

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TİTREŞİM TEST MAKİNESİNİN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ
İNCELENMESİ VE İYİLEŞTİRİLMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Timuçin Ersin TAŞDEMİR

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Dinamiği, Titreşim ve Akustik Programı

ARALIK 2019

**TİTREŞİM TEST MAKİNESİNİN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ
İNCELENMESİ VE İYİLEŞTİRİLMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Timuçin Ersin TAŞDEMİR
503141413**

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Dinamiği, Titreşim ve Akustik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vahit MERMERTAŞ

ARALIK 2019



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503414413 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Timuçin Ersin TAŞDEMİR, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “TİTREŞİM TEST MAKİNESİNİN DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ VE İYİLEŞTİRİLMESİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

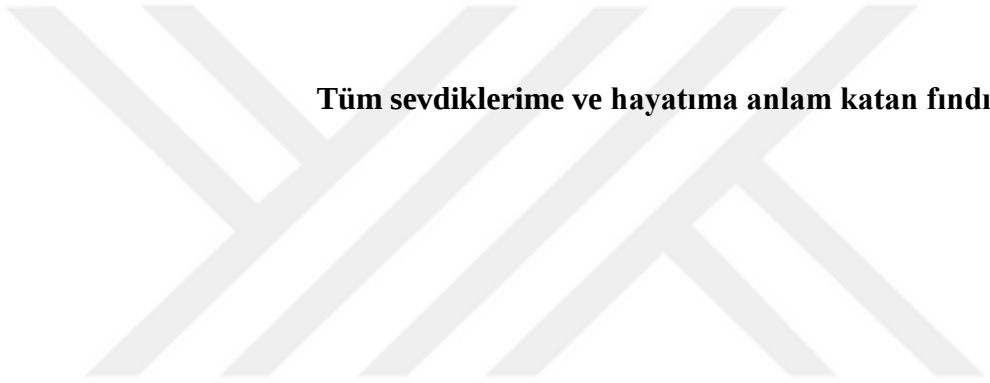
Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Vahit MERMERTAŞ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Rahmi GÜÇLÜ**
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Doç. Dr. Erdinç Altuğ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **11 Kasım 2019**
Savunma Tarihi : **23 Aralık 2019**





Tüm sevdiklerime ve hayatıma anlam katan fındık faresine,



ÖNSÖZ

Günümüzde nümerik çözümlemeler mühendislik uygulamalarında yoğun olarak kullanılmaktadır. Özellikle karmaşık sistemlerin çözümü noktasında ciddi bir avantaja sahip olan nümerik çözümlemeler endüstrinin her alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çözümlemelerden bir tanesinde sonlu elemanlar yöntemidir. Bu çalışma boyunca sonlu elemanlar yönteminin avantajlarını ve diğer yaygın yöntemler ile kıyaslamalarını inceleyerek neden tercih edildiği irdelenmesinin yanında gerçek bir titreşim problemi yaşayan endüstriyel bir makinenin nasıl bu sorunun çözülebileceği incelenmiştir. Bu çalışmanın mekanik titreşimler alanında çalışmalar yapmak isteyenlere ışık tutması temenni edilmektedir.

Bu çalışmayı hazırlamam boyunca bana desteğini ve hoş görüşünü esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Vahit MERMERTAŞ'a çok teşekkür ederim. Ayrıca, yüksek lisans eğitimimi tamamlamam hususunda verdiği destekler için değerli eşime ve hayatıma kattıkları renkleri için çocuklarıma, bu gerçek titreşim problemini benim paylaşan ancak ismini açıklayamayacağım makine üreticisi firmaya çok teşekkür ederim.

Timuçin Ersin Taşdemir

Kasım 2019



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	vi
KISALTMALAR	viii
SEMBOLLER.....	x
ŞEKİL LİSTESİ	xii
ÇİZELGE LİSTESİ	xiv
ÖZET	xvi
SUMMARY	xviii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Test Makineleri Hakkında Çalışmalar.....	4
2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ.....	7
2.1 Tarihçesi	7
2.2 Sonlu Elemanlar Metodu Temeli.....	9
2.3 Sonlu Elemanlar Metodunun Diğer Yöntemlerle Mukayesesi.....	13
2.3.1 Sonlu farklar metodu.....	14
2.3.2 Sonlu hacimler metodu.....	16
2.4 Sonlu Elemanlar Çözümü Adımları	17
2.4.1 Ön hazırlık.....	18
2.4.2 Çözüm	18
2.4.3 Değerlendirme.....	18
2.5 Katılık Matrisi	19
2.5.1 Tanımı	19
2.5.2 Bir eleman için katılık matrisi çıkarımı.....	19
2.5.3 Sistem katılık matrisi çıkarımı	21
2.5.4 Elastik çubuk katılık matrisi.....	25
2.6 Elastik Çubuk Örneği	29
2.6.1 Çubuk özellikleri.....	29
2.6.2 Analitik çözümü	30
2.6.3 Sonlu elemanlar çözümü	30
2.6.3.1 Tek elemanlı çözüm	30
2.6.3.2 İki elemanlı çözüm	31
2.6.4 Sonuçların mukayesesi.....	33
2.7 Dinamik Çözüm.....	33
2.7.1 Serbest titreşim.....	34
2.7.2 Zorlamalı titreşim.....	37
2.7.3 Elastik çubukların serbest titreşimi	39
2.7.4 Misal elastik çubuğun serbest titreşimi	41
3. SONLU ELEMANLAR YAZILIMLARI	45
3.1 Bilgisayar Bilimi ve Yazılımlar.....	45
3.1.1 Tarihçe.....	45
3.1.2 Mühendislik hesaplamaları	47
3.2 Tasarım Yazılımları.....	48
3.3 SEM Analiz Yazılımları	51
3.3.1 SEM analiz yazılımlarının önemi.....	51

3.3.2 Mevcut SEM analiz yazılımları	53
3.3.3 Paket program ile uygulama	54
4. ENDÜSTRİYEL MAKİNEİN REZONANS FREKANSLARININ BULUNMASI	57
4.1 NASTRAN Sonlu Elemanlar Kodu	57
4.2 Autodesk Inventor Nastran.....	58
4.3 Öz Değer Analizi.....	58
4.3.1 Sonlu elemanlar modelinin kurulması	60
4.3.1.1 Modelin açıklaması	60
4.3.1.2 Modelin basitleştirilmesi.....	64
4.3.1.3 Modelin tanımlamalarının yapılması	68
4.3.1.4 NASTRAN eleman tipleri.....	70
4.3.1.4.1. Serbestlik derecesi	70
4.3.2 Modelin çözülmesi ve sonuçlar	74
4.3.2.5 Modelin rezonans frekansları.....	75
4.3.2.6 Mod şekilleri	76
4.3.2.6.1. Efektif kütle değeri	80
4.4 Değerlendirme	86
5. DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ.....	89
5.1 Dinamik Analiz	89
5.2 Tanımlamalar	90
5.2.1 Sönüm	90
5.2.2 Yükleme	91
5.2.3 Frekans aralıklarının tanımlanması	92
5.3 Sonuçlar.....	93
6. SONUÇ	97
KAYNAKLAR.....	101
ÖZGEÇMİŞ	103

KISALTMALAR

CAE	: Computer Aided Engineering (Bilgisayar Destekli Mühendislik)
CAD	: Computer Aided Design (Bilgisayar Destekli Tasarım)
CAM	: Computer Aided Manufacturing (Bilgisayar Destekli Üretim)
CFD	: Computational Fluid Dynamics (Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği)
SEM	: Sonlu Elemanlar Methodu (Sonlu Elemanlar Metodu)
SFM	: Sonlu Farklar Metodu
SHM	: Sonlu Hacimler Metodu
FEA	: Finite Element Analysis (Sonlu Elemanlar Analizi)



SEMBOLLER

A	: Alan
L	: Boy
ω	: Dairesel Frekans
f_i	: Düğüm Kuvvetleri
u_i	: Düğüm Yer Değiştirmeleri
m_{eff}	: Efektif Kütle Değeri
E	: Elastisite Modülü
$f(u)$	: Fonksiyon
F_i	: Genel Düğüm Kuvvetleri
U_i	: Genel Yer Değiştirmeler
σ	: Gerilme
ε	: Gerinim
$I(x)$	: Interpolasyon Fonksiyonu
[K]	: Katılık Matrisi
λ	: Katsayı
F	: Kuvvet
{f}	: Kuvvet Matrisi
F_0	: Kuvvet Genliği
[M]	: Kütle Matrisi
$\emptyset$	: Mod Vektörü
δ	: Uzama
M	: Ortogonal Kütle Matrisi
k	: Yay Katsayısı
$u(x)$	: Yer değiştirme
Δu	: Yer değiştirme
{u}	: Yer Değiştirme Matrisi
r	: Yer Değiştirme Vektörü
ρ	: Yoğunluk
t	: Zaman
σ_x	: X Yönü Normal Gerilme



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Motor kontrol ünitesi geliştirmesi.....	2
Şekil 1.2 Bağlantı Elemanı.....	3
Şekil 2.1 Sonlu elemanlar yazılımı ekranı.	8
Şekil 2.2 Gergin tel.	9
Şekil 2.3 Gergin telin mod şekilleri sınır koşul problemi çözümü.	11
Şekil 2.4 6 Düğüm noktalı bir SEM modeli.....	11
Şekil 2.5 SEM çözümünün analitik çözüme yakınsaması.	12
Şekil 2.6 Örnek bir sonlu elemanla modeli.....	14
Şekil 2.7 Sonlu farkların kesin çözüm üzerinde dağılımı.	15
Şekil 2.8 Bir sonlu hacimler örüntüsü.....	16
Şekil 2.9 Eksenel valfin akışkan içinde hareketi HAD çözümü.	17
Şekil 2.10 İki düğüm noktalı yay sistemi.....	19
Şekil 2.11 Kuvvet – yer değiştirme ilişkisi.	20
Şekil 2.12 İki elemanlı bir sistemin serbest cisim diyagramı.	22
Şekil 2.13 Elemanların serbest cisim diyagramları.....	22
Şekil 2.14 Elastik çubuk eleman ve düğüm noktaları.	25
Şekil 2.15 Elastik çubuk.....	29
Şekil 2.16 Elastik çubuk ve bir elemanlı model.....	31
Şekil 2.17 Elastik çubuk ve iki elemanlı model.....	32
Şekil 2.18 Kütle yay sistemi.	34
Şekil 2.19 Kütle yay sistemi ve zorlayıcı kuvvet.....	37
Şekil 2.20 Elastik çubuk.....	39
Şekil 2.21 Sağ ucu sabit elastik dairesel kesitli çubuk.....	41
Şekil 3.1 İlk bilgisayarlardan Eniac.	46
Şekil 3.2 İnış takımı Zaman-İvme grafiği.....	47
Şekil 3.3 Modern CAD yazılımlarından Fusion360.	48
Şekil 3.4 Tasarım teknolojileri bağlantısı.	49
Şekil 3.5 Bilgisayar destekli analizin adımları.....	50
Şekil 3.6 Örnek dinamik analiz yazılımı arayüzü.	51
Şekil 3.7 Dinamik analiz sonuçları.	52
Şekil 3.8 Dişli mekanizması simülasyonu.	53
Şekil 3.9 Analiz yazılımı iş akışı.	54
Şekil 4.1 Nastran ağ örgüsü.	58
Şekil 4.2 Makinenin devir grafiği.	61
Şekil 4.3 Modelin izometri görünüşü.....	61
Şekil 4.4 Çalışma frekansı grafiği.....	62
Şekil 4.5 Sönüm değerlerinin genliği değiştirmesi.	63
Şekil 4.6 Blok modeli.....	64
Şekil 4.7 Basitleştirilmiş model.	64
Şekil 4.8 Alt Blok modeli.	65
Şekil 4.9 Alt blok modeli basitleştirme.....	65
Şekil 4.10 Ray modeli.....	66
Şekil 4.11 Ray modeli basitleştirilmiş durum.....	66
Şekil 4.12 Çakışma durumu.	67
Şekil 4.13 Model ilk hal.....	67

Şekil 4.14 Model basitleştirilmiş hal.	68
Şekil 4.15 Ray ve blok arasında tanımlanan temas.....	69
Şekil 4.16 Tüm temas tanımlaması.	69
Şekil 4.17 Karmaşık eleman modellemesi.	70
Şekil 4.18 Katı eleman serbestlik dereceleri.	71
Şekil 4.19 Üçgensel yüzey elemanın serbestlik dereceleri.	71
Şekil 4.20 Dörtgensel yüzey elemanın serbestlik dereceleri.	71
Şekil 4.21 Çizgisel eleman serbestlik dereceleri.....	72
Şekil 4.22 İlk ağ iterasyonu.	73
Şekil 4.23 İyileştirilmiş ağ.	74
Şekil 4.24 Bölgesel ağ detayları.	74
Şekil 4.25 Mod numarası ve doğal frekanslar.	75
Şekil 4.26 1. Mod şekli 262 Hz frekansı.....	76
Şekil 4.27 2. Mod şekli 297 Hz frekansı.....	76
Şekil 4.28 3. Mod şekli 340 Hz frekansı.....	77
Şekil 4.29 4. Mod şekli 358 Hz frekansı.....	77
Şekil 4.30 5. Mod şekli 426 Hz frekansı.....	78
Şekil 4.31 6. Mod şekli 437 Hz frekansı.....	78
Şekil 4.32 7. Mod şekli 461 Hz frekansı.....	79
Şekil 4.33 8. Mod şekli 574 Hz frekansı.....	79
Şekil 4.34 Örnek kütle yay sistemi.	81
Şekil 4.35 X yönü Mod Şekli Efektif kütle grafiği.	83
Şekil 4.36 Y yönü efektif kütle ve mod numarası grafiği.	84
Şekil 4.37 Z yönü efektif kütle ve mod numarası grafiği.	84
Şekil 4.38 X yönü dönme ve mod numarası grafiği.	85
Şekil 4.39 Y yönü dönme ve mod numarası grafiği.	85
Şekil 4.40 Z yönü dönme hareketi ve mod numarası grafiği.	86
Şekil 4.41 Süre-Devir grafiği.	86
Şekil 4.42 Tacoma köprüsü yıkılışı.	87
Şekil 5.1 Modal sönüm tanımlaması.....	91
Şekil 5.2 Yükleme detayları.....	92
Şekil 5.3 Modlar arası noktalar kümesinin tanımlanması.....	92
Şekil 5.4 Mod civarı noktalar kümesi.	92
Şekil 5.5 Geliştirilmiş hal.	93
Şekil 5.6 Gerilme durumu geliştirilmiş hal.....	93
Şekil 5.7 Blok alt noktası gerilme ölçümü ilk durum ve ikinci durum.....	94
Şekil 5.8 Frekans model maximum yer değiştirme grafiği.....	94
Şekil 5.9 Yer değiştirme renkli grafiği mm birimi.	95
Şekil 6.1 Campell diagramı.	97
Şekil 6.2 Frekans gerilme grafiği.	98
Şekil 6.3 Frekans Max yer değiştirme grafiği.....	98
Şekil 6.4 340 Hz mod şekli.	99

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 Sonuçların karşılaştırması.....	33
Çizelge 4.1 Malzeme özellikleri.	68
Çizelge 4.2 Eleman tipleri, sayısı ve serbestlik derecesi çizelgesi.	72
Çizelge 4.3 Rezonans frekansları ve rezonans bandı.	75
Çizelge 4.4 Parametreler ve değerler.	81





TİTREŞİM TEST MAKİNESİNİN DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ VE İYİLEŞTİRİLMESİ

ÖZET

Sonlu elemanlar yöntemi, matematikte sınır koşulu problemlerinin çözümünde kullanılan yaygın bir yöntemdir. Yaygınlığı ve uygulamalarda göstermiş olduğu esneklikler nedeniyle ticari yazılım geliştiriciler sonlu elemanlar paket programları geliştirmişler ve farklı disiplinler için kullanıma sunmuşlardır. Mekanik titreşim problemlerinde bu paket programlar sayesinde çözülebilmektedir. Ancak yapısı itibarıyla titreşim özel bir alandır. Bu nedenle bazı noktaların dikkate alınması gereklidir. Bu çalışmada endüstriyel bir makinenin analizi yapılırken çalışma frekansları üzerinden nelere dikkat edilmesi gerektiği ve ayrıca makinenin karşılaşacağı harmonik titreşimlerin nasıl analiz edileceği incelenmiştir. Sistemlerin doğal frekansları ile yüklemenin frekansları çakıştığı zaman rezonans denen durum ortaya çıkmaktadır ve sistemleri zarara uğratmaktadır.

Çalışmanın ilk kısımlarında sonlu elemanlar teorisinin temelleri ve tarihçesi işlenmiş ve ayrıca neden diğer nümerik yöntemlere göre tercih edildiği güvenilir kaynaklarla ifade edilmiştir. Daha sonra Teorinin titreşim problemlerine nasıl çözüm sağladığı hem ayrık sistem hem de sürekli sistemler için irdelenmiştir. Elastik bir çubuğun boyuna titreşimleri irdelenerek titreşim kavramları sürekli sistemler için ifade edilmeye çalışılmıştır. Sonrasında endüstriyel bir makinenin nasıl ticari paket program vasıtası ile analiz yapılabileceği ifade edilmiştir. Bu kısımda modelin hazırlanması, tanımlamalar ve sınırlamalar anlatılmıştır. Son olarak ise bu makinenin harmonik titreşimleri modellenmeye çalışılmıştır.

Sonuç olarak elde edilen rezonans frekanslarının nasıl tehlike arz edebileceği ve çalışma frekansları ile birlikte çakışmaları durumunda nasıl bir durumun ortaya çıkabileceği ve bunu engellemek için kullanılabilecek yöntemler sonuçları değerlendirilirken ifade edilmiştir.



EXAMINATION OF VIBRATION TEST MACHINE DYNAMIC BEHAVIOR AND MODIFICATION

SUMMARY

The finite element method is a method to solve boundary value problems in mathematic. As of its prevalence software vendors developed finite element commercial package programs and offer for different disciplines. Also, mechanical vibrations can be solved by these packages. However, based on its unique situation mechanical vibrations is a special area. Therefore, some of points need to clarify and examined. This study shows how an industrial machinery can be examined for its resonance frequencies and harmonic vibrations during operation. If systems natural frequencies intersect with excitation frequencies that occurs resonance and resonance leads to failure of systems.

The first phase of study explains finite element method fundamentals and history. Also it explains why FEM has advantage comparing to other numerical methods based on trusted sources. On the other hand, how FEM contribute to solve vibration problems is examined. Bar component examined via FEM to solve its longitudinal vibrations. After that a real project studied by a commercial FEM software. This topic includes preparation of model, definitions and boundaries. Lastly, harmonic vibration examined.

Finally, how resonance frequencies can be dangerous and intersection with operation frequencies situation explained and offered a solution to solve such kind of cases.



1. GİRİŞ

Yüz yıllardır insanoğlu'nun sorduğu bir soru vardır. Bu soru aslında bilimin büyükleri tarafından da zamanında soruldu ki bunların arasında Newton Da Vinci ve Lagrange gibi mekaniğe ve mühendisliğe oldukça katkı yapmış kişiler de var. Peki bu soru nedir? Aslında günlük hayatta sıkça duyulan, kullanılan bu soru; Nasıl daha iyi bir ürün geliştirebilir? Nasıl kısıtlı Dünya kaynakları ile daha verimli ve daha çevre dostu ürünleri ürünün fonksiyonelliğini bozmadan önceki kalitesinden fedakârlık yapmadan ve mümkünse daha ucuza üretebilir sorusu Endüstri 4.0¹ konusunun en önemli sorularından biridir. Bu şekilde bir amacı başarmak için sadece doğru ürün iyileştirmesini doğru yaklaşımlar ile yapmak yeterli olmayacaktır. Bunun yanında üretim tesisinin veriminin artırılması ve daha başka bir dizi adım atmak gerekecektir.

Peki nasıl daha iyi bir ürün geliştirilebilir? Bunun için kullanılan yöntemleri insanlığın başından beri kullanılan ve Bilgisayarların keşfiyle gerçekleşen yöntemler diye ayırabilir. Bu konuda şu yorum dikkat çekicidir. Harari (2012) “Tarihin akışını üç önemli devrim şekillendirdi: Yaklaşık 70 yıl önce başlayan Bilişsel devrim, 12 bin yıl önce bunu hızlandıran Tarım devrimi ve yalnızca 500 yıl önce başlayan, tarihi sona erdirip bambaşka bir şey başlatabilecek Bilimsel devrim.” (Harari, 2012, s18) Bilimsel devrim, insanlığa yön verdiği gibi insanların ihtiyaç duydukları ürünlerin tasarımından hesaplanmasına kadar çok geniş bir alana yön verdi.

İnsanlığın başından beri kullanılan yöntemi gerçek zamanlı uygulama veya deneme yanılma olarak ifade edilebilir. Üretilen ürünün kullanılması ve akabinde ortaya çıkan problemlerin tahminler ile düzeltilmesi. Elbette bu işlemler yapılırken daha sistematik yaklaşımlar kullanılmış olabilir ancak en nihayetinde ürün üretilmek ve denenmek zorunda olduğu için gerçek zamanlı kullanım mutlaka olmak zorundadır.

¹ Endüstri 4.0, Üretimin otomatikleşmesini, daha verimli ürünlerin daha az hata ile üretilmesini ön gören ve 4. Sanayi Devrimi olarak da nitelenen gelişim.

Bilimin gelişmesiyle kullanılan yöntem ise Deneysel çalışmalar olarak ifade edilebilir. Belirli koşulların belirlenerek test ve değerlendirme işlemi yapmak bilimi ilerleyişi içinde oldukça önemli bir figürdür. Ancak, bu işlem yine de kısmen dahi olsa bir üretim gerektirecektir. Günümüzde buna prototip² denilmektedir. Ancak Deneysel çalışma tüm faktörleri ve olasılıkları incelemek için verimli bir yol değildir. Tekrar ve tekrar benzer yapıların kurulması zaman ve maliyet etkisini içerecektir.

Bilgisayarların keşfiyle hayatımıza giren yöntem ise Bilgisayar destekli analizler olarak ifade edilebilir. Bilgisayarların içinde çalışan farklı problemleri çözmek için özelleşmiş olan programlar günümüzde endüstrinin her alanında kullanılmaktadır. Elbette bunlardan biride sonlu elemanlar yöntemi diye adlandırdığımız Yapısal analizleri yapmamıza yarayan programlardır. Günümüzde çok geniş bir alanda ciddi araştırmalar yapmak için kullanılan bu yazılımlar oldukça yaygın bir kullanım ağına sahiptir.



Şekil 1.1 Motor kontrol ünitesi geliştirmesi.

Bu yazılımlar fiziksel prototip maliyetlerini ciddi anlamda indirmesinin yanı sıra, farklı senaryo ve dinamiklerin herhangi bir üretimsel maliyet çıkarmadan uygulanmasını ve sonuçların yorumlanarak doğru düzenlemelerin yapılmasını sağlamaktadır. Durağan yüklemeler, ısı yüklemeler, dinamik yüklemeler, farklı malzeme koşulları veya çoklu durumlar incelenebilmektedir.

² Deneme amacıyla üretilmiş olan ürün.

Bütün bunların yanında bu yazılımların gelişen algoritmaları sayesinde optimizasyon çalışmaları da yapılabilmektedir. Şekil 1.1’de görülen örnek çalışma Japon Denso şirketi tarafından bir araba parçası olan Motor kontrol ünitesidir. Motorun beyni olarak düşünebilecek ECU, motor için doğru yakıt besleme miktarını belirleyen elektronik bir yakıt püskürtme sistemidir. Sürüş performansını artırabilen ve zararlı salım miktarlarını azaltabilen bu sistem, motora püskürtülen yakıt miktarını ve zamanlamasını en uygun şekilde ayarlamakta önemli rol oynar. Üretimsel tasarım yaklaşımı kullanılarak model orijinalde olduğundan daha hafif ve fonksiyonelliğini korur hale getirilmiştir.



Şekil 1.2 Bağlantı Elemanı.

Benzer bir çalışmada Şekil 1.2’de görülen Bağlantı elemanı çalışmasıdır. Bu çalışmanın amacı ve önemi aşağıda bulunan alıntıdan anlaşılmaktadır:

General Motors mühendisleri bağlantı elemanlarını yeniden tasarlamak amacıyla üretimsel tasarımı kullanıyor. Sekiz yerine tek bir parçadan oluşan tasarım, önceki koltuk bağlantı elemanından yüzde 40 daha hafif ve yüzde 20 daha güçlü. Görülebilir bir yerde bulunmadığı için General Motor’un önceliği bağlantı elemanının şekli veya estetiği değildi. Şirketin öncelikleri arasında, ağırlık, güvenlik, parça azaltma, sürdürülebilirlik ve imal edilebilir olma gibi özellikler yer alıyor. İmal edilmesi, takip edilmesi ve montajlanması gereken parçaların sayısının azalmasıyla elde edilen yan faydalar sayesinde, süreç çok daha basit hale geldi ve şirket önemli ölçüde tasarruf elde etti. (Reese, 2019)

Önceki sayfalarda ifade edilen örneklerden görüleceği üzere ürünleri daha verimli hale getirmek bu çalışmalar ile mümkün. Daha az ağırlık daha az yakıt sarfıyatı, çevreyi

daha az hasara uğratmak, daha düşük maliyet ile taşımak ve daha hızlı işlemler demek anlamına gelebilmektedir. Tıpkı endüstride amaçlanan yaygın uygulamalarda olduğu gibi bu çalışmada bir ürünün nasıl dayanımını arttırılabileceği ve hatta bunu dinamik yüklemelere karşı nasıl yapılabileceği incelencek, yapılan tasarım değişikliğinin etkisini anlatılmaya çalışılacaktır.

1.1 Test Makineleri Hakkında Çalışmalar

Bu çalışmada titreşim test makinesinin üzerine yapılacak olan çalışmalar incelendiği için öncelikle literatür araştırılmıştır. Test makineleri fonksiyonları gereği belirli ekipman, araç ve gereçlerin referans değerine göre uygunluğunu tespit etmeye yaramaktadır. Endüstri içinde çeşitli test makinaları farklı ölçümler ve değerlendirmelere yaparak bu çalışmaları yapmaktadır. Bu çalışmada incelenen test makinesi ise bir parçanın belirli frekanslarda durumunu incelemek için tasarlanmıştır. Dolayısı ile rezonans durumlarına karşı dayanıklı olmalıdır. Bunun içinde makine konstrüksiyonunun bu durum düşünülerek değerlendirilmesi gereklidir.

Bu model üzerinde dönen dengesiz rotorların yarattığı titreşimlerin etkisi görülmektedir. Bu konuda Turhan şunu ifade etmektedir:

Makinaların daimi dönme hareketi yapan kısımlarına rotor adı verilir. Bir rotorun kütle merkezi dönme eksenini üzerinde yer almıyorsa rotorun dengesiz olduğu söylenir ve bu makinayı sarsan bir kuvvetin doğmasına sebep olur. Rotorun sabit hızla dönmesi halinde harmonik bir kuvvet şeklinde etkileyen bu kuvvet, makinalarda ki titreşim sorunlarının başlıca nedenlerinden birini oluşturur. (Turhan, 2017, s118)

Bu tarz durumları ortadan kaldırmak için makinenin hareketli uzuvlarının kütle merkezini değiştirmeyecek şekilde kurgulamak sorunu ciddi anlamda gidermektedir. Bu konuda Turhan çözümü şöyle ifade etmektedir:

Bir makinada hareketli uzuvların kütle dağılımları, makine kütle merkezi hareketsiz kalacak biçimde ayarlanabilirse sarsma kuvvetinin tamamen yok edilebileceği bilinmektedir. (Turhan, 2016, s242)

Test makinasının modeli Turhan'ın ifade ettiği duruma uymaktadır. Daimi olarak dönmekte olan bir rotor olası bir ağırlık merkezi farklılığı nedeniyle titreşimlere maruz kalmakta. Ancak test makinasının içinde bulunduğu durum kütle merkezinin kaçık olmasından ziyade rotorun ivmeli bir dönme hareketi yapması ve devrini 6 dk içinde arttırmasıdır. Çünkü elde kütle merkezinin kaçık olduğunu gösteren bir bulgu yoktur. Bu durumları aşmak için kullanılabilecek birkaç yaklaşım söz konusudur. Bunlardan ilki titreşimin doğal nedeni olan rezonans olayını ortadan kaldırma durumudur. Rezonans durumunu Benaroya, Nagurka ve Han şu şekilde ifade etmiştir:

En ilginç ve önemli durumlardan biri $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ olması durumudur. Anlam olarak zorlayıcı frekans değeri sistemin doğal frekansının değerine eşit olmasını ifade eder. Teorik olarak cevap sonsuza doğru gider. Küçük bir kuvvet bile genlikleri çok yüksek bir duruma getirebilir. Bu duruma rezonans adı verilir. (Benaroya, Nagurka ve Han, 2017, s59)

Bu noktada yukarıda ifade edildiği gibi sistemin doğal frekansının zorlayıcı frekans değeri ile çakışması rezonans dediğimiz olayı ortaya çıkardığından dolayı ilk önlem sistemin doğal frekansını değiştirmeye çalışmak, zorlayıcı frekans üzerinden uzaklaştırmaya çalışmak olabilir. Bu nedenle doğal frekansların tespit edilmesi gerekmektedir.

Bir diğeri yöntem ise titreşim yalıtımı oluşturmaktır. Titreşim yalıtımı titreşimin yayılma yolunun kesilerek istenmeyen yerlere ulaşmasına engel olmaya çalışmaktır. Bu konuda Turhan şunu ifade etmektedir:

Titreşim yalıtımı denildiğinde, bir nedenle doğmuş olan titreşimlerin yayılma yollarının kesilerek arzu edilmeyen yerlere ulaşmasına engel olunması anlaşılır. Bunu yapmanın yolu, titreşim kaynağı ile titreşimden korunmak istenen kısımlar arasındaki tüm rijid bağlantıların kaldırılarak yerlerine elastik bağlantılar konulmasıdır. (Turhan, 2017, s140)

Ancak model üzerinde bu çalışma için odaklanılacak yöntem titreşim yalıtımı tasarlamak değildir. Sistemin doğal frekansını zorlayıcı frekans değerinden ayırmaktır.

Döner cisimlerde özellikle bu çalışmada kullanılan tip sistemlerde titreşimin iki tip ana etkisi olduğu görülür. Bunu Subbiah ve Littleton şöyle ifade etmektedir:

Rotor dinamiği ile ilgili ana problemlerin burulma titreşimlerinden ve yanal titreşimlerden kaynaklandığını anlamak oldukça önemlidir. (Subbiah ve Littleton, 2017, s8)

Dolayısı ile titreşimlerin oluşmasına müsaade edip onları engellemek yerine oluşmalarını engellemek daha pratik bir çözüm olmaktadır. Bunu yaparken bazı yöntemler kullanılmaktadır. Komszik ve Vollan bunlardan biri olan Campell diagramı hakkında şunu ifade etmektedir:

Döner bir sistemin stabilitesinin ve rezonanslarının değerlendirilmesi mühendislik dinamiğinin oldukça önemli bir kısmını oluşturur. Bazı durumlarda Campell Diagramı rezonans olasılığını görünür kılmaktadır. (Komszik ve Vollan, 2012, s99)

Campell diagramı rotor dinamiği değerlendirmesi için kullanılan önemli bir araçtır. Sistemin doğal frekansları ile döner cismin frekans durumunu karşılaştırmaktadır. Campell diagramından sonuç kısmında değerlendirme yapmak için istifade edilmiştir.

2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

2.1 Tarihçesi

Sonlu elemanlar metodu nümerik bir çözüm metodudur. Analitik olarak çözülemeyecek kadar karmaşık yapıların nasıl çözülebileceğini bize gösteren ve bu yapıları küçük parçalara ayırarak ayrılan her bir parçanın çözülmesini sağlayan ve tüm bu parçaların çözümlerinin bir araya getirilerek tam sonucun ifade edildiği bir sistematik sunar. Ancak SEM³'i kimin icat ettiği sorusu karmaşık bir cevaba sahiptir. Çünkü, bir Edison⁴ veya bir Gauss⁵ gibi tekil cevap verilememektedir. SEM' in geliştirilmesinde pek çok bilim adamı katkı sağlamış ve ileri götürülmesine destek olmuştur.

Metot matematikle birlikte karmaşık sistemlerin ayrıklaştırılarak daha doğrusu elemanlarına ayrılması ile hesaplanması ilkesine dayanır. Aristo tarafından ortaya atılan ayrıklaştırma konsepti sürekli sistemlerin hesaplanmasına olanak sağlamak ile birlikte 16. Yüzyılın sonunda Leibniz ve Newton tarafından tekrar değinilecekti. Çözüm metodu matematikte dx olarak bilinen ve sonsuz küçük birim manasına gelen diferansiyel kavramı üzerinden gitmektedir. Ancak burada matematiksel olarak bazı sorunlar vardır. Günlük hayatta kullanılan, bilinen ve zorlanan her şey sürekli yani kendi içinde devam eden fiziksel koşulların iç içe geçmiş olduğu sistemlerdir. Bu sistemleri çözmek için kullanılan metotlar ise ayrık sistemlerin çözümü için kullanılmaktaydı. Bu noktada, elastik sürekli bir kirişin çözümü hakkında sürekli sistem çözümü ile sistemi parçalara ayırarak çözüm hakkında bir çalışma yapılmıştır. Ancak maalesef yapılan bu çalışma sadece dörtgen elemanlardan oluşan sistem için açıklanmıştır. Yani sistemi sadece dikdörtgene bölen ağ şeklinde yapılmıştır. Ancak

³ SEM, Sonlu elemanlar metodu kısaltması

⁴ T. Edison, Ampulü icat eden Amerikalı mucit

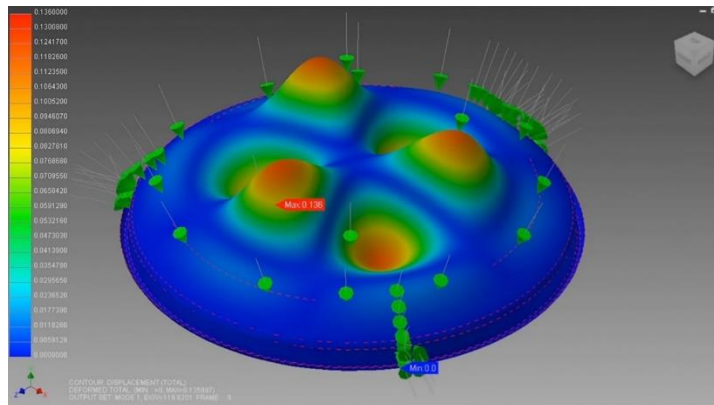
⁵ Carl Friedrich Gauss, Alman Matematikçi özellikle diferansiyel geometri ve sayılar kuramı gibi alanlarda katkıları ile ünlüdür.

tabii olarak günlük hayatta her cismi dikdörtgene ayırarak çözme olasılığı bulunmamaktadır. Bu zorluğu yenmek için Havacılık endüstrisinde çalışan Turner ve Clough daha direk ayrıklaştırma yapan bir model üzerine çalıştılar. Yapılan bu çalışmalar akabinde farklı bilim adamları tarafından kabul edilerek üzerlerine farklı çözümler getirildi.

Sonlu elemanlar metodunun bu bakımda kolektif bir çalışmanın ürünü olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır. Matematiğin ve Fiziğin yaygın kuramları sonlu elemanlar metodu içinde kullanılmıştır. Örneğin matrisler, varyasyonlu yöntemler, Diferansiyel Denklemler, Mukavemet, Mekanik Titreşimler gibi alanların kuramları ve yöntemleri sonlu elemanlar metodu içinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu konuda aşağıda bulunan görüş gelişimi ifade etmektedir:

Standart Ayrıklaştırma Sisteminin gelişimi yapısal mühendislik alanında yapılan çalışmalar ile 19. Ve 20. Yüz yıllara dayanır. İlk olarak bu Direk Katılık Prosesi olarak Navier tarafından 19. Yüzyılın ilk kısmında ifade edildi ve modern haline Clebsch ve diğerleri tarafından getirildi. (Zienkiewicz, Taylor ve Zhu, 1967, s3)

Sürekli sistemlerin ayrıklaştırılması olarak başlayan bilimsel süreç, matrislerin önemli hesaplamalarda özellikle geniş hesaplamalarda önemli bir rol oynaması nedeniyle ve diğer yapılan katkılar ile birlikte bugün sonlu elemanlar metodu olarak bilinen yönetime evirildi. Bu yöntem, yapısal mühendislik alanında kullanım ile başlamış olsa da bugün akışkanlar mekaniği, ısı transferi, elektromanyetik hesaplar ve mekanik titreşimler gibi çok farklı alanlarda kullanılabilmektedir.

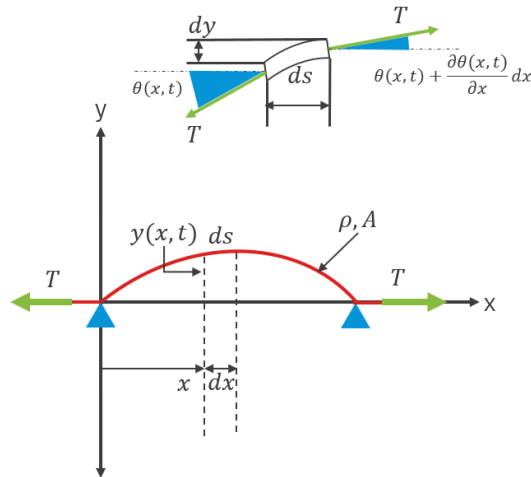


Şekil 2.1 Sonlu elemanlar yazılımı ekranı.

Yöntemin gelişmesi ve farklı alanlarda çözümler sağlar hale gelmesi ile birlikte ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte gerek kurumsal bilgisayarlara gerekse bireysel bilgisayarlara kurulabilen programlar vasıtası ile kullanılabilir hale gelmiştir. Hassas çözüm için daha fazla ayrıklaştırmaya ihtiyaç vardır. Ayrıklaştırmanın artması eleman sayısının artması manasına gelir ve buda daha fazla işlemin yapılmasını gerektirmektedir. Sürekli bir sistemin doğru sonlu elemanlar modellemesini elle çözmek mümkün değildir. Bunu yapabilmek için bilgisayarlardan yardım almak gereklidir. Günümüzde bilgisayarların gelişmesi ve farklı uygulamalar için kullanılabilir hale gelmesi bunu olanaklı kılmıştır. Bilgisayarın işletim sistemi içine yüklenebilen sonlu elemanlar metodu yazılımı ile birlikte analiz yapılabilmektedir.

2.2 Sonlu Elemanlar Metodu Temeli

Sonlu elemanlar metodu sınır koşulu problemlerine çözüm bulmak için kullanılan nümerik bir tekniktir. Sınır Koşulu problemi basit olarak şu şekilde ifade edilebilir. Bir veya birden fazla bağlı değişkenler bilinen bir örüntü⁶ içinde bağımsız değişkenleri her noktada sağlamalı ve belirlenmiş olan sınır koşulları da sağlanmalıdır. Sınır koşulu problemi bu şekilde çözümleri elde etmek için kurulan problemlere verilen bir addır. Sınır Koşulu problemlerinin farklı uygulamaları söz konusudur. Örneğin gergin bir telin titreşimleri bulunmak istediğinde sınır koşulu problemi kullanılmak durumundadır.



Şekil 2.2 Gergin tel.

⁶ Örüntü, matematik içinde sık kullanılan bir terimdir. Belirli bir alan veya bölge veya hacmi ifade eder. Ayrıca, belirli koşulların sağlandığı sınırlı bir kısmı da ifade edebilmektedir.

Sınır Koşul problemi bir diferansiyel denklem ve sınır koşullarından oluşan problemler olarak da sınıflandırılabilir. Diferansiyel denklem örüntü için geçerli olan denklemdir. Gergin tel örneğinde örüntü telin bağlanmış uçları da dahil olmak üzere bu uçlar arasında kalan kısımdır. Tel hem sınır koşullarını sağlamalıdır hem de bağımsız değişkenleri tüm tel uzunluğu boyunca sağlamalıdır. Bu sınır koşulu problemin tel örneğinde özel bir adı vardır. Bu ad Sturm-Liouville⁷ problemidir. Gergin tellerin titreşimlerini analitik olarak bulmak bu çalışmanın kapsamı dışındadır. Bu nedenle sadece yüzeysel olarak değinilecektir. Ancak bu çalışma neticesinde gergin telin doğal frekanslarını ve mod şekilleri bulunmaktadır. Tıpkı diğer sınır değer problemlerinde olduğu gibi önce örüntü içinde geçerli olan diferansiyel denklemin kurulması ki problemin karmaşıklığına göre Adi Diferansiyel Denklemi⁸ de olabilir Kısmi Diferansiyel Denklem⁹ de. Gergin tel örneğinde Kısmi Diferansiyel denklemdir. Eğer çıkan diferansiyel denklem Adi Diferansiyel Denklem ise önce genel çözüm akabinde sınır koşulları ile birlikte özel çözüm elde edilir. Eğer çıkan diferansiyel denklem Kısmi Diferansiyel denklem ise önce Adi Diferansiyel Denkleme dönüştürülür sonrasında her bir Adi Diferansiyel Denklem çözülerek genel ve özel çözümler elde edilir. Gergin tel örneğinde örüntü için elde edilen Kısmi Diferansiyel Denklem neticesinde bu denklemi iki Adi Diferansiyel Denkleme dönüştürerek birisinden doğal frekansları yani öz değerleri¹⁰ diğerinden ise mod şekillerini veya diğer ifade ile öz fonksiyonları¹¹ elde edilmektedir. Şekil 2.3’de görülen şekiller hesaplanan öz fonksiyonları tel boyu içinde göstermektedir.

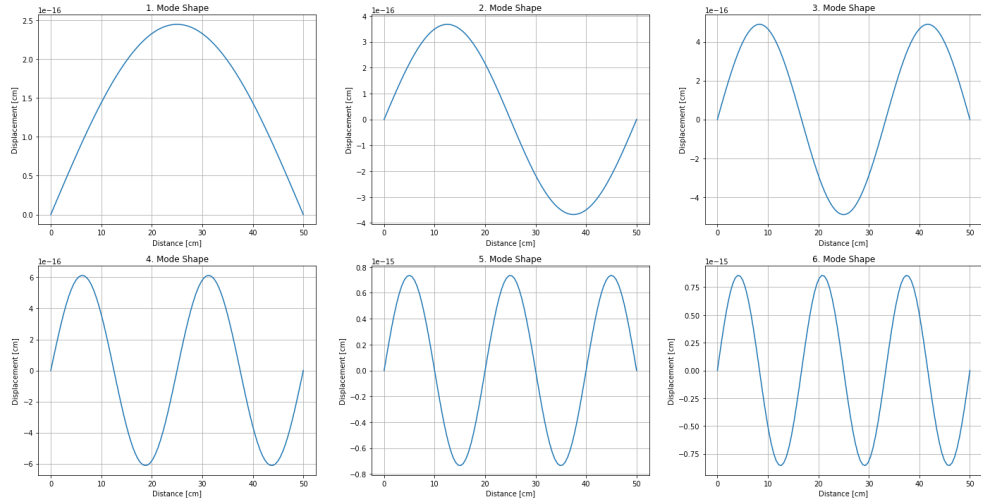
⁷ Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından sınır koşulu problemlerini çözmek için geliştirdikleri sınır değer problemi yaklaşımı nedeniyle gergin tel örneği Sturm-Liouville sınır koşulu problemi sınıfına girmektedir.

⁸ Adi Diferansiyel Denklem, tek bir değişkene bağlı diferansiyel denklemi ifade etmektedir.

⁹ Kısmi Diferansiyel Denklem, çok değişkene bağlı diferansiyel denklemi ifade etmektedir.

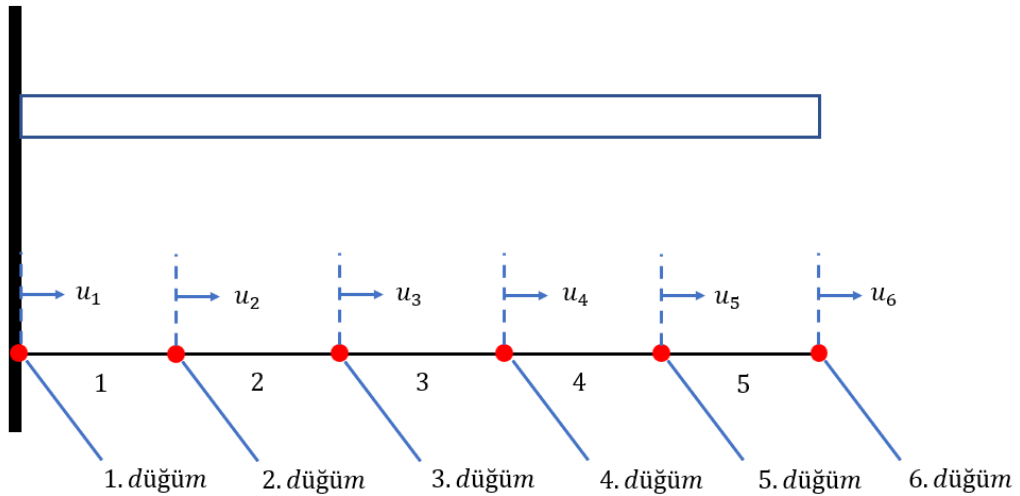
¹⁰ Gergin tel örneğinde çözümlenen problemler öz değer problemleri olarak adlandırılır ve hesaplanan dairesel doğal frekanslar ise öz değerler olarak ifade edilebilir.

¹¹ Sürekli sistemin hesaplaması yapıldığı için mod şekilleri öz fonksiyonlar olarak ifade edilir.



Şekil 2.3 Gergin telin mod şekilleri sınır koşul problemi çözümü.

Gergin tel örneğinde çözülen geometri göreceli olarak basitti. Ancak gerçek hayatta yapılan uygulamalarda çok daha karmaşık geometriler hesaplanmak zorunda kalılabilmektedir. Bu nedenle sürekli sistemi sonlu sayıda elemanlara bölerek yaklaşık bir çözüm almaya çalışmak tercih edilen bir yöntemdir. Bu konuda Hutton şunu söyler: Hutton (2004) “Sonlu elemanlar analizi yaklaşık çözümler elde etmek için kullanılabilecek güçlü bir çözümdür.” (Hutton, 2004, s2)



Şekil 2.4 6 Düğüm noktalı bir SEM modeli.

Şekil 2.4 içinde bulunan sonlu elemanlar modeli 5 eleman içeren ve 6 düğüm noktası içeren bir yapıdır. Basit bir konsol-kiriş¹² sisteminin çözümü için oluşturulmuştur. Sonlu elemanlar metodu bu altı düğüm noktası için çözüm değeri vermektedir. Tüm model bu altı düğüm noktası ile çalışmamaktadır. Bu düğüm noktalarının dışından

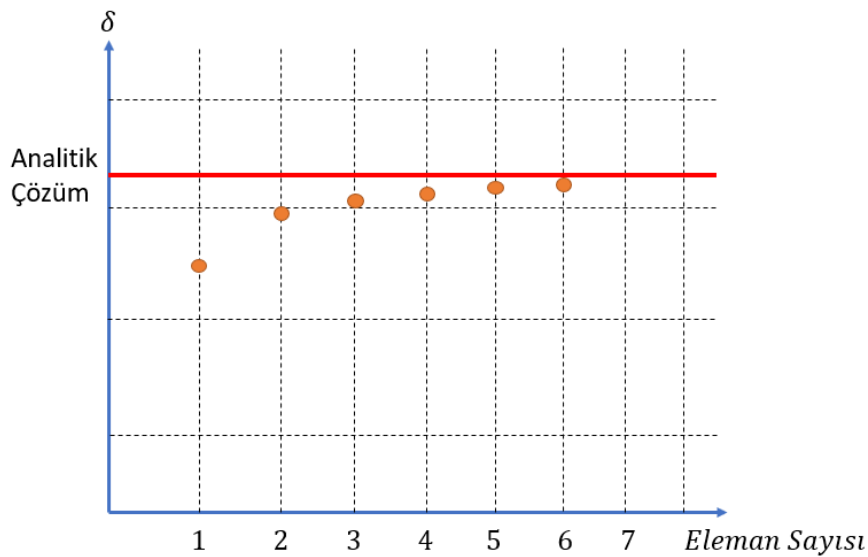
¹² Bir ucu mesnetli diğer ucu boşta olan kirişe verilen teknik isimdir.

kalan kısımlar için sonuçlar nasıl elde edilebilir? Bu nokta belki de sonlu elemanlar metodunun diğer metotlardan ayıran önemli bir avantajını göstermektedir. Düğüm noktaları üzerinden elde edilen değerlerin interpolasyonu ile birlikte diğer noktalar içinde değerler hesaplanabilir. Bu örnekte sistemin boyuna yer değiştirmesi ile ilgilendiğimizi düşünürsek elde etmek isteyeceğimiz değişken her bir düğüm noktasında boyuna yer değiştirme değerleridir. Bunlar; u_i , ($i = 1,6$) olarak gösterilmektedir. Değerini bulmak istediğimiz düğüm olmayan noktalar için aşağıda ki gibi bir ifade yazılabilir. Denklem 2.1 örnek bir interpolasyon fonksiyonu göstermektedir;

$$u(x) = I_1(x).u_1 + I_2(x).u_2 + I_3(x).u_3 + I_4(x).u_4 + I_5(x).u_5 + I_6(x).u_6 \quad (2.1)$$

Burada $I(x)$, interpolasyon fonksiyonunu göstermektedir. u_i ise düğüm noktalarında hesaplanmış olan yer değiştirme değerleridir. Bu ifade sınır koşulları için kendisini sağması ile birlikte düğüm noktalarında da kendisini sağlamaktadır.

Sonlu elemanlar metodu farklı büyüklükte ve disiplinlerde problemlere uygulanabilmektedir. Bu çalışmaların doğruluğunu tek bir evrensel doğru model geliştirerek anlamaya çalışmak elbette mümkün değildir. Farklı malzemeler, farklı yüklemeler, farklı durumlar, farklı modeller ve farklı koşullar bunu mümkün kılmaz. Ancak bu noktada yine de sonlu elemanlar analizinin doğruluğu hakkında fikir elde etmek için çeşitli yöntemler mevcuttur.



Şekil 2.5 SEM çözümünün analitik çözüme yakınsaması.

Grafik 2.1 sonlu elemanlar çözümünün düğüm noktasını arttırdıkça nasıl kesin çözüme yaklaştığını göstermektedir. Görüleceği üzere düğüm noktası arttıkça yakınsama artmaktadır. Bu grafik basit bir model için yaklaşımı göstermektedir. Ancak genel için ciddi bir fikir vermektedir. Bu da doğru modelin kurulmasının sonuca ciddi anlamda yaklaştıracaktır. Genel anlamda sonlu elemanlar analizi yaparken sonuçların doğruluğu için aşağıda bulunan noktalara dikkat etmek uygun olacaktır.

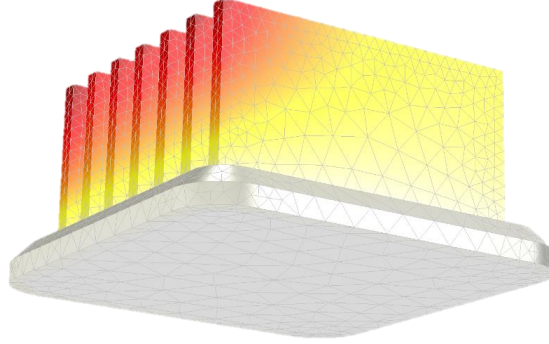
- Nümerik Yakınsama Sağlandı mı?
Kurula model çözüm neticesinde çözüme ulaştı mı? Bunun kontrol edilmesi gereklidir. Eğer yakınsama sağlanıyorsa çözümün gerçekleştiğinde söz edilebilir.
- Sonuçlar Mantıklı mı?
Elde edilen sonuçlar mantık çerçevesinde mi? Beklentileri karşılıyor mu? Yoksa fizik üstü durumlar mı söz konusu?
- Problemin Sınır Koşulları Sağlandı mı?
Sonlu elemanlar metodu bir sınır koşulu problemi olduğu ifade edilmişti.
- Elemanlar arası bağlantı kabul edilebilir düzeyde mi yoksa değil mi?
Sonlu elemanlar metodu sadece düğüm noktaları hakkında değil model üzerinde bulunan tüm noktalar hakkında çözüm verir. Bu nedenle elemanlar arası uyum oldukça önemlidir.

2.3 Sonlu Elemanlar Metodunun Diğer Yöntemlerle Mukayesesi

Sonlu elemanlar metodunun yaygın olarak kullanılmasının arkasında iki önemli etken bulunmaktadır. Bunlardan ilki geniş bir tecrübe sayesinde ciddi anlamda geliştirilmiş olması ve gelişmeye devam etmesidir. Bu tecrübe sayesinde çok farklı alanlarda uygulamalar için kullanılabilmektedir. Bu konuda Reddy'nin yorumu dikkat çekicidir:

Sonlu elemanlar yöntemi pratik mühendislik problemlerinin analizi için planlanmış güçlü bir nümerik tekniktir. Yaygın problemlerde karşımıza çıkan kompleks örüntüleri irdeleyebilme, fiziksel olarak anlamlı tüm sınır koşullarını tanımlayabilme, doğrusal olmayan durumlar ve birleşik olayları analiz edebilme kabiliyetindedir. (Reddy J. N., 2015, s7)

Ancak elbette sonlu elemanlar metodu sadece bir nümerik tekniktir. Dolayısı ile farklı Nümerik tekniklerde mevcuttur. SEM'in diğ er bir avantajlı oldu ğ u nokta ise hesaplama alanında bazı artılarının bulunmasıdır.



Ş ekil 2.6 Örnek bir sonlu elemanla modeli.

Bu bölümde iki önemli nümerik teknik olan sonlu farklar metodu (SFM) ve sonlu hacimler metodu (SHM) sonlu elemanlar metoduna göre incelemesi söz konusu olacaktır. Bu sayede SEM'in belirli avantajları irdelenecektir. Bu üçlünün seçilmesinin nedeni şöyle ifade edilebilir. Özış ık, Orlande, Colaço, Cotta (2017) “Günümüzde sonlu farklar metodu, sonlu hacimler metodu ve sonlu elemanlar metodu geniş bir biçimde Kısmi Diferansiyel denklemlerin kütle, ısı ve momentum transferi durumlarını çözmek için kullanılmaktadır.” (Özış ık, Orlande, Colaço, Cotta, 2017, s1) Uygulamalarda sıklıkla kullanılan ve hala üzerinde araştırmalar yapılan bu yöntemleri irdelemek mana bakımından tercih edilmektedir.

2.3.1 Sonlu farklar metodu

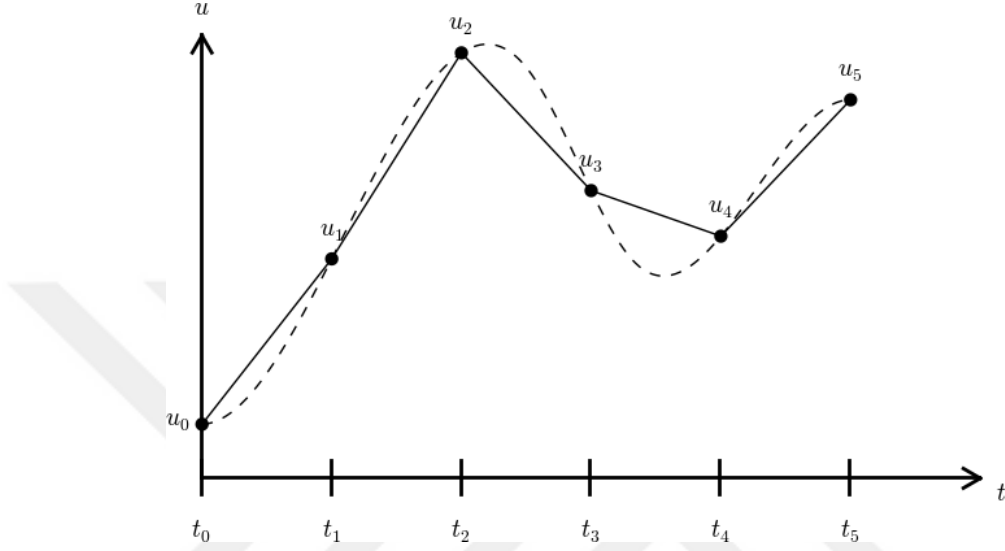
Sonlu farklar metodu sıklıkla kullanılan bir diğ er nümerik tekniklerden biridir. Tıpkı sonlu elemanlarda oldu ğ u gibi diferansiyel denklemlerin çözümlenmesinde kullanılmaktadır. Bu metot bir fonksiyonun türevini tanımlamaya dayanmaktadır. (2.2) bu durumu göstermektedir;

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \quad (2.2)$$

Burada $f(u)$ fonksiyonu, Δu ise bağımsız değışkeni ifade etmektedir. Türevler sonlu bağımsız değışken değışkenleri için hesaplanır. (2.2) ifadesi yaklaşık olarak (2.3) ifadesine evrilebilir;

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} \cong \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \quad (2.3)$$

Bağımsız değişken değerinin eşit olması genel olarak tercih edilmektedir. Ancak bu her zaman mümkün değildir. Bu nedenle yaklaşık olarak eşit olması bazı problemlerin çözümlerinde yeterli görülecektir.



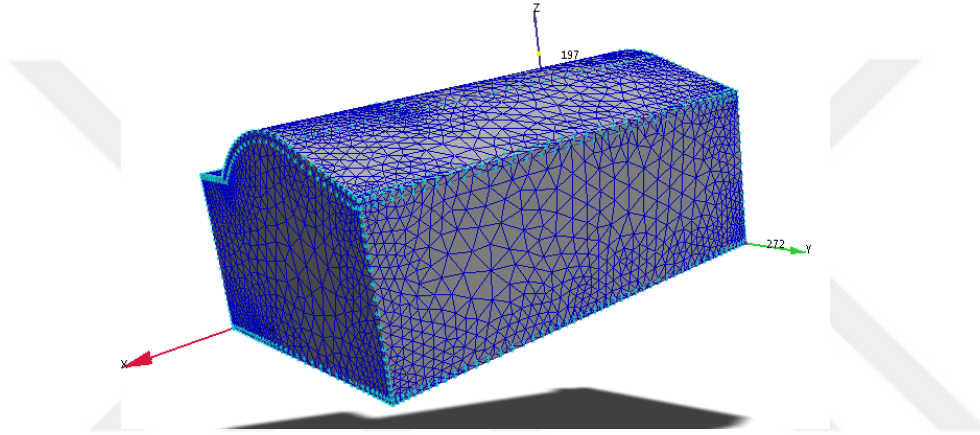
Şekil 2.7 Sonlu farkların kesin çözüm üzerinde dağılımı.

Burada önemli bir nokta daha ortaya çıkmaktadır. Grafik 2.2’de görüleceği gibi çözümün yakınsaması için sonlu farkların yeterince küçük seçilmesi önemlidir. Çok küçük seçilmesi çözümlemeyi uzatacak görece büyük seçilmesi çözüme ırsatacaktır. Bu kararın verilmesi nümerik tekniklerin güzel bir uygulamasıdır. Sonlu farklar metodu diferansiyel denklemlerin çözümlerine uygulanabilse de karmaşık geometrilerin sınırlarının koşullarını probleme entegre etme konusunda sonlu elemanlar metodu kadar başarılı değildir. Diğer bir husus ise sonlu farklar metodunun sadece hesaplanan noktalar için sonuçları vermesi ve arada kalan diğer noktalar için sonuçları verememesidir. Oysa sonlu elemanlar metodu interpolasyonu fonksiyonu oluşturmanın yardımıyla düğüm noktası olmayan noktalar için bile sonuçları hesaplabilmektedir. Önemli bir diğer nokta ise sonlu elemanlar metodu ile bulduğumuz sonuçtan farklı sonuçlar türetilabilir. Örneğin bir consol-kirişin çözümü neticesinde ilk elde edilecek değer yer değiştirme olacaktır. Yer değiştirme üzerinden gerinim ve gerilim değerleri de hesaplanabilecektir. Oysa sonlu farklar metodu sadece belirlenen parametrenin değerini verir ve başka türevlere izin vermemektedir. Yine de bu farklılıklara rağmen sonlu elemanlar ve sonlu farklar metodlarının birlikte

kullanımları söz konusu olabilmektedir. Örneğin bir yapının dinamik yüklemelere karşı cevabı için iki metot birlikte kullanılabilir.

2.3.2 Sonlu hacimler metodu

Sonlu hacimler metodu da tıpkı diğer iki metot gibi önemli bir nümerik çözüm tekniğidir. Yaygın olarak kullanıldığı alan hesaplamalı akışkanlar dinamiği¹³ problemleridir. Mekanik yapıların davranışlarının tahmin edilmesi akışkanlara göre her daim daha kolay olmuştur. Ancak tıpkı mekanik problemlerde görüleceği gibi analitik yöntemler tüm akışkanlar problemlerini çözmemize imkân sağlamamaktadır. Hatta bu ayrımı tespit etmek akışkanlar mekaniğinde daha net göze çarpmaktadır.



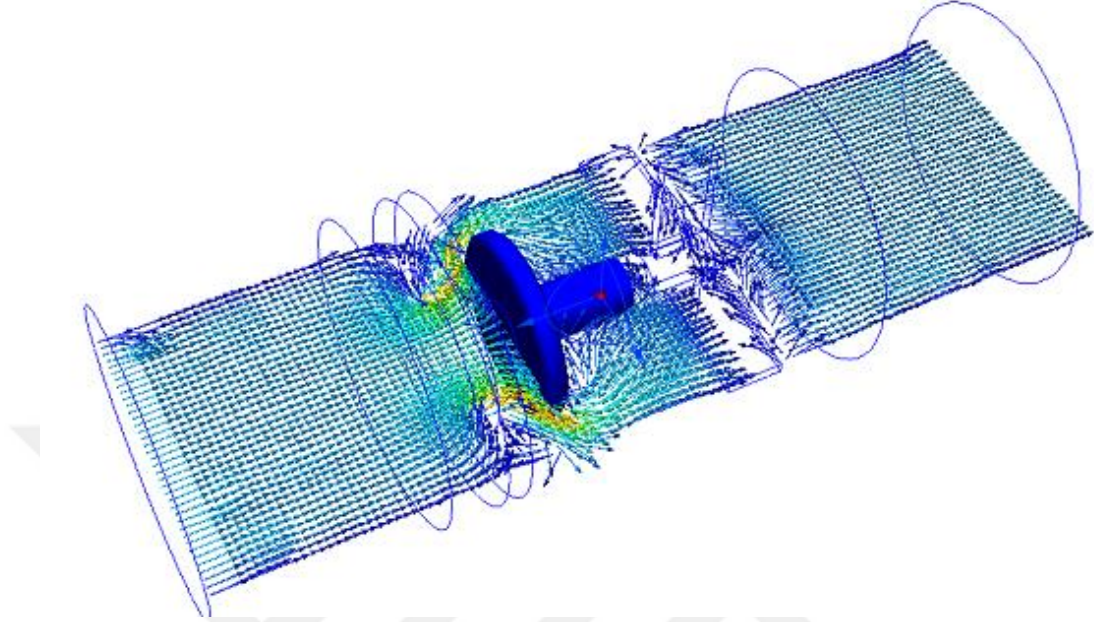
Şekil 2.8 Bir sonlu hacimler örüntüsü.

Sonlu hacimler metodu, diferansiyel hacimler ile ilgili kısmi diferansiyel denklemleri sonlu hacimler vasıtası ile ayrık cebirsel denklemlere dönüştüren nümerik bir çözüm yöntemidir. Tıpkı diğer yöntemlerde olduğu gibi başlangıç adımı ayrıklaştırmaktır. Sonlu farklar metodu, sonlu farklara ayırarak; sonlu elemanlar metodu, sonlu elemanlara ayırarak bu işlemleri yaparken; sonlu hacimler metodu, sonlu hacimlere ayırarak bu işlemleri yapmaktadır. Özellikle neden akışkanlar mekaniği alanında sonlu hacimler metodunun kullanıldığını anlamak için bu yorum dikkat çekicidir:

Sonlu hacimler metodu doğası gereği Hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde tercih edilmektedir. Önemli bir özelliği fiziksel boşlukta yapılaşdırılmamış poligonal ağ yapısı ile formüle edilebilir. Son olarak SHM bilinmeyen

¹³ Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği, Akışkanların davranışlarını nümerik ve matematiksek yollar ile anlamaya çalışmak için kullanılan günümüzde bilgisayar destekli olarak yaygın bir kullanıma imkân tanıyan disiplin.

değişkenler bölünmüş elemanın sınırında değil tam ortasında olmasına rağmen müdahale gerektirmeden kolaylıkla çok farklı sınır koşullarına adapte edilebilir. (Moukalled F., Mangani L. ve Darwish M, 2016, s4)



Şekil 2.9 Eksenel valfin akışkan içinde hareketi HAD çözümü.

Ancak diğer bir önemli nokta ise sonlu elemanlar metodunun da akışkanlar mekaniği çözümlerine uygulanabilmesidir. Nümerik çözüm yöntemi olarak sonlu elemanlar metodunu, sonlu hacimler metoduna göre tercih eden mühendislik yazılımları söz konusudur. Örnek olarak Autodesk CFD ve COMSOL Multiphysics yazılımları verilebilir. Bunun sebebi sonlu elemanlar metodunun diğer sonlu hacimlere göre avantajlarının bulunmasıdır. Bunun en önemli nedeni karmaşık geometrilerin çok kolay biçimde modellenenabilmesidir. Diğer bir önemli fark ise sonlu hacimler metodunda daima akışlar ve akımlar ile ilgilenmek durumundayken sonlu elemanlarda buna gerek yoktur. Diğer taraftan sonlu hacimler metodunda bozuk geometrileri doğru modelleyebilmek için daha çok emeğe ihtiyaç duyulabilmektedir.

2.4 Sonlu Elemanlar Çözümü Adımları

Bu konuyu günümüzde ikiye ayırmak daha uygun bir yaklaşım ortaya çıkaracaktır. Bu bölümde Teorik adımlamaların nasıl olması gerektiğinden bahsedilecektir. Bir sonraki bölümde yazılım uygulaması adımlamaları açıklanacaktır. Teorik adımlamalar da tıpkı yazılım adımlamaları gibi üç ana kategori altında toplanabilir. Ön hazırlık, Çözüm ve Değerlendirme.

2.4.1 Ön hazırlık

Sonlu elemanlar modellemesinin yapılabilmesi için bazı hazırlıkların tamamlanmış olması gerekmektedir. Konunun ilk bölümlerinde yapılmış olan açıklamaya paralel olarak yine başlangıç noktasının geometrik örüntü ile başlanması gerektiğini söylenilebilir. Sonrasında bu örüntü içine yerleştirilmesi gereken eleman tiplerinin tanımlanması gerekmektedir. Bunu izleyen adım ise malzeme bilgisini tanımlanması olmalıdır. İlerleyen kısımda göreceğimiz üzere bu adım malzeme ismini girmek ve belirlemek değil malzemenin fiziksel özelliklerini tanımlamaktır. Bunu takiben ise elemanların geometrik özelliklerini tanımlamak gereklidir. Sonrasında fiziksel sınırlamaları ve eleman bağlantılarını tanımlamak son olarak yükleme durumunu modele eklemek gerekmektedir.

2.4.2 Çözüm

Bu noktada modelin büyüklüğüne göre bir Teknik Programlama Dilinden yardım alınabilir veya paket programlar kullanılabilir. Düzlemsel ve eleman sayısı çok olmayan modeller için Programlama Dili yardımıyla çözüm yeterli olacaktır. Ancak model büyüdükçe hesaplanması gereken düğüm sayısı ve eleman sayısı artacak ve bu da matrislerin daha uzun satır ve sütun yapılarına sahip olmaları anlamına gelecektir. Bunun yanında hesaplanan bağımsız değişkenlerden her bir düğüm noktası için diğer bağımlı değişkenler türetilerek ve düğüm noktası olmayan alanlar için interpolasyonu fonksiyonu üretilerek onların sonuçları ve türev sonuçları da elde edilecektir. Bu sonuçlar, yer değiştirme, gerilme, gerinim veya güvenlik faktörü olabilir. Akışkanlar Mekaniği örneğinde ise ısı akısı, akış debisi, hız gibi kavramlar türetilir.

2.4.3 Değerlendirme

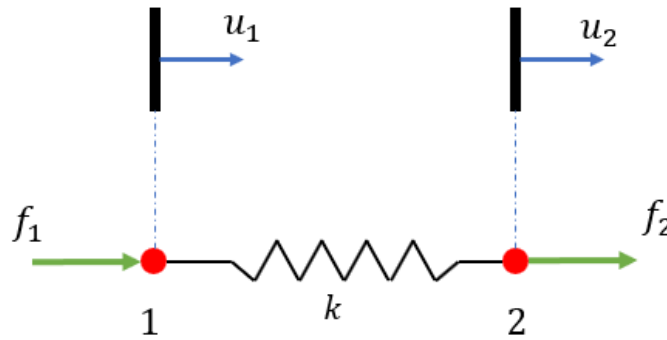
Bu kısımda elde edilen sonuçlar yorumlanarak modelde fiziksel koşulların sağlanıp sağlanmadığı, sınır koşullarının sağlanıp sağlanmadığı, sonuçların mantık çizgisinde olup olmadığı gibi noktalara bakılır. Genel sonlu elemanlar sonuçları için deforme olmuş şekil renk kodlanmış grafik ve iki boyutlu grafikler sıklıkla kullanılmaktadır. Eğer yapı dinamik yüklemelere maruz kalıyorsa şekil animasyonu yine önemli ipuçları vermektedir.

2.5 Katılık Matrisi

2.5.1 Tanımı

Sonlu elemanlar metodu çalışmalarında kullanılan en önemli olgulardan biri Katılık Matrisi diye tabir edilen sistem matrisidir. Diferansiyel denklemler zaten bu matris formuna dönüştürülerek çözülmeye çalışılır. Katılık Matrisi, geometrik ve malzeme davranış bilgisini içermektedir. Bu sayede elemanın deformasyona karşı göstereceği direnç tanımlanır. Ancak bu açıklama eğer sonlu elemanlar yöntemi yapısal analiz için kullanılıyorsa geçerlidir. Önceki bölümlerde açıklandığı gibi sonlu elemanlar metodu, ısı transferi, akışkanlar mekaniği gibi alanlarda da kullanılmaktadır. Örneğin akışkanlar mekaniğinde Katılık matrisi elemanın değişimine karşı gösterdiği direnci işaret eder.

2.5.2 Bir eleman için katılık matrisi çıkarımı

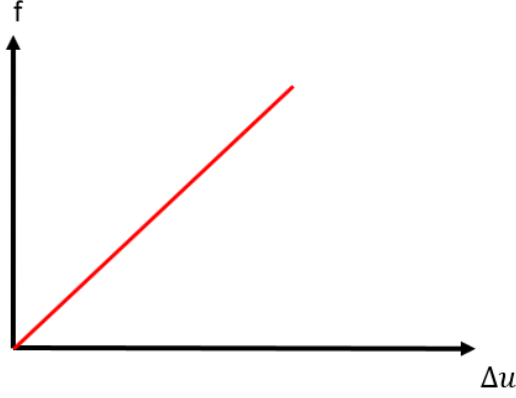


Şekil 2.10 İki düğüm noktalı yay sistemi.

