ϕ , anti-simetrik tensör alanıdır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.18. (M^n, g) bir Riemann manifoldda hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$d\eta(X, Y) = \Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2 –formu adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Sonuç 2.3. (M^n, g) bir Riemann manifold (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. Keyfi X, Y vektör alanları için,

$$\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X) \quad (2.13)$$

dır. Bu da temel 2–form olan Φ 'nin anti-simetrik tensör alanı olduğu anlamına gelir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.19. (M^n, g) bir Riemann manifold, hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. Φ temel 2–form olmak üzere,

$$\nabla_Z \Phi(X, Y) = (\nabla_Z \Phi)(X, Y) + \Phi(\nabla_Z X, Y) + \Phi(X, \nabla_Z Y) \quad (2.14)$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.20. (M^n, g) bir Riemann manifold olsun. Eğer ω , 1 –form ise X ve Y vektör alanları için,

$$2d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega[X, Y]$$

dır. Eğer ω , 2 –form ise,

$$3d\omega(X, Y, Z) = X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(Z, Y)) + Z(\omega(X, Y)) - \omega([X, Y], Z) \\ - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y)$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve Riemann konneksiyonu ∇ olmak üzere keyfi X, Y, Z vektör alanları için,

- i. $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \Phi)Z)$
- ii. $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$
- iii. $(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y)$
- iv. $2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$

$$v. \quad 3d\Phi(X, Y, Z) = \bigoplus_{X, Y, Z} (\nabla_X \Phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\bigoplus_{X, Y, Z} X, Y, Z$ vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$ $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, M^n 'in açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = - \sum_{i=1}^n \{(\nabla_{X_i} \eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i} \eta)\phi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez, 1990).

Tanım 2.21. (M^n, g) bir Riemann manifold olmak üzere, M^n 'de $(1,1)$ –tipli tensör alanı F olsun. $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY] \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.5. (M^n, g) bir Riemann manifold üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul,

$$N_\phi + 2d\phi \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_ϕ , ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.6. (M^n, g) bir Riemann manifold (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. Keyfi X, Y vektör alanları için,

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(X, e_i)g(Y, e_i) \quad (2.16)$$

dır (Uday ve Shaikh, 2007).

Tanım 2.22. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Verilen bu yapı

$$d\Phi = 0$$

$$d\eta = 0$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir.

Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak, 1981).

3. NEARLY KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu kısımda öncelikle nearly kosimplektik yapılar tanıtarak, gerekli literatür bilgisi ve bazı eğrilik özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için, M^{2n+1} üzerinde (Endo, 2005)

$$\phi\xi = 0, \quad \eta \cdot \phi = 0 \quad (3.1)$$

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad g(X, \xi) = \eta(X), \quad \eta(\xi) = 1 \quad (3.2)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3.3)$$

eşitlikleri sağlar. (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer ϕ , M üzerinde her vektör alanı X ve Y için

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X = 0 \quad (3.4)$$

ise ve üzerinde herhangi bir vektör alanı için $(\nabla_X \phi)X = 0$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman M ye nearly kosimplektik manifold adı verilir (Olszak, 1979).

Tanım 3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için ξ , bir Killing vektör alanı olmak üzere,

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = 0 \quad (3.5)$$

şartı sağlanır (Endo, 2005).

Tanım 3.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold olsun. H ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = HX \quad (3.6)$$

dır (Endo, 2005).

Tanım 3.4. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X \eta)Y = g(HX, Y) \quad (3.7)$$

şartı sağlanır (Endo, 2005).

Tanım 3.5. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold

olsun. $\nabla_{X,Y}^2 \phi$ ters simetrik bir yapı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$W \left(g((\nabla_Z \phi)X, Y) \right) = -W \left(g((\nabla_Z \phi)Y, X) \right) \quad (3.8)$$

dır (Endo, 2005).

Önerme 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold

olsun. M^{2n+1} üzerinde ters simetrik $(1,1)$ –tipli H tensör alanı olmak üzere, her X, Y vektör alanı için,

$$i. \quad \phi H + H \phi = 0 \quad (3.9)$$

$$ii. \quad d\eta(X, Y) = g(HX, Y) \quad (3.10)$$

$$iii. \quad H(\xi) = 0, \nabla_\xi \xi = 0, \nabla_\xi \phi = \phi H \quad (3.11)$$

$$iv. \quad g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = 2g(\phi X, \phi Y) \quad (3.12)$$

eşitlikleri sağlanır (Küpeli, Dacko, Murathan, 2016).

Sonuç 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold

Olsun. Eğer bir nearly kosimplektik manifoldu normal $([\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi = 0)$ ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Blair, 2002).

Teorem 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold

olsun. M^{2n+1} 'nin eğrilik tensörü R için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Endo, 2005).

$$i. \quad g(R(\phi X, Y)Z, W) + g(R(X, \phi Y)Z, W) + g(R(X, Y)\phi Z, W) + g(R(X, Y)Z, \phi W) = 0. \quad (3.13)$$

$$ii. \quad g(R(\xi, X, Y)Z) = -g((\nabla_X H)Y, Z) = \eta(Y)g(H^2 X, Z) - \eta(Z)g(H^2 X, Y) \quad (3.14)$$

$$iii. \quad g(R(\phi X, \phi Y)Z, W) = g(R(X, Y)\phi Z, \phi W) \quad (3.15)$$

$$iv. \quad g(R(\phi X, \phi Y)\phi Z, \phi W) = g(R(X, Y)Z, W) + \eta(X)g(R(\xi, Y)Z, W) - \eta(Y)g(R(\xi, X)Z, W) \quad (3.16)$$

Önerme 3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold

olsun. O halde,

$$g \left((\nabla_{\phi X} \phi) \phi Y, Z \right) = -g((\nabla_X \phi)Y, Z) + \eta(X)g(HZ, \phi Y) + \eta(Y)g(HX, \phi Z) \quad (3.17)$$

dır (Endo, 2005).

Önerme 3.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold ve Ricci tensörü S için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Endo, 2005).

$$i. \quad S(X, \xi) = -\eta(X)TrH^2 \quad (3.18)$$

$$ii. \quad S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)TrH^2 \quad (3.19)$$

Tanım 3.5. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold

olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY] \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanan K 'ye konharmonik eğrilik tensörü demir (Prakasha, 1940).

Tanım 3.6. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifold

olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanan C 'ye konsikular eğrilik tensörü demir (Yano, 2018).



4. BULGULAR

Bu kısımda Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly Kosimplektik manifoldlar ile ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölüm tez çalışmasının orjinal sonuçlarını içermektedir.

4.1 Schouten-Van Kampen Konneksiyonuna Sahip Nearly

Kosimplektik Manifoldlar

M , $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifoldlar olmak üzere her X, Y, Z, V vektör alanları için, Levi-Civita konneksiyonu ∇ ile ilişkili, Schouten-Van Kampen konneksiyonunu $\overset{svk}{\nabla}$ aşağıdaki gibi verir(Olszak 2014, Gosh 2018):

$$\overset{svk}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(Y)\nabla_X \xi - (\nabla_X \eta)(Y)\xi. \quad (4.1)$$

(3.6) ve (3.7) ifadeleri (4.1) de yerlerine konulursa,

$$\overset{svk}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(Y)HX - g(\nabla_X \xi, Y)\xi. \quad (4.2)$$

$$\overset{svk}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(Y)HX - g(HX, Y)\xi. \quad (4.3)$$

Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik

manifoldlar için $\overset{svk}{\nabla}_X Y$, (4.3) eşitliği ile ifade edilir.

