

**T.C.
HİTİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİRİNCİ MERTEBEDEN q -DİFERANSİYEL
DENKLEMLER**

Çağlar AKTÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**TEZ DANIŞMANI
Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT**

HAZİRAN 2019

ÇORUM

BİRİNCİ MERTEBEDEN q -DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Çağlar AKTÜRK

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Yüksek Lisans Tezi

**TEZ DANIŞMANI
Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT**

Çorum 2019

Çağlar Aktürk tarafından hazırlanan “Birinci Mertebeden q-diferansiyel Denklemler” adlı tez çalışması 21/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Hitit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL



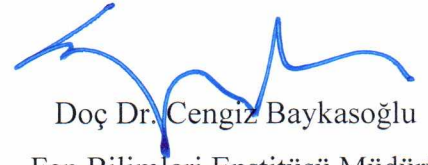
Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT



Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALTUNDAĞ



Hitit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 12/07/2019. tarihli ve 2019/146. sayılı kararı ile Çağlar AKTÜRK’ün Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.



Doç Dr. Cengiz Baykasoğlu
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.


Çağlar AKTÜRK

BİRİNCİ DERECEDE q -DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Çağlar AKTÜRK

HİTİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2019

ÖZET

Bu tezde, Hilbert uzayında alınan birinci mertebeden sabit ve değişken katsayılı q -diferansiyel denklemlerin homojen ve homojen olmayan kısımlarının çözümleri incelenmiş, daha sonra ise elde edilen bulguların analizde alınan sonuçlarla örtüşüp örtüşmediği araştırılmıştır.

Birinci bölümde analiz ve q -analizin kısa bir tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde diferansiyel denklemler, operatör teorisi ve q -analizin temel kavramları ve sonuçları özetlenmiştir. Üçüncü bölümde ise yukarıda söz edilen problemler incelenmiştir. Ayrıca tezde alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: q -Türev, q -Analiz, Diferansiyel Denklemler

q-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER

Çağlar AKTÜRK

HİTİT UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June2019

ABSTRACT

In this thesis, the solutions of homogeneous and non-homogeneous parts of the first order q -differential equations with constant and variable coefficient have been investigated in Hilbert space. Then the results have been compared with the results already known in classical analysis.

In the first chapter, a brief history of analysis and q -analysis is given. In the second chapter, the basic concepts and well known results of differential equations, operator theory and q -analysis which we need have been recalled. In the third chapter, the problems mentioned above have been investigated. Moreover, all results in this thesis have been supported with examples.

Keywords: q -Derivative, q -Analysis, Differential Equations.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama aşamasında yardımını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, sabrı, hoşgörüsü ve ilmiyle yol gösteren, insani değerleriyle her olumsuzlukta yanımda olan, kendisi ile çalışmaktan ve yanında bulunmaktan onur duyduğum değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT'e; eğitim sürecimde bana yardımcı olan Matematik Bölümü'ndeki bütün hocalarıma; her anımda yanımda olan sevgili eşime, canım çocuklarım Ömer Asaf ve Mehmet Asım'a, özellikle de bugünlere gelmemi sağlayan anneme, babama ve kardeşime teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI VE KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1 Kaynak Araştırması.....	3
2.1 Kuramsal Temeller	3
3. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR	17
3.1 D_q Operatörünün İncelenmesi.....	18
3.2 $D_{q^{-1}}$ Operatörünün İncelenmesi	40
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA	66
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	71
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	75

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$B(X)$	: X lineer normlu uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
$L^2(a, b)$	: $[a, b]$ üzerinde tanımlı kompleks değerli fonksiyonların Hilbert uzayı
$L_q^2(a, b)$	: q -Analizde $[a, b]$ üzerinde tanımlı kompleks değerli fonksiyonların Hilbert uzayı
A^*	: A operatörünün eşleniği
$\rho(A)$	: A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	: A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	: A operatörünün ayırık spektrumu
$\sigma_c(A)$	: A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	: A operatörünün kalan spektrumu
$d_q f$	: f fonksiyonunun q -diferansiyeli
$D_q f$	: f fonksiyonunun q -türevi
$D_{q^{-1}} f$	: f fonksiyonunun q^{-1} -türevi
$[n]_q$	: n 'nin q benzeri
$[n]_{q^{-1}}$	: n 'nin q^{-1} benzeri
$[n]_q!$	: n 'nin q benzerinin faktöriyeli
u_q	: Diferansiyel denklemin q -çözümü
e_q^x	: Exponansiyel fonksiyonun q benzeri
E_q^x	: Exponansiyel fonksiyonun q^{-1} benzeri

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler; matematik ve mühendislik biliminin geniş bir alanını oluşturur. Birçok fiziksel olay ve bu olayların çözümü bir diferansiyel denkleme indirgenebilir.

Ayrıca spektral teori, modern analizin ana konularından biridir. Matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında operatörlerin spektral teorisi geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra lineer özeşlenik operatörler teorisi hızlı bir şekilde gelişmeye başlamıştır. 19. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler incelenmiş ve daha sonra birinci mertebeden iki denklem sistemi üzerinde çalışılmıştır.

Birinci mertebeden diferansiyel operatörler alanında İsmailov ve Öztürk Mert'in birçok çalışması bulunmaktadır. Katsayıların özeşlenik ve normal operatörler olduğu durumda alınan diferansiyel operatör ifadelerinin doğurduğu minimal operatörlerin tüm özeşlenik genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiştir. Ayrıca; incelenen diferansiyel ifadelerin spektral yapıları irdelenmiştir. Burada görülmüştür ki çok az sayıda sonuç bulunan birinci mertebede alınan sonuçlar son derece önem arz etmektedir. Katıhal fiziğinde, çok noktalı sınır değer problemlerinde, kuantum alan teorisinde ve kuantum mekaniği alanlarında birçok probleme çıkış noktası olmuştur.

Son zamanlarda klasik analiz kullanılarak elde edilebilen ve edilemeyen bazı sonuçlar q-analizde de çalışılmaya başlanmıştır. Ve bu sonuçların bazı durumlarda q-analizde daha iyi uygulama alanlarına sahip olduğu gösterilmiştir.

Matematik literatürüne Euler tarafından kazandırılan ve limitsiz türev olarak bilinen "Quantum Calculus"un geçmişi 1700'lü yıllara dayanmaktadır. Euler, Newton'un sonsuz serisinin giriş bölümünde " q " yu ilk kez tanıtmasıyla birlikte, içinde birçok gizemi ve güzelliği barındıran bir kıvılcım ortaya çıkmış oldu. Ancak düzenlenip sistemli bir şekilde geliştirilerek modern hale getirilmesi 1900'lü yıllara kadar dayanır.

q-Analiz dilinde türev ve integral teorisi 17. yüzyılda Newton ve Leibniz'in çalışmaları ile başladı.

Bilindiği üzere f fonksiyonunun x e göre türevi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

şeklinde tanımlanır. h yerine $(q-1)x$ alınarak bu formül alternatif olarak

$$f'(x) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

şeklinde yeni bir formüle dönüşür.

20. yüzyılın başlarında F.H. Jackson bu düzenlenmiş türev ve bunların sonuçları üzerinde çalışmıştır. $0 < q < 1$ için q -türev operatörünü

$$(D_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

olarak tanımlamış ve $q \rightarrow 1$ için bilinen türeve denk olduğunu kanıtlamıştır.

Matematiğin kurbağa prensi olan ve değeri son zamanlarda daha çok anlaşılan q -analize gösterilen ilgi her geçen gün daha da artmaktadır. Özellikle uygulamalı bilimler ve mühendislik alanlarında q -analiz uygulamaları son derece önemlidir. q -Analiz son yarım asırda matematik ve fizik bilimleri arasında köprü görevini üstlenmiştir. Günümüzde q -analizin geniş ve kapsamlı bir uygulama alanı vardır. Kuantum teorisi, analitik sayı teorisi, kombinasyon, lineer cebir, sonlu geometri ve istatistiksel mekanik gibi uygulama alanlarının yanı sıra aynı zamanda bilgisayar bilimi ve parçacık fiziği gibi birçok alana da yayılmıştır. q -Analiz anlamında günümüzdeki çalışmaların çoğunun Sturm-Liouville problemi olduğu görülür. Bu alanda birçok çalışma olmasına rağmen birinci mertebeden elle tutulabilecek bir çalışma bulunmamaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI VE KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kaynak Araştırması

Diferansiyel denklemler alanında yapılan ilk çalışmalar 17. yüzyılda Newton ve Leibniz ile başlar. Sonraki dönemlerde Bernouilli kardeşler, Euler, Lagrange, Laplace, D'Alembert, Cauchy, Picard, ... vs gibi ünlü matematikçiler sayesinde bu teori bugünkü seviyesine kadar ilerlemiştir.

$L_2(H, (a, b))$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ Hilbert uzayında, birinci mertebeden diferansiyel denklemleri V.I. Gorbachuk ve M.L. Gorbachuk (1973) çalışmasında incelemiştir. Ismailov ise aynı Hilbert uzayında

$$l(u) = u'(t) + Au(t)$$

diferansiyel-operatör ifadesini ele almıştır. Ismailov (2006) çalışmasında bu incelenen ifadenin formal eşlenik olduğunu göstermiş ve minimal operatörü yaplandırmıştır. Ayrıca birinci mertebeden çok noktalı diferansiyel-operatör ifadelerinin incelenmesini de Ismailov ve Öztürk Mert (2012, 2013), Bairamov ve ark. (2012), Ismailov ve İpek (2016) çalışmalarında bulmak mümkündür.

q-Analiz konusunda ise Kac ve Cheung (2002), Ernst (2012) kitapları önemli kaynaklar arasında gösterilebilir. Bu alanda olan Annaby ve Mansour (2012), Allahverdiev ve Tuna (2017), Hira (2018) çalışmalarında ise Sturm-Liouville problemi üzerinde incelemeler yapmıştır. Son yıllarda ise oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olan bu konuda çalışmalar artmıştır.

2.2. Kuramsal Temeller

Bu bölümde, yapılacak çalışmanın temelini oluşturan analiz ve q-analizin bazı temel kavram ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.2.1. (Diferansiyel Denklem) (Eastham, 1970): $I \subset \mathbb{R}$, $x \in I$ ve $a_r(x)$, $0 \leq r \leq n$, $b(x)$ fonksiyonu I aralığında sürekli olmak üzere

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = b(x), \quad a_0 \neq 0 \quad (2.1)$$

n . mertebeden lineer diferansiyel denklemi düşünölsün.

Eğer;

- i. $b(x) = 0$ ise bu diferansiyel denkleme homojen
- ii. $b(x) \neq 0$ ise bu diferansiyel denkleme homojen olmayan

bir diferansiyel denklem denir. Ayrıca;

- i. $a_r(x) = a_r, 0 \leq r \leq n$ ve a_r ler sabit ise bu diferansiyel denkleme sabit katsayılı
- ii. $a_r(x)$ fonksiyonları I aralığında sürekli, x e bağlı birer fonksiyon ise bu diferansiyel denkleme değişken katsayılı

diferansiyel denklem denir.

(2.1) diferansiyel denklemi

$$L(D)y(x) = b(x)$$

şeklinde bir $L(D)$ lineer diferansiyel operatörüyle gösterilebilir.

Bu çalışma boyunca q nun $0 < q < 1$ olan pozitif bir sayı olduğu ve I aralığı için $0 \in I$ olduğu varsayılacaktır.

Tanım 2.2.2. (q-Geometrik Küme) (Mansour, 2001): Eğer $A \subset \mathbb{R}$ kümesinde

$$\forall x \text{ için } x \in A \Rightarrow qx \in A$$

ise A kümesine q -geometrik küme denir.

Tanım 2.2.3. (q-Regüler) (Mansour, 2001): f fonksiyonu $A \subset \mathbb{R}$ q -geometrik küme üzerinde tanımlı ve $0 \in A$ olsun.

Eğer her $x \in A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(xq^n) = f(0)$$

ise f fonksiyonuna 0 da q -regülerdir denir.

Tanım 2.2.4. (Diferansiyel): $y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. dx diferansiyeli bağımsız bir değişken ve dy diferansiyeli

$$dy = f'(x)dx$$

şeklinde tanımlanır. dx bağımsız değişkeninin aksine dy daima bağımlı değişkendir. dy , hem x 'e hem de dx 'e bağımlıdır.

y 'nin x 'e göre türevini gösterirken bazen dy/dx Leibniz notasyonu kullanılır. Bu gösterim bir oran değildir; türevin olması durumunda tanımlanan dx ve dy değişkenlerinin oranları türeve eşit olur.

Eğer $dx \neq 0$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)dx}{dx} = f'(x)$$

olduğundan dy diferansiyelinin dx diferansiyeline bölümü $f'(x)$ türevine eşittir.

Bazen de $dy = f'(x)dx$ yerine

$$df = f'(x)dx$$

yazılır. Buradaki df 'e f 'nin diferansiyeli denir.

Tanım 2.2.5. (q-Diferansiyel) (Kac ve Cheung, 2002): Herhangi bir keyfi $f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

ifadesine q-diferansiyel denir.

İki fonksiyonun temel diferansiyel ve q-diferansiyel kuralları aşağıdaki gibidir:

Diferansiyel Kuralları:

- i. $d(f \pm g)(x) = df(x) \pm dg(x)$
- ii. $d(cf)(x) = cdf(x), \quad c \in \mathbb{R}$
- iii. $d(fg)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$
- iv. $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$

q-Diferansiyel Kuralları (Kac ve Cheung, 2002):

- i. $d_q(f(x) \pm g(x)) = d_q f(x) \pm d_q g(x)$
- ii. $d_q(cf(x)) = cd_q f(x), \quad c \in \mathbb{R}$
- iii. $d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x)$

$$\text{iv. } d_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)d_q f(x) - f(x)d_q g(x)}{g(x)g(qx)}, \quad g(x)g(qx) \neq 0$$

Tanım 2.2.6. (Türev): $f : E \subset \mathbb{R}$ fonksiyonunu alalım.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in E$$

ifadesi f fonksiyonunun a noktasındaki türevi diye adlandırılır.

Bu tanımdan yola çıkıp $h = x - a$ dönüşümü yapılarak

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad a+h, x \in E$$

şeklinde alternatif türev tanımı elde edilir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin gösterimine ait birçok notasyon bulunmaktadır; burada y bağımlı değişken, x bağımsız değişkendir. Sıkça kullanılan türev notasyonları

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.7. (q-Türev) (Kac ve Cheung, 2002): Bir fonksiyonun q -türevi $D_q f$ ile gösterilir ve $x \neq 0$ olmak üzere klasik analizdeki türev tanımına benzer olarak

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

şeklinde iki diferansiyelin oranı olarak tanımlanır.

q -türevin 1'e giderken limiti alınır normal türeğe eşit çıkar, yani

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

olduğu kolayca görülebilir.

1908 yılında ise Jackson q -türev operatörünü

$$D_q \varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(qx)}{(1-q)x}, \quad q \in \mathbb{C} - \{1\}$$

şeklinde yeniden düzenlemiştir (Ernst, 2000).

φ sürekli fonksiyonunun q -türev operatörü D_q

$$(D_q \varphi)(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(qx)}{(1-q)x}, & q \in \mathbb{C} - \{1\}, x \neq 0 \\ \frac{d\varphi}{dx}(x) & , q = 1 \\ \frac{d\varphi}{dx}(0) & , x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Ernst, 2012). Buradan

$$D_q^0 f := f, \quad D_q^n f := D_q(D_q^{n-1} f), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olduğu görülür (Koekoek ve Swarttouw, 1998).

İki fonksiyonun temel türev ve q-türev kuralları aşağıdaki gibidir

Türev Kuralları: u ile v , x değişkenine bağlı türevlenebilir fonksiyonlar ve c sabit bir sayı olsun.

