



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



DİJİTAL TOPOLOJİDE KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Doktora Tezi

İsmet ÇINAR

Matematik Anabilim Dalı

İzmir
2020

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

DİJİTAL TOPOLOJİDE KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR

İSMET ÇINAR

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmet KARACA

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Doktora Programı

İzmir

2020

İsmet ÇINAR tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan "Dijital Topolojide Küme Değerli Fonksiyonlar" başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 09.01.2020 tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. İsmet KARACA



Raportör Üye : Doç. Dr. Özgür EGE



Üye : Prof. Dr. Urfat NURİYEV



Üye : Doç. Dr. Cihangir ALACA



Üye : Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ



EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum "**Dijital Topolojide Küme Değerli Fonksiyonlar**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

09/01/2020

İsmet ÇINAR



ÖZET

DİJİTAL TOPOLOJİDE KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR

ÇINAR, İsmet

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmet KARACA

Ocak 2020, 74 sayfa

Bu tez çalışmasında, iki dijital yüzeyin bağlantılı toplamı ve dijital basit kapalı yüzeyler inşa edildi. Bu yüzeylerin dijital simpleksler homoloji grupları belirlendi. Bazı dijital bağlantılı toplam yüzeylerinin Euler karakteristiği hesaplandı ve bu dijital yüzeyler ile ilgili bazı özellikler ifade edildi.

Tezin dördüncü bölümünde, dijital görüntüler için simes çarpım tanıtıldı. Bu operatörün birleşmeli, dağılmalı ve değişmeli olduğu gösterildi. Bu operatör yardımıyla bir dijital görüntünün dijital süspansiyonu ve dijital koni uzayları tanımlandı.

Beşinci bölümde, Khalimsky topolojisi ile donatılmış dijital uzayların singüler kohomoloji grupları incelendi. Bu kohomoloji teorisi için Eilenberg-Steenrod aksiyomları, evrensel katsayı teoremi ve Künneth formülü araştırıldı. Khalimsky topolojisi üzerinde cup çarpım inşa edildi ve bu operatörün bazı özellikleri verildi.

Tezin son bölümünde, dijital küme değerli fonksiyonlar arasında yaklaşık sabit nokta özelliği tanımlandı. Evrensel dijital küme değerli fonksiyon kavramı ifade edildi. Simes çarpımın bazı özellikleri tanıtıldı. Son olarak bazı morfolojik operatörlerin güçlü ve zayıf sürekliliğe sahip olduğu gösterildi.

Anahtar sözcükler: Dijital bağlantılı toplam, Euler karakteristiği, dijital simes çarpım, küme değerli fonksiyon, güçlü-zayıf süreklilik, morfolojik operatör.

ABSTRACT

MULTIVALUED FUNCTIONS IN DIGITAL TOPOLOGY

ÇINAR, İsmet

PhD in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. İsmet KARACA

January 2020, 74 pages

In this thesis, some digital minimal simple surfaces are constructed by the connected sum of two digital surfaces. The digital simplicial homology groups of these digital surfaces are determined. The Euler characteristics of certain digital connected sum surfaces are computed and some properties are stated on these digital surfaces.

In the fourth part of the thesis, the smash product is introduced for digital images. It is shown that this operator is associative, distributive and commutative. A digital suspension and a digital cone of a digital image are defined by this operator.

In the fifth section, the digital singular cohomology groups of the digital spaces equipped with Khalimsky topology are studied. Eilenberg-Steenrod axioms, universal coefficient theorem and Künneth formula are investigated for this cohomology theory. The cup product is constructed on Khalimsky topology and some properties of this operation are given.

In the last section of the thesis, the approximate fixed point property is defined between digital multivalued functions. The notion of universal digital multivalued function is stated. Some properties of smash product are introduced. Finally, it is shown that some morphological operators have strong and weak continuity.

Key Words: Digital connected sum, Euler characteristics, digital smash product, multivalued function, strong-weak continuity, morphological operator.

ÖNSÖZ

Dijital topoloji, görüntü analizi, bilgisayar bilimleri ve tıp dünyasında önemli bir kullanım alanına sahiptir. Bu alandaki temel düşünce, dijital görüntülerin topolojik özelliklerini belirlemektir. Dijital topoloji fikrinin oluşma nedeni, dijital görüntü analizinde bazı geometrik invaryant yapıların yetersiz kalması ve bunun üzerine cebirsel geometrideki kavramlar ile dijital görüntülerin incelenmesine olanak sağlamaktır.

Doktora tez konumu belirlerken dijitalleşen dünyanın etkisinde kaldım ve küme değerli fonksiyonları dijital topolojide incelemeyi tercih ettim. Ayrıca bu konunun ülkemizde çok da yaygın çalışılmaması benim bu konuya olan ilgimi arttırdı. Konuyu birçok konferans ve sempozyumda sunarak konunun yeni araştırmacılara ulaşması için çaba sarfettim.

Bu tezin başlangıcından tamamlanıncaya kadar geçen süreçte karşılaştığım birçok zorlukta kıymetli hocalarım ve değerli arkadaşlarımdan desteğiyle sorunların üstesinden geldim ve literatüre katkı sağlayacağına inandığım bu tezi hazırladım.

İZMİR

09/01/2020

İsmet Çınar

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇ KAPAK	ii
KABUL ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xvi
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	4
2.1 Dijital Görüntü ve Yakınlık Bağıtısı	4
3 BAZI BAĞLANTILI TOPLAM YÜZEYLERİN SİMPLEKSLER HOMOLOJİ GRUPLARI	15
4 DİJİTAL SİMEŞ(SMASH) ÇARPIM	21
5 KHALIMSKY DİJİTAL UZAYLARI İÇİN KOHOMOLOJİ GRUP- LARI	28
5.1 Khalimsky Topolojisi	28
5.2 Bazı Dijital Görüntülerin Singüler Homoloji Grupları	31
5.3 Dijital Singüler Kohomoloji Grupları	38
5.4 Khalimsky Dijital Singüler Kohomoloji için Evrensel Katsayı Teoremi	41
5.5 Khalimsky Dijital Singüler Kohomoloji için Künneth Formülü	43

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5.6 Khalimsky Dijital Uzaylar için Singüler Cup Çarpım	44
6 DİJİTAL TOPOLOJİDE KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR	50
6.1 Bağlantılılığı Koruyan Dönüşümler	52
6.2 Evrensel Küme Değerli Fonksiyonlar	56
6.3 Yaklaşık Sabit Nokta Teoremi	58
6.4 Küme Değerli Fonksiyonlarda Dijital Simeş Çarpım İçin Bazı Sonuçlar	59
6.5 Morfolojik Operatörler	62
7 SONUÇ	66
KAYNAKLAR DİZİNİ	67
TEŞEKKÜR	72
ÖZGEÇMİŞ	73

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 (a) MSC_4 , (b) MSC'_8 , (c) MSC_8	8
2.2 S_0 dijital 0-küresi	9
2.3 S_1 dijital 1-küresi	9
2.4 MSS_6	10
2.5 MSS_{18}	10
2.6 MSS'_{18}	11
2.7 $MSS'_6 \# MSS'_6$	11
2.8 $MSS'_6 \# MSS_6$	12
2.9 $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(8, 2)$ ve $(26, 3)$ -simpleksler	12
3.1 $MSS'_6 \# MSS_6$	17
4.1 $S_1 \times S_0$ ve $S_1 \wedge S_0$	26
4.2 $S_0 \times I$ ve $S_0 \wedge I$	27
5.1 $B(n)$ kümesinin görüntüsü	28
5.2 Δ^0 , Δ^1 , Δ^2 ve Δ^3	30
6.1 Bir dijital görüntünün 1. alt bölüntü kümesi	51
6.2 Bir dijital görüntünün bazı morfolojik operatörleri (Soille, 1999) . .	63
6.3 p ve q nun 4-yakın komşulukları	64