$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu Schouten-van Kampen

konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifold olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için ξ , bir Killing vektör alanı olmak üzere,

(4.3) eşitliğinde Y yerine ξ alınırsa,

$$\overset{svk}{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi - \eta(\xi)HX + g(HX, \xi)\xi \quad (4.4)$$

elde edilir. (2.8) ve (3.7) eşitliklerinden,

$$\overset{svk}{\nabla}_X \xi = HX - HX - g(X, H\xi)\xi \quad (4.5)$$

ve (3.11) eşitliğinden,

$$\overset{svk}{\nabla}_X \xi = 0. \quad (4.6)$$

olarak bulunur.

$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu Schouten-van Kampen

konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

Riemann eğrilik tensörü bu şekilde ifade edilir:

$$\overset{svk}{R}(X, Y)Z = \overset{svk}{\nabla}_X \overset{svk}{\nabla}_Y Z - \overset{svk}{\nabla}_Y \overset{svk}{\nabla}_X Z - \overset{svk}{\nabla}_{[X, Y]} Z \quad (4.7)$$

(4.9) ile verilen Riemann eğrilik tensörü (4.3) numaralı Schouten-van

Kampen konneksiyonuna göre hesaplanırsa,

Eşitlikteki ifadelerin hesaplaması üç gruba ayrılıp hesaplanırsa;

$$\overset{svk}{\nabla}_X \overset{svk}{\nabla}_Y Z = \overset{svk}{\nabla}_X (\overset{svk}{\nabla}_Y Z - \eta(Z)HY - g(HY, Z)\xi)$$

olmak üzere, buradan

$$\overset{svk}{\nabla}_X \overset{svk}{\nabla}_Y Z = \overset{svk}{\nabla}_X \overset{svk}{\nabla}_Y Z - \overset{svk}{\nabla}_X \eta(Z)HY - \overset{svk}{\nabla}_X g(HY, Z)\xi$$

elde edilir. (4.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \overset{svk}{\nabla}_X \overset{svk}{\nabla}_Y Z &= \overset{svk}{\nabla}_X \overset{svk}{\nabla}_Y Z - \eta(\overset{svk}{\nabla}_Y Z)HX + g(HX, \overset{svk}{\nabla}_Y Z)\xi - \overset{svk}{\nabla}_X (\eta(Z)HY) \\ &\quad + \eta(\eta(Z)HY)HX + g(HX, \eta(Z)HY)\xi \\ &\quad + \overset{svk}{\nabla}_X (g(HY, Z)\xi) - \eta(g(HY, Z)\xi)HX \\ &\quad + g(HX, g(HY, Z)\xi)\xi \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} \overset{svk}{\nabla}_X (\eta(Z)HY) &= g(\overset{svk}{\nabla}_X Z, \xi)HY + g(Z, \overset{svk}{\nabla}_X \xi)HY + \eta(Z)(\overset{svk}{\nabla}_X H)Y \\ &\quad + \eta(Z)H(\overset{svk}{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

$$\eta(\eta(Z)HY)HX = \eta(Z)\eta(HY)HX = 0$$

$$g(HX, \eta(Z)HY)\xi = \eta(Z)g(HX, HY)\xi$$

$$\overset{svk}{\nabla}_X (g(HY, Z)\xi) = g((\overset{svk}{\nabla}_X H)Y, Z)\xi + g(H\overset{svk}{\nabla}_X Y, Z)\xi + g(HY, \overset{svk}{\nabla}_X Z)\xi + g(HY, Z)\overset{svk}{\nabla}_X \xi$$

$$\eta(g(HY, Z)\xi)HX = g(HY, Z)\eta(\xi)HX = g(HY, Z)HX$$

$$g(HX, g(HY, Z)\xi)\xi = g(HY, Z)\eta(HX)\xi = 0$$

yukarıdaki eşitlikleri (4.12) eşitliğinde yazıp gerekli düzenlemeler yapacak olursak,

$$\begin{aligned}
\text{svk svk} \\
\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \eta(\nabla_Y Z)HX + g(HX, \nabla_Y Z)\xi - g(\nabla_X Z, \xi)HY \\
&\quad - g(Z, \nabla_X \xi)HY - \eta(Z)(\nabla_X H)Y - \eta(Z)H(\nabla_X Y) \\
&\quad - \eta(Z)g(HX, HY)\xi + g((\nabla_X H)Y, Z)\xi + g(H\nabla_X Y, Z)\xi \\
&\quad + g(HY, \nabla_X Z)\xi + g(HY, Z)\eta(\xi)\nabla_X \xi - g(HY, Z)HX
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.6) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\text{svk svk} \\
\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \eta(\nabla_Y Z)HX + g(HX, \nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_X Z)HY \\
&\quad - g(Z, HX)HY - \eta(Z)(\nabla_X H)Y - \eta(Z)H(\nabla_X Y) \\
&\quad - \eta(Z)g(HX, HY)\xi + g((\nabla_X H)Y, Z)\xi + g(H\nabla_X Y, Z)\xi \\
&\quad + g(HY, \nabla_X Z)\xi + g(HY, Z)HX - g(HY, Z)HX \quad (4.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) denkleminde X ve Y vektörlerinin yerleri değiştirilir ve ters işareti

alınırsa $-\nabla_Y \nabla_X Z$ ifadesi bulunur.

$$\begin{aligned}
\text{svk svk} \\
-\nabla_Y \nabla_X Z &= -\nabla_Y \nabla_X Z + \eta(\nabla_X Z)HY - g(HY, \nabla_X Z)\xi + \eta(\nabla_Y Z)HX \\
&\quad + g(Z, HY)HX + \eta(Z)(\nabla_Y H)X + \eta(Z)H(\nabla_Y X) \\
&\quad + \eta(Z)g(HY, HX)\xi - g((\nabla_Y H)X, Z)\xi - g(H\nabla_Y X, Z)\xi \\
&\quad - g(HX, \nabla_Y Z)\xi - g(HX, Z)HY + g(HX, Z)HY \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$-\nabla_{[X,Y]}Z$ ifadesi hesaplamak için (4.3) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\text{svk} \\
-\nabla_{[X,Y]}Z &= -\nabla_{[X,Y]}Z + \eta(Z)H[X, Y] - g(H[X, Y], Z)\xi
\end{aligned}$$

Lie parantez operatörü tanımından,

$$\begin{aligned}
\text{svk} \\
-\nabla_{[X,Y]}Z &= -\nabla_{[X,Y]}Z + \eta(Z)H\nabla_X Y - \eta(Z)H\nabla_Y X - g(H\nabla_X Y, Z)\xi \\
&\quad + g(H\nabla_Y X, Z)\xi \quad (4.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.9), (4.10) ve (4.11) ifadelerini (4.7) da yerlerine yazılırsa;

svk

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \eta(\nabla_Y Z)HX + g(HX, \nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_X Z)HY - g(Z, HX)HY \\
&\quad - \eta(Z)(\nabla_X H)Y - \eta(Z)H(\nabla_X Y) - \eta(Z)g(HX, HY)\xi \\
&\quad + g((\nabla_X H)Y, Z)\xi + g(H\nabla_X Y, Z)\xi + g(HY, \nabla_X Z)\xi + g(HY, Z)HX \\
&\quad - g(HY, Z)HX - \nabla_Y \nabla_X Z + \eta(\nabla_X Z)HY - g(HY, \nabla_X Z)\xi \\
&\quad + \eta(\nabla_Y Z)HX + g(Z, HY)HX + \eta(Z)(\nabla_Y H)X + \eta(Z)H(\nabla_Y X) \\
&\quad + \eta(Z)g(HY, HX)\xi - g((\nabla_Y H)X, Z)\xi - g(H\nabla_Y X, Z)\xi \\
&\quad - g(HX, \nabla_Y Z)\xi - g(HX, Z)HY + g(HX, Z)HY - \nabla_{[X, Y]}Z \\
&\quad + \eta(Z)H\nabla_X Y - \eta(Z)H\nabla_Y X - g(H\nabla_X Y, Z)\xi + g(H\nabla_Y X, Z)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

svk

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - g(Z, HX)HY - \eta(Z)H(\nabla_X Y) - \nabla_Y \nabla_X Z + g(Z, HY)HX \\
&\quad + \eta(Z)(\nabla_Y H)X - \nabla_{[X, Y]}Z + g((\nabla_X H)Y, Z)\xi - g((\nabla_Y H)X, Z)\xi
\end{aligned}$$