- i. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
- ii. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
- iii. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
- iv. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \quad v(x) \neq 0$

q-Türev Kuralları (Kac ve Cheung, 2002):

- i. $D_q(\alpha f(x)) = \alpha D_q f(x)$
- ii. $D_q(f(x) \pm g(x)) = D_q f(x) \pm D_q g(x)$
- iii. $D_q(f(x)g(x)) = g(x)D_q f(x) + f(qx)D_q g(x) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x)$
- iv. $D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}, \quad g(x)g(qx) \neq 0$

Tanım 2.2.8. (q-Benzer) (Kac ve Cheung, 2002): $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ifadesine n 'in q-benzeri denir.

n 'in q-benzeri

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}$$

şeklinde ifade edilebilir. n 'in q^{-1} benzeri de

$$\begin{aligned} [n]_{q^{-1}} &= \frac{q^{-n} - 1}{q^{-1} - 1} \\ &= \frac{q^n - 1}{(q - 1)q^{n-1}} \\ &= \frac{1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}}{q^{n-1}} \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca; $|q| < 1$ için $[n]_q$ ifadesinin $n \rightarrow \infty$ limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.2.9. (Kac ve Cheung, 2002): $n!$ in q -benzeri

$$[n]_q! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ [1]_q [2]_q \dots [n]_q & , n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.10. (Kac ve Cheung, 2002): e^x exponansiyel fonksiyonunun q -benzeri

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!}$$

olarak tanımlanır. Exponansiyel fonksiyonun başka bir q -benzeri de

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]_q!}$$

şeklindedir.

Böylece tanımlanan exponansiyel fonksiyonların q -benzerleri arasında

$$e_q^x E_q^x = 1 \quad \text{ve} \quad e_{q^{-1}}^x = E_q^x$$

ilişkilerinin olduğu sonucuna varılır.

Bazı önemli fonksiyonların türevleri aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.1. : Eğer $a, b, n, t \in \mathbb{R}$, x^n ve x^{n-1} kuvvetleri tanımlı tüm x değerleri için,

- i. $Dx^n = nx^{n-1}$,
- ii. $D(x - a)^n = n(x - a)^{n-1}$
- iii. $D(ax + b)^n = an(ax + b)^{n-1}$

olur.

Teorem 2.2.2. (Kac ve Cheung, 2002): $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ için,

- i. $D_q x^n = [n]_q x^{n-1}$,
- ii. $D_q (x - a)_q^n = [n]_q (x - a)_q^{n-1}$,
- iii. $D_q (a - x)_q^n = -[n]_q (a - qx)_q^{n-1}$,
- iv. $D_q (ax + b)_q^n = a[n]_q (ax + b)_q^{n-1}$,
- v. $D_q (a + bx)_q^n = b[n]_q (a + bqx)_q^{n-1}$

olur.

Tanım 2.2.11. (Ernst, 2001): e_q^z exponansiyel fonksiyonunun q -türevi

$$D_q e_q^{az} = a e_q^{az}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca; E_q^z exponansiyel fonksiyonun q -türevi

$$D_q E_q^{az} = a E_q^{qaz}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.12. (İntegral): $[a, b]$ kapalı aralığında bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlansın. Verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için, $||P|| < \delta$ koşulunu sağlayan $[a, b]$ 'nin her $P = x_0, x_1, \dots, x_n$ bölünüşü ve c_k 'nin $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki her seçimi için

$$\left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k - J \right| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur.

J sayısı, f 'nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki belirli integrali ve $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ Riemann toplamalarının limitidir.

$$J = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Belirli integraldeki J sayısının sembolü

$$\int_a^b f(x) dx$$

a 'dan b 'ye kadar $f(x)dx$ integrali veya a 'dan b 'ye kadar $f(x)$ 'in x 'e göre belirli integrali olarak ifade edilir.

Eğer $n \rightarrow \infty$ iken Riemann toplamalarının limiti varsa ve J 'ye eşit ise J ,

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \left(\frac{b-a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

f 'nin $[a, b]$ aralığındaki belirli integralidir.

Tanım 2.2.13. (q-İntegral) (Ernst, 2001): Heine'nin öğrencisi olan Thomae, 1869 yılında sözde q-integrali

$$\int_0^1 f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n) q^n, \quad 0 < q < 1$$

olarak tanıttı.

1910 yılına gelindiğinde Jackson q-integralini

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t$$

şeklinde daha genel bir hale getirdi. Buradan da

$$\int_0^a f(t) d_q t = a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n) q^n, \quad 0 < q < 1$$

ifadesini elde etti.

Jackson, $[0, \infty]$ aralığında çalışarak

$$\int_0^{\infty} f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n) q^n, \quad 0 < q < 1$$

toplam yakınsaklığı ispatladı. Ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(q^n) + f(-q^n)] q^n, \quad 0 < q < 1$$

sonucuna ulaştı.

f fonksiyonunun sürekli olduğu $[0, x]$ aralığı üzerinde q-integralinin q-türevi,

$$\begin{aligned} D_q \left(\int_0^x f(t) d_q t \right) &= D_q \left(x(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(xq^n) q^n \right) \\ &= \frac{x(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(xq^n) q^n - x(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(xq^{n+1}) q^{n+1}}{x(1-q)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$D_q \left(\int_0^x f(t) d_q t \right) = f(x)$$

olup, integralin türevinin fonksiyona eşit olduğu sonucuna ulaşabilir. Buradan normal analizde olan

$$D \left(\int_0^x f(t) dt \right) = f(x)$$

sonucun örtüştüğü görülür.

Teorem 2.2.3. (Analizin Temel Teoremi): Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığındaki her noktada sürekli ve F , f 'nin $[a, b]$ üzerinde ters türevi ise,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

olur.

Teorem 2.2.4. (q-Analizin Temel Teoremi) (Kac ve Cheung, 2002): Eğer $D_q F(x) = f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a), \quad 0 \leq a < b < \infty$$

olur.

Tanım 2.2.14. (Sole ve Kac, 2005): $A > 0$ olmak üzere herhangi bir f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q-integrali

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_q x = (1 - q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right) \left(\frac{q^n}{A}\right)$$

dır.

Teorem 2.2.5. (Sole ve Kac, 2005): q-integrallenebilir bir f fonksiyonunun q-integrali için

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^A f(x) d_q x &= \int_{q/A}^{\infty/A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_q x \\ \text{b) } \int_0^{\infty/A} f(x) d_q x &= \int_0^{\infty/A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_q x \end{aligned}$$

özellikleri geçerlidir.

Tanım 2.2.15. (Vektör Uzayı) (Rynne ve Youngson, 2008): X boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \rightarrow x + y, \quad x, y \in X$$

$$\bullet : K \times X \rightarrow X, \quad (a, x) \rightarrow ax, \quad a \in K, x \in X$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri denilen işlemler tanımlansın. Bu işlemler her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

- i. $x + y = y + x$,
- ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- iii. $\forall x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır,
- iv. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır,
- v. $\forall x \in X$ için $1.x = x$,
- vi. $a(x + y) = ax + ay$,
- vii. $(a + b)x = ax + bx$,
- viii. $(ab)x = a(bx)$.

Bu durumda X 'e K cismi üzerinde bir vektör uzayı, elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir reel vektör uzayı ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.2.16. (İç Çarpım Uzayı) (Rynne ve Youngson, 2008): $K = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

Eğer $(\cdot, \cdot)_X : X \times X \rightarrow K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot, \cdot)_X$ 'ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir.

- i. $\forall x \in X$ için $(x, x)_X \geq 0$ ve $(x, x)_X = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
- ii. $\forall x, y \in X$ için $(x, y)_X = \overline{(y, x)_X}$ (kompleks eşlenik),

iii. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $(\alpha x, y)_X = \alpha(x, y)_X$,

iv. $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z)_X = (x, z)_X + (y, z)_X$.

$K = \mathbb{R}$ durumunda her $x, y \in X$ için $(x, y)_X = (y, x)_X$ eşitliği doğrudur. Ayrıca (ii) ve (iv) ifadelerinden her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

a. $(\alpha x + \beta y, z)_X = \alpha(x, z)_X + \beta(y, z)_X$,

b. $(x, \alpha y)_X = \overline{\alpha}(x, y)_X = \alpha(x, y)_X$,

c. $(x, \alpha y + \beta z)_X = \overline{\alpha}(x, y)_X + \overline{\beta}(x, z)_X$

formüllerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.2.17. (Norm) (Rynne ve Youngson, 2008): $(X, (.,.)_X)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun.

$$\|x\|_X = (x, x)_X^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup bu norma iç çarpımın ürettiği norm denir.

Tanım 2.2.18. (Hilbert Uzayı) (Rynne ve Youngson, 2008): $(X, (.,.)_X)$ bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise, yani $(X, (.,.)_X)$ içindeki her Cauchy dizisi iç çarpımın ürettiği norma göre yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Tanım 2.2.19. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991): H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.

$$\int_a^b \|f(x)\|_H^2 dx < +\infty$$

koşulunu sağlayan $f : [a, b] \rightarrow H$ güçlü ölçülebilir vektör-fonksiyonlarının lineer vektör uzayı $L_2(H, (a, b))$ ile gösterilir. Bu uzay

$$(f, g)_{L_2(H, (a, b))} := \int_a^b (f(t), g(t))_H dt, \quad f, g \in L_2(H, (a, b))$$

iç çarpımın doğurduğu norm ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.2.20. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991): $L^2(0, a)$ uzayında norm

$$\|f\| := \left(\int_0^a |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ve

$$(f, g) := \int_0^a f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(0, a)$$

iç çarpımı altında bir ayrılabilir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.2.21. (Annaby ve Mansour, 2012): $L_q^2(0, a)$, $[0, a]$ üzerinde tanımlı tüm kompleks değerli fonksiyonların uzayı olsun. Bu $L_q^2(0, a)$

$$\|f\| := \left(\int_0^a |f(x)|^2 d_q x \right)^{1/2} < +\infty$$

normu ve

$$(f, g) := \int_0^a f(x) \overline{g(x)} d_q x, \quad f, g \in L_q^2(0, a)$$

iç çarpımı altında bir ayrılabilir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.2.22. (Narici ve Bachman, 1998): X ve Y iki normlu lineer uzay olsun. $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ olan her dönüşüme operatör adı verilir. Bu durumda

- i. $D(A) := \{x \in X : Ax \text{ tanımlı}\} \subset X$ kümesine A operatörünün tanım kümesi,
- ii. $R(A) := AD(A) = \{y = Ax : x \in D(A)\} \subset Y$ kümesine ise A operatörünün değer kümesi,
- iii. $Ker A := \{x \in X : Ax = 0\} \subset X$ kümesine ise A operatörünün sıfır kümesi veya çekirdeği denir.

Tanım 2.2.23. (Lineer Operatör) (Kreyszig, 1978): X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A)$, X 'de bir lineer manifold ve $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

Eğer her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise, A operatörüne X üzerinde bir lineer operatör denir.

Tanım 2.2.24. (Sınırlı Operatör) (Kreyszig, 1978): X ve Y iki normlu uzaylar ve $A : X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa bu A operatörüne sınırlı operatör denir. X 'den Y 'ye tüm sınırlı operatörlerin oluşturduğu aile $B(X, Y)$, özel olarak $X = Y$ ise bu aile $B(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.25. (Operatörün Normu) (Rynne ve Youngson, 2008): X ve Y iki normlu uzay ve $A : X \rightarrow Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun.

Bu durumda

$$\|A\| := \inf \{M : M > 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X\}$$

sayısına A operatörünün normu adı verilir.

Tanım 2.2.26. (Eşlenik Operatör) (Narici ve Bachman, 1998): H bir Hilbert uzayı, $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ bir lineer operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun.

Bu durumda

$$D(A^*) := \{y \in H : \forall x \in D(A) \text{ için bir } z \in H \text{ vardır, öyle ki} \\ (Ax, y)_H = (x, z)_H\}$$

olmak üzere $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$, $A^*y := z$ şeklinde tanımlanan operatöre A operatörünün eşlenik operatörü denir.

Tanım 2.2.27. (Narici ve Bachman, 1998): H bir Hilbert uzayı, $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ bir lineer operatör ve A^* , A operatörünün eşlenik operatörü olsun.

- i. Eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^*f$, yani $\forall f, g \in D(A)$ için $(Af, g)_H = (f, Ag)_H$ ise A operatörüne simetrik operatör denir ve $A \subset A^*$ sembolüyle gösterilir.
- ii. Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^*f$ ise A operatörüne özeşlenik operatör denir.
- iii. Eğer H Hilbert uzayında lineer kapalı bir A operatörü için
 - a) $D(A) \subset D(A^*)$ ve

b) Her $f \in D(A)$ için $\|Af\|_H = \|A^*f\|_H$

ise, A 'ya H 'da formal normal operatör adı verilir.

iv. Eğer A , H Hilbert uzayında formal normal ve $D(A) = D(A^*)$ ise, A operatörüne H 'da normal operatör denir.

v. Eğer her $f \in H$ için $AA^*f = A^*Af = f$ ise A operatörüne üniter operatör denir.



3. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Bu çalışmada, birinci mertebeden

$$l(u) = u'$$

diferansiyel ifadesinin q -benzeri olan D_q ve $D_{q^{-1}}$ ifadeleri incelenecektir.

$L^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden alınan aynı diferansiyel operatör incelenmiş ve elde edilen sonuçlardan 2.Bölüm'de bahsedilmiştir.

Bu tezde $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında çalışılacaktır. Çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, D_q q -diferansiyel operatörü incelenecektir. Önce sabit katsayılı homojen ve homojen olmayan denklemlerin çözümleri, daha sonra da değişken katsayılı homojen ve homojen olmayan denklemlerin çözümleri araştırılacaktır. İkinci bölümde ise $D_{q^{-1}}$ q -diferansiyel operatörünün sabit ve değişken katsayılı homojen ve homojen olmayan durumlarında çözümleri incelenecektir. Ayrıca alınan sonuçlar örneklerle desteklenip $L^2(0, a)$ Hilbert uzayında var olan sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

İlk olarak tezde kullanılacak bazı ifadelerin ispatları verilsin.

Lemma 3.1. (Annaby ve Mansour, 2012) $f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$, $[0, q^{-1}a]$ da tanımlı $L_q^2(0, a)$ nın iki fonksiyonu olsun. $x \in (0, a]$ için D_q ve $D_{q^{-1}}$ operatörleri arasında

$$D_{q^{-1}}g(x) = D_{q, xq^{-1}}g(xq^{-1}) = (D_qg)(xq^{-1})$$

bağıntısı vardır.

İspat. $f, g \in [0, q^{-1}a]$ ve $x \in (0, a]$ olduğundan

$$\begin{aligned} D_{q^{-1}}g(x) &= \frac{g(x) - g(q^{-1}x)}{x - q^{-1}x} = \frac{g(x) - g(q^{-1}x)}{(1 - q^{-1})x} \\ &= \frac{-(g(q^{-1}x) - g(x))}{(q - 1)q^{-1}x} = \frac{g(q^{-1}x) - g(x)}{(1 - q)q^{-1}x} \\ &= \frac{g(q^{-1}x) - g(x)}{q^{-1}x - x} \\ &= D_qg(q^{-1}x) \end{aligned}$$

Ayrıca;

$$\begin{aligned} D_{q^{-1}}g(x) &= \frac{g(q^{-1}x) - g(x)}{(1-q)q^{-1}x} = \frac{g(q^{-1}x) - g(qq^{-1}x)}{q^{-1}x - qq^{-1}x} \\ &= D_{q,xq^{-1}}g(xq^{-1}) \end{aligned}$$

olup istenilen eşitlik gösterilmiş olur. $\square$

Lemma 3.2. (Annaby ve Mansour, 2012) $f \in L_q^2(0, a)$ için

$$\int_0^a f(t) d_q t = (1-q)a f(a) + \int_0^{qa} f(t) d_q t$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $f \in L_q^2(0, a)$ alalım. İntegral tanımından

$$\begin{aligned} \int_0^a f(t) d_q t &= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a) \\ &= (1-q)a f(a) + (1-q)a \sum_{n=1}^{\infty} q^n f(q^n a) \\ &= (1-q)a f(a) + (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(q^{n+1} a) \\ &= (1-q)a f(a) + (1-q)qa \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n qa) \\ &= (1-q)a f(a) + \int_0^{qa} f(t) d_q t \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

3.1. D_q Operatörünün İncelenmesi

Bu bölümde, $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında $p(x)$, $[0, a]$ aralığında tanımlı reel değerli ve 0 da q-regüler bir fonksiyon olmak üzere,

$$l(u(x)) = D_q u(x) + p(x)u(x), \quad x \in [0, a] \quad (3.2)$$

formundaki birinci mertebeden lineer q-diferansiyel denklemi incelenecektir.

İlk olarak aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 3.1.1. (Annaby ve Mansour, 2005) $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında u ve v 0 da q -regüler ve $u, v \in L_q^2(0, a)$ olan iki fonksiyon olmak üzere

$$\langle D_q u, v \rangle_{L_q^2(0, a)} = u(a)\overline{v(aq^{-1})} - u(0)\overline{v(0)} + \langle u, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v \rangle_{L_q^2(0, a)}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $u, v \in L_q^2(0, a)$ ve 0 da q -regüler olsunlar. $L_q^2(0, a)$ daki iç çarpım tanımından

$$\begin{aligned} \langle D_q u, v \rangle_{L_q^2(0, a)} &= \int_0^a D_q u(t) \overline{v(t)} d_q t \\ &= D_q \left(\int_0^a u(t) \overline{v(t)} d_q t \right) - \int_0^a u(qt) \overline{D_q v(t)} d_q t \\ &= u(a)\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} - \int_0^a u(qt) \overline{D_q v(t)} d_q t \end{aligned}$$

Şimdi $x = qt$ dönüşümü yapıp Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \langle D_q u, v \rangle_{L_q^2(0, a)} &= u(a)\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} - \int_0^{qa} u(t) \overline{\frac{1}{q} D_q v(q^{-1}t)} d_q t \\ &= u(a)\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} - \int_0^{qa} u(t) \overline{\frac{1}{q} D_{q^{-1}} v(t)} d_q t \\ &= u(a)\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} + aq^{-1}(1-q)u(a)\overline{D_{q^{-1}} v(a)} \\ &\quad + \int_0^a u(t) \overline{\left(-\frac{1}{q}\right) D_{q^{-1}} v(t)} d_q t \\ &= u(a)\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} + aq^{-1}(1-q)u(a) \left[\frac{v(aq^{-1}) - v(a)}{(q^{-1} - 1)a} \right] \\ &\quad + \int_0^a u(t) \overline{\left(-\frac{1}{q}\right) D_{q^{-1}} v(t)} d_q t \\ &= u(a)\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} + u(a) \overline{[v(aq^{-1}) - v(a)]} \\ &\quad + \int_0^a u(t) \overline{\left(-\frac{1}{q}\right) D_{q^{-1}} v(t)} d_q t \\ &= u(a)\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} + u(a)\overline{v(aq^{-1})} - u(a)\overline{v(a)} \\ &\quad + \int_0^a u(t) \overline{\left(-\frac{1}{q}\right) D_{q^{-1}} v(t)} d_q t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle D_q u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} &= u(a)\overline{v(aq^{-1})} - u(0)\overline{v(0)} + \int_0^a u(t) \overline{-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v(t)} d_q t \\
&= u(a)\overline{v(aq^{-1})} - u(0)\overline{v(0)} + \langle u, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v \rangle_{L_q^2(0,a)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\langle D_q u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} = u(a)\overline{v(aq^{-1})} - u(0)\overline{v(0)} + \langle u, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v \rangle_{L_q^2(0,a)}$$

eşitliği elde edilir. $\square$

Şimdi verilen (3.2) ifadesi incelensin.

Teorem 3.1.2. Teorem 3.1.1 deki şartlar altında ve $p(x)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığında reel değerli olmak üzere

$$\langle lu, v \rangle_{L_q^2(0,a)} = u(a)\overline{v(aq^{-1})} - u(0)\overline{v(0)} + \langle u, l^*v \rangle_{L_q^2(0,a)}$$

eşitliğini sağlayan l^* , q-diferansiyel denklem ifadesi

$$l^*(v(x)) = -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v(x) + p(x)v(x)$$

şeklindedir.

İspat. $u, v \in L_q^2(0, a)$ ve 0 da q-regüler olsunlar. O halde

$$\begin{aligned}
\langle lu, v \rangle_{L_q^2(0,a)} &= \langle D_q u + pu, v \rangle_{L_q^2(0,a)} \\
&= \langle D_q u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} + \langle pu, v \rangle_{L_q^2(0,a)}
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.1 ve $p(x)$ fonksiyonu reel değerli yani $p(x) = \overline{p(x)}$ olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\langle lu, v \rangle_{L_q^2(0,a)} &= \langle D_q u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} + \langle pu, v \rangle_{L_q^2(0,a)} \\
&= u(a)\overline{v(aq^{-1})} - u(0)\overline{v(0)} + \langle u, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v \rangle_{L_q^2(0,a)} \\
&\quad + \langle u, pv \rangle_{L_q^2(0,a)} \\
&= u(a)\overline{v(aq^{-1})} - u(0)\overline{v(0)} + \langle u, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v + pv \rangle_{L_q^2(0,a)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$l^*(v(x)) = -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v(x) + p(x)v(x)$$

olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Sonuç 3.1.1. $l(u)$ 'nin q-diferansiyel ifadesi

$$D(l) = \{u \in L_q^2(0, a) : u(0) = u(a) = 0\}$$

kümesi üzerinde tanımlanırsa bu ifadenin eşleniğinin

$$l^*(v(x)) = -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}v(x) + p(x)v(x)$$

olduğu kolayca görülür. O halde; $l \neq l^*$ olduğundan birinci mertebeden l , q-diferansiyel ifadesi $L_q^2(0, a)$ uzayında simetrik ve özeşlenik olamaz.

Sonuç 3.1.2. $L_q^2(0, a)$ uzayında $l(u)$ q-diferansiyel denklem ifadesi $D(l)$ tanım kümesi altında normal değildir. Gerçekten, eğer normal ise

$$ll^* = l^*l$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Fakat Annaby ve Mansour (2005)'a göre

$$\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q = D_qD_{q^{-1}}$$

olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} ll^* &= D_q \left(\frac{-1}{q}D_{q^{-1}} \right) = \frac{-1}{q}D_qD_{q^{-1}} \\ &= \frac{-1}{q} \frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q = \frac{1}{q} \left(\frac{-1}{q}D_{q^{-1}} \right) D_q \\ &= \frac{1}{q}l^*l \end{aligned}$$

olup normal olmadığı açıktır.

Şimdi $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden, sabit katsayılı,

$$l(u(x)) = D_q u(x) + pu(x) \tag{3.3}$$

q-diferansiyel ifadesi ele alınsın. Öncelikle verilen q-diferansiyel ifadenin homojen kısmın çözümü araştırılsın.

Teorem 3.1.3. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden homojen

$$l(u(x)) = D_q u(x) + pu(x) = 0$$

q-diferansiyel denkleminin çözümü $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $u_q(x) = c_0 e_q^{-px}$ dir.

İspat. Verilen birinci mertebeden l , q -diferansiyel denkleminde D_q türev operatörü yerine yazılırsa

$$l(u(x)) = \frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} + pu(x)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} + pu(x) = 0$$

ifadesi düzenlenirse

$$u(qx) - u(x) + p(q-1)xu(x) = 0$$

$$u(qx) = [1 - p(q-1)x]u(x)$$

elde edilir. Son ifadede

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

kuvvet serisi yardımıyla çözüm aranır ve $u(qx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n$ olduğu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n &= [1 - p(q-1)x] \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - p(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Genel terimlerini aynı yapmak için son ifadede $k = n + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - p(q-1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

olup buradan

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n - p(q-1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

ve böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - p(q-1)c_{n-1}) x^n$$

elde edilir. Genel terimleri aynı olan serilerin katsayıları eşit olduğundan

$$c_n q^n = c_n - p(q-1)c_{n-1}$$

olup

$$c_n = \frac{-p(q-1)}{q^n - 1} c_{n-1}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen eşitlikten, c_n lerin genel formunu bulmak için n değerleri yerine yazılırsa;

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{-p(q-1)}{q-1} c_0 \\ &= -p \frac{q-1}{q-1} c_0 = -p \frac{1}{[1]_q} c_0 \\ \Rightarrow c_1 &= (-p)^1 \frac{1}{[1]_q} c_0 \end{aligned}$$

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-p(q-1)}{q^2-1} c_1 \\ &= \frac{-p(q-1)}{q^2-1} \frac{-p(q-1)}{q-1} c_0 \\ &= \frac{p^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0 \\ &= p^2 \frac{q-1}{q-1} \frac{q-1}{q^2-1} c_0 = p^2 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} c_0 \\ \Rightarrow c_2 &= (-p)^2 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} c_0 \end{aligned}$$

$n = 3$ için;

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{-p(q-1)}{q^3-1} c_2 \\ &= \frac{-p(q-1)}{q^3-1} \frac{p^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0 \\ &= \frac{-p^3(q-1)^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} c_0 \\ &= -p^3 \frac{q-1}{q-1} \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} c_0 \\ &= -p^3 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} c_0 \\ \Rightarrow c_3 &= (-p)^3 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} c_0 \end{aligned}$$

$n = 4$ için;

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-p(q-1)}{q^4-1} c_3 \\ &= \frac{-p(q-1)}{q^4-1} \frac{-p^3(q-1)^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} c_0 \\ &= \frac{p^4(q-1)^4}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= p^4 \frac{q-1}{q-1} \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} \frac{q-1}{q^4-1} c_0 \\
&= p^4 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} c_0 \\
\Rightarrow c_4 &= (-p)^4 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} c_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$c_n = (-p)^n \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \cdots \frac{1}{[n]_q} c_0 = c_0 \frac{(-p)^n}{[n]_q!}$$

bulunur. Dolayısıyla $u(x)$ çözümünde c_n ler yerine konulursa

$$u_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{(-p)^n}{[n]_q!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{(-px)^n}{[n]_q!}$$

elde edilir. Böylece istenilen çözüm

$$u_q(x) = c_0 e_q^{-px}$$

şeklindedir. □

Örnek 3.1.1. $L_q^2(0, a)$ uzayında

$$D_q u(x) - 2u(x) = 0$$

şeklindeki birinci mertebeden sabit katsayılı homojen q-diferansiyel denkleminin q-çözümü araştırılsın.

Öncelikle, verilen q-diferansiyel denkleminde D_q türev operatörü yerine yazılır

$$l(u(x)) = \frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} - 2u(x)$$

ve

$$\frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} - 2u(x) = 0$$

ifadesi düzenlenirse

$$u(qx) - u(x) - 2(q-1)xu(x) = 0$$

$$u(qx) = [1 + 2(q-1)x]u(x)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

kuvvet serisi yardımıyla çözüm aranırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n &= [1 + 2(q-1)x] \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 2(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \end{aligned}$$

bulunur. Genel terimlerini aynı yapmak için son ifadede $k = n + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 2(q-1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

olup

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n + 2(q-1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

ve böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + 2(q-1)c_{n-1}) x^n$$

elde edilir. Böylelikle istenilen genel terim

$$c_n = \frac{2(q-1)}{q^n - 1} c_{n-1}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen eşitlikten, c_n lerin genel formunu bulmak için n değerleri yerine yazılırsa;

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2(q-1)}{q-1} c_0 \\ &= 2 \frac{q-1}{q-1} c_0 \\ \Rightarrow c_1 &= 2 \frac{1}{[1]_q} c_0 \end{aligned}$$

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{2(q-1)}{q^2-1} c_1 \\ &= \frac{2(q-1)}{q^2-1} \frac{2(q-1)}{q-1} c_0 \\ &= \frac{2^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0 \end{aligned}$$

$$c_2 = 2^2 \frac{q-1}{q-1} \frac{q-1}{q^2-1} c_0$$

$$\Rightarrow c_2 = 2^2 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} c_0$$

$n = 3$ için;

$$c_3 = \frac{2(q-1)}{q^3-1} c_2$$

$$= \frac{2(q-1)}{q^3-1} \frac{2^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$= \frac{2^3(q-1)^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} c_0$$

$$= 2^3 \frac{q-1}{q-1} \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} c_0$$

$$\Rightarrow c_3 = 2^3 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} c_0$$

$n = 4$ için;

$$c_4 = \frac{2(q-1)}{q^4-1} c_3$$

$$= \frac{2(q-1)}{q^4-1} \frac{2^3(q-1)^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} c_0$$

$$= \frac{2^4(q-1)^4}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} c_0$$

$$= 2^4 \frac{q-1}{q-1} \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} \frac{q-1}{q^4-1} c_0$$

$$\Rightarrow c_4 = 2^4 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} c_0$$

$$\vdots$$

olduğu görülür. Buradan

$$c_n = 2^n \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \cdots \frac{1}{[n]_q} c_0 = c_0 \frac{2^n}{[n]_q!}$$

olup $u(x)$ çözümünde c_n ler yerine konulursa

$$u_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{2^n}{[n]_q!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{(2x)^n}{[n]_q!}$$

elde edilir. Böylece istenilen çözüm

$$u_q(x) = c_0 e_q^{2x}$$

şeklinde dir. Dolayısıyla alınan q-diferansiyel denklemde $p = -2$ olmak üzere Teorem 3.1.3 de bulunan çözüm ile örtüştüğü görülür.

(3.3) q-diferansiyel ifadesinin homojen olmayan çözümü aşağıdaki şekildedir.

Teorem 3.1.4. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden sabit katsayılı, homojen olmayan

$$l(u(x)) = D_q u(x) + pu(x) = b, \quad b \in \mathbb{C}$$

q-diferansiyel denkleminin çözümü $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u_q(x) = c_0 e_q^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_q^{-px}$$

şeklindedir.

İspat. Bir önceki teoremden q-diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümünün $u_q(x) = c_0 e_q^{-px}$ olduğu bulunmuştu.