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
(X, κ)	κ -yakınlığa sahip dijital görüntü
$N_\kappa(x)$	x noktasının κ -komşuluklarının kümesi
C^*	Basit kapalı κ -eğri
S_κ	Basit κ -yüzey
MSS_κ	Minimal basit kapalı yüzey
$MSS_\kappa \# MSS_\kappa$	Minimal basit kapalı yüzeylerin bağlantılı toplamı
δ_q	q . sınır homomorfizması
$Z_q^\kappa(\Delta)$	q -devir grubu
$B_q^\kappa(\Delta)$	q -sınır grubu
$H_q^\kappa(\Delta)$	q . boyutta simpleksler homoloji grubu
(C_*, δ)	Zincir kompleks
$H_n^\kappa(X, A)$	n . relatif homoloji grubu
$\chi_\kappa(X)$	X dijital görüntüsünün Euler karakteristiği
$\smile$	Cup çarpım
$(X_{m,\kappa}, \tau_X)$	Khalimsky dijital uzay

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (Devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
Hom	Hom fonktoru
Ext	Ext fonktoru
Tor	Tor fonktoru
$X \vee Y$	Wedge birleşim
$X \wedge Y$	Simeş(smash) çarpım
cX	X dijital görüntüsünün koni uzayı
sX	X dijital görüntüsünün süspansiyon uzayı
$S(X, r)$	X dijital görüntüsünün r . alt bölüntüsü
$AFPP$	Yaklaşık sabit nokta özelliği
$\tilde{D}_\kappa$	Dilasyon operatörü
$\bar{E}_\kappa$	Erozyon operatörü
$\tilde{C}_\kappa$	Kapama operatörü
$\bar{O}_\kappa$	Açma operatörü

1 GİRİŞ

Dijital topolojide iki ve üç boyutlu dijital uzayların topolojik ve geometrik özellikleri ele alınır. Temel düşünce, genel topoloji ve cebirsel topoloji ile dijital topoloji arasındaki farkları belirlemektir. Görüntüleme analizi ve bilgisayar grafiklerinin neredeyse her alanda kullanıldığı bu çağda, dijital topolojinin önemi oldukça artmaktadır. Dijital topoloji, bir hastanedeki röntgen cihazlarından bilgisayar bilimlerindeki birçok işleme temel oluşturmaktadır. Önümüzdeki on yıl içerisinde dijital topolojinin kullanımı artarak genişleyecektir.

Dijital topoloji alanının oluşmasında en büyük adım Azriel Rosenfeld tarafından atılmıştır. 1973 yılında yayınlanan "Arc and Curves in Digital Pictures" adlı makale bu alanın oluşmasında büyük katkı sağlamıştır. Süreklilik kavramı diskret yapılar için "Digital Topology" (Rosenfeld, 1979) adlı makalede yakınlık bağıntısı kullanılarak tanımlanmıştır. Böylece tamsayılar kümesi üzerindeki yapılar arasında süreklilik kavramı inşa edilmiştir. Laurence Boxer, cebirsel topolojideki invaryant kavramların dijital topolojideki karşılıklarını araştırmıştır. Dijital süreklilik, dijital homotopi, dijital temel grup ve dijital büzülebilirlik gibi kavramlar Boxer tarafından tanımlanmıştır. İki ayrık yapının izomorfik temel gruplara sahip olup olmaması görüntü analizi için çok önemli olduğundan Stout bu konuda çalışmalar yapmıştır (Stout, 1983).

Arslan, Karaca ve Öztel (Arslan, Karaca and Öztel, 2008) dijital görüntülerin simpleksler homoloji gruplarını tanımlamışlardır. Boxer ve Karaca (Boxer and Karaca, 2010) dijital örtü uzaylarını sınıflandırmışlardır. Boxer, Karaca ve Öztel (Boxer, Karaca and Öztel, 2011) cebirsel topolojideki invaryant yapıları dijital görüntüler için tanımlamışlardır.

Ege ve Karaca (Ege and Karaca, 2013b) dijital görüntüler için kohomoloji teorisini tanımlamışlardır. Künneth formülünün dijital topolojide geçerli olmadığını göstermişlerdir. Ege ve Karaca, 2016 yılındaki bir çalışmasında (Ege and Karaca, 2016) Steenrod cebirinin dijital versiyonunu ifade etmiştir. Ayrıca dijital kohomoloji operatörlerini ve dijital Steenrod karelerinin temel özelliklerini vermiştir. Vergili ve Karaca (Vergili and Karaca, 2015) Khalimsky topolojisi ile donatılmış bazı dijital görüntülerin singüler homoloji gruplarını hesaplamıştır. Vergili ve Karaca (Vergili and Karaca, 2018) Eilenberg-Steenrod

aksiyomlarından biri olan excision aksiyomunun Khalimsky dijital uzayları için geçerli olduğunu göstermiştir. Demir ve Karaca (Demir and Karaca, 2015) bazı dijital yüzeylerin simpleksler homoloji gruplarını hesaplamış ve (Demir and Karaca, 2016) sonlu boyutlu dijital görüntülerin dijital kohomoloji gruplarının hesaplanması için bir algoritma vermiştir. Burak ve Karaca (Burak and Karaca, 2017) cup çarpımın tanımlı olduğu dijital kohomolojinin cebir ve halka yapılarını tanımlamıştır.

Kovalevsky (Kovalevsky, 1994) tarafından küme değerli fonksiyon kavramı tanıtılmıştır. Daha sonra Tsaur ve Smyth (Tsaur and Smyth, 2001) tarafından sürekli küme değerli fonksiyon tanımı verilmiştir. Bu çalışmanın üzerine ek olarak daha esnek bir yapı sağlayan zayıf ve güçlü sürekli dönüşümler inşa edilmiştir. Escibano, Giraldo ve Sastre (Escibano, Giraldo and Sastre, 2008) süreklilik kavramını daha ayrıntılı şekilde karakterize etmişlerdir. Dijital görüntüler üzerinde alt bölüntüler yardımıyla sürekli küme değerli fonksiyonlar inşa edilebilmiştir. Daha sonraki çalışmalarda (Escibano, Giraldo and Sastre, 2012) dilasyon, erozyon, açma ve kapama gibi morfolojik işlemler ele alınarak çok geniş yapıya sahip olan sürekli küme değerli fonksiyonların sınıflandırma yoluna gidilmiştir. Basit noktaların silinmesi kavramı sürekli küme değerli fonksiyonlar tarafından karakterize edilmiştir. Ayrıca küme değerli dijital retraksiyon tanımı verilip, tek değerli dijital retraksiyon ile arasındaki farka değinilmiştir.

Boxer (Boxer, 2014) çekinik dönüşümler yardımıyla sürekli küme değerli fonksiyonları sınıflandırma yoluna gitmiştir. Bir başka (Boxer and Staecker, 2016a) çalışmasında Boxer, bağlantılılığı koruyan dönüşümler ile sürekli küme değerli fonksiyonlar arasında çeşitli bağıntılar sunmuştur. Ayrıca (Boxer, 2017c) bağlantılılığı koruyan dönüşümlere ek olarak zayıf ve güçlü süreklilik kavramlarını vererek, bu yapılar arasındaki çeşitli bağıntılar ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasının birinci ve ikinci bölümlerinde tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan temel kavramlar tanıtıldı. Üçüncü bölümde iki minimal basit kapalı yüzeyin bağlantılı toplamalarının simpleksler homoloji grupları hesaplandı. Dördüncü bölümde, Khalimsky topolojisi ile donatılmış bazı dijital uzayların singüler kohomoloji grupları belirlendi. Khalimsky topolojisi üzerinde dijital görüntülerin cup çarpımları inşa edildi ve bu operatörün bazı

özellikleri üzerinde çalışıldı. Beşinci bölümde dijital görüntüler için simeş çarpım tanımlandı. Bu operatör yardımıyla bir dijital görüntünün dijital süspansiyon ve dijital koni uzayları incelendi. Dijital küme değerli fonksiyonlar arasında yaklaşık sabit nokta özelliği verildi. Evrensel küme değerli fonksiyon kavramı incelendi. Son olarak, morfolojik operatörlerinin güçlü sürekli olduğu gösterildi.



2 ÖN BİLGİLER

2.1 Dijital Görüntü ve Yakınlık Bağıntısı

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere $\mathbb{Z}^n$, n -boyutlu Euclid uzayındaki kafes noktalarının kümesini temsil etsin. Bir n tamsayısı için $Y \subset \mathbb{Z}^n$ ve λ , Y kümesinin elemanları için bir yakınlık bağıntısı olmak üzere (Y, λ) ikilisine bir **dijital görüntü** denir (Boxer, 1999).

$\mathbb{Z}^n$ deki dijital görüntüler için yakınlık bağıntısı kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.1. (Boxer, 1994) l bir pozitif tamsayı ($1 \leq l \leq n$) ve

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ birbirinden farklı iki nokta için,

- $|x_i - y_i| = 1$ olacak şekilde en fazla l sayıda i indisi var,

ve

- $|x_j - y_j| \neq 1$ olacak şekilde diğer tüm j indisleri için $x_j = y_j$,

koşulları sağlanıyorsa x ve y ya c_l -**yakın** denir.

c_l -yakın ile bir noktanın yakın olan noktalarının sayısı anlaşılacak ve genel olarak bu yakınlığa κ -yakınlık denilecektir.

X_1 ve X_2 dijital görüntülerinin kartezyen çarpımları için **normal yakınlık bağıntısı** aşağıdaki gibi tanımlıdır (Boxer and Karaca, 2012):

$x_i, y_i \in (X_i, \kappa_i)$ için (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktaları $X_1 \times X_2$ dijital görüntü üzerinde $k_*(\kappa_1, \kappa_2)$ -yakındır ancak ve ancak aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır:

- $x_0 = x_1$ ve y_0 ile y_1 , κ_1 -yakın;
- x_0 ile x_1 , κ_0 -yakın ve $y_0 = y_1$;
- x_0 ile x_1 , κ_0 -yakın ve y_0 ile y_1 , κ_1 -yakın.

Tanım 2.1.2. (Herman, 1993) Bir (X, κ) dijital görüntüsünün dijital **bağlantılı** olması için gerek ve yeter şart her $\{x, y\} \subset X$ için $x \neq y$ olmak üzere $x = x_0$, $x_c = y$ ve $i \in \{0, 1, \dots, c-1\}$ için x_i ile x_{i+1} κ -yakın olacak şekilde bir $\{x_0, x_1, \dots, x_c\} \subset X$ kümesinin var olmasıdır.

κ -yakınlık bağıntısına sahip bir X dijital görüntüsünde x noktasından y noktasına bir κ -yol, $c \geq 1$ ve $1 \leq i \leq c-1$ için her x_i noktası x_{i+1} noktasına

κ -yakın olacak şekilde bir $(x = x_0, x_1, \dots, x_c = y)$ dizisidir. Burada c sayısını **yolun uzunluğunu** temsil eder (Han, 2006). $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ olmak üzere

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b\}$$

kümesine **dijital aralık** denir (Boxer, 1994).

Tanım 2.1.3. (Boxer, 1994) (X, κ_0) ve (Y, κ_1) dijital görüntüler olsun. X in her κ_0 -bağlantılı alt kümesi U için $f(U)$, Y de κ_1 -bağlantılı ise $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna dijital (κ_0, κ_1) -**süreklili** denir.

(X, κ_0) ve (Y, κ_1) dijital görüntüler olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun (κ_0, κ_1) -süreklili olması için gerek ve yeter şart x_0 ve x_1 , κ_0 -yakın olmak üzere her $\{x_0, x_1\} \subset X$ için ya $f(x_0) = f(x_1)$ ya da $f(x_0)$ ile $f(x_1)$ in κ_1 -yakın olmasıdır (Boxer, 1999).

(X, κ_0) ve (Y, κ_1) dijital görüntüler olmak üzere $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ fonksiyonu (κ_0, κ_1) -süreklili, bijeksiyon ve $f^{-1} : (Y, \kappa_1) \rightarrow (X, \kappa_0)$ dijital (κ_1, κ_0) -süreklili ise f fonksiyonuna dijital (κ_0, κ_1) -**izomorfizma** denir (Boxer, 2006). (X, κ) ve (Y, λ) dijital görüntülerinin $X \vee Y$ **wedge birleşimi**, aşağıdaki özelliklere sahip (X', μ) ve (Y', μ) kümelerinin birleşimi olarak tanımlanır.

- X' ve Y' kümeleri p tek noktayı içerir;
- $x \in X'$ ve $y \in Y'$ kümeleri μ -yakın ise $x = p$ veya $y = p$;
- (X', μ) ve (X, κ) kümeleri izomorfiktir; ve
- (Y', μ) ve (Y, λ) kümeleri izomorfiktir (Boxer, 2006).

$f : X \rightarrow Y$ (κ, λ) -süreklili ve örten bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f dönüşümüne **çekinik(shy) dönüşüm** denir (Boxer, 2005):

- Her $y \in Y$ için $f^{-1}(\{y\})$ kümesi κ -bağlantılıdır.
- Her $y_0, y_1 \in Y$ için y_0 ve y_1 noktaları λ -yakın iken $f^{-1}(\{y_0, y_1\})$ kümesi κ -bağlantılıdır.

Teorem 2.1.1. (Boxer, 2017a) $f : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \lambda)$ dönüşümü bir izomorfizma ise f bir çekinik dönüşümdür. Ayrıca f dönüşümü çekinik ve bire-bir ise f bir izomorfizmadır.

$f : (A, \alpha) \rightarrow (C, \gamma)$ ve $g : (B, \beta) \rightarrow (D, \delta)$ süreklili ve örten dönüşümlerinin çekinik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$f \times g : (A \times B, k_*(\alpha, \beta)) \rightarrow (C \times D, k_*(\gamma, \delta))$$

dönüşümünün çekinik dönüşüm olmasıdır.

Tanım 2.1.4. (Boxer, 1994) (X, κ) ve (Y, λ) birer dijital görüntü ve $f, g : X \rightarrow Y$ (κ, λ) -süreklili iki fonksiyon olsun. Pozitif bir m tamsayısı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$$

fonksiyonu varsa f ve g ye (κ, λ) -**homotopik** fonksiyonlar denir ve $f \simeq_{(\kappa, \lambda)} g$ ile gösterilir. Ayrıca H fonksiyonuna (κ, λ) -**homotopi** fonksiyonu denir.

- Her $x \in X$ için $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, m) = g(x)$ dir.
- Her $x \in X$ için

$$H_x : [0, m]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow Y$$

$$t \longmapsto H_x(t) = H(x, t)$$

indirgenmiş fonksiyonu $(2, \lambda)$ -süreklidir.

- Her $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için

$$H_t : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto H_t(x) = H(x, t)$$

indirgenmiş fonksiyonu (κ, λ) -süreklidir.

Bir $f : X \rightarrow Y$ dijital süreklili fonksiyonu Y üzerinde tanımlı bir sabit fonksiyona dijital homotopik ise f fonksiyonuna Y de dijital **nullhomotopik** denir. Bir X dijital görüntüsü için $1_X : X \rightarrow X$ birim dönüşümü dijital nulhomotopik ise X e dijital **büzülebilir** denir (Boxer, 1994).

(X, κ) ve (Y, λ) iki dijital görüntü olsun.

$f : X \rightarrow Y$ (κ, λ) -süreklili fonksiyonu için

$$g \circ h \simeq_{(\kappa, \kappa)} 1_X \quad \text{ve} \quad h \circ g \simeq_{(\lambda, \lambda)} 1_Y$$

olacak şekilde bir (λ, κ) -süreklili $g : Y \rightarrow X$ fonksiyonu varsa h fonksiyonuna (κ, λ) -**homotopi denklik** denir ve X ile Y dijital görüntülerine aynı (κ, λ) -**homotopi tipine sahiptir** denir (Boxer, 1994).

Z dijital görüntüsü ve $z_0 \in Z$ için (Z, z_0) ikilisine noktalı dijital görüntü denir. $h : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ dijital süreklili fonksiyonu $h(z_0) = y_0$ koşulunu sağlıyorsa buna **noktalı dijital süreklili fonksiyon** denir (Boxer, 1999).

f ve g , (X, x_0) dan (Y, y_0) a tanımlı noktalı dijital sürekli fonksiyonlar ve H , f ile g arasında dijital (κ_0, κ_1) -homotopi olsun. Her $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için $H(x_0, t) = y_0$ ise H fonksiyonuna (κ_0, κ_1) -**noktalı dijital homotopi** denir (Boxer, 1999).

$f, g : [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$, $(2, \kappa)$ -sürekli fonksiyonları arasında bir $H : [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \times [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$, $(2, \kappa)$ -homotopi fonksiyonu her $t \in [0, m_1]_{\mathbb{Z}}$ için

$$H(0, t) = f(0) = g(0) \text{ ve } H(m_0, t) = f(m_0) = g(m_0)$$

ise H fonksiyonuna **uç noktaları sabit tutan homotopi** denir (Boxer, 2006).

Tanım 2.1.5. (Boxer, 1999) (X, κ) bir dijital görüntü olsun. Bir $m > 3$ tamsayısı ve $h : [0, m-1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ $(2, \kappa)$ -sürekli fonksiyonu için aşağıdaki durumlar sağlansın:

- h bire-bir ve örtendir.
- $h(0)$ ile $h(m-1)$ noktaları κ -yakındır.
- Her $t \in [0, m_1]_{\mathbb{Z}}$ için $h([0, m_1]_{\mathbb{Z}})$ kümesinde $h(t)$ nin κ -komşulukları sadece $h((t-1) \bmod m)$ ve $h((t+1) \bmod m)$ şeklindedir.

Bu durumda X e bir **dijital kapalı κ -eğri** denir.

(A, κ) bir dijital görüntü olsun. $a_1, a_2, a_3 \in A$ ve a_2 ile a_3 κ -yakın noktalar olsun. a_1 noktası yalnız a_2 ile a_3 noktasına κ -yakın ise a_1 noktasına **κ -köşe noktası** denir. a_2 ve a_3 , κ -köşe noktaları değil ve a_1 noktası a_2 ve a_3 ün her ikisine de κ -yakın olan tek nokta ise a_1 e **basit κ -köşe noktası** denir. A dijital görüntüsünün tüm basit κ -köşeleri çıkarıldığında bir basit kapalı κ -eğri elde ediliyorsa A ya **genelleştirilmiş basit kapalı κ -eğri** denir (Boxer, 1999).

Örnek 2.1.1. (Han, 2006) 8-yakınlığa sahip bir

$$X = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$$

dijital görüntüsü verilsin.

$$f : [0, 3]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow X$$

$$0 \longmapsto (1, 0)$$

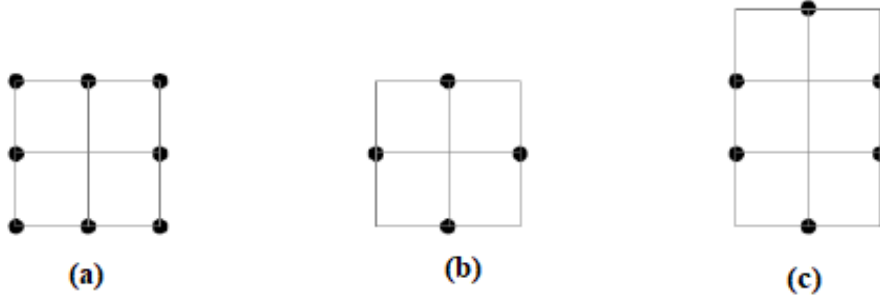
$$1 \longmapsto (0, 1)$$

$$2 \longmapsto (-1, 0)$$

$$3 \longmapsto (0, -1)$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu $(2, 8)$ -süreklidir ve basit kapalı eğri koşullarını sağlar.

Şekil 2.1 de basit kapalı κ -eğrilere örnekler verilmiştir.



Şekil 2.1: (a) MSC_4 , (b) MSC'_8 , (c) MSC_8

Tanım 2.1.6. (Han, 2006) $c^* = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{Z}^2$ de bir basit kapalı κ -eğri olsun. $\bar{c}^*$, c^* basit kapalı eğrisinin $\mathbb{Z}^2$ deki tümleyeni olmak üzere $\bar{c}^*$ nin bir x noktası $\bar{c}^*$ nin sınırı $\bar{\kappa}$ -bağlantılı bileşenine ait ise, o noktaya c^* in **iç noktası** denir ve $Int(c^*)$ ile gösterilir. Aksi halde c^* in **dış noktası** denir ve $Ext(c^*)$ ile gösterilir.

MSC_4 , MSC'_8 ve MSC_8 basit kapalı eğrileri yardımıyla

- $MSC_4^* = MSC_4 \cup Int(MSC_4)$,
- $MSC_8'^* = MSC_8' \cup Int(MSC_8')$,
- $MSC_8^* = MSC_8 \cup Int(MSC_8)$

dijital görüntüleri tanımlanmıştır. Bu dijital görüntüler κ -eğrilerin bağlantılı toplamalarını hesaplamada kullanılacaktır.

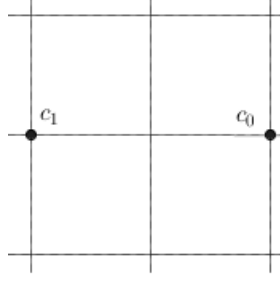
Küreye-benzer dijital görüntüler aşağıdaki gibi tanımlanır (Boxer, 2006):

0_n , $\mathbb{Z}^n$ nin orjini olmak üzere dijital S_n küresi

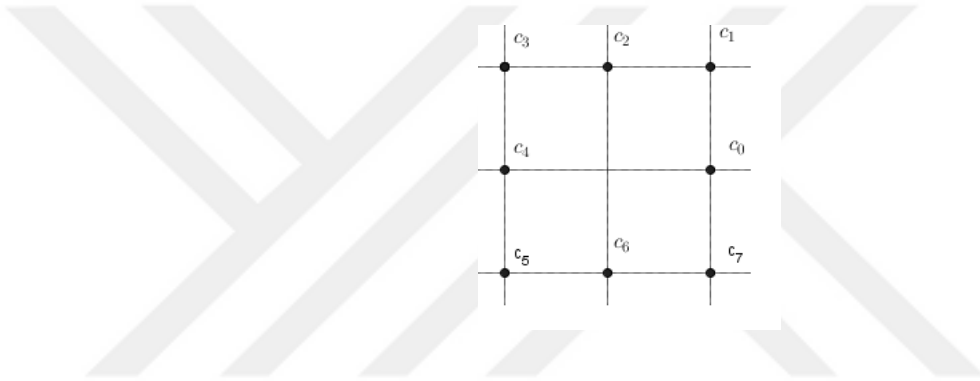
$$S_n = [-1, 1]_{\mathbb{Z}}^{n+1} \setminus \{0_{n+1}\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$$

şeklinde ifade edilir. Örneğin,

$$S_0 = \{c_0 = (1, 0), c_1 = (-1, 0)\} \quad (\text{Bkz Şekil 2.2}).$$

Şekil 2.2: S_0 dijital 0-küresi

$$S_1 = \{c_0 = (1, 0), c_1 = (1, 1), c_2 = (0, 1), c_3 = (-1, 1), c_4 = (-1, 0), c_5 = (-1, -1), c_6 = (0, -1), c_7 = (1, -1)\} \quad (\text{Bkz Şekil 2.3}).$$

Şekil 2.3: S_1 dijital 1-küresi

Tanım 2.1.7. (Han, 2007) (A, λ) , $\mathbb{Z}^n$ de bir dijital görüntü, $n \geq 3$ ve

$\bar{A} = \mathbb{Z}^n - A$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa A ya **kapalı κ -yüzey** denir:

1) $(\lambda, \bar{\lambda}) \in \{(\lambda, 2n), (2n, 3^n - 1)\}$ ve $\lambda \neq 3^n - 2^n - 1$ için

- her $a \in A$ için $|A|^x$ kümesi a noktasına λ -yakın olan sadece bir λ -bileşene sahiptir;

- $|\bar{A}|^a$ kümesi a noktasına $\bar{\lambda}$ -yakın iki $\bar{\lambda}$ -bileşenine sahiptir. Bu bileşenler C^{aa} ve D^{aa} olmak üzere

- her $b \in N_\lambda(a) \cap A$ için $N_{\bar{\lambda}}(b) \cap C^{aa} \neq \emptyset$ ve $N_{\bar{\lambda}}(b) \cap D^{aa} \neq \emptyset$ dır.

Ayrıca A kapalı κ -yüzeyi için, A basit λ -noktaya sahip değil ise A ya **basit kapalı κ -yüzey** denir.

2) $(\lambda, \bar{\lambda}) = (3^n - 2^n - 1, 2n)$ için

- A , λ -bağlantılıdır.

- Her $a \in A$ için $|A|^a$ bir genelleştirilmiş basit kapalı λ -eğridir.

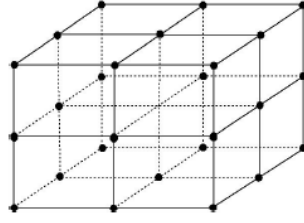
Ayrıca, $|A|^a$ bir basit kapalı λ -eğri ise A ya **basit kapalı κ -yüzey** denir.

Örnek 2.1.2. (Han, 2006) Basit kapalı eğriler yardımıyla minimal basit kapalı yüzeyler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

- $MSS_6 \approx_{(6,6)} (MSC_4 \times [0, 2]_{\mathbb{Z}}) \cup (Int(MSC_4 \times \{0, 2\}))$ (Bkz Şekil 2.4) olup burada MSC_4 ,

$$\{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)\}$$

kümesine 4-izomorfik bir eğridir.



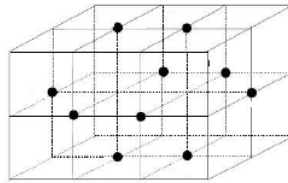
Şekil 2.4: MSS_6

- $MSS'_6 \approx_{(6,6)} X \times [0, 1]_{\mathbb{Z}}$ olup burada X kümesi $\{(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$ şeklindedir.

- $MSS_{18} \approx_{(18,18)} (MSC_8 \times \{1\}) \cup (Int(MSC_8 \times \{0, 2\}))$ (Bkz Şekil 2.5) olup burada MSC_8 eğrisi

$$\{(0, 0), (-1, 1), (-2, 0), (-2, -1), (-1, -2), (0, -1)\}$$

kümesine 8-izomorfiktir.

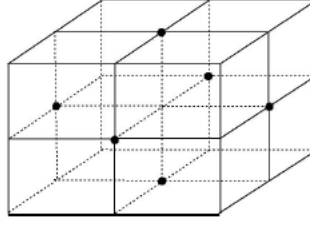


Şekil 2.5: MSS_{18}

- $MSS'_{18} \approx_{(18,18)} (MSC'_8 \times \{1\}) \cup (Int(MSC'_8 \times \{0, 2\}))$ (Bkz Şekil 2.6) olup burada MSC'_8 eğrisi

$$\{(0, 0), (-1, 1), (-2, 0), (-1, -1)\}$$

kümesine 8-izomorfiktir.

Şekil 2.6: MSS'_{18}

Tanım 2.1.8. (Han, 2006) $n_0, n_1 \geq 3$ için S_{κ_0} , $\mathbb{Z}^{n_0}$ da kapalı bir κ_0 -yüzey, $A'_{\kappa_0} - A_{\kappa_0} \subset S_{\kappa_0}$ ve S_{κ_1} , $\mathbb{Z}^{n_1}$ de kapalı bir κ_1 -yüzey olsun öyle ki

$$A'_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,8)} Int(MSC_8^*) \quad , \quad A'_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,4)} Int(MSC_4^*)$$

veya $A'_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,8)} Int(MSC_8'^*)$ izomorfizmaları vardır.

$f : A_{\kappa_0} \rightarrow f(A_{\kappa_0}) \subset S_{\kappa_1}$ bir (κ_0, κ_1) -izomorfizma olmak üzere

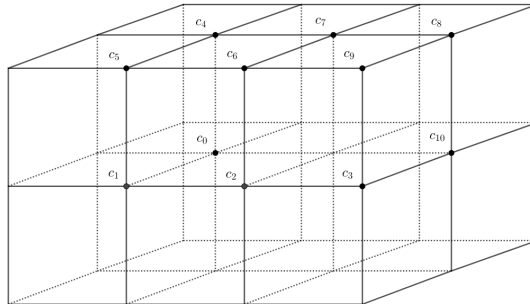
$$S'_{\kappa_1} = S_{\kappa_1} - f(A'_{\kappa_0}) \quad \text{ve} \quad S'_{\kappa_0} = S_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0}$$

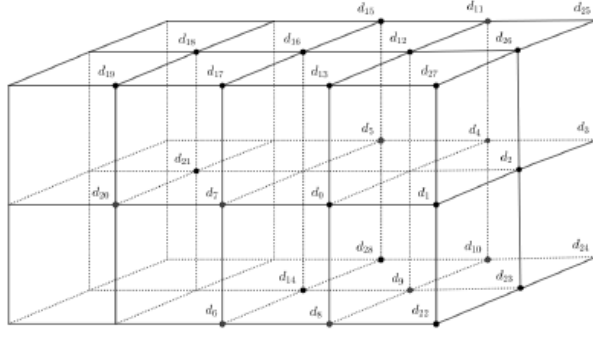
dır. $S'_{\kappa_0} \cup S'_{\kappa_1}$ ayrık birleşimi üzerinde $i : A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0} \rightarrow S'_{\kappa_0}$ kapsama dönüşümü olsun. S_{κ_0} dan A'_{κ_0} ın çıkarılmasıyla ve $A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0}$ ile $f(A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0})$ nün denkliğinden aşağıdaki gibi tanımlanan bir $S'_{\kappa_0} \cup S'_{\kappa_1} / \sim$ bölüm uzayı elde edilir:

$$x \in A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0} \quad \text{ve} \quad i(x) \sim f(x) = y \in S'_{\kappa_1}$$

denklik sınıflarının kümesine **bağlantılı toplam** denir ve $S_{\kappa_0} \# S_{\kappa_1}$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.3. MSS_6 ve MSS'_6 minimal basit kapalı 6-yüzeyler olsun. $MSS'_6 \# MSS'_6$ ve $MSS'_6 \# MSS_6$ bağlantılı toplam yüzeyleri sırasıyla Şekil 2.7 ve Şekil 2.8 deki gibi oluşturulabilir:

Şekil 2.7: $MSS'_6 \# MSS'_6$

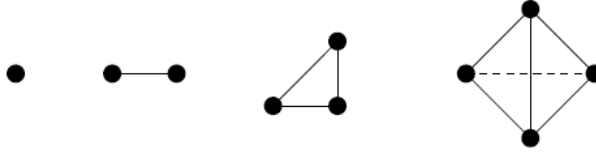


Şekil 2.8: $MSS'_6 \# MSS_6$

Tanım 2.1.9. (Spanier, 1966) S , (X, κ) dijital görüntüsünün boştan farklı bir alt kümesi olsun.

- $s \in S$ ve p ile q , S nin ayrık noktaları olmak üzere p ve q , κ -yakın,
- $s \in S$ ve $\emptyset \neq t \subset s$ ise $t \in S$,

koşulları sağlanıyor ise S nin elemanlarına (X, κ) nin **dijital simpleksleri** denir. Bir m -simpleks S nin kardinalitesi $m + 1$ dir. S' , S nin boştan farklı bir öz alt kümesi ise S' kümesine S nin **yüzü** denir. Şekil 2.9 de bazı dijital simpleksler verilmiştir.



Şekil 2.9: $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(8, 2)$ ve $(26, 3)$ -simpleksler

Tanım 2.1.10. (Arslan, Karaca and Öztel, 2008) (X, μ) dijital m -simplekslerin bir sonlu koleksiyonu ve negatif olmayan bir d tamsayısı için $0 \leq m \leq d$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, (X, μ) ya bir **sonlu dijital simpleksler kompleks** denir:

- A , X e ait bir simpleks ise A nin her bir yüzü de X e aittir.
- $A, B \in X$ ise $A \cap B$ ya boştur ya da A ve B nin bir ortak yüzüdür.

Bir X dijital simpleksler kompleksinin boyutu, X in sahip olduğu bir m - simpleks olacak şekildeki en büyük m tamsayısıdır. $C_q^\kappa(X)$ in baz elemanları X kümesindeki tüm dijital (X, κ) -simpleksler olan bir serbest değişmeli gruptur. (X, κ) m -boyutlu bir dijital simpleksler kompleksi olsun. Bu durumda her $q > m$ için $C_q^\kappa(X)$ bir aşık grupdur (Arslan, Karaca and Öztel, 2008).

(X, κ) , m -boyutlu bir dijital simpleksler kompleksi olsun. $\hat{p}_i$, p_i elemanının simpleksten çıkarılması olmak üzere

$$\partial_q(< p_0, p_1, \dots, p_q >) = \begin{cases} \sum_{i=0}^q (-1)^i < p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q >, & q \leq m \\ 0, & q > m. \end{cases}$$

ile tanımlı $\partial_q : C_q^\kappa(X) \rightarrow C_{q-1}^\kappa(X)$ homomorfizmasına bir **sınır homomorfizması** denir. Her $1 \leq q \leq m$ için $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ dır.

$(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$, m boyutlu bir dijital simpleksler kompleksi olmak üzere

$$C_*^\kappa(X) : 0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

bir zincir komplekstir.

(X, κ) bir dijital simpleksler kompleks olmak üzere

- $Z_q^\kappa(X) = \text{Ker} \partial_q$ grubuna dijital simpleksler **q -devirlerin grubu**,
- $B_q^\kappa(X) = \text{Im} \partial_{q+1}$ grubuna dijital simpleksler **q -sınırların grubu**,
- $H_q^\kappa(X) := \frac{Z_q^\kappa(X)}{B_q^\kappa(X)}$ bölüm grubuna q . dijital **simpleksler homoloji**

grubu denir (Arslan, Karaca and Öztel, 2008).

Teorem 2.1.2. (Boxer, Karaca and Öztel, 2011) (X, κ) m -boyutlu bir yönlü dijital simpleksler kompleksi olsun.

- 1) Her $q \geq 0$ için $H_q^\kappa(X)$ sonlu üretilmiş bir abel gruptur.
- 2) Her $q > m$ için $H_q^\kappa(X)$ aşıkâr gruptur.
- 3) $H_q^\kappa(X)$ bir serbest abel gruptur ve muhtemelen sıfırdır.

Teorem 2.1.3. (Han, 2006) A_{18} , MSS'_{18} nün bir alt kümesi ve $A_{18} \approx_{(18,8).h} MSC'_{18}^*$ olmak üzere $MSS'_{18} \# MSS'_{18} \approx MSS'_{18}$ izomorfizması vardır. Ayrıca MSC'_{18} eğrisi $\{(0,0), (-1,1), (-2,0), (-1,-1)\}$ kümesine 8-izomorfik olmak üzere

$$MSC'_{18}^* = MSC'_{18} \cup \text{Int}(MSC'_{18})$$

ifadesi vardır.

(X, κ) bir m -boyutlu dijital görüntü ve her $q \geq 0$ için α_q , X deki dijital (κ, q) -simplekslerin sayısı olsun. X in **Euler karakteristiği**

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \alpha_q$$

şeklinde tanımlanır. (X, κ) bir m -boyutlu dijital görüntü olsun. X in **Euler karakteristiği**

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} H_q^\kappa(X)$$

olarak (Boxer, Karaca and Öztel, 2011) tarafından gösterilmiştir.

Teorem 2.1.4. (Boxer, Karaca and Öztel, 2011) $(X, \kappa_0) \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ve $(Y, \kappa_1) \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ dijital görüntüleri (κ_0, κ_1) -izomorfik ise $\chi(X, \kappa_0) = \chi(Y, \kappa_1)$ dir.

Teorem 2.1.5. (Boxer, Karaca and Öztel, 2011) MSS'_{18} minimal basit kapalı yüzeyi için homoloji grupları aşağıdaki gibidir:

$$H_n^6(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ 0, & n \neq 0, 2. \end{cases}$$

Örnek 2.1.4. (Boxer, Karaca and Öztel, 2011) Bazı minimal basit kapalı yüzeylerin Euler karakteristiği,

- $\chi(MSS_6, 6) = \alpha_0 - \alpha_1 = 26 - 48 = -22$,
- $\chi(MSS_6 \# MSS_6, 6) = \alpha_0 - \alpha_1 = 42 - 80 = -38$,
- $\chi(MSS_{18}, 18) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 10 - 20 + 8 = -2$,
- $\chi(MSS_{18} \# MSS_{18}, 18) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 14 - 28 + 8 = -6$.

şeklinde hesaplanmıştır.

Sonuç 2.1.1. 1) $MSS_{18} \# MSS'_{18} \approx MSS_{18}$.

2) $MSS'_6 \# MSS_6 \approx MSS_6 \# MSS'_6$.

İspat. Bağlantılı toplamın değişmeliliğinden, $MSS'_{18} \# MSS_{18} \approx MSS_{18} \# MSS'_{18}$ yazılabilir. $MSS'_{18} \# MSS_{18} \approx MSS_{18}$ olduğundan sonuç sağlanır.

Diğer taraftan iki minimal yüzeyin bağlantılı toplamı değişmeli olduğundan, $MSS'_6 \# MSS_6 \approx MSS_6 \# MSS'_6$ izomorfizması vardır. $\square$

3 BAZI BAĞLANTILI TOPLAM YÜZEYLE- RİN SİMPLEKSLER HOMOLOJİ GRUPLARI

Teorem 3.0.1. $MSS'_6 \# MSS'_6$ bağlantılı toplam yüzeyinin dijital simpleksler homoloji grupları aşağıdaki gibidir:

$$H_0^6(MSS'_6 \# MSS'_6) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1^6(MSS'_6 \# MSS'_6) \cong \mathbb{Z}^6 \quad \text{ve her } n \neq 0, 1 \text{ için} \\ H_n^6(MSS'_6 \# MSS'_6) \cong \{0\}.$$

İspat. $MSS'_6 \# MSS'_6 = \{c_0 = (0, 0, 0), c_1 = (1, 0, 0), c_2 = (1, 1, 0),$
 $c_3 = (1, 2, 0), c_4 = (0, 0, 1), c_5 = (1, 0, 1), c_6 = (1, 1, 1),$
 $c_7 = (0, 1, 1), c_8 = (0, 2, 1), c_9 = (1, 2, 1), c_{10} = (0, 2, 0)\}$

yüzeyi

$$c_1 < c_6 < c_8 < c_3 < c_0 < c_5 < c_4 < c_7 < c_{10} < c_9 < c_2$$

şeklinde yönlendirilebilir. Dijital simpleksler zincir kompleksler aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$C_0^6(MSS'_6 \# MSS'_6)$ zincirinin bir bazı

$$\{< c_0 >, < c_1 >, < c_2 >, \dots, < c_{10} >\}$$

ve $C_1^6(MSS'_6 \# MSS'_6)$ zincirinin bir bazı

$$\{< c_1 c_0 >, < c_0 c_4 >, < c_1 c_2 >, < c_1 c_5 >, < c_6 c_2 >, < c_3 c_2 >, < c_3 c_9 >, \\ < c_3 c_{10} >, < c_5 c_4 >, < c_4 c_7 >, < c_6 c_5 >, < c_8 c_7 >, < c_8 c_9 >, < c_8 c_{10} >, \\ < c_6 c_7 >, < c_6 c_9 >\}$$

şeklindedir. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^6(MSS'_6 \# MSS'_6) \xrightarrow{\partial_1} C_0^6(MSS'_6 \# MSS'_6) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir. Teorem 2.1.2'den her $n \geq 2$ için $H_n^6(MSS'_6 \# MSS'_6)$ aşıkâr gruptur. Ayrıca yukarıdaki kısa diziden,

$$\text{Im } \partial_2 \cong \{0\} \quad \text{ve} \quad \text{Ker } \partial_0 \cong \mathbb{Z}^{11}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi homomorfizm ∂_1 in görüntüsünü hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & \partial_1(\alpha_1 < c_1 c_0 > + \alpha_2 < c_0 c_4 > + \alpha_3 < c_1 c_2 > + \alpha_4 < c_1 c_5 > + \alpha_5 < c_6 c_2 > \\ & + \alpha_6 < c_3 c_2 > + \alpha_7 < c_3 c_9 > + \alpha_8 < c_3 c_{10} > + \alpha_9 < c_5 c_4 > + \alpha_{10} < c_4 c_7 > \\ & + \alpha_{11} < c_6 c_5 > + \alpha_{12} < c_8 c_7 > + \alpha_{13} < c_8 c_9 > + \alpha_{14} < c_8 c_{10} > + \alpha_{15} < c_6 c_7 > \\ & + \alpha_{16} < c_6 c_9 >) \\ & = \alpha_1 < c_0 > - \alpha_1 < c_1 > + \alpha_2 < c_4 > - \alpha_2 < c_0 > + \alpha_3 < c_2 > - \alpha_3 < c_1 > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_4 < c_5 > -\alpha_4 < c_1 > +\alpha_5 < c_2 > -\alpha_5 < c_6 > +\alpha_6 < c_2 > -\alpha_6 < c_3 > \\
& +\alpha_7 < c_9 > -\alpha_7 < c_3 > +\alpha_8 < c_{10} > -\alpha_8 < c_3 > +\alpha_9 < c_4 > -\alpha_9 < c_5 > \\
& +\alpha_{10} < c_7 > -\alpha_{10} < c_4 > +\alpha_{11} < c_5 > -\alpha_{11} < c_6 > +\alpha_{12} < c_7 > \\
& -\alpha_{12} < c_8 > +\alpha_{13} < c_9 > -\alpha_{13} < c_8 > +\alpha_{14} < c_{10} > -\alpha_{14} < c_8 > \\
& +\alpha_{15} < c_7 > -\alpha_{15} < c_6 > +\alpha_{16} < c_9 > -\alpha_{16} < c_6 > \\
& = (\alpha_1 - \alpha_2) < c_0 > + (-\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4) < c_1 > + (\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6) < c_2 > \\
& + (-\alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8) < c_3 > + (\alpha_2 + \alpha_9 - \alpha_{10}) < c_4 > + (\alpha_4 - \alpha_9 + \alpha_{11}) < c_5 > \\
& + (-\alpha_5 - \alpha_{11} - \alpha_{15} - \alpha_{16}) < c_6 > + (\alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{15}) < c_7 > \\
& + (-\alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{14}) < c_8 > + (\alpha_7 + \alpha_{13} + \alpha_{16}) < c_9 > + (\alpha_8 + \alpha_{14}) < c_{10} >
\end{aligned}$$

ifadesini göz önünde bulunduralım. Eğer

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 - \alpha_2 = a_1, \\
& -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 = a_2, \\
& \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 = a_3, \\
& -\alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 = a_4, \\
& \alpha_2 + \alpha_9 - \alpha_{10} = a_5, \\
& \alpha_4 - \alpha_9 + \alpha_{11} = a_6, \\
& -\alpha_5 - \alpha_{11} - \alpha_{15} - \alpha_{16} = a_7, \\
& \alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{15} = a_8, \\
& -\alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{14} = a_9, \\
& \alpha_7 + \alpha_{13} + \alpha_{16} = a_{10}, \\
& \alpha_8 + \alpha_{14} = a_{11},
\end{aligned}$$

olarak alınır, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = -a_7$ eşitliği elde edilir. Buradan $\text{Im } \partial_1 \cong \mathbb{Z}^{10}$ dur. ∂_1 in çekirdeği aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
& \partial_1(\alpha_1 < c_1 c_0 > + \alpha_2 < c_0 c_4 > + \alpha_3 < c_1 c_2 > + \alpha_4 < c_1 c_5 > + \alpha_5 < c_6 c_2 > \\
& + \alpha_6 < c_3 c_2 > + \alpha_7 < c_3 c_9 > + \alpha_8 < c_3 c_{10} > + \alpha_9 < c_5 c_4 > + \alpha_{10} < c_4 c_7 > \\
& + \alpha_{11} < c_6 c_5 > + \alpha_{12} < c_8 c_7 > + \alpha_{13} < c_8 c_9 > + \alpha_{14} < c_8 c_{10} > + \alpha_{15} < c_6 c_7 > \\
& + \alpha_{16} < c_6 c_7 >) = 0
\end{aligned}$$

denkleminde aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - \alpha_2 &= 0, \\
-\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 &= 0, \\
\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 &= 0, \\
-\alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 &= 0, \\
\alpha_2 + \alpha_9 - \alpha_{10} &= 0, \\
\alpha_4 - \alpha_9 + \alpha_{11} &= 0, \\
-\alpha_5 - \alpha_{11} - \alpha_{15} - \alpha_{16} &= 0, \\
\alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{15} &= 0, \\
-\alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{14} &= 0, \\
\alpha_7 + \alpha_{13} + \alpha_{16} &= 0, \\
\alpha_8 + \alpha_{14} &= 0.
\end{aligned}$$

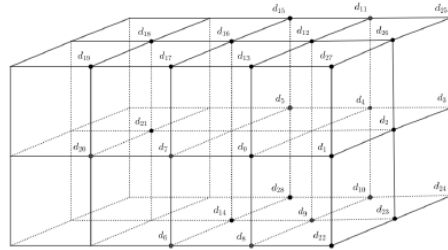
Buradan

$$\begin{aligned}
Z_1^6(MSS_6' \# MSS_6) &= \{\alpha_1 < c_1 c_0 > + \alpha_2 < c_0 c_4 > + \alpha_3 < c_1 c_2 > \\
&+ (-\alpha_1 - \alpha_4) < c_1 c_5 > + \alpha_5 < c_6 c_2 > + (-\alpha_3 - \alpha_5) < c_3 c_2 > \\
&+ \alpha_7 < c_3 c_9 > + (\alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_7) < c_3 c_{10} > + \alpha_9 < c_5 c_4 > + (\alpha_1 + \alpha_9) < c_4 c_7 > \\
&+ (\alpha_9 + \alpha_1 + \alpha_3) < c_6 c_5 > + \alpha_{12} < c_8 c_7 > + (\alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_7 - \alpha_{12}) < c_8 c_9 > \\
&+ (-\alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_7) < c_8 c_{10} > + (-\alpha_1 - \alpha_9 - \alpha_{12}) < c_6 c_7 > \\
&+ (-\alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_{12}) < c_6 c_7 > \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 3, 5, 7, 9, 12\} \cong \mathbb{Z}^6
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen sonuca ulaşılır. $\square$

Önerme 3.0.1. $MSS_6' \# MSS_6$ dijital yüzeyinin Euler karakteristiği -22 dir.

İspat.



Şekil 3.1: $MSS_6' \# MSS_6$

$MSS_6' \# MSS_6$ dijital bağlantılı toplam yüzeyi (Bkz Şekil 3.1) aşağıdaki gibi yönlendirilebilir:

$$d_{20} < d_7 < d_0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_{28} < d_{11} < d_{25} < d_{26} < d_{27} < \\ d_{13} < d_{17} < d_{16} < d_{18} < d_{19} < d_{21} < d_6 < d_8 < d_9 < d_{10} < d_{12} < d_{14} < d_{15} < \\ d_{22} < d_{23} < d_{24}.$$

$MSS'_6 \sharp MSS_6$ yüzeyi

$$\{< d_0 >, < d_1 >, < d_2 >, \dots, < d_{28} >\}$$

29 tane 0-simplekse ve

$$\{< d_7 d_0 >, < d_0 d_{13} >, < d_0 d_1 >, < d_0 d_8 >, < d_1 d_2 >, < d_1 d_{22} >, < d_1 d_{27} >, \\ < d_2 d_3 >, < d_2 d_{26} >, < d_2 d_{23} >, < d_3 d_4 >, < d_3 d_{25} >, < d_3 d_{24} >, < d_4 d_5 >, \\ < d_4 d_{11} >, < d_4 d_{10} >, < d_5 d_{15} >, < d_5 d_{28} >, < d_6 d_8 >, < d_6 d_{14} >, < d_7 d_6 >, \\ < d_7 d_{17} >, < d_{20} d_7 >, < d_8 d_9 >, < d_8 d_{22} >, < d_9 d_{10} >, < d_9 d_{14} >, < d_9 d_{23} >, \\ < d_{10} d_{24} >, < d_{28} d_{10} >, < d_{11} d_{12} >, < d_{11} d_{15} >, < d_{11} d_{25} >, < d_{13} d_{12} >, \\ < d_{16} d_{12} >, < d_{26} d_{12} >, < d_{28} d_{14} >, < d_{16} d_{15} >, < d_{17} d_{16} >, < d_{16} d_{18} >, \\ < d_{17} d_{19} >, < d_{18} d_{19} >, < d_{18} d_{21} >, < d_{20} d_{19} >, < d_{22} d_{23} >, < d_{23} d_{24} >, \\ < d_{25} d_{26} >, < d_{26} d_{27} >, < d_{13} d_{17} >, < d_{27} d_{13} >, < d_{20} d_{21} >\}$$

51 tane 1-simplekse sahiptir. $MSS'_6 \sharp MSS_6$ daki $(6, q)$ -simplekslerin sayısı α_q olmak üzere

$$\chi(MSS'_6 \sharp MSS_6, 6) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \alpha_q = (-1)^0 .29 + (-1)^1 .51 + (-1)^2 .0 + \dots = -22$$

elde edilir. □

Teorem 3.0.2. $MSS'_6 \sharp MSS_6$ nın dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_0^6(MSS'_6 \sharp MSS_6) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1^6(MSS'_6 \sharp MSS_6) \cong \mathbb{Z}^{23} \quad \text{ve her } n \neq 0, 1 \text{ için}$$

$$H_n^6(MSS'_6 \sharp MSS_6) = \{0\} \text{ dır.}$$

İspat. $MSS'_6 \sharp MSS_6 = \{d_0 = (1, 2, 0), d_1 = (1, 3, 0), d_2 = (0, 3, 0),$

$$d_3 = (-1, 3, 0), d_4 = (-1, 2, 0), d_5 = (-1, 1, 0), d_6 = (1, 1, -1),$$

$$d_7 = (1, 1, 0), d_8 = (1, 2, -1), d_9 = (0, 2, -1), d_{10} = (-1, 2, -1),$$

$$d_{11} = (-1, 2, 1), d_{12} = (0, 2, 1), d_{13} = (1, 2, 1), d_{14} = (0, 1, -1),$$

$$d_{15} = (-1, 1, 1), d_{16} = (0, 1, 1), d_{17} = (1, 1, 1), d_{18} = (0, 0, 1), d_{19} = (1, 0, 1),$$

$$d_{20} = (1, 0, 0), d_{21} = (0, 0, 0), d_{22} = (1, 3, -1), d_{23} = (0, 3, -1),$$

$$d_{24} = (1, 3, -1), d_{25} = (-1, 3, 1), d_{26} = (0, 3, 1), d_{27} = (1, 3, 1),$$

$$d_{28} = (1, 1, -1)\}$$

yüzeyi aşağıdaki gibi yönlendirilsin:

$$d_{20} < d_7 < d_0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_{28} < d_{11} < d_{25} < d_{26} < d_{27} <$$

$$d_{13} < d_{17} < d_{16} < d_{18} < d_{19} < d_{21} < d_6 < d_8 < d_9 < d_{10} < d_{12} < d_{14} < d_{15} < d_{22} < d_{23} < d_{24}.$$

$C_0^6(MSS'_6 \# MSS_6)$ zincir grubunun bir bazı

$$\{< d_0 >, < d_1 >, < d_2 >, \dots, < d_{28} >\}$$

ve $C_1^6(MSS'_6 \# MSS_6)$ zincir grubunun bir bazı

$$\begin{aligned} &\{< d_7 d_0 >, < d_0 d_{13} >, < d_0 d_1 >, < d_0 d_8 >, < d_1 d_2 >, < d_1 d_{22} >, \\ &< d_1 d_{27} >, < d_2 d_3 >, < d_2 d_{26} >, < d_2 d_{23} >, < d_3 d_4 >, < d_3 d_{25} >, < d_3 d_{24} >, \\ &< d_4 d_5 >, < d_4 d_{11} >, < d_4 d_{10} >, < d_5 d_{15} >, < d_5 d_{28} >, < d_6 d_8 >, < d_6 d_{14} >, \\ &< d_7 d_6 >, < d_7 d_{17} >, < d_{20} d_7 >, < d_8 d_9 >, < d_8 d_{22} >, < d_9 d_{10} >, \\ &< d_9 d_{14} >, < d_9 d_{23} >, < d_{10} d_{24} >, < d_{28} d_{10} >, < d_{11} d_{12} >, < d_{11} d_{15} >, \\ &< d_{11} d_{25} >, < d_{13} d_{12} >, < d_{16} d_{12} >, < d_{26} d_{12} >, < d_{28} d_{14} >, \\ &< d_{16} d_{15} >, < d_{17} d_{16} >, < d_{16} d_{18} >, < d_{17} d_{19} >, < d_{18} d_{19} >, \\ &< d_{18} d_{21} >, < d_{20} d_{19} >, < d_{22} d_{23} >, < d_{23} d_{24} >, < d_{25} d_{26} >, < d_{26} d_{27} >, \\ &< d_{13} d_{17} >, < d_{27} d_{13} >, < d_{20} d_{21} >\} \end{aligned}$$

şeklinde dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^6(MSS'_6 \# MSS_6) \xrightarrow{\partial_1} C_0^6(MSS'_6 \# MSS_6) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisini göz önünde bulunduralım. Teorem 2.1.2'den, her $n \geq 2$ için $H_n^6(MSS'_6 \# MSS_6)$ aşık ar gruptur. Kısa diziden $\text{Im } \partial_2 = 0$ ve $\text{Ker } \partial_0 \cong \mathbb{Z}^{29}$ olduğu açıktır.

29×51 boyutlu matris için MATLAB programı kullanılarak bu matrisin rankının 28 olduğu sonucuna ulaşılır. Buradan $\text{Im } \partial_1 \cong \mathbb{Z}^{28}$ dir.

Önerme 3.0.1'den $\chi(MSS'_6 \# MSS_6, 6) = -22$ olduğunu biliyoruz. Euler karakteristiğinin tanımından

$$\begin{aligned} \chi(MSS'_6 \# MSS_6, 6) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank } H_q^6(MSS'_6 \# MSS_6) \\ -22 &= (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot H_1^6(MSS'_6 \# MSS_6) + (-1)^2 \cdot 0 + \dots \end{aligned}$$

olup buradan $\text{rank}(H_1^6(MSS'_6 \# MSS_6)) = 23$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.0.1. $MSS'_{18} \# MSS'_{18}$ dijital yüzeyinin Euler karakteristiği 2 dir.

İspat. Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.4 den

$$\chi(MSS'_{18} \# MSS'_{18}) = \chi(MSS'_{18}) = 2$$

eşitliğı mevcuttur. $\square$

Sonuç 3.0.2. $MSS'_{18} \sharp MSS'_{18}$ yüzeyinin dijital simpleksler homoloji grupları aşağıdaki gibidir:

$$H_0^6(MSS'_{18} \sharp MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2^6(MSS'_{18} \sharp MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z} \quad \text{ve her } n \neq 0, 2 \text{ için} \\ H_n^6(MSS'_{18} \sharp MSS'_{18}) = \{0\}.$$

İspat. Teorem 2.1.3' den, $MSS'_{18} \sharp MSS'_{18} \approx_{(18,18)} MSS'_{18}$ izomorfizması vardır. Teorem 2.1.4 ve Teorem 2.1.5 den ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.0.3. $MSS_6 \sharp MSS'_6$ nin dijital simplekler homoloji grupları aşağıdaki gibidir.

$$H_n^6(MSS_6 \sharp MSS'_6) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}^{23}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 0, 1. \end{cases}$$

İspat. Sonuç 2.1.1 den, $MSS'_6 \sharp MSS_6 \approx_{(6,6)} MSS_6 \sharp MSS'_6$ izomorfizması mevcuttur. Diğer taraftan iki dijital görüntü birbirine izomorfik ise simpleksler homoloji grupları birbirine eşit olduğundan istenen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 3.0.3. $\chi(MSS'_6 \sharp MSS_6) = -5$ dir.

İspat. Teorem 3.0.1 ve Euler karakteristiğinin tanımından

$$\begin{aligned} \chi(MSS'_6 \sharp MSS_6) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank } H_q^6(MSS'_6 \sharp MSS_6) \\ &= (-1)^0.1 + (-1)^1.6 + (-1)^2.0 + \dots = -5 \end{aligned}$$

bulunur. $\square$

4 DİJİTAL SİMEŞ(SMASH) ÇARPIM

Simeş çarpım cebirsel topoloji alanında oldukça kullanılmaktadır. Ayrıca simeş çarpımlar sınıflandırma programlarında önemli bir yere sahiptir. Bu operatör simeş çarpım cebirleri arasındaki homoloji boyutlarının bağlantısını vermektedir. Hopf cebir teorisinin gelişmesiyle, bu alandaki çalışmalar simeş çarpım cebiri altında toplanmıştır.

Simeş çarpımın birleşmeli ve dağılmalı olması devirli homoloji gruplarının kolaylıkla hesaplanmasını sağlar.

Noktalı simpleksler kümesi kategorisinde, simeş çarpımlar bir simetrik monomial çarpımdır. Ayrıca simetrik spektranın simeş çarpımları, simetrik küre spektrumu üzerinde tensör çