

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FOURIER DÖNÜŞÜM UZAYINDA DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RÜMEYSA ŞAVKLIYILDIZ

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ UFUK KAYA

HAZİRAN 2025
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FOURIER DÖNÜŞÜM UZAYINDA DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rümeysa ŞAVKLIYILDIZ
ORCID: 0009-0003-8683-0282

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ UFUK KAYA

HAZİRAN 2025
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI ETİK BEYANI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Hazırlamış olduğum “**Fourier Dönüşüm Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri**” başlıklı tezde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu; tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.13/06/2025

İmza

Rümeysa ŞAVKLIYILDIZ

T.C.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI

“Fourier Dönüşüm Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri” başlıklı yüksek lisans tezi Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır. 13/06/2025

Tezi Hazırlayan

Danışman

İmza

İmza

Rümeysa ŞAVKLIYILDIZ

Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

İmza

Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Rümeysa ŞAVKLIYILDIZ tarafından hazırlanan “Fourier Dönüşüm Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri” adlı Yüksek Lisans Tezi ile ilgili tez savunma sınavı, 13/06/2025 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliği ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ:

İMZA

Başkan: Prof. Dr. Abdullah KABLAN
(Gaziantep Üniversitesi)

.....

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA
(Bitlis Eren Üniversitesi)

.....

Üye: Doç. Dr. Derya ARSLAN
(Bitlis Eren Üniversitesi)

.....

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih vesayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek lisans tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Bakır ŞENGÜL
Enstitü Müdür V.

T.C.

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

FOURIER DÖNÜŞÜM UZAYINDA DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Rümeysa ŞAVKLIYILDIZ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA

Haziran 2025

ÖZET

Neredeyse her şey (zamana bağlı bir fonksiyon ya da sinyal, elektromanyetik dalgalar, ses dalgaları, hisse senetlerinin fiyat değişimi gibi) bir dalga formu şeklinde tanımlanabilir. Fourier dönüşümü bu formlarla işlem ve değerlendirme yapmak üzere kullandığımız oldukça güçlü bir araçtır. Sürekli ve ayrık olarak iki farklı şekilde incelenebilir. Kullanılan iki dönüşüm de bir nesneyi ortogonal iki uzay arasında eşlemektedir. Sürekli değişkenler için Fourier dönüşümü: $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$ ve ters Fourier dönüşümü $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk$ şeklinde verilmiştir. Fourier dönüşümü $f(x) \rightarrow F(k)$, ters Fourier dönüşümü ise $F(k) \rightarrow f(x)$ eşlemesi ile gösterilir. Biz bu tezde diferansiyel denklemlerin çözümünü elde ederken verilen denklemin Fourier uzayında olduğunu düşünerek, yeni bir çözüm yöntemi sunacağız. Bu çalışmayı yaparken Fourier dönüşümlerinin özelliklerinden ve Dirac delta fonksiyonundan faydalanacağız. Bu yeni yöntem ile bazı diferansiyel denklemlerin çözümünü elde edeceğiz.

Anahtar kelimeler: Diferansiyel denklemler, Fourier dönüşümü, Dirac delta fonksiyonu, Genelleştirilmiş fonksiyonlar

Republic of Türkiye

Bitlis Eren University Graduate School

Department of Mathematics

**SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN FOURIER TRANSFORM
SPACE**

Master's Thesis

RÜMEYSA ŞAVKLIYILDIZ

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ufuk KAYA

June 2025

ABSTRACT

Almost everything (a time-dependent function or signal, electromagnetic waves, sound waves, stock price changes, etc.) can be described as a waveform. The Fourier Transform is a powerful tool for manipulating and evaluating these forms. It can be analyzed in two different ways: continuous and discrete. Both transforms map an object between two orthogonal spaces. The Fourier transform for continuous variables is given by: $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$ and the inverse Fourier transform $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk$. The Fourier transform is denoted by the mapping $f(x) \rightarrow F(k)$, and the inverse Fourier transform by the mapping $F(k) \rightarrow f(x)$. In this thesis, we present a new solution method for differential equations by considering that the given equation is in Fourier space. We utilize the properties of Fourier transforms and the Dirac Delta function. By the new method we present, we obtain the solutions of some differential equations.

Keywords: Differential equations, Fourier transform, Dirac delta function, Generalized functions.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamızın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA'ya, Eren Üniversitesi matematik bölümündeki değerli hocalarıma ve yüksek lisans eğitimine birlikte başlayıp zorlandığım anlarda beni her zaman motive eden değerli arkadaşım Melike HEKİMOĞLU'na tüm bu süreçte desteğini esirgemeyen her türlü zorlukta benimle birlikte olan sabır ve anlayış gösteren sevgili ailemin her bir ferdine ayrı ayrı teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1.GİRİŞ	1
2.MATERYAL VE YÖNTEM.....	5
2.1. Diferansiyel Denklemler	5
2.2. Fourier Dönüşümü:	7
2.2.1. Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri:	7
2.3.Bazı Özel Fonksiyonların Fourier Dönüşümü Örnekleri	11
2.3.1.Dirac Delta Fonksiyonu: [11]	11
2.3.2. $f(x) = 1$ ile verilen Fourier dönüşümünün incelenmesi	12
2.3.3. $F(k) = \delta(k - k_0)$ ile verilen ters Fourier dönüşümünün incelenmesi [11].....	12
2.4.Bazı parçalı fonksiyonların Fourier dönüşümünün incelenmesi	14
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	16
4.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27
4.1 Sonuç.....	27
4.2 Öneriler	27
KAYNAKLAR	29

1.GİRİŞ

Matematikte, bir ya da birden fazla fonksiyonun türevleri arasında oluşan ilişkiyi ifade eden denklemlere diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemler sadece bir matematik denkleminden çok daha fazlasıdır. Günümüzde birçok yerde diferansiyel denklemlerin varlığından söz edebiliriz örneğin mühendislikte, biyolojide, ekonomide aslında bilimin olduğu her alanda bizlere çalışma alanı sağlamaktadır. Diferansiyel denklemler değişim ve hareketin temel dinamiklerini anlamamızı sağlar [1].

Isaac Newton, 1671 yılında yayınlanan kitabında diferansiyel denklemlerin üç farklı tipteki tanımını yapmıştır.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y$$

Tanımlanan üç farklı diferansiyel denklemde y , x 'in bilinmeyen bir fonksiyonu olduğu ve f 'in bilinen bir fonksiyon olduğu ifade edilmiştir. Newton Sonsuz Seriler metodunu kullanarak örneklerle çözüm getirdiği bilinmektedir, ayrıca bu çözümlerin bir tane olup olmadığını da araştırmıştır [2].

Maxwell'in elektromanyetizmayı açıkladığı çalışmada veya Einstein'ın genel görelilik teorisinin yer çekimini tanımlayan denklemlerinde de diferansiyel denklemlere yer verilmiştir. Bu da gösteriyor ki temel yasaları anlamamızda da diferansiyel denklemlerin rolü büyüktür [3].

Fourier dönüşümleri diferansiyel denklemlerde sıklıkla kullanılır. İsmi bir dönem matematik öğretmeni olarak da görev almış olan uygulamalı matematik alanında önemli çalışmalara sahip Fransız bilim insanı Jean-Baptiste Joseph Fourier dan almıştır.

Fourier, isminide verdiği Fourier dönüşümleri çalışmalarını Analytical Theory of Heat kapsamında 1822’de yayınlanmıştır [4].

Sürekli değişkenler için Fourier dönüşümü:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

ve ters Fourier dönüşümü

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

şeklinde verilmiştir. Anlaşıldığı üzere $f(x) \rightarrow F(k)$ eşlemesine Fourier dönüşümü, $F(k) \rightarrow f(x)$ eşlemesine de ters Fourier dönüşümü adı verilmiştir.

Fourier dönüşümü, diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü kolaylaştıran güçlü bir tekniktir ve özellikle sınır koşulları ve başlangıç koşulları altında kullanışlıdır [5].

Fourier dönüşümünü elementer fonksiyonlara uygularken genellikle integral ıraksak olur. Bu yüzden bu dönüşümü Dirac delta fonksiyonu olmadan uygulamak pek mümkün değildir.

Dirac delta fonksiyonu bir genelleştirilmiş fonksiyondur ve δ ile gösterilir. $\delta(x)$; $x = 0$ hariç her yerde değeri sıfır olan, fakat $x = 0$ ’da sonsuz büyüklüğe sahip olan ve toplam integrali 1’e eşit olan fonksiyondur: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. Bu fonksiyonun en önemli özelliği $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$ eşitliğidir [6].

Dirac delta fonksiyonu ile Fourier dönüşümü arasında önemli bir ilişki vardır. Dirac delta fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx$ şeklinde hesaplanır ve $\mathcal{F}[(\delta(x))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ olarak buluruz. Ayrıca buradan yola çıkarak $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ’nin ters Fourier dönüşümünün Dirac delta fonksiyonuna eşit olduğunu söyleyebiliriz [7].

Diferansiyel denklemlerin çözümünü kolaylaştırmak amacıyla Fourier dönüşümünden ve Dirac delta fonksiyonundan faydalanılmaktadır. Fourier dönüşümünün basit türev formülü, diferansiyel denklemlerde sonuca ulaşmamızı kolaylaştıran bir yöntem sunar. Örneğin; $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünün $F(k)$ olduğunu söylersek birinci türevinin Fourier dönüşümünü $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = ikF(k)$ olarak, ikinci türevinin Fourier dönüşümünü $\mathcal{F}\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right) = -k^2F(k)$ olarak buluruz. Fourier dönüşümü kullanmak burada bize basit bir hesaplama sunmaktadır [8].

Diferansiyel denklem, başlangıç değer problemi veya sınır koşulları içerdiği takdirde de Fourier dönüşümü kullanılabilir. Bunun yanı sıra parçalı fonksiyonlar için diferansiyel denklem, bir fonksiyonda bir alanın içindeki farklı bölgelerde farklı fiziksel koşullar olduğunda, bu bölgeler için Fourier dönüşümleri ayrı ayrı uygulanıp sonucu birleştirebiliriz. Bu sebeple Fourier dönüşümleri diferansiyel denklemler için sağladığı avantajlardan dolayı iyi bir yöntemdir [9].