Şimdi verilen homojen olmayan q-diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi metodu kullanılırsa

$$u_q(x) = c(x) e_q^{-px}$$

şeklinde çözüm aranır. Verilen denklemde çözüm yerine yazıldığında

$$D_q(c(x) e_q^{-px}) + pc(x) e_q^{-px} = b$$

olup buradan

$$\begin{aligned} c(x) D_q e_q^{-px} + e_q^{-pqx} D_q c(x) + pc(x) e_q^{-px} &= b \\ c(x) (-p e_q^{-px}) + e_q^{-pqx} D_q c(x) + pc(x) e_q^{-px} &= b \\ e_q^{-pqx} D_q c(x) &= b \end{aligned}$$

bulunur. Burada $e_q^x e_{q^{-1}}^{-x} = 1$ bağıntısı kullanılırsa

$$D_q c(x) = b e_{q^{-1}}^{pqx}$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın 0 dan x e integrali alınır

$$\int_0^x D_q c(t) d_q t = \int_0^x b e_{q^{-1}}^{pqt} d_q t$$

olup

$$c(x) - c(0) = b \int_0^x e_{q^{-1}}^{pqt} d_q t$$

$$c(x) = c(0) + b \int_0^x e_{q^{-1}}^{pqt} d_q t$$

bulunur. Şimdi aranılan çözümde $c(x)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_q(x) &= \left(c(0) + b \int_0^x e_{q^{-1}}^{pqt} d_q t \right) e_q^{-px} \\ &= c(0)e_q^{-px} + be_q^{-px} \int_0^x e_{q^{-1}}^{pqt} d_q t \\ &= c(0)e_q^{-px} + be_q^{-px} \left(\frac{1}{p} e_{q^{-1}}^{pt} \Big|_0^x \right) \\ &= c(0)e_q^{-px} + be_q^{-px} \left(\frac{1}{p} e_q^{px} - \frac{1}{p} e_q^0 \right) \\ &= c(0)e_q^{-px} + \frac{b}{p} e_q^{-px} e_q^{px} - \frac{b}{p} e_q^{-px} \\ &= c(0)e_q^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_q^{-px} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece istenilen birinci mertebeden homojen olmayan q -diferansiyel denkleminin çözümü

$$u_q(x) = c_0 e_q^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_q^{-px}$$

şeklinde bulunur. □

Örnek 3.1.2. $L_q^2(0, a)$ uzayında birinci mertebeden sabit katsayılı, homojen olmayan

$$D_q u(x) - 2u(x) = 5$$

q -diferansiyel denkleminin q -çözümü araştırılsın.

Verilen q -diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümü Örnek 3.1.1 de

$$u_q(x) = c_0 e_q^{2x}$$

olduğu bulunmuştu. Şimdi verilen homojen olmayan q -diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi metodu kullanılırsa

$$u_q(x) = c(x) e_q^{2x}$$

şeklinde çözüm aranırsa

$$D_q(c(x)e_q^{2x}) - 2c(x)e_q^{2x} = 5$$

olup buradan

$$c(x)D_q e_q^{2x} + e_q^{2qx} D_q c(x) - 2c(x)e_q^{2x} = 5$$

$$c(x)2e_q^{2x} + e_q^{2qx} D_q c(x) - 2c(x)e_q^{2x} = 5$$

$$e_q^{2qx} D_q c(x) = 5$$

elde edilir. Burada $e_q^x e_{q^{-1}}^{-x} = 1$ bağıntısı kullanılırsa

$$D_q c(x) = 5e_{q^{-1}}^{-2qx}$$

bulunur. Şimdi her iki tarafın 0 dan x e integrali alınırsa

$$\int_0^x D_q c(t) d_q t = \int_0^x 5e_{q^{-1}}^{-2qt} d_q t$$

olup

$$c(x) - c(0) = 5 \int_0^x e_{q^{-1}}^{-2qt} d_q t$$

$$c(x) = c(0) + 5 \int_0^x e_{q^{-1}}^{-2qt} d_q t$$

bulunur. Artık aranılan çözümde $c(x)$ yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} u_q(x) &= \left(c(0) + 5 \int_0^x e_{q^{-1}}^{-2qt} d_q t \right) e_q^{2x} \\ &= c(0)e_q^{2x} + 5e_q^{2x} \int_0^x e_{q^{-1}}^{-2qt} d_q t \end{aligned}$$

elde edilip

$$\begin{aligned} u_q(x) &= c(0)e_q^{2x} + 5e_q^{2x} \left(\frac{1}{-2} e_{q^{-1}}^{-2t} \Big|_0^x \right) \\ &= c(0)e_q^{2x} + 5e_q^{2x} \left(\frac{1}{-2} e_{q^{-1}}^{-2x} + \frac{1}{2} e_{q^{-1}}^0 \right) \\ &= c(0)e_q^{2x} - \frac{5}{2} e_q^{2x} e_{q^{-1}}^{-2x} + \frac{5}{2} e_q^{2x} \\ &= c(0)e_q^{2x} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} e_q^{2x} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece istenilen birinci mertebeden homojen olmayan q -diferansiyel denkleminin çözümü

$$u_q(x) = c_0 e_q^{2x} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} e_q^{2x}$$

şeklinde bulunur. Böylelikle $p = -2$ ve $b = 5$ için bulunan bu q -çözümün Teorem 3.1.4 ile örtüştüğü açıktır.

Şimdi $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden, değişken katsayılı

$$l(u(x)) = D_q u(x) + p(x)u(x) \quad (3.4)$$

q -diferansiyel ifadesi düşünölsün. Sırasıyla homojen ve homojen olmayan çözümlerinin araştırılması yapılsın.

İlk önce verilen (3.4) q -diferansiyel denkleminin homojen kısmının çözümü incelen sin. Bu çözümü bulabilmek için iki yöntem verilebilir:

I. Yöntem: $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında (3.4) q -diferansiyel denkleminde türev ifadesi yerine yazılırsa

$$l(u(x)) = \frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} + p(x)u(x)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

$$\frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} + p(x)u(x) = 0$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$u(qx) - u(x) + (q-1)xp(x)u(x) = 0$$

ve buradan

$$u(qx) = [1 - (q-1)xp(x)]u(x)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte çözüm

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

kuvvet serisi şeklinde aranır sa ve

$$u(qx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n$$

olduğu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n &= [1 - (q-1)xp(x)] \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - (q-1)p(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}\end{aligned}$$

elde edilir. Genel terimlerini aynı yapmak için son ifadede $k = n + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - (q-1)p(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

olup buradan

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n - (q-1)p(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

ve böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n - (q-1)p(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

elde edilir.

Yukarıdaki son eşitlikten

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n - (q-1)p(x)c_{n-1}] x^n$$

şeklinde iki serinin eşitliği bulunur. $p(x)$ fonksiyonunun nasıl verildiği dikkate alınarak istenilen c_n katsayıları belirlenebilir.

Örnek 3.1.3. $L_q^2(0, a)$ uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı, homojen

$$D_q u(x) - 7x^2 u(x) = 0$$

q -diferansiyel denkleminin q -çözümü araştırılsın.

Verilen birinci mertebeden l , q -diferansiyel denkleminde D_q türev operatörü yerine yazılırsa

$$l(u(x)) = \frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} - 7x^2 u(x)$$

olup

$$\frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} - 7x^2 u(x) = 0$$

bu ifade düzenlenirse

$$u(qx) - u(x) - 7(q-1)x^3 u(x) = 0$$

$$u(qx) = [1 + 7(q-1)x^3]u(x)$$

elde edilir. Şimdi

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

şeklinde kuvvet serisi yardımıyla çözüm aranırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n &= [1 + 7(q-1)x^3] \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 7(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 7(q-1) \sum_{n=3}^{\infty} c_{n-3} x^n$$

olup buradan

$$c_0 + c_1 qx + c_2 q^2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n q^n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n + 7(q-1) \sum_{n=3}^{\infty} c_{n-3} x^n$$

bulunur. İki serinin eşitliğinden $c_1 q = c_1$ ve $c_2 q^2 = c_2$ olup, $0 < q < 1$ olduğundan

$$c_1 = c_2 = 0$$

bulunur. Ayrıca;

$$c_n q^n = c_n + 7(q-1)c_{n-3}$$

ifadesinden

$$c_n = \frac{7(q-1)}{q^n - 1} c_{n-3}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen eşitlikten, c_n lerin genel formunu bulmak için n değerleri yerine yazılırsa;

$n = 3$ için;

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{7(q-1)}{q^3 - 1} c_0 \\ \Rightarrow c_3 &= \frac{7}{[3]_q} c_0 \end{aligned}$$

$n = 4$ için;

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{7(q-1)}{q^4 - 1} c_1 \\ \Rightarrow c_4 &= 0 \end{aligned}$$

$n = 5$ için;

$$c_5 = \frac{7(q-1)}{q^5-1}c_2$$

$$\Rightarrow c_5 = 0$$

$n = 6$ için;

$$c_6 = \frac{7(q-1)}{q^6-1}c_3$$

$$= \frac{7(q-1)}{q^6-1} \frac{7(q-1)}{q^3-1}c_0$$

$$\Rightarrow c_6 = \frac{7^2}{[3]_q[6]_q}c_0$$

$n = 7$ için;

$$c_7 = \frac{7(q-1)}{q^7-1}c_4$$

$$\Rightarrow c_7 = 0$$

$n = 8$ için;

$$c_8 = \frac{7(q-1)}{q^8-1}c_5$$

$$\Rightarrow c_8 = 0$$

$n = 9$ için;

$$c_9 = \frac{7(q-1)}{q^9-1}c_6$$

$$= \frac{7(q-1)}{q^9-1} \frac{7^2(q-1)^2}{(q^3-1)(q^6-1)}c_0$$

$$\Rightarrow c_9 = \frac{7^3}{[3]_q[6]_q[9]_q}c_0$$

$$\vdots$$

olduğu görülür. Buradan

$$c_{3n} = \frac{7^n}{[3]_q[6]_q \cdots [3n]_q}c_0$$

ve geriye kalan terimler de

$$c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = \cdots = 0$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
 [3]_q &= \frac{1 - q^3}{1 - q} \\
 [6]_q &= \frac{1 - q^6}{1 - q} = \frac{1 - q^3}{1 - q} (1 + q^3) \\
 &= [3]_q (1 + q^3) \\
 [9]_q &= \frac{1 - q^9}{1 - q} = \frac{1 - q^3}{1 - q} (1 + q^3 + q^6) \\
 &= [3]_q (1 + q^3 + q^6) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
 [3]_q [6]_q [9]_q \cdots [3n]_q &= [3]_q [3]_q (1 + q^3) [3]_q (1 + q^3 + q^6) \cdots [3]_q (1 + q^3 + \cdots + q^{3n-3}) \\
 &= [3]_q^n (1 + q^3) (1 + q^3 + q^6) \cdots (1 + q^3 + q^6 + \cdots + q^{3n-3})
 \end{aligned}$$

elde edilir. q-Benzer ifadenin faktöriyeli

$$[n]_q! = (1 + q)(1 + q + q^2) \cdots (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

olduğu bilindiğine göre q^3 benzer ifadenin faktöriyeli de

$$[n]_{q^3}! = (1 + q^3)(1 + q^3 + q^6) \cdots (1 + q^3 + q^6 + \cdots + q^{3n-3})$$

bulunur. Dolayısıyla

$$[3]_q [6]_q [9]_q \cdots [3n]_q = [3]_q^n [n]_{q^3}!$$

elde edilir. Şimdi $u(x)$ çözümünde c_n ler yerine konulursa

$$\begin{aligned}
 u_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{7^n}{[3]_q [6]_q \cdots [3n]_q} x^{3n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{7^n}{[3]_q^n [n]_{q^3}!} x^{3n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \left(\frac{7x^3}{[3]_q} \right)^n \frac{1}{[n]_{q^3}!}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Díaz ve Teruel (2005)'e göre

$$e_{q,k}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{q^k}!}$$

olduğundan istenilen çözüm

$$u_q(x) = c_0 e_{q,3}^{\frac{7x^3}{[3]_q}}$$

şeklindedir.

II. Yöntem: $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı

$$D_q u(x) + p(x)u(x) = 0$$

q-diferansiyel denklemini çözmek için öncelikle integral denklemi olarak yazılabilir.

Bunun için

$$D_q u(x) = -p(x)u(x)$$

eşitliğinin her tarafının 0 dan x e q-integrali alınır

$$\int_0^x D_q u(t) d_q t = \int_0^x -p(t)u(t) d_q t$$

olup

$$u_q(x) - u(0) = - \int_0^x p(t)u(t) d_q t$$

elde edilir. Böylece (3.4) q-diferansiyel denkleminin integral denklemi

$$u_q(x) = u(0) - \int_0^x p(t)u(t) d_q t$$

şeklinde olup istenilen çözüm yaklaşım yöntemi kullanılarak bulunabilir.

Örnek 3.1.4. $L_q^2(0, a)$ uzayında alınan

$$D_q u(x) - xu(x) = 0$$

ve $u_q(0) = 1$ başlangıç değeri probleminin çözümü Picard Yaklaşım Yöntemi ile bulunsun.

$L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı

$$D_q u(x) - xu(x) = 0$$

q-diferansiyel denklemini çözmek için öncelikle integral denklemi olarak yazılabilir.

Bunun için

$$D_q u(x) = xu(x)$$

eşitliğinin her tarafının 0 dan x e q -integrali alınırsa

$$\int_0^x D_q u(t) d_q t = \int_0^x t u(t) d_q t$$

olup

$$u_q(x) - u(0) = \int_0^x t u(t) d_q t$$

elde edilir. Böylece; verilen q -diferansiyel denkleminin integral denklemi

$$u_q(x) = u(0) + \int_0^x t u(t) d_q t$$

şeklinde olur. Şimdi, $u_q(x)$ i bulmak için yaklaşık çözüm inşa edilsin. Bunun için Picard Yaklaşım Yöntemi kullanılsın.

$$u_0 = 1 \quad \text{ve} \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x t u_n(t) d_q t$$

ifadesi bu yöntem sonucunda elde edilir. Buradan

$n = 0$ için;

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 + \int_0^x t u_0(t) d_q t \\ &= 1 + \int_0^x t d_q t \\ &= 1 + \frac{t^2}{[2]_q} \Big|_0^x \\ &= 1 + \frac{x^2}{[2]_q} \end{aligned}$$

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned} u_2(x) &= 1 + \int_0^x t u_1(t) d_q t \\ &= 1 + \int_0^x t \left(1 + \frac{t^2}{[2]_q} \right) d_q t \\ &= 1 + \left(\frac{t^2}{[2]_q} + \frac{t^4}{[2]_q [4]_q} \right) \Big|_0^x \\ &= 1 + \frac{x^2}{[2]_q} + \frac{x^4}{[2]_q [4]_q} \end{aligned}$$

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned}
 u_3(x) &= 1 + \int_0^x t u_2(t) d_q t \\
 &= 1 + \int_0^x t \left(1 + \frac{t^2}{[2]_q} + \frac{t^4}{[2]_q [4]_q} \right) d_q t \\
 &= 1 + \left(\frac{t^2}{[2]_q} + \frac{t^4}{[2]_q [4]_q} + \frac{t^6}{[2]_q [4]_q [6]_q} \right) \Big|_0^x \\
 &= 1 + \frac{x^2}{[2]_q} + \frac{x^4}{[2]_q [4]_q} + \frac{x^6}{[2]_q [4]_q [6]_q} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada

$$\begin{aligned}
 [2]_q &= \frac{1 - q^2}{1 - q} \\
 [4]_q &= \frac{1 - q^4}{1 - q} = \frac{1 - q^2}{1 - q} (1 + q^2) \\
 &= [2]_q (1 + q^2) \\
 [6]_q &= \frac{1 - q^6}{1 - q} = \frac{1 - q^2}{1 - q} (1 + q^2 + q^4) \\
 &= [2]_q (1 + q^2 + q^4) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
 [2]_q [4]_q [6]_q \cdots [2n]_q &= [2]_q [2]_q (1 + q^2) [2]_q (1 + q^2 + q^4) \cdots [2]_q (1 + q^2 + \cdots + q^{2n-2}) \\
 &= [2]_q^n (1 + q^2) (1 + q^2 + q^4) \cdots (1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2n-2})
 \end{aligned}$$

elde edilir. q -Benzer ifadenin faktöriyeli

$$[n]_q! = (1 + q)(1 + q + q^2) \cdots (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

olduğu bilindiğine göre q^2 benzer ifadenin faktöriyeli de

$$[n]_{q^2}! = (1 + q^2)(1 + q^2 + q^4) \cdots (1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2n-2})$$

bulunur. Dolayısıyla

$$[2]_q [4]_q [6]_q \cdots [2n]_q = [2]_q^n [n]_{q^2}!$$

elde edilir. Şimdi $u(x)$ çözümünde c_n ler yerine konulursa

$$\begin{aligned} u_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[2]_q [4]_q \cdots [2n]_q} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[2]_q^n [n]_{q^2}!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{[2]_q} \right)^n \frac{1}{[n]_{q^2}!} \end{aligned}$$

elde edilir. Díaz ve Teruel (2005)'e göre

$$e_{q,k}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{q^k}!}$$

olduğundan istenilen çözüm

$$u_q(x) = e_{q,2}^{\frac{x^2}{[2]_q}}$$

şeklindedir.