(2.1) özelliğinden,

svk

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)H + \eta(Z)[(\nabla_Y H)X - (\nabla_X H)Y] \\
&\quad + g((\nabla_X H)Y - (\nabla_Y H)X, Z)\xi \tag{4.12}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.12) özelliğinden,

$$R(\xi, X, Y, Z) = -g((\nabla_X H)Y, Z) = \eta(Y)g(H^2 X, Z) - \eta(Z)g(H^2 X, Y)$$

$$-(\nabla_X H)Y = \eta(Y)H^2 X - g(H^2 X, Y)\xi$$

$$(\nabla_Y H)X = -\eta(X)H^2 Y + g(H^2 Y, X)\xi$$

elde edilir. Buna bağlı olarak,

$$\begin{aligned}
&\eta(Z)[(\nabla_Y H)X - (\nabla_X H)Y] \\
&= \eta(Z)[- \eta(X)H^2 Y + g(H^2 Y, X)\xi + \eta(Y)H^2 X - g(H^2 X, Y)\xi] \\
&= -\eta(Z)[\eta(X)H^2 Y + \eta(Y)H^2 X] \\
&= -\eta(Z)\eta(X)H^2 Y + \eta(Z)\eta(Y)H^2 X \tag{4.13}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&g((\nabla_X H)Y - (\nabla_Y H)X, Z)\xi \\
&= g(-\eta(Y)H^2 X + g(H^2 X, Y)\xi + \eta(X)H^2 Y - g(H^2 Y, X)\xi, Z)\xi \\
&= g(-\eta(Y)H^2 X + \eta(X)H^2 Y, Z)\xi \\
&= -g(H^2 X, Z)\eta(Y)\xi + g(H^2 Y, Z)\eta(X)\xi \tag{4.14}
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen (4.13) ve (4.14) ifadelerini (4.12) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \text{svk} \\
& R(X, Y)Z = R(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX - \eta(Z)\eta(X)H^2Y + \\
& \eta(Z)\eta(Y)H^2X - g(H^2X, Z)\eta(Y)\xi + g(H^2Y, Z)\eta(X)\xi. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlarda Riemann eğrilik tensörü (4.15) olarak elde edilir.

(4.15) ifadesinde $Z = \xi$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
& \text{svk} \\
& R(X, Y)\xi = R(X, Y)\xi - g(\xi, HX)HY + g(\xi, HY)HX - \eta(\xi)\eta(X)H^2Y \\
& + \eta(\xi)\eta(Y)H^2X - g(H^2X, \xi)\eta(Y)\xi + g(H^2Y, \xi)\eta(X)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1), (3.2) ve (3.7) eşitlikleri kullanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \text{svk} \\
& R(X, Y)\xi = R(X, Y)\xi - \eta(X)H^2Y + \eta(Y)H^2X \tag{4.16}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlarda Ricci

tensörü S şu şekilde ifade edilir.

(4.15) ifadesinde U ile iç çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
& g\left(\begin{matrix} \text{svk} \\ R(X, Y)Z, U \end{matrix}\right) \\
& = g(R(X, Y)Z, U) - g(Z, HX)g(HY, U) + g(Z, HY)g(HX, U) \\
& - \eta(Z)\eta(X)g(H^2Y, U) + \eta(Z)\eta(Y)g(H^2X, U) \\
& - g(H^2X, Z)\eta(Y)g(\xi, U) + g(H^2Y, Z)\eta(X)g(\xi, U)
\end{aligned}$$

elde edilir. $X = U = e_i$ alınır;

$$\begin{aligned}
& g\left(\begin{matrix} \text{svk} \\ R(e_i, Y)Z, e_i \end{matrix}\right) \\
& = g(R(e_i, Y)Z, e_i) - g(Z, He_i)g(HY, e_i) \\
& + g(Z, HY)g(He_i, e_i) - \eta(Z)\eta(e_i)g(H^2Y, e_i) \\
& + \eta(Z)\eta(Y)g(H^2e_i, e_i) - g(H^2e_i, Z)\eta(Y)g(\xi, e_i) \\
& + g(H^2Y, Z)\eta(e_i)g(\xi, e_i)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $1 \leq i \leq 2n + 1$ için toplam alınır,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{2n+1} g \left(\begin{matrix} svk \\ R(e_i, Y)Z, e_i \end{matrix} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} [g(R(e_i, Y)Z, e_i) - g(Z, He_i)g(HY, e_i) \\
&\quad + g(Z, HY)g(He_i, e_i) - \eta(Z)g(e_i, \xi)g(H^2Y, e_i) \\
&\quad + \eta(Z)\eta(Y)g(H^2e_i, e_i) - g(H^2e_i, Z)\eta(Y)g(\xi, e_i) \\
&\quad + g(H^2Y, Z)g(e_i, \xi)g(\xi, e_i)]
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.2), (2.4) ve (2.16) eşitliklerini kullanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} svk \\ S \end{matrix} (Y, Z) &= S(Y, Z) + g(HZ, HY) + g(Z, HY)tr(H) + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2) \\
&\quad + g(H^2Y, Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{matrix} svk \\ S \end{matrix} (Y, Z) = S(Y, Z) + g(Z, HY)tr(H) + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2) \quad (4.17)$$

Schouten-Van Kampen konneksiyonuna göre nearly kosimplektik manifoldlarda Ricci tensörü (4.17) olarak bulunur.

(4.17) ifadesinde $Z = \xi$ alınır,

$$\begin{matrix} svk \\ S \end{matrix} (Y, \xi) = S(Y, \xi) + g(\xi, HY)tr(H) + \eta(\xi)\eta(Y)tr(H^2)$$

elde edilir. (3.1), (3.2) ve (3.11) eşitliklerinden,

$$\begin{matrix} svk \\ S \end{matrix} (Y, \xi) = S(Y, \xi) + \eta(Y)tr(H^2) \quad (4.18)$$

olarak elde edilir.

$$S(Y, \xi) = g(QY, \xi)$$

olduğundan,

$$\begin{matrix} svk \\ S \end{matrix} (Y, \xi) = g \left(\begin{matrix} svk \\ Q Y, \xi \end{matrix} \right) = g(QY, \xi) + g(Y, \xi)tr(H^2) \quad (4.19)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{matrix} svk \\ Q Y \end{matrix} = QY + tr(H^2)\xi \quad (4.20)$$

Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlarda Ricci operatörü (4.20) olarak bulunur.

(4.19) ifadesinde $Y = \xi = e_i$ alınır,

$$g \begin{pmatrix} svk \\ Q e_i, e_i \end{pmatrix} = g(Qe_i, e_i) + g(e_i, e_i)tr(H^2)$$

şimdi $1 \leq i \leq 2n + 1$ için toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g \begin{pmatrix} svk \\ Q e_i, e_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2n+1} [g(Qe_i, e_i) + g(e_i, e_i)tr(H^2)]$$

elde edilir. (2.4) eşitliğinden,

$$\begin{matrix} svk \\ r \end{matrix} = r + (2n + 1)tr(H^2) \quad (4.21)$$

genelleştirilmiş Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlarda Skaler eğrilik (4.21) olarak bulunur.

Önerme 4.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g), (2n + 1)$ –boyutlu Shouten-Van

Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifold olsun. $\forall X, Y, Z, U \in$

$\chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir,

$$i) \begin{matrix} svk \\ R \end{matrix} (X, Y)Z + \begin{matrix} svk \\ R \end{matrix} (Y, X)Z = 0$$

$$ii) g \begin{pmatrix} svk \\ R \end{pmatrix} (X, Y)Z, U + g \begin{pmatrix} svk \\ R \end{pmatrix} (X, Y)U, Z = 0$$

$$iii) g \begin{pmatrix} svk \\ R \end{pmatrix} (X, Y)Z, U - g \begin{pmatrix} svk \\ R \end{pmatrix} (Z, U)X, Y = 0$$

$$iv) \begin{matrix} svk \\ R \end{matrix} (X, Y)Z + \begin{matrix} svk \\ R \end{matrix} (Y, Z)X + \begin{matrix} svk \\ R \end{matrix} (Z, X)Y = -2[g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX + g(Y, HX)HZ]$$

$$v) \text{Ricci tensörü } S \text{ simetrik değil; } \begin{matrix} svk \\ S \end{matrix} (Y, Z) \neq \begin{matrix} svk \\ S \end{matrix} (Z, Y) .$$

İspat:

$$i) \begin{matrix} svk \\ R \end{matrix} (X, Y)Z = R(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX - \eta(Z)\eta(X)H^2Y + \eta(Z)\eta(Y)H^2X - \eta(Y)g(H^2X, Z)\xi + \eta(X)g(H^2Y, Z)\xi \quad (4.22)$$

X ve Y vektörlerinin yerlerini değiştirilirse,

$$\begin{matrix} svk \\ R \end{matrix} (Y, X)Z = R(Y, X)Z - g(Z, HY)HX + g(Z, HX)HY - \eta(Z)\eta(Y)H^2X + \eta(Z)\eta(X)H^2Y - \eta(X)g(H^2Y, Z)\xi + \eta(Y)g(H^2X, Z)\xi \quad (4.23)$$

Elde edilir. (4.22) ve (4.23) ifadeleri toplanırrsa,

$$\begin{aligned} & \overset{svk}{R}(X, Y)Z + \overset{svk}{R}(Y, X)Z = R(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX - \\ & \eta(Z)\eta(X)H^2Y + \eta(Z)\eta(Y)H^2X - \eta(Y)g(H^2X, Z)\xi + \eta(X)g(H^2Y, Z)\xi \\ & + R(Y, X)Z - g(Z, HY)HX + g(Z, HX)HY - \eta(Z)\eta(Y)H^2X + \eta(Z)\eta(X)H^2Y - \\ & \eta(X)g(H^2Y, Z)\xi + \eta(Y)g(H^2X, Z)\xi \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\overset{svk}{R}(X, Y)Z + \overset{svk}{R}(Y, X)Z = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{ii) } g\left(\overset{svk}{R}(X, Y)Z, U\right) &= g(R(X, Y)Z, U) - g(Z, HX)g(HY, U) + \\ & g(Z, HY)g(HX, U) + \eta(Z)\eta(Y)g(H^2X, U) - \eta(Z)\eta(X)g(H^2Y, U) - \\ & \eta(Y)g(H^2X, Z)g(\xi, U) + \eta(X)g(H^2Y, Z)g(\xi, U). \end{aligned} \quad (4.24)$$

U ile Z yerlerini değiştirilirse;

$$\begin{aligned} g\left(\overset{svk}{R}(X, Y)U, Z\right) &= g(R(X, Y)U, Z) - g(U, HX)g(HY, Z) + \\ & g(U, HY)g(HX, Z) + \eta(U)\eta(Y)g(H^2X, Z) - \eta(U)\eta(X)g(H^2Y, Z) - \\ & \eta(Y)g(H^2X, U)g(\xi, Z) + \eta(X)g(H^2Y, U)g(\xi, Z) \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.24) ve (4.25) ifadeleri toplanırssa;

$$\begin{aligned} g\left(\overset{svk}{R}(X, Y)Z, U\right) + g\left(\overset{svk}{R}(X, Y)U, Z\right) &= g(R(X, Y)Z, U) - \\ & g(Z, HX)g(HY, U) + g(Z, HY)g(HX, U) + \eta(Z)\eta(Y)g(H^2X, U) - \\ & \eta(Z)\eta(X)g(H^2Y, U) - \eta(Y)g(H^2X, Z)g(\xi, U) + \\ & \eta(X)g(H^2Y, Z)g(\xi, U) + g(R(X, Y)U, Z) + g(U, HX)g(HY, Z) + \\ & g(U, HY)g(HX, Z) + \eta(U)\eta(Y)g(H^2X, Z) - \eta(U)\eta(X)g(H^2Y, Z) - \\ & \eta(Y)g(H^2X, U)g(\xi, Z) + \eta(X)g(H^2Y, U)g(\xi, Z) \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$g\left(\overset{svk}{R}(X, Y)Z, U\right) + g\left(\overset{svk}{R}(X, Y)U, Z\right) = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{iii) } g \left(\begin{matrix} svk \\ R \\ (X, Y)Z, U \end{matrix} \right) &= g(R(X, Y)Z, U) - g(Z, HX)g(HY, U) + \\
&g(Z, HY)g(HX, U) + \eta(Z) \eta(Y)g(H^2X, U) - \eta(Z)\eta(X)g(H^2Y, U) - \\
&\eta(Y)g(H^2X, Z)\eta(U) + \eta(X)g(H^2Y, Z)\eta(U)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

(4.26) eşitlikte X ile Z , Y ile U yerlerini değiştirilirse;

$$\begin{aligned}
g \left(\begin{matrix} svk \\ R \\ (Z, U)X, Y \end{matrix} \right) &= g(R(Z, U)X, Y) - g(X, HZ)g(HU, Y) + \\
&g(X, HU)g(HZ, Y) + \eta(X) \eta(U)g(H^2Z, Y) - \eta(X)\eta(Z)g(H^2U, Y) - \\
&\eta(U)g(H^2Z, X)\eta(Y) + \eta(Z)g(H^2U, X)\eta(Y)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

(4.26) eşitliğinden (4.27) eşitliği çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}
g \left(\begin{matrix} svk \\ R \\ (X, Y)Z, U \end{matrix} \right) - g \left(\begin{matrix} svk \\ R \\ (Z, U)X, Y \end{matrix} \right) &= g(R(X, Y)Z, U) - g(Z, HX)g(HY, U) + g(Z, HY)g(HX, U) \\
&+ \eta(Z) \eta(Y)g(H^2X, U) - \eta(Z)\eta(X)g(H^2Y, U) \\
&- \eta(Y)g(H^2X, Z)\eta(U) + \eta(X)g(H^2Y, Z)\eta(U) - g(R(Z, U)X, Y) \\
&+ g(X, HZ)g(HU, Y) - g(X, HU)g(HZ, Y) - \eta(X) \eta(U)g(H^2Z, Y) \\
&+ \eta(X)\eta(Z)g(H^2U, Y) + \eta(U)g(H^2Z, X)\eta(Y) \\
&- \eta(Z)g(H^2U, X)\eta(Y)
\end{aligned}$$

burada (2.10) eşitliği kullanıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$g \left(\begin{matrix} svk \\ R \\ (X, Y)Z, U \end{matrix} \right) = g \left(\begin{matrix} svk \\ R \\ (Z, U)X, Y \end{matrix} \right)$$

elde edilir.