Fourier dönüşümü klasik anlamda diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılırken önce diferansiyel denklemin 2 taraftan Fourier dönüşümü alınır. Daha sonra genelde karşımıza, cebirsel bir denklem çıkar. Bu cebirsel denklem çözülür ve ters Fourier dönüşümü alınırsa diferansiyel denklemin çözümü elde edilir. Biz farklı bir bakış açısı kullanarak, diferansiyel denklemin ve diferansiyel denklemin çözümünün de Fourier uzayında olduğunu varsayacağız. Bunun için aradığımız y çözümünün $y(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ biçiminde bilinmeyen bir fonksiyonun Fourier dönüşümü olduğunu varsayacağız ve çözümleri buna göre arayacağız. Bu yöntemi biraz açıklayalım. Belirtelim ki yöntem ilerleyen bölümlerde daha detaylı verilecektir.

$ay'' + by' + cy = q(x)$ gibi bir diferansiyel denklemi ele alalım. Varsayalım ki $y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ olacak şekilde denklemin bir çözümü vardır. O halde denklem

$$a \cdot \frac{d^2}{dk^2} \mathcal{F}\{f(x)\}(k) + b \cdot \frac{d}{dk} \mathcal{F}\{f(x)\}(k) + c \cdot \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = q(k)$$

şeklinde olur. Buradan, Fourier dönüşümün özelliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
a. \mathcal{F}\{-x^2 f(x)\} + b. \mathcal{F}\{-ix f(x)\} + c. \mathcal{F}\{f(x)\} &= q(k) \\
\Rightarrow \mathcal{F}\{-ax^2 f(x) - bix f(x) + cf(x)\} &= q(k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin ters Fourier dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned}
-ax^2 f(x) - bix f(x) + cf(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{q(k)\}(x) \\
\Rightarrow f(x)(-ax^2 - bix + c) &= \mathcal{F}^{-1}\{q(k)\}(x) \\
\Rightarrow f(x) &= \frac{\mathcal{F}^{-1}\{q(k)\}(x)}{-ax^2 - bix + c}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanmış olur. Buradan, Fourier dönüşümü alınırsa denklemin çözümü elde edilmiş olur.

Tezde sunduğumuz yöntem bu şekildedir. Bulgular ve tartışma başlığında daha detaylı verilecektir.

2.MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.1. Bilinmeyen bir fonksiyon ve onun türevlerini içeren denklemler diferansiyel denklem olarak ifade edilir. Diferansiyel denklemler bilinmeyenlerine ve katsayılarına göre doğrusal diferansiyel denklemler ya da doğrusal olmayan diferansiyel denklemler olarak ayrılabilir. Doğrusal olmayan diferansiyel denklemler trigonometrik, logaritmik veya yüksek mertebeden terimlerden oluşmaktadır. Bu durum doğrusal olma durumunu bozar. Bir diferansiyel denklemden bahsederken bilinmeyen fonksiyon sadece bir bağımsız değişkene bağlı ise, bu diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem; iki veya daha çok bağımsız değişkene bağlı ise bu diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir [9].

Bağımlı değişkeni y , bağımsız değişkeni x olan adi diferansiyel denklem örnekleri; [9].

$$\frac{dy}{dx} = x + 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xy' + y = 4$$

$$2y''' + 2y'' + y' = 2 \cos x$$

Birden fazla değişkenlere sahip olan kısmi diferansiyel denklemler örneği; [12].

$$x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} = z$$

Tanım2.2: Bir diferansiyel denklemde en yüksek türevin olduğu terim o diferansiyel denklemin mertebesini gösterir.

Lineer (doğrusal) diferansiyel denklem örnekleri; [12].

$$3y'' + 2y' - y = 0$$

$$y'' + xy' = 0$$

$$y^{(5)} - 2y'' + y''' = x - 5$$

Lineer (doğrusal) olmayan diferansiyel denklem örnekleri; [12].

$$y''' - xy' = \cos y$$

$$t'' - at' + t = \sin t$$

Tanım2.3: Bir diferansiyel denklemde verilen koşullar eğer tek bir noktada veriliyorsa bunun bir başlangıç değer problemi olduğunu görürüz. Eğer diferansiyel denklemde verilen koşullar birden fazla nokta ile birlikte veriliyorsa bunun bir sınır değer problemi olduğunu söyleriz.

Örneğin;

$$x'' + 5x' = 3e^t, \quad x(1) = 1 \quad x'(1) = 0$$

ise bu bir başlangıç değer problemidir.

$$x'' + 5x = 3e^t, \quad x(1) = 3, \quad x(3) = 5$$

ise bu bir sınır değer problemidir[12].

2.2. Fourier Dönüşümü:

Fourier dönüşümü, fizik, mühendislik ve matematikte sıklıkla kullanılan bir integral dönüşümüdür. Bir müzik akordunun sesini, onu oluşturan tonlara ayırmaya benzer. Sürekli ve ayrık olarak ikiye ayrılabilir. İki dönüşüm de bir nesneyi ortogonal iki uzay arasında eşler. Sürekli nesneler için Fourier dönüşümü

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

ve ters Fourier dönüşümü

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

şeklinde verilir.

$f(x) \rightarrow F(k)$ eşlemesine Fourier dönüşümü,

$F(k) \rightarrow f(x)$ eşlemesine de ters Fourier dönüşümü adı verilir [6].

2.2.1. Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri:

Teorem 2.1. Lineerlik Özelliği: [10]

$$f_1(x) \leftrightarrow F_1(k) \text{ ve } f_2(x) \leftrightarrow F_2(k)$$

olmak üzere

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \leftrightarrow a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)$$

özellığı sağlamaktadır.

Teorem 2.2. Simetri Özelliğı: [10]

Simetri özelliğı, $f(x)$ fonksiyonunun reel eksen üzerinde tanımlı ve reel değeri olması durumunda geçerlilik kazanır. f bir çift fonksiyon ise

$$F(-k) = \overline{F(k)}$$

eşitliğı doğrudur.

Teorem 2.3. Öteleme (Kaydırma) Özelliğı: [10]

Fourier dönüşümü alınırken verilen bağımsız değışkene bir sabitin eklenmesi veya çıkarılması durumunda integral dönüşümü ötelemeye uğrar.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a).e^{-ixk}dx \\ &= e^{-ika}F(x)\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.4. Modülasyon Özelliğı: [10]

$f(x)$ ve $g(x)$ reel eksende tanımlı sürekli fonksiyonlar olduğunda

$$\mathcal{F}\{f(x).g(x)\} = F(f) * G(f)$$

eşitliğı doğrudur. Burada,

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-r)d\tau$$

işlemi konvolüsyon olarak bilinir.

Teorem 2.5. Skalerlik Özelliği: [10]

$a \neq 0$ için

$$h(x) = f(ax)$$

ise

$$\mathcal{F}\{h(x)\} = \mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{\mathcal{F}\left(\frac{k}{a}\right)}{|a|}$$

$$a = -1$$

durumu ele alındığında

$$f(-x) \leftrightarrow F(-k)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.5. Eşlenik Özelliği: [10]

$$h(x) = \overline{f(x)}$$

ise

$$H(k) = \overline{F(-k)}$$

görüntüsüdür.

Teorem 2.6. İntegrasyon Özelliği: [10]

$$g(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

alındığında

$$g(x) \leftrightarrow \frac{F(k)}{ik} + \sqrt{2\pi}c\delta(k)$$

olur. Burada c ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - c)dx = 0$$

özellikliğini sağlayan sayıdır.

Teorem 2.7. Türev Özelliği:

Türevinin Fourier özelliği: Fourier dönüşümünün basit türev formünden $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünün $F(k)$ olduğunu söylersek birinci türevinin Fourier dönüşümünü $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = ikF(k)$ olarak, ikinci türevinin Fourier dönüşümünü $\mathcal{F}\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right) = -k^2F(k)$ olarak buluruz.

Fourier'in türev özelliği: Bir fonksiyonun Fourier dönüşümünün n . mertebeden türevi formülü

$$\mathcal{F}\{(-i)^n x^n f(x)\} = \frac{d^n}{dk^n} \mathcal{F}\{f(x)\}$$

bu şekildedir.

2.3.Bazı Özel Fonksiyonların Fourier Dönüşümü Örnekleri

2.3.1.Dirac Delta Fonksiyonu: [11]

$f(x) = \delta(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü incelenirse;

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx$$

elde edilir. Burada $\delta(x)$ fonksiyonunun temel özelliği olan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot g(x) \cdot dx = g(0)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik \cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ve sonuç olarak:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

olduğu görülür. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x)$$

eşitliğini buluruz.

2.3.2. $f(x) = 1$ ile verilen Fourier dönüşümünün incelenmesi

Daha önce $\delta(x)$ 'nin ters fourier fonksiyonunu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ olarak bulmuştuk.

$$F^{-1}(\delta(w)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Fourier ve ters Fourier transformasyonları arasında karşılıklı dönüşüm özelliği

$$f(x) \Leftrightarrow F(k)$$

olduğundan buna göre;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Leftrightarrow \delta(x)$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$1 \Leftrightarrow \sqrt{2\pi}\delta(x)$$

bulunur.

2.3.3. $F(k) = \delta(k - k_0)$ ile verilen ters Fourier dönüşümünün incelenmesi [11]

$$F(k) = \delta(k - k_0)$$

Delta fonksiyonunun özelliğini kullanalım

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k_0) \cdot g(k) \cdot dk = g(k_0)$$

Buradan; $g(k) = e^{ikx}$ yazarsak

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x}$$

Burada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x}$ 'in Fourier Dönüşümünü alacak olursak

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x} \right) e^{-ikx} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(k_0 - k)} \cdot dx$$

$$= 2\pi \delta(k - k_0)$$

buradan;

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \delta(k - k_0) = \delta(k - k_0)$$

Sonuç olarak;

$$F(k) = \delta(k - k_0)$$

olduğunu söyleriz.