Metodun detaylarını basit bir yay sistemi analogisi ile açıklama çok doğru olacaktır. Bir doğrusal yayın 1 ve 2 noktalarından bağlandığını k yay katsayısına sahip olduğunu bu iki noktaya da sırasıyla f_1 ve f_2 kuvvetlerinin uygulandığını düşünölsün. Doğrusal yay üzerine uygulanan kuvvete yay katsayısının değeri nispetinde cevap verir.

$$F = k \cdot \Delta u \quad (2.4)$$

(2.4) bu ilişkinin matematiksel karşılığını vermektedir. İfadeden göröleceğı üzere uygulanan kuvvet arttığı ölçüde yer değıştirme artacaktır. Zaten bu nedenle doğrusal yay kavramı kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar metodunda yay analogisi kullanılarak Teoremi açıklama isabet olmuştur. Çünkü yay katsayısı malzemenin özellikleri ile ilişkilendirilebilmektedir.



Şekil 2.11 Kuvvet – yer değiştirme ilişkisi.

Bu kuvvetlerin uygulanması nedeniyle belirli bir yer değiştirme söz konusu olacaktır. Bu yer değiştirme kavramı için düğüm noktalarında ki net yer değiştirmenin bulunması gerekmektedir. Yer değiştirme (2.5)’de ifade edilmiştir.

$$\Delta u = u_2 - u_1 \quad (2.5)$$

(2.4)’ü burada kullandığımızda (2.6) ifadesi ortaya çıkar:

$$f = k. \Delta u = k. (u_2 - u_1) \quad (2.6)$$

Sistemin dengede olması için kuvvet denkleğinin olması gereklidir. Kısaca net kuvvetin sıfıra eşit olması gerekmektedir. (2.7) ifadesi bu koşulun denklemdir.

$$f_1 + f_2 = 0 \quad (2.7)$$

(2.7)’nin yardımı ile birlikte 1 ve 2 noktalarına uygulanan kuvvetler üzerinden (2.6)’ya yazılırsa;

$$f_1 = -k. (u_2 - u_1) \quad (2.8)$$

$$f_2 = k. (u_2 - u_1) \quad (2.9)$$

(2.8) ve (2.9) bir sistem halinde yazmak için matris formuna çevirilebilir. Bu form cebirsel matris işlemleri yapıldığında yine (2.8) ve (2.9) verecektir ancak işlemleri daha sistemli ve bütüncül hale getirilmesine yardımcı olacaktır. (2.10) ile gösterilen matris bu nedenle kullanışlıdır.

$$\begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Burada, 1 ve 2 noktaları artık fiziksel bir sistemin değil bir sonlu elemanın düğüm noktaları olarak düşünülürse; yay bağlantısı bir eleman ve uçları düğüm noktaları

olmuş olacaktır. (2.11) yay mantığının matris olarak kurgulanmış halidir. (2.12) ise bu sayede oluşturulmuş olan katılık matrisine karşılık gelmektedir.

$$[K] \cdot \{u\} = \{f\} \quad (2.11)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$[K]$, Katılık Matrisi

$\{u\}$, Düğüm Yer Değişimleri

$\{f\}$, Düğüm Kuvvetleri

Görüleceği üzere Katılık Matrisi simetrik bir matristir. Yer değişimleri bulabilmek için doğrusal denklem takımı sistemlerini kullanarak yer değişimleri elde etmek gerekecektir. Bunun için (2.11) kullanılarak Katılık Matrisinin yani (2.12)'nin tersini almak gerekecektir.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Burada (2.13) üzerinde çözümün elde edilebilmesi için Katılık Matrisini tersinin mevcut olması gerekmektedir. Bunun kontrol edilmesi için (2.14) ifadesi hesaplanmalıdır.

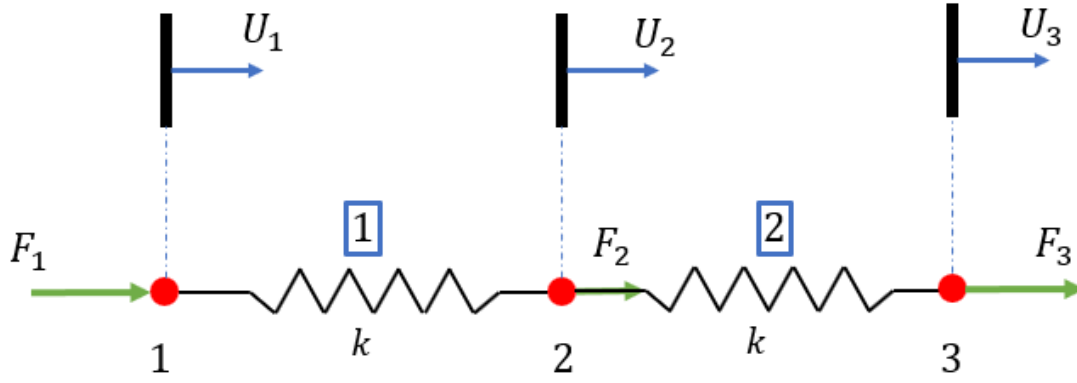
$$\det([K]) = (k^2 - k^2) = 0 \quad (2.14)$$

$$[K]^{-1} = \frac{1}{\det([K])} \cdot \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} = \frac{1}{0} \cdot \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} = \infty \quad (2.15)$$

(2.15) üzerinden görüleceği üzere $[K]$ 'nin tersi yoktur. Ters olmadığı için (2.13) üzerinden çözüme ulaşılamıyor. Bu nedenle buradan şu çıkarım yapılmaktadır. (2.13) çözülebilmesi için mesnet veya sınır koşullarının tanımlanması gereklidir. Aksi halde çözüm elde edilemez.

2.5.3 Sistem katılık matrisi çıkarımı

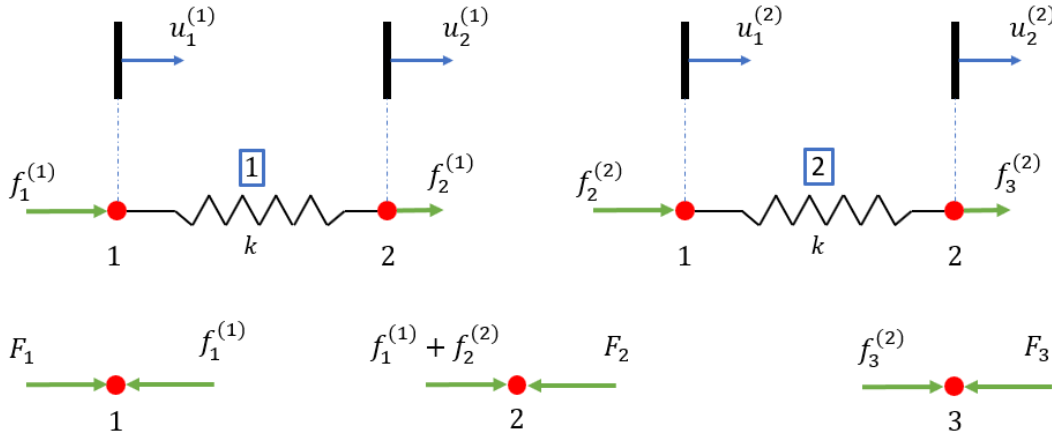
Tıpkı Bölüm 2.5.2'de gösterildiği gibi bir eleman sisteminin Katılık Matrisini çıkarmaya çalışmak için aynı yol takip edilebilir.



Şekil 2.12 İki elemanlı bir sistemin serbest cisim diyagramı.

Şekil 2.10 üzerinde gösterilen ifadeler de tıpkı tek eleman örneğinde gösterilen ifadeler gibi aynı tanımlara karşılık gelmektedir. Burada bulunan fark artık birden fazla eleman olduğu ve sistemin elemanlar özelinde yer değiştirmelerinden ve sistem için genel yer değiştirmeden bahsetmek gerekeceğidir.

U_1, U_2, U_3 Genel düğüm yer değiştirmeleri. F_1, F_2, F_3 Genel düğüm kuvvetlerini göstermektedir.



Şekil 2.13 Elemanların serbest cisim diyagramları.

Şekil 2.11 üzerinde görüleceği şekilde her bir düğüm noktası için (2.4) kullanarak ilgili denklemleri çıkarılması sistemin geneli için ciddi bir fikir verecektir. (2.16) ve (2.17) ifadeleri her bir düğüm noktası için kuvvet denkleğini göstermektedir;

$$f_1^{(1)} = -k_1 \cdot (u_2^{(1)} - u_1^{(1)}) \quad (2.16)$$

$$f_2^{(1)} = k_1 \cdot (u_2^{(1)} - u_1^{(1)}) \quad (2.17)$$

Tıpkı (2.8) ve (2.9) üzerinden (2.10) elde edilmesi gibi her bir eleman için ayrı ayrı aynı işlem yapılabilir. Buda aşağıda bulunan (2.18) ve (2.19) ifadelerinin elde edilmesini sağlayacaktır.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Önceki kısımda genel düğüm yer değiştirmelerini tanımlamıştık. Şekil 2.13 bakıldığında aşağıda bulunan ifadelerin doğruluğu görülmektedir.

$$u_1^{(1)} = U_1 \quad (2.20a)$$

$$u_2^{(1)} = U_2 \quad (2.20b)$$

$$u_1^{(2)} = U_2 \quad (2.20c)$$

$$u_2^{(2)} = U_3 \quad (2.20d)$$

(2.20a), (2.20b), (2.20c) ve (2.20d) ifadelerini (2.18) ve (2.19) içinde yerine koyarsak aşağıda görülecek (2.21a) ve (2.21b) ifadeler elde edilir.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.21a)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.21b)$$

Burada özellikle U_2 iki denklemde bulunuyor olması iki farklı değeri olduğunu imajı yaratmaktadır. Oysa böyle değildir. Unutulmamalıdır ki 1. Eleman ve 2. Eleman birbirine 2. Düğüm Noktası üzerinden bağlıdır. Bir noktada iki farklı yer değiştirme olmaz. Bir diğer önemli nokta ise elemanlar için yazılan denklemlerde alt indis ve üst indis kullanılmıştır. Alt indis düğüm numarasını üst indis ise eleman numarasını ifade etmektedir. $f_2^{(1)}$ İfadesi 1. Elemanın 2. Düğüm noktasına uygulanan kuvvet şeklinde algılanmalıdır.

(2.21a) ve (2.21b) denklemlerini özünü bozmayacak şekilde bir satır ve bir sütun genişlettiğimizde aşağıda görüldüğü gibi (2.22a) ve (2.22b) elde edilecektir.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.22a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.22b)$$

(2.22a) ve (2.22b) denklemleri toplandığında (2.23) ifadesi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Şekil 2.11 de görüleceği üzere düğüm kuvvetleri ve genel kuvvetler arasında ilişki vardır. Bu ilişkiler (2.24a), (2.24b) ve (2.24c) olarak gösterilmiştir.

$$f_1^{(1)} = F_1 \quad (2.24a)$$

$$f_2^{(1)} + f_1^{(2)} = F_2 \quad (2.24b)$$

$$f_2^{(2)} = F_3 \quad (2.24c)$$

(2.24a) , (2.24b) ve (2.24c) denklemleri (2.23) matris sistemleri içinde yerine konulduğunda tüm sistem için genelleştirilmiş Katılık matrisi genel yer değiştirmeler ve kuvvetler ile ortaya çıkmış olacaktır.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Görüleceği üzere (2.25) aslında (2.11) ifadesinin bir formudur. Biraz önce ifade edilen yaklaşım pek çok literatür çalışmasında kullanılan bir yaklaşımdır. Örneğin Koutromanos kitabında Katılık Matrisini Katsayı Matrisi olarak tanımlar:

Özetlenirse, bir sonlu elemanlar analizinde, her bir elemanın genel forma katkısını katsayı matrisi ve nodal kuvvetlerin etkimesi ile bulabiliriz. Sonrasında bu eleman katkıları birleştirilerek düğüm noktalarının çözümlerini yapmamızı sağlayacak genel yapı denklemleri elde edilir. (Koutromanos I., 2018, s65)

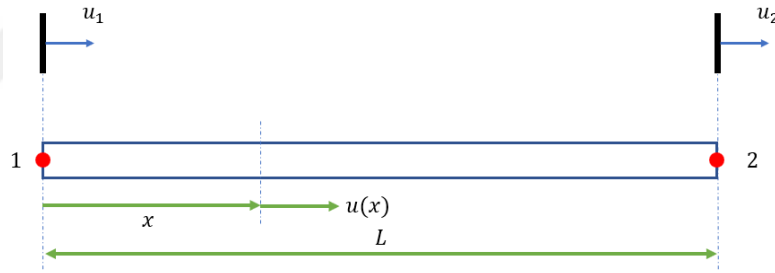
Koutromanos'un katsayı matrisi olarak ifade ettiği bizim notasyonumuzda Katılık matrisi olarak ifade ettiğimiz ifadenin katkısını (2.23) oluştururken göstermiştik.

2.5.4 Elastik çubuk katılık matrisi

Önceki bölümlerde irdelenen ifadeler sonlu elemanlar metodunun temelini göstermesi bakımından önemlidir. Ancak, yapıların modellenmesi bazı tanımlar ve adımlar ile başlamaktadır. Bu noktada çok farklı geometriler kullanılabilmektedir. Ancak genelde ayırık sistemlerden sonra sürekli sistemlerin modellenmesi için Elastik Çubuklar ile başlamak tercih edilen bir yöntemdir. Elastik Çubuklarda sonlu elemanlar metodu çalışması yapabilmek için bazı kabuller yapmak gerekmektedir.

1. Çubuk geometrik olarak düzgün
2. Malzeme Hooke kanunu ile davranış gösterir
3. Kuvvetler sadece çubuğun sonuna uygulanır
4. Çubuk sadece eksenel yönde yüklenir. Eğilme, burulma ve kayma iletilmez

Yukarıda bulunan kabuller temel formasyonu kurmak içindir. Elbette bazıları pratikte mümkün değildir. Ancak çubuk sonlu elemanlar alanında ilerlendikçe diğer koşullar da eklenecektir. Aynı zamanda burada çubuğun boyuna yapacağı yer değiştirmelerle ilgilenildiğini de söylemek gereklidir.



Şekil 2.14 Elastik çubuk eleman ve düğüm noktaları.

Çubuğun başlangıcına 1. Düğüm Noktası atılmıştır, sonuna ise 2. Düğüm Noktası atılmıştır. Çubuğun uzunluğu L ile gösterilmektedir. Çubuk üzerinde herhangi bir x noktasında tespit edilen yer değiştirme $u(x)$ olarak ifade edilmektedir. Sonlu elemanlar çalışmasında yer değiştirme iki nodal yer değiştirme değerinin interpolasyonu ile hesaplanmaktadır. Bunun için sınır değerleri (2.26a) ve (2.26b) (2.27) içinde kullanılır.

$$u_1 = u(0) \quad (2.26a)$$

$$u_2 = u(L) \quad (2.26b)$$

$$u(x) = I_1(x) \cdot u_1 + I_2(x) \cdot u_2 \quad (2.27)$$

Burada I_1 ve I_2 interpolasyon fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların düğüm noktalarında bulunan değerleri de karşılaması gerekmektedir. (2.28a), (2.28b), (2.28c) ve (2.28d) fonksiyonların değerini göstermektedir.

$$I_1(0) = 1 \quad (2.28a)$$

$$I_2(0) = 0 \quad (2.28b)$$

$$I_1(L) = 0 \quad (2.28c)$$

$$I_2(L) = 1 \quad (2.28d)$$

Birinci düğüm noktasında 2. İnterpolasyon fonksiyonunun katkısı olmayacaktır. Aynı şekilde ikinci düğüm noktasında 1. İnterpolasyon fonksiyonunun katkısı olmayacaktır. (2.28a), (2.28b), (2.28c) ve (2.28d) bunların ifadesidir.

İnterpolasyon fonksiyonları için genelde polinomial formlar kullanılabilir. Bu modelin karmaşıklığına göre değişmektedir. Burada da model tek elemandan oluşan bir elastik çubuk olduğu için çalışma yapıldığından dolayı doğrusal denklem seçilmesi başlangıç için yeterli olmaktadır. (2.29a) ve (2.29b) bu doğrusal denklemleri göstermektedir.

$$I_1(x) = m_0 + m_1 \cdot x \quad (2.29a)$$

$$I_2(x) = n_0 + n_1 \cdot x \quad (2.29b)$$

Bu ifadeler üzerinden (2.28a), (2.28b), (2.28c) ve (2.28d) ifadelerini sağlamaya çalışarak (2.29a) ve (2.29b) değerlerini tespit etmeye çalıştığımızda şu ifadeler karşımıza gelecektir;

$$I_1(0) = m_0 + m_1 \cdot 0 = 1 \Rightarrow m_0 = 1 \quad (2.30a)$$

$$I_2(0) = n_0 + n_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow n_0 = 0 \quad (2.30b)$$

$$I_1(L) = m_0 + m_1 \cdot L = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{L} \quad (2.30c)$$

$$I_2(L) = n_0 + n_1 \cdot L = 1 \Rightarrow n_1 = \frac{1}{L} \quad (2.30d)$$

Bulunan (2.30a), (2.30b), (2.30c) ve (2.30d) ifadeleri (2.27) içinde yerine konulursa tüm eleman için interpolasyon fonksiyonunun elde edileceği görülmüş olur. Bu fonksiyon (2.31) olarak aşağıda ifade edilmiştir;

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) \cdot u_2 \quad (2.31)$$

Sonlu elemanlar teoreminde yer değiştirme değerlerinden başlayarak gerinim, gerilme ve daha sonra eğer malzemenin akma gerilmesinin değeri biliniyorsa güvenlik faktörü değerleri tespit edilir. Tabi bu yaklaşım geleneksel sonlu elemanlar çalışmalarında sıklıkla tercih edilen yaklaşımdır. Ancak farklı yaklaşımlarda söz konusudur. Bu

noktada örmek olarak Treffzt sonlu elemanlar yöntemi¹⁴ geleneksel methodun öncelikli parametresi noktasında farklılaşmaktadır. Bu konuda Wang ve Qin'nin yorumu dikkat çekmektedir:

Bu iki yöntem arasında bulunan fark yer değiştirme kabulüne ve varyasyonel fonksiyonların kullanımı alanlarına dayanmaktadır. Farklılık iki modelin zıt matematiksel konseptlere dayanmasından ortaya çıkmaktadır. (Wang H. ve Qin Q.H., 2008, s12)

Bilimde sorgulamak ve farklı metotlar üzerinden çalışmalar yapmak oldukça önem arz edebilmektedir. Bu nedenle her ne kadar geleneksel sonlu elemanlar yöntemi ciddi anlamda kabul görse ve uygulansa dahi farklı araştırmalar söz konusudur. Bu noktaya kadar ifade ettiğimiz formüllerin tamamı geleneksel sonlu elemanlar metodu üzerinedir.

Yer değiştirmenin uygulanan yük ile ilişkisi olduğunu daha önce de ifade etmiştik. Bu nedenle aşağıda bulunan formül (2.32) ilişkiyi göstermektedir.

$$\delta = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} \Rightarrow k = \frac{F}{\delta} = \frac{A \cdot E}{L} \quad (2.32)$$

k ifadesi eğer ilk kısımda yay mantığı üzerinden kurgulanmamış olunsaydı. Herhangi bir katsayı diyebilirdik. Ancak bu orana k denilmesinin daha manidar bir sebebi vardır. Buda modelin malzeme ve geometrik özelliklerinin yay sabiti ile ilintilemesidir. (2.33) bu durumu göstermektedir.

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.33)$$

(2.33) ifadesi normal gerinin değerini göstermektedir. Burada du ve dx ifadesi oldukça küçük anlamını ifade eder. Diferansiyel farklılıklar matematikte sık kullanılan bir olgudur. Ancak bunun tercih edilmesinin sebebi istenildiği gibi genişletilme imkânı tanınmasından kaynaklanır. Newton sonsuz küçükler anlamına gelen diferansiyel farklar ile birlikte bilim dünyasına ciddi bir katkı yapmıştır.

¹⁴ Treffzt sonlu elemanlar yöntemi T eleman matematiksel konseptine dayanan eğrisel formların daha iyi ağ atılmasını sağlayan alternatif bir sonlu elemanlar yöntemidir. Bu konuda ilgilenenler kaynakçaya bakabilir.

$$\varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (2.33)$$

(2.33) tüm eleman için söz konusu olan gerinim değerini vermektedir. Ancak tekrar ifade etmekte fayda vardır bu eksenel gerinim değerini vermektedir.

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (2.34)$$

Gerinimin gerilimle ilişkisi Mekanğin Mukavemet dalında iyi biçimde ifade edilmiştir. (2.34) içinde bundan yararlanarak gerilme değerine ulaşılmıştır. (2.35) ifadesi gerilmenin kuvvet değerinin alana bölünmesi ile ortaya çıktığını göstermektedir.

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \quad (2.35)$$

(2.35) mukavemetten bilinmektedir. (2.34) ifadesini (2.35) içinde yazarsak aşağıda bulunan (2.36) ifadesi elde edilmiş olunur.

$$F = \sigma_x \cdot A = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (2.36)$$

(2.36) ifadesi düğümsel kuvvetler içinde geçerli olmalıdır. Bunu düşünerek yazılırsa; (2.37a) ve (2.37b) ifadeleri ortaya çıkacaktır;

$$f_1 = -\frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (2.37a)$$

$$f_2 = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (2.37b)$$

(2.37a) ve (2.37b) ifadeleri ile (2.8) ve (2.9) arasında bulunan farkın sadece k yay sabiti değeri olduğu görülmektedir. O halde buradan Elastik çubuk eleman için yay sabiti değerine karşılık gelen ifadenin aşağıda ki gibi (2.38) olduğunu görülür;

$$k = \frac{AE}{L} \quad (2.38)$$

Buradan çubuğun yapacağı yer değiştirmelerin kesit alanına, uzunluğuna ve yapıldığı malzemenin Elastisite modülüne bağlı olduğu anlaşılır. (2.37a) ve (2.37b) ifadeleri matris formunda yazılırsa aşağıda bulunan (2.39) ifadesi elde edilir;

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

O halde Elastik çubuk için Katılık Matrisi (2.40) şeklinde ortaya çıkmaktadır.

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

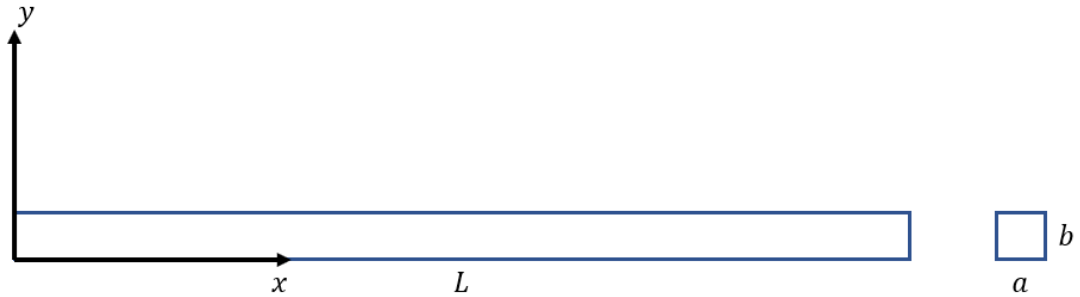
(2.40) içinde ifade edilen katılık matrisi sonlu elemanlar teorisinin önemli bir unsurudur. Bu konuda Fish ve Belytschko şunu ifade etmektedir:

Bu denklem sabit kesite sahip tek boyutlu herhangi bir elastik çubuk için kullanılabilir. Bu evrensel Katılık Matrisi Sonlu Elemanlar Metodunun çok yönlülüğünü gösteren simgelerinden biridir. Sabit bir kesit alanına sahip herhangi bir Elastik çubuk için bu matris Katılık Matrisini verir. (Belytschko T. ve Fish J., 2007, s14)

2.6 Elastik Çubuk Örneği

Bölüm 2.5 boyunca ortaya konan yaklaşımları model üzerinde uygulamak anlaşılır olacaktır.

2.6.1 Çubuk özellikleri



Şekil 2.15 Elastik çubuk.

L = 1 metre
a = 10 mm
b = 35 mm
E = 200 GPa
F = 30 kN

Elastik çubuk yapı çeliğinden yapılmıştır. Tabi burada mutlaka değinilmesi gereken husus yükün çubuğun sağ ucuna yüzeyi kaplayacak şekilde x yönünde uygulandığının kabul edildiğidir. Diğer ucundan mesnetli olduğunu ve sadece x yönünde yer değiştirme olduğunu kabul edilmektedir. Bunun yanında model malzemesinin

homojen ve isotropik olduğu kabulü söz konusu. Bu kavramların ne olduğu ile ilgili Hibbeler baş ucu kaynağı niteliğinde ki kitabında gerekli açıklamayı yapmıştır:

Homojen malzeme aynı fiziksel ve mekanik özellikleri tüm hacmi boyunca paylaşır. Isotropik malzeme ise aynı özellikleri tüm yönlerde göstermektedir.
(Hibbeler R.C, 2014, s24)

2.6.2 Analitik çözümü

Kesit alanı:

$$A = 10.35 = 350 \text{ mm}^2$$

Normal Gerilme:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{30000}{350} = 85.715 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 85.71428 \text{ MPa}$$

Teoride bu gerilmenin tüm model boyunca söz konusu olduğu ve analitik çözümün bu olduğu kabul edilir¹⁵.

Gerinim:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{85.71428}{200.1000} = 0.0004285714$$

Yer değıştirme:

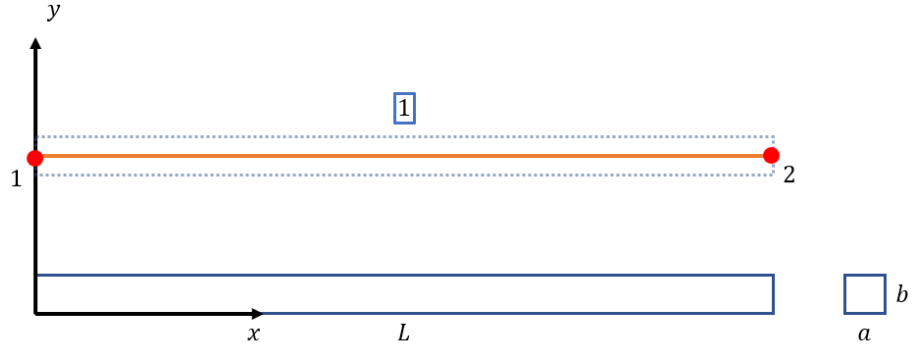
$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{L} \Rightarrow \Delta u = \varepsilon \cdot L \Rightarrow \Delta u = 0.0004285714 * 1000 = 0.4285714 \text{ mm}$$

2.6.3 Sonlu elemanlar çözümü

2.6.3.1 Tek elemanlı çözüm

Çözüm yapılırken Analitik çözüm yapıldığının tüm kabullerin yanında bir elemanlı çözüm yapılacağını da belirtmek gereklidir.

¹⁵ Bu konuda detaylı bilgi almak için kaynaklarda bulunan yayınlar yardımcı olacaktır.



Şekil 2.16 Elastik çubuk ve bir elemanlı model.

Katılık matrisi olarak (2.40) tanımlaması yapılmıştır.

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{350 \cdot 200000}{1000} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 & -70000 \\ -70000 & 70000 \end{bmatrix}$$

Yer değiştirmelerin bulunması için (2.12) ifadesi kullanılmaktaydı.

$$\begin{bmatrix} 70000 & -70000 \\ -70000 & 70000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \Rightarrow u_2 = 0.4285714 \text{ mm}$$

O halde yer değiştirme vektörü aşağıda bulunduğu gibi yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4285714 \end{Bmatrix}$$

Yer değiştirme:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = 0.4285714 \text{ mm}$$

Gerinim ifadesi (2.33) olduğu hesaplandığında,

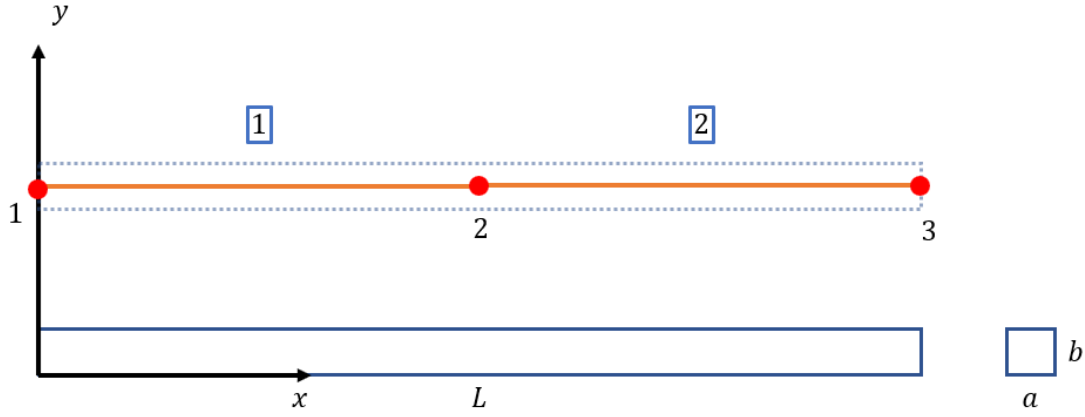
$$\varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{0.4285714}{1000} = 0.0004285714$$

Gerilme ifadesini (2.34) üzerinden hesaplandığında,

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = 200000 \cdot 0.0004285714 = 85.71428 \text{ MPa}$$

2.6.3.2 İki elemanlı çözüm

Çözüm yapılırken Analitik çözüm yapıldığının tüm kabullerin yanında iki elemanlı çözüm yapılacağını da belirtmek gereklidir.



Şekil 2.17 Elastik çubuk ve iki elemanlı model.

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

İşlemlerde basitleştirme için aşağıda bulunan kabul yapılırsa daha sade biçimde hesaplamalar yapılabilir.

$$k = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Yukarıda bulunan matrizen iki denklem çözüm için elde edileceği rahatlıkla görülebilir.

$$2ku_2 - ku_3 = 0 \Rightarrow u_3 = 2u_2$$

$$-ku_2 + ku_3 = F \Rightarrow ku_2 = F \Rightarrow u_2 = \frac{F}{k} = \frac{FL}{2AE}$$

Yukarıda elde edilen ifadelerden

$$u_2 = 0.214285714 \text{ mm}$$

$$u_3 = 0.42758142 \text{ mm}$$

O halde yer değiştirme

$$\Delta u = u_3 - u_1 = 0.42758142$$

Gerinim ise

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{L} = \frac{0.42758142}{1000} = 0.00042758142$$

Gerilim ise

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon = 85.7142857 \text{ MPa}$$

2.6.4 Sonuçların mukayesesi

Sonuç	Analitik Çözüm	1 Elemanlı SEM	2 Elemanlı SEM
Yer değiştirme(mm)	0.4285714	0.4285714	0.42758142
Gerinim (-)	0.000428571	0.000428571	0.000427581
Gerilim (MPa)	85.71428	85.71428	85.71428

Çizelge 2.1 Sonuçların karşılaştırması.

Çizelge 2.1'den görüldüğü üzere sonuçlar Analitik çözüm ile aynıdır denilebilir. Burada önemli bir hususa değinmek gerekmektedir. Bu kısma kadar yapılan tüm anlatım. Doğrusal sonlu elemanlar çözümü hakkındadır. Ancak doğrusal olmayan sonlu elemanlar çözümü de söz konusudur. Hesaplanan değer 86 MPa civarında olduğu için kullanılan malzemede Yapı Çeliği olduğu ve ayrıca büyük yer değiştirmeler söz konusu olmadığından dolayı elastik çubuk örneğinde doğrusal olmayan sonlu elemanlar çözümüne gerek yoktur. Ancak bulunan sonuç akma gerilmesinin üstüne çıkmış olsaydı. Doğrusal olmayan sonlu elemanlar çözümü yapmak durumunda kalınacaktı. Bu konuda Kim'in yorumu Tablo 2.1'den yapılan çıkarımı desteklemektedir:

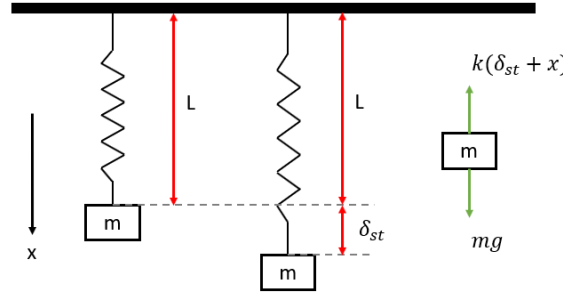
Fizikte pek çok olay doğrusal olmayan davranış göstermektedir ve doğrusal sistemler doğrusal olmayan sistemlerin limitli koşullar altında yaklaşımlarıdır. Örneğin doğrusal çözümde uygulanan kuvvet ile ortaya çıkan yer değiştirme Elastik bir çubukta küçük yer değiştirme ortaya çıkartır. Bu düşük gerinim ve dönme demektir. (Kim N. H., 2015, s83)

Ancak doğrusal olmayan çözümleme bu çalışmanın kapsamının dışında kalmaktadır. Bu nedenle değinilmeyecektir.

2.7 Dinamik Çözüm

Sonlu elemanlar yöntemi ile dinamik analizde yapılmaktadır. Hatta bu konuda oldukça başarılı örneklerde mevcuttur. Zaten genel olarak bu yayının amacı gerçek bir modelin

gelişmiş sonlu elemanlar modelleme yazılımları ile nasıl dinamik analizinin yapılacağıdır. Bunun için kütle yay sistemini incelemeye başlayarak daha sonra benzeşim kurup sürekli sistemlerin nasıl SEM ile Dinamik analizlerinin yapılabileceği incelenecektir.



Şekil 2.18 Kütle yay sistemi.

2.7.1 Serbest titreşim

Kütle bir yayın ucuna takılmış ve havada sarkmaktadır. Dışarıdan hiçbir müdahale söz konusu değildir. Sadece kendi ağırlığı söz konusudur. Kendi ağırlığı dolayısı ile belirli oranda sarkma yay üzerinde söz konusu olacaktır. (2.41) ve (2.42) ifadeleri bunlara işaret etmektedir.

$$\sum F_x = 0 = mg - k\delta_{st} \quad (2.41)$$

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} \quad (2.42)$$

(2.41) sistemin durgun halde dengede olduğunun kabulünün sonucu olduğu açıktır. Bu nedenle ortaya çıkacak olan sarkma kütle ve yay sabiti ile orantılıdır. Belirli bir etki ile kütlenin denge pozisyonundan uzaklaştığı düşünülmektedir. Newton'un 2. Yasası gereği aşağıda bulunan denklem (2.43) yazılabilir;

$$\sum F_x = m \cdot a_x = m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = m \cdot g - k \cdot (\delta_{st} + x) \quad (2.43)$$

(2.43) ifadesinde bulunan parantezi açıldığında (2.44)'de görüleceği üzere sadeleştirme için imkân olacaktır.

$$m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = mg - k \cdot \delta_{st} - k \cdot x \quad (2.44)$$

(2.41) denkleminde dolayı (2.44) ifadesi daha da sadeleştirilebilir. O zaman (2.45) dönüşümlenmektedir.

$$m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k \cdot x = 0 \quad (2.45)$$

(2.45) ifadesi İkinci Dereceden Doğrusal Sabit Katsayılı Adi Diferansiyel Denklem olarak ifade edilmektedir. Dolayısı ile (2.46) şeklinde yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (2.46)$$

Hesaplama kolaylığı açısından x ifadesi bir katsayıya bağlandığında, ki bu bir sabit göstermesi bakımından (2.47) olarak ifade edilebilir.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.47)$$

O halde (2.46) (2.47) ile birlikte yeniden yazılırsa (2.48) ortaya çıkmaktadır;

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2.48)$$

(2.48) çözümü (2.49) götürmektedir.

$$x(t) = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t \quad (2.49)$$

Bu ifade temel trigonometrik formüller yardımıyla aşağıda bulunan (2.50) ifadesine evrilir;

$$x(t) = C \cdot \sin(\omega t + \emptyset) \quad (2.50)$$

Burada $\emptyset$ ifadesi faz açısına karşılık gelmektedir ve zamanın başlangıcında olunan pozisyona göre şekil almaktadır.