iv) (4.15) eşitliğinde X yerine Y , Y yerine Z , ve Z yerine X yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} svk \\ R \\ (Y, Z)X \end{matrix} &= R(Y, Z)X - g(X, HY)HZ + g(X, HZ)HY - \eta(X)\eta(Y)H^2Z + \\
&\eta(X)\eta(Z)H^2Y - g(H^2Y, X)\eta(Z)\xi + g(H^2Z, X)\eta(Y)\xi.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir. Ayrıca (4.17) ifadesinde X yerine Z , Y yerine X , ve Z yerine Y yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} svk \\ R \\ (Z, X)Y \end{matrix} &= R(Z, X)Y - g(Y, HZ)HX + g(Y, HX)HZ - \eta(Y)\eta(Z)H^2X + \\
&\eta(X)\eta(Y)H^2Z - g(H^2Z, Y)\eta(X)\xi + g(H^2X, Y)\eta(Z)\xi.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.15), (4.28) ve (4.29) eşitliklerini taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned}
& {}^{svk}R(X, Y)Z + {}^{svk}R(Y, Z)X + {}^{svk}R(Z, X)Y \\
&= R(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX - \eta(Z)\eta(X)H^2Y \\
&+ \eta(Z)\eta(Y)H^2X - g(H^2X, Z)\eta(Y)\xi + g(H^2Y, Z)\eta(X)\xi + R(Y, Z)X \\
&- g(X, HY)HZ + g(X, HZ)HY - \eta(X)\eta(Y)H^2Z + \eta(X)\eta(Z)H^2Y \\
&- g(H^2Y, X)\eta(Z)\xi + g(H^2Z, X)\eta(Y)\xi + R(Z, X)Y - g(Y, HZ)HX \\
&+ g(Y, HX)HZ - \eta(Y)\eta(Z)H^2X + \eta(X)\eta(Y)H^2Z \\
&- g(H^2Z, Y)\eta(X)\xi + g(H^2X, Y)\eta(Z)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& {}^{svk}R(X, Y)Z + {}^{svk}R(Y, Z)X + {}^{svk}R(Z, X)Y \\
&= -2[g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX + g(Y, HX)HZ]
\end{aligned}$$

elde edilir.

v) (4.17) ifadesinde Y ile Z yerlerini değiştirilirse;

$${}^{svk}S(Z, Y) = S(Z, Y) + g(Y, HZ)tr(H) + \eta(Y)\eta(Z)tr(H^2). \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.19) ifadesinden (4.32) ifadesini çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$${}^{svk}S(Y, Z) - {}^{svk}S(Z, Y) = S(Y, Z) - S(Z, Y) - 2g(Y, HZ)tr(H)$$

bulunur. Buradan;

$${}^{svk}S(Y, Z) \neq {}^{svk}S(Z, Y)$$

olduğundan ${}^{svk}S$ simetrik değildir.

4.2 Shouten-Van Kampen Konneksiyonuna Sahip Nearly Kosimplektik Manifoldlarda Konharmonik Eğrilik Tensörü

M^{2n+1} , $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifoldlar olmak üzere, Shouten-

Van Kampen konneksiyonu ∇^{svk} 'a göre konharmonik eğrilik tensörü K aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} K(X, Y)Z = & R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y \\ & + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY] \end{aligned} \quad (4.31)$$

burada (4.15), (4.17) ve (4.20) ifadeleri (4.31) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} K(X, Y)Z = & R(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX - \eta(Z)\eta(X)H^2Y \\ & + \eta(Z)\eta(Y)H^2X - g(H^2X, Z)\eta(Y)\xi + g(H^2Y, Z)\eta(X)\xi \\ & - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)X + g(Z, HY)tr(H)X + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2)X \\ & - S(X, Z)Y - g(Z, HX)tr(H)Y - \eta(Z)\eta(X)tr(H^2)Y + g(Y, Z)QX \\ & + g(Y, Z)tr(H^2)X - g(X, Z)QY - g(X, Z)tr(H^2)Y] \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} K(X, Y)Z = & K(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX - \eta(Z)\eta(X)H^2Y \\ & + \eta(Z)\eta(Y)H^2X - \eta(Y)g(H^2X, Z)\xi + \eta(X)g(H^2Y, Z)\xi \\ & - \frac{1}{n-2} [g(Z, HY)tr(H)X + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2)X - g(Z, HX)tr(H)Y \\ & - \eta(Z)\eta(X)tr(H^2)Y + g(Y, Z)tr(H^2)X - g(X, Z)tr(H^2)Y] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Shouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlarda konharmonik eğrilik tensörü (4.33) olarak elde edilir.

(4.32) ifadesinde $X = \xi$ alınırsa;

svk

$$\begin{aligned} K(\xi, Y)Z &= R(\xi, Y)Z - g(Z, H\xi)HY + g(Z, HY)H\xi - \eta(Z)\eta(\xi)H^2Y \\ &\quad + \eta(Z)\eta(Y)H^2\xi - g(H^2\xi, Z)\eta(Y)\xi + g(H^2Y, Z)\eta(\xi)\xi \\ &\quad - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\xi + g(Z, HY)tr(H)\xi + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2)\xi \\ &\quad - S(\xi, Z)Y - g(Z, H\xi)tr(H)Y - \eta(Z)\eta(\xi)tr(H^2)Y + g(Y, Z)Q\xi \\ &\quad + g(Y, Z)tr(H^2)\xi - g(\xi, Z)QY - g(X, Z)tr(H^2)Y] \end{aligned}$$

burada (3.2) ve (3.11) özellikleri kullanılırsa;

svk

$$\begin{aligned} K(\xi, Y)Z &= R(\xi, Y)Z - \eta(Z)H^2Y + g(H^2Y, Z)\xi - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\xi \\ &\quad + g(Z, HY)tr(H)\xi + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2)\xi - S(\xi, Z)Y \\ &\quad - 2\eta(Z)tr(H^2)Y + g(Y, Z)Q\xi + g(Y, Z)tr(H^2)\xi - \eta(Z)QY] \end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) ve (3.18) ifadelerini yerlerine yazılırsa;

svk

$$\begin{aligned} K(\xi, Y)Z &= \eta(Z)H^2Y - g(H^2Y, Z)\xi - \eta(Z)H^2Y + g(H^2Y, Z)\xi \\ &\quad - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\xi + g(Z, HY)tr(H)\xi + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2)\xi \\ &\quad + \eta(Z)tr(H^2)Y - 2\eta(Z)tr(H^2)Y - g(Y, Z)tr(H^2)\xi \\ &\quad + g(Y, Z)tr(H^2)\xi - \eta(Z)QY] \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

svk

$$\begin{aligned} K(\xi, Y)Z &= -\frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\xi + g(Z, HY)tr(H)\xi + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2)\xi \\ &\quad + \eta(Z)tr(H^2)Y - \eta(Z)QY] \end{aligned} \quad (4.34)$$

bulunur. (4.34) ifadesinin her iki tarafını ξ ile iç çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
& g \left(\begin{matrix} svk \\ K \\ (X, Y)Z, \xi \end{matrix} \right) \\
&= g(R(X, Y)Z, \xi) - g(Z, HX)g(HY, \xi) + g(Z, HY)g(HX, \xi) \\
&\quad - \eta(Z)\eta(X)g(H^2Y, \xi) + \eta(Z)\eta(Y)g(H^2X, \xi) \\
&\quad - g(H^2X, Z)\eta(Y)g(\xi, \xi) + g(H^2Y, Z)\eta(X)g(\xi, \xi) \\
&\quad - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)g(X, \xi) + g(Z, HY)tr(H)g(X, \xi) \\
&\quad + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2)g(X, \xi) - S(X, Z)g(Y, \xi) \\
&\quad - g(Z, HX)tr(H)g(Y, \xi) - \eta(Z)\eta(X)tr(H^2)g(Y, \xi) \\
&\quad + g(Y, Z)g(QX, \xi) + g(Y, Z)tr(H^2)g(X, \xi) - g(X, Z)g(QY, \xi) \\
&\quad - g(X, Z)tr(H^2)g(Y, \xi)]
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.11) ifadelerinden;

$$\begin{aligned}
& \eta \left(\begin{matrix} svk \\ K \\ (X, Y)Z, \xi \end{matrix} \right) \\
&= g(R(X, Y)Z, \xi) - \eta(Y)g(H^2X, Z) + \eta(X)g(H^2Y, Z) \\
&\quad - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\eta(X) + g(Z, HY)tr(H)\eta(X) \\
&\quad + \eta(Z)\eta(Y)tr(H^2)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) - g(Z, HX)tr(H)\eta(Y) \\
&\quad - \eta(Z)\eta(X)tr(H^2)\eta(Y) + g(Y, Z)tr(H^2)\eta(X) \\
&\quad - g(X, Z)tr(H^2)\eta(Y) + g(Y, Z)S(X, \xi) - g(X, Z)S(Y, \xi)]
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) ve (3.18) ifadelerini kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \eta \left(\begin{matrix} svk \\ K \\ (X, Y)Z, \xi \end{matrix} \right) \\
&= \eta(Y)g(H^2X, Z) - \eta(X)g(H^2Y, Z) - \eta(Y)g(H^2X, Z) \\
&\quad + \eta(X)g(H^2Y, Z) \\
&\quad - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\eta(X) + g(Z, HY)tr(H)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) \\
&\quad - g(Z, HX)tr(H)\eta(Y) + g(Y, Z)tr(H^2)\eta(X) - g(X, Z)tr(H^2)\eta(Y) \\
&\quad - g(Y, Z)\eta(X)tr(H^2) - g(X, Z)\eta(Y)tr(H^2)\eta]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \eta \left(\begin{matrix} svk \\ K(X, Y)Z, \xi \end{matrix} \right) \\
&= -\frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\eta(X) + g(Z, HY)tr(H)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) \\
&\quad - g(Z, HX)tr(H)\eta(Y)] \tag{4.35}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.



4.3 Shouten-Van Kampen Konneksiyonuna Sahip Nearly Kosimplektik Manifoldların Konharmonik Flat Olması

M^n konharmonik flat manifold olması için; her noktasında konharmonik eğrilik tensörü sıfır olması gerek. M^{2n+1} , ∇^{svk} konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifold, konharmonik flat olsun. O halde $K^{svk} = 0$ olur.

Burada (4.31) ifadesinden;

$$R^{svk}(X, Y)Z = \frac{1}{n-2} \left[S^{svk}(Y, Z)X - S^{svk}(X, Z)Y + g(Y, Z)Q^{svk}X - g(X, Z)Q^{svk}Y \right] \quad (4.36)$$

elde edilir. (4.36) ifadesinin her iki tarafı ξ ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} g \left(R^{svk}(X, Y)Z, \xi \right) &= \frac{1}{n-2} \left[S^{svk}(Y, Z)g(X, \xi) - S^{svk}(X, Z)g(Y, \xi) \right. \\ &\quad \left. + g(Y, Z)g \left(Q^{svk}X, \xi \right) - g(X, Z)g \left(Q^{svk}Y, \xi \right) \right] \\ &= \frac{1}{n-2} \left[S^{svk}(Y, Z)\eta(X) - S^{svk}(X, Z)\eta(Y) + g(Y, Z)S^{svk}(X, \xi) \right. \\ &\quad \left. - g(X, Z)S^{svk}(Y, \xi) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

elde edilir. Burada (4.17)'dan,

$$\begin{aligned}
& g \left(\begin{matrix} svk \\ R(X, Y)Z, \xi \end{matrix} \right) \\
&= \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\eta(X) + g(Z, HY)tr(H)\eta(X) \\
&+ \eta(Z)\eta(Y)\eta(X)tr(H^2) - S(X, Z)\eta(Y) - g(Z, HX)tr(H)\eta(Y) \\
&- \eta(Z)\eta(Y)\eta(X)tr(H^2) + g(Y, Z)S(X, \xi) \\
&+ g(Y, Z)\eta(X)tr(H^2) - g(X, Z)S(Y, \xi) - g(X, Z)\eta(Y)tr(H^2)]
\end{aligned}$$

bulunur. $X = \xi$ seçip gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$S(Y, Z) = -g(Z, HY)tr(H) - \eta(Y)\eta(Z)tr(H^2) \quad (4.38)$$

ve

$$r = -(2n + 1)tr(H^2) \quad (4.39)$$

bulunur.

Teorem 4.1. Shouten-Van Kampen konneksiyonuna göre konharmonik flat nearly kosimplektik manifoldlarda, skaler eğrilik

$-(2n + 1)tr(H^2)$ 'dir.

4.4 Shouten-Van Kampen Konneksiyonuna Sahip Nearly Kosimplektik Manifoldlarda Konsirkular Eğrilik Tensörü

M , $(2n + 1)$ –boyutlu nearly kosimplektik manifoldlar olmak üzere, Shouten-Van

svk kampen konneksiyonu ∇ 'a göre konsirkular eğrilik tensörü C aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{r}{2n(2n + 1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (4.40)$$

burada (4.15) ve (4.21) ifadeleri (4.40) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX - \eta(Z)\eta(X)H^2Y + \eta(Z)\eta(Y)H^2X - \eta(Y)g(H^2X, Z)\xi + \eta(X)g(H^2Y, Z)\xi - \frac{r + (2n + 1)tr(H^2)}{2n(2n + 1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$C(X, Y)Z = C(X, Y)Z - g(Z, HX)HY + g(Z, HY)HX - \eta(Z)\eta(X)H^2Y + \eta(Z)\eta(Y)H^2X - \eta(Y)g(H^2X, Z)\xi + \eta(X)g(H^2Y, Z)\xi - \frac{tr(H^2)}{2n} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (4.41)$$

Shouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlarda konsirkular eğrilik tensörü (4.41) olarak elde edilir.

(4.40) ifadesinde $X = \xi$ alınırsa;

$$C(\xi, Y)Z = C(\xi, Y)Z - g(Z, H\xi)HY + g(Z, HY)H\xi - \eta(Z)\eta(\xi)H^2Y + \eta(Z)\eta(Y)H^2\xi - \eta(Y)g(H^2\xi, Z)\xi + \eta(\xi)g(H^2Y, Z)\xi - \frac{tr(H^2)}{2n} \{g(Y, Z)\xi - g(\xi, Z)Y\}$$

burada (3.2) ve (3.11) özellikleri kullanılırsa;

$$C(\xi, Y)Z = C(\xi, Y)Z - \eta(Z)H^2Y + g(H^2Y, Z)\xi - \frac{tr(H^2)}{2n} \{g(Y, Z)\xi - g(\xi, Z)Y\}$$

elde edilir. (3.14) ve (3.18) ifadelerini yerlerine yazılırsa;

svk

$$\begin{aligned} C(\xi, Y)Z &= C(\xi, Y)Z - R(\xi, Y)Z \\ &\quad - \frac{1}{2n} \{S(\xi, Z)Y + g(Y, Z)tr(H^2)\xi\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

bulunur. (4.40) ifadesinin her iki tarafını ξ ile iç çarpılırsa;

svk

$$\begin{aligned} g(C(X, Y)Z, \xi) &= g(C(X, Y)Z, \xi) - g(Z, HX)g(HY, \xi) + g(Z, HY)g(HX, \xi) \\ &\quad - \eta(Z)\eta(X)g(H^2Y, \xi) + \eta(Z)\eta(Y)g(H^2X, \xi) \\ &\quad - \eta(Y)g(H^2X, Z)g(\xi, \xi) + \eta(X)g(H^2Y, Z)g(\xi, \xi) \\ &\quad - \frac{tr(H^2)}{2n} \{g(Y, Z)g(X, \xi) - g(X, Z)g(Y, \xi)\} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.11) ifadelerinden;

$$\begin{aligned} \eta \left(\begin{matrix} svk \\ C(X, Y)Z \end{matrix} \right) &= \eta(C(X, Y)Z) - \eta(Y)g(H^2X, Z) + \eta(X)g(H^2Y, Z) \\ &\quad - \frac{tr(H^2)}{2n} \{\eta(X)g(Y, Z) - \eta(Y)g(X, Z)\} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) ve (3.18) ifadelerini kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \eta \left(\begin{matrix} svk \\ C(X, Y)Z \end{matrix} \right) &= \eta(C(X, Y)Z) - \eta(R(X, Y)Z) \\ &\quad + \frac{1}{2n} \{S(X, \xi)g(Y, Z) - S(Y, \xi)g(X, Z)\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

elde edilir.

