T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTERPOLASYON EŞİTSİZLİKLERİ VE BEREZİN YARIÇAPLARI

Osman Okan SATMAZ

Danışman
Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2025

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Osman Okan SATMAZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNTERPOLASYON EŞİTSİZLİKLERİ VE BEREZİN YARIÇAPLARI

Osman Okan SATMAZ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Sunulan bu yüksek lisans tezinde sayısal yarıçap, Berezin sembolü ve Berezin yarıçap hakkında bazı temel teoriler tanıtılmıştır. Ayrıca, fonksiyonel Hilbert uzay operatör içeren Berezin yarıçap için temel eşitsizlikler incelenmiştir. Sunulan bu yüksek lisans tez çalışması beş ana bölümden oluşacak biçimde planlanmıştır. İlk olarak giriş kısmında, Berezin sayısı ve sayısal yarıçapı kavramlarının kullanım alanları, özellikleri ve tarihsel süreçinden bahsedilmiştir. Kaynak özetleri kısmı olan ikinci bölümde, tezde çalışılmış olan problemlerin tarihsel gelişimi ve son dönemde yapılan çalışmalar detaylı olarak incelenmiştir. Bilinen yardımcı teoremler olarak isimlendirilen sonraki bölümde ise tüm çalışılan konularla ilgili notasyon, tanım ve ilgili eşitsizlikler, Berezin dönüşümü, Berezin yarıçapı ve genelleştirilmiş durumlar ile ilgili son yıllarda yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bununla birlikte, sonuçlarımızda kullanacağımız bazı temel yardımcı teoremler sunulmuştur.

Araştırma Bulguları ve Tartışma olarak isimlendirilen diğer bölüm iki alt kısma ayrılmıştır. Dördüncü bölümün ilk alt kısmında Berezin yarıçap eşitsizliklerinin birkaç iyileştirmesi oluşturulmuştur. Ayrıca bu bölümün temel amacı olarak, operatör konveks fonksiyonların özelliklerini kullanarak sayısal yarıçap için bilinen bazı eşitsizliklerin yeni interpolasyon eşitsizlikleri sunulmuştur. Berezin yarıçapı ve operatör norm ile ilgili temel eşitsizliğin başka bir iyileştirmesini olan eşitsizlik kullanılarak özel durumda yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir. Özel durumda, bir fonksiyonel Hilbert uzay, hiponormal operatör ve sıfırı içinde bulunduran pozitif reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı negatif olmayan artan operatör konveks fonksiyon için yeni bir eşitsizlikler gösterilmiştir.

Sunulan bu tez çalışmasının son bölümü Sonuç ve Öneriler kısmıdır. Beşinci bölüm olan bu kısımda bir önceki bölümde verilen ana sonuçlar kısa olarak tartışılmış ve bu sonuçların devamı veya ilgili sonuçlar ile ilgili bir takım öneriler ve problemler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sayısal yarıçap, Berezin yarıçapı, Fonksiyonel Hilbert uzay, Berezin norm, Konveks fonksiyon, Eşitsizlikler.

2025, 39 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

INTERPOLATION INEQUALITIES AND BEREZIN RADIUS

Osman Okan SATMAZ

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

In this master thesis, some basic theories about the numerical radius, the Berezin symbol, and the Berezin radius are introduced. Also, the basic inequalities for the Berezin radius involving a functional Hilbert space operator are analyzed. We plan to structure this master thesis into five main chapters. Firstly, in the introduction part, the usage areas, properties, and historical process of the concepts of Berezin number and numerical radius are mentioned. In the second chapter, the historical development of the problems studied in the thesis and recent studies are analyzed in detail. In the next section, known auxiliary theorems, notation, definitions, and related inequalities, the Berezin transformation, the Berezin radius and generalized cases are given. In addition, some basic auxiliary theorems that we will use in our results are presented.

The next section, called Research Results and Discussion, is divided into two subsections. In the first subsection of the fourth section, several refinements of the Berezin radius inequalities are established. Also, as the main aim of this chapter, new interpolation inequalities of some known inequalities for the numerical radius using the properties of operator convex functions are presented. A new inequality is obtained in the special case by using another improvement of the basic inequality related to the Berezin radius and the operator norm. In the special case, a new inequality is shown for a nonnegative increasing operator convex function defined on a functional Hilbert space, a hyponormal operator, and a set of positive real numbers containing zero.

The last chapter of this thesis is the Conclusion and Suggestions section. In this section, which is the fifth chapter, the main results given in the previous chapter are briefly discussed, and some suggestions and problems related to the continuation of these results or related results are given.

Keywords: Numerical radius, Berezin radius, Functional Hilbert space, Berezin norm, convex function, inequalities.

2025, 39 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgilerimi sunarım.

Osman Okan SATMAZ

ISPARTA, 2025

SİMGELER DİZİNİ

$\mathfrak{B}(\mathfrak{H})^{+}$	$\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$'daki tüm pozitif operatörlerin kümesi
$\mathrm{ber}(\mathfrak{G})$	$\mathfrak{G}$'nin Berezin yarıçapı
$\mathrm{Ber}(\mathfrak{G})$	$\mathfrak{G}$'nin Berezin kümesi
$\mathbb{D}$	Birim disk
$\mathfrak{H}$	Hilbert uzay
$\mathfrak{I}$	Birim operatör
FHU	Fonksiyonel Hilbert uzay
$\widehat{k}_{\tau}$	$\mathfrak{H}$ uzayının normalleştirilmiş çekirdek üreteni
$m(\mathfrak{X})$	$\mathfrak{X}$ operatörünün minimum normu
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathrm{Re}(\mathfrak{X})$	$\mathfrak{X}$ operatörünün gerçel kısmı
$\widetilde{\mathfrak{G}}$	$\mathfrak{G}$'nin Berezin sembolü
$\mathfrak{W}(.)$	Sayısal aralık kümesi
$\mathfrak{w}(.)$	Sayısal yarıçap
$\Vert\mathfrak{G}\Vert_{\mathrm{Ber}}$	$\mathfrak{G}$'nin Berezin normu

1. GİRİŞ

Bir operatörün Berezin sayısı ve sayısal yarıçapı kavramları bir çok alandaki çeşitli uygulamaları nedeniyle kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Üretici çekirdekler konusu harmonik ve biharmonik fonksiyon sınıfları için kullanılan Zaremba ve integral denklemler teorisi için kullanan Mercer'e kadara dayanmaktadır. Daha sonra, analitik ve harmonik ve analitik fonksiyon sınıfları için bu kavram verilmiş ve çekirdek fonkiyonu olarak isimlendirilmiştir (Bergman, 1922). Yakın zamanda, bu kavram diferensiyel ve integral denklemler, operatörler teorisi ve harmonik analizde uygulanarak faydalı çıktılar alınmıştır (Saitoh, 1988). Bu kavram sayesinde tanımlanan Berezin sembolü, özellikle Hardy ve Bergman uzaylarındaki Toeplitz ve Hankel operatörleriyle olan bağlantısı açısından kapsamlı bir incelemeye tabi tutulmuştur. Geniş kapsamlı uygulamaları, operatörleri benzersiz bir şekilde karakterize etmede vazgeçilmez bir rol oynayarak çeşitli analitik sorgulamalara yayılır. Her hangi iki operatör $\mathfrak{G}$ ve $\mathfrak{J}$ ve bunların Berezin sembolü $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ve $\widetilde{\mathfrak{J}}$ olmak üzere her $\Theta \in \Xi$ için $\widetilde{\mathfrak{G}}(\Theta) = \widetilde{\mathfrak{J}}(\Theta)$ olarak ifade edilir ve $\mathfrak{G} = \mathfrak{J}$ olduğu anlamına gelir.

Felix Berezin'e ithafen Berezin sayısı, ilk olarak Berezin (1972, 1974)'te kendisi tarafından önerilmiştir. Matematiksel analizde eşitsizlikler, operatörlerin özelliklerini alt ve üst sınırlar şeklinde analiz etmek için kullanılır. Bilim ve mühendisliğin çoğu alanlarında, matematiksel eşitsizlikler, gerçek dünya problemlerini tanımlamanın ve bunlara çözüm önermenin en önemli yoludur. Analiz derslerinde incelenen pek çok operatör türünün sınırlılık özelliği, teori ve uygulama oluşturmada önemli bir husustur. Örneğin alt ve üst sınırlardan bazı alakalı konuların incelenmesinde önemli olan operatör normunu oluşturmak için yararlanılır. Matematik ve matematiksel fizik alanındaki birçok araştırmacı, fonksiyonel Hilbert uzayında tanımlanan bir operatörün Berezin sembolüyle ilgilenmektedir. Bu amaçla, birkaç matematikçi

$$\mathrm{ber}(\mathfrak{G}) \leq \mathfrak{w}(\mathfrak{G}) \leq \|\mathfrak{G}\| \tag{1.1}$$

şeklinde verilen eşitsizlik hakkında bazı iyileştirmeler ve genelleştirmeler yapmıştır (Bhunia vd., 2023a; Garayev vd., 2016, 2017, 2021b,a; Gürdal ve Başaran, 2023a;

Başaran ve Gürdal, 2023a; Huban vd., 2021c, 2022c). Bu eşitsizliğin inceliklerini ve uzantılarını elde etmek akademisyenlerin ilgisini çekmektedir.

Tezin amacı üretici çekirdek ve onun yardımıyla elde edilen Berezin sembollerini kullanarak bazı operatör sınıflarının Berezin yarıçapı için hedeflenen eşitsizlikler ile ilgili yeni sonuçlar ortaya koymaktır. Bu amaca ulaşmak için temel argümanlarımız pozitif operatörler için klasik Schwarz eşitsizliği, Schwarz eşitsizliğinin bir varyantı, operatör konveks fonksiyon, alışılmış norm için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği, sayısal yarıçap ve genelleştirilmiş sayısal yarıçap eşitsizlikleri kullanmaktır. Bu argümanlar kullanacağımız metodlarla beraber çalışmamıza yeni bir bakış açısı kazandırmıştır.

Tez çalışması sonucunda ortaya konan sonuçlar aşağıda özet olarak verilmiştir. Bu özet ile ilgili detaylar Araştırma Bulguları ve Tartışma bölümde verilecektir.

- Berezin yarıçap eşitsizliklerinin (3.13) gibi birkaç iyileştirmesi oluşturulmuştur. Ayrıca bu kısımda, operatör konveks fonksiyonların özelliklerini kullanarak sayısal yarıçap için bilinen bazı eşitsizliklerin yeni interpolasyon eşitsizlikleri sunulmuştur (Kısım 4.1).

- Berezin yarıçapı için bilinen yeni interpolasyon eşitsizlikleri, operatör konveks fonksiyon özellikleri kullanılarak elde edilmiştir (Kısım 4.2).

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde tezimiz üzerinde çalışılmış olan problemlerin tarihsel gelişimi ve son dönemde yapılan çalışmalar detaylı olarak incelenecektir.