(2.47) içinde bulduğumuz ifade dairesel frekansa karşılık gelmektedir. Dairesel frekans (2.51) denkleminde gösterilmiştir;

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \frac{\text{rad}}{\text{sn}} \quad (2.51)$$

Basit harmonik hareket yapan bu kütle yay sistemini sonlu elemanlar mantığı üzerinden kurgulandığında sürekli sistemler modelleme hakkında ciddi fikir verecektir. (2.52) ve (2.53) denklemleri katılık matrisi ile benzerliği ortaya sermektedir.

$$[K] = k \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

Kütle yay sisteminin hareket halinde olduğunu, belirli bir etkide dolayı salınım hareketi yaptığı bilinmektedir. Bu nedenle nodal kuvvetler üzerinde çalışmanın derinleştirilmesinde fayda vardır. (2.43) düğüm noktası kuvveti ile yeniden kurguladığında aşağıda bulunan ifade ortaya çıkar. (2.44) ile Newton yasası gereğince ifade tekrar yazıldığında düğümler noktaları için kuvvetlerin değeri hesaplanmış olur.

$$\sum F_x = m \cdot a_x = m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = m \cdot g - f_2 \quad (2.43)$$

$$f_2 = m \cdot g - m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (2.44)$$

(2.53) ifadesinde (2.44) ifadesini yazıldığında aşağıda ki gibi bir durum ortaya çıkacaktır;

$$k \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m \cdot g - m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

(2.53) ifadesini kütle ve yay kısmı olarak ayırdığında (2.54) ifadesi ortaya çıkmaktadır;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m \cdot g \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Basit harmonik salınım için bizim ilk düğüm noktamızda yer değiştirme $u_1 = 0$

$$m \cdot \ddot{u}_2 + k \cdot u_2 = mg \quad (2.55)$$

(2.55) ifadesi homojen olmayan Adi Diferansiyel Denklemdir. Bu nedenle homojen çözüm ve kısmi çözüm olarak iki çözümü söz konusu olacaktır. Homojen çözüm için sağ tarafı sıfıra eşitlendiğinde (2.56) ifadesi elde edilir;

$$m \cdot \ddot{u}_2 + k \cdot u_2 = 0 \quad (2.56)$$

(2.56) çözümü zaten önce ki kısımda ifade edilmişti. Bu nedenle homojen çözümün aşağıda ki (2.57) ve (2.58) gibi olacağı düşünülebilir;

$$u_{2h}(t) = C \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (2.57)$$

$$u_{2p}(t) = \frac{mg}{k} = \delta_{st} \quad (2.58)$$

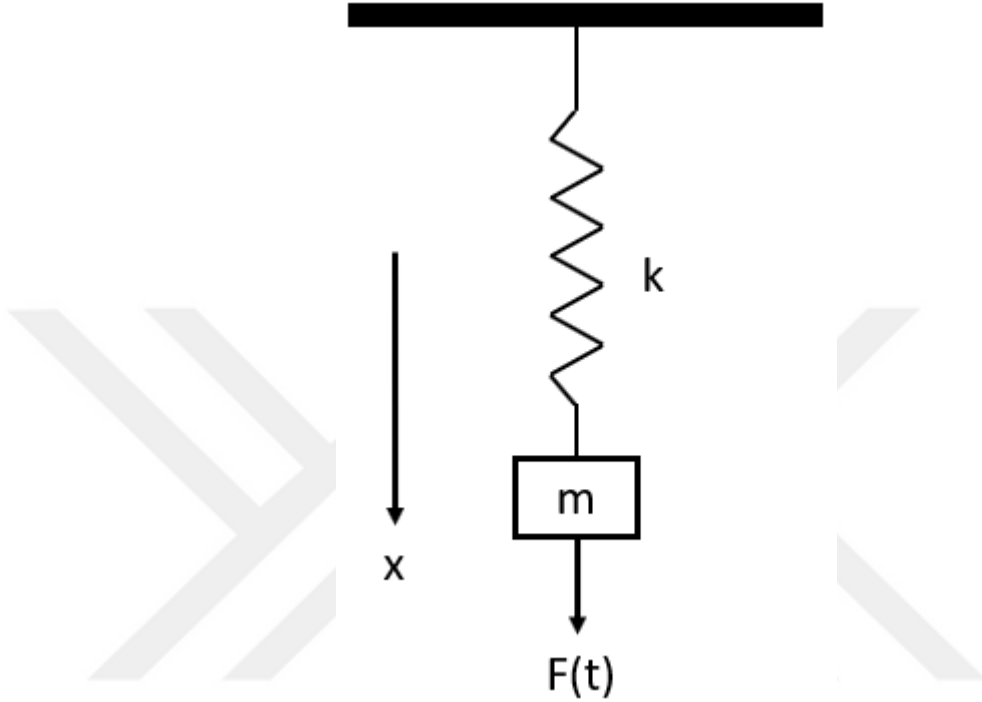
(2.58) ve (2.57) tamamlandıktan sonra tam çözüm aşağıda ki (2.59) gibi olacaktır;

$$u_2(t) = \delta_{st} + C \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (2.59)$$

Bu çözüm denge pozisyonu etrafında sinüzoidal salınım hareketleri sergileyecektir.

2.7.2 Zorlamalı titreşim

Zorlamalı titreşimi bu kütle yay sistemine dışardan hareket ettirecek bir kuvvet uygulanarak harekete zorladığını düşünölsün.



Şekil 2.19 Kütle yay sistemi ve zorlayıcı kuvvet.

Önceki bölümde sonlu elemanlar metodolojisi ile serbest titreşimin nasıl kurgulandığı ifade edilmişti. Aynı yöntem ile zorlamalı titreşim kurgusu da yapılabilir. O halde, (2.54) ifadesi yeniden yazıldığında aşağıda ki (2.60) gibi bir durum ortaya çıkar;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m \cdot g + F(t) \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

Birinci düğüm noktasında hareket söz konusu değildir. Bu nedenle ikinci düğüm noktası için diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgilenilmelidir. Bunun için (2.60) ifadesi içinden (2.61) ifadesi çıkartılabilir;

$$m \cdot \ddot{u}_2 + k \cdot u_2 = mg + F(t) \quad (2.61)$$

mg terimi için homojen ve kısmi çözümler zaten elde edilmişti. Bu nedenle kuvvet ile ilgili olan terimin çözümünü elde edilecektir. Bu ifade ise (2.62) olarak görülür.

$$m \cdot \ddot{u}_2 + k \cdot u_2 = F(t) \quad (2.62)$$

(2.62) ifadesi düzenlendiğinde (2.63) ve (2.64) ifadeleri elde edilir;

$$m \cdot \ddot{u}_2 + \omega^2 \cdot u_2 = \frac{F(t)}{m} \quad (2.63)$$

$$F(t) = F_0 \cdot \sin \omega_f t \quad (2.64)$$

F_0 , Kuvvetin an fazla değeri
 ω_f , Kuvvetin dairesel frekansı

(2.63) ifadesi (2.64) ile yeniden yazılırsa aşağıda ki (2.65) gibi bir durum ortaya çıkacaktır.

$$\ddot{u}_2 + \omega^2 \cdot u_2 = \frac{F_0}{m} \sin \omega_f t \quad (2.65)$$

(2.65) çözümünün sağlanabilmesi için bir sinüs fonksiyonu olması gerektiği gözükmemektedir. Bu fonksiyon (2.66) ile aşağıda gösterilmiştir.

$$u_2(t) = U \cdot \sin \omega_f t \quad (2.66)$$

Bu nedenle (2.66) çözüm kabulü olarak alındığında ivme ve hız değerinin aşağıda ki (2.67a) ve (2.67b) gibi olacağı aşıkardır.

$$\dot{u}_2(t) = U \cdot \omega_f \cdot \cos \omega_f t \quad (2.67a)$$

$$\ddot{u}_2(t) = -U \cdot \omega_f^2 \cdot \sin \omega_f t \quad (2.67b)$$

(2.67a) ve (2.37b) ifadelerini (2.65) içinde yerine yazılırsa (2.68) ifadesi elde edilir.

$$-U \cdot \omega_f^2 \cdot \sin \omega_f t + \omega^2 \cdot U \cdot \sin \omega_f t = \frac{F_0}{m} \sin \omega_f t \quad (2.68)$$

(2.68) çözümü ile U ifadesinin aşağıda ki (2.69) gibi olduğu ortaya çıkar.

$$U = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_f^2} \quad (2.69)$$

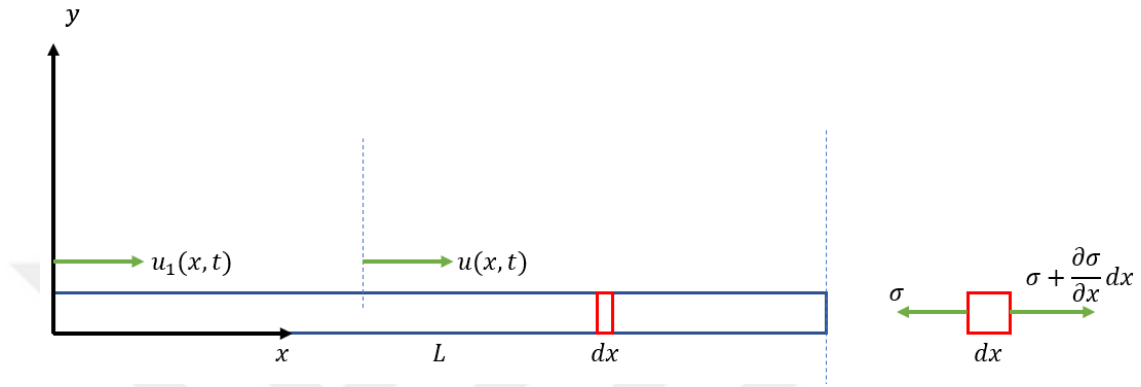
(2.69) ifadesi (2.66)'da yerine konulursa aşağıda bulunan (2.70) ifadesi elde edilecektir.

$$u_2(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_f^2} \cdot \sin \omega_f t \quad (2.70)$$

(2.70) ifadesinin sonucuna dikkat edilirse eğer sistemin dairesel frekansı kuvvetin dairesel frekansına yakı veya eşit değerler etrafında olursa yer değiştirme genliği sonsuza doğru gitmektedir. Bu durum rezonans olarak bilinir.

2.7.3 Elastik çubukların serbest titreşimi

Bölüm 2.7.1’de ve 2.7.2’de kütle yay sistemlerini modellendi. Sürekli sistemlerin modellemesi kütle yay sisteminden farklıdır. Kütle yay sisteminde kütlenin düğüm noktası civarında yoğunlaştığı görülmektedir. Ancak sürekli sistemlerde ki elastik çubuklar bu ailenin bir parçasıdır. Kütle geometri boyunca homojen olarak dağılmaktadır.



Şekil 2.20 Elastik çubuk.

Şekil 2.18’de görülen dx parçası için Newton’un 2. Kanunu uygulanırsa (2.71) denklemini elde edilir.

$$\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) A - \sigma A = (\rho A dx) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.71)$$

(2.34) ifadesini (2.71)’de yerine yerleştirirsek aşağıda bulunan (2.73a) ve (2.73b) durumları elde edilir.

$$\frac{\partial(E \cdot \epsilon)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.73a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.73b)$$

(2.73b) ifadesinde bulunan yoğunluğun Elastisite modülüne bölümü olan ifadeyi bir katsayı ile ifade edilirse (2.74) ifadesi ortaya çıkar;

$$c^2 = \frac{\rho}{E} \quad (2.74)$$

(2.74) ifadesi (2.73b) yerine yazıldığında aşağıda bulunan denklem (2.75) ortaya çıkacaktır;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.75)$$

(2.75) tek boyutlu dalga denklemdir. Eksenel yer değiştirmenin ayrıklaştırıldığı ve düğüm noktalarında oluşan yer değiştirmeleri bulmak için interpolasyon fonksiyonları oluşturulduğunu önceki bölümde ifade edilmişti.

Ancak artık titreşim için düğüm noktalarının yer değiştirmelerini hesaplatıldığı için bunlar zamanın birer fonksiyonu olacaktır. Bu nedenle (2.76) olarak interpolasyon fonksiyonu kullanılabilir.

$$u(x, t) = I_1(x) \cdot u_1(t) + I_2(x) \cdot u_2(t) \quad (2.76)$$

Titreşimin SEM ile çözüümü için Galerkin metodunu elde edilen tek boyutlu dalga denklemine uygulanması gerekmektedir. Bunun için (2.77) kullanılabilir;

$$\int_0^L I_i(x) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) A dx = 0 \quad (2.77)$$

(2.77) ifadesi açıldığında (2.78) ifadesi elde edilir;

$$A \cdot \int_0^L I_i(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \cdot c^2 \int_0^L I_i(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.78)$$

(2.78) içine (2.74) ve (2.76) ifadesinin konulması ile aşağıda bulunan ifade elde edilmiş olur;

$$A \int_0^L N_i(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \cdot \frac{\rho}{E} \int_0^L I_i(x) \cdot (I_1 \cdot \ddot{u}_1 + I_2 \cdot \ddot{u}_2) dx \quad (2.78)$$

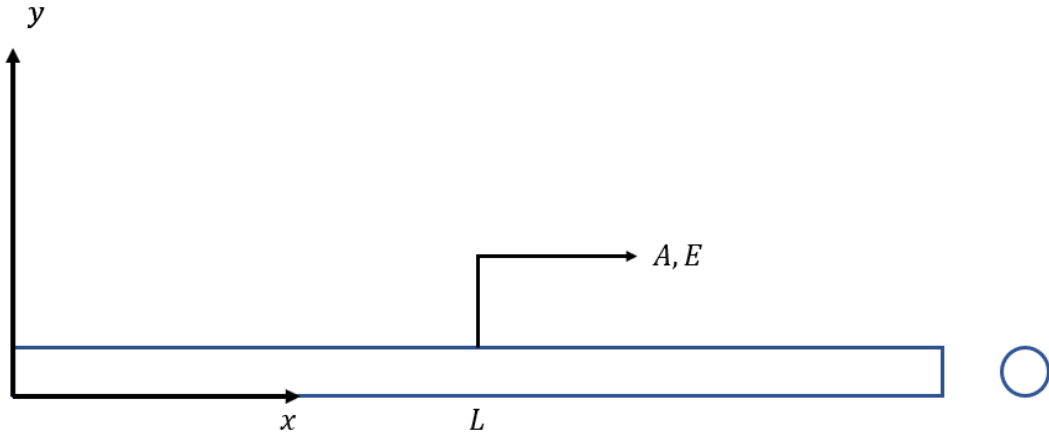
Denklemlerin dinamik çözüüm için kombine edilmesi ile birlikte aşağıda bulunan ifade (2.79) elde edilir;

$$\frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

(2.79) bu elastik çubuğun bir elemanlı model için dinamik hareket denklemini vermektedir. Bu da (2.80) olarak gösterilebilir;

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{f\} \quad (2.80)$$

2.7.4 Misal elastik çubuğun serbest titreşimi



Şekil 2.21 Sağ ucu sabit elastik dairesel kesitli çubuk.

Şekil 2.19’da görülen sistemin iki elemanlı SEM modeli ile doğal frekanslarını bulunması problemi Bölüm 2.7.3’de gösterilenlerin uygulaması olacaktır.

Katılık matrisi her bir eleman için aşağıda ki gibi olacaktır;

$$[K^{(1)}] = [K^{(2)}] = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

k ifadesi yaylar için yay sabitini sürekli sistemler içinse malzeme ve geometrik özellikleri ifade etmekteydi.

$$k = \frac{AE}{L/2} = \frac{2AE}{L}$$

Tüm elastik çubuğun kütlesi;

$$m = \rho AL$$

O zaman her bir elemanın kütlesi aşağıdaki gibi olacaktır;

$$m = \frac{\rho AL}{2}$$

Kütle matrisi ise;

$$[M^{(1)}] = [M^{(2)}] = \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu kütle ve Katılık matrisleri birleştirildiğinde;

$$[K] = \frac{2AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu matrisler kullanılarak tüm sistem hareket denklemi yazıldığında aşağıda bulunan ifade ortaya çıkacaktır;

$$\frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

İlk düğüm noktasında yer değiştirme sıfır olacağı için matrislerden 1. Satır ve 1. Sütun ibareleri kaldırıldığında aşağıda görülen durum ortaya çıkar;

$$\frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Akabinde serbest titreşimin sinüzoidal bir şekilde cereyan edeceği kabul edilebilir. O zaman 2. ve 3. Düğüm noktalarında aşağıda ki şekilde hareket edebilirler;

$$u_2 = X_2 \cdot \sin(\omega t + \emptyset)$$

$$u_3 = X_3 \cdot \sin(\omega t + \emptyset)$$

Bu kabuller sistem hareket denkleminde yerine konulduğunda aşağıda bulunan durum elde edilir;

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \emptyset) + \frac{24E}{\rho L^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \emptyset) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Bu ifade toparlandığında aşağıda görülen durum elde edilecektir.

$$\begin{bmatrix} 2\lambda - 4\omega^2 & -\lambda - \omega^2 \\ -\lambda - \omega^2 & \lambda - 2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \emptyset) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Burada λ ifadesi $24E/\rho L^2$ eşittir.

$$\begin{vmatrix} 2\lambda - 4\omega^2 & -\lambda - \omega^2 \\ -\lambda - \omega^2 & \lambda - 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Bu matrisin çözülmesi ile birlikte aşağıda bulunan dördüncü dereceden homojen denklem elde edilecektir;

$$7\omega^4 - 10\lambda\omega^2 + \lambda^2 = 0$$

Bu denklemin çözümü ise aşağıda bulunan sonuçları verecektir;

$$\omega_1 = \frac{1,611}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{5,629}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Sistem tek elemanlı iki düğüm noktalı bir sonlu elemanlar modeli olduğu için iki serbestlik derecesi vardır. Bu iki serbestlik derecesi iki doğal frekans hesaplanmasını sağlar. Eleman sayısını arttırdığımızda hesaplanabilecek doğal frekans sayısı da artacaktır. Oysa elastik çubuğun sonsuz doğal frekansı vardır teorik olarak. Teorik olarak sonsuz doğal frekans olsa dahi pratikte ve mühendislik uygulamalarında genelde ilk 20-30 doğal frekans ile ilgilenilir. Bir sonlu elemanlar yazılımı kullanıldığında yapılan çözüm çok daha fazla binler mertebesinde serbestlik derecesi içerir. Ancak ona rağmen ticari yazılımlar 200'ün üzerinden doğal frekans hesaplama imkânı tanımazlar. Çünkü ihtiyaç pratik olarak genelde yoktur.



3. SONLU ELEMANLAR YAZILIMLARI

3.1 Bilgisayar Bilimi ve Yazılımlar

3.1.1 Tarihçe

Bilgisayarın yaygın olarak insan hayatına girmesiyle beraber farklı alanlarda uygulamalar geliştirilmeye başlandı. 1940'lı yıllarda başlayan bu çalışmalar bugün ki gelinen noktanın temelini oluşturmaktaydı. İlk bilgisayarlar bir ev veya yerleşke boyutunda iken bugün geldiğimiz noktada mikro işlemciler sayesinde avucumuza sığacak hale gelmiştir. Bu konuda yaşanan hız değişim bilim dünyasının da dikkatinden kaçmadı. Örneğin Tucker (2004) “Bilgisayar Bilimi alanı geçtiğimiz 70 yılda dramatik bir değişim geçirmiştir” (Tucker, 2004, s18) şeklinde ifade etmiştir.

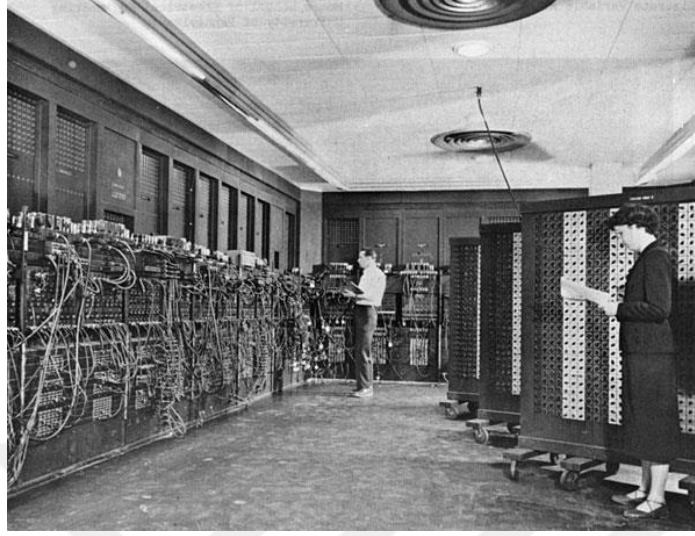
Ortaya çıkan bu değişim insan hayatında pek çok alanı etkilemiş ve ciddi hız ve ivme kazanılmasına neden olmuştur. Uygulamalar çeşitli endüstrilerde yaygınlaşmaya başlamış ve ciddi mihenk taşları aşılmıştır. İlk etapta sadece kamu kurumları ve büyük kurumsal firmalar tarafından kullanılan ve bazı basit işlemler için ciddi süre ve emek gerektiren işlemler devasa boyutta bilgisayarlar sayesinde yapılmaktaydı. Ancak günümüz projeksiyonundan bakıldığında garip görünse dahi o zaman için ortalama bir insanın yapacağı işlemlerden çok daha hızlı ilerleme kaydedilebilmektedir.

Bugün geldiğimiz noktada taşınabilir bilgisayarlar ve taşınamaz masaüstü bilgisayarlar hem iş yaşamımızın hem de özel yaşamımızın çok önemli bir parçası olmuştur. Elektronik posta¹⁶ göndermek, çevrim içi¹⁷ toplantı yapmak iş yaşamı için oldukça önemli bir hal taşımasının yanında ciddi bir zaman ve maliyet tasarrufu da sağlamaktadır. Bu şekilde araçlar kullanarak Dünyanın farklı noktalarında bulunan paydaşlar ile görüşmek, konuşmak ve tartışmak mümkün hale gelmiştir. Ancak bu

¹⁶ Yaygın bilinen ismi e-posta

¹⁷ Yaygın bilinen ismi Online Toplantı

durum her zaman bu şekilde değildi. Bilgisayar Teknolojisinin gelişimi sırasında yaşanan bu değişimi ortaya sermesi bakımından bu görüş doğru bir tespit sağlamaktadır:



Şekil 3.1 İlk bilgisayarlardan Eniac.

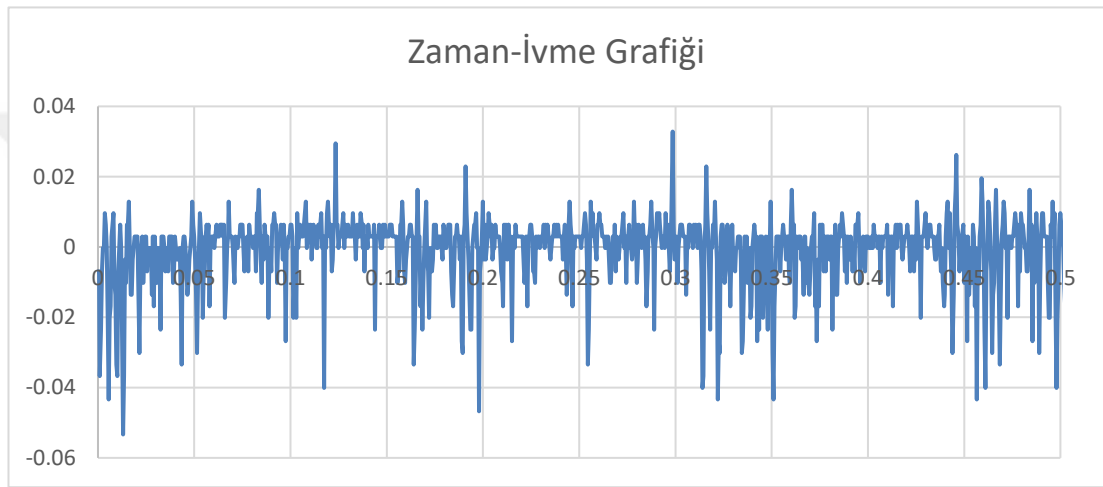
1930 yıllarda hesaplamanın matematiksek prensipleri Turing ve Church tarafından geliştirildi. Erken dönem bilgisayarlara Von Neuman, Wilkes, Eckert, Atanasoff tarafından adapte edilirken diğerleri tarafından 1940'li yıllarda adapte edildi. Bilimsel ve Ticari hesaplamaların doğması ise 1950'li yıllarda yaşandı. 1960'lı yılların veri tabanları, veri yapıları ve işletim sistemleri bugün geleneksel bilgisayar bilimi olarak adlandırılmaktadır. 1970'li yıllarda bilgisayar biliminin gelişimi, yapısal programlama ve Nesne Tabanlı Programlama üzerine 1980'li yıllarda kişisel bilgisayarlar ve grafik üzerine olan gelişim dramatik bir değişim oluşturdu. (Tucker, 2004, s18-19)

Şekil 1.1'de görüleceği üzere ilk bilgisayarlar tıpkı ataları Eniac gibi devasa boyutlarda ve basit işlemler için dahi birkaç kişiye ihtiyaç duyarlardı.

Bugün tarihsel süreç içinde Bilgisayar Bilimi hakkında önem arz eden konular hala önem arz etmektedir ancak artık çok daha farklı konuları bilim ve teknoloji dünyası konuşmakta ve değerlendirmektedir. Bunlar: Yapay-Zeka, Makine Öğrenmesi, Sadeleştirilmiş Kodlama, Bulut Sistemleri, Arttırılmış Gerçeklik, Sanal Gerçeklik, Büyük Veri, Nesnelerin İnterneti...vb

3.1.2 Mühendislik hesaplamaları

Mühendislik, Bilimsel ve Teknik hesaplamaların bilgisayarlar yardımıyla yapılması uzun süredir üzerinde çalışılan ve hatta belki de bu teknolojinin bu boyutlara ulaşmasını sağlayan en önemli motivasyon kaynaklarındandır. Bilimsel hesaplamaların bazı noktalarda binlerce veri noktasına ihtiyaç duyduğudu ve çıktı olarak binlerce veri noktası verebileceği bilinmektedir. Örneğin bir uçağın iniş takımlarının kalkış sırasında maruz kaldıkları titreşimler genelde ivme vasıtası ile alınır ve akabinde incelenir.



Şekil 3.2 İniş takımı Zaman-İvme grafiği.

Grafik 1.1’de görülen veri 1000 veri noktası içermektedir ve gerçekte sağlıklı bir inceleme 100.000 veri noktası gibi değerlere ulaşabilmektedir. Bu kadar veri noktasının bilimsel hesaplara sokulması ve kademeli olarak sonuçların grafikselleştirilmesi bilgisayar yardımı olmadan mümkün değildir.

Teknik hesaplamalar sadece bilimsel Teorilerin kanıtlanması veya sağlanması için kullanılmamakta aynı zamanda deneysel çalışmalar sırasında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu konuda ki duruma işaret etmesi bakımından Johanson (2016), “Bilimsel hesaplama Teori ile oldukça ilgilidir ancak aynı zamanda deneysel çalışmalarda da yaygın olarak kullanılmaktadır.”

Bunun yanında Teknik Hesaplamaların bilgisayar yardımıyla yapılması bunların diğer bilim insanları tarafından rahatlıkla ulaşılabilmesi anlamı da taşımaktadır. İleri görselleştirme teknikleriyle ortaya çıkan bilimsel veriler işlenebilir ve anlaşılabilir hale gelmektedir. Bu nedenle Bilgisayar’ın gelişiminin en çok kolaylaştırdığı alanlardan

birinin Teknik Hesaplamalar ve bu çalışmaların ilerleyen kısımlarında değinilen Nümerik hesaplamalar olduğu aşikardır.

3.2 Tasarım Yazılımları

Mühendisler tarafından ürün tasarımının yapılabilmesi için Tasarım yazılımı adını verdiğimiz ve yazılım endüstrisinde yaygın olarak CAD¹⁸ yazılımları olarak bilinirler kullanıcı bilgisayar yardımıyla üretmek istediği modelin 2 boyutlu veya 3 boyutlu çizimini yapar bunun yanında gerekli olan üretimsel ifade ve terimler tasarımı birlikte oluşturulan imalat çizimleri vasıtası ile operatörler aktarılır ve akabinde üretim süreci yapılır. Hiç şüphe yok ki üretilen ürün karmaşıklıkça ve sayısı çoğaldıkça daha fazla alt parçalara haiz oldukça farklı teknolojik platformları kullanmak gerekecektir. Ancak temelde modelleme işleminin doğru yapılması ve gerçekçi olması zorunludur.

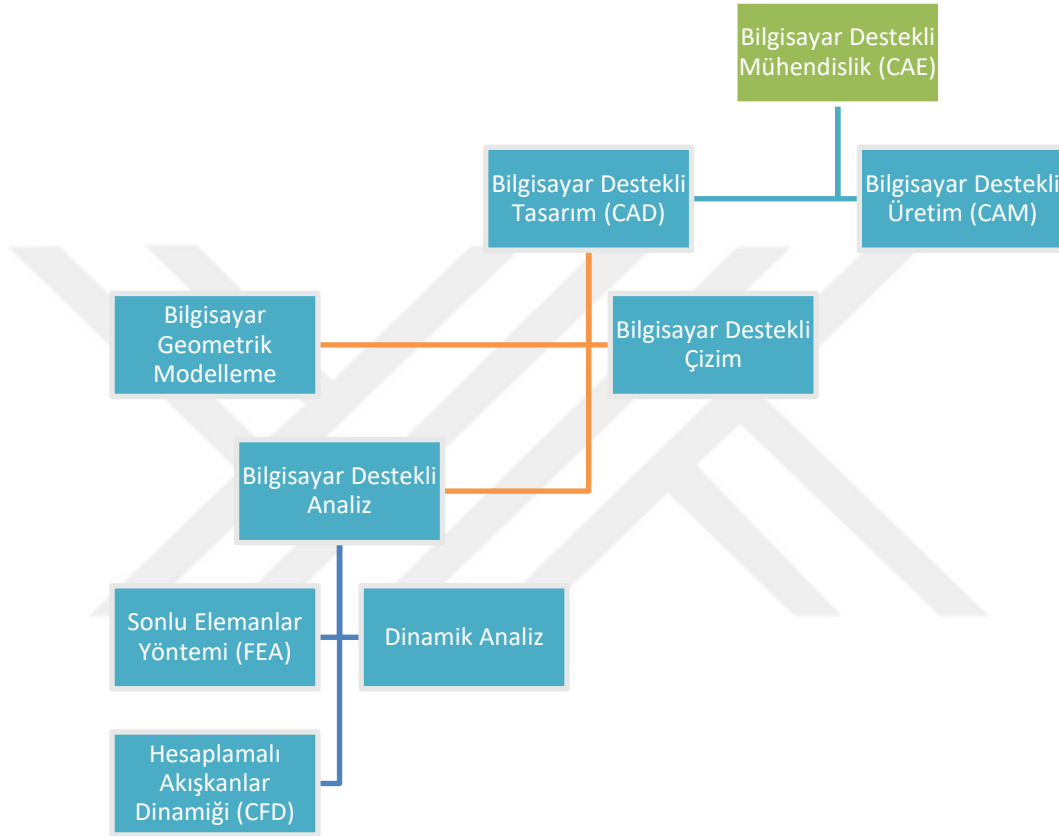


Şekil 3.3 Modern CAD yazılımlarından Fusion360.

Bu konuda ortaya çıkan gelişimi açıklaması bakımından bu yorum dikkate değerdir. “Bilgisayar Destekli Tasarım göreceli olarak yeni bir teknolojidir ve geçtiğimiz elli yıl içinde sağladığı hızlı ilerleme muhteşemdir.” (Shih, 2019, s1-5)

¹⁸ CAD, Computer Aided Design kelimelerinin ilk harflerinden bir araya gelmektedir anlam olarak Bilgisayar Destekli Tasarım demektir.

Bu hızlı gelişmenin sonucu olarak bugün Bilgisayar Destekli Tasarım yazılımları farklı modülleri ve prensipleri içinde barındırmaktadır. Bunlar oluşturulmuş olan Tasarım verisi üzerinden otomatik olarak üretim verisinin çıkartılması, mühendislik hesaplamalarının yapılması ve model üzerinde bir değişiklik olduğunda bunların güncellenmesi esasına dayanarak çalışmaktadır.



Şekil 3.4 Tasarım teknolojileri bağlantısı.

CAE¹⁹, bilgisayar destekli tüm mühendislik işlemleri için tanımlanabilmektedir. Bunun yanında bu işlemler üretime göre, hesaplamalara göre veya tasarımlara göre farklılık arz edebilmektedir. CAM²⁰ üretim amacı bilgisayarın kullanılması olarak düşünülebilir. Bu işlemlerin hepsi tasarım yazılımı olarak konumlanmış olan yazılımınla beraber çalışabilmekte ve ondan aldığı veriler üzerinden bu işlemleri yapmaktadır. Elbette mühendislik hesaplamaları denildiği zaman çok farklı disiplinlerde işlemler yapılabilir. Örneğin Şekil 1.3’de en alt kısımda görülen

¹⁹ CAE, İngilizce Computer Aided Engineering kelimelerinden bir araya gelerek oluşturulmuş bir terimdir. Anlam olarak Bilgisayar Destekli Mühendisliğe karşılık gelir.

²⁰ CAM, İngilizce Computer Aided Manufacturing kelimelerinden bir araya gelerek oluşturulmuş bir terimdir. Anlam olarak Bilgisayar Destekli Üretime karşılık gelir.

CFD²¹ akışkanlar mekaniği ile ilgili mühendislik hesaplamalarını karşılamaktadır. Yine Bilgisayar Destekli Analiz altında yer alan ve sonlu elemanlar yöntemi aslında ifade olarak FEA²² teriminin Türkçe karşılığına gelmektedir. Dinamik analiz ise yine bilgisayar yardımı ile modellerin hareketli hallerinin analizinin yapılarak pozisyon, hız ve ivme değerlerinin hesaplanmasına karşılık gelmektedir. Bu Tez'in konusu da ağırlıklı olarak bu alanın bilgisayar uygulaması üzerine olacaktır.



Şekil 3.5 Bilgisayar destekli analizin adımları.

Şekil 1.4 içinde görüldüğü gibi Bilgisayar Destekli Analiz işlemleri 3 Boyutlu Modelleme ile başlar ve sonunda elde edilen sonucun yorumlanmasına gidilir. Bu adımlamalar yazılımı öğrenmiş ve gerekli Teorik bilgiye haiz bir kullanıcı tarafından yapılır. Doğru matematiksel modelin kurulması sonucun doğruluğu açısından hayati derecede önemlidir.

²¹ CFD, İngilizce Computational Fluid Dynamics kelimelerinden bir araya gelerek oluşturulmuş bir terimdir. Anlam olarak Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiğine karşılık gelir.