Görüldüğü gibi birinci mertebeden değişken katsayılı homojen q-diferansiyel denkleminin çözümünün bulunma işlemi katsayıda verilen fonksiyona göre değişiklik göstermektedir.

Alınan (3.4) q-diferansiyel denkleminin homojen olmayan çözümü aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.5. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan

$$l(u(x)) = D_q u(x) + p(x)u(x) = b(x)$$

q-diferansiyel denkleminde, $y_0(x)$ aynı q-diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümüdür. Buna göre; verilen q-diferansiyel denklemin çözümü $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u_q(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(qt)} d_q t \right) y_0(x)$$

olur.

İspat. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında (3.4) q-diferansiyel denkleminin homojen kısmının çözümü $y_0(x)$ olsun. Homojen olmayan kısmın çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi yöntemi kullanılsın. O halde

$$u_q(x) = c(x)y_0(x)$$

şeklinde çözüm aranmalıdır. Ayrıca Bangerezako (2008)'ya göre bu çözümdeki $c(x)$ fonksiyonunun

$$y_0(qx)D_q c(x) = b(x)$$

denklemini sağlaması gerektiği verilmiştir. Öyleyse

$$D_q c(x) = \frac{b(x)}{y_0(qx)}$$

olup istenilen $c(x)$ fonksiyonları

$$c(x) = c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(qt)} d_q t$$

eşitliği tarafından bulunur. Böylelikle; (3.4) q-diferansiyel denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü

$$u_q(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(qt)} d_q t \right) y_0(x)$$

şeklinde olduğu görülür. □

Örnek 3.1.5. $L_q^2(0, a)$ uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı, homojen olmayan

$$D_q u(x) - 7x^2 u(x) = 3x + 1$$

q-diferansiyel denkleminin q-çözümü araştırılsın.

Verilen q-diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümünün

$$y_0(x) = c_0 e_{q,3}^{\frac{7x^3}{[3]_q}}$$

olduğu bulunmuştur. Homojen olmayan kısmın çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi yöntemi kullanılsın. O halde

$$u_q(x) = c(x) e_{q,3}^{\frac{7x^3}{[3]_q}}$$

şeklinde çözüm aranmalıdır. Teorem 3.1.5 e göre bu çözümdeki $c(x)$ fonksiyonunun

$$y_0(qx)D_q c(x) = b(x)$$

denklemini sağlaması gerektiği verilmiştir. Öyleyse

$$D_q c(x) = \frac{3x + 1}{\frac{7(qx)^3}{[3]_q} e_{q,3}}$$

olup istenilen $c(x)$ fonksiyonları

$$c(x) = c(0) + \int_0^x \frac{3t+1}{\frac{7(qt)^3}{[3]_q}} d_q t$$

eşitliği tarafından bulunur. Böylelikle; q-diferansiyel denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü

$$u_q(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{3t+1}{\frac{7(qt)^3}{[3]_q}} d_q t \right) e_{q,3}^{\frac{7x^3}{[3]_q}}$$

şeklinde olduğu görülür.

3.2. $D_{q^{-1}}$ Operatörünün İncelenmesi

Tezin bu bölümünde, diğer bölümde alınan D_q türev operatörü yerine $D_{q^{-1}}$ türev operatörü alınacaktır. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında, birinci mertebeden, lineer

$$l(u(x)) = D_{q^{-1}}u(x) + p(x)u(x), \quad x \in [0, a] \quad (3.5)$$

q-diferansiyel denklemi alınsın. Burada $p(x)$, $[0, a]$ aralığında tanımlı reel değerli ve 0 da q-regüler bir fonksiyondur.

İlk olarak aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 3.2.1. (Annaby ve Mansour, 2005) $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında, $u, v \in L_q^2(0, a)$ ve u, v fonksiyonları 0 da q-regüler olmak üzere

$$\langle D_{q^{-1}}u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} = q[u(aq^{-1})\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)}] + \langle u, -qD_qv \rangle_{L_q^2(0,a)}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında iç çarpım tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned} \langle D_{q^{-1}}u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} &= \int_0^a D_{q^{-1}}u(t)\overline{v(t)} d_q t \\ &= \int_0^a D_q u(tq^{-1})\overline{v(t)} d_q t \end{aligned}$$

olur. Burada $x = tq^{-1}$ dönüşümü yapılırsa;

$$\int_0^{aq^{-1}} qD_q u(t)\overline{v(qt)} d_q t = q \int_0^{aq^{-1}} D_q u(t)\overline{v(qt)} d_q t$$

elde edilir. Son eşitliğe kısmi integrasyon yöntemi uygulandığında

$$\begin{aligned}
\langle D_{q^{-1}}u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} &= q \left[D_q \left(\int_0^{aq^{-1}} u(t) \overline{v(qt)} d_q t \right) - \int_0^{aq^{-1}} u(t) \overline{D_q v(t)} d_q t \right] \\
&= q \left[u(aq^{-1}) \overline{v(qaq^{-1})} - u(0) \overline{v(0)} - \int_0^{aq^{-1}} u(t) \overline{D_q v(t)} d_q t \right] \\
&= q \left[u(aq^{-1}) \overline{v(a)} - u(0) \overline{v(0)} - \int_0^{aq^{-1}} u(t) \overline{D_q v(t)} d_q t \right]
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeden

$$\begin{aligned}
\int_0^{aq^{-1}} f(t) d_q t &= (1-q)aq^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^n f(q^n aq^{-1}) \\
&= (1-q)a \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} f(q^{n-1}a) \\
&= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a) \\
&= \int_0^a f(t) d_q t
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilip

$$\int_0^{aq^{-1}} f(t) d_q t = \int_0^a f(t) d_q t$$

olduğu kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\langle D_{q^{-1}}u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} &= q \left[u(aq^{-1}) \overline{v(a)} - u(0) \overline{v(0)} - \int_0^a u(t) \overline{D_q v(t)} d_q t \right] \\
&= q \left[u(aq^{-1}) \overline{v(a)} - u(0) \overline{v(0)} \right] + q \left[\int_0^a u(t) \overline{-D_q v(t)} d_q t \right] \\
&= q \left[u(aq^{-1}) \overline{v(a)} - u(0) \overline{v(0)} \right] + \langle u, -qD_q v \rangle_{L_q^2(0,a)}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\langle D_{q^{-1}}u, v \rangle_{L_q^2(0,a)} = q \left[u(aq^{-1}) \overline{v(a)} - u(0) \overline{v(0)} \right] + \langle u, -qD_q v \rangle_{L_q^2(0,a)}$$

olduğu gösterilmiş olur. $\square$

(3.5) q -diferansiyel denklemi Teorem 3.2.1 yardımıyla aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

Teorem 3.2.2. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında $u, v \in L_q^2(0, a)$ ve u, v fonksiyonları 0 da q -regüler olsun. Ayrıca $p(x)$, $[0, a]$ aralığında reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\langle lu, v \rangle_{L_q^2(0, a)} = q \left[u(aq^{-1})\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} \right] + \langle u, l^*v \rangle$$

eşitliğini sağlayan l^* , q -diferansiyel denklem ifadesi

$$l^*(v(x)) = -qD_q v(x) + p(x)v(x)$$

şeklindedir.

İspat. $u, v \in L_q^2(0, a)$ ve u, v fonksiyonları 0 da q -regüler olsun. O halde

$$\begin{aligned} \langle lu, v \rangle_{L_q^2(0, a)} &= \langle D_{q^{-1}}u + pu, v \rangle_{L_q^2(0, a)} \\ &= \langle D_{q^{-1}}u, v \rangle_{L_q^2(0, a)} + \langle pu, v \rangle_{L_q^2(0, a)} \end{aligned}$$

Teorem 3.2.1 ve $p(x) = \overline{p(x)}$ olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \langle lu, v \rangle_{L_q^2(0, a)} &= \langle D_{q^{-1}}u, v \rangle_{L_q^2(0, a)} + \langle pu, v \rangle_{L_q^2(0, a)} \\ &= q \left[u(aq^{-1})\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} \right] \\ &\quad + \langle u, -qD_q v \rangle_{L_q^2(0, a)} + \langle u, pv \rangle_{L_q^2(0, a)} \\ &= q \left[u(aq^{-1})\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} \right] \\ &\quad + \langle u, -qD_q v + pv \rangle_{L_q^2(0, a)} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\langle lu, v \rangle_{L_q^2(0, a)} = q \left[u(aq^{-1})\overline{v(a)} - u(0)\overline{v(0)} \right] + \langle u, l^*v \rangle$$

eşitliğinden istenilen l^* operatör ifadesinin

$$l^*(v(x)) = -qD_q v(x) + p(x)v(x)$$

şeklinde olduğu görülür. □

Sonuç 3.2.1. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında

$$D(l) = \{u \in L_q^2(0, a) : u(0) = u(a) = 0\}$$

kümesi üzerinde tanımlı (3.5) q-diferansiyel denkleminin eşleniği

$$l^*(v) = -qD_q v + p(x)v(x)$$

şeklindedir. Dolayısıyla birinci mertebeden l , q-diferansiyel denklemi $L_q^2(0, a)$ uzayında $l \neq l^*$ olduğundan simetrik ve özeşlenik olamaz.

Sonuç 3.2.2. $L_q^2(0, a)$ uzayında $l(u)$, q-diferansiyel denklem ifadesi $D(l)$ tanım kümesinde normal değildir. Çünkü; eğer normal olsaydı

$$ll^* = l^*l$$

eşitliğinin sağlanması gerekirdi.

$$\begin{aligned} ll^* &= D_{q^{-1}}(-qD_q) = -qD_{q^{-1}}D_q \\ &= -qqD_qD_{q^{-1}} = q(-qD_q)D_{q^{-1}} \\ &= ql^*l \end{aligned}$$

olup Annaby ve Mansour (2005)'ün

$$\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q = D_qD_{q^{-1}}$$

eşitliği ile çelişir. Dolayısıyla l , q-diferansiyel denklemi $D(l)$ tanım kümesi altında normal olamaz.

$L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden, sabit katsayılı

$$l(u(x)) = D_{q^{-1}}u(x) + pu(x) \tag{3.6}$$

q-diferansiyel denklemi düşünölsün.

İlk olarak (3.6) q-diferansiyel denkleminin homojen kısmının çözümüne bakölsün.

Teorem 3.2.3. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden, sabit katsayılı, homojen

$$l(u(x)) = D_{q^{-1}}u(x) + pu(x) = 0$$

q -diferansiyel denkleminin çözümü $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-px} = c_0 E_q^{-px}$$

şeklindedir.

İspat. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında l , q -diferansiyel denkleminin homojen kısmın çözümüne bakılsın. İlk önce denklemde $D_{q^{-1}}$ türev operatörünün tanımı yerine yazılırsa

$$l(u(x)) = \frac{u(x) - u(q^{-1}x)}{(1 - q^{-1})x} + pu(x)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{u(x) - u(q^{-1}x)}{(1 - q^{-1})x} + pu(x) = 0$$

ifadesinden

$$u(x) - u(q^{-1}x) + p(1 - q^{-1})xu(x) = 0$$

$$u(x)[1 + p(1 - q^{-1})x] - u(q^{-1}x) = 0$$

bulunur. Şimdi bulunan son denklemin

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

kuvvet serisi yardımıyla çözümü aranır ve $u(q^{-1}x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q^{-1}x)^n$ olduğu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n [1 + p(1 - q^{-1})x] - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q^{-1}x)^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + p(1 - q^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n &= 0 \end{aligned}$$

olur. Genel terimlerini aynı yapmak için son ifadede $k = n + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + p(1 - q^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = 0$$

elde edilir. Serileri aynı $n = 1$ den başlatmak için $n = 0$ terimlerini ayrı yazarsak

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n + p(1 - q^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n - c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = 0$$

olup gereken düzenlemeler sonucunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n + p(1 - q^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = 0$$

elde edilir. Genel terimleri aynı olan serilerin katsayıları eşit olacağından

$$c_n + p(1 - q^{-1})c_{n-1} - c_n q^{-n} = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece

$$\begin{aligned} c_n(1 - q^{-n}) &= -p(1 - q^{-1})c_{n-1} \\ c_n &= \frac{-p(1 - q^{-1})}{1 - q^{-n}}c_{n-1} \end{aligned}$$

olur. Buradaki c_n ifadesi düzenlenirse

$$c_n = \frac{-p(q - 1)}{q^n - 1}q^{n-1}c_{n-1}$$

olarak bulunur. Elde edilen eşitlikten, c_n lerin genel formunu bulmak için n değerleri yerine yazılırsa;

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{-p(q - 1)}{q - 1}q^0c_0 \\ &= -p\frac{q - 1}{q - 1}q^0c_0 = -p\frac{1}{[1]_q}q^0c_0 \\ &= -p\frac{q^0}{[1]_q}c_0 = -p\frac{1}{[1]_{q^{-1}}}c_0 \\ \Rightarrow c_1 &= (-p)^1\frac{1}{[1]_{q^{-1}}}c_0 \end{aligned}$$

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-p(q - 1)}{q^2 - 1}qc_1 \\ &= \frac{-p(q - 1)}{q^2 - 1}q\frac{-p(q - 1)}{q - 1}q^0c_0 \\ &= \frac{p^2(q - 1)^2}{(q - 1)(q^2 - 1)}q^0qc_0 \\ &= p^2\frac{q - 1}{q - 1}\frac{q - 1}{q^2 - 1}q^0qc_0 = p^2\frac{1}{[1]_q}\frac{1}{[2]_q}q^0qc_0 \\ &= p^2\frac{q^0}{[1]_q}\frac{q^1}{[2]_q}c_0 = p^2\frac{1}{[1]_{q^{-1}}}\frac{1}{[2]_{q^{-1}}}c_0 \\ \Rightarrow c_2 &= (-p)^2\frac{1}{[1]_{q^{-1}}}\frac{1}{[2]_{q^{-1}}}c_0 \end{aligned}$$

$n = 3$ için;

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{-p(q-1)}{q^3-1} q^2 c_2 \\
&= \frac{-p(q-1)}{q^3-1} q^2 \frac{p^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} q c_0 \\
&= \frac{-p^3(q-1)^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} q q^2 c_0 \\
&= -p^3 \frac{q-1}{q-1} \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} q q^2 c_0 \\
&= -p^3 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} q q^2 c_0 \\
&= -p^3 \frac{q^0}{[1]_q} \frac{q}{[2]_q} \frac{q^2}{[3]_q} c_0 \\
c_3 &= -p^3 \frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[3]_{q^{-1}}} c_0 \\
\Rightarrow c_3 &= (-p)^3 \frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[3]_{q^{-1}}} c_0
\end{aligned}$$

$n = 4$ için;

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{-p(q-1)}{q^4-1} q^3 c_3 \\
&= \frac{-p(q-1)}{q^4-1} q^3 \frac{-p^3(q-1)^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} q q^2 c_0 \\
&= \frac{p^4(q-1)^4}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} q q^2 q^3 c_0 \\
&= p^4 \frac{q-1}{q-1} \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} \frac{q-1}{q^4-1} q q^2 q^3 c_0 \\
&= p^4 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} q q^2 q^3 c_0 \\
&= p^4 q^3 \frac{q^0}{[1]_q} \frac{q}{[2]_q} \frac{q^2}{[3]_q} \frac{q^3}{[4]_q} c_0 \\
&= p^4 \frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[3]_{q^{-1}}} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}} c_0 \\
\Rightarrow c_4 &= (-p)^4 \frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[3]_{q^{-1}}} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}} c_0
\end{aligned}$$

$\vdots$

bulunur. Bu ifadeler incelendiğinde genel terimin

$$\begin{aligned}
c_n &= (-p)^n \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \cdots \frac{1}{[n]_q} q q^2 \cdots q^{n-1} c_0 \\
&= (-p)^n \frac{q^0}{[1]_q} \frac{q}{[2]_q} \cdots \frac{q^{n-1}}{[n]_q} c_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= (-p)^n \frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \cdots \frac{1}{[n]_{q^{-1}}} c_0 \\
&= (-p)^n \frac{1}{[n]_{q^{-1}}!} c_0 = c_0 \frac{(-p)^n}{[n]_{q^{-1}}!}
\end{aligned}$$

şeklinde olduğu bulunur. Şimdi $u(x)$ çözümünde c_n ler yerine konulursa

$$\begin{aligned}
u_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{(-p)^n}{[n]_{q^{-1}}!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{(-px)^n}{[n]_{q^{-1}}!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$e_{q^{-1}}^x = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{x^n}{[n]_{q^{-1}}!}$$

olduğu kullanılırsa istenilen çözümün $u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-px}$ olduğu görülür. Ayrıca;

$$e_{q^{-1}}^x = E_q^x$$

olduğundan çözüm

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-px} = c_0 E_q^{-px}$$

şeklindedir. □

Örnek 3.2.6. $L_q^2(0, a)$ uzayında

$$D_{q^{-1}}u(x) + u(x) = 0$$

şeklindeki birinci mertebeden sabit katsayılı homojen q-diferansiyel denkleminin q-çözümü araştırılsın.