Normlu bir lineer uzayda lineer bir operatörün sayısal aralığı, operatörün hem cebirsel hem de norm yapılarıyla ilişkili olacak şekilde inşa edilen skaler alanın bir alt kümesidir. Bu yönüyle, cebirsel yapıyla ilişkili ancak normdan bağımsız olan spektrumdan farklıdır. Bir Hilbert uzayı üzerindeki bir operatör için sayısal aralık tanımı 1918 yılında Toeplitz tarafından ortaya atılmıştır. $\mathfrak{W}(\mathfrak{G})$ sayısal aralığı, motivasyonunun bir kısmını klasik ikinci dereceden formlar teorisine borçludur. Ancak modern gelişmeler doğal olarak sınırlı lineer operatörler teorisi açısından verilmiştir. İkinci dereceden formların teorileri ve uygulamaları matematiğin ve diğer bilimlerin birçok bölümünde yer almaktadır. $\mathfrak{W}(\mathfrak{G})$ için $\mathfrak{G}$'nin sayısal aralığı ve $\mathfrak{G}$ için değerler alanı olan iki rakip isim vardır. İlki tarihsel olarak fonksiyonel analiz topluluğu tarafından, ikincisi ise matris analizi topluluğu tarafından tercih edilmiştir. Başlangıçta, Toeplitz ve Hausdorff buna bilineer bir formun Wertvorrat'ı demişlerdir, bu nedenle diğer iyi isimler değer alanı veya form değerleri olabilir. Rus topluluğu bunu Hausdorff alanı olarak adlandırmıştır. Murnaghan, bir $n \times n$ matris $\mathfrak{G}$ için bu değerlerin kapsadığı kompleks düzlemin bölgesini, daha sonra Hermitian matrisin aralığını, daha sonra da aranan bölge olarak adlandırdığı şeyi analiz ettiğinde değerler alanı olarak adlandırdı. Marshall Stone operatör teorisi üzerine yazdığı kitabında $\mathfrak{W}(\mathfrak{G})$ için sayısal aralık adını kullanmayı tercih etmiştir (Hille, 1934). Sayısal aralık (sayısal yarıçap ve genellemeleri) terimi, operatör teorisi, fonksiyonel analiz, C^*-cebirleri, Banach cebirleri, matris normları, eşitsizlikler, sayısal analiz, kuantum fiziği, kuantum hesaplama gibi saf ve uygulamalı matematiğin birçok farklı dalıyla ilgilidir ve bu dallarda uygulamaları vardır. Öte yandan, cebir, analiz, geometri, kombinatoryal teori ve bilgisayar programlama gibi çok çeşitli matematiksel araçlar, çalışmalarında yararlıdır. Sayısal $\mathfrak{W}(\mathfrak{G})$ aralığı hakkında daha fazla bilgiyi içeren literatürde birçok kitap vardır (Riesz ve Nagy, 1955; Halmos, 1982; Horn ve Johnson, 2012; Bonsal ve Duncan, 2013; Furuta, 2001).

Eşitsizlikler, klasik Yunan Geometrisinden Modern Kalkülüs'e kadar matematiksel keşiflere yardımcı olmuştur ve eşitsizliklerin statüsünün sadece bazı matematiğe destek olmaktan çıkıp çalışılacak bir disiplin haline gelmesi iki bin yıl sürmüştür. Klasik Yunan Geometrisinde eşitsizlikler, nicelikler arasındaki olgusal ilişkileri ifade ediyordu. Hintli ve Çinli matematikçiler de bu eşitsizlikler hakkında bilgi sahibi olmuş olabilirler. Modern dönem Cebir'in gelişimi ile temsil edilmektedir. Cebirin yükselişi ve matematiksel sembollerin benimsenmesi, eşitsizliklerin matematiğin büyük resminde daha kolay fark edilmesini sağlamıştır. Fonksiyonlar teorisinin yükselişiyle birlikte eşitsizlikler daha fazla değer kazanmış gibi görünmektedir. Matematikçiler ünlü Antik eşitsizlikleri kanıtlamak (örneğin Cauchy), uzantılarını oluşturmak (örneğin Schwarz) veya yenilerini geliştirmek (örneğin Newton, Maclaurin, Bernoulli) için çalışmaya başladılar. Yüzyıllar boyunca üretilen ve kullanılan çok sayıda eşitsizlik olmasına rağmen, eşitsizliklerin büyük üretimi Journal of the London Mathematical Society'nin ortaya çıkmasıyla başlamıştır. Ayrıca, ilk eşitsizlikler tarihi kitabı Hardy ve arkadaşları tarafından 1934 yılında Inequalities (Eşitsizlikler) kitabının editörlüğünde yazılmıştır (Hardy vd., 1967). Gustafson ve Rao'nun kitabında sayısal aralık, lineer operatörlerin ve matrislerin değerleri alanı, sayısal aralık ve sayısal yarıçap kavramları, operatör teorisi, trigonometri, sayısal analiz ve diğerleri dahil olmak üzere Çağdaş Matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir rol oynamaktadır (Gustafson ve Rao, 1997). 1997'den bu yana bu matematiksel nesnelere adanmış araştırmalar büyük ölçüde artmıştır. Daha önce de belirtildiği gibi eşitsizliklerin kendine yer bulamadığı neredeyse hiçbir matematik alanı yoktur. Sonuç olarak, sayısal yarıçapla ilgili eşitsizlikler dünya çapında birçok matematikçi için büyük bir araştırma konusu haline gelmiştir (Bhunia vd., 2022; Bonsal ve Duncan, 2013; Gustafson ve Rao, 1997; El-Haddah ve Kittaneh, 2007; Furuta vd., 2005a; Heydarbeygi ve Amyarii, 2021; Heydarbeygi vd., 2020; Kittaneh, 2002, 2004, 2003; Sababheh vd., 2019).

Üretici çekirdek konusu Aronszajn (1950) tarafından verilmiştir ve bu kavram diferensiyel ve integral denklemler, operatörler teorisi ve harmonik analizde uygulanarak faydalı çıktılar alınmıştır (Saitoh, 1988, 1997). Felix Berezin, kuantizasyonda bir araç olarak fonksiyonel Hilbert uzayı üzerindeki bir operatörün Berezin dönüşümünü tanıtmıştır (Berezin, 1972, 1974). Bir operatörün Berezin dönüşümü, operatör hakkında önemli bilgiler sağlar. Özellikle, Hardy uzayı, Bergman uzayı, Dirichlet uzayı ve

Fock uzayları dahil olmak üzere en bilinen fonksiyonel Hilbert uzaylarında, Berezin dönüşümünün operatörü benzersiz bir şekilde belirlediği bilinmektedir.

Berezin dönüşümünü içeren ilk önemli sonuçlardan biri, Hardy uzayı üzerinde çalışan Toeplitz operatörlerinin tersinebilirliğini içerir (Douglas, 1973; Nikolski, 1986). Bununla ilgili benzer sonuçlar Karaev tarafından ispatlamıştır . Bunlar ile ilgili diğer önemli sonuçlar için Nordgren ve Rosenthal (1994); Engliš (1999); Karaev (2002, 2006a, 2012), Garayev vd. (2016) ve Garayev vd. (2017) çalışmalarına bakılabilir. Devamında üretici çekirdek ve bunun yardımıyla elde edilen Berezin sembolü çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir (Ahern, 2004; Axler ve Zheng, 1998; Bakherad ve Garayevl, 2019; Başaran vd., 2019, 2022; Başaran ve Gürdal, 2023a,b; Başaran vd., 2019; Cowen ve Felder, 2022; Gürdal ve Alomari, 2022; Huban vd., 2021b; Garayev vd., 2020; Gürdal ve Yücel, 2022; Huban vd., 2021a,b; Saltan vd., 2022; Yamanci vd., 2020; Garayev vd., 2020; Başaran vd., 2019; Kilic, 1994, 1995; Saltan vd., 2022; Stojiljkovic ve Gürdal, 2024).

Bu tez çalışmasında, Berezin sembolü ve Berezin yarıçapı ile ilgili önemli eşitsizliklerin elde edilmesi üzerine bazı incelemeler yapılmıştır. Çalışmada elde edilen sonuçlarda Huban vd. (2021a), Dragomir (2013), Gürdal ve Başaran (2023b) ve Lu (2022)'deki çalışmalarda mevcut olan yöntemler ve sonuçlar kullanılarak ortaya koyulmuştur.

3. BİLİNEN YARDIMCI TEOREMLER

Sunulan bu tez çalışması bazı iyi bilinen eşitsizlik tipleri kullanılarak Hilbert fonksiyon uzaylarında ifade edilen Berezin dönüşümü notasyonu için yeni tipli Berezin sayı eşitsizlikleri ile ilgili incelemeleri amaçlamaktadır. Bu bağlamda hedeflenen problemlerin ve bu problemlere yönelik ortaya konan çözüm yöntemleri ve sonuçlarının kolaylıkla algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonları bu bölümde sunacağız.

Bu kısım, sayısal yarıçap, Berezin yarıçapı ve genelleştirilmiş Berezin yarıçapı ile ilgili eşitsizlikleri araştırmamız için gerekli olan operatörler ve yardımcı teoremler ilgili bazı temel konuların kısa bir incelemesini içermektedir.

$\mathfrak{H}$ uzayı $\langle .,. \rangle$ iç çarpımı ile bir kompleks Hilbert uzayı tanımlasın ve $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ uzayı $\mathfrak{H}$ üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerinin ailesi olsun. $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}))$ için $\mathfrak{G}$ nin operatör normu

$$\|\mathfrak{G}\| = \sup\{\|\mathfrak{G}\mathfrak{x}\| : \mathfrak{x} \in \mathfrak{H} \text{ ve } \|\mathfrak{x}\| = 1\}$$

ile gösterilir.

Eğer her bir $\mathfrak{x} \in \mathfrak{H}$ için $\langle \mathfrak{G}\mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \geq 0$ ise o zaman $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ operatörüne pozitiftir denir. Eğer $\mathfrak{G}$ pozitif ve tersinebilir ise $\mathfrak{G} > 0$ şeklinde yazılır. Eğer $\mathfrak{G}^*\mathfrak{G} - \mathfrak{G}\mathfrak{G}^* \geq 0$ ise $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ operatörüne hiponormal denir.

$\mathfrak{G}$ operatörünün sayısal değeri

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{G}) = \sup\{|\langle \mathfrak{G}\mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle| : \mathfrak{x} \in \mathfrak{H} \text{ and } \|\mathfrak{x}\| = 1\}$$

ile tanımlanır. $\mathfrak{w}(.)$ sayısal yarıçapı tüm sınırlı lineer operatörleri $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ cebiri üzerinde bir normdur. Yani,

(i) Herhangi $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ için $\mathfrak{w}(\mathfrak{G}) \geq 0$ verilsin. Bu durumda $\mathfrak{w}(\mathfrak{G}) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathfrak{G} = 0$ olmasıdır,

(ii) Herhangi $\zeta \in \mathbb{C}$ için $\mathfrak{w}(\zeta\mathfrak{G}) = |\zeta|\,\mathfrak{w}(\mathfrak{G})$ ve $\mathfrak{G}$ß$n\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ olmasıdır,

(iii) Herhangi $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ için $\mathfrak{w}(\mathfrak{G}+\mathfrak{J})\leq\mathfrak{w}(\mathfrak{G})+\mathfrak{w}(\mathfrak{J})$ dir,

koşullarını sağlar (Dragomir, 2009, 2013).

$\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ için $\mathfrak{G}$ nin eşleniği $\mathfrak{G}^*$ ile ve $|\mathfrak{G}|$ ve $|\mathfrak{G}^*|$ ise sırasıyla $\mathfrak{G}$ ve $\mathfrak{G}^*$ nin pozitif kısımlarını tanımlayabiliriz. Yani, $|\mathfrak{G}|=(\mathfrak{G}^*\mathfrak{G})^{1/2}$ ve $|\mathfrak{G}^*|=(\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*)^{1/2}$ olur.

Yardımcı Teorem 3.1 (Buzano (1971))**.** $\|e\|=1$ *olmak üzere* $\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{e}\in\mathfrak{H}$ *olsun. Bu durumda*

$$|\langle\mathfrak{x},\mathfrak{e}\rangle\langle\mathfrak{e},\mathfrak{y}\rangle|\leq\frac{1}{2}(\|\mathfrak{x}\|\|\mathfrak{y}\|+|\langle\mathfrak{x},\mathfrak{y}\rangle|)$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.2 (Bhunia ve Paul (2021a))**.** $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *kendine eş operatörler olsun. Bu durumda*

$$\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|\leq\sqrt{\mathfrak{w}^2(\mathfrak{G}+i\mathfrak{J})+\|\mathfrak{G}\|\|\mathfrak{J}\|+\mathfrak{w}(\mathfrak{J}\mathfrak{G})}$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.3 (Heydarbeygi ve Amyarii (2021))**.** $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *bir pozitif operatörler olsun. Bu durumda* $\|\mathfrak{x}\|=1$ *ile* $\mathfrak{x}\in\mathfrak{H}$ *ve herhangi* $\lambda\geq 1$ *için*

$$\langle\mathfrak{G}\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle^{\lambda}\left(1+2(\lambda-1)\left(1-\frac{\left\langle\mathfrak{G}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{x},\mathfrak{x}\right\rangle}{\langle\mathfrak{G}\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\leq\left\langle\mathfrak{G}^{\lambda}\mathfrak{x},\mathfrak{x}\right\rangle$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.4 (Kittaneh (1988))**.** $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *olduğunu varsayalım.* f *ve* g *fonksiyonları her* $t\in[0,\infty]$ *için* $f(t)g(t)=t$ *bağıntısını sağlayan ve* $[0,\infty]$ *üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar olsun. O zaman her* $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in\mathfrak{H}$ *için*

$$\langle\mathfrak{G}\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle^{\lambda}\|f(|\mathfrak{G}|)\mathfrak{x}\|\|g(|\mathfrak{G}^*|)\mathfrak{y}\|$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.5 (Bhatia ve Kittaneh (2000)). $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *pozitif olsun. Bu durumda*

$$\|\mathfrak{G}\mathfrak{J}\|\leq\frac{1}{4}\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|^2 \tag{3.1}$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.6 (Kittaneh (1988)). (i) $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *olsun. Eğer* $f,g:[0,\infty]\to[0,\infty]$ *fonksiyonlar her* $t\geq 0$ *için* $f(t)\,g(t)=t$*'yi sağlayan sürekli fonksiyonlar ise o zaman*

$$|\langle\mathfrak{G}\mathfrak{x},\mathfrak{y}\rangle|\leq\|f(|\mathfrak{G}|)\,\mathfrak{x}\|\,\|g(|\mathfrak{G}^*|)\,\mathfrak{y}\|,\ \forall\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in\mathfrak{H} \tag{3.2}$$

sağlanır.