2.4.Bazı parçalı fonksiyonların Fourier dönüşümünün incelenmesi

Örnek 1:

$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünün incelenmesi:

$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ formülündeki e^{-ikx} yerine Euler formülünü kullanacağız.

e^{-ikx} için $\cos x - i \sin x$ eşitliğinden faydalanarak

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1 - |x|) \cos kx \cdot dx$$

yazılır.

$$F(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1 - x) \cos kx \cdot dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}k} \int_0^1 (1 - x) \cdot d \sin kx$$

$$= \frac{2(1 - x) \sin kx}{k\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}k} \int_0^1 \sin kx \cdot dx$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}k^2} \cos kx \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}k^2} (1 - \cos k)$$

$$= \frac{4 \sin^2 \frac{k}{2}}{\sqrt{2\pi} k^2}$$

Örnek 2:

$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunu Fourier dönüşümünün incelenmesi

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \cos kx dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi} k} \sin kx \Big|_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{2} \sin k}{\sqrt{\pi} k}$$

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için Fourier dönüşümünün özelliklerini ve Dirac delta fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak çözümler elde edeceğiz,

$$y' = y$$

diferansiyel denklemini inceleyelim. Bu denklemi değişkenlerine ayırarak çözdüğümüzde

$$y' - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln y = x + \ln c$$

$$y = e^{x+\ln c}$$

$$y = e^x \cdot c$$

sonucunu elde ederiz. Biz farklı bir yöntem kullanarak diferansiyel denklemin kendisinin ve aradığımız y çözümünün Fourier uzayında olduğunu varsayacağız. Şimdi, $y(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ olacak şekilde diferansiyel denklemde çözümü arayalım. Bu durumda ele aldığımız $y' = y$ denklemi

$$\frac{d}{dk} \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$$

biçimini alır. Fourier dönüşümünün türevi özelliğinden

$$\mathcal{F}\{-ixf(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}$$

elde ederiz. Bu denklemi aşağıdaki şekilde inceleyelim:

$$\mathcal{F}\{-ixf(x) - f(x)\} = 0$$

$$f(x)(-ix - 1) = 0$$

$$-if(x)(x - i) = 0$$

$$f(x)(x - i) = 0$$

Biz Dirac delta fonksiyonunun özelliklerinden $x \cdot \delta(x) = 0$ olduğunu biliyoruz, buradan yola çıkarak

$$\frac{0}{x} = \delta(x)$$

elde ederiz. Her tarafı c sabiti ile çarparsak,

$$\frac{0}{x} = c\delta(x) \tag{3.1}$$

sonucunu ve her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{0}{x - a} = c\delta(x - a) \tag{3.2}$$

sonucunu elde ederiz. O halde,

$$f(x) = \frac{0}{x-i} = c \cdot \delta(x-i)$$

$$y = \mathcal{F}\{c \cdot \delta(x-i)\} = c \cdot \mathcal{F}\{\delta(x-i)\}$$

$$= c \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-i) \cdot e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^k = c_1 e^k$$

elde edilir. Bu, klasik yöntemlerle elde edilen çözüm ile aynıdır.

Teorem.3.1. Her $a \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{0}{(x-a)^n} = c_0 \delta(x-a) + c_1 \delta'(x-a) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n-1)}(x-a)$$

eşitliği doğrudur. Bu formül (3.1)'in bir genelleştirilmesidir.

İspat. (3.1)'den $\frac{0}{x-a} = c_1 \delta(x-a)$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alındığında

$$\frac{0 \cdot (x-a) - 0}{(x-a)^2} = c_1 \delta'(x-a)$$

$$\frac{0}{(x-a)} - \frac{0}{(x-a)^2} = c_1 \delta'(x-a)$$

$$\frac{0}{(x-a)^2} = \frac{0}{(x-a)} - c_1 \delta'(x-a)$$

$$\frac{0}{(x-a)^2} = c_0 \delta(x-a) + c_1 \delta'(x-a)$$

elde etmiş oluruz (Burada sabitler yeniden işaretlenmiştir).

Tümevarım varsayımı olarak n için $\frac{0}{(x-a)^n} = c_0 \delta(x-a) + c_1 \delta'(x-a) + c_2 \delta''(x-a) + \dots + c_{n-2} \delta^{(n-2)}(x-a) + c_{n-1} \delta^{(n-1)}(x-a)$ olduğunu kabul edip, $n+1$ için ispatı yapalım. Varsaydığımız eşitlikte 2 taraftan türev alalım.

$$\frac{0 \cdot (x-a)^n - 0 \cdot n(x-a)^{n-1}}{(x-a)^{2n}} = c_0 \delta'(x-a) + c_1 \delta''(x-a) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n)}(x-a)$$

$$\frac{0}{(x-a)^n} - \frac{0 \cdot n}{(x-a)^{n+1}} = c_0 \delta'(x-a) + c_1 \delta''(x-a) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n)}(x-a)$$

$$\frac{0 \cdot n}{(x-a)^{n+1}} = -\frac{0}{(x-a)^n} - c_0 \delta'(x-a) - c_1 \delta''(x-a) - \dots - c_{n-1} \delta^{(n)}(x-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{0 \cdot n}{(x-a)^{n+1}} &= -c_0 \delta(x-a) - c_1 \delta'(x-a) - \dots - c_{n-1} \delta^{(n-1)}(x-a) - c_0 \delta'(x-a) \\ &\quad - c_1 \delta''(x-a) - \dots - c_{n-1} \delta^{(n)}(x-a) \end{aligned}$$

elde edilir. Sabitleri düzenlediğimiz zaman

$$= d_0 \delta(x-a) + d_1 \delta'(x-a) + d_2 \delta''(x-a) + \dots + d_n \delta^{(n)}(x-a)$$

olur ve ispat biter.

Sonuç.3.1. Teorem.3.1’de a sabiti sıfır olduğu zaman aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{0}{x^2} = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x)$$

$$\frac{0}{x^3} = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + c_2\delta''(x)$$

$$\frac{0}{x^4} = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + c_2\delta''(x) + c_3\delta'''(x)$$

.

.

.

$$\frac{0}{x^n} = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + c_2\delta''(x) + \dots + c_{n-2}\delta^{(n-2)}(x) + c_{n-1}\delta^{(n-1)}(x)$$

Örnek3.1: $y'' - 3y' - 4y = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm: Klasik yöntemlerle çözüldüğü zaman diferansiyel denklemin çözümü $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$ şeklindedir. Şimdi kendi yöntemimizle diferansiyel denklemi tekrar çözelim.

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$$

olsun.

$$\frac{d^2}{dk^2}\mathcal{F}\{f(x)\}(k) - 3\frac{d}{dk}\mathcal{F}\{f(x)\}(k) - 4\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = 0$$

$$\mathcal{F}\{-x^2f(x)\} - 3\mathcal{F}\{-ix.f(x)\} - 4\mathcal{F}\{f(x)\} = 0$$

$$\mathcal{F}\{-x^2f(x) + 3.ixf(x) - 4f(x)\} = 0$$

$$-x^2f(x) + 3ixf(x) - 4f(x) = 0$$

$$f(x)(-x^2 + 3ix - 4) = 0$$

$$f(x) = \frac{0}{x^2 - 3ix + 4} = \frac{0}{(x - 4i)(x + i)} = \frac{0}{x - 4i} + \frac{0}{x + i}$$

$$= c_1 \delta(x - 4i) + c_2 \delta(x + i).$$

şimdi, $y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ bağıntısı ile çözümü bulalım.

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 4i) \cdot e^{-ikx} \cdot dx + c_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + i) \cdot e^{-ikx} \cdot dx$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{2\pi}} e^{4k} + \frac{c_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-k} = c_3 e^{4k} + c_4 e^{-k}$$

olur. Bu, mevcut çözüm ile tutarlıdır.

Örnek3.2: $y'' - 4y' + 4y = 0$ diferansiyel denklem çözümü:

Çözüm: Klasik yöntemlerle çözüldüğü zaman diferansiyel denklemin çözümü $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ şeklindedir. Şimdi kendi yöntemimizle diferansiyel denklemi tekrar çözelim.

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$$

olsun

$$\frac{d^2}{dk^2} \mathcal{F}\{f(x)\}(k) - 4 \frac{d}{dk} \mathcal{F}\{f(x)\}(k) + 4 \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = 0$$

$$\mathcal{F}[(-x^2 \cdot f(x)) - 4(-ix \cdot f(x)) + 4f(x)] = 0$$

$$f(x) \cdot (-x^2 + 4ix + 4) = 0$$

$$f(x) = \frac{0}{-x^2 + 4ix + 4} = \frac{0}{x^2 - 4ix - 4} = \frac{0}{(x - 2i)^2}$$

$$= \frac{0}{(x - 2i)^2} = c_1 \delta(x - 2i) + c_2 \delta'(x - 2i)$$

şimdi, $y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ bağıntısı ile çözümü bulalım.

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \frac{c_1}{\sqrt{2\pi}} e^{2k} - \frac{c_2 ik}{\sqrt{2\pi}} e^{2k} = c_3 e^{2k} + c_4 k e^{2k}$$

olur. Bu, mevcut çözüm ile tutarlıdır.

Örnek3.3: $y'' - y' - 2y = 1$ diferansiyel denklem çözümü:

Çözüm: Klasik yöntemlerle çözüldüğü zaman diferansiyel denklemin çözümü $y = \frac{-1}{2} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ şeklindedir. Şimdi kendi yöntemimizle diferansiyel denklemi tekrar çözelim.

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$$

olsun

$$\frac{d^2}{dk^2} \mathcal{F}\{f(x)\}(k) - \frac{d}{dk} \mathcal{F}\{f(x)\}(k) + \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = 1$$

$$\mathcal{F}\{-x^2f(x) + ix f(x) - 2f(x)\}(k) = \mathcal{F}\{\sqrt{2\pi}\delta(x)\}(k)$$

$$-f(x)(x^2 - ix + 2) = \sqrt{2\pi}\delta(x)$$

$$f(x) = \frac{-\sqrt{2\pi}\delta(x)}{(x - 2i)(x + i)}$$

$$= \frac{-\sqrt{2\pi}\delta(x) + 0}{(x - 2i)(x + i)}$$

şimdi, $y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ bağıntısı ile çözümü bulalım.

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \frac{-\sqrt{2\pi}\delta(x)}{(x - 2i)(x + i)} + c_1\delta(x - 2i) + c_2\delta(x + i)$$

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)e^{-ikx}}{(x - 2i)(x + i)} dx + c_1e^{2k} + c_2e^{-k}$$

$$y = \frac{-1}{2} + c_1e^{2k} + c_2e^{-k}$$

olur. Bu, mevcut çözüm ile tutarlıdır.

Örnek3.4. $y'' + y = x^2$ diferansiyel denklem çözümü

Çözüm: Klasik yöntemlerle çözüldüğü zaman diferansiyel denklemin çözümü $y = x^2 - 2 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$ şeklindedir. Şimdi kendi yöntemimizle diferansiyel denklemi tekrar çözelim.

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$$

olsun

$$\frac{d^2 F\{F(x)\}(k)}{dx^2} + F\{f(x)\}(k) = k^2$$

$$F\{(-ik)^2 f(x)\} + F\{f(x)\}(k) = F\{-\sqrt{2\pi}\delta''\}(k)$$

$$F\{-x^2 f(x) + f(x)\} = F\{-\sqrt{2\pi}\delta''(x)\}$$

$$(-x^2 + 1)f(x) = -\sqrt{2\pi}\delta''(x)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2\pi}\delta''(x) + 0}{(x^2 - 1)}$$

şimdi, $y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ bağıntısı ile çözümü bulalım

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \frac{\sqrt{2\pi}\delta''(x)}{(x^2 - 1)} + \frac{0}{x - 1} + \frac{0}{x + 1}$$

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \frac{\sqrt{2\pi}\delta''(x) + 0}{(x^2 - 1)} + A\delta(x - 1) + B\delta(x + 1)$$

$$y(k) = F\left\{\frac{\sqrt{2\pi}\delta''(x) + 0}{(x^2 - 1)} + A\delta(x - 1) + B\delta(x + 1)\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta''(x)e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \delta(x - 1) dx + B \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \delta(x + 1) dx$$

$$= k^2 - 2 + Ae^{-ik} + Be^{ik}$$

$$= k^2 - 2 + A(\cos k - i \sin k) + B(\cos k + i \sin k)$$

$$= k^2 - 2 + c_1 \cos k + c_2 \sin k$$

olur. Bu, mevcut çözüm ile tutarlıdır.

Örnek3.5. $y'' + 6y' + 5y = x$ diferansiyel denklem çözümü

Çözüm: Klasik yöntemlerle çözüldüğü zaman diferansiyel denklemin çözümü $y = \frac{1}{25}(-6 + 5x) + e^{-5x}c_1 + e^{-x}c_2$ şeklindedir. Şimdi kendi yöntemimizle diferansiyel denklemi tekrar çözelim.

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$$

olsun

$$\frac{d^2 \mathcal{F}\{f(x)\}(k)}{dk^2} + 6 \frac{d\mathcal{F}\{f(x)\}(k)}{dk} + 5\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = k$$

$$\mathcal{F}\{-x^2 f(x)\} + 6\mathcal{F}\{-ix \cdot f(x)\} + 5\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{\sqrt{2\pi} \cdot i \cdot \delta'(x)\}(k)$$

$$\mathcal{F}\{f(x) \cdot (-x^2 - 6ix + 5)\} = \mathcal{F}\{\sqrt{2\pi} \cdot i \delta'(x)\}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot i \delta'(x) + 0}{(-x - 5i) \cdot (x + i)}$$

şimdi, $y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ bağıntısı ile çözümü bulalım

$$y = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot i\delta'(x)}{(-x-5i) \cdot (x+i)} + \frac{0}{(-x-5i)} + \frac{0}{(x+i)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\delta'(x)}{(-x-5i) \cdot (x+i)} \cdot e^{-ikx} \cdot dx + A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x-5i) \cdot e^{-ikx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} (x+i) \cdot e^{-ikx} dx$$

$$y = \frac{1}{25}(-6+5x) + e^{-5x}c_1 + e^{-x}c_2$$

olur. Bu, mevcut çözüm ile tutarlıdır.

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1 Sonuç

Bu tez çalışmasında klasik yöntemlerin aksine diferansiyel denklem çözümlerinde, Fourier dönüşüm uzayında çözüm yöntemi geliştirerek uygulamanın daha pratik çözümler verdiğini ortaya koymaya çalıştık. Çalışmamızın temel amacı, diferansiyel denklemlerin Fourier uzayında doğrudan analiz edilmesiyle çözüm sürecini sadeleştirmek ve bu yöntemin sağlayabileceği avantajları göstermektir.

Bunun için öncelikle diferansiyel denklemleri, Dirac delta fonksiyonunun işlevlerini, Fourier dönüşümünün temel özelliklerini detaylı bir şekilde ele aldık; ardından bu araçlar kullanılarak diferansiyel denklemlerin Fourier uzayında nasıl çözülebileceği sistematik olarak inceledik. Bu bağlamda diferansiyel denklemin ve çözümünün Fourier uzayında tanımlı olduğunu varsaydık, bu çözümle elde ettiğimiz sonuçlar ile klasik yöntemden elde edilen sonuçların birebir örtüştüğünü görerek yöntemimizin doğruluğunu ortaya koymuş olduk.

Bu çalışma kapsamında, diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmeye çalışırken $\frac{0}{x}$, $\frac{0}{x-1}$, $\frac{0}{x+i}$ gibi fonksiyonlarla karşılaştık. Ancak bu fonksiyonları doğrudan 0 sabit fonksiyonu olarak kabul etmedik. Zira böyle bir yaklaşım, çözümün ilerlemesini engelleyecekti. Bunun yerine, 0 elde ettiğimiz noktalarda Dirac delta fonksiyonunun özelliklerinden faydalananarak 0'ın gücünü kullandık, böylece çözüme ulaşmada önemli bir adım atmış olduk.