Verilen q-diferansiyel denklemde $D_{q^{-1}}$ türev operatörünün tanımı yerine yazıldığına

$$\frac{u(x) - u(q^{-1}x)}{(1 - q^{-1})x} + u(x) = 0$$

elde edilir. Burada gerekli düzenleme yapılsa

$$u(x) - u(q^{-1}x) + (1 - q^{-1})xu(x) = 0$$

$$u(q^{-1}x) = [1 + (1 - q^{-1})x]u(x)$$

bulunur. Son denklemde

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

kuvvet serisi yardımıyla çözümü aranırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (q^{-1}x)^n &= [1 + (1 - q^{-1})x] \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + (1 - q^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}\end{aligned}$$

olur. Genel terimlerini aynı yapmak için son ifadede $k = n + 1$ dönüşümü yapılarak serileri aynı $n = 1$ den başlatmak için $n = 0$ terimleri ayrı yazılırsa

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n + (1 - q^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

olup buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n + (1 - q^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

elde edilir. Böylece

$$c_n q^{-n} = c_n + (1 - q^{-1}) c_{n-1}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1 - q^{-1}}{q^{-n} - 1} c_{n-1} \\ &= -q^{n-1} \frac{q - 1}{q^n - 1} c_{n-1}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen eşitlikten, c_n lerin genel formunu bulmak için n değerleri yerine yazılırsa;

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{q - 1}{q - 1} c_0 \\ &= -\frac{1}{[1]_q} c_0 \\ &= -\frac{q^0}{[1]_q} c_0 \\ \Rightarrow c_1 &= -\frac{1}{[1]_{q^{-1}}} c_0\end{aligned}$$

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned}c_2 &= -q \frac{q - 1}{q^2 - 1} c_1 \\ &= q \frac{q - 1}{q^2 - 1} \frac{q - 1}{q - 1} c_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= q \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} c_0 \\
&= \frac{q^0}{[1]_q} \frac{q^1}{[2]_q} c_0 \\
\Rightarrow c_2 &= \frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} c_0
\end{aligned}$$

$n = 3$ için;

$$\begin{aligned}
c_3 &= -q^2 \frac{q-1}{q^3-1} c_2 \\
&= -q^3 \frac{q-1}{q^3-1} \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q-1} c_0 \\
&= -q^3 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} c_0 \\
&= -\frac{q^0}{[1]_q} \frac{q^1}{[2]_q} \frac{q^2}{[3]_q} c_0 \\
\Rightarrow c_3 &= -\frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[3]_{q^{-1}}} c_0
\end{aligned}$$

$n = 4$ için;

$$\begin{aligned}
c_4 &= -q^3 \frac{q-1}{q^4-1} c_3 \\
&= q^6 \frac{q-1}{q^4-1} \frac{q-1}{q^3-1} \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q-1} c_0 \\
&= q^6 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} c_0 \\
&= \frac{q^0}{[1]_q} \frac{q^1}{[2]_q} \frac{q^2}{[3]_q} \frac{q^3}{[4]_q} c_0 \\
\Rightarrow c_4 &= \frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[3]_{q^{-1}}} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}} c_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan genel terimin

$$\begin{aligned}
c_n &= (-1)^n \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \cdots \frac{1}{[n]_q} q q^2 \cdots q^{n-1} c_0 \\
&= (-1)^n \frac{q^0}{[1]_q} \frac{q^1}{[2]_q} \cdots \frac{q^{n-1}}{[n]_q} c_0 \\
&= (-1)^n \frac{1}{[1]_{q^{-1}}} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \cdots \frac{1}{[n]_{q^{-1}}} c_0 \\
&= (-1)^n \frac{1}{[n]_{q^{-1}}!} c_0 = c_0 \frac{(-1)^n}{[n]_{q^{-1}}!}
\end{aligned}$$

şeklinde olduğu bulunur. Şimdi $u(x)$ çözümünde c_n ler yerine konulursa

$$\begin{aligned} u_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{(-1)^n}{[n]_{q^{-1}}!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{(-x)^n}{[n]_{q^{-1}}!} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$e_{q^{-1}}^x = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{x^n}{[n]_{q^{-1}}!}$$

olduğu kullanılırsa istenilen çözümün $u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-x}$ olduğu görülür. Ek olarak

$$e_{q^{-1}}^x = E_q^x$$

olduğundan çözüm

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-x} = c_0 E_q^{-x}$$

şeklindedir. Dolayısıyla alınan q-diferansiyel denklemde $p = 1$ olmak üzere Teorem 3.2.3 de bulunan çözüm ile örtüştüğü görülür.

Ele alınan birinci mertebeden, sabit katsayılı (3.6) q-diferansiyel denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü araştırılsın.

Teorem 3.2.4. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden, sabit katsayılı, homojen olmayan

$$l(u(x)) = D_{q^{-1}}u(x) + pu(x) = b, \quad b \in \mathbb{C}$$

q-diferansiyel denklemin çözümü $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_{q^{-1}}^{-px}$$

veya

$$u_q(x) = c_0 E_q^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} E_q^{-px}$$

şeklindedir.

İspat. Verilen birinci mertebeden, sabit katsayılı, homojen olmayan q-diferansiyel denklemi

$$D_q u(q^{-1}x) + pu(x) = b$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada $q^{-1}x = t$ dönüşümü yapılırsa

$$D_q u(x) + pu(qx) = b$$

eşitliği elde edilir.

l , q -diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümünün

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-px} = c_0 E_q^{-px}$$

olduğu bulunmuştur. Şimdi verilen homojen olmayan q -diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi metodu kullanılırsa

$$u_q(x) = c(x) e_{q^{-1}}^{-px}$$

şeklinde çözüm aranır. Aynı zamanda

$$u_q(qx) = c(qx) e_{q^{-1}}^{-pqx}$$

olacağından, bu çözümler verilen denklemde yerine yazılırsa

$$D_q(c(x) e_{q^{-1}}^{-px}) + pc(qx) e_{q^{-1}}^{-pqx} = b$$

olur. D_q türev operatörünün çarpım kuralı kullanıldığında

$$e_{q^{-1}}^{-px} D_q c(x) + c(qx) D_q(e_{q^{-1}}^{-px}) + pc(qx) e_{q^{-1}}^{-pqx} = b$$

elde edilir. $D_q e_{q^{-1}}^{ax} = a e_{q^{-1}}^{ax}$ olduğundan

$$\begin{aligned} e_{q^{-1}}^{-px} D_q c(x) - pc(qx) e_{q^{-1}}^{-pqx} + pc(qx) e_{q^{-1}}^{-pqx} &= b \\ e_{q^{-1}}^{-px} D_q c(x) &= b \end{aligned}$$

bulunur. Burada $e_q^x e_{q^{-1}}^{-x} = 1$ bağıntısı kullanılırsa

$$D_q c(x) = b e_q^{px}$$

elde edilir. Her iki tarafın 0 dan x e q -integrali alındığında

$$\int_0^x D_q c(t) d_q t = \int_0^x b e_q^{pt} d_q t$$

olup

$$c(x) - c(0) = b \int_0^x e_q^{pt} d_q t$$

ifadesinde gereken işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} c(x) &= c(0) + b \int_0^x e_q^{pt} d_q t \\ &= c(0) + b \left(\frac{1}{p} e_q^{pt} \Big|_0^x \right) \\ &= c(0) + \frac{b}{p} (e_q^{px} - e_q^0) \\ &= c(0) + \frac{b}{p} e_q^{px} - \frac{b}{p} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$c(x) = c(0) + \frac{b}{p} e_q^{px} - \frac{b}{p}$$

olur. Şimdi $c(x)$ istenilen çözümde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_q(x) &= c(x) e_{q^{-1}}^{-px} \\ &= \left(c(0) + \frac{b}{p} e_q^{px} - \frac{b}{p} \right) e_{q^{-1}}^{-px} \\ &= c(0) e_{q^{-1}}^{-px} + \frac{b}{p} e_q^{px} e_{q^{-1}}^{-px} - \frac{b}{p} e_{q^{-1}}^{-px} \\ &= c(0) e_{q^{-1}}^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_{q^{-1}}^{-px} \end{aligned}$$

olduğundan

$$u_q(x) = c(0) e_{q^{-1}}^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_{q^{-1}}^{-px}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece l birinci mertebeden homojen olmayan q -diferansiyel denkleminin çözümü

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_{q^{-1}}^{-px}$$

veya

$$u_q(x) = c_0 E_q^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} E_q^{-px}$$

şeklindedir. □

Şimdi bu teoriye bir örnek verilsin.

Örnek 3.2.7. Birinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan

$$D_{q^{-1}}u(x) + u(x) = -8$$

şeklindeki q-diferansiyel denkleminin $L_q^2(0, a)$ uzayında q-çözümü araştırılsın.

Verilen q-diferansiyel denklemi

$$D_q u(q^{-1}x) + u(x) = -8$$

şeklinde düzenlenip $q^{-1}x = t$ dönüşümü yapılırsa

$$D_q u(x) + u(qx) = -8$$

eşitliği elde edilir.

l , q-diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümünün Örnek 3.2.6 da

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-x} = c_0 E_q^{-x}$$

olduğu bulunmuştur. Şimdi verilen homojen olmayan q-diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi metodu kullanılarak

$$u_q(x) = c(x) e_{q^{-1}}^{-x}$$

şeklinde çözüm aranır

$$D_q(c(x) e_{q^{-1}}^{-x}) + c(qx) e_{q^{-1}}^{-qx} = -8$$

olup gerekli düzenlemeler sonucunda

$$e_{q^{-1}}^{-x} D_q c(x) + c(qx) D_q(e_{q^{-1}}^{-x}) + c(qx) e_{q^{-1}}^{-qx} = -8$$

elde edilir. $D_q e_{q^{-1}}^{ax} = a e_{q^{-1}}^{ax}$ olduğundan

$$e_{q^{-1}}^{-x} D_q c(x) - c(qx) e_{q^{-1}}^{-qx} + c(qx) e_{q^{-1}}^{-qx} = -8$$

$$e_{q^{-1}}^{-x} D_q c(x) = -8$$

bulunur. Burada $e_q^x e_{q^{-1}}^{-x} = 1$ bağıntısı kullanılırsa

$$D_q c(x) = -8 e_q^x$$

elde edilir. $c(x)$ fonksiyonunu bulmak için

$$\int_0^x D_q c(t) d_q t = - \int_0^x 8e_q^{pt} d_q t$$

ve

$$c(x) - c(0) = -8 \int_0^x e_q^t d_q t \quad .$$

Buradan

$$\begin{aligned} c(x) &= c(0) - 8 \int_0^x e_q^t d_q t \\ &= c(0) - 8(e_q^t|_0^x) \\ &= c(0) - 8(e_q^x - e_q^0) \\ &= c(0) - 8e_q^x + 8 \end{aligned}$$

olup

$$c(x) = c(0) - 8e_q^x + 8$$

elde edilir. Şimdi $c(x)$ istenilen çözümde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_q(x) &= c(x)e_{q^{-1}}^{-x} \\ &= (c(0) - 8e_q^x + 8)e_{q^{-1}}^{-x} \\ &= c(0)e_{q^{-1}}^{-x} - 8e_q^x e_{q^{-1}}^{-x} + 8e_{q^{-1}}^{-x} \\ &= c(0)e_{q^{-1}}^{-x} - 8 + 8e_{q^{-1}}^{-x} \end{aligned}$$

olduğundan birinci mertebeden homojen olmayan q-diferansiyel denkleminin çözümü

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-x} - 8 + 8e_{q^{-1}}^{-x}$$

veya

$$u_q(x) = c_0 E_q^{-x} - 8 + 8E_q^{-x}$$

şeklinde olduğu bulunur. Dolayısıyla alınan q-diferansiyel denklemde $p = 1$ ve $b = -8$ olmak üzere Teorem 3.2.4 te bulunan çözüm ile örtüştüğü görülür.

$L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden, değişken katsayılı

$$l(u(x)) = D_{q^{-1}} u(x) + p(x)u(x) \tag{3.7}$$

q-diferansiyel ifadesi düşünölsün. Sırasıyla homojen ve homojen olmayan çözümlerinin araştırılması aşğıdaki gibidir.

İlk önce verilen (3.7) q-diferansiyel denkleminin homojen kısmının çözümlü incelesin. Bu çözümlü bulabilmek için iki yöntem verilebilir:

I. Yöntem: $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında (3.7) q-diferansiyel denkleminde türev ifadesi yerine yazılırsa

$$l(u(x)) = \frac{u(q^{-1}x) - u(x)}{(q^{-1} - 1)x} + p(x)u(x)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

$$\frac{u(q^{-1}x) - u(x)}{(q^{-1} - 1)x} + p(x)u(x) = 0$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} q \frac{u(q^{-1}x) - u(x)}{(1 - q)x} + p(x)u(x) &= 0 \\ q(u(q^{-1}x) - u(x)) + (1 - q)xp(x)u(x) &= 0 \\ qu(q^{-1}x) - qu(x) + (1 - q)xp(x)u(x) &= 0 \\ qu(q^{-1}x) &= [q + (q - 1)xp(x)]u(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte çözüm

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

kuvvet serisi şeklinde aranılırsa ve

$$u(q^{-1}x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q^{-1}x)^n$$

olduğı eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} q \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q^{-1}x)^n &= [q + (q - 1)xp(x)] \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ q \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n &= q \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + (q - 1)p(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Genel terimlerini aynı yapmak için son ifadede $k = n + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$q \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = q \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + (q - 1)p(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

olup buradan

$$qc_0 + q \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = qc_0 + q \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + (q-1)p(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

ve böylece

$$q \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = q \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + (q-1)p(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

elde edilir.