(ii) $\|\mathfrak{x}\|=1$ *olacak şekilde* $\mathfrak{x}\in\mathfrak{H}$ *olsun. O zaman*

$$|\langle\mathfrak{G}\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle|^2\leq\langle|\mathfrak{G}|\,\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle\,\langle|\mathfrak{G}^*|\,\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle \tag{3.3}$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.7 (Karaev (2002)). *Eğer* $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *pozitif operatörler ise o zaman* $\|\mathfrak{G}\mathfrak{J}\|=\|\mathfrak{G}\|\,\|\mathfrak{J}\|$ *olması için gerekli ve yeterli koşul* $\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|\leq\|\mathfrak{G}\|+\|\mathfrak{J}\|$ *olmasıdır.*

Şimdi, operatör konveks fonksiyonunun tanımını hatırlayalım: J aralığında reel değerli bir sürekli f fonksiyonu her $t\in[0,1]$ için ve spektraları J'de bulunan bir Hilbert uzayı $\mathfrak{H}$ üzerinde her kendine eşlenik $\mathfrak{G}$ ve $\mathfrak{J}$ operatörü için operatör mertebesinde

$$f((1-t)\,\mathfrak{G}+t\mathfrak{J})\leq(1-t)\,f(\mathfrak{G})+tf(\mathfrak{J})$$

ise operatör konveks olarak adlandırılır. Eğer $1\leq r\leq 2$ veya $-1\leq r\leq 0$ ise $f(t)=t^r$ fonksiyonu konveks operatördür.

Yardımcı Teorem 3.8 (Furuta vd. (2005b)). $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *kendine eşlenik bir operatör ve* $\mathfrak{x}\in\mathfrak{H}$ *bir birim vektör olsun. Eğer f fonksiyonu* $\mathfrak{G}$*'nin spektrumunu içeren bir aralık* *üzerinde konveks bir fonksiyon ise*

$$f(\langle \mathfrak{G}\mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle) \leq \langle f(\mathfrak{G})\mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \tag{3.4}$$

sağlanır. Eğer f bir konkav ise (3.4) eşitsizliği ters yönde de geçerli olur.

Yardımcı Teorem 3.9 (Dragomir (2011))**.** *$f : J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J aralığında bir operatör konveks fonksiyon olsun. $\mathfrak{G}$ ve $\mathfrak{J}$, spektraları J'de olan iki kendine eşlenik operatör olsun. Bu durumda*

$$f\left(\frac{\mathfrak{G}+\mathfrak{J}}{2}\right) \leq \int_0^1 f((1-t)\mathfrak{G}+t\mathfrak{J})\,dt \leq \frac{1}{2}(f(\mathfrak{G})+f(\mathfrak{J})) \tag{3.5}$$

sağlanır. Eğer f negatif değilse o zaman (3.5) operatör eşitsizliği

$$\left\| f\left(\frac{\mathfrak{G}+\mathfrak{J}}{2}\right) \right\| \leq \left\| \int_0^1 f((1-t)\mathfrak{G}+t\mathfrak{J})\,dt \right\| \leq \frac{1}{2}\|f(\mathfrak{G})+f(\mathfrak{J})\| \tag{3.6}$$

norm eşitsizliğine indirgenebilir.

Yardımcı Teorem 3.10. *$f : [0,d] \to [0,\infty]$ $(d > 0)$ fonksiyonu $f(0) = 0$ ve $\alpha \in [0,1]$ ile artan bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$f(\alpha\mathfrak{x}) = \alpha f(\mathfrak{x}) \tag{3.7}$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.11 (Aujla ve Silva (2003))**.** *f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan artan bir konveks fonksiyon ve $\mathfrak{G},\mathfrak{J} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ pozitif bir operatör olsun. Bu durumda her $0 \leq v \leq 1$ için*

$$\|f((1-v)\mathfrak{G}+v\mathfrak{J})\| \leq \|(1-v)f(\mathfrak{G})+vf(\mathfrak{J})\| \tag{3.8}$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.12 (Huban vd. (2021a)). *$\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Omega)$ bir fonksiyonel Hilbert uzay ve $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ bir öz-eşlenik olsun. Bu durumda*

$$\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|\leq\sqrt{\mathrm{ber}^2(\mathfrak{G}+i\mathfrak{J})+\|\mathfrak{G}\|\,\|\mathfrak{J}\|+\mathrm{ber}(\mathfrak{J}\mathfrak{G})} \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.13 (Başaran ve Gürdal (2021)). *$\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ pozitif bir operatör olsun. Bu durumda her $\lambda\in\Omega$ için*

$$\left(\widetilde{\mathfrak{G}}(\lambda)\right)^{\alpha}\leq\frac{1}{\mu}\widetilde{\mathfrak{G}^{\alpha}}(\lambda),\ \alpha\geq 1 \tag{3.10}$$

sağlanır. Burada $\mu=1+2(\alpha-1)\left(1-\frac{\widetilde{\mathfrak{G}^{1/2}}(\lambda)}{\left(\widetilde{\mathfrak{G}}(\lambda)\right)^{1/2}}\right)$ dir.

Yardımcı Teorem 3.14 (Yamanci ve Karli (2020)). *Eğer $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ bir hiponormal ise, yani $\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}-\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\geq 0$, ve $0\leq\lambda\leq 1$ olmak üzere $v=\min\{\lambda,1-\lambda\}$ ise o zaman*

$$\mathrm{ber}(\mathfrak{G})\leq\frac{1}{\zeta}\frac{\||\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|\|_{\mathrm{ber}}}{2} \tag{3.11}$$

sağlanır. Burada $\zeta\geq 1$ ve $\zeta=\inf_{\xi\in\Omega}\left\{K\left(\frac{\widetilde{|\mathfrak{G}|}(\xi)}{\widetilde{|\mathfrak{G}^*|}(\xi)},2\right)^{v}\right\}$ dir.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ karmaşık bir Hilbert uzayı $(\mathfrak{H},\langle .,.\rangle)$ üzerindeki tüm sınırlı doğrusal operatörlerin C^*-cebirini ve $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$'deki $1_{\mathfrak{H}}$ $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ özdeşlik operatörünü göstersin. Bir $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ operatörünün, her $\mathfrak{x}\in\mathfrak{H}$ için $\langle\mathfrak{G}\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle\geq 0$ ise pozitif olduğu söylenir. $\mathfrak{G}$ pozitif ve ters çevrilebilir ise $\mathfrak{G}>0$ yazıyoruz. $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ için, $\mathfrak{G}^*$,$\mathfrak{G}$'nin eşleniğini gösterir. $|\mathfrak{G}|=(\mathfrak{G}^*\mathfrak{G})^{1/2}$ ve $|\mathfrak{G}^*|=(\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*)^{1/2}$ yazıyoruz. Her $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{R}(\mathfrak{G})+i\mathfrak{I}(\mathfrak{G})$ şeklinde ayrıştırılabilir, burada $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})=\frac{1}{2}(\mathfrak{G}+\mathfrak{G}^*)$ ve $\mathfrak{I}(\mathfrak{G})=\frac{1}{2i}(\mathfrak{G}-\mathfrak{G}^*)$. Bu ayrışıma $\mathfrak{G}$'nin kartezyen ayrışımı denir. $\mathfrak{w}(\mathfrak{G})$ ile gösterilen $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$'nin sayısal yarıçapı $\mathfrak{w}(\mathfrak{G})=\sup\{|\langle\mathfrak{G}u,u\rangle|:u\in\mathfrak{H}\text{ ve }\|u\|=1\}$ olarak tanımlanır. $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$'nin operatör normunun $\|\mathfrak{G}\|=\sup\{\|\mathfrak{G}u\|:u\in\mathfrak{H}\text{ ve }\|u\|=1\}$ ile tanımlandığını hatırlayalım. $\mathfrak{w}(.)$'nin $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ üzerinde bir norm tanımladığını doğrulamak kolaydır. Ayrıca, $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$

üzerindeki operatör normuna eşdeğerdir ve

$$\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\| \leq \mathfrak{w}(\mathfrak{G}) \leq \|\mathfrak{G}\| \tag{3.12}$$

sağlanır.

Yakın zamanda yayınlanan bir kitap Bhatia ve Kittaneh (2000) ve (3.12)'deki eşitsizliklerin çeşitli iyileştirmelerini ve ilgili sonuçları tartışmaktadır. Okuyucu ayrıca Buzano (1971) makalelesini ve referanslarınıda inceleyebilir.

Şimdi dikkatimizi fonksiyonel Hilbert uzayına (FHU) çeviriyoruz. Fonksiyonel Hilbert uzayı $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$, boş olmayan bir küme Ω üzerindeki tüm kompleks değerli fonksiyonların bir Hilbert uzayıdır ve nokta değerlendirmelerinin sürekli olma özelliğine sahiptir, yani her $\tau \in \Omega$ için $E_\tau(h) = h(\tau)$ ile tanımlanan $E_\tau : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ eşlemesi süreklidir. Riesz temsil teoremi, her $\tau \in \Omega$ için $h(\tau) = \langle h, k_\tau \rangle$ olacak şekilde tek bir $k_\tau \in \mathfrak{H}$'nin var olmasını sağlar. Her $\tau \in \Omega$ için k_τ koleksiyonuna $\mathfrak{H}$'nin yeniden üreten çekirdeği ve her $\tau \in \Omega$ için $\widehat{k}_\tau := \frac{k_\tau}{\|k_\tau\|_{\mathfrak{H}}}$ koleksiyonuna $\mathfrak{H}$'nin normalleştirilmiş yeniden üreten çekirdeği denir. Herhangi bir $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ için, $\mathfrak{G}$'nin Berezin sembolü, Berezin (1972) tarafından tanıtılan, her $\tau \in \Omega$ için $\widetilde{\mathfrak{G}}(\tau) := \left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\tau \right\rangle$ şeklinde tanımlanan Ω üzerindeki bir $\mathfrak{G}$ fonksiyonudur. $\mathfrak{G}$'nin Berezin kümesi (veya aralığı) Ber$(\mathfrak{G})$ ile gösterilir ve Ber$(\mathfrak{G}) := \left\{ \widetilde{\mathfrak{G}}(\tau) : \tau \in \Omega \right\}$ olarak tanımlanır. $\mathfrak{G}$'nin Berezin sayısı (veya yarıçapı) ber$(\mathfrak{G})$ ile gösterilir ve $\mathfrak{G}$'nin Berezin normu $\|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}}$ ile gösterilir ve sırasıyla şu şekilde tanımlanır:

$$\text{ber}(\mathfrak{G}) := \sup_{\tau \in \Omega} \left| \widetilde{\mathfrak{G}}(\tau) \right| \text{ and } \|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}} := \sup_{\tau \in \Omega} \left\| \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau \right\|$$

(Karaev, 2006b, 2013). $\mathfrak{G}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ için Berezin sayısının ve Berezin normunun tanımından aşağıdaki özelliklerin sağlandığı açıktır:

(B1) Her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\text{ber}(\alpha\mathfrak{G}) = |\alpha| \, \text{ber}(\mathfrak{G})$,

(B2) $\text{ber}(\mathfrak{G} + \mathfrak{J}) \leq \text{ber}(\mathfrak{G}) + \text{ber}(\mathfrak{J})$,

(B3) $\text{ber}(\mathfrak{G}) \leq \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}$, (B4) Her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\|\alpha\mathfrak{G}\|_{\text{ber}} = |\alpha| \, \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}$,

(B5) $\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|_{\text{ber}} \leq \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}} + \|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}$,

(B6) $\|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}} = \|\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}$ ve $\text{ber}(\mathfrak{G}) = \text{ber}(\mathfrak{G}^*)$.

Bhunia vd. (2023b)'te, eğer $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ pozitif ise $\|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}} = \text{ber}(\mathfrak{G})$ olduğu kanıtlanmıştır. Tanımdan $\text{Ber}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{W}(\mathfrak{G})$ olduğu açıktır ve bu nedenle

$$\text{ber}(\mathfrak{G}) \leq \mathfrak{w}(\mathfrak{G}) \leq \|\mathfrak{G}\| \tag{3.13}$$

elde edilmiştir.

Berezin sayısı eşitsizlikleri yıllar boyunca birçok matematikçi tarafından incelenmiştir ve son yıllarda bu konu hakkında güncel sonuçların elde edilmesine devam edilmektedir (Başaran vd., 2019; Başaran ve Gürdal, 2023b; Başaran vd., 2022; Chalender vd., 2012; Garayev vd., 2017, 2021a; Gürdal ve Yücel, 2022).

2021 yılında Huban vd. (2021a)

$$\frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^2+|\mathfrak{G}^*|^2\right\|_{\text{ber}} \leq \text{ber}(\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{2}\left\||\mathfrak{G}|^2+|\mathfrak{G}^*|^2\right\|_{\text{ber}} \tag{3.14}$$

ve $r \geq 1$ için

$$\text{ber}^r(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{2}\||\mathfrak{G}|^r+|\mathfrak{J}|^r\|_{\text{ber}} \tag{3.15}$$

eşitsizliklerini kanıtlamışlardır. Ayrıca aynı yazarlar

$$\text{ber}(\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{2}\||\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|\|_{\text{ber}} \leq \frac{1}{2}\left(\|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}+\|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}^{1/2}\right) \tag{3.16}$$

ve $r \geq 1$ için

$$\text{ber}^{2r}(\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{2}\left\||\mathfrak{G}|^{2r}+|\mathfrak{G}^*|^{2r}\right\|_{\text{ber}} \tag{3.17}$$

eşitsizliklerini kanıtlamışlardır (Huban vd., 2022a,b).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, esas olarak Berezin yarıçap eşitsizliklerinin (3.13) gibi birkaç iyileştirmesi oluşturulmuştur. Ayrıca bu bölümde, operatör konveks fonksiyonların özelliklerini kullanarak sayısal yarıçap için bilinen bazı eşitsizliklerin yeni interpolasyon eşitsizlikleri sunulmuştur.

4.1. Berezin Yarıçap Eşitsizliklerinin Bazı İyileştirmeleri

Şimdi aşağıdaki norm eşitsizliklerini ispatlayalım.

Teorem 4.1. *$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\Omega)$ bir FHU ve $\mathfrak{G}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ olsun. Bu durumda*

$$\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 \leq \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{J}^*\mathfrak{J}\|_{\text{ber}} + \text{ber}(\mathfrak{G}^*\mathfrak{J})$$

ve

$$\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 \leq \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*+\mathfrak{J}\mathfrak{J}^*\|_{\text{ber}} + \text{ber}(\mathfrak{G}\mathfrak{J}^*)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. τ ve υ keyfi bir sayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle (\mathfrak{G}+\mathfrak{J})\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 \\
&\leq \left(\left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|\right)^2 \\
&= \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + 2\left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle \left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + 2\left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle \left\langle \widehat{k}_\tau, \mathfrak{J}\widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| \\
&\leq \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left\|\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau\right\| \left\|\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau\right\| + \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \mathfrak{J}\widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| \\
&\leq \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\left\|\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau\right\| + \left\|\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau\right\|\right) + \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \mathfrak{J}\widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| \\
&\leq \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \frac{1}{2}\left\langle (\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\tau \right\rangle + \left|\left\langle \mathfrak{G}^*\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\tau \right\rangle\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada dördüncü eşitsizlik Buzano'nun eşitsizliğinden elde edilir (Buzano, 1971). Buzano eşitsizliği: eğer $\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{e}\in\mathfrak{H}$ ve $\|\mathfrak{e}\|=1$ ise o zaman

$$\left|\langle\mathfrak{x},\mathfrak{e}\rangle\langle\mathfrak{e},\mathfrak{y}\rangle\right|\leq\frac{1}{2}\left(\|\mathfrak{x}\|\,\|\mathfrak{y}\|+|\langle\mathfrak{x},\mathfrak{y}\rangle|\right) \tag{4.1}$$

anlamına gelmektedir. Şimdi, $\tau=\upsilon$ ile her $\tau,\upsilon\in\Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in\Omega}\left|\left\langle(\mathfrak{G}+\mathfrak{J})\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^2 &\leq \sup_{\tau\in\Omega}\left|\left\langle\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^2+\sup_{\tau\in\Omega}\left|\left\langle\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^2\\ &\quad+\sup_{\tau\in\Omega}\frac{1}{2}\left\langle(\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle+\left|\left\langle\mathfrak{G}^*\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|\end{aligned}$$

ve eşdeğer olarak

$$\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2\leq\|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}^2+\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2+\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{J}^*\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}+\text{ber}\left(\mathfrak{G}^*\mathfrak{J}\right) \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.2)'de $\mathfrak{G}$'yi $\mathfrak{G}^*$ ile ve $\mathfrak{J}$'yi $\mathfrak{J}^*$ ile değiştirirsek

$$\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2\leq\|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}^2+\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2+\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*+\mathfrak{J}\mathfrak{J}^*\|_{\text{ber}}+\text{ber}\left(\mathfrak{G}\mathfrak{J}^*\right)$$

olur. İspat böylece tamamlanmış olur. □

(Huban vd., 2021a, Theorem 3.1)'de, Huban vd. tarafından (3.13)'deki ikinci eşitsizliğin başka bir iyileştirmesi elde edilerek

$$\frac{1}{4}\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}\leq\text{ber}^2\left(\mathfrak{G}\right)\leq\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}} \tag{4.3}$$

eşitsizliği kanıtlanmıştır.

Yukarıdaki norm eşitsizliklerine dayanarak Huban vd. (2021a)'nin elde ettiği (4.3) eşitsizliğinin aşağıdaki iyileştirmesi elde edilmiştir:

Teorem 4.2. $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Omega)$ *bir FHU ve* $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{4}\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}$$

$$\leq \frac{1}{8}\left[\left(\|\mathfrak{G}+\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}^2+\|\mathfrak{G}-\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\|\mathfrak{G}+\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}^2-\|\mathfrak{G}-\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \text{ber}^2(\mathfrak{G})$$

sağlanır.

İspat. $\mathfrak{G}=\mathfrak{J}+iR$, $\mathfrak{G}$'nin kartezyen ayrışımı olsun. Bu durumda $\mathfrak{J}$ ve R kendine eş operatörlerdir ve $\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*=2\left(\mathfrak{J}^2+R^2\right)$ dir. O halde

$$\frac{1}{4}\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}=\frac{1}{2}\left\|\mathfrak{J}^2+R^2\right\|_{\text{ber}} \tag{4.4}$$

olduğu bilinen bir gerçektir. (4.4) ve Teorem 4.1'den

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}\\
&=\frac{1}{2}\left\|\mathfrak{J}^2+R^2\right\|_{\text{ber}}\\
&\leq \frac{1}{2}\left[\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^4+\|R\|_{\text{ber}}^4+\frac{1}{2}\left\|\mathfrak{J}^4+R^4\right\|_{\text{ber}}+\text{ber}\left(\mathfrak{J}^2R^2\right)\right]^{1/2}\\
&\leq \frac{1}{2}\left[\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^4+\|R\|_{\text{ber}}^4+\frac{1}{2}\left(\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^4+\|R\|_{\text{ber}}^4\right)+\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2\|R\|_{\text{ber}}^2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

sağlanır. İspatın geri kalanı basit bir hesaplamayla kolayca gösterilebilir. □

Aşağıdaki teorem, (4.5) eşitsizliğinin Teorem 4.2'da verilen eşitsizliğin bir iyileştirmesi olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.3. $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Omega)$ *bir FHU ve* $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}\\
&\leq \frac{1}{8}\left[\left(\|\mathfrak{G}+\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}^2+\|\mathfrak{G}-\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}^2\right)+\frac{3}{4}\left(\|\mathfrak{G}+\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}^2+\|\mathfrak{G}-\mathfrak{G}^*\|_{\text{ber}}^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \text{ber}^2(\mathfrak{G})
\end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Şimdi (4.5)'deki ilk eşitsizliği ispatlayalım. Aslında, (4.4)'e göre, alışılmış norm için AM-GM eşitsizliği (Bhunia ve Paul, 2021b), $\text{ber}^2\left(\mathfrak{J}^2+iR^2\right)\leq\left\|\mathfrak{J}^4+R^4\right\|_{\text{ber}}$

eşitsizliği ve (3.1) eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\right\|_{\text{ber}} \\
&=\frac{1}{2}\left\|\mathfrak{J}^2+R^2\right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\text{ber}^2\left(\mathfrak{J}^2+iR^2\right)+\left\|\mathfrak{J}^2\right\|_{\text{ber}}\left\|R^2\right\|_{\text{ber}}+\text{ber}\left(\mathfrak{J}^2R^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\left\|\mathfrak{J}^4+R^4\right\|_{\text{ber}}+\left\|\mathfrak{J}^2\right\|_{\text{ber}}\left\|R^2\right\|_{\text{ber}}+\left\|\mathfrak{J}^2R^2\right\|_{\text{ber}}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^4+\|R\|_{\text{ber}}^4+\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2\|R\|_{\text{ber}}^2+\frac{1}{4}\left\|\mathfrak{J}^2+R^2\right\|_{\text{ber}}^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^4+\|R\|_{\text{ber}}^4+\frac{1}{2}\left(\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^4+\|R\|_{\text{ber}}^4\right)+\frac{1}{4}\left(\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2+\|R\|_{\text{ber}}^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (4.5)'de istenilen birinci eşitsizliği verir. Şimdi (4.5)'teki ikinci eşitsizliği ispatlayacağız. $\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}\leq \text{ber}(\mathfrak{G})$ ve $\|R\|_{\text{ber}}\leq \text{ber}(\mathfrak{G})$'ye sahibiz. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left\|\mathfrak{G}^*\mathfrak{G}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}^*\right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^4+\|R\|_{\text{ber}}^4+\frac{1}{2}\left(\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^4+\|R\|_{\text{ber}}^4\right)+\frac{1}{4}\left(\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2+\|R\|_{\text{ber}}^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left[4\text{ber}^4(\mathfrak{G})\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \text{ber}^2(\mathfrak{G})
\end{aligned}$$

olur. Bu da (4.5)'de istenilen ikinci eşitsizliği verir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.4. *$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Omega)$ bir FHU ve $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ olsun. O halde*

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|_{\text{ber}} &\leq \sqrt{\|\mathfrak{G}+i\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2+\|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{Ber}}+\text{ber}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G})} \\
&\leq \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}+\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

sağlanır.

İspat. τ ve υ nin keyfi bir sayı olduğunu varsayalım. O zaman

$$\left|\left\langle(\mathfrak{G}+\mathfrak{J})\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\upsilon\right\rangle\right|^2\leq\left(\left|\left\langle\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\upsilon\right\rangle\right|+\left|\left\langle\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\upsilon\right\rangle\right|\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + 2\left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle \left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + 2\left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle \left\langle \widehat{k}_\tau, \mathfrak{J}\widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| \\
&\leq \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left\|\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau\right\| \left\|\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau\right\| + \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \mathfrak{J}\widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle + i\left\langle \mathfrak{J}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left\|\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau\right\| \left\|\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau\right\| + \left|\left\langle \mathfrak{J}^*\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle (\mathfrak{G}+i\mathfrak{J})\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left\|\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau\right\| \left\|\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau\right\| + \left|\left\langle \mathfrak{J}^*\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|
\end{aligned}
$$

olur. Burada ikinci eşitsizlik $(|a|+|b|)^2 = |a|^2+|b|^2+2|ab|$ eşitsizliğinden ve beşinci eşitsizlik ise $|a+ib|^2 = |a|^2+|b|^2$ eşitsizliğinden elde edilir. Bu nedenle

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle (\mathfrak{G}+\mathfrak{J})\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 \\
&\leq \left|\left\langle (\mathfrak{G}+i\mathfrak{J})\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|^2 + \left\|\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau\right\| \left\|\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau\right\| + \left|\left\langle \mathfrak{J}^*\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\upsilon \right\rangle\right|
\end{aligned}
$$

sağlanır. Şimdi, yukarıdaki eşitsizlikte $\tau = \upsilon$ olacak şekilde $\tau, \upsilon \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$
\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 \leq \|\mathfrak{G}+i\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{Ber}} + \text{ber}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G})
$$

ve

$$
\|\mathfrak{G}+\mathfrak{J}\|_{\text{ber}} \leq \sqrt{\|\mathfrak{G}+i\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{Ber}} + \text{ber}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G})}.
$$

elde edilir. Şimdi (4.6)'nin ikinci eşitsizliğini kanıtlayacağız.

$$
\begin{aligned}
(\|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}} + \|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}})^2 &\leq \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + 2\|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}} \\
&= \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}} + \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}} \\
&\geq \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{Ber}} + \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}} \\
&\geq \|\mathfrak{G}+i\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{Ber}} + \text{ber}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G}),
\end{aligned}
$$

ve, böylece

$$
\sqrt{\|\mathfrak{G}+i\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}^2 + \|\mathfrak{G}\|_{\text{Ber}}\|\mathfrak{J}\|_{\text{Ber}} + \text{ber}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G})} \leq \|\mathfrak{G}\|_{\text{ber}} + \|\mathfrak{J}\|_{\text{ber}}
$$

olur. Bu da (4.6)'deki istenilen ikinci eşitsizliği verir. □

Teorem 4.5. $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Omega)$ *bir FHU olsun. Eğer* $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *ve* f *ve* g *fonksiyonları* $[0,\infty)$ *üzerinde* $f(t)\,g(t)=t$ $(t\geq 0)$*'ı sağlayan negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her* $r\geq 1$ *için*

$$\begin{aligned}\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{G}) &\leq \frac{1}{4}\left\|f^{4r}(|\mathfrak{G}|)+g^{4r}(|\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{4}\left\|f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\,g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)+g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\,f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\right\|_{\text{ber}}\\ &\leq \frac{1}{4}\left\|f^{4r}(|\mathfrak{G}|)+g^{4r}(|\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\operatorname{ber}\left(f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\,g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\right) \qquad (4.7)\end{aligned}$$

sağlanır.

İspat. τ keyfi bir sayı olsun. O zaman (3.2) eşitsizliklerinden, Hölder-McCarthy eşitsizliğinden ve AM-GM eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^{2r}\\ &\leq\left\langle f^2(|\mathfrak{G}|)\,\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle^r\left\langle g^2(|\mathfrak{G}^*|)\,\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle^r\\ &\leq\left\langle f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\,\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\left\langle g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\,\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\\ &\leq\left(\frac{\left\langle f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\,\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle+\left\langle g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\,\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle}{2}\right)^2\\ &\leq\frac{1}{4}\left\langle\left(f^{2r}(|\mathfrak{G}|)+g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\right)\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle^2\\ &\leq\frac{1}{4}\left\langle\left(f^{2r}(|\mathfrak{G}|)+g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\right)^2\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\\ &=\frac{1}{4}\left\langle\left(f^{4r}(|\mathfrak{G}|)+g^{4r}(|\mathfrak{G}^*|)+f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\,g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)+g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\,f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\right)\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^{2r}\\ &\leq\frac{1}{4}\left\langle\left(f^{4r}(|\mathfrak{G}|)+g^{4r}(|\mathfrak{G}^*|)+f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\,g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)+g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\,f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\right)\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte $\tau\in\Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}&\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{G})\\ &\leq\frac{1}{4}\left\|f^{4r}(|\mathfrak{G}|)+g^{4r}(|\mathfrak{G}^*|)+f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\,g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)+g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\,f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\right\|_{\text{ber}}\\ &\leq\frac{1}{4}\left(\left\|f^{4r}(|\mathfrak{G}|)+g^{4r}(|\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\text{ber}}+\left\|f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\,g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)+g^{2r}(|\mathfrak{G}^*|)\,f^{2r}(|\mathfrak{G}|)\right\|_{\text{ber}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left\|f^{4r}\left(|\mathfrak{G}|\right)+g^{4r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{4}\left\|f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)+g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)\right\|_{\text{ber}}$$

sağlanır. (B6) ve (B2) özelliğinden de

$$\begin{aligned}
\text{ber}\left(f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)\right) &= \frac{1}{2}\text{ber}\left(f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)\right)+\frac{1}{2}\text{ber}\left(g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\text{ber}\left(f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)+g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\left\|f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)+g^{2r}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)f^{2r}\left(|\mathfrak{G}|\right)\right\|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

istenilen eşitsizlik elde edilir. Sonuç olarak teorem ispatlanmıştır. □

Sonuç 4.6. *(4.7) eşitsizliğinde $r=1$ alınırsa Gürdal ve Başaran (2023b)'in sonucu olan*

$$\begin{aligned}
\text{ber}^2\left(\mathfrak{G}\right) &\leq \frac{1}{4}\left\|f^{4}\left(|\mathfrak{G}|\right)+g^{4}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{4}\left\|f^{2}\left(|\mathfrak{G}|\right)g^{2}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)+g^{2}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)f^{2}\left(|\mathfrak{G}|\right)\right\|_{\text{ber}}\\
&\leq \frac{1}{4}\left\|f^{4}\left(|\mathfrak{G}|\right)+g^{4}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\text{ber}\left(f^{2}\left(|\mathfrak{G}|\right)g^{2}\left(|\mathfrak{G}^*|\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.7) eşitsizliğinde $0\leq v\leq 1$ olduğunda $f(t)=t^{1-v}$ ve $g(t)=t^{v}$ alınırsa aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

Sonuç 4.7. *Eğer $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}\left(\mathfrak{H}\right)$ ise, o zaman*

$$\begin{aligned}
\text{ber}^{2r}\left(\mathfrak{G}\right) &\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4r(1-v)}+|\mathfrak{G}^*|^{4rv}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{2r(1-v)}|\mathfrak{G}^*|^{2rv}+|\mathfrak{G}^*|^{2rv}|\mathfrak{G}|^{2r(1-v)}\right\|_{\text{ber}}\\
&\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4r(1-v)}+|\mathfrak{G}^*|^{4rv}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\text{ber}\left(|\mathfrak{G}|^{2r(1-v)}|\mathfrak{G}^*|^{2rv}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.8. *Eğer Sonuç 4.7'de $r=1$ alınırsa, o zaman*

$$\begin{aligned}
\text{ber}^{2}\left(\mathfrak{G}\right) &\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4(1-v)}+|\mathfrak{G}^*|^{4v}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{2(1-v)}|\mathfrak{G}^*|^{2v}+|\mathfrak{G}^*|^{2v}|\mathfrak{G}|^{2(1-v)}\right\|_{\text{ber}}\\
&\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4(1-v)}+|\mathfrak{G}^*|^{4v}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\text{ber}\left(|\mathfrak{G}|^{2(1-v)}|\mathfrak{G}^*|^{2v}\right)
\end{aligned}$$

sağlanır. Özel durumda

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ber}^2(\mathfrak{G}) &\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^2+|\mathfrak{G}^*|^2\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}||\mathfrak{G}^*|+|\mathfrak{G}^*||\mathfrak{G}|\right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^2+|\mathfrak{G}^*|^2\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\operatorname{ber}(|\mathfrak{G}||\mathfrak{G}^*|) \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

olur.

Not 4.9. (Gürdal ve Başaran, 2023b, Sonuç 2) çalışmasında Sonuç 4.7'deki birinci eşitsizliği ve (4.8) eşitsizliği ispatlanmıştır ve (Huban vd., 2021a, Sonuç 3.3) de Huban vd. (4.8)'ün ikinci eşitsizliğini ispatlamışlardır. Sonuç 4.8'den

$$
\frac{1}{2}\left\||\mathfrak{G}||\mathfrak{G}^*|+|\mathfrak{G}||\mathfrak{G}^*|\right\|_{\text{ber}} \leq \operatorname{ber}(|\mathfrak{G}||\mathfrak{G}^*|) \qquad (4.9)
$$

elde ederiz.

Teorem 4.10. $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Omega)$ *bir FHU olsun. Eğer* $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *ve* $r\geq 1$ *ise, bu durumda*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G}) &\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{2r}|\mathfrak{J}|^{2r}+|\mathfrak{J}|^{2r}|\mathfrak{G}|^{2r}\right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\operatorname{ber}\left(|\mathfrak{G}|^{2r}|\mathfrak{J}|^{2r}\right) \qquad (4.10) \\
&\leq \frac{1}{2}\left\||\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\text{ber}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Şimdi Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Teorem 4.5'deki aynı prosedürleri izleyerek

$$
\left|\left\langle \mathfrak{J}^*\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^{2r} \leq \left\langle |\mathfrak{G}|^{2r}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\left\langle |\mathfrak{J}|^{2r}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle
$$

olur ki bu da (4.10)'deki birinci eşitsizliği ve ikinci eşitsizliği verir. Daha sonra (Bhunia ve Paul, 2021b, Sonuç 3.16)'deki eşitsizlikten

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\operatorname{ber}\left(|\mathfrak{G}|^{2r}|\mathfrak{J}|^{2r}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\left\||\mathfrak{G}|^{2r}|\mathfrak{J}|^{2r}\right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{1}{4}\left\||\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\text{ber}}+\frac{1}{2}\left\|\left(\frac{|\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}}{2}\right)\right\|_{\text{ber}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4}\left\| |\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\mathrm{ber}}+\frac{1}{4}\left\| |\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\mathrm{ber}} \\
&=\frac{1}{2}\left\| |\mathfrak{G}|^{4r}+|\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\mathrm{ber}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise (4.10)'de istenilen son eşitsizliği verir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.11. $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *bir operatör ve* $r \geq 1$ *olsun. Eğer Uyarı 4.9'de* $v = \frac{1}{2}$ *alınır ve (4.9) eşitsizliği kullanılırsa, o zaman*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G}) &\leq \frac{1}{4}\left\| |\mathfrak{G}|^{2r}+|\mathfrak{G}^*|^{2r}\right\|_{\mathrm{ber}}+\frac{1}{4}\left\| |\mathfrak{G}|^{r}|\mathfrak{G}^*|^{r}+|\mathfrak{G}|^{r}|\mathfrak{G}^*|^{r}\right\|_{\mathrm{ber}} \\
&\leq \frac{1}{4}\left\| |\mathfrak{G}|^{2r}+|\mathfrak{G}^*|^{2r}\right\|_{\mathrm{ber}}+\frac{1}{2}\mathrm{ber}\left(|\mathfrak{G}|^{r}|\mathfrak{G}^*|^{r}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left\| |\mathfrak{G}|^{2r}+|\mathfrak{G}^*|^{2r}\right\|_{\mathrm{ber}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Üstte elde edilen eşitsizlik (3.14) eşitsizliğinin bir iyileştirilmesidir.

Bir sonraki teorem, Sonuç 4.11'deki ikinci eşitsizliğin iyileştirilmesidir.