Çalışmamızda verilen örneklerde, çözüm süreci klasik yöntemlere kıyasla daha kısa ve analitik olarak daha doğrudan bir şekilde sonuçlar vermiştir. Fourier dönüşümünün özellikle türev ve integral işlemleri üzerindeki etkisi sayesinde, diferansiyel denklemler cebirsel biçime dönüştürülerek daha kolay çözümleyebildiğimizi gördük. Bu yönüyle çalışmamız, Fourier dönüşümünün sadece teorik değil, aynı zamanda pratik bir çözüm aracı olduğunu bir kez daha ortaya koymaktadır..

4.2 Öneriler

Bu çalışmada ulaştığımız sonuçlar doğrultusunda, hem kuramsal hem de uygulamaya dönük bazı önerileri aşağıda detaylandıracağız.

1.Daha Geniş Diferansiyel Denklem Sınıflarına Uygulama: Bu tezde ağırlıklı olarak sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemleri ele aldık. Gelecek çalışmalarda değişken katsayılı, doğrusal olmayan ya da zamana bağlı katsayılarla sahip denklemler üzerinde Fourier uzayında çözüm yöntemlerinin uygulanabilirliği araştırılabilir.

2.Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Kullanım: Fourier dönüşümünün özellikle kısmi diferansiyel denklemlerde (örneğin ısı, dalga ve Laplace denklemleri) güçlü bir çözüm aracı olduğu bilinmektedir. Bu yöntemin çok boyutlu problemlerde ne derece etkin olduğu detaylı bir şekilde incelenebilir.

3.Sayısal Yöntemlerle Entegrasyon: Geliştirilen çözüm yöntemi, sayısal Fourier dönüşümleriyle (FFT gibi) birlikte kullanılarak, bilgisayar destekli çözümler için bir algoritma haline getirilebilir. Böylece karmaşık sistemlerin çözümleri için hızlı ve etkin yazılımlar geliştirilebilir.

4.Alternatif Dönüşüm Teknikleriyle Kıyaslama: Fourier dönüşümü dışında Laplace dönüşümü, Mellin dönüşümü ve Z-dönüşümü gibi diğer integral dönüşümlerle karşılaştırmalı analizler yapılarak, her bir yöntemin güçlü ve zayıf yönleri belirlenebilir. Bu sayede hangi tür denklemler için hangi dönüşümün daha uygun olduğu konusunda sistematik bir yaklaşım geliştirilebilir.

5.Eğitim ve Öğretim İçin Katkı: Fourier dönüşüm uzayında diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemi, lisansüstü matematik eğitiminde alternatif bir çözüm yaklaşımı olarak ders içeriklerine entegre edilebilir. Özellikle analitik düşünme ve dönüşüm yöntemlerine dair uygulamalı örneklerle bu kavramlar daha iyi pekiştirilebilir.

6.Fiziksel ve Mühendislik Problemlerine Uygulama: Bu tezde geliştirilen yöntem, sadece matematiksel teoride değil, elektromanyetizma, kuantum mekaniği ve sinyal işleme gibi alanlarda karşılaşılan diferansiyel denklemlere de uygulanabilir. Bu tür disiplinler arası uygulamalarla yöntemin kapsamı genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] D. G. Zill, *First course in differential equations with modeling applications*, 6th ed. Florence, KY: Brooks/Cole, 1996.
- [2] P. Bussotti, "Differential Calculus: The Use Of Newton's Methodus Fluxionum Et Serierum Infinitarum In An Education Context," *Problems of Education in the 21st Century*, vol. 65, no. 1, pp. 39–65, 2015.
- [3] S. Uçar, "Maxwell'in Alan Denklemleri Üzerine Bir Değerlendirme," *Felsefe Arkivi*, no. 51, pp. 261–270, 2019.
- [4] "Jean Baptiste Joseph Fourie - Archive," <https://web.archive.org/web/20051228085504/http://fenedebiyat.atauni.edu.tr/boluler/matematik/matematikcilers/Fouier.htm>. (Accessed: May 10, 2025).
- [5] T. Yılmaz, "Dalgacık regresyon kullanılarak reel sektör risk analizi", Yüksek Lisans Tezi, Fen Bil., Ens., Marmara Üniversitesi, İstanbul, Türkiye, 2013.
- [6] "Dirac delta fonksiyonu - Vikipedi," https://tr.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_fonksiyonu (Erişim tarihi Mayıs 16 2025).
- [7] D. W. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis*. Cambridge.: Cambridge University Press, 2007.
- [8] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, vol. 1. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2011.
- [9] D. Colby, L. Rhode, W. Santoro, S. Yoder, K. J. Davis, S. Foreman, et al., "Prospectus," Feb. 11, 1987.
- [10] M. A. Pinsky, *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, vol. 102. American Mathematical Society, 2008.
- [11] R. F. Çınar, *Green fonksiyonu destekli hedef yoğunluk fonksiyonu kullanarak duvar arkası geniş bant radar görüntüleme = Wideband through wall radar imaging using Green's function aided target density function*, Doktora Tezi, Fen Bil., Sakarya Üniversitesi, Sakarya, Türkiye, 2022

[12]Ö. Yılmaz, *Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler Ders Notları*, İstanbul. Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Yayınları. 2025.