Yukarıdaki son eşitlikten

$$\sum_{n=0}^{\infty} qc_n q^{-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [qc_n + (q-1)p(x)c_{n-1}] x^n$$

şeklinde iki serinin eşitliği bulunur. $p(x)$ fonksiyonunun nasıl verildiği dikkate alınarak istenilen c_n katsayıları belirlenebilir.

Örnek 3.2.8. $L_q^2(0, a)$ uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı, homojen

$$D_{q^{-1}}u(x) - 6xu(x) = 0$$

q -diferansiyel denkleminin q -çözümü araştırılsın.

Verilen birinci mertebeden l , q -diferansiyel denkleminde $D_{q^{-1}}$ türev operatörü yerine yazılırsa

$$l(u(x)) = \frac{u(q^{-1}x) - u(x)}{(q^{-1} - 1)x} - 6xu(x)$$

olup

$$\frac{u(q^{-1}x) - u(x)}{(q^{-1} - 1)x} - 6xu(x) = 0$$

bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} u(q^{-1}x) - u(x) - 6(q^{-1} - 1)x^2u(x) &= 0 \\ u(q^{-1}x) &= [1 + 6(q^{-1} - 1)x^2]u(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte kuvvet serisi şeklinde çözüm yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q^{-1}x)^n &= [1 + 6(q^{-1} - 1)x^2] \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 6(q^{-1} - 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + (q^{-1} - 1) \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$$

olup buradan

$$c_0 + c_1 q^{-1} x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n q^{-n} x^n = c_0 + c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n + 6(q^{-1} - 1) \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$$

bulunur. İki serinin eşitliğinden $c_1 q^{-1} = c_1$ olup, $0 < q < 1$ olduğundan

$$c_1 = 0$$

bulunur. Ayrıca

$$c_n q^{-n} = c_n + 6(q^{-1} - 1) c_{n-2}$$

ifadesinden

$$c_n = \frac{6(q^{-1} - 1)}{q^{-n} - 1} c_{n-2} = 6q^{n-1} \frac{1 - q}{1 - q^n} c_{n-2}$$

şeklinde c_n ler bulunur. Bu son eşitlikten, c_n lerin genel formunu belirlemek için n değerleri yerine yazılırsa;

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned} c_2 &= 6q \frac{1 - q}{1 - q^2} c_0 \\ &= 6q \frac{1}{[2]_q} c_0 \\ \Rightarrow c_2 &= 6 \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} c_0 \end{aligned}$$

$n = 3$ için;

$$\begin{aligned} c_3 &= 6q^2 \frac{1 - q}{1 - q^3} c_1 \\ \Rightarrow c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$n = 4$ için;

$$\begin{aligned} c_4 &= 6q^3 \frac{1 - q}{1 - q^4} c_2 \\ &= 6q^3 \frac{1 - q}{1 - q^4} 6 \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} c_0 \\ &= 6^2 q^3 \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} c_0 \\ \Rightarrow c_4 &= 6^2 \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}} c_0 \end{aligned}$$

$n = 5$ için;

$$c_5 = 6q^4 \frac{1-q}{1-q^5} c_3$$

$$\Rightarrow c_5 = 0$$

$n = 6$ için;

$$c_6 = 6q^5 \frac{1-q}{1-q^6} c_4$$

$$= 6q^5 \frac{1-q}{1-q^6} 6^2 \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}} c_0$$

$$= 6^3 q^5 \frac{1}{[6]_q} \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}} c_0$$

$$\Rightarrow c_6 = 6^3 \frac{1}{[2]_{q^{-1}}} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}} \frac{1}{[6]_{q^{-1}}} c_0$$

$$\vdots$$

olduğu görülür. Buradan

$$c_{2n} = \frac{6^n}{[2]_{q^{-1}} [4]_{q^{-1}} \cdots [2n]_{q^{-1}}} c_0$$

ve diğer terimler de

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$[2]_{q^{-1}} = \frac{1-q^2}{(1-q)q}$$

$$[4]_{q^{-1}} = \frac{1-q^4}{(1-q)q^3} = \frac{1-q^2}{(1-q)q} \frac{1+q^2}{q^2}$$

$$= [2]_{q^{-1}} \frac{1+q^2}{q^2}$$

$$[6]_{q^{-1}} = \frac{1-q^6}{(1-q)q^5} = \frac{1-q^2}{(1-q)q} \frac{1+q^2+q^4}{q^4}$$

$$= [2]_{q^{-1}} \frac{1+q^2+q^4}{q^4}$$

$$\vdots$$

eşitlikleri kullanıldığında

$$[2]_{q^{-1}} [4]_{q^{-1}} [6]_{q^{-1}} \cdots [2n]_{q^{-1}} = [2]_{q^{-1}} [2]_{q^{-1}} \frac{1+q^2}{q^2} [2]_{q^{-1}} \frac{1+q^2+q^4}{q^4} \cdots$$

$$[2]_{q^{-1}} \frac{1+q^2+q^4 \cdots + q^{2n-2}}{q^{2n-2}}$$

$$[2]_{q^{-1}}[4]_{q^{-1}}[6]_{q^{-1}} \cdots [2n]_{q^{-1}} = [2]_{q^{-1}}^n \frac{1+q^2}{q^2} \frac{1+q^2+q^4}{q^4} \cdots \frac{1+q^2+q^4 \cdots + q^{2n-2}}{q^{2n-2}}$$

elde edilir. q^{-1} benzer ifadenin faktöriyeli

$$[n]_{q^{-1}}! = \frac{1+q}{q} \frac{1+q+q^2}{q^2} \cdots \frac{1+q+q^2 \cdots + q^{n-1}}{q^{n-1}}$$

olduğu bilindiğine göre q^{-2} benzer ifadenin faktöriyeli de

$$[n]_{q^{-2}}! = \frac{1+q^2}{q^2} \frac{1+q^2+q^4}{q^4} \cdots \frac{1+q^2+q^4 \cdots + q^{2n-2}}{q^{2n-2}}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$[2]_{q^{-1}}[4]_{q^{-1}}[6]_{q^{-1}} \cdots [2n]_{q^{-1}} = [2]_{q^{-1}}^n [n]_{q^{-2}}!$$

elde edilir. Bütün bu eşitlikler $u(x)$ çözümünde kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{6^n}{[2]_{q^{-1}}[4]_{q^{-1}} \cdots [2n]_{q^{-1}}} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{6^n}{[2]_{q^{-1}}^n [n]_{q^{-2}}!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \left(\frac{6x^2}{[2]_{q^{-1}}} \right)^n \frac{1}{[n]_{q^{-2}}!} \end{aligned}$$

olup Díaz ve Teruel (2005)'e göre

$$e_{q,k}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{q^k}!}$$

olduğundan istenilen çözüm

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1},2}^{\frac{6x^2}{[2]_{q^{-1}}}} = c_0 E_{q,2}^{\frac{6x^2}{[2]_q}}$$

olarak bulunmuş olur.

II. Yöntem: $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı

$$D_{q^{-1}}u(x) + p(x)u(x) = 0$$

q -diferansiyel denklemini çözmek için öncelikle integral denklemi olarak yazılabilir.

Bunun için

$$D_{q^{-1}}u(x) = -p(x)u(x)$$

eşitliğinin her tarafının 0 dan x e q -integrali alınır

$$\int_0^x D_{q^{-1}}u(t) d_q t = \int_0^x -p(t)u(t) d_q t$$

olup

$$\int_0^x D_q u(q^{-1}t) d_q t = \int_0^x -p(t)u(t) d_q t$$

buradan

$$u(q^{-1}x) - u(0) = - \int_0^x p(t)u(t) d_q t$$

elde edilir. Böylece (3.4) q -diferansiyel denkleminin integral denklemi

$$u(q^{-1}x) = u(0) - \int_0^x p(t)u(t) d_q t$$

şeklinde olup istenilen çözüm yaklaşım yöntemi kullanılarak bulunabilir.

Şimdi Picard Yaklaşım Yöntemi ile çözülebilecek bir örnek verilsin.

Örnek 3.2.9. $L_q^2(0, a)$ uzayında alınan

$$D_{q^{-1}}u(x) - x^3u(x) = 0$$

ve $u_q(0) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümü Picard Yaklaşım Yöntemi ile bulunsun.

$L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı

$$D_{q^{-1}}u(x) - x^3u(x) = 0$$

q -diferansiyel denklemini çözmek için öncelikle integral denklemi olarak yazılsın.

Bunun için

$$D_{q^{-1}}u(x) = x^3u(x)$$

eşitliğinin her tarafının 0 dan x e q -integrali alınır

$$\int_0^x D_{q^{-1}}u(t) d_q t = \int_0^x t^3u(t) d_q t$$

olup

$$\int_0^x D_q u(q^{-1}t) d_q t = \int_0^x t^3u(t) d_q t$$

elde edilir. Burada soldaki integral ifadesinin alınabilmesi için $q^{-1}t = k$ dönüşümü uygulanması gerekmektedir. Bu dönüşüm sonucunda

$$\int_0^{q^{-1}x} D_q u(t) q d_q t = \int_0^x t^3 u(t) d_q t$$

$$q \int_0^{q^{-1}x} D_q u(t) d_q t = \int_0^x t^3 u(t) d_q t$$

olup

$$q[u(q^{-1}x) - u(0)] = \int_0^x t^3 u(t) d_q t$$

bulunur. Böylece; verilen q-diferansiyel denkleminin integral denklemi

$$u(q^{-1}x) = u(0) + \frac{1}{q} \int_0^x t^3 u(t) d_q t$$

şeklinde olur. Picard yaklaşımını kullanabilmek için x yerine qx yazılırsa

$$u(x) = u(0) + \frac{1}{q} \int_0^{qx} t^3 u(t) d_q t$$

elde edilir. Şimdi, $u_q(x)$ i bulmak için Picard Yaklaşım Yöntemi kullanılabilir. Buradan bu yöntem sonucunda

$$u_0 = 1 \quad \text{ve} \quad u_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{q} \int_0^{qx} t^3 u_n(t) d_q t$$

olur. Son ifadeden

$n = 0$ için;

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 + \frac{1}{q} \int_0^{qx} t^3 u_0(t) d_q t \\ &= 1 + \frac{1}{q} \int_0^{qx} t^3 d_q t \\ &= 1 + \frac{1}{q} \frac{t^4}{[4]_q} \Big|_0^{qx} \\ &= 1 + \frac{q^3 x^4}{[4]_q} \end{aligned}$$

$n = 1$ için;

$$u_2(x) = 1 + \frac{1}{q} \int_0^{qx} t^3 u_1(t) d_q t$$

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= 1 + \frac{1}{q} \int_0^{qx} t^3 \left(1 + \frac{q^3 t^4}{[4]_q} \right) d_q t \\
&= 1 + \frac{1}{q} \left(\frac{t^4}{[4]_q} + \frac{q^3 t^8}{[4]_q [8]_q} \right) \Big|_0^{qx} \\
&= 1 + \frac{q^3 x^4}{[4]_q} + \frac{q^{10} x^8}{[4]_q [8]_q}
\end{aligned}$$

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= 1 + \frac{1}{q} \int_0^{qx} t^3 u_2(t) d_q t \\
&= 1 + \frac{1}{q} \int_0^{qx} t^3 \left(1 + \frac{q^3 t^4}{[4]_q} + \frac{q^{10} t^8}{[4]_q [8]_q} \right) d_q t \\
&= 1 + \frac{1}{q} \left(\frac{t^4}{[4]_q} + \frac{q^3 t^8}{[4]_q [8]_q} + \frac{q^{10} t^{12}}{[4]_q [8]_q [12]_q} \right) \Big|_0^{qx} \\
&= 1 + \frac{q^3 x^4}{[4]_q} + \frac{q^{10} x^8}{[4]_q [8]_q} + \frac{q^{21} x^{12}}{[4]_q [8]_q [12]_q} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada

$$\begin{aligned}
u_q(x) &= 1 + \frac{q^3 x^4}{[4]_q} + \frac{q^{10} x^8}{[4]_q [8]_q} + \frac{q^{21} x^{12}}{[4]_q [8]_q [12]_q} + \dots \\
&= 1 + \frac{x^4}{[4]_{q^{-1}}} + \frac{x^8}{[4]_{q^{-1}} [8]_{q^{-1}}} + \frac{x^{12}}{[4]_{q^{-1}} [8]_{q^{-1}} [12]_{q^{-1}}} + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned}
[4]_{q^{-1}} &= \frac{1 - q^4}{(1 - q)q^3} \\
[8]_{q^{-1}} &= \frac{1 - q^8}{(1 - q)q^7} \\
&= \frac{1 - q^4}{(1 - q)q^3} \frac{1 + q^4}{q^4} \\
&= [4]_{q^{-1}} \frac{1 + q^4}{q^4} \\
[12]_{q^{-1}} &= \frac{1 - q^{12}}{(1 - q)q^{11}} \\
&= \frac{1 - q^4}{(1 - q)q^3} \frac{1 + q^4 + q^8}{q^8} \\
&= [4]_{q^{-1}} \frac{1 + q^4 + q^8}{q^8} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} [4]_{q^{-1}}[8]_{q^{-1}}[12]_{q^{-1}} \cdots [4n]_{q^{-1}} &= [4]_{q^{-1}}[4]_{q^{-1}} \frac{1+q^4}{q^4} [4]_{q^{-1}} \frac{1+q^4+q^8}{q^8} \cdots \\ &\quad [4]_{q^{-1}} \frac{1+q^4+q^8 \cdots + q^{4n-4}}{q^{4n-4}} \\ &= [4]_{q^{-1}}^n \frac{1+q^4}{q^4} \frac{1+q^4+q^8}{q^8} \cdots \frac{1+q^4+q^8 \cdots + q^{4n-4}}{q^{4n-4}} \end{aligned}$$

elde edilir. q^{-1} benzer ifadenin faktöriyeli

$$[n]_{q^{-1}}! = \frac{1+q}{q} \frac{1+q+q^2}{q^2} \cdots \frac{1+q+q^2 \cdots + q^{n-1}}{q^{n-1}}$$

olduğu bilindiğine göre q^{-4} benzer ifadenin faktöriyeli de

$$[n]_{q^{-4}}! = \frac{1+q^4}{q^4} \frac{1+q^4+q^8}{q^8} \cdots \frac{1+q^4+q^8 \cdots + q^{4n-4}}{q^{4n-4}}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$[4]_{q^{-1}}[8]_{q^{-1}}[12]_{q^{-1}} \cdots [4n]_{q^{-1}} = [4]_{q^{-1}}^n [n]_{q^{-4}}!$$

elde edilir. Şimdi $u(x)$ çözümünde c_n ler yerine konulursa

$$\begin{aligned} u_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}[8]_{q^{-1}} \cdots [4n]_{q^{-1}}} x^{4n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[4]_{q^{-1}}^n [n]_{q^{-4}}!} x^{4n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^4}{[4]_{q^{-1}}} \right)^n \frac{1}{[n]_{q^{-4}}!} \end{aligned}$$

elde edilir. Díaz ve Teruel (2005)'e göre

$$e_{q,k}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{q^k}!}$$

olduğundan istenilen çözüm

$$u_q(x) = e_{q^{-1},4}^{\frac{x^4}{[4]_{q^{-1}}}} = E_{q,4}^{\frac{x^4}{[4]_q}}$$

şeklindedir.

Görüldüğü gibi birinci mertebeden değişken katsayılı homojen q-diferansiyel denkleminin çözümünün bulunma işlemi katsayıda verilen fonksiyona göre değişiklik göstermektedir.