Teorem 4.12. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\Omega)$ *bir FHU,* $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *ve* $r \geq 1$ *olsun. Bu durumda*

$$
\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{4\varsigma\gamma}\left\| |\mathfrak{G}|^{2r}+|\mathfrak{G}^*|^{2r}\right\|_{\mathrm{ber}}+\frac{1}{2\varsigma\gamma}\mathrm{ber}\left(|\mathfrak{G}|^{r}|\mathfrak{G}^*|^{r}\right)
$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$
\begin{aligned}
\varsigma &= \inf\left\{1+2(r-1)\left(1-\frac{\widetilde{|\mathfrak{G}|^{\frac{1}{2}}}(\tau)}{\left(\widetilde{|\mathfrak{G}|}(\tau)\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\} \\
\gamma &= \inf\left\{1+2(r-1)\left(1-\frac{\widetilde{|\mathfrak{G}^*|^{\frac{1}{2}}}(\tau)}{\left(\widetilde{|\mathfrak{G}^*|}(\tau)\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. $\widehat{k}_\tau$ normalleştirilmiş yeniden üreten bir çekirdek olsun. (3.3), (3.10) ve (4.1)'den

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^{2r}\\
&\leq \left\langle |\mathfrak{G}|\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle^{r}\left\langle |\mathfrak{G}^*|\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle^{r}\\
&\leq \frac{1}{\varsigma\gamma}\left\langle |\mathfrak{G}^*|^r\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\left\langle \widehat{k}_\tau,|\mathfrak{G}^r|\widehat{k}_\tau\right\rangle\\
&\leq \frac{1}{2\varsigma\gamma}\left(\left\||\mathfrak{G}^r|\widehat{k}_\tau\right\|\left\||\mathfrak{G}^*|^r\widehat{k}_\tau\right\|+\left|\left\langle |\mathfrak{G}^r|\widehat{k}_\tau,|\mathfrak{G}^*|^r\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|\right)\\
&\leq \frac{1}{4\varsigma\gamma}\left(\left\||\mathfrak{G}^r|\widehat{k}_\tau\right\|^2+\left\||\mathfrak{G}^*|^r\widehat{k}_\tau\right\|^2\right)+\frac{1}{2\varsigma\gamma}\left|\left\langle |\mathfrak{G}^r|\,|\mathfrak{G}^*|^r\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|\\
&= \frac{1}{4\varsigma\gamma}\left(\left\langle |\mathfrak{G}|^{2r}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle+\left\langle |\mathfrak{G}^*|^{2r}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right)+\frac{1}{2\varsigma\gamma}\left|\left\langle |\mathfrak{G}^r|\,|\mathfrak{G}^*|^r\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|\\
&= \frac{1}{4\varsigma\gamma}\left\langle\left(|\mathfrak{G}|^{2r}+|\mathfrak{G}^*|^{2r}\right)\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle+\frac{1}{2\varsigma\gamma}\left|\left\langle |\mathfrak{G}^r|\,|\mathfrak{G}^*|^r\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $\tau\in\Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau\in\Omega}\left|\left\langle \mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^{2r} &\leq \sup_{\tau\in\Omega}\frac{1}{4\varsigma\gamma}\left\langle\left(|\mathfrak{G}|^{2r}+|\mathfrak{G}^*|^{2r}\right)\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\\
&\quad+\sup_{\tau\in\Omega}\frac{1}{2\varsigma\gamma}\left|\left\langle |\mathfrak{G}^r|\,|\mathfrak{G}^*|^r\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|
\end{aligned}$$

ve eşdeğer olan

$$\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G})\leq\frac{1}{4\varsigma\gamma}\left\||\mathfrak{G}|^{2r}+|\mathfrak{G}^*|^{2r}\right\|_{\mathrm{ber}}+\frac{1}{2\varsigma\gamma}\mathrm{ber}\left(|\mathfrak{G}|^r|\mathfrak{G}^*|^r\right)$$

sağlanır. Bu ise ispatı tamamlamaktadır. □

4.2. Berezin Yarıçap Eşitsizliklerinde Operatör Konveks Fonksiyonu

Bu bölümün ana fikri Berezin yarıçapı için bilinen yeni interpolasyon eşitsizliklerini, operatör konveks fonksiyon özelliklerini kullanarak elde etmektir.

Teorem 4.13. *$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Omega)$ bir FHU, $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ hiponormal ve f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan artan operatör konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\zeta\geq 1$ için*

$$f(\mathrm{ber}(\mathfrak{G}))\leq\frac{1}{2\zeta}\left\|f(|\mathfrak{G}|)+f(|\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\mathrm{ber}}\tag{4.11}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $R \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ve R kendine eşlenik bir operatör olsun, f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan artan operatör konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(\|R\|_{\text{ber}}) &= f\left(\sup_{\tau\in\Omega}\left\langle R\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\tau\right\rangle\right) = \sup_{\tau\in\Omega} f\left(\left\langle R\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\tau\right\rangle\right) \\ &\leq \sup_{\tau\in\Omega}\left\langle f(R)\widehat{k}_\tau, \widehat{k}_\tau\right\rangle \ \ ((3.4) \text{ ile}) \\ &= \|f(R)\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

sağlanır. Lemma 3.14'den

$$\text{ber}(\mathfrak{G}) \leq \left\|\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\text{ber}} \tag{4.12}$$

ve, böylece

$$f(\text{ber}(\mathfrak{G})) \leq f\left(\left\|\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\text{ber}}\right)$$

elde edilir. $\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|)$ kendine eşlenik bir operatör olduğundan, o zaman

$$\begin{aligned} & f\left(\left\|\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\text{ber}}\right) \\ &\leq \left\|f\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|)\right)\right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \left\|\frac{1}{\zeta} f\left(\frac{1}{2}(|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|)\right)\right\|_{\text{ber}} \ \ ((3.7) \text{ ile}) \\ &\leq \frac{1}{\zeta}\left\|\frac{1}{2}(f(|\mathfrak{G}|) + f(|\mathfrak{G}^*|))\right\|_{\text{ber}} \ \ ((3.8) \text{ ile}) \\ &\leq \frac{1}{2\zeta}\|(f(|\mathfrak{G}|) + f(|\mathfrak{G}^*|))\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

olur. Böylce istenilen ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 4.14. $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *operatörü hiponormal olsun. Bu durumda*

$$f(\text{ber}(\mathfrak{G})) \leq \left\|f\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|)\right)\right\|_{\text{ber}} \leq \frac{1}{2\zeta}\|(f(|\mathfrak{G}|) + f(|\mathfrak{G}^*|))\|_{\text{ber}} \tag{4.13}$$

eşitsizliği sağlanır.

(4.13) eşitsizliğinde $r \geq 1$ ile $f(t) = t^r$ alındığında, aşağıdaki eşitsizliği de elde ederiz.

Sonuç 4.15. $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *operatörü hiponormal olsun. Bu durumda*

(i) $\text{ber}^r(\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{2\zeta} \left\| |\mathfrak{G}|^r + |\mathfrak{G}^*|^r \right\|_{\text{ber}}$.

(ii) $\text{ber}^r(\mathfrak{G}) \leq \left\| \left(\frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right)^r \right\|_{\text{ber}}$

eşitsizlikleri sağlanır.

Not 4.16. $r = 1$ durumu dikkate alındığında

$$\text{ber}(\mathfrak{G}) \leq \left\| \frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right\|_{\text{ber}} \leq \frac{1}{2\zeta} \left\| (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right\|_{\text{ber}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.17. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\Omega)$ *bir FHU,* $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *hiponormal operatör ve* f *fonksiyonu* $[0, \infty)$ *üzerinde negatif olmayan artan operatör konveks fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} f(\text{ber}(\mathfrak{G})) &\leq \left\| \int_0^1 f\left((1-t) \left(\frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right) + t\,\text{ber}(\mathfrak{G}) I \right) dt \right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \frac{1}{2\zeta} \left\| (f(|\mathfrak{G}|) + f(|\mathfrak{G}^*|)) \right\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İlk olarak

$$\left\| \frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \,\text{ber}(\mathfrak{G}) I \right\|_{\text{ber}} = \left\| \frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right\|_{\text{ber}} \left\| \text{ber}(\mathfrak{G}) I \right\|_{\text{ber}}$$

yazabiliriz. Lemma 3.5'den

$$\left\| \frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \,\text{ber}(\mathfrak{G}) I \right\|_{\text{ber}} = \left\| \frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right\|_{\text{ber}} + \text{ber}(\mathfrak{G}) \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.12) eşitsizliği ve (4.14) eşitliği kullanılarak

$$2\text{ber}(\mathfrak{G}) \leq \left\| \frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) + \text{ber}(\mathfrak{G}) \right\|_{\text{ber}}$$

bulunur. O halde ikinci satırda (3.4) eşitsizliği, üç ve dördüncü satırda (3.6) eşitsizliği, beşinci satırda (3.10) eşitsizliği ve son satırda (4.13) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{ber}(\mathfrak{G})) &\leq f\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)+\mathrm{ber}(\mathfrak{G})\right\|_{\mathrm{ber}}\right) \\
&\leq \left\|f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)+\mathrm{ber}(\mathfrak{G})\right)\right)\right\|_{\mathrm{ber}} \\
&\leq \left\|\int_0^1 f\left((1-t)\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right)+t\,\mathrm{ber}(\mathfrak{G})I\right)dt\right\|_{\mathrm{ber}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|f\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right)\right\|_{\mathrm{ber}}+\frac{1}{2}f(\mathrm{ber}(\mathfrak{G})) \\
&\leq \left\|f\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right)\right\|_{\mathrm{ber}} \\
&\leq \frac{1}{2\zeta}\left\|(f(|\mathfrak{G}|)+f(|\mathfrak{G}^*|))\right\|_{\mathrm{ber}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece arzu edilen ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.17'den doğrudan elde edilir.

Sonuç 4.18. $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *operatörü hiponormal olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{ber}(\mathfrak{G})) &\leq \left\|\int_0^1 f\left((1-t)\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right)+t\,\mathrm{ber}(\mathfrak{G})I\right)dt\right\|_{\mathrm{ber}} \\
&\leq \left\|f\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right)\right\|_{\mathrm{ber}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.19. $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *operatörü hiponormal olsun. Bu durumda*

(i) $\mathrm{ber}(\mathfrak{G}) \leq \left\|\int_0^1\left((1-t)\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right)+t\,\mathrm{ber}(\mathfrak{G})I\right)^2dt\right\|_{\mathrm{ber}}^{1/2} \leq \frac{1}{2\zeta}\left\|(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\mathrm{ber}}.$

(ii) $\mathrm{ber}(\mathfrak{G}) \leq \left\|\int_0^1\left((1-t)\left(\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right)+t\,\mathrm{ber}(\mathfrak{G})I\right)^2dt\right\|_{\mathrm{ber}}^{1/2} \leq \left\|\frac{1}{2\zeta}(|\mathfrak{G}|+|\mathfrak{G}^*|)\right\|_{\mathrm{ber}}$

sağlanır.

Sonuç 4.20. *$\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ operatörü hiponormal olsun. Bu durumda*

(i) $\operatorname{ber}^r(\mathfrak{G}) \leq \left\| \int_0^1 \left((1-t) \left(\frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right) + t\operatorname{ber}(\mathfrak{G}) I \right)^r dt \right\|_{\operatorname{ber}} \leq \frac{1}{2\zeta} \| (|\mathfrak{G}|^r + |\mathfrak{G}^*|^r) \|_{\operatorname{ber}}$.

(ii) $\operatorname{ber}^r(\mathfrak{G}) \leq \left\| \int_0^1 \left((1-t) \left(\frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right) + t\operatorname{ber}(\mathfrak{G}) I \right)^r dt \right\|_{\operatorname{ber}} \leq \left\| \left(\frac{1}{2\zeta} (|\mathfrak{G}| + |\mathfrak{G}^*|) \right)^r \right\|_{\operatorname{ber}}$

sağlanır.

Teorem 4.21. *$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\Omega)$ bir FHU, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ve f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan artan operatör konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $\alpha \in (0,1)$, $r \geq 1$ için*

$$\begin{aligned} f(\operatorname{ber}^r(\mathfrak{G})) &\leq \left\| \int_0^1 f\left((1-t) \left(\frac{1}{2} \left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r} + |\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r} \right) \right) + t\operatorname{ber}^r(\mathfrak{G}) I \right) dt \right\|_{\operatorname{ber}} \\ &\leq \left\| f\left(\frac{1}{2} \left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r} + |\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r} \right) \right) \right\|_{\operatorname{ber}} \end{aligned} \tag{4.15}$$

sağlanır.