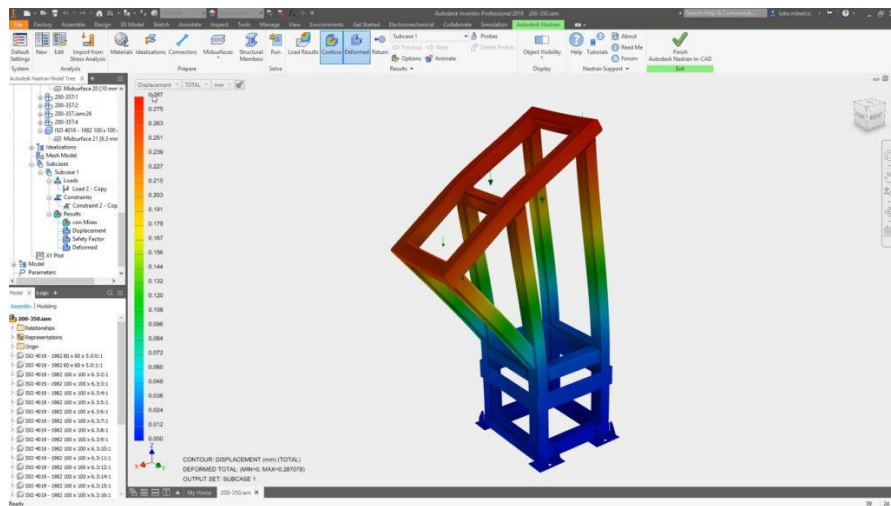
²² FEA, İngilizce Finite Element Analysis kelimelerinden bir araya gelen terimdir. Anlam olarak sonlu elemanlar analizine karşılık gelir.

3.3 SEM Analiz Yazılımları

Tıpkı diğer analiz yazılımlarından olduğu gibi SEM Analiz Yazılımlarında 3 Boyutlu modelleme akabinde doğru tanımlamaların yapılması, doğru matematiksel modelin kurulması ve çözüm akabinde sonuçların yorumlanması gibi bir adımlama ile işlemler yapılır. Günümüzde ürün geliştirme süreçlerinde dayanım ve performans testi için sonlu elemanlar yöntemi kullanılırken diğer taraftan hareket analizini yapmak için dinamik analiz yazılımları kullanılmaktadır. Bu yazılımlar, parçacık kinematiğinde rijid cisimlerin dinamiğine ve hatta kimileri esnek gövde dinamiği analizlerini dahi yapabilmekte ve sonlu elemanlar yöntemi ile çift yönlü bir döngü etrafından çözümleri sunabilmektedir. Diğer taraftan artan ürün karmaşıklığı ve yükselen müşteri beklentisi, Ticari pazarın dinamikleri bu tarz çözümleri kullanmayı ve hatta her geçen gün ürün geliştirme süreçlerinde daha fazla kullanmayı önemli hale getirmektedir.

3.3.1 SEM analiz yazılımlarının önemi

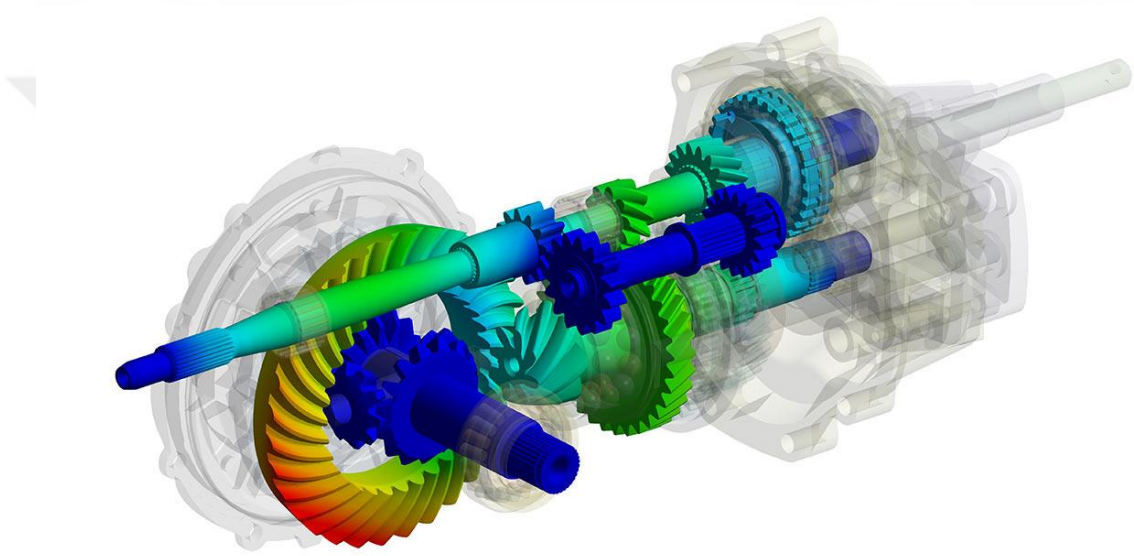
Karmaşık geometriler, farklı yükleme durumları, çetin çalışma koşulları ve hızlı tasarım veya ürün değişiklikleri. Bu sayılanların hepsi günümüz yaygın ürün geliştirme problemleri arasında yer almaktadır. Bu problemler ile başa çıkmak için SEM yazılımları sıklıkla kullanılmaktadır. Tasarım daha üretilmeden dijital ortamda çeşitli testlere tabi tutularak problemler tespit edilebilmektedir. Bu hem ürünün daha sağlıklı revize edilmesini sağlamakta hem de ciddi bir maliyet kazancı sağlamaktadır.



Şekil 3.6 Örnek dinamik analiz yazılımı arayüzü.

Önemli unsurlardan biride entegrasyondur. SEM yazılımları CAD yazılımları ile entegre çalışmaktadır ve pek çok SEM yazılımı bu yazılımların verilerini

uygulamaları incelersek çok geniş bir alanda çalışmaların yapılabileceğini görebiliriz. Ayrıca bu işlem SEM yazılımı entegredir. Dinamik Analiz sonuçları SEM kısmına rahatlıkla alınabilmektedir. Modelde birden fazla temas olması halinde dahi sürtünme, bağlantı ve kopma gibi durumlar modellenilebilmektedir. Sadece metalik malzemeler değil metal olmayan malzemelerde analiz edilebilmektedir. Bunun yanında SEM yazılımlarının kabiliyetleri her geçen yıl artmaktadır. Teori Elastik çubukların yer değiştirme ve gerilmelerini hesaplama amacıyla geliştirilmeye başlanmıştı. Ancak artık Dinamik, Isıl, Akışkanlar, Elektronik ve başka farklı uygulamalar içinde kullanılabilmektedir.



Şekil 3.8 Dişli mekanizması simülasyonu.

3.3.2 Mevcut SEM analiz yazılımları

Bugün endüstrinin farklı dalları içinde kullanılan birden fazla Dinamik Analiz Yazılımı söz konusudur. Bunların bazılarının belirli avantajları söz konusu iken bazıları sadece belirli işlemler için özelleşmiştir. Bunlar;

- Autodesk Inventor Nastran
- Ansys
- MSC Nastran
- Solidworks Simulation
- Siemens NX
- Top Solid
- PTC Creo
- Dassault Systemes Catia

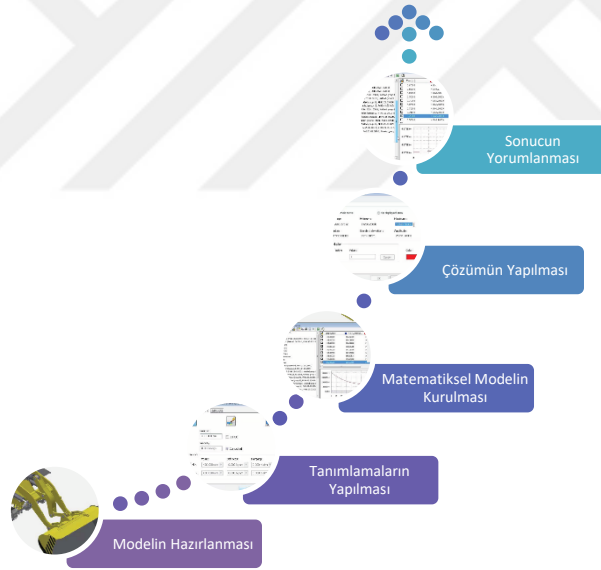
- Dassault Systemes Simulia Simpack

Bu yazılımların tamamını incelemek bu akademik çalışmanın dışındadır. Ancak örnek bir inceleme için bu paket programlardan biri seçilebilir. Zaten bu çalışma içinde bir sonraki bölümde yapılacak olan analizler için Autodesk Inventor Nastran yazılımı seçilecektir.

Yukarıda listelenen yazılımlardan bazıları sadece analiz üzerine odaklanmak ile beraber bazıları ise hem analiz hem de tasarım alanında çözümler sunabilmektedir.

3.3.3 Paket program ile uygulama

Paket program ile uygulama aşamasında görüleceği üzere Analiz yapmak için temelde bazı adımların doğru atılması gerekmektedir. Bu nedenle, bu adımların doğru atılabilmesi için bir iş akışının takip edilmesi zorunludur. Uygulamayı incelediğimizde bu iş akışının Şekil 1.20’de ifade edildiği gibi olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 3.9 Analiz yazılımı iş akışı.

Dikkat edilirse bu iş akışı Şekil 3.4’de ifade edilen iş akışına oldukça benzemektedir. Genel olarak Analiz yazılımlarının adımlamaları birbirini çağrıştırmaktadır. Sonlu elemanlar analizi yazılımı için ortaya çıkardığımız bu iş akışı bir dinamik analiz yazılımı içinde benzer şekilde kurgulanacaktır. Şekil 3.20’de ifade edilen adımlamaları şu şekilde açıklamak doğru bir ifade olacaktır.

Modelin Hazırlanması, Tasarımcı tarafından hazırlanan üç boyutlu modelin fiziksel halini olabildiğince gerçekçi şekilde yansıtacak biçimde hazırlanması. Bunun yanında analiz sırasında ihtiyaç duyulmayacak olan detayların analizden çıkarılması ve basitleştirilme işleminin yapılması. Bu nedeni gereksiz model ve detayların çözüm süresini uzatabilmesi ve sonuçları yorumlarken uğraştırıcı olabilmesidir. Mühendisliğin her kademesinde gerektiği kadar detay gerektiği kadar çalışma prensibi geçerlidir.

Tanımlamaların Yapılması, analiz ile ilgili doğru tanımlamaların yapılması sonucun doğruluğu açısından oldukça önemlidir. Tanımlamalar kısmına modelin iç özellikleri ile ilgili detaylarda girebilir veya modelin dış kuvvetlerden dolayı etkilenmesi de girebilir. Örneğin model için tanımlayacağımız bir sönüm etkisi veya modelin üzerine etkileyen bir dış yükün zamanla nasıl değiştiğinin ifade edilmesi gibi konuların tamamı bu alanda değerlendirilebilir.

Matematiksel Modelin Kurulması, bu kısımda çözüm ile ilgili gereken detayların tanımlanması işlemi yapılır. Hangi sonuçların inceleneceği, modelin sınırlamaları, zaman adımları ve çözüm aralığının ne olacağı soruları bu alanda cevaplanır. Bunun yanında çözücü eğer çözüm şekli ile ilgili seçimlere müsaade ediyorsa yine bu noktada bu seçimlerin yapılması gerekecektir.

Çözümün Yapılması, bu kısımda model çözdürülür ve çözümün sonuçlanması beklenir.

Sonucun Yorumlanması, bu kısım elde edilen çözümlerin yorumlanarak doğru tasarım değişikliği kararlarının verilmesi içindir. Şu sorular cevaplanabilir. Elde edilen sonuç ne anlama gelmektedir? Bunun tasarıma etkisi ne olacaktır? Tasarım değişikliği veya düzenleme yapılacaksa bu sonuç ışığında nasıl olmalıdır?

Bu noktada önemli bir hususa değinmek gereklidir. Bölüm 3.3.2’de ifade ettiğimiz analiz yazılımlarının arasında bulunan farklar bu beş adım içinde sundukları hizmetler, fonksiyonlar ve imkanlara göre değişmektedir. Örneğin bazıları bu adımları kullanıcının daha kolay bir ara yüz içinde yapmasını sağlarken bazıları daha zor bir ara yüz içinde yapmasını sağlar. Örneğin bazıları Tasarım yazılımı ara yüzünde çalışırken ve dosya

değiş tokuş işlemlerine gerek duymazken bazısı kendi ara yüzünde çalışır ve dosyayı ayrıç yüklemek gereklidir. Sonuçları yorumlama kısmında bazısı daha fazla işlev ortaya atarken bazısı daha kısıtlı imkanlar sunar. Bu farklılıklar ne akademinin ne de bu çalışmanın konusudur. Ancak hemen hemen hepsinin takip ettiği Nümerik çözüm yolu ve ilgili Sistem Dinamiği yaklaşımı ilerleyen bölümde detaylı olarak incelenecektir. Ticari farklılıklar ve yaklaşımlar bu çalışmanın dışında tutulmuştur ve sadece bu bölümde genel itibari ile konu hakkında bir harita vermesi bakımından adımlamalar ve yazılımlar isimleri ile birlikte paylaşılmıştır.



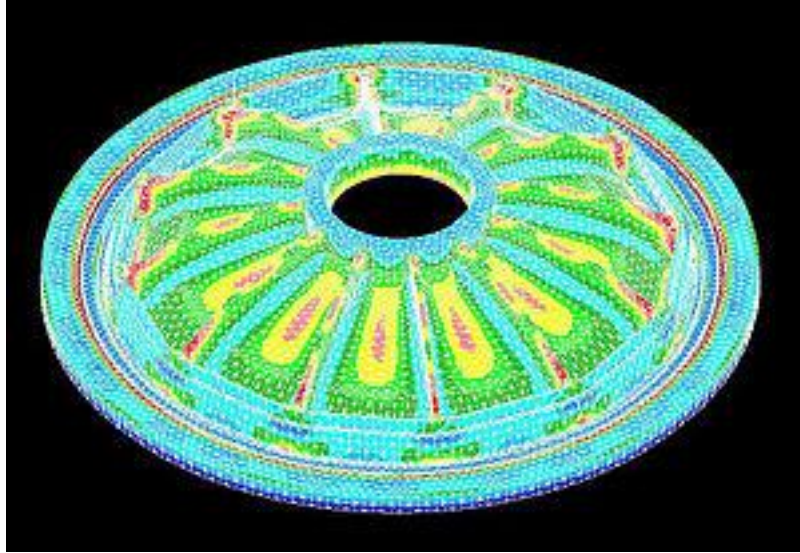
4. ENDÜSTRİYEL MAKİNEİN REZONANS FREKANSLARININ BULUNMASI

Bu kısım endüstriyel bir makinenin sonlu elemanlar metodu ile birlikte nasıl doğal frekanslarını bulunacağı anlatılacaktır. Bu bölümde analizin yapılacağı yazılım olarak Autodesk Inventor Nastran yazılımı tercih edilmiştir. 3 boyutlu model üzerinde çalışan paket sonlu elemanlar programı olan Nastran kullanımı kolay bir ara yüzü sayesinde farklı SEM uygulamalarının yapılmasını sağlamaktadır.

4.1 NASTRAN Sonlu Elemanlar Kodu

NASTRAN kodu Amerikan Uzay ve Havacılık Dairesi Nasa tarafından geliştirilmiş bir sonlu elemanlar kodudur. Nasa tarafından uzay araştırmalarında kullanılmak için geliştirilmiştir. Kodun geliştirildiği tarih 1960'lı yıllara dayanır. Nasa içinde farklı amaçlarla kullanılan farklı analiz programları tek çatı altında toplanmaya karar verilmiş ve bunu yapması için bir komite kurulmuştur. Bu kurulan komite bu yazılımları inceleyerek genel ihtiyaca çözüm sağlayacak bir yazılım geliştirmeye karar verdi. Bu sayede Nastran doğmuş oldu. Bu konuda Hutton şunu ifade etmektedir:

1960'lı yıllarda sonlu elemanlar kodu olan NASTRAN Amerika Birleşik Devletleri'nde uzay keşif programının bir parçası olarak geliştirildi. NASTRAN ilk büyük sonlu elemanlar koduydu. Geliştirildiği sırada da ve şimdide binlerce serbestlik derecesini hesaplayabilmektedir. NASTRAN geliştirildikten sonra pek çok sonlu elemanlar yazılımı geliştirildi. (Hutton, 2004, s12)



Şekil 4.1 Nastran ağ örgüsü.

Bugün NASTRAN kodu çok farklı uygulamalar için kullanılmaktadır. Bunun yanında sadece Statik Analiz değil ayrıca çok geniş bir analiz uygulamaları ağına da sahiptir. Yazılımın oluşturduğu ağ örgüsü çok karmaşık modelleri dahi bölebilmektedir.

4.2 Autodesk Inventor Nastran

Nastran sonlu elemanlar kodunu kullanan yazılımlardan biride Inventor Nastran yazılımıdır. Inventor Professional tasarım yazılımı içinde çalışarak sonlu elemanlar modellemesi yapmaktadır. Ticari bir yazılım olan Inventor Nastran çalışmak için Inventor yazılımına ihtiyaç duymaktadır. Çalışma sırasında diğer Ticari Paket programlara göre tercih edilmesinin sebebi yazarın bireysel tercihidir.

4.3 Öz Değer Analizi

Öz değer analizi Dinamik incelemelerin ilk adımını içermektedir. Bu analiz neticesinde modelin öz değerlerini ve öz vektörleri hesaplanabilir. Bunun için aşağıda bulunan denklem (4.19) kullanılmaktadır.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (4.1)$$

Öz değer analizi ve ya diğer adıyla modal analiz hesaplanırken sönüm ve ya yüklemeye gerek yoktur. Hesaplamayı anlamak için sinüzoidal yer değiştirme olduğu düşünüldüğünde (4.2) ifadesi yer değiştirme için yazılabilir.

$$x = \{\emptyset\}e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

yer deęiřtirme (4.2)'de bulunan ifade gibi dūřūnūlebilir. Bu ifadenin ikinci ve ūçūncū tūrevleri hız ve ivme deęerlerini verecektir. Bu sayede (4.3) ifadesi elde edilebilir.

$$\ddot{x} = -\omega^2\{\emptyset\}e^{i\omega t} \quad (4.3)$$

Denklemden bu ifadeler yerine konulduğunda (4.1) ifadesi (4.4)'e dōnecektir.

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\emptyset\}e^{i\omega t} = 0 \quad (4.4)$$

$e^{i\omega t}$ asla sıfır değerini alamaz bu nedelele Autodesk Nastran doğal frekansları aşağıda ki (4.5) ifadesini cōzerek elde eder.

$$|[K] - \lambda[M]|\{\emptyset\} = 0 \quad (4.5)$$

$[K]$, Katılık Matrisi

$[M]$, Kūtle Matrisi

λ , her ōz vektōrūn kendi ōz deęeri

$\emptyset$, her ōz vektōrūn řeklini ifade eden vektōr

Ōz değer ifadesi sistemin doğal frekansı ile ilgilidir. (4.6) ōz değer ve doğal frekans arasında bulunan bağlantıyı gōstermektedir.

$$\lambda_i = \omega_i^2 \quad (4.6)$$

ω dairesel frekansı gōstermektedir. Hz birimine dōnūřtürmek iēin (4.7) ifadesi kullanılır.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4.7)$$

Ōz deęer problemi konusunda pek cōok yaklařım sōz konusudur. Lanczos yaklařımı hızlı ve gūēlū olduęu iēin tercih edilmektedir. λ ōz deęerleri gōsterirken, ōz vektōrler gōrecelidir. Bu sonuēlar ōzel cōzūm deęildir. Basit olarak řekli temsil ederler. Varsayılan olarak Autodesk Nastran kūtle ōlēeklendirmesi yapar. Bu genelleřtirilmiř kūtle hesaplaması ile yapılmaktadır. (4.8) bunun denklemsel halini gōstermektedir.

$$M = [\emptyset]^T[M][\emptyset] \quad (4.8)$$

Autodesk Nastran bu gōreceli deęerleri hesaplamak iēin en fazla ōlēeklendirmeyi yapar ki bu noktada en būyūk vektōr deęeri 1.0 olur. Bu kısımda Autodesk Inventor

Nastran kullanılarak Öz değer çözümlemesi yapılacaktır. Bunun yazılımda karşılığına gelen analiz tipi Normal Modes analizidir.

4.3.1 Sonlu elemanlar modelinin kurulması

Sonlu elemanlar modeli oluşturulurken genel olarak paket program kullanımı sırasında aşağıda bulunan bu adımlar takip edilmektedir.

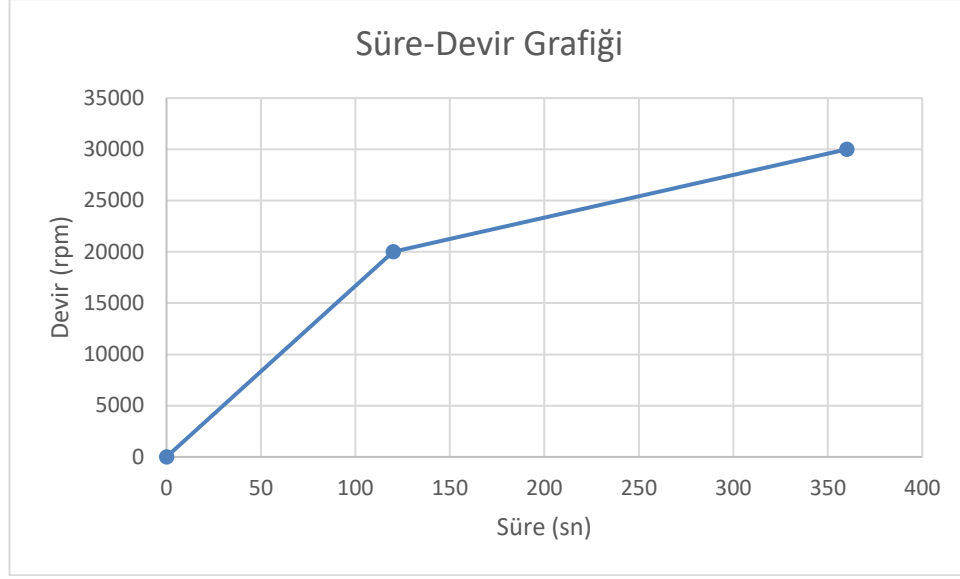
1. Modelin Hazırlanması
 - a. Geometrinin basitleştirilmesi
 - b. Malzeme Bilgisinin Tanımlanması
 - c. Yüklemenin Yapılması
 - d. Mesnetlerin Yapılması
 - e. Temasların Tanımlanması
 - f. Analiz Ayarlarının Tanımlanması
2. Modelin Çözdürülmesi
3. Modelin Yorumlanması

Bu konuda Chen ve Liu şunu ifade etmektedir:

Ticari sonlu elemanlar yazılımlarında prosedür genel olarak şu fazlara ayrılmıştır. Ön hazırlık (FEM modeli oluşturulur, eleman özellikleri tanımlanır, yükler ve mesnetler tanımlanır), FEA çözümü (FEM sistemi denklemlerini birleştirmek ve çözmek), Değerlendirme (Sonuçları incelemek ve ayıklamak) (Liu ve Chen, 2014, s3)

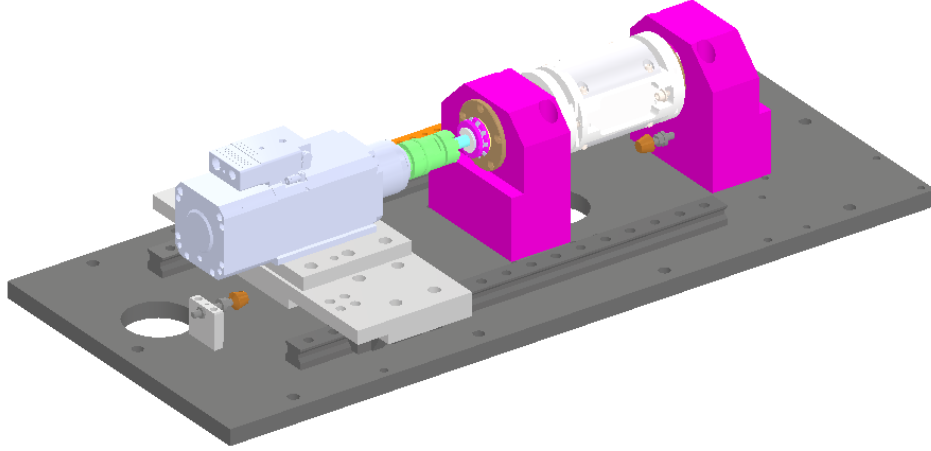
4.3.1.1 Modelin açıklaması

Sonlu elemanlar modelini kurarken modelin çalışma koşullarının nasıl olduğuna bakarak doğru tanımlamaları yapmak gereklidir. Modele etkiyen yüklemeler, dış koşullar ve bunun yanında çalışma rejiminin dinamik mi veya durağan mı olduğu önemlidir. Bu detaylar doğru analiz tipini seçmek için ciddi anlamda yardımcı olacaktır. Bu çalışmada incelenecek olan örnek model havacılık alanında kullanılacak olan bazı parçaları test etmek için geliştirilmiş olan bir endüstriyel makinedir. Bu endüstriyel makinenin belirli bir çalışma durumu şu şekilde ifade edilebilir. 6 dk bir çalışma periyodu içinde 30000 devir/dk çıkarak test parçasının kontrolünü sağlamak. Ancak bu maximum devire ulaşması kademeli olarak söz konusu olmaktadır.



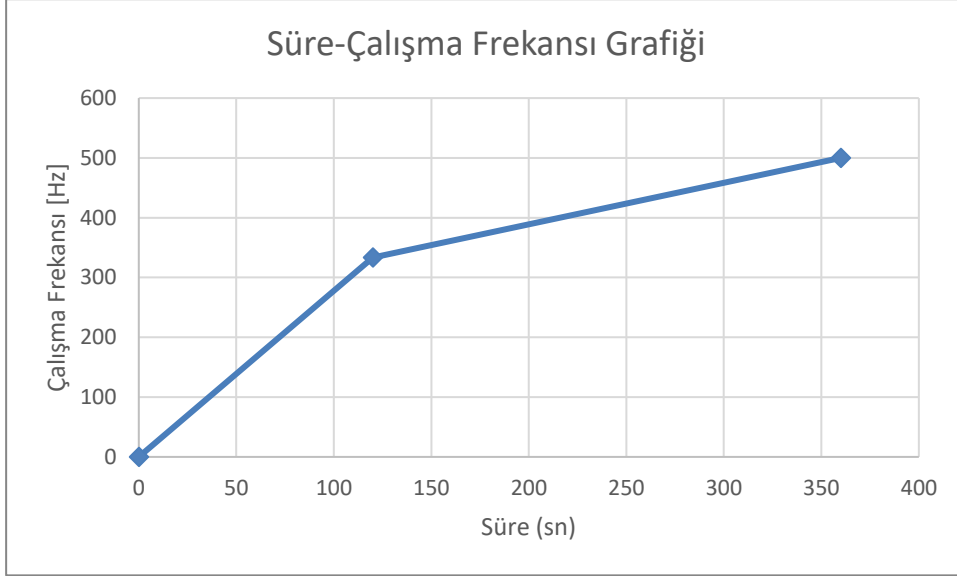
Şekil 4.2 Makinenin devir grafiği.

Makine Grafik 4.1’de görüldüğü şekilde performans göstermektedir. İlk 120 saniyede 2000 devir/dk değerine ulaşmaktadır. Daha sonrasında 360 saniyede 30000 devir/dk değerine ulaşmaktadır. Bu değerler ile test parçasının bağlı olduğu rotor döndürmektedir.



Şekil 4.3 Modelin izometri görünüşü.

Alt kısımda bulunan plaka vasıtası ile sabitlenen model plaka üzerinde bulunan raylar vasıtası ile bütün sistemi sabit tutmaktadır. Test parçası iki blok kütlesi arasında motorun tahriki ile Grafik 4.1’de görüldüğü gibi dönmektedir. Model çalıştırılmadığında titreşim problemi yaşanmış ve blok parçalarının dağılması ile sistem infilak etmiştir. Titreşim probleminin sebebinin motorun tahriki ile sistemin doğal frekanslarının çakışmasından dolayı ortaya çıktığı düşünülmektedir. Bunun için Grafik 4.1 değerleri Hz birimine dönüştürülürse aşağıda görülen grafik elde edilecektir.



Şekil 4.4 Çalışma frekansı grafiği.

Devir-dakika değerlerinin 60 bölünmesi ile birlikte çalışma frekansı değerleri Hz cinsinden elde edilecektir. Burada modelde sonlu elemanlar metodu ile incelenmesi gereken husus modeli doğal frekanslarının çalışma frekansları ile çakışıp çakışmadığını bulmak ve çakıştığı yerleri tespit ederek iyileştirme için önerilerde bulunmaktır.

Modelde söz konusu olan durum zorlamalı titreşim olarak bilinen duruma tekabül etmektedir. Bu konuda Thomson şunu ifade etmektedir:

Eğer zorlama sistemin doğal frekanslarından biri ile çakışacak şekilde etkindiyse Rezonans denilen durum ortaya çıkacaktır ve akabinde tehlikeli büyük salınımlar söz konusu olur. Köprü, uçak ve bina gibi devasa yapılar ciddi bir rezonans tehlikesi ile karşı karşıyadır. Bu yüzden sistemin doğal frekanslarının hesaplanması titreşim çalışmalarında ciddi bir öneme sahiptir. (Thomson, 2010, s5)

Modelin sonlu elemanlar metodu ile Doğal frekansları ve olası mod şekilleri tespit edilerek bunların yük frekansı ile çakışıp çakışmadığını kontrol etmek bu çalışmanın ana omurgasını içermektedir. Bu noktada ayrıca sistemin çalışma frekans aralığı bilindiği için hangi frekansların incelenmesi veya en azından hangi frekans aralığına bakılması gerektiği noktasında fikir sahibi olunabilir. Sistemleri Titreşimlerden korumanın yaygın olarak kullanılan üç yolu söz konusudur.

1. Frekansları Ayırmak

Bu yöntemde sistemin doğal frekansı ile yükün doğal frekansını ayırarak rezonans riskini ortadan kaldırmak söz konusu olabilmektedir.

2. Sönümleyici Kullanmak

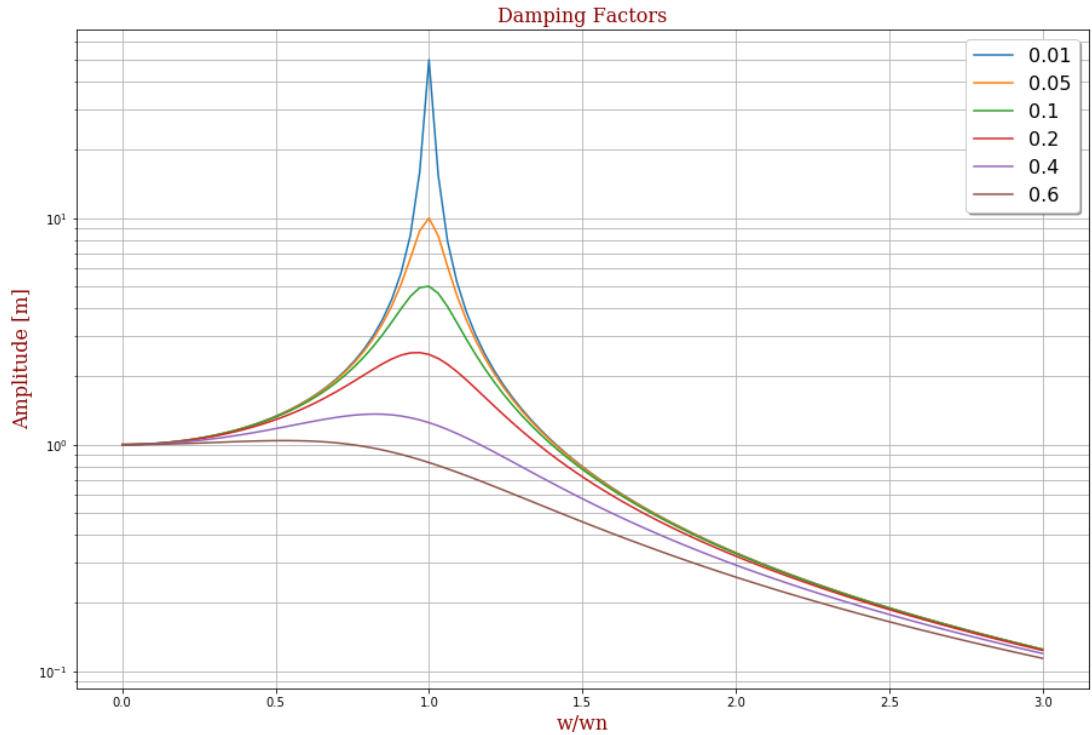
Çeşitli nedenlerden dolayı frekansları ayırmak söz konusu olmuyorsa sisteme sönümleyiciler ekleyerek titreşim genliğini azaltmak söz konusu olabilir.

3. Titreşim Yalıtımı

Titreşimin yayılma yollarının kesilmesi ve istenmeyen yerlere ulaşmasının engellenmesi.

Titreşim yalıtımı konusunda Turhan (2017) şunu ifade etmektedir. “Zorlanmış Titreşimler kuramının önemli uygulamalarından birini de titreşim yalıtımı oluşturur. Titreşim yalıtımı denildiğinde, bir nedenle doğmuş titreşimlerin yayılma yollarının kesilerek arzu edilemeyen yerlere ulaşmasına engel olunması anlaşılır.” (s. 140)

Bu çalışma kapsamında kullanılacak yöntem Frekansları Ayırmak olacaktır. Çünkü bu yöntem titreşim riskini tamamen ortadan kaldırmaya yaramaktadır. Diğer yöntemler ise titreşimin kalitesini düşürmektedir.

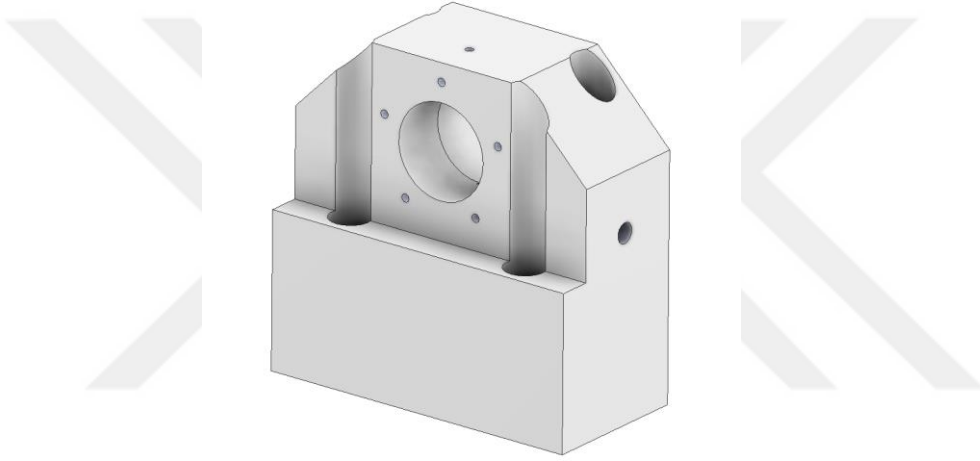


Şekil 4.5 Sönüm değerlerinin genliği değiştirmesi.

Şekil 4.3’de görüleceği üzere sönüm değerlerini arttırmak titreşim sistemini rezonans durumunu ortadan kaldırmaz sadece titreşimin niteliğini değiştirir.

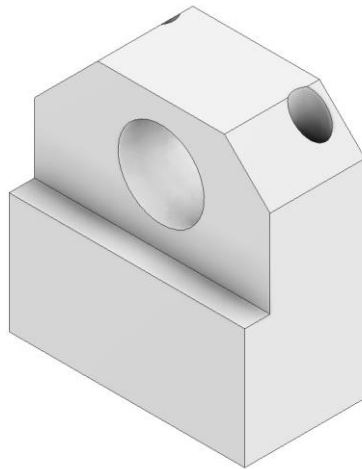
4.3.1.2 Modelin basitleştirilmesi

Tasarım verileri üretimsel detayları yoğun olarak içinde barındırmaktadır. Bu detaylar üretim için hayati öneme sahiptir ancak sonlu elemanlar noktasında ciddi bir katkısı söz konusu değildir. Bu nedenle sonlu elemanlar analizine geçmeden önce modelin bu detaylardan arındırılması gereklidir. Diğer bir husus ise modelin içinde bulunan her bileşenin sistemin doğal frekansına katkısı söz konusu değildir. Dolayısı ile bu bileşenlerin çıkartılması gereklidir.