4.5 Shouten-Van Kampen Konneksiyonuna Sahip Nearly Kosimplektik Manifoldların Konsirkular Flat Olması

M^{2n+1} , ∇ konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifold, konsirkular flat

olması $C = 0$ olması gerek. Bu durumda,

$$R(X, Y)Z = \frac{r}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

olur. Elde edilen son ifadeyi ξ ile iç çarpılırsa,

$$g(R(X, Y)Z, \xi) = \frac{r}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z)g(X, \xi) - g(X, Z)g(Y, \xi)\}$$

olur. Burada (3.14) ve (4.14) ifadelerini kullanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \eta(R(X, Y)Z) - \eta(Y)g(H^2X, Z) + \eta(X)g(H^2Y, Z) \\ &= \frac{r}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z)g(X, \xi) - g(X, Z)g(Y, \xi)\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

elde edilir. (4.44) ifadesinde $X = \xi$ seçilirse,

$$g((\nabla_Z H)\xi, Y) + g(H^2Y, Z) = \frac{r}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\}$$

elde edilir. (3.6) ifadesinden;

$$g(H^2Y, Z) - g(H^2Z, Y) = \frac{r}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\}$$

bulunur. Burada $g(HZ, HY) = -g(Z, H^2Y)$ olduğundan;

$$\frac{r}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\} = 0$$

olur. Bulduğumuz son ifadede Y yerine QY yazılırsa,

$$\frac{r + \text{tr}(H^2)(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{g(QY, Z) - \eta(QY)\eta(Z)\} = 0$$

elde edilir. (2.3) ifadesini kullanılırsa,

$$\frac{r + \text{tr}(H^2)(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{S(Y, Z) - S(Y, \xi)\eta(Z)\} = 0 \quad (4.45)$$

bulunur. (4.45) eşitlikten,

ya,

$$r = -\text{tr}(H^2)(2n + 2)$$

ya da,

$$S(Y, Z) = \eta(Z). S(Y, \xi) = -\eta(Z)\eta(Y)\text{tr}(H^2)$$

elde edilir.

Teorem 4.2. Shouten-Van Kampen konneksiyonuna göre konsirkular flat nearly kosimplektik manifoldlarda ya skaler eğrilik $-\text{tr}(H^2)(2n + 2)$ olur ya da η -Einstein manifoldunun özel bir durumudur.

Örnek: $(x, y, z) \in R^3$ standart koordinatlar olmak üzere, $M = \{(x, y, z) \in R^3\}$ manifoldu ele alınır.

$$F_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial y}, F_2 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, F_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

M nin her noktasında lineer bağımsız vektör alanlarıdır. Riemann metriği g ,

$$g(F_1, F_1) = g(F_2, F_2) = g(F_3, F_3) = 1$$

$$g(F_1, F_2) = g(F_1, F_3) = g(F_2, F_3) = 0$$

olarak tanımlansın. Bu durumda g metriği,

$$g = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

biçimindedir. η , 1-formu $\forall Y \in \chi(M)$ için $\eta(Y) = g(Y, F_3)$ olarak tanımlansın.

$\phi, \phi(F_1) = -F_2, \phi(F_2) = F_1, \phi(F_3) = 0$ olarak tanımlanan $(1,1)$ tensör olsun.

ϕ ve g lineerliği kullanılarak $\forall Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\eta(F_3) = 1, \phi^2 Z = -Z + \eta(Z)F_3, g(\phi Z, \phi W) = g(Z, W) - \eta(Z)\eta(W)$$

yazılabilir böylece $F_3 = \xi$ için (ϕ, ξ, η, g) yapısı M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapı tanımlar.

∇ , g metriğine sahip olarak tanımlı Levi Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda

$$[F_1, F_2] = 0, [F_1, F_3] = F_1, [F_2, F_3] = F_2$$

elde edilir. Koszul formülünde g metriğinin, ∇ Riemann konneksiyonu

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])$$

olarak verilir. Bu formül kullanılırsa,

$$2g(\nabla_{F_1} F_3, F_1) = F_1g(F_3, F_1) + F_3g(F_1, F_1) - F_1g(F_1, F_3) - g(F_1, [F_3, F_1]) - g(F_3, [F_1, F_1]) + g(F_1, [F_1, F_3]) \text{ ise}$$

$$2g(\nabla_{F_1} F_3, F_1) = -g(F_1, -F_1) + g(F_1, F_1)$$

$$g(\nabla_{F_1} F_3, F_1) = 1 \tag{4.46}$$

$$2g(\nabla_{F_1} F_3, F_2) = F_1g(F_3, F_2) + F_3g(F_2, F_1) - F_2g(F_1, F_3) - g(F_1, [F_3, F_2]) - g(F_3, [F_1, F_2]) + g(F_2, [F_1, F_3])$$

$$2g(\nabla_{F_1} F_3, F_2) = -g(F_1, -F_2) + g(F_2, F_1)$$

$$g(\nabla_{F_1} F_3, F_2) = 0 \tag{4.47}$$

$$2g(\nabla_{F_1} F_3, F_3) = F_1g(F_3, F_3) + F_3g(F_3, F_1) - F_3g(F_1, F_3) - g(F_1, [F_3, F_3]) - g(F_3, [F_1, F_3]) + g(F_3, [F_1, F_3])$$

$$2g(\nabla_{F_1} F_3, F_3) = -g(F_3, F_1) + g(F_3, F_1)$$

$$g(\nabla_{F_1} F_3, F_3) = 0 \tag{4.48}$$

$$\nabla_{F_1} F_3 = g(\nabla_{F_1} F_3, F_1)HF_1 + g(\nabla_{F_1} F_3, F_2)HF_2 + g(\nabla_{F_1} F_3, F_3)HF_3$$

bağıntısında (4.46), (4.47) ve (4.48) eşitliklerini kullanılırsa,

$$\nabla_{F_1} F_3 = HF_1$$

elde edilir. Benzer şekilde aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$\begin{aligned}\nabla_{F_1} F_1 &= 0, & \nabla_{F_1} F_2 &= 0, & \nabla_{F_1} F_3 &= HF_1 \\ \nabla_{F_2} F_1 &= 0, & \nabla_{F_2} F_2 &= 0, & \nabla_{F_2} F_3 &= HF_2 \\ \nabla_{F_3} F_1 &= 0, & \nabla_{F_3} F_2 &= 0, & \nabla_{F_3} F_3 &= 0\end{aligned}$$

bu durumda $F_3 = \xi$ olma üzere M manifoldu $\nabla_X \xi = HX$ bağıntısını sağlar.

Yırcı (4.3) den aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}\overset{svk}{\nabla_{F_1} F_1} &= g(HF_1, F_1)F_3, & \overset{svk}{\nabla_{F_1} F_2} &= 0, & \overset{svk}{\nabla_{F_1} F_3} &= 0 \\ \overset{svk}{\nabla_{F_2} F_1} &= 0, & \overset{svk}{\nabla_{F_2} F_2} &= g(HF_2, F_2)F_3, & \overset{svk}{\nabla_{F_2} F_3} &= 0 \\ \overset{svk}{\nabla_{F_3} F_1} &= 0, & \overset{svk}{\nabla_{F_3} F_2} &= 0, & \overset{svk}{\nabla_{F_3} F_3} &= 0\end{aligned} \quad (4.49)$$

bu durumda $F_3 = \xi$ olmak üzere M manifoldu $\nabla_X \xi = HX$ bağıntısını sağlar.

(4.49) eşitlikleri (2.1) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\overset{svk}{R(F_1, F_2)F_1} &= \overset{svk}{\nabla_{F_1} \nabla_{F_2} F_1} - \overset{svk}{\nabla_{F_2} \nabla_{F_1} F_1} - \overset{svk}{\nabla_{[F_1, F_2]} F_1} \\ \overset{svk}{R(F_1, F_2)F_1} &= \overset{svk}{\nabla_{F_2} g(HF_1, F_1)F_3} = HF_2\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$\begin{aligned}\overset{svk}{R(F_1, F_1)F_1} &= \overset{svk}{R(F_2, F_2)F_2} = \overset{svk}{R(F_3, F_3)F_3} = 0 \\ \overset{svk}{R(F_1, F_1)F_2} &= \overset{svk}{R(F_1, F_1)F_3} = \overset{svk}{R(F_1, F_2)F_3} = 0 \\ \overset{svk}{R(F_1, F_3)F_2} &= \overset{svk}{R(F_2, F_1)F_3} = 0 \\ \overset{svk}{R(F_2, F_2)F_1} &= \overset{svk}{R(F_2, F_2)F_3} = \overset{svk}{R(F_2, F_3)F_1} = 0 \\ \overset{svk}{R(F_3, F_1)F_2} &= \overset{svk}{R(F_3, F_2)F_1} = \overset{svk}{R(F_3, F_3)F_1} = 0\end{aligned}$$

$${}^{svk} R (F_3, F_3)F_2 = {}^{svk} R (F_3, F_2)F_3 = {}^{svk} R (F_3, F_1)F_3 = 0$$

$${}^{svk} R (F_1, F_3)F_3 = {}^{svk} R (F_2, F_3)F_3 = 0''$$

$${}^{svk} R (F_1, F_2)F_1 = HF_2, \quad {}^{svk} R (F_2, F_1)F_1 = -HF_2$$

$${}^{svk} R (F_2, F_1)F_2 = HF_1, \quad {}^{svk} R (F_1, F_2)F_2 = -HF_1$$

$${}^{svk} R (F_1, F_3)F_1 = -g(HF_1, F_1)F_3$$

$${}^{svk} R (F_2, F_3)F_2 = -g(HF_2, F_2)F_3$$

$${}^{svk} R (F_3, F_2)F_2 = g(HF_2, F_2)F_3$$

$${}^{svk} R (F_3, F_1)F_1 = -g(HF_1, F_1)F_3$$

elde edilir.



5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldların temel eğrilik özellikleri incelenmiştir. Sonrada, bu eğrilik özelliklerine bağlı olarak, konharmonik ve konsirkular eğrilik tensörleri ele alınarak Shouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlarda konharmonik ve kosirkular eğrilik tensörlerin sağladıkları bazı eğrilik özellikleri ve bu eğrilik tensörlerinin flat olma durumunda sağladığı özellikler elde edilmiştir. Son olarak Shouten-Van konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlar için bir örnek verilmiştir.

Bu çalışmaya ek olarak, Shouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlarda konharmonik ve konsirkular simetrik, ϕ -konharmonik flat, ϕ -konsirkular flat, ξ -konharmonik flat, ξ -konsirkular flat olma durumları da incelenebilir. Ayrıca Shouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip nearly kosimplektik manifoldlara ait diğer eğrilik tensörleride ele alınıp sağladığı geometrik özellikler incelenebilir.



KAYNAKÇA

Blair, E., (1971). Almost contact manifolds with Killing structure tensors. *Pacific J. Math.* no.2, 39, 285–292 p.

Blair, E., Showers, D. K. (1974). Almost contact manifolds with Killing structure tensors. II., *J.Differential Geom.* 9, 577–582.

Blair, E., (1976). Contact Manifolds in Riemann Geometry. Lecture Notes in Math., Volume 509, Springer-Verlag.

Blair, E., (2002). Riemann Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. *Progress in Mathematics*, 203, Birkhauser, Boston.

Chinea, D., Gonzalez, C., (1990). A Classification of Almost Contact Metric Manifolds *Ann. Mat. Pura Appl. (IV)*, 156, 15-36 p.

De, U. C., Shaikh, A. A. (2007). *Differential geometry of manifolds*. Alpha Science International, Limited.

Endo, H., (2005). On The Curvature Tensor of Nearly Cosymplectic Manifolds of Constant Φ -Sectional Curvature. “ *Al. I. Cuza “ Iasi. Mat. (N.S.), An. Stiit Univ*, 51, 439-454 p.

Endo, H., (2012). On the first Betti number of certain compact nearly cosymplectic manifolds, *J.Ggeom.* No. 2, 103, 231–236 p.

Ghosh, Gopal. ”*On Schouten-van Kampen connection in Sasakian manifolds.*” *Boletim da Sociedade Paranaense de Mathematica* 36 (2018): 171-182.

Goldberg, S., Yano, K. (1969). *Integrability of almost cosymplectic structures.* *Pacific Journal of Mathematics*, 31(2), 373-382.

Hacısalıhoğlu, H.H., (1980). Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları

Hacısalıhoğlu, H.H., Ekmekçi, N., (2003). Tensör Geometri. *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.*

Küpelı E.I., Dacko P., Murathan C., (2016). On The Existence of Proper Nearly Kenmotsu Manifolds. *Mediterr. J. Math.* 13, 4497-4507, DOI 10.1007/s00009- 016-0758-9 1660-5446/16/064497-11, *Springer International Publishing.*

K. Yano, Conircular geometry I. Conircular transformations. *Proc. Imper. Acad.* 16.195–200(1940).

Libermann, M. P. (1959). Sur les automorphismes infinitesimaux des structures 50 syplectiques et des structures de contact. *Coll. Géom. Diff. Globale*, 37-58.

- Olszak, Z., (1979). Nearly Sasakian Manifolds. *Tensor (N.S.)*, no. 3, 33, 277-286 p.
- Olszak, Z., (1980). Five-Dimensional Nearly Sasakian Manifolds. *Tensor (N.S.)*, no. 3, 34, 273-276 p.
- Olszak, Z., (1981). On Almost Cosymplectic Manifolds. *Kodai Math*, 4(2), 239-250 p.
- Olszak, Z., (1989). Locally Conformal Almost Cosymplectic Manifolds. *Coll Math*, 57, 73-87 p.
- Olszak, Z. (2014). The Schouten-van Kampen affine connection adapted to an almost (para) contact metric structure. *arXiv preprint arXiv:1402.5796*.
- O'Neill, B., (1983). *Semi Riemannian Geometry*. A. Press, London.
- Prakasha, D. G., and B. S. Hadimani. "On the conharmonic curvature tensor of kenmotsu manifolds with generalized tanaka-webster connection." *Miskolc Mathematical Notes* 19.1 (2018): 491-503.
- Şahin, B., (2013). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*. Nobel Yayıncılık, Ankara.
- Ünal, İ., (2019) Diferansiyel Geometri. <https://inanunal.com/diferansiyel-geometri/> (Erişim Tarihi: 25.07.2019).