İspat. Gerçekten, (Huban vd., 2022a, Teorem 3.2)'nın kanıtıyla

$$\operatorname{ber}^r(\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{2} \left\| |\mathfrak{G}|^{2\alpha r} + |\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r} \right\|_{\operatorname{ber}}, \ \alpha \in (0,1), r \geq 1$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu nedenle, Teorem 4.17'deki bazı argümanlar kullanılarak (4.15) elde edilir. Teorem kanıtlanmıştır. □

Sonraki eşitsizlik Lemma 3.11 ve (4.15) eşitsizliğinden elde edilir.

Sonuç 4.22. *$\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ operatörü hiponormal olsun. O zaman her $\alpha \in (0,1)$, $r \geq 1$ için*

$$\begin{aligned} f(\operatorname{ber}^r(\mathfrak{G})) &\leq \left\| \int_0^1 f\left((1-t) \left(\frac{1}{2} \left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r} + |\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r} \right) \right) + t\operatorname{ber}^r(\mathfrak{G}) I \right) dt \right\|_{\operatorname{ber}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| f\left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r} \right) + f\left(|\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r} \right) \right\|_{\operatorname{ber}} \end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 4.21 ve Sonuç 4.22'de $f(t)=t^2$ alınırsa, o zaman aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.23. *Eğer $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ise, o zaman her $\alpha\in(0,1)$, $r\geq 1$ için*

$$\begin{aligned}\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G}) &\leq \left\| \int_0^1 \left((1-t)\left(\frac{1}{2}\left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r}+|\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r}\right)\right)+t\,\mathrm{ber}^r(\mathfrak{G})I\right)^2 dt \right\|_{\mathrm{ber}}^{1/2} \\ &\leq \left\| \frac{1}{2}\left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r}+|\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r}\right)\right\|_{\mathrm{ber}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G}) &\leq \left\| \int_0^1 \left((1-t)\left(\frac{1}{2}\left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r}+|\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r}\right)\right)+t\,\mathrm{ber}^r(\mathfrak{G})I\right)^2 dt \right\|_{\mathrm{ber}}^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\left\|\left(|\mathfrak{G}|^{4\alpha r}+|\mathfrak{G}^*|^{4(1-\alpha)r}\right)\right\|_{\mathrm{ber}}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 4.21'de $f(t)=t$ alınırsa, o zaman aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.24. $\mathfrak{G}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *olsun. Bu durumda her* $\alpha\in(0,1)$, $r\geq 1$ *için*

$$\begin{aligned}\mathrm{ber}^{r}(\mathfrak{G}) &\leq \left\| \int_0^1 \left((1-t)\left(\frac{1}{2}\left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r}+|\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r}\right)\right)+t\,\mathrm{ber}^r(\mathfrak{G})I\right) dt \right\|_{\mathrm{ber}} \\ &\leq \left\| \frac{1}{2}\left(|\mathfrak{G}|^{2\alpha r}+|\mathfrak{G}^*|^{2(1-\alpha)r}\right)\right\|_{\mathrm{ber}}\end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 4.25. $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Omega)$ *bir FHU olsun. Herhangi bir* $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, $\alpha\in(0,1)$ *ve* $r\geq 1$ *için*

$$\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G})\leq \left\|\alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)|\mathfrak{J}|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right\|_{\mathrm{ber}} \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\widehat{k}_\tau$ normalleştirilmiş üretici çekirdek olsun. Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Hölder-McCarthy eşitsizliği, ağırlaştırılmış AM-GM eşitsizliği ve $f(t)=t^r$ nin konveksliğinden

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \mathfrak{J}^*\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right| &\leq \left\langle \mathfrak{G}^*\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle \left\langle \mathfrak{J}^*\mathfrak{J}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle \\
&= \left\langle \left[(\mathfrak{G}^*\mathfrak{G})^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle \left\langle \left[(\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\right]^{(1-\alpha)}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle \\
&\leq \left\langle (\mathfrak{G}^*\mathfrak{G})^{\frac{1}{\alpha}}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle^{\alpha} \left\langle (\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle \\
&\leq \alpha\left\langle (\mathfrak{G}^*\mathfrak{G})^{\frac{1}{\alpha}}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle + (1-\alpha)\left\langle (\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle \\
&\leq \left[\alpha\left\langle (\mathfrak{G}^*\mathfrak{G})^{\frac{1}{\alpha}}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle^{2r} + (1-\alpha)\left\langle (\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle^{2r}\right]^{\frac{1}{2r}} \\
&\leq \left[\alpha\left\langle (\mathfrak{G}^*\mathfrak{G})^{\frac{2r}{\alpha}}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle + (1-\alpha)\left\langle (\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right]^{\frac{1}{2r}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde

$$
\left|\left\langle \mathfrak{J}^*\mathfrak{G}\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle\right|^{2r} \leq \left\langle \left(\alpha(\mathfrak{G}^*\mathfrak{G})^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha)(\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right)\widehat{k}_\tau,\widehat{k}_\tau\right\rangle
$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte $\tau \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$
\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G}) \leq \left\|\alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha)|\mathfrak{J}|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right\|_{\text{ber}}
$$

sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar. □

Sonuç 4.26. $\alpha = \frac{1}{2}$ *ve her* $r \geq 1$ *için*

$$
\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{2}\left\||\mathfrak{G}|^{4r} + |\mathfrak{J}|^{4r}\right\|_{\text{ber}}
$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer sırasıyla $\mathfrak{J} = I$ ve $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}^*$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.27. *Her* $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *ve herhangi bir* $\alpha \in (0,1)$, $r \geq 1$ *için*

$$
\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{G}) \leq \left\|\alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha)I\right\|_{\text{ber}}
$$

ve

$$\operatorname{ber}^{2r}\left(\mathfrak{G}^{2}\right)\leq\left\|\alpha\left|\mathfrak{G}\right|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)\left|\mathfrak{G}^{*}\right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right\|_{\operatorname{ber}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca

$$\|\mathfrak{G}\|_{\operatorname{ber}}^{4r}\leq\left\|\alpha\left|\mathfrak{G}\right|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)\left|\mathfrak{G}^{*}\right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right\|_{\operatorname{ber}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.28. $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Omega)$ *bir FHU olsun.* $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *ve* f *fonksiyonu* $[0,\infty)$ *üzerinde negatif olmayan artan operatör konveks fonksiyonu olsun. Bu durumda her* $\alpha\in(0,1)$, $r\geq 1$ *için*

$$\begin{aligned}f\left(\operatorname{ber}^{2r}\left(\mathfrak{J}^{*}\mathfrak{G}\right)\right)&\leq\left\|\int_{0}^{1}f\left((1-t)\left(\alpha\left|\mathfrak{G}\right|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)\left|\mathfrak{J}\right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right)+t\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{G})I\right)dt\right\|_{\operatorname{ber}}\\&\leq\left\|f\left(\alpha\left|\mathfrak{G}\right|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)\left|\mathfrak{G}^{*}\right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right)\right\|_{\operatorname{ber}}\end{aligned}$$

sağlanır.

İspat. (4.16) eşitsizliğini kullanarak ve Teorem 4.17 ile benzer şekilde ilerleyerek arzu edilen eşitsizlikler elde edilir. □

Özel durumda, sırasıyla $f(t)=t^{2}$ ve $f(t)=t$ alınırsa o zaman (4.16)'nın aşağıdaki interpolasyon eşitsizliklerini elde ederiz.

Sonuç 4.29. $\mathfrak{G},\mathfrak{J}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *olsun. Bu durumda her* $\alpha\in(0,1)$, $r\geq 1$ *için*

$$\begin{aligned}\operatorname{ber}^{4r}\left(\mathfrak{J}^{*}\mathfrak{G}\right)&\leq\left\|\int_{0}^{1}\left((1-t)\left(\alpha\left|\mathfrak{G}\right|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)\left|\mathfrak{J}\right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right)+t\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{G})I\right)^{2}dt\right\|_{\operatorname{ber}}^{\frac{1}{2}}\\&\leq\left\|\alpha\left|\mathfrak{G}\right|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)\left|\mathfrak{J}\right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right\|_{\operatorname{ber}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\operatorname{ber}^{2r}\left(\mathfrak{J}^{*}\mathfrak{G}\right)&\leq\left\|\int_{0}^{1}\left((1-t)\left(\alpha\left|\mathfrak{G}\right|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)\left|\mathfrak{J}\right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right)+t\operatorname{ber}^{2r}(\mathfrak{G})I\right)dt\right\|_{\operatorname{ber}}\\&\leq\left\|\alpha\left|\mathfrak{G}\right|^{\frac{2r}{\alpha}}+(1-\alpha)\left|\mathfrak{J}\right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right\|_{\operatorname{ber}}\end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 4.30. *$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\Omega)$ bir FHU olsun. $\mathfrak{G}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ve f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan artan operatör konveks fonksiyonu olsun. Bu durumda her $\alpha \in (0,1)$, $r \geq 1$ için*

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G})\right) &\leq \left\| \int_0^1 f\left((1-t)\left(\alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha)|\mathfrak{J}|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right) + t\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G})I\right)dt \right\|_{\mathrm{ber}} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\| \alpha f\left(|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}}\right) + (1-\alpha) f\left(|\mathfrak{J}|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right) \right\|_{\mathrm{ber}} \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat. Lemma 3.11, Teorem 4.30'a uygulanırsa arzu edilen eşitsizlikler sağlanır. □

Sonuç 4.31. *Eğer $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $f(t) = t$ alınırsa, bu durumda*

$$\begin{aligned} \mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G}) &\leq \left\| \int_0^1 (1-t)\left(\frac{1}{2}\left(|\mathfrak{G}|^{4r} + |\mathfrak{J}|^{4r}\right)\right) + t\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G})Idt \right\|_{\mathrm{ber}} \\ &\leq \frac{1}{4}\left\| |\mathfrak{G}|^{4r} + |\mathfrak{J}|^{4r} \right\|_{\mathrm{ber}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.32. *Her $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ve $\alpha \in (0,1)$, $r \geq 1$ için*

$$\begin{aligned} \mathrm{ber}^{4r}(\mathfrak{J}^*\mathfrak{G}) &\leq \left\| \int_0^1 \left((1-t)\left(\alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha)|\mathfrak{J}|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right) + t\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G})I\right)^2 dt \right\|_{\mathrm{ber}} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\| \alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{4r}{\alpha}} + (1-\alpha)|\mathfrak{J}|^{\frac{4r}{(1-\alpha)}} \right\|_{\mathrm{ber}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G}) &\leq \left\| \int_0^1 \left((1-t)\left(\alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha)I\right) + t\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G})I\right)^2 dt \right\|_{\mathrm{ber}} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\| \alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha)I \right\|_{\mathrm{ber}} \end{aligned}$$

ve

$$\mathrm{ber}^{2r}\left(\mathfrak{G}^2\right) \leq \left\| \int_0^1 \left((1-t)\left(\alpha|\mathfrak{G}|^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha)|\mathfrak{G}^*|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}}\right) + t\mathrm{ber}^{2r}(\mathfrak{G})I\right)dt \right\|_{\mathrm{ber}}$$

$$\leq \left\| \alpha \left| \mathfrak{G} \right|^{\frac{2r}{\alpha}} + (1-\alpha) \left| \mathfrak{G}^{*} \right|^{\frac{2r}{(1-\alpha)}} \right\|_{\text{ber}}.$$

eşitsizlikleri sağlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sunulan bu tez çalışmasında, El-Haddad ve Kittaneh'in (1.4) eşitsizliği, Dragomir'in (1.5) eşitsizliği ve farklı bir yaklaşım olan (1.6) eşitsizliği, Bhunia ve Paul'un (1.7) eşitsizliği, pozitif operatörler için klasik Schwarz eşitsizliği, Schwarz eşitsizliğinin bir varyantı, konveks fonksiyon, sayısal yarıçap, genelleştirilmiş sayısal yarıçap eşitsizlikleri ve sayısal yarıçap eşitsizliklerinin bazı interpolasyon eşitsizlikleri kullanılarak yeni tipli Berezin yarıçap eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir kaç öneri vardır:

Soru 1. Hilbert fonksiyon uzayında sınırlı $\mathfrak{G}$ operatörü olmak üzere $\mathrm{Ber}(\mathfrak{G})$ sürekli olur mu? Ayrıca, $\mathrm{Ber}(\mathfrak{G})$ konveks olduğunda $\mathfrak{G}$ hakkında ne söylenebilir?

Soru 2. Bir fonksiyonel Hilbert uzayı $\mathfrak{H}$ üzerinde hareket eden bir somut operatörler sınıfı verildiğinde, bu operatörlerin Berezin aralığının konveksliği hakkında ne söylenebilir?

KAYNAKLAR

Ahern, P., 2004. On the Range of the Berezin Transform. Journal Funcional Analysis, 215(1), 206–216.

Aronszajn, N., 1950. Theory of Reproducing Kernels. Transactions of the American Mathematical Society, 68(3), 337–404.

Aujla, J., Silva, F., 2003. Weak Majorization Inequalities and Convex Functions. Linear Algebra and its Applications, 369, 217–233.

Axler, S., Zheng, D., 1998. The Berezin Transform on the Toeplitz Algebra. Studia Mathematica, 1(2), 113–136.

Başaran, H., Gürdal, M., 2021. Berezin Number Inequalities via Inequality. Honam Mathematical Journal, 43, 523–537.

Başaran, H., Gürdal, M., 2023a. Berezin Radius Inequalities of Functional Hilbert Space Operators. Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 6(2), 107–116.

Başaran, H., Gürdal, M., Güncan, A.N., 2019. Some Operator Inequalities Associated with Kantorovich and Hölder–McCarthy Inequalities and Their Applications. Turkish Journal of Mathematics, 43(1), 523–532.

Başaran, H., Gürdal, V., 2023b. Berezin Radius and Cauchy-Schwarz Inequality. Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics, 5(3), 16–22.

Başaran, H., Huban, M.B., Gürdal, M., 2022. Inequalities Related to Berezin Norm and Berezin Number of Operators. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 14, 1–11.

Bakherad, M., Garayevl, M., 2019. Berezin Number Inequalities for Operators. Concrete Operators, 6(1), 33–43.

Berezin, F.A., 1972. Covariant and Contravariant Symbols of Operators. Mathematics Of The USSR-Izvestiva, 6(5), 1117–1151.

Berezin, F.A., 1974. Qutaization. Mathematics Of The USSR-Izvestiva, 8(5), 1109–1163.

Bergman, S., 1922. Uber Die Entwicklung Der Harmonischen Funktionen Der Ebene Und Des Raumes Nach Orthogonalfunktionen. Mathematische Annalen, 86, 237–271.

Bhatia, R., Kittaneh, F., 2000. Notes on matrix arithmetics and geometric mean inequalities. Linear Algebra and its Applications, 308, 203–211.

Bhunia, B., Gürdal, M., Paul, K., Anirban, S., Tapdigoglu, R., 2023a. On a New Norm on the Space of Reproducing Kernel Hilbert Space Operators and Berezin

Radius Inequalities. Numerical Functional Analysis and Optimization, 44(9), 970–986.

Bhunia, P., Dragomir, S.S., Moslehian, M.S., Paul, K., 2022. Lectures on numerical radius inequalities, Infosys Science Foundation Series, Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sciences. Springer Cham.

Bhunia, P., Paul, K., 2021a. New Upper Bounds for the Numerical Radius of Hilbert Space Operators. Bulletin des Sciences Mathématiques, 167(102959), 11.

Bhunia, P., Paul, K., 2021b. Refinements of Norm and Numerical Radius Inequalities. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 51(6), 1953–1965.

Bhunia, P., Paul, K., Sen, A., 2023b. Inequalities Involving Berezin Norm and Berezin Number. Complex Analysis and Operator Theory, 17, https://doi.org/10.1007/s11785–022–01305–9.

Bonsal, F., Duncan, J., 2013. Numerical Ranges II. Cambridge University Press, Cambridge.

Buzano, M., 1971. Generalizzatione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Rend. Sem. Mat. Univ. e Politech. Torino, 31(1974), 405–409.

Chalender, I., Fricain, E., Gürdal, M., Karaev, M., 2012. Compactness and Berezin Symbols. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 78(1), 315–329.

Cowen, C., Felder, C., 2022. Convexity of the Berezin Range. Linear Algebra and Its Applications, 647, 47–63.

Douglas, R., 1973. Banach Algebra Techniques in the Theory of Toeplitz Operators. American Mathematical Society, Providence, R.I.

Dragomir, S., 2009. Power Inequalities for the Numarical Radius of a Product of Two Operators in Hilbert Spaces. Sarajevo Journal of Mathematics, 18(5), 269–278.

Dragomir, S., 2011. Hermite–Hadamard's type inequalities for operator convex functions. Applied Mathematics and Computation, 218(3), 766–772.

Dragomir, S., 2013. Inequalities for the Numerical Radius of Linear Operators in Hilbert Spaces. Springer Briefs in Mathematics, Springer, Cham, 120p, Switzerland.

El-Haddah, M., Kittaneh, F., 2007. Numerical Radius Inequalities for Hilbert Space Operators II. Studia Mathematica, 182(1), 133–140.

Engliš, M., 1999. Compact Toeplitz Operators via the Berezin Transform on Bounded Symmetric Domains. Integral Equations and Operator Theory, 33(4), 426–455.

Furuta, T., 2001. Invitation to Linear Operators, From Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space. Taylor & Francis, London and New York, 255 pp.

Furuta, T., Hot, J., Pecaric, J., Seo, Y., 2005a. Mond-Pecaric Method in Operator Inequalities, Inequalities for bounded selfadjoint operators on a Hilbert space. Element, 275p, Zagreb.

Furuta, T., Micic, H., Pecaric, J., Seo, Y., Mond-Pecaric, 2005b. Method in Operator Inequalities. Zagreb, Element.

Garayev, M., Bouzeffour, F., Gürdal, M., Yangöz, C., 2020. Refinements of Kantorovich Type, Schwarzand Berezin Number Inequalities. Extracta Mathematicae, 35(1), 1–20.

Garayev, M., Guedri, H., Gürdal, M., Alsahli, G., 2021a. On Some Problems for Operators on the Reproducing Kernel Hilbert Space. Linear and Multilinear Algebra, 69(11), 2059–2077.

Garayev, M., Gürdal, M., Okudan, A., 2016. Hardy-Hilbert's Inequality and a Power Inequality for Berezin Numbers for Operators. Mathematical Inequalities and Applications, 19, 883–891.

Garayev, M., Gürdal, M., Saltan, S., 2017. Hardy Type Inequality for Reproducing Kernel Hilbert Space Operators and Related Problems. Positivity, 21(14), 1615–1623.

Garayev, M.T., Gürdal, M., Yamanci, U., 2021b. Boundary Behaivor of Berezin Symbols and Related Results. Filomat, 33(14), 4433–4440.

Gürdal, M., Alomari, M., 2022. Improvements of Some Berezin Radius Inequalities. Constructive Mathematical Analysis, 5(3), 141–153.

Gürdal, M., Başaran, H., 2023a. Advanced Refinements of Berezin Number Inequalities. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics, 72(2), 336–396.

Gürdal, M., Yücel, O., 2022. Berezin Radius Inequalities and Extensions of the Dragomir-Furuta Inequality. Theory and Applications of Mathematics and Computer Science, 12(1), 21–37.

Gürdal, V., Başaran, H., 2023b. On Berezin Radius Inequalities via Cauchy-Schwarz Type Inequalities. Malaya Journal of Mathematik, 11(2), 1–15.

Gustafson, K., Rao, D., 1997. Numerical Range, The Feld of Values of Linear Operators and Matrices. Springer, New York.

Halmos, P.R., 1982. A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin.

Hardy, G., Littlewood, J., Polya, G., 1967. Inequalities. 2 nd ed. Cambridge University Press, 324p, Cambridge.

Heydarbeygi, Z., Amyarii, M., 2021. Some Refinements of the Numerical Radius Inequalities via Young Inequality. Kragujevac Journal of Mathematics, 45(2), 191–202.

Heydarbeygi, Z., Amyarii, M., Khanehgir, M., 2020. Some Refinements of Numerical Radius Inequalities. Ukrainian Mathematical Journal, 10(72), 1443–1451.

Hille, E., 1934. Review: Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, by M. H. Stone. Bulletin of the American Mathematical Society, 40(11), 777–780.

Horn, R.A., Johnson, C.R., 2012. Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Huban, M., Başaran, H., Gürdal, M., 2021a. New Upper Bounds Related to the Berezin Number Inequalities. Journal of Inequalities and Special Functions, 12(3), 1–12.

Huban, M., Başaran, H., Gürdal, M., 2022a. Berezin Number Inequalities via Convex Functions. Filomat, 36(7), 2333–2344.

Huban, M., Başaran, H., Gürdal, M., 2022b. Some New Inequalities via Berezin Numbers. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 14(1), 129–137.

Huban, M., Gürdal, M., Tilki, H., 2021b. Some Classical Inequalities and Their Applications. Filomat, 35(7), 2165–2173.

Huban, M.B., Başaran, H., Gürdal, M., 2021c. Artan Operatör Konveks Fonksiyon Icin Berezin Sayi Eşitsizligi. Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 9(6), 1–14.

Huban, M.B., Başaran, H., Gürdal, M., 2022c. Inequalities Related to Berezin Norm and Berezin Number of Operators. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 14(2), 1–11.

Karaev, M., 2002. Berezin Symbols and Schatten-Von Neumann Classes. Mathematical Notes, 72(2), 185–192.

Karaev, M., 2006a. Berezin Set and Berezin Number of Operators and Their Applications. The 8th Workshop on Numerical Ranges and Numerical Radii (WONRA -06),University of Bremen, July 15-17, 14.

Karaev, M., 2006b. Berezin Symbol and Invertibility of Operators on the Functional Hilbert Spaces. Journal of Functional Analysis, 238(1), 181–192.

Karaev, M., 2012. Use of Reproducing Kernels and Berezin Symbols Technique in Some Questions of Operator Theory. Forum Mathematicum, 24(3), 553–564.

Karaev, M., 2013. Reproducing Kernels and Berezin Symbols Techniques in Various Questions of Operator Theory. Complex Analysis and Operator Theory, 7(4), 983–1018.

Kilic, S., 1994. On the Berezin Symbol. University of New Hampshire, Ph.D. Thesis, 44p, New Hampshire.

Kilic, S., 1995. The Berezin Symbol and Multipliers of Functional Hilbert Spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 123(12), 3687–3691.

Kittaneh, F., 1988. Notes on Some Inequalities for Hilbert Space Operators. Publications - RIMS, Kyoto University, 24, 283–293.

Kittaneh, F., 2002. Norm Inequalities for Sums of Positive Operators. Journal of Operator Theory, 48, 95–103.

Kittaneh, F., 2003. Numerical Radius Inequality and an Estimate for the Numerical Radius of the Frobenius Companion Matrix. Studia Mathematica, 158(1), 11–17.

Kittaneh, F., 2004. Norm Inequalities for Sums and Differences of Positive Operators. Linear Algebra and its Applications, 383, 85–91.

Lu, H., 2022. Interpolation Inequalities of Numerical Radius. Journal of Mathematical Inequalities, 16(4), 11–17.

Nikolski, N.K., 1986. Treatise on the Shift Operator. Heidelberg, V. 73, Springer-Verlag Berlin, s. 491.

Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary Values of Berezin Symbols. Operator Theory: Advances and Applications, 73, 362–368.

Riesz, F., Nagy, B.S., 1955. Functional Analysis. Ungar, New York.

Sababheh, M., Moradi, H.R., Furuichi, S., 2019. Operator Inequalities via Geometric Convexity. Mathematical Inequalities and Applications, 22, 1215–1231.

Saitoh, S., 1988. Theory of Reproducing Kernels and Its Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series.

Saitoh, S., 1997. Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series.

Saltan, S., Tapdigoglu, R., Calisir, I., 2022. Some New Relations Between the Berezin Number and the Berezin Norm of Operators. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 52(5), 1767–1774.

Stojiljkovic, V., Gürdal, M., 2024. Berezin Radius Type Inequalities for Functional Hilbert Space Operators. Electron. J. Math., 7, 35–44.

Yamanci, U., Karli, I., 2020. Further Refinements of the Berezin Number Inequalities on Operators. Linear Multilinear Algebra, 70, 5237–5246.

Yamanci, U., Tunc, R., Gürdal, M., 2020. Berezin Number, Grüss-Type Inequalities and Their Applications. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43, 2287–2296.