Şekil 4.6 Blok modeli.

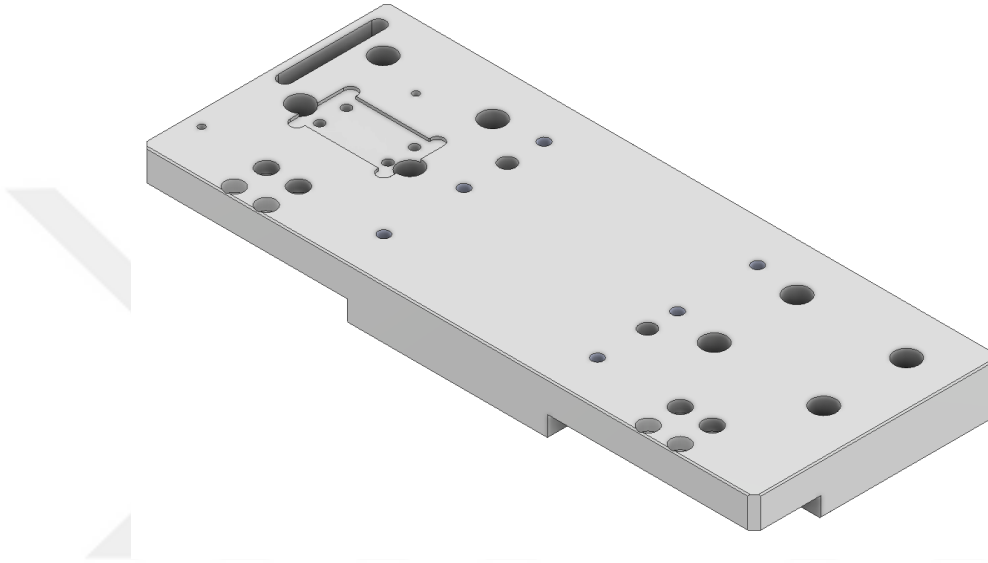
Şekil 4.4 buna iyi bir örnektir. Blok Modeli pek çok üretimsel ifadeyi içermektedir. Bunların çoğuna ihtiyaç yoktur. Dolayısı ile basitleştirme yapılmalıdır.



Şekil 4.7 Basitleştirilmiş model.

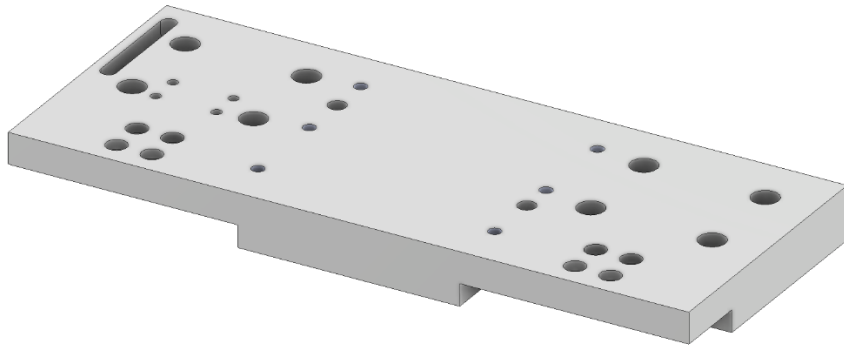
Genel olarak model basitleştirilirken şunların kaldırılması sağlanmaya çalışılır.

- Radyüsler
- Pahlar
- İzler
- Küçük Delikler
- Yuvalar
- Girintiler ve Çıkıntılar
- İmalat Detayları



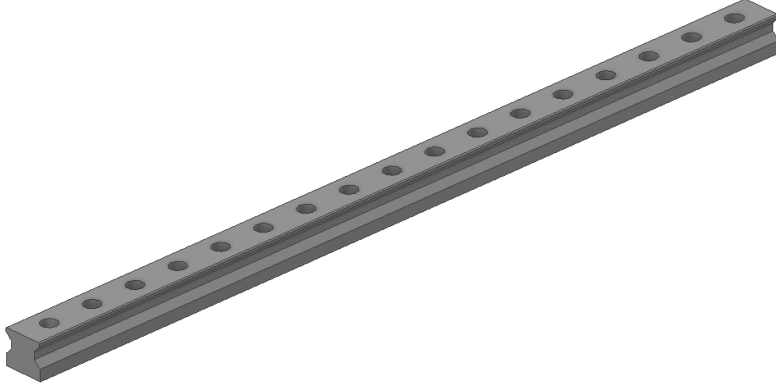
Şekil 4.8 Alt Blok modeli.

Dikkat edileceği üzere Şekil 4.6’da görülen model tüm kaldırılması gereken ibareleri barındırmaktadır.



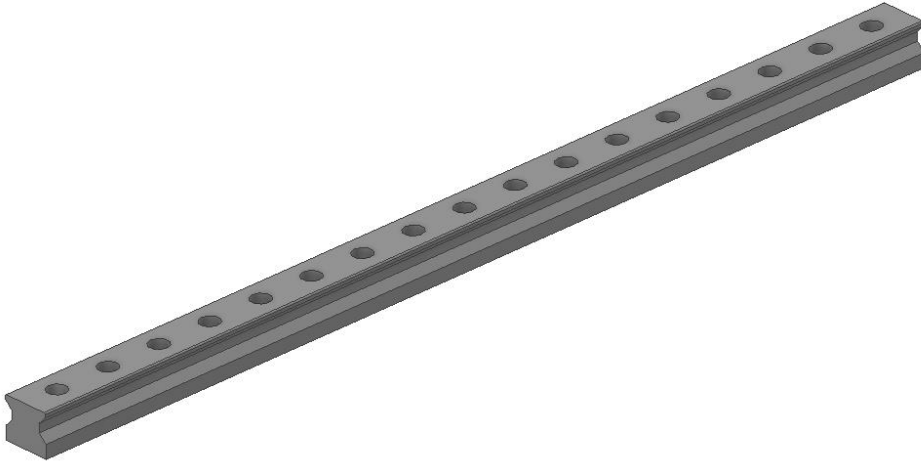
Şekil 4.9 Alt blok modeli basitleştirme.

Örneğin bir diğer örnekte raylar olarak gösterilebilir.



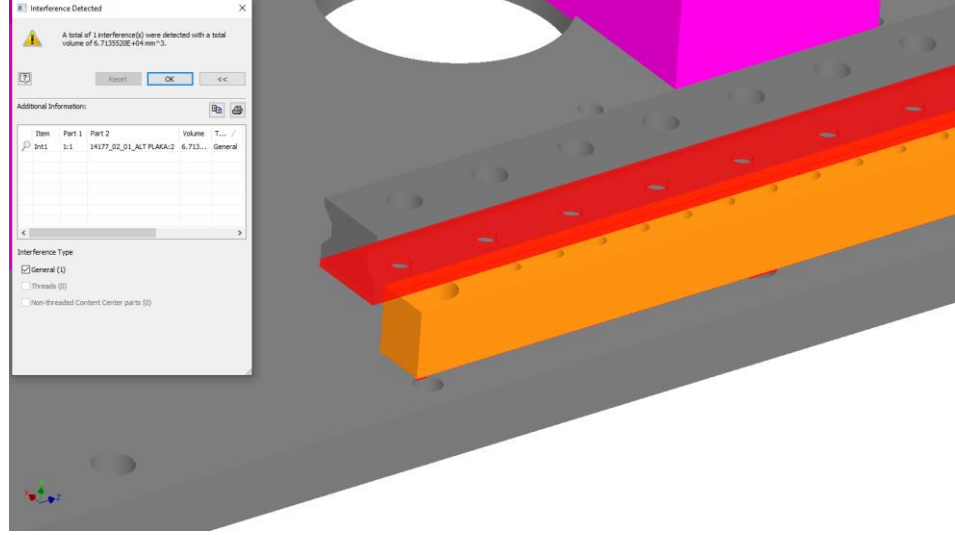
Şekil 4.10 Ray modeli.

Ray modeli eğer basitleştirilirse Şekil 4.9’da görüldüğü gibi bir durum ortaya çıkacaktır.



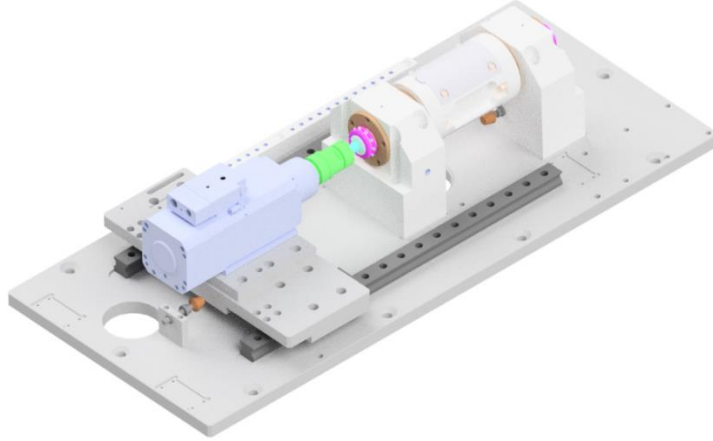
Şekil 4.11 Ray modeli basitleştirilmiş durum.

Basitleştirme işleminin temel iki nedeni vardır. Bunlar, ilk olarak sonlu elemanlar Modeline katkısı olmayacağı düşüncesi ve ikincisi ise doğru sonuçları almak için daha fazla ağ atılması gerekeceğidir. Çünkü sonlu elemanlar modelinin doğru çözülmesi için yeterince hassas ağ atılması gerekmektedir. İmalat detaylarının bulunduğu modellerde bunu sağlamak için ciddi bir işlemci ve hesaplama gücü gerekmektedir. Buda daha fazla çözüm süresi anlamına gelecektir. Diğer bir hususta modelde bulunan çakışmaların ortadan kaldırılması gerekmektedir.



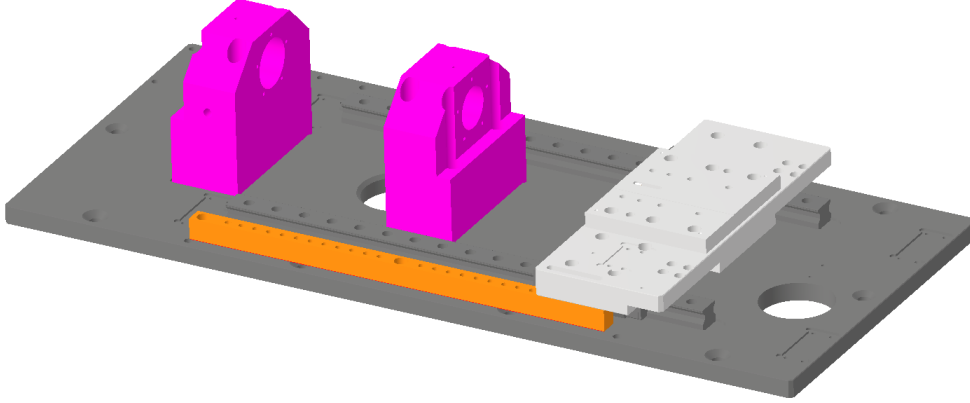
Şekil 4.12 Çakışma durumu.

Aksi halde sağlıklı bir modelleme olmayacaktır. Şekil 4.12’de görüldüğü gibi model içinde bulunan çakışmalar modelin ağ yapısının kalitesiz olmasını sağlamaktadır.



Şekil 4.13 Model ilk hal.

Şekil 4.11’da modelin orijinal hali görülmektedir. Bileşenlerin basitleştirilmesi ile birlikte model aşağıda görüldüğü gibi bir hal almıştır.



Şekil 4.14 Model basitleştirilmiş hal.

Modelde zorlayıcı kuvveti oluşturan motor sistemden basitleştirme sonrasında kaldırılmış ve onun yerine ağırlığı konumlandığı yere tanımlanmıştır. Modelin kendisinin değil sadece kütle ve ataletsel değerlerinin önemli olduğu durumlarda. Özel bağlantılar kullanarak sonlu elemanlar modelinde tanımlama yapılabilir. Diğer bir hususta modelde bulunan

4.3.1.3 Modelin tanımlamalarının yapılması

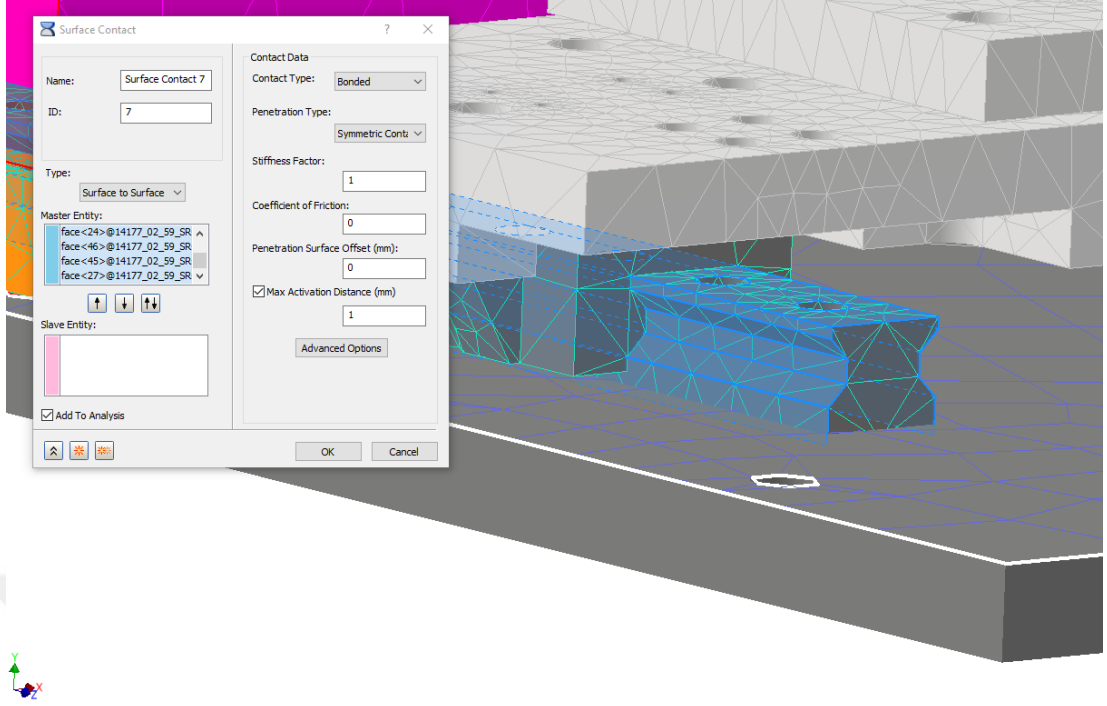
Sonlu elemanlar modelini çözdürebilmemiz için modelin tanımlamalarının yapılması gerektiğinden bahsedilmişti. Bu aşamada ilgili tanımlamaların yapılması gerekmektedir. Bunlar,

- Malzeme
- Mesnet
- Temas
- Ağ
- Analiz

Modelde kullanılan malzeme yapısal çeliktir. İlgili değerler aşağıda Çizelge 4.1’de görüldüğü gibidir.

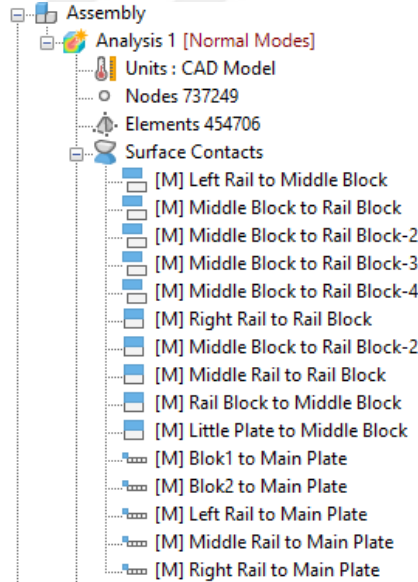
S235		
Yoğunluk	7850	kg/m ³
Elastisite Modülü	205	Gpa
Poisson Oranı	0.3	-
Akma Gerilmesi	235	Mpa

Çizelge 4.1 Malzeme özellikleri.



Şekil 4.15 Ray ve blok arasında tanımlanan temas.

Şekil 4.13’de olduğu gibi birbiri ile temas halinde olan modeller tanımlanmıştır. Tüm temaslar aşağıda bulunan Şekil 4.14’de görülecektir.



Şekil 4.16 Tüm temas tanımlaması.

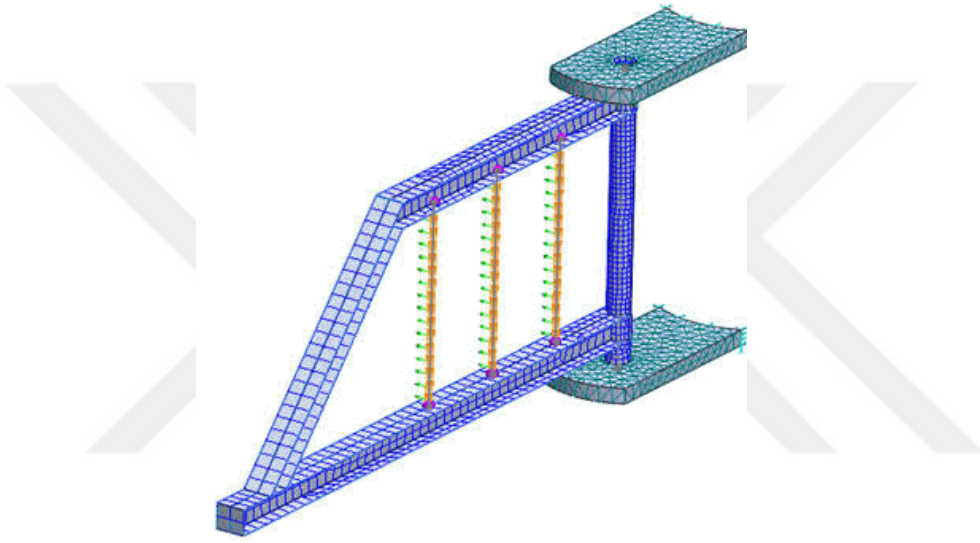
Temaslar tanımlanırken bazı bileşenlerin arasına ayrılmaz temas tanımlanmış bazılarının arasına ise içi içe girmez temas tanımlanmıştır. Bu tanımlamalar modelin çalışma koşulları dikkate alınarak yapılmıştır.

4.3.1.4 NASTRAN eleman tipleri

Inventor Nastran yazılımı iç farklı eleman tipi ile ağ atmaya imkan sağlamaktadır.

- Katı Eleman
- Yüzey Eleman
- Çizgisel Eleman

Bu eleman tiplerinin birbirlerine göre üstün oldukları yerler ve dezavantajlı oldukları yerler bulunmaktadır.



Şekil 4.17 Karmaşık eleman modellemesi.

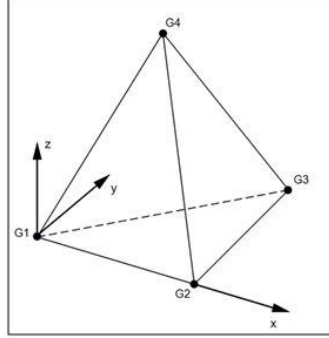
Elemanlar düğüm noktaları ile birbirine bağlıdır. Bu düğüm noktalarının serbestlik dereceleri tüm ağ yapısının serbestlik derecesi kavramının yapı taşıdır.

4.3.1.4.1. Serbestlik derecesi

Sonlu elemanlar teorisinde serbestlik derecesi düğüm noktasının doğrusal ve dairesel hareketlerini ifade etmek için kullanılır. Bir düğüm noktası için 6 serbestlik derecesi olabilir.

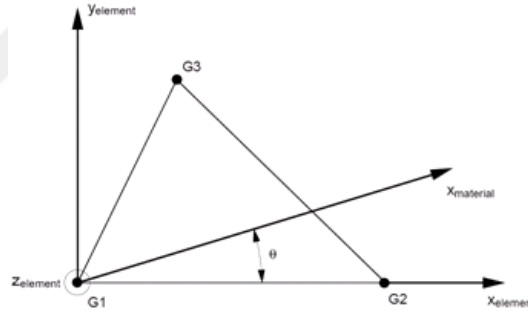
- X yönü doğrusal
- Y yönü doğrusal
- Z yönü doğrusal
- X yönü dairesel
- Y yönü dairesel
- Z yönü dairesel

Katı eleman her düğüm noktasında üç serbestlik derecesi barındırır. Bunlar; X,Y,Z doğrusal harekettir.

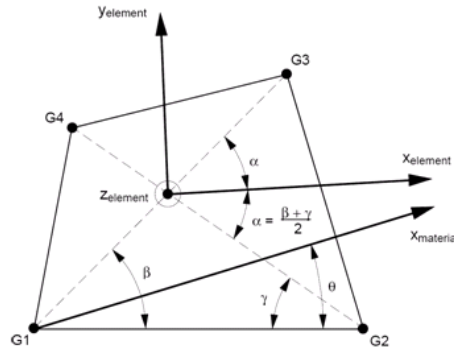


Şekil 4.18 Katı eleman serbestlik dereceleri.

Inventor Nastran yazılımı katı eleman olarak sadece düzgün dört yüzlü olarak eleman kullanmaktadır. Yüzey Elemanın beş serbestlik derecesi vardır. Bunlar; X,Y,Z doğrusal ve X,Y daireseldir. Inventor Nastran içinde iki tip shell eleman ile çalışma yapılır. Bunlar üçgensel eleman ve dörtgensel elemandır.

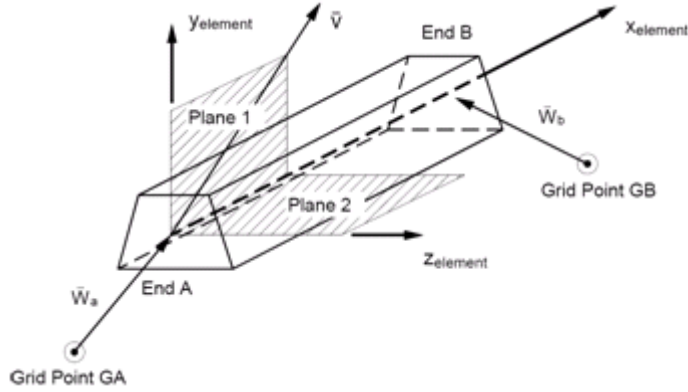


Şekil 4.19 Üçgensel yüzey elemanın serbestlik dereceleri.



Şekil 4.20 Dörtgensel yüzey elemanın serbestlik dereceleri.

Çizgisel elemanın iki düğüm noktası vardır. İlk bölümlerde temel sonlu elemanlar teorisini anlatmak için kullandığımız eleman tipi çizgisel elemandır. Çizgisel elemanın her bir düğüm noktasında 6 serbestlik derecesi vardır.



Şekil 4.21 Çizgisel eleman serbestlik dereceleri.

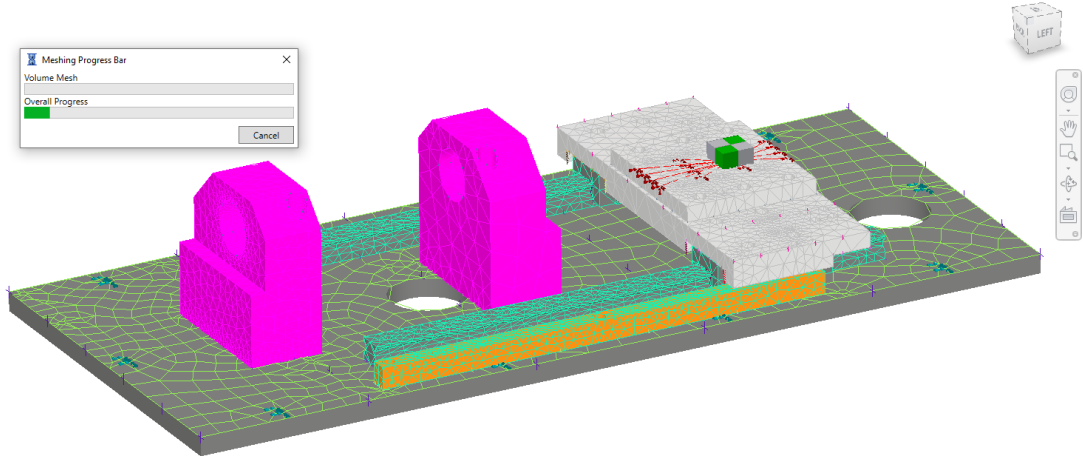
Bizim modelimizde ise sadece yüzey ve katı eleman kullanılmıştır. Bu nedenle model karmaşık bir ağ modelidir. Çizelge 4.2 bunu göstermektedir.

Eleman Tipi	Eleman Sayısı	Düğüm Noktası	Serbestlik Derecesi
Katı	34435	53999	161997
Katı	35157	54944	164832
Katı	73436	115480	346440
Yüzey	9602	20154	100770
Katı	95855	150833	452499
Katı	57360	90731	272193
Katı	52390	85108	255324
Katı	12411	20983	62949
Katı	50552	82224	246672
Katı	12034	20348	61044
Toplam	433232	694804	2124720

Çizelge 4.2 Eleman tipleri, sayısı ve serbestlik derecesi çizelgesi.

Çizelge 4.2 atılan ağ içinde bulunan toplam eleman sayısı ve serbestlik derecesini göstermektedir. Bu noktada toplam eleman sayısının 433232 adet olduğunu ve 694804 adet düğüm noktası olduğunu görebiliyoruz. Bütün bu düğüm noktalarının sahip olduğu ve modelin tamamının serbestlik derecesi 2124720'dir. Tam bu noktada şunu ifade etmek gerekir. Gerçek modellerin serbestlik derecesi sonsuzdur. Bu nedenle doğal frekansı sayılarıda sonsuzdur. Ancak modeli analiz edebilmek için parçalara böldüğümüzden dolayı bu bölünmüş halin serbestlik derecesi bize sonlu bir sayı verir. İşte bu model örneğinde olduğu gibi ayırıklaştırma nedeniyle normalde sonsuz olan

serbestlik derecesi değeri sonlu bir rakama dönüşmüştür. Tabi doğal frekans sayısında aynı şekilde.

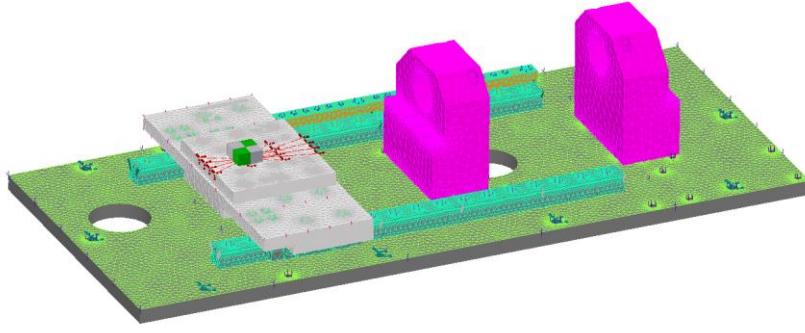


Şekil 4.22 İlk ağ iterasyonu.

Sonlu elemanlar metodu ilk kısımlarda açıklandığı gibi gerçek modeli ayrıklaştırmaya yaramaktadır. Doğru bir ağ sonuçların doğru alınmasını sağlayacaktır. Aksi halde düğüm noktaları ve interpolasyon noktalarından alınan sonuçlar yanlış olur. Ağ yapısını kontrol etmenin bazı yöntemleri vardır. Bunlar ağ kalite katsayıları sayesinde olur. Autodesk Inventor Nastran Yazılımında söz konusu olan kalite katsayıları şunlardır.

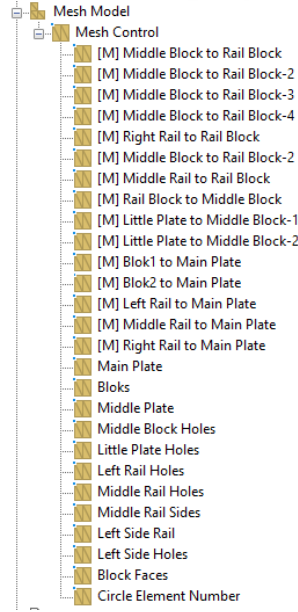
- Aspect Ratio
- Skewness
- Warping
- Taper
- Jacoben

Bu değerler kontrol edilerek eleman yapısının geometrik durumu incelenir ve fikir sahibi olunabilir. Aspect Ratio elemanların en büyük ve en küçük kenarı arasında bulunan orandır. Üçgensel eleman için ideal yapının eş kenar üçgen olduğu düşünülürse bu değer için 1 eşit olduğu anlaşılabacaktır. Skewness katsayısı elemanın yamukluğu hakkında fikir vermektedir. Warping, elemanın düzlemselliği hakkında fikir verir. Taper, bir dörtlü elemanı ikiye böldüğünde ortaya çıkan üçgenlerin alanlarının karşılaştırmasını verir. Jacobian, elemanın yamukluğunu Jacobian matrisinin determinantını hesaplayarak sağlar. Bu değerlerin ağ atılırken ideal durumda olması sağlanmalıdır. Dolayısı ile bu katsayılar kontrol edilerek tekrar mesh atıldığında aşağıda ki gibi bir durum ortaya çıkar.



Şekil 4.23 İyileştirilmiş ağ.

Şekil 4.16’da görülen iyileştirilmiş ağ halinin alınması için bölgesel ağ atılmış ve parabolik eleman tipi tercih edilmiştir.



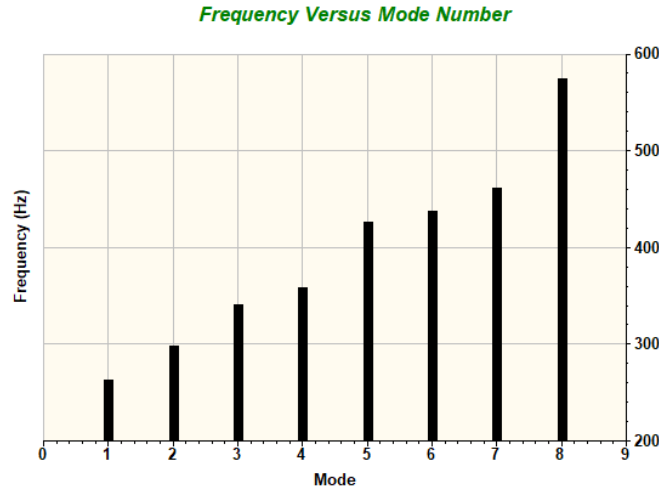
Şekil 4.24 Bölgesel ağ detayları.

Bölgesel ağ atılırken tüm temas yüzeylerine atılmaya dikkat edilmiştir. Bunun yanında Genel Ağ değeri de iyileştirilmiştir. İlgilenilen Rezonans frekans aralığı 0 Hz ile 500 Hz aralığındadır. Bu nedenle Paket Programın sadece bu aralıkta bulunan doğal frekansları hesaplamasını tanımlamak gereklidir.

4.3.2 Modelin çözdürülmesi ve sonuçlar

Inventor Nastran yazılımı içinde bulunan model gerekli tanımlamalar yapıldıktan sonra çözdürüldüğünde doğal frekans değerleri, mod şekilleri ve hareketlere en çok katkı yapan mod sayıları elde edilmiştir.

4.3.2.5 Modelin rezonans frekansları



Şekil 4.25 Mod numarası ve doğal frekanslar.

Doğal frekans değerleri incelendiğinde 250 Hz civarından başlayıp 600 Hz kadar ulaştığı görülmektedir. Bu nedenle aslında 8. Mod durumu bizim için tehlike arz etmemektedir. Çünkü çalışma frekansı 500 Hz daha fazla değildir. Ancak sonuç hassasiyeti bakımından ve Rezonans bölgesi durumu söz konusu olup olmadığına bakılması için ilgilenilen aralık genişletilerek incelenmektedir. Rezonans bölgesi incelemesi için doğal frekansların $\pm\%10$ aralığına bakılmalıdır. Bunun için frekans değerlerine bakmak faydalı olacaktır. Çizelge 4.3 bunu tablo olarak ifade etmek adına oluşturulmuştur.

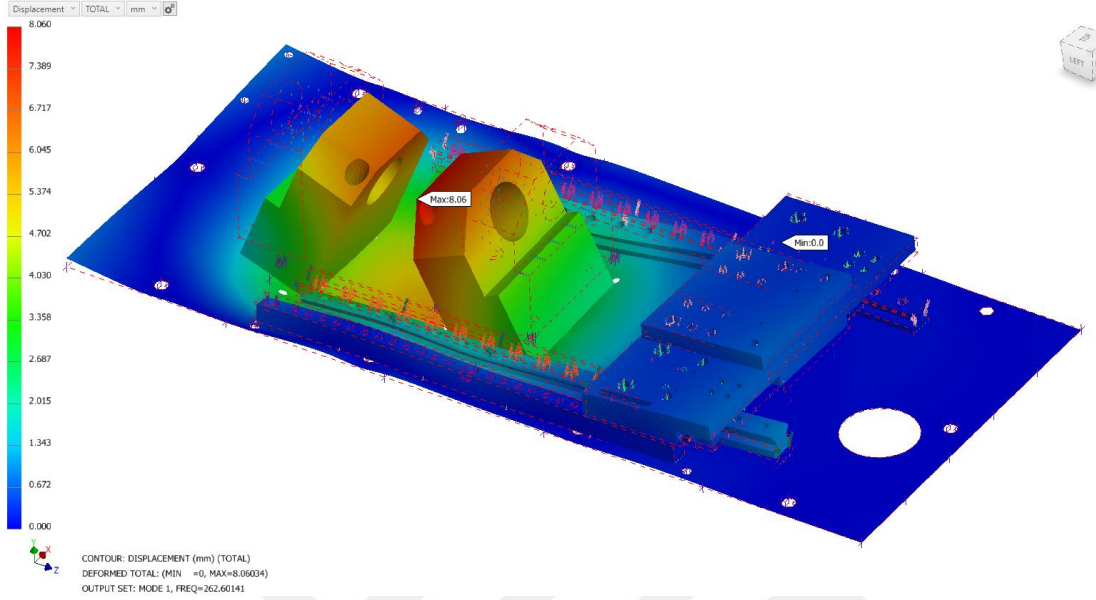
Mod	Frekans (Hz)	Alt Sınır (Hz)	Üst Sınır (Hz)	Bant Genişliği (Hz)	Devir Değerleri
1	262.601	236.3409	288.8611	52.5202	15756.06
2	297.837	268.0533	327.6207	59.5674	17870.22
3	340.246	306.2214	374.2706	68.0492	20414.76
4	358.894	323.0046	394.7834	71.7788	21533.64
5	426.12	383.508	468.732	85.224	25567.2
6	437.986	394.1874	481.7846	87.5972	26279.16
7	461.07	414.963	507.177	92.214	27664.2
8	574.171	516.7539	631.5881	114.8342	34450.26

Çizelge 4.3 Rezonans frekansları ve rezonans bandı.

Dikkat edilirse Çizelge 4.3’de bulunan değerlerin tamamı çalışma frekansları ile çakışmaktadır. Sadece 8.Mod için geçerli olan değer hariç olarak. Bu değerlerin karşılığı olan devir değerlerinde model Rezonansa girecektir ve belki de sistem hasara uğrayacaktır.

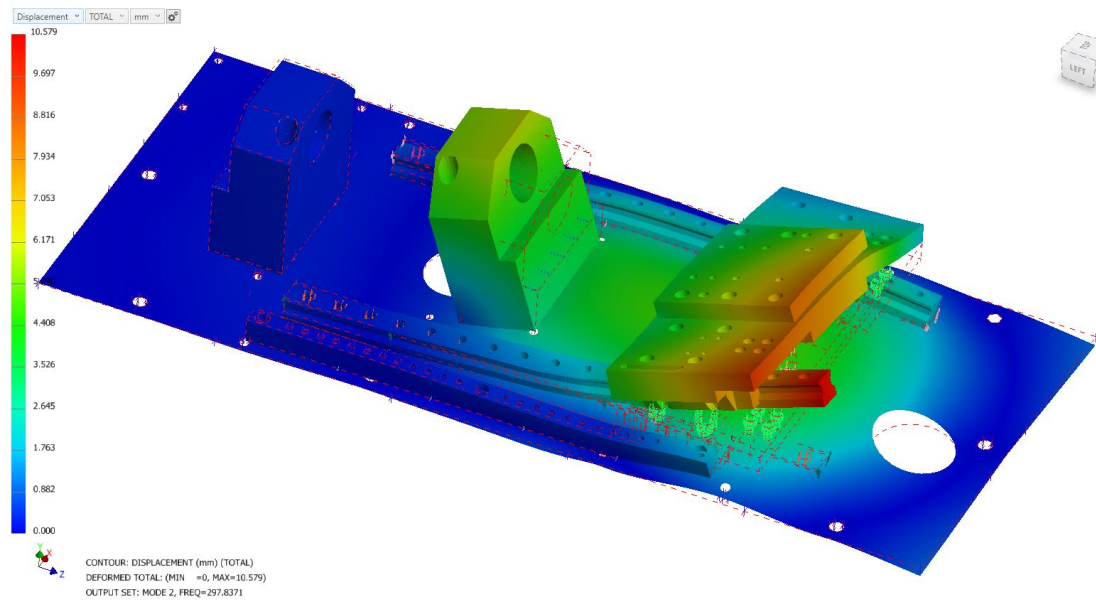
4.3.2.6 Mod şekilleri

Mod şekilleri o doğal frekans değerine ulaşıldığında modelin yapacağı titreşim hareketinin şeklini gösterir

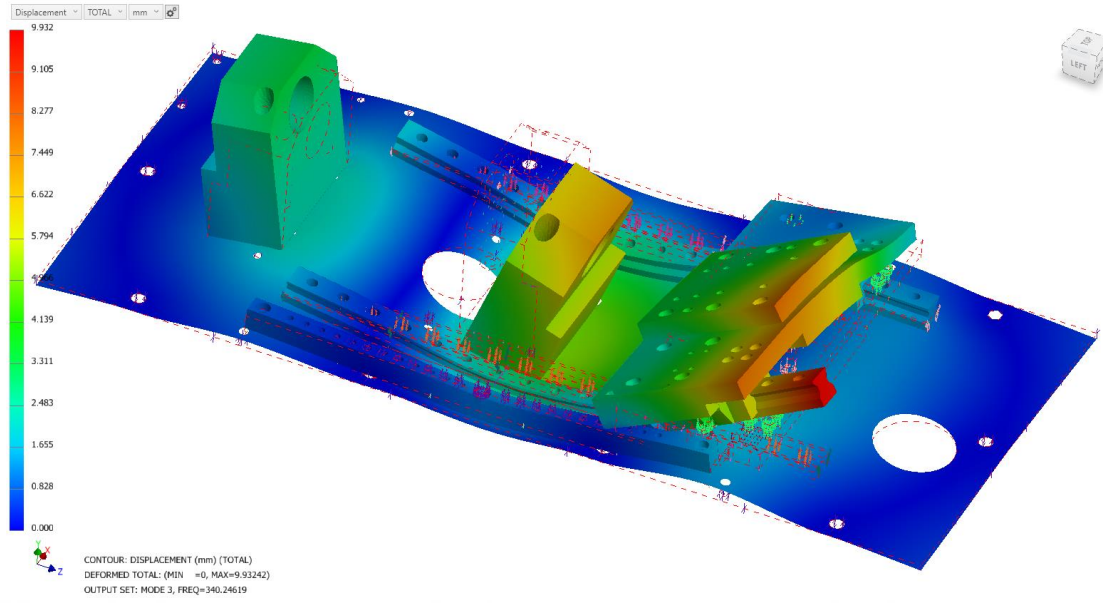


Şekil 4.26 1. Mod şekli 262 Hz frekansı.

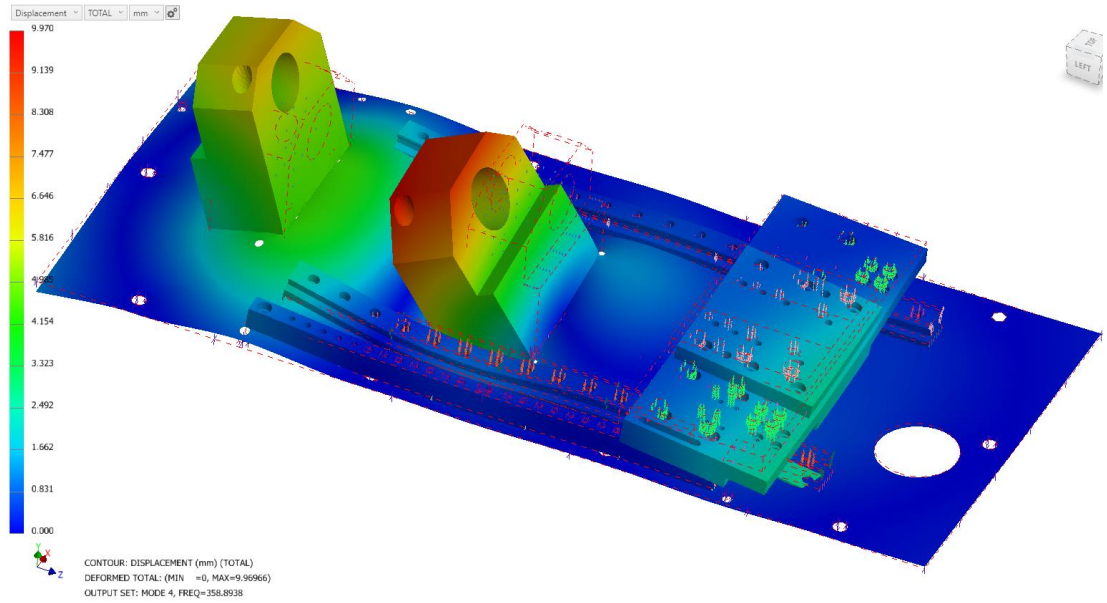
Şekil 4.19'dan görülen şekil değiştirme durumu çalışma frekansı 262 Hz değerine ulaştığında modelin alacağı hali göstermektedir. Model 262 Hz civarında Rezonansa girdiğinde 1. Mod durumunda olduğu gibi yer değiştirme hareketi yapacaktır.



Şekil 4.27 2. Mod şekli 297 Hz frekansı.



Şekil 4.28 3. Mod şekli 340 Hz frekansı.

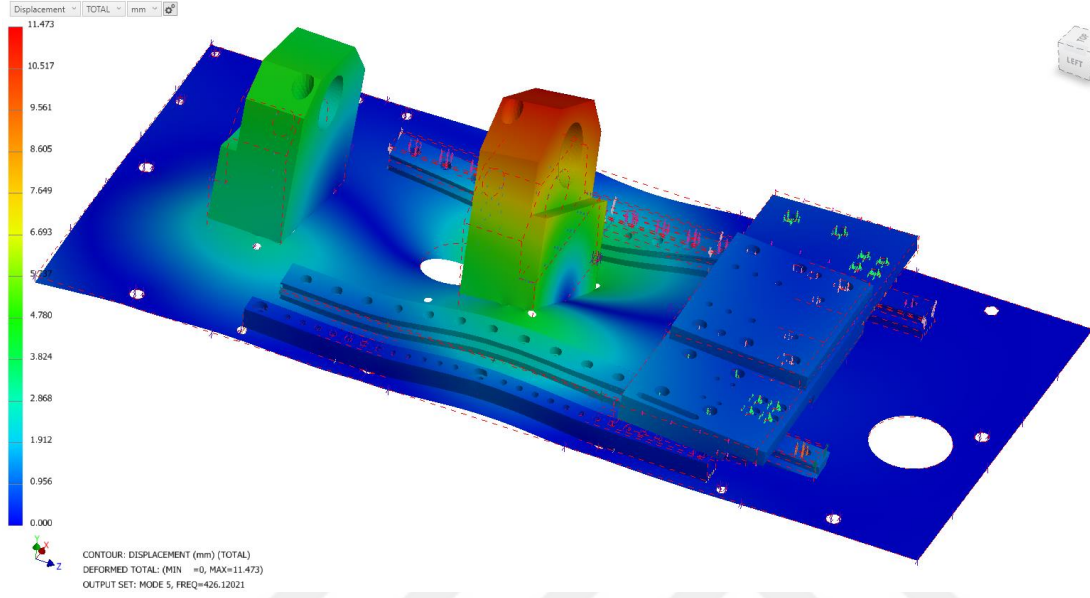


Şekil 4.29 4. Mod şekli 358 Hz frekansı.

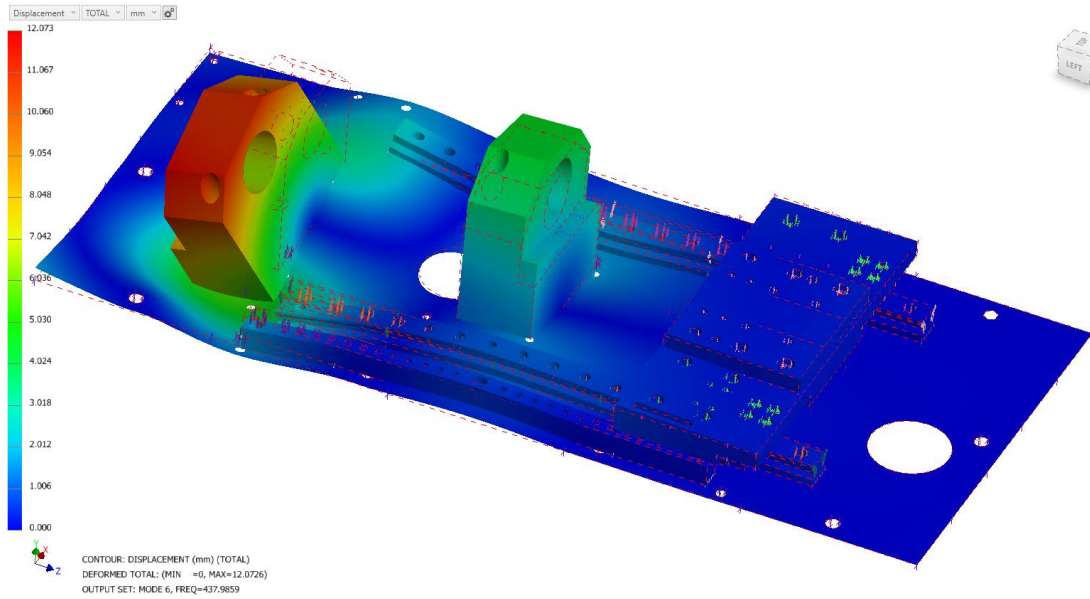
Frekans değerinin artması mod şeklinin daha fazla hareket tarzını barındırması anlamında gelebilmektedir. Çünkü frekans değerleri yükseldikçe o şekilde titreşim yapabilmek için gereken enerji miktarıda yükselmektedir.

Mod şekilleri konusunda Brandt şunu ifade etmektedir. “Rezonans ile alakalı olan bu göreceli hareket şekline mod şekli denilir.” (s112)

Kısaca Brandt tarafından ifade edildiği gibi bu Rezonans durumu ile alakalı hareketleri göstermektedir. Bunun yanında bazı mod durumları bazı yönlerde yer değiştirmeye ciddi katkı sağlamaktadır. Analiz sonucunda bunlarda elde edilmiştir.

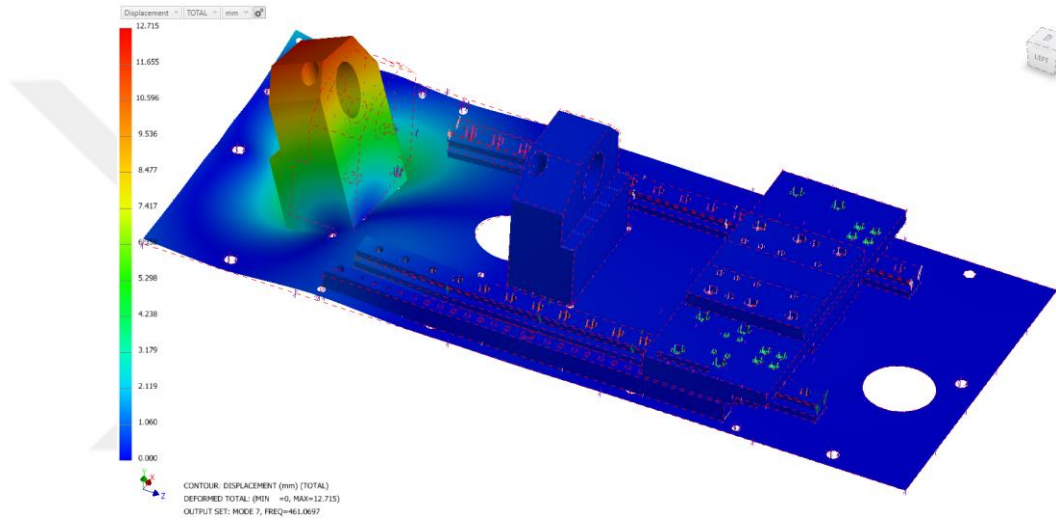


Şekil 4.30 5. Mod şekli 426 Hz frekansı.

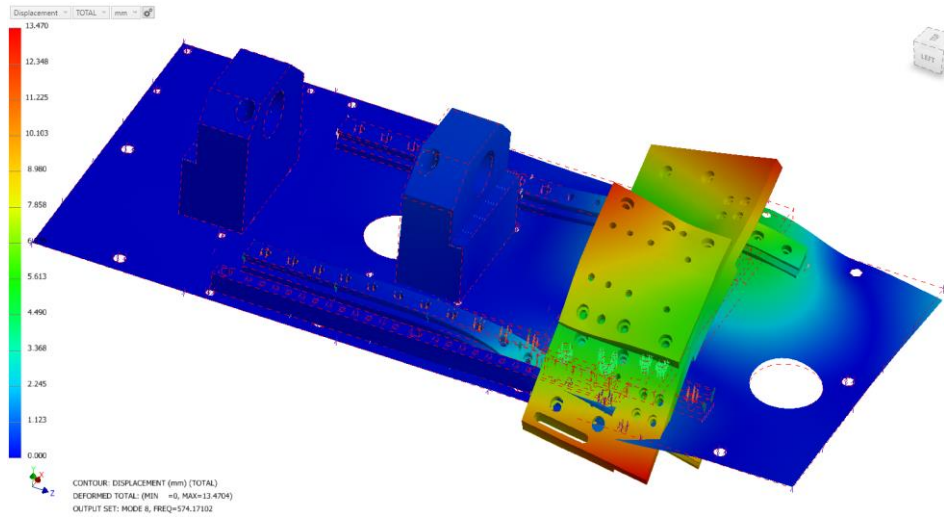


Şekil 4.31 6. Mod şekli 437 Hz frekansı.

Dikkat edilirse Şekil 4.26, Şekil 4.27, Şekil 4.28, Şekil 4.29, Şekil 4.30 ve Şekil 4.31 görüleceği üzere her bir mod şekli bir birinden farklıdır. Eğer 2 Milyon mod şeklini bulup incelendiği düşünülse dahi bu 2 Milyon şeklin her biri bir birinden farklı olacaktır. Mod şekilleri yapının öz fonksiyonlarını göstermektedir. Yapıyı çözebilmek için ayrıştırıldığından dolayı bu öz fonksiyonlar matrisler yardımı ile öz vektörler olarak ifade edilmektedir. Ayrıca mod şekillerinin verdiği yer değiştirme sonuçları bağlıdır. Gerçek değer ifade etmez. Sadece şekil bakımından ilgili frekans civarında nasıl bir titreşime maruz kalınacağını gösterir. Bu da yapı hakkında ciddi bir fikir edinmeye imkan tanımaktadır.



Şekil 4.32 7. Mod şekli 461 Hz frekansı.



Şekil 4.33 8. Mod şekli 574 Hz frekansı.

4.3.2.6.1. Efektif kütle değeri

Efektif kütle değeri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan dinamik analizlerde ciddi bir öneme sahiptir. Genel anlamda kaç moda kadar dikkate almamız gerektiğini göstermektedir. İdealde yeterince mod dikkate alınırsa efektif kütle değeri toplam kütle değerini verecektir. Ancak dinamik analizlerde %80 değere ulaştıracak kadar modu dahil etmek yeterlidir. Efektif kütle o mod şeklinde kütle ne kadarlık kısmının hareket ettiği ile ilgili fikir vermektedir. Aslında o mod şeklinin enerjisi hakkında fikir vermektedir denilebilir. Bazı mod şekillerinde belirli serbestlik derecelerinde efektif kütle değeri daha yüksekken bazı serbestlik derecelerinde efektif kütle değeri düşük kalmaktadır. Bu nedenle efektif kütle ve mod değerlerine bakmak ciddi fikir vermektedir.

Efektif kütle değerinin hesaplanabilmesi için önce mutalaka doğal frekansların ve mod şekillerinin tespit edilmesi gereklidir. Sonrasında ilgili mod için ilgili hesaplamalar aşağıda ki (4.9) şeklinde yapılabilir.

$$M_i = \{\phi^T\}[M]\{\phi\} \quad (4.9)$$

(4.2)'de görülen r değeri statik bir yer değiştirme durumunda hesaplanan sonuçtur. (4.10) bunun nasıl yapılacağını göstermektedir.

$$L_i = \{\phi^T\}M_i\{r\} \quad (4.10)$$

Bu ifadeler ile elde edilen sonuç neticesinde (4.11) denklemi kullanılır.

$$m_{eff(i)} = \frac{L_i}{M_i} \quad (4.11)$$

Modal efektif kütle değeri elde edilmiş olur. Burada (4.1), (4.2) ve (4.3) içinde ifade edilen terimler şu şekildedir.

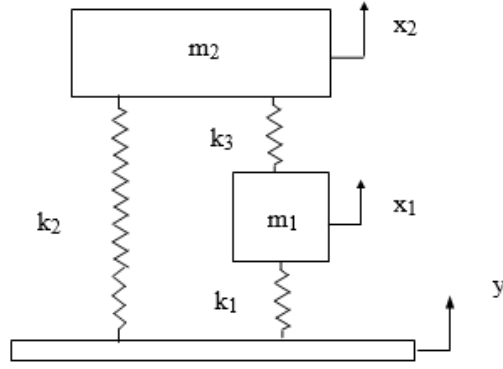
$[M]$, Kütle Matrisi

ϕ , Mod Vektörü

r , Yer değiştirme vektörü

M , Ortogonal Kütle Matrisi

m_{eff} , Efektif Kütle Değeri



Şekil 4.34 Örnek kütle yay sistemi.

Yukarıda görülen kütle yay sistemine göre efektif kütle hesaplaması örnek olarak yapılması için aşağıda bulunan değerleri kabul etmemiz gereklidir. Sistem için kabul edilen değerler Çizelge 4.4 ile gösterilmiştir.

Değişken	Değer
m_1	2.0 kg
m_2	1.0 kg
k_1	1000 N/m
k_2	2000 N/m
k_3	3000 N/m

Çizelge 4.4 Parametreler ve değerler.

Hareket denklemleri aşağıda bulunan hareket sistemini ifade etmektedir. (4.12) hareket denklemlerinin matris formu yazılmış halidir.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Kütle matrisi aşağıda ki (4.13) gibi hesaplanmaktadır.

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad kg \quad (4.13)$$

Katılık Matrisi ise aşağıda ki (4.14) gibi hesaplanmıştır.

$$[K] = \begin{bmatrix} 4000 & -3000 \\ -3000 & 5000 \end{bmatrix} \quad \frac{N}{m} \quad (4.14)$$

Öz değer hesaplamasının detaylarına önceki kısımda değinilmişti. Bu minval üzerine aşağıda bulunan (4.15), (4.16), (4.17) ve (4.18) değerleri ile hesaplanır.

$$\omega_1 = 30.03 \left[\frac{rad}{sn} \right] \quad (4.15)$$

$$f_1 = 4.78 \text{ Hz} \quad (4.16)$$

$$\omega_2 = 78.09 \left[\frac{rad}{sn} \right] \quad (4.17)$$

$$f_2 = 12.4 \text{ Hz} \quad (4.18)$$

Bu noktada öz değer vektörü matrisi aşağıda ki (4.19) gibi olur.

$$\phi = \begin{bmatrix} 0.6280 & -0.3251 \\ 0.4597 & 0.8881 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Burada (4.9) denklemini kullanırsak aşağıda bulunan ifade (4.20) elde edilmiş olur.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Bu hesaplamada r etki vektörünü ifade etmektedir. Kütlelere statik yükleme yapıldığında hesaplanan değer olarak düşünülebilir. Bu örnek için her bir kütle aynı yer değiştirme değerine sahiptir diye düşünülebilir. Bunu uygulamanın yolu (4.21) vektörünü kullanmak olacaktır.

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Katsayı vektörü L ise aşağıda (4.21)'de görüldüğü üzere hesaplanmaktadır.

$$L = \{\phi\}^T M \{r\} \quad (4.22)$$

Bu ifade ile birlikte aşağıda bulunan matris değeri (4.23)'de görüleceği üzere hesaplanmış olur.

$$L = \begin{Bmatrix} 1.7157 \\ -0.2379 \end{Bmatrix} \text{ kg} \quad (4.23)$$

Modal katkı faktörü i. Mod için aşağıda bulunan (4.24) şeklinde hesaplanır.

$$\Gamma_i = \frac{L_i}{M_{ii}} \quad (4.24)$$

Buradan aşağıda bulunan ifade olan (4.25) hesaplanır.

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} 1.7157 \\ -0.2379 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Buradan aşağıda bulunan ifade ile efektif modal kütle değeri (4.26) ile hesaplanır.

$$m_{eff(i)} = \frac{L_i^2}{M_{ii}} \quad (4.26)$$

Buradan ilk mod için ifade aşağıda ki (4.27)'de hesaplandığı gibi olacaktır.

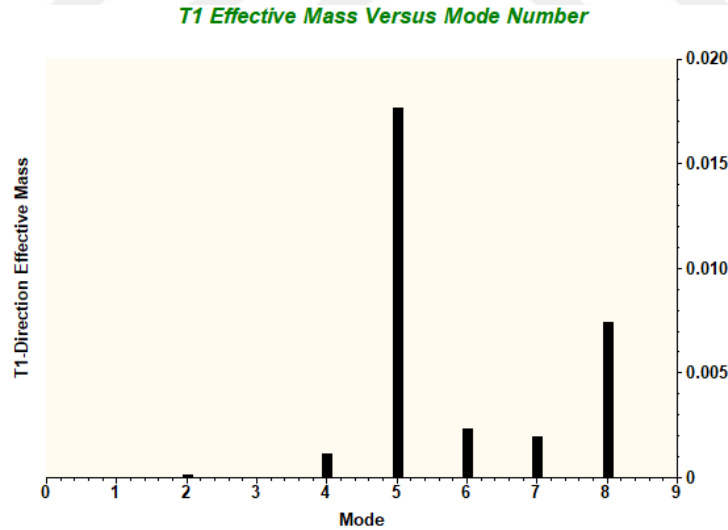
$$m_{eff(1)} = \frac{1.7157^2}{1} = 2.944 \text{ kg} \quad (4.27)$$

İkinci mod için aşağıda (4.28)'de görüldüğü gibi olacaktır.

$$m_{eff(2)} = \frac{(-0.2379)^2}{1} = 0.056 \text{ kg} \quad (4.28)$$

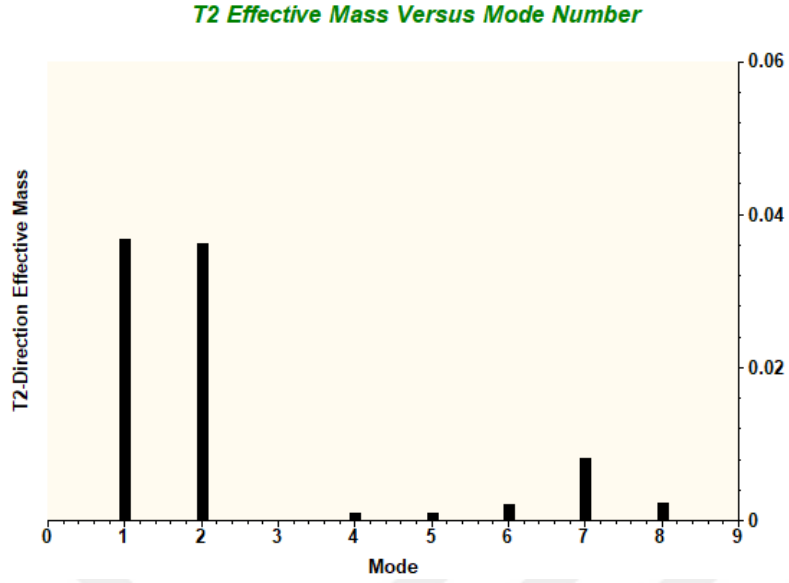
Dikkat edilirse efektif kütlelerin toplamı sistemin toplam kütesini vermektedir. Bu durum (4.29) ile gösterilmektedir.

$$m_{eff(1)} + m_{eff(2)} = 2.944 + 0.056 = 3 \text{ kg} \quad (4.29)$$



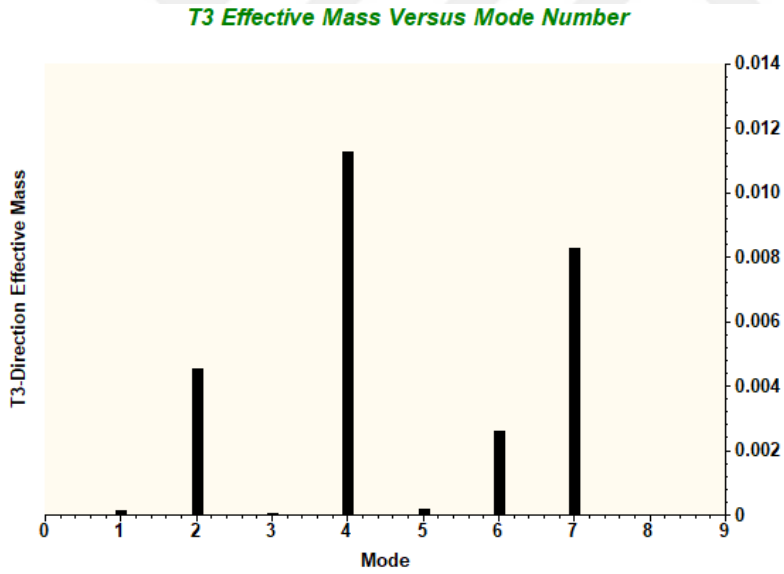
Şekil 4.35 X yönü Mod Şekli Efektif kütle grafiği.

Şekil 4.21'de görüleceği üzere X yönünde en çok kütlelerin yer değiştirmesine katkı sağlayan mod şekilleri 5. Ve 8. Mod şekilleridir. Buradan anlam olarak şunu düşünülebilir. 8. Mod şekli çalışma frekansının dışındadır. Ancak, 5. Mod şekli çalışma frekansının içindedir. Bu nedenle modeli X yönünde yer değiştirmeye en çok zorlayacak Mod durumu 426 Hz ile 5. Mod şeklidir.



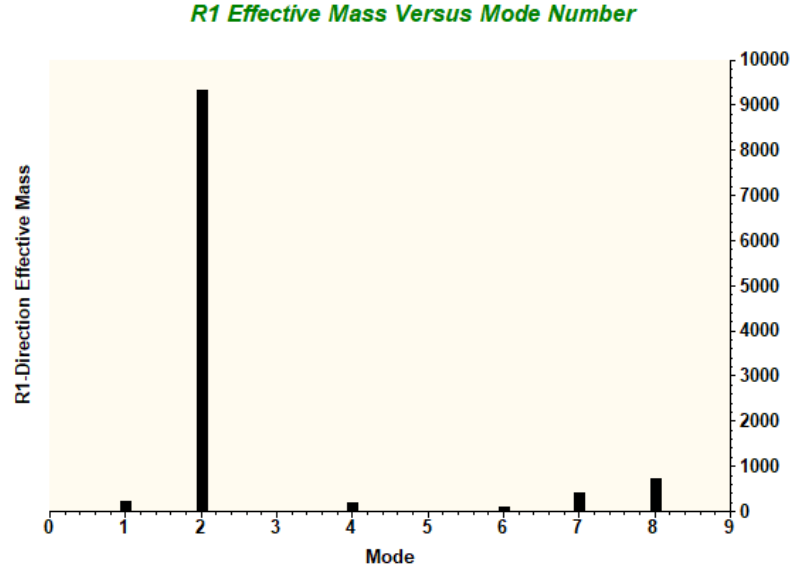
Şekil 4.36 Y yönü efektif kütle ve mod numarası grafiği.

Şekil 4.22'ye bakıldığında 1. Modun ve 2. Modun en çok katkısı sağladığını Y yönünde yer değiştirme için görülmektedir



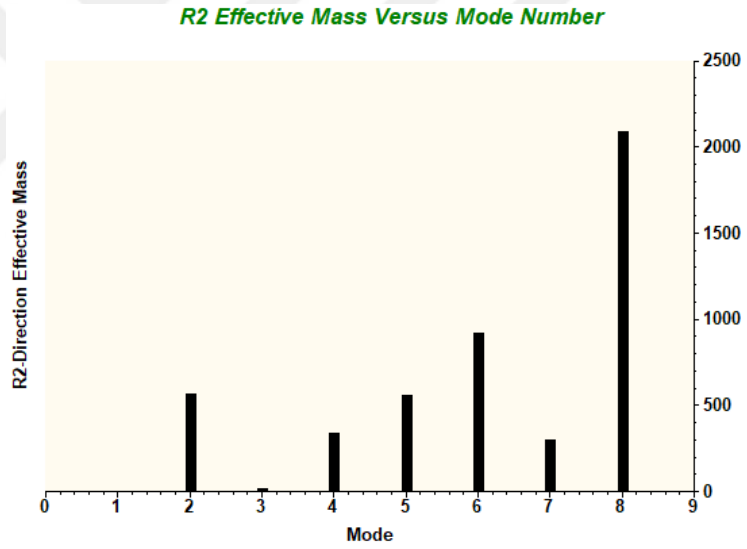
Şekil 4.37 Z yönü efektif kütle ve mod numarası grafiği.

Z yönünde ise 2.,4. ve 7. Mod durumlarının en çok katkısı sağladığı görülmektedir.



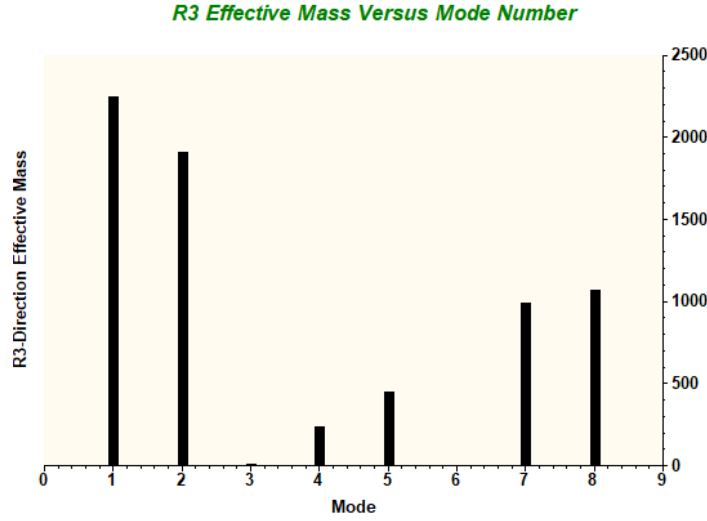
Şekil 4.38 X yönü dönme ve mod numarası grafiği.

Şekil 4.24 üzerinden görüleceği üzere Mod 2 X yönünde en çok dönmeye katkı sağlayan mod durumudur.



Şekil 4.39 Y yönü dönme ve mod numarası grafiği.

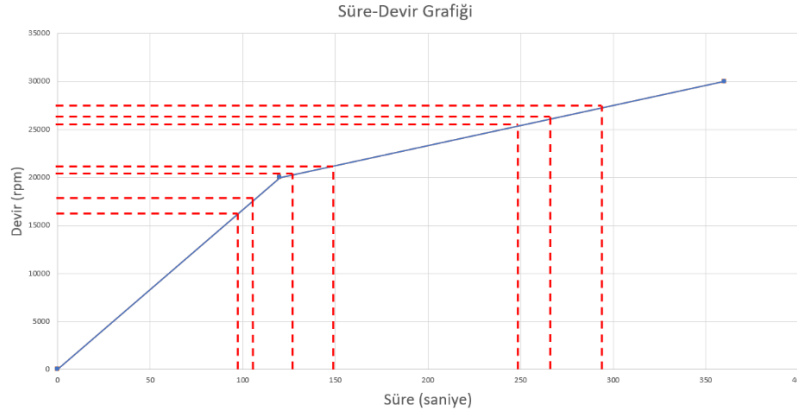
Şekil 4.25 üzerinden görüleceği üzere Y yönünde dönme hareketine en çok katkı sağlayan modlar 8.,6. ve 2. Modlarıdır. Sistem bu modlara girdiğinde Y yönünde dönme hareketi yapmaya çalışacaktır.



Şekil 4.40 Z yönü dönme hareketi ve mod numarası grafiği.

4.4 Değerlendirme

Sonuçlar incelendiğinde çalışma frekansları ile model doğal frekanslarının çakıştığı görülmektedir. Bunları devir grafiği üzerinde işaretlendiğinde aşağıda ki gibi bir durum ortaya çıkacaktır.



Şekil 4.41 Süre-Devir grafiği.

Grafik 4.3'den görüleceği üzere 15000 devir/dk değerine kadar modelin rezonans riski bulunmamaktadır. Ancak o değer aşıldıktan sonra model sürekli rezonans frekansları arasında hareket edecektir. Bazı frekans değerlerinin birbirine yakın olması modelin devrinin arttıkça titreşimin devam edeceğini göstermektedir. Bu durumun aşılması için 15000 d/dk değerine gelmeden devir direk doğal frekansların olmadığı bölgeye atlayabilir. Bu da değer olarak 22000 d/dk tekabül eder. Sonrasında 25000 d/dk kadar ilerledikten sonra 28000 d/dk değerine geçebilir. Bu sayede model rezonans bölgesinde hareket etmemiş olacaktır. Ancak bir diğer öneri olarak modelin doğal frekanslarının 500 Hz üzerine itilmesi düşünülebilir. Bunun içinde modelin rijitliğinin

arttırılması gerekecektir. Bütün bu tavsiyelerin temel amacı sistemin rezonansa girmesini önlemek içindir. Bu konuda Kelly yapılar için rezonans tehlikesini şöyle açıklamaktadır:

Rezonans mekanik ve yapısal sistemlerde istenmeyen büyük yer değiştirmeler ortaya çıkartır ve bunlarda hasara neden olur. Rezonanstan dolayı olan burulma titreşimleri ünlü Tacoma Köprüsünün çökmesinin sebebidir. (Kelly, 2011, s210)



Şekil 4.42 Tacoma köprüsü yıkılışı.

Şekil 4.27 Köprüler için Rezonans durumu söz konusu olduğunda ne olacağının güzel bir örneğidir. Benzer hasarlar makineler içinde aynı şekilde söz konusu olur.



5. DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Endüstriyel Makine dönen bir rotora bağlı olarak hareket ettiğinden dolayı yapı üzerinde harmonik titreşimler söz konusu olacaktır. Bu harmonik titreşimlerin yapıya nasıl bir zarar vereceğinin incelenmesi için doğal frekansların bulunmasından sonra harmonik analiz yapılmıştır. Bunun içinde yine Inventor Nastran yazılımı kullanılmıştır. Bir önceki bölümde kurgulanan model üzerinden analiz ayarları, sönüm değerleri ve yükleme işlemleri yapılmıştır.

5.1 Dinamik Analiz

Frekans cevap analizi için aşağıda bulunan denklem (5.1) kullanılmaktadır.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [B]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (5.1)$$

Bu denklem tüm dinamik analiz tipleri için SEM çözücüsü Autodesk Nastrannın çözdüğü denklemdir. Ancak yükleme periyodik olduğu için (5.2)'ye dönüşür.

$$\{F\} = \{P(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (5.2)$$

Bu çözümün neticesinde aşağıda bulunan çözüm (5.3) elde edilecektir.

$$x = \{u(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (5.3)$$

Burada $u(\omega)$ karmaşık yer değiştirme vektörünü gösterir. Hız ve ivme değerleri (5.4) ve (5.5)'de görüldüğü gibi olacaktır.

$$\dot{x} = i\omega\{u(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (5.4)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2\{u(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (5.5)$$

Denklemleri yerine koyduğumuzda aşağıda bulunan denklem (5.6) elde edilir.

$$[-\omega^2 M + i\omega B + K]\{u(\omega)\} = \{P(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (5.6)$$

Burada frekans değeri sabittir. Bu nedenle çözüm karmaşık bir yer değiştirme vektörünü her seçilen frekans değeri için gösterir.

5.2 Tanımlamalar

Harmonik Analizin yapılabilmesi için aşağıda paylaşılmış olan tanımlamaların yapılması gereklidir.

5.2.1 Sönüm

Bölüm 5.1’de ifade edilen denklemin önemli bir parçası sönümdür. Autodesk Nastrannın kullandığı genel sönüm denklemi aşağıda ki (5.7)’de görüldüğü gibidir.

$$[B] = CB1 * \left([B^1] + \frac{iG}{W_3} [K] + \frac{i1}{W_4} \sum G_E [K_E] \right) + CB2 * [B^2] + \alpha [M] + \beta [K] \quad (5.7)$$

Bu farklı terimler için farklı çeşit sönümlerin eklenmesini sağlar.

$[B^1]$: Sönüm Elemanı

CB1: Ölçek faktörü sönüm elemanı için

$[B^2]$: B2PP direk girdi matrisi

CB2: Ölçek faktörü direk girdi matrisi için

G: Genel yapısal sönüm katsayısı

W_3 : Tüm yapıda sönüm için ilgilenilen frekans değeri

$[K]$: Genel Katılım Matrisi

G_E : Farklı Malzemeler için Yapısal Sönüm Katsayıları

W_4 : Eleman tabanlı ilgilenilen frekans değeri

$[K_E]$: G_E tanımlanan malzemeler için Eleman katılık matrisleri

α : Kütle oran katsayısı Rayleigh Sönümü

β : Katılım Oran Katsayısı Rayleigh Sönümü

Bu yapılan analiz tipinde kompleks bir sönüm tanımlaması yapılabilir. Ancak tanımlama Modal sönüm katsayısı ile yapılmıştır. Modal sönüm her bir mod değeri için değişen sönüm katsayıları tanımlamaya imkan sağlamaktadır ancak burada tüm modlar için sönüm değeri %5 olarak tanımlanmıştır.

Sönüm kavramı daha önce iredelenmişti. Bu nedenle bu kısımda sadece tanımlama olarak ne yapıldığına değinilecektir.

Şekil 5.1 Modal sönüm tanımlaması.

5.2.2 Yükleme

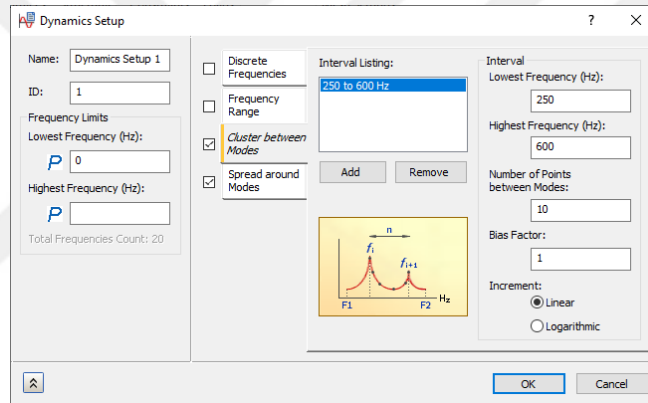
Yükleme olarak rotorun döndürdüğü iş parçasının bağlandığı yuvalara ivmelenme değeri verilmiştir. Bu ivmelenme doğru hesaplınsın diye rijit bağlantı kurularak o kısma verilmiştir.

Şekil 5.2 Yükleme detayları.

Şekil 5.2’de görüleceği üzere X yönünde ve Y yönünde pozitif yönlü 386.4 mm/sn^2 olarak değerler girilebilir. Bu değerler 0.04 g yer çekimi ivmelenmesine tekabül etmektedir. Bu koşullar altında durumu incelenecektir. Harmonik Analizin yaklaşımı modeli tüm zaman adımlaması boyunca analizini yapmak değil sadece ilgili doğal frekanslar için hesaplamaların yapılmasını sağlar. Bu da rezonans frekanslarında elde edilebilecek maximum cevapları sağlamaktadır. Bu cevaplara göre model incelenerek olabilecek zararlı durumlar algılanmaya çalışılmaktadır.

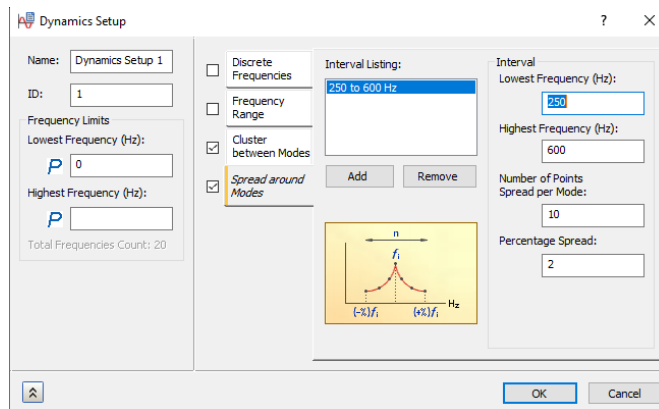
5.2.3 Frekans aralıklarının tanımlanması

Modelin hangi frekans aralığını çözdüğü ve ne kadar hassas çözeceği bu Dinamik Ayarlar vasıtası ile tanımlanmaktadır.



Şekil 5.3 Modlar arası noktalar kümesinin tanımlanması.

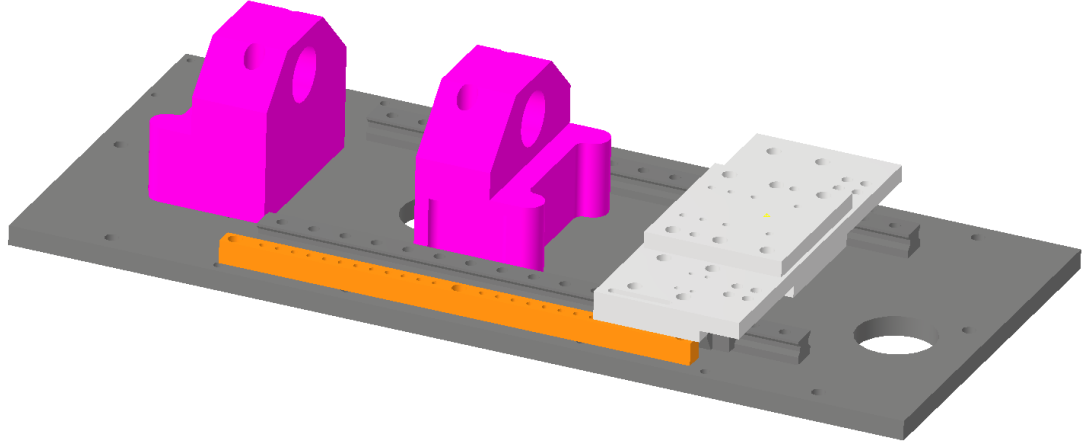
İlgilendiğimiz alan doğal frekansların alanıdır. Bu nedenle en düşük ve en büyük frekans değerleri frekans analizi sonucuna göre girilmiştir.



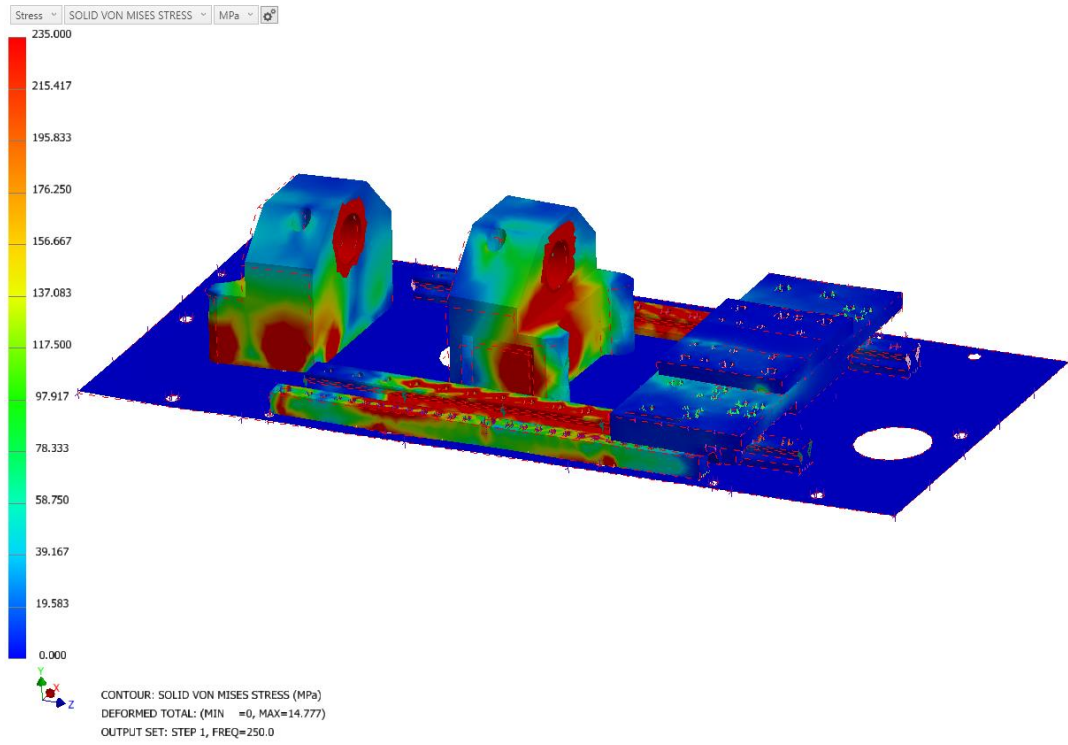
Şekil 5.4 Mod civarı noktalar kümesi.

5.3 Sonuçlar

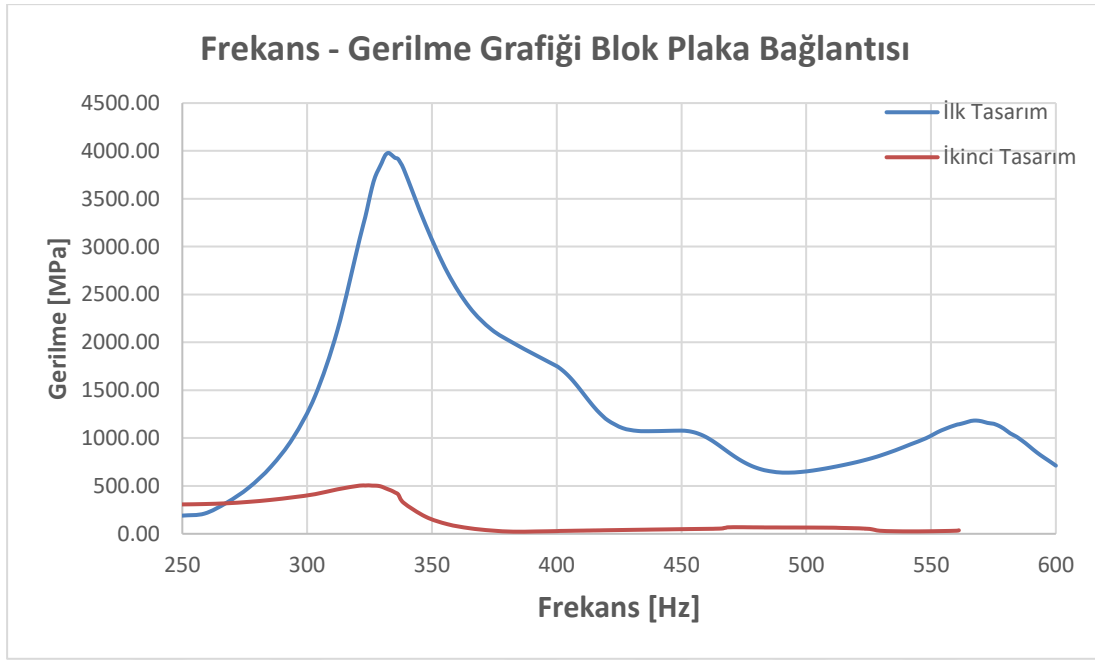
Model üzerinde sorunlu olan bölgelerin birisi olan blokların rijitliği arttırılmaya çalışıldı ayrıca alt plaka kalınlığı 25 mm'den 30 mm çıkartıldı.



şekil 5.5 Geliştirilmiş hal.

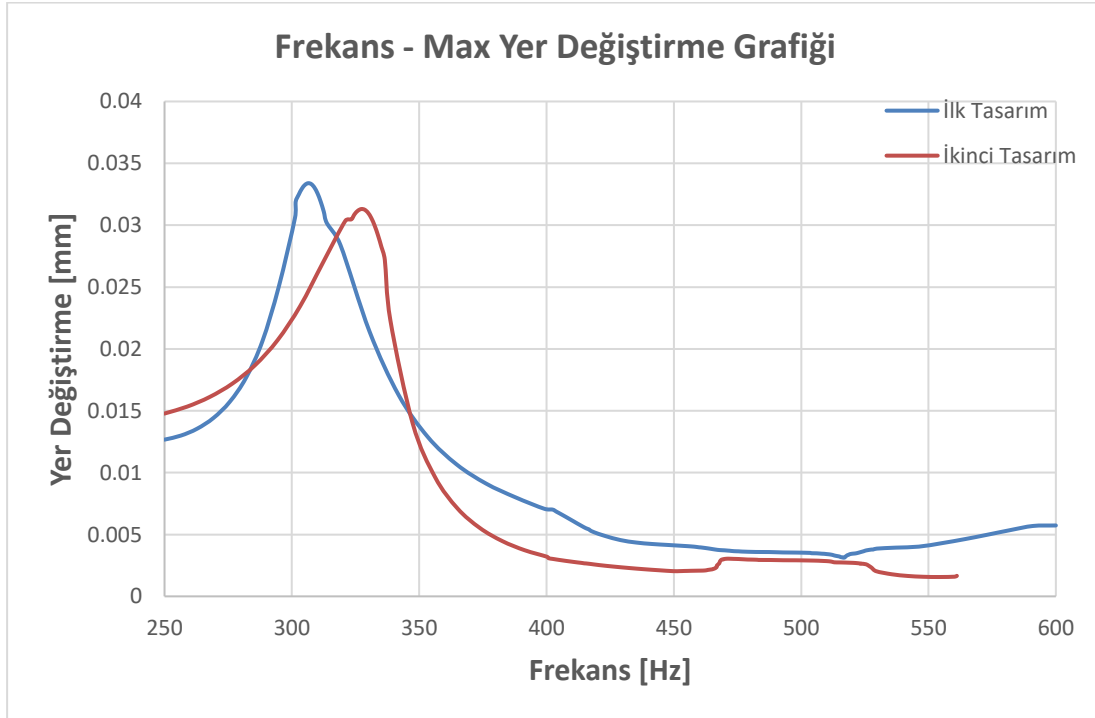


şekil 5.6 Gerilme durumu geliştirilmiş hal.



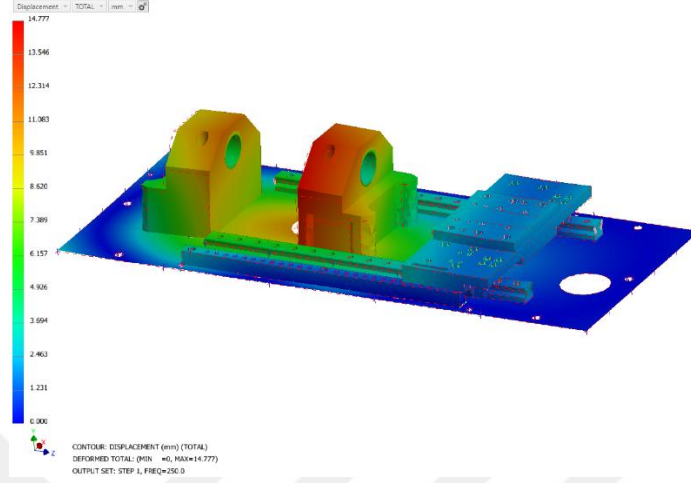
Şekil 5.7 Blok alt noktası gerilme ölçümü ilk durum ve ikinci durum.

Grafik 5.1’den görüleceği üzere yapılan geliştirmeler blok bileşeninde gerilmenin azalmasını sağlamıştır. Ancak bu malzemenin akma gerilmesinin 235 MPa olduğu göz önünde bulunulursa değerler oldukça yüksektir. Hatta bu durum için doğrusallık önemini kaybetmiştir.



Şekil 5.8 Frekans model maximum yer değiştirme grafiği.

Grafik 5.2 üzerinden görüleceği üzere iyileştirmeler yer değiştirmeleri kısmen azaltmıştır. Ancak dikkat edilirse frekans aralığı olarak 300 Hz – 350 Hz aralığı tehlikeli görünmektedir.



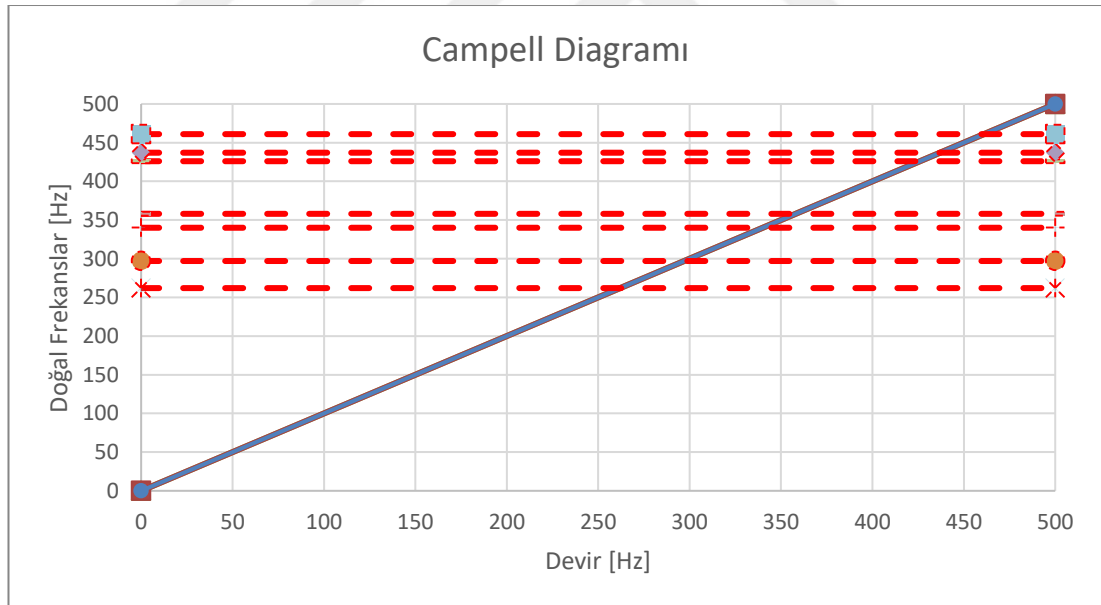
Şekil 5.9 Yer değiştirme renkli grafiği mm birimi.

Şekil 5.7 bize yer değiştirmenin blok civarında olduğunu göstermektedir. O halde yorum olarak çalışma sırasında bu bloğun ciddi zarar göreceğini hatta ve hatta yüksek gerilmelere maruz kaldığı için kopabileceğini ifade etmek yanlış olmayacaktır.

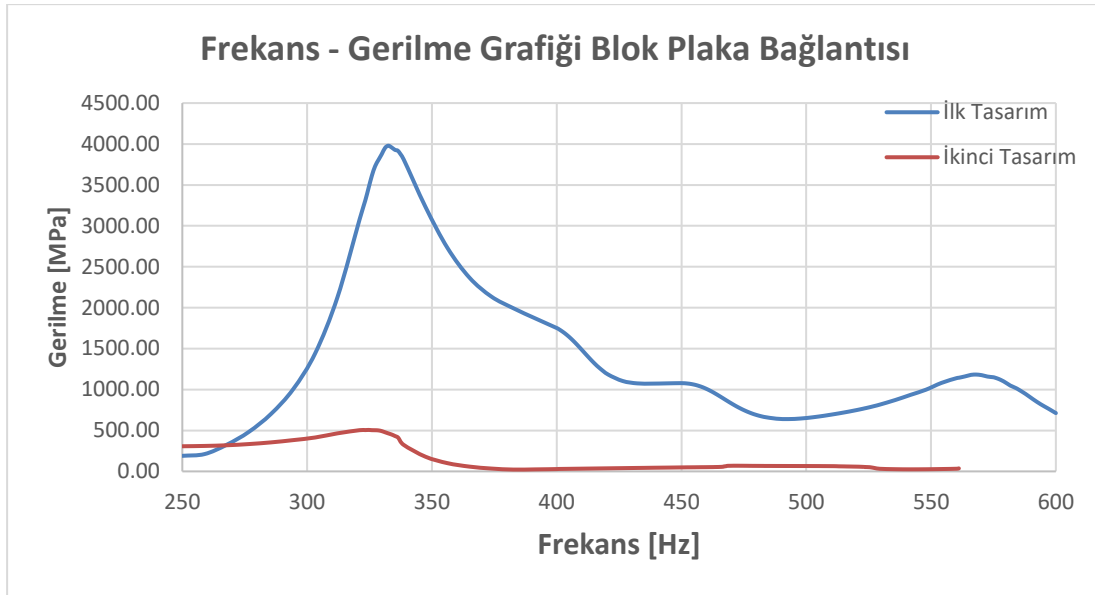


6. SONUÇ

Sonuçlar incelendiğinde modelin bu yüklemelere karşı dayanıksız olduğu ve 300 Hz – 330 Hz aralığında rezonansa girdiğinde ciddi yer değiştirmelere maruz kalacağını ve akma gerilmesinin daha fazla gerilme ortaya çıkacağını göstermektedir. Bu nedenle sistemin güvensiz olduğu ve hatta yapılan minor iyileştirmelerin bile yetersiz olduğu görülmektedir. Bu nedenle tüm modelin konseptinin tekrar kurgulanması ve hatta titreşim yüklemelerine daha dayanıklı olması için tüm modelin frekans değerlerinin 500 Hz üzerine itilecek şekilde tasarımının düşünülmesinde sağlıklı bir çalışma için zaruret vardır. Bunun daha net biçimde Campell Diagramı içinde görebiliriz.

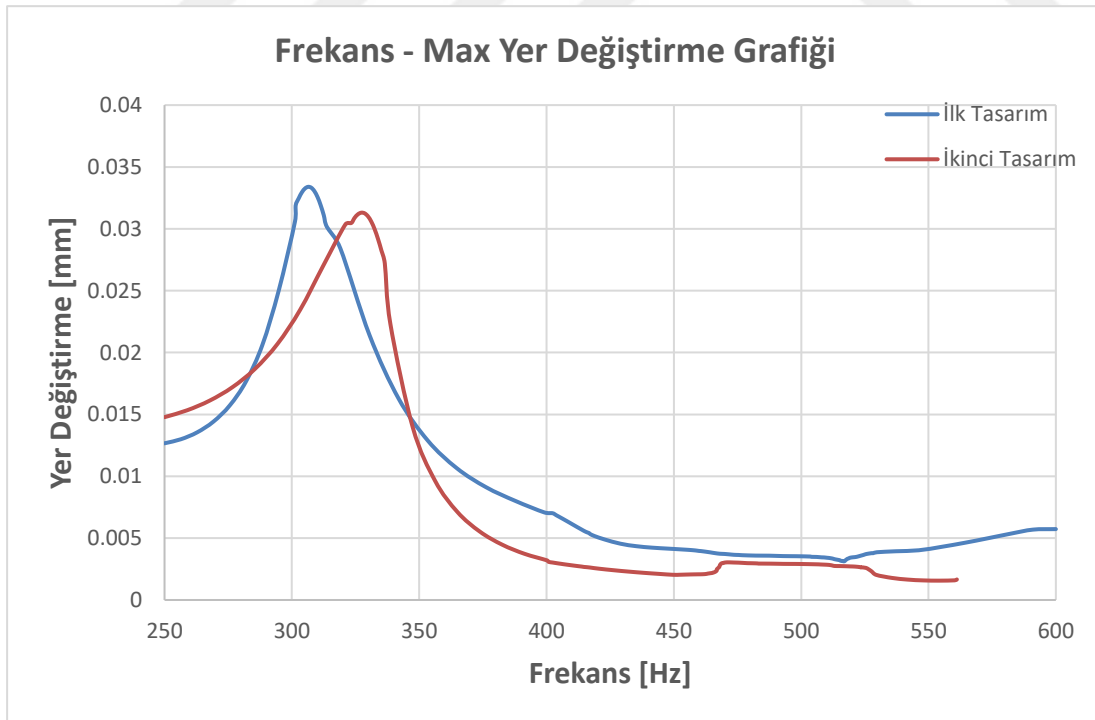


Şekil 6.1 Campell diagramı.



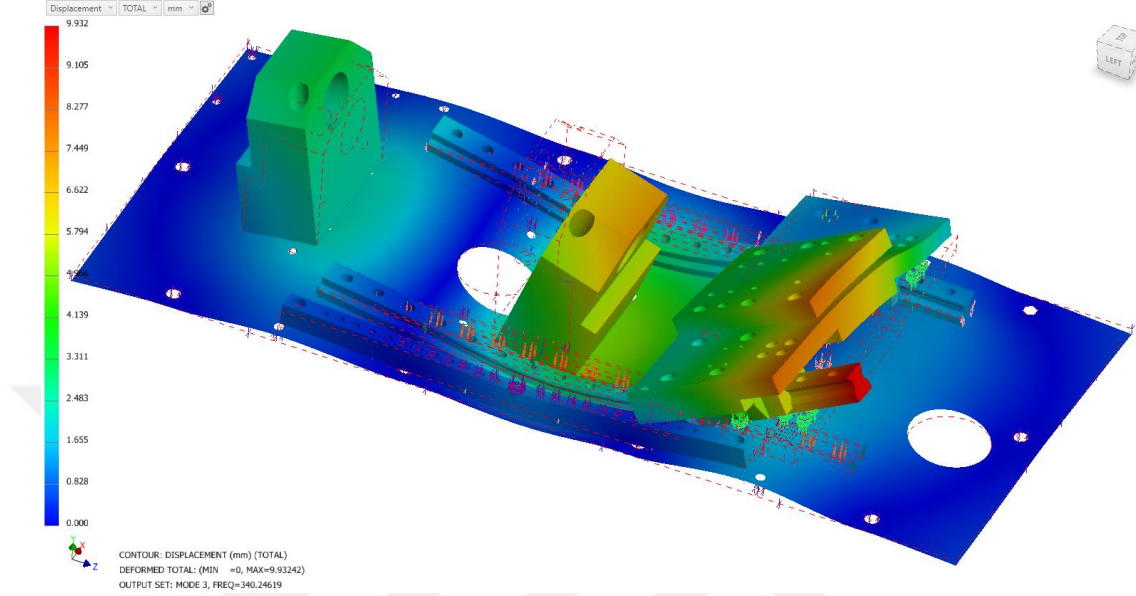
Şekil 6.2 Frekans gerilme grafiği.

Grafik 6.1 ve 6.2'ye baktığımızda 340 Hz devir'e ulaşıldığında sistemin ciddi anlamda gerilmelere maruz kaldığı ortaya çıkmaktadır. Yapılan iyileştirmeler bu yüksek gerilme değerini azaltmış ancak akma gerilmesinin yinede aşılmasına engel olunamamıştır. 1.Bölüm içinde açıklandığı gibi burada yapılması gereken en uygun tasarım kararı sistemin doğal frekanslarını devir ile çakışmayacak hale getirmektir.



Şekil 6.3 Frekans Max yer değiştirme grafiği.

Grafik 6.3 aksine yapılan iyileştirmeler gerilme değerlerini azaltmışken yer değiştirme değerlerini gerilmede olduğu gibi radikal oranda azaltmamıştır. Bu aslında sonlu elemanlar analizinde beklenen bir durumdur. Gerilme değerlerinde yer değiştirme değerlerinden daha dramatik değişimler söz konusu olabilmektedir.



Şekil 6.4 340 Hz mod şekli.

Şekil 6.1’de 340 Hz doğal frekans değerinin nasıl bir titreşime sistemi maruz bırakacağı görülebilir. Yüksek gerilmeler modelin bu moda girdiğinde işlevini kaybetmesine neden olacaktır.

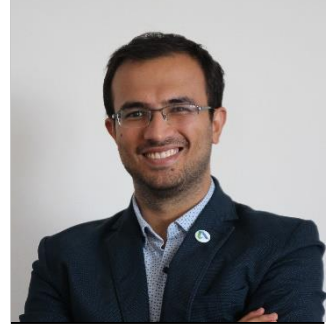


KAYNAKLAR

- Belytschko T. ve Fish J.**, (2007). A First course in Finite Element Analysis, 1st Edition, John Wiley & Sons, 2007
- Benaroya H., Nagurka M. and Han S.** (2017). Mechanical Vibration Analysis, Uncertainties and Control, 4th Edition, CRC Press, 2017
- Brandt A.** (2010). Noise and Vibration Analysis, Signal Analysis and Experimentally Procedure, 1st Edition, John Wiley & Sons, 2010
- Damping** (t.y.). Erişim: 7 Kasım 2019, <https://help.autodesk.com/view/NINCAD/2020/ENU/?guid=GUID-A95DA0DE-C497-450F-B6AC-0C92F6E5DAEC>
- Finite Element vs Finite Volume.** (t.y.). Erişim: 31 Ekim 2019, <http://help.autodesk.com/view/SCDSE/2019/ENU/?guid=GUID-12A9AED8-2047-4D3A-BC80-82BE9CF47517>
- Gerardin M. and Rixen D.J.** (2015). Mechanical Vibration Theory and Application to Structural Dynamics, 3rd Edition, John Wiley & Sons, 2015
- Harari, Y. N.** (2012). Hayvanlardan Tanrılara Sapiens, 52. Baskı, Kollektif Kitap Bilişim ve Tasarım Ltd., 2015
- Hibbeler R.C.**, (2014). Mechanics of Materials, 9th Edition, Pearson Printice Hall, 2014
- Hutton D. V.** (2004). Fundamentals of Finite Element Analysis, 1st Edition, McGraw Hill Companies Inc, 2004
- Johanson, R.** (2016). Introduction to Scientific Computing in Python, 2016
- Kelly S. G.** (2011). Mechanical Vibration Theory and Application, 1st Edition, Cengage Learning, 2011
- Kim N. H.**, (2015) Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, 1st Edition, Springer, 2015
- Koutromanos I.**, (2018). Fundamentals of Finite Element Analysis Linear Finite Element Analysis, 1st Edition, John Wiley & Sons, 2018
- Liang Z. and Lee G. C** (2015). An Introduction to Random Vibration Spectral & Wavelet Analysis, 1st Edition, CRC Press, 2015
- Liu Y and Chen X.** (2014). Finite Element Simulation Ansys Workbench, First Edition, CRC Press, 2014
- Modal Frequency Response of a Bracket** (t.y.). Erişim: 7 Kasım 2019, <https://help.autodesk.com/view/NINCAD/2020/ENU/?guid=GUID-12006DFC-688C-4D4C-98BD-71042D6B1AF4>
- Moukalled F., Mangani L. ve Darwish M.** (2016). The finite volume method in computational fluid dynamics an advanced introduction with OpenFOAM® and Matlab, 1st Edition, Springer International Publishing, 2016
- Newland D. E.** (2015). An Introduction to Random Vibration Spectral & Wavelet Analysis, 3rd Edition, Dover Publications, 2015

- Normal Modes Analysis of Propoller.** (t.y.) Erişim: 5 Kasım 2019, <https://help.autodesk.com/view/NINCAD/2020/ENU/?guid=GUID-BFB34D53-8CE0-4120-A822-7F491F8FB783>
- Özişik M. N., Orlande H. R. B, Colaço M. J. and Cotta R. M.** (2017). Finite Difference Methods in Heat Transfer, 2nd Edition, CRC Press, 2017
- Reddy J. N.** (2015). An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics, 2nd Edition, Oxford University Press, 2015
- Reese, S.** (2019). Üretimsel Tasarımın Abartıldığını mı düşünüyorsunuz? Bu örnekler fikrinizi değiştirebilir. Fikrinizi Değıştirebilir, 2019, from <https://www.autodesk.com.tr/redshift/uretimsel-tasarim-ornekleri/>
- Shabana A.** (2019). Theory of Vibration and Introduction, 3rd Edition, Springer, 2019
- Shih, Randy H.** (2019). Autodesk Inventor 2019 and Engineering Graphics, First Edition, SDC Publications, 2018
- Subbiah R. and Littleton J. E.** (2017). Rotor and Structural Dynamics of Turbomachinery a practical guide for engineers and scientists, 1st Edition, Springer, 2017
- Thomson W. T.** (2010). Theory of Vibration with Application, 4th Edition, Taylor & Francis, 2010
- Tucker, B. A.** (2004). Computer Science Handbook, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, 2004
- Turhan Ö.** (2016). Makina Teorisi Mekanizmalar ve Makina Dinamiğı, 3rd Edition, Nobel Yayınları, 2016
- Turhan Ö.** (2017). Mekanik Titreşimler-1 Ayırık Lineer Sistemler, 1st Edition, Nobel Yayınları, 2017
- Vollan A. and Komszik L** (2012). Computational Techniques of Rotor Dynamics with Finite Element, 1st Edition, CRC Press, 2012
- Wang H. ve Qin Q.H.,** (2008). MATLAB and C Programming for Trefftz Finite Element Methods, 1st Edition, CRC Press, 2008
- Zienkiewicz O. C., Taylor L. R. and Zhu J. S.** (1967). The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, 6th Edition, Elsevier, 2005

ÖZGEÇMİŞ



Ad-Soyad : Timuçin Ersin Taşdemir
Doğum Tarihi ve Yeri : 15.08.1989
E-posta : timucinersintasdemir@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2013, Yıldız Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Ana Bilim Dalı, Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2013 – 2015 yılları arasında bir tasarım yazılımının Türkiye mümessilinde Tam zamanlı Uygulama Mühendisi olarak çalıştı
- 2013 – 2015 yılları arasında Yarı zamanlı olarak Mühendislik Hesaplamaları Eğitimi verdi
- 2015 - ... Bir yazılım geliştirme firmasının Türkiye ofisinde Teknik Yönetici olarak çalışmaktadır.
- 2015 – 2019 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesinde Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı Makine Akustiği, Titreşimi ve Dinamiği Programında Yüksek Lisans Eğitimi aldı
- 2019 - ... Münih Teknik Üniversitesinden Yalın altı sigma eğitimi almaktadır.