Bölümün son teoremi olan (3.7) q-diferansiyel denkleminin homojen olmayan kısmının incelenmesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2.5. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden, değişken katsayılı, homojen olmayan

$$l(u(x)) = D_{q^{-1}}u(x) + p(x)u(x) = b(x)$$

q-diferansiyel denkleminde, $y_0(x)$ aynı q-diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümüdür. Buna göre; verilen q-diferansiyelin çözümü $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u_q(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(t)} d_q t \right) y_0(x)$$

şeklindedir.

İspat. Verilen q-diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümü $y_0(x)$ olarak alın-sın. Parametrelerin değişimi yöntemi yardımıyla homojen kısmın çözümü

$$u_q(x) = c(x)y_0(x)$$

şeklinde olacaktır. Bangerezako (2008)'ya göre parametrelerin değişimi yönteminde istenilen $c(x)$ fonksiyonlarının

$$y_0(x)D_q c(x) = b(x)$$

eşitliğini sağlayan $c(x)$ ler olduğu bulunmuştur. Buradan

$$D_q c(x) = \frac{b(x)}{y_0(x)}$$

olup 0 dan x e her iki tarafın integrali alınır

$$c(x) - c(0) = \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(t)} d_q t$$

ve buradan

$$c(x) = c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(t)} d_q t$$

elde edilir. Böylece; (3.7) q-diferansiyel denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü

$$u_q(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(t)} d_q t \right) y_0(x)$$

şeklinde olduğu bulunur. □

Örnek 3.2.10. $L_q^2(0, a)$ uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı, homojen olmayan

$$D_{q^{-1}}u(x) - 6xu(x) = 5x^2 - 4$$

q-diferansiyel denkleminin q-çözümü araştırılsın.

Verilen q-diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümünün

$$y_0(x) = c_0 E_{q,2}^{\frac{6x^2}{[2]_q}}$$

olduğu bulunmuştur. Homojen olmayan kısmın çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi yöntemi kullanılsın. O halde

$$u_q(x) = c(x) E_{q,2}^{\frac{6x^2}{[2]_q}}$$

şeklinde çözüm aranmalıdır. Teorem 3.2.5 e göre bu çözümdeki $c(x)$ fonksiyonunun

$$y_0(x) D_q c(x) = b(x)$$

denklemini sağlaması gerektiği verilmiştir. Öyleyse

$$D_q c(x) = \frac{5x^2 - 4}{E_{q,2}^{\frac{6x^2}{[2]_q}}}$$

olup istenilen $c(x)$ fonksiyonları

$$c(x) = c(0) + \int_0^x \frac{5t^2 - 4}{E_{q,2}^{\frac{6t^2}{[2]_q}}} d_q t$$

eşitliği tarafından bulunur. Böylelikle; q-diferansiyel denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü

$$u_q(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{5t^2 - 4}{E_{q,2}^{\frac{6t^2}{[2]_q}}} d_q t \right) E_{q,2}^{\frac{6x^2}{[2]_q}}$$

şeklinde olduğu görülür.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ile normal analizde var olan sonuçların karşılaştırılması aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında alınan D_q ve $D_{q^{-1}}$ türev operatörlerinin verilen sınır şartları altında eşleniklerinin sırasıyla $-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}$ ve $-qD_q$ şeklinde olduğu görülmüştür. Fakat normal analizde ise birinci mertebeden D türev operatörünün eşleniğinin $-D$ olduğu bilinmektedir.
2. Analiz ve q-analizde alınan birinci mertebeden türev operatörleri simetrik ve özeşlenik değildirler.
3. $L_q^2(0, a)$ uzayında alınan birinci mertebeden türev operatörü normal değilken, $L^2(0, a)$ uzayında alınan birinci mertebeden türev operatörü normaldir.
4. Uygun uzayda alınan

$$l(u) = Du + pu$$

ve

$$l(u_q) = D_q u_q + pu_q \quad \text{ile} \quad l(u_q) = D_{q^{-1}} u_q + pu_q$$

birinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin homojen kısımlarının çözümleri $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere sırasıyla

$$u(x) = c_0 e^{-px}$$

ve

$$u_q(x) = c_0 e_q^{-px} \quad \text{ile} \quad u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-px}$$

şeklindedir. Burada

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ve

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} \quad \text{ile} \quad e_{q^{-1}}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{q^{-1}}!}$$

şeklinde olup alınan uzaydaki çözümler birbirinin q-benzeridir.

5. Örnek 3.1.1 ve Örnek 3.2.6 da alınan sabit katsayılı homojen q-diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$u_q(x) = c_0 e_q^{2x}$$

ve

$$u_q(x) = c_0 e_q^{-x} = c_0 E_q^{-x}$$

olarak bulunmuştur. Normal analizde düşünüldüğünde aynı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin

$$u(x) = c_0 e^{2x}$$

ve

$$u(x) = c_0 e^{-x}$$

olduğu bilinmektedir. Buradan görülüyor ki alınan çözümler birbirinin q-benzeridir.

6. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında

$$l(u_q) = D_q u_q + p u_q = b$$

ve

$$l(u_q) = D_{q^{-1}} u_q + p u_q = b$$

birinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin homojen olmayan kısmının çözümlerinin $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u_q(x) = c_0 e_q^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_q^{-px}$$

ve

$$u_q(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e_{q^{-1}}^{-px}$$

şeklinde olduğu bulunmuştu. $L^2(0, a)$ uzayında ise birinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemin homojen olmayan kısmının çözümü

$$u(x) = c_0 e^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} e^{-px}$$

şeklindedir.

7. Örnek 3.1.2 ve Örnek 3.2.7 de alınan q-diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$u_q(x) = c_0 e_q^{2x} + \frac{5}{2} e_q^{2x} - \frac{5}{2}$$

ve

$$u_q(x) = c_0 E_q^{-x} + 8 e_q^{-x} - 8$$

olarak bulundu. Normal analizde ise aynı problemlerin çözümleri kolayca

$$u(x) = c_0 e^{2x} + \frac{5}{2} e^{2x} - \frac{5}{2}$$

ve

$$u(x) = c_0 e^{-x} + 8e^{-x} - 8$$

şeklinde olduğu bulunabilir. Burada çözümlerin birbirinin q-benzeri olduğu görülse de çözüm yöntemleri birbirinden farklılık göstermektedir.

8. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı homojen

$$l(u_q(x)) = D_q u_q(x) + p(x)u_q(x) = 0$$

ve

$$l(u_q(x)) = D_{q^{-1}} u_q(x) + p(x)u_q(x) = 0$$

q-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması

$$l(u(x)) = Du(x) + p(x)u(x) = 0$$

diferansiyel denklemindeki kadar kolay değildir. Çünkü

$$D_q u_q(x) + p(x)u_q(x) = 0$$

denklemini gözönüne alınırsa

$$\frac{d_q u_q(x)}{d_q x} = -p(x)u_q(x)$$

olup

$$\frac{d_q u_q(x)}{u_q(x)} = -p(x)d_q x$$

eşitliğinin 0 dan x e kadar integrali alındığında

$$\int_0^x \frac{d_q u_q(t)}{u_q(t)} d_q t = \int_0^x -p(t) d_q t$$

bulunur. Şimdi $\ln x$ fonksiyonun D_q operatörüne bakılırsa

$$\begin{aligned} D_q \ln x &= \frac{\ln qx - \ln x}{(q-1)x} \\ &= \frac{\ln \frac{qx}{x}}{(q-1)x} \\ &= \frac{\ln q}{(q-1)x} \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$D_q \ln x = \frac{\ln q}{q-1} \frac{1}{x}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\int \frac{1}{x} d_q x = \frac{q-1}{\ln q} \ln x$$

olmalıdır. Jackson integralinde $1/x$ ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} \int f(x) d_q x &= (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) \\ &= (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{1}{q^j x} \\ &= (1-q) \sum_{j=0}^{\infty} 1 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\int \frac{1}{u(x)} d_q u(x) = \infty$$

elde edilir. Böylece $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun Jackson integrali olmadığı söylenebilir. Dolayısıyla $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden değişken katsayılı homojen q -diferansiyel denklemin çözümünde normal analizdeki yöntem kullanılarak çözüm aramak yanlış olur.

9. Örnek 3.1.3 ve Örnek 3.2.8 de görüldüğü gibi değişken katsayılı homojen q -diferansiyel denklemlerin sırasıyla çözümleri

$$u_q(x) = c_0 e_{q,3}^{\frac{7x^3}{[3]_q}}$$

ve

$$u_q(x) = c_0 E_{q,2}^{\frac{6x^2}{[2]_q}}$$

şeklinde olup aynı denklemlerin normal analizde çözümleri ise $u(x) = c_0 e^{\frac{7x^3}{3}}$ ve $u(x) = c_0 e^{3x^2}$ olduğu bilinmektedir.

10. Analizde olduğu gibi q -analizde de Picard Yöntemi kullanılabilir. Aynı basamaklar kullanılarak istenilen çözümün ne olduğu belirlenebilmektedir. Örnek 3.1.4 ve Örnek 3.2.9 a bakılacak olursa alınan problemin çözümünün ve q -çözümünün birbirinin q -benzeri olduğu görülür.

11. $L^2(0, a)$ ve $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzaylarında incelenen (Örnek 3.1.5 ve 3.2.10) değişken katsayılı homojen olmayan denklemlerin çözümlerinin birbirinin q -benzeri olduğunu

görmek zor değildir. Sadece q -analizde, analizdeki kadar hızlı sadeleştirme ve işlem pratiği yapmak mümkün değildir. Örneğin; $\frac{6}{2} = 3$ iken $\frac{6}{[2]_q}$ nin kendi şeklinde kullanılması gibi.

12. $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında alınan

$$l(u(x)) = D_q u(x) + p(x)u(x) = b(x)$$

ve

$$l(u(x)) = D_{q^{-1}} u(x) + p(x)u(x) = b(x)$$

birinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin homojen olmayan çözümleri $c_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u_q(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(qt)} d_q t \right) y_0(x)$$

ve

$$u_q(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(t)} d_q t \right) y_0(x)$$

olarak bulundu. $L^2(0, a)$ Hilbert uzayında ise

$$l(u(x)) = Du(x) + p(x)u(x) = b(x)$$

şeklindeki birinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin homojen olmayan çözümünün

$$u(x) = \left(c(0) + \int_0^x \frac{b(t)}{y_0(t)} dt \right) y_0(x)$$

olduğu açıktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması neticesinde aşağıdaki şekilde bazı önerilerde bulunabılır:

1. Tezde alınan sonuçlar diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri teorisinde çözülmek istenen bazı problemlerin çözümlerinin araştırılmasında kolaylık sağlayabilir.
2. Katsayıların özeşlenik veya normal operatör olduğu durumda da aynı problem başlı başına yeni bir inceleme konusu olabilir.
3. Birinci mertebede ele alınan bir problemin spektral yapısının incelenmesi ayrı bir araştırma konusu olabilir.
4. Birinci mertebeden özeşlenik olan

$$l(u) = D_q u - \frac{1}{q} D_{q^{-1}} u$$

diferansiyel ifadesinin genişlemeleri ve asimptotik davranışları serbest bir inceleme alanı olarak araştırılabilir.

5. q-Analizde alınan bu sonuçların fiziksel modellere yeni uygulama alanları olup olmadığı aranabilir.

KAYNAKLAR

- Abu-Risha, M.H., Annaby, M.H., Ismail, M.E.H., Mansour, Z.S., 2007. Linear q-Difference Equations. Zeitschrift Für Analysis Und Ihre Anwendungen, 26(4), 481-494.
- Allahverdiev, B.P., Tuna, H., 2017. Spectral Analysis of q-Fractional Sturm-Liouville Operators. Electronic Journal of Differential Equations, 2017(136), 1-17.
- Annaby, M.H., Mansour, Z.S., 2005. Basic Sturm-Liouville Problems. Journal of Physics A: Mathematical and General, 38(17), 3775-3797.
- Annaby, M.H., Mansour, Z.S., 2012. q-Fractional Calculus and Equations. Springer, Berlin, 318 p.
- Bairamov, E., Öztürk Mert, R., Ismailov, Z.I., 2012. Selfadjoint Extensions of a Singular Differential Operator. Journal of Mathematical Chemistry, 50(5), 1100-1110.
- Bangerezako, G., 2008. An Introduction to q-Difference Equations, <https://cdn.uclouvain.be/public/Exports%20reddot/math/documents/RAPSEM354.pdf> (05.10.2018).
- Díaz, R., Teruel, C., 2005. q,k-Generalized Gamma and Beta Functions. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 12(1), 118-134.
- Eastham, M.S.P., 1970. Theory of Ordinary Differential Equations. Van Nostrand Reinhold, London, 116 p.
- Ernst, T., 2000. The History of q-Calculus and a New Method. U. U. D. M. Report 2000:16, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Uppsala University.
- Ernst, T., 2012. A Comprehensive Treatment of q-Calculus. Springer, Basel, 490 p.
- Gorbachuk, V.I., Gorbachuk, M.L., 1973. Boundary Value Problems for a First Order Differential Operator with Operator Coefficients and Expansion in the Eigenfunctions of that Equation. Doklady Akademii Nauk SSSR, 208(6), 1268-1271.
- Gorbachuk, V.I., Gorbachuk, M.L., 1991. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 346 p.

- Hira, F., 2018. Eigenvalues and Eigenfunctions of q -Dirac System. *Journal of Science and Arts*, 4(45), 937-946.
- Ismailov, Z.I., 2006. Compact Inverses of First-Order Normal Differential Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 320(1), 266-278.
- Ismailov, Z.I., Öztürk Mert, R., 2012. Normal Extensions of a Singular Multipoint Differential Operator for First Order. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2012(36), 1-9.
- Ismailov, Z.I., Öztürk Mert, R., 2013. Selfadjoint Extension of Singular Multipoint Differential Operator of First Order. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013(129), 1-11.
- Ismailov, Z.I., İpek, P., 2016. Selfadjoint Singular Differential Operators of First Order and Their Spectrum. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016(21), 1-9.
- Kac, V.G., Cheung, P., 2002. *Quantum Calculus*. Universitext, Universitext, Springer, New York, 112 p.
- Koekoek, R., Swarttouw, R.F., 1998. The Askey-Scheme of Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Its q -Analogue. Technical Report 98-17, Department of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons Inc., Newyork, 660 p.
- Mansour, Z.S., 2001. q -Difference Equations. Master's Thesis, Faculty of Science, Cairo University.
- Narici, L., Bachman, G., 1998. *Functional Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 544 p.
- Rynne, B.P., Youngson, M.A., 2008. *Linear Functional Analysis*. Springer-Verlag, London, 321 p.
- Sole, A.D., Kac, V.G., 2005. On Integral Representations of q -Gamma and q -Beta Functions. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica e*

Applicazioni, Serie IX, 16(1), 11-29.

Thomas, G.B., Weir, M.D., Hass, J., Heil, C., 2013. Thomas' Calculus: Early Transcendentals (13th Edition). Pearson, Boston, 1200 p.

Zorich, V.A., 2004. Mathematical Analysis I. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 596 p.



ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

SOYADI, Adı : AKTÜRK, Çağlar
Uyruğu : T.C.
Doğum yeri ve tarihi : Sarıgöl, 08.08.1984
Medeni hali : Evli
Telefon : 554 737 8315
E-posta : cakturkmat@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Anadolu Üniversitesi Kamu Yönetimi	2018
Lisans	Dokuz Eylül Üni. Matematik Öğret.	2007
Lise	Erzincan Anadolu Öğretmen Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2014	Çorum Spor Lisesi	Öğretmen
2012	Laçın Çok Programlı Lisesi	Öğretmen
2009	Midyat İMKB Anadolu Lisesi	Öğretmen
2007	İzmir Uğur Dershane	Stajyer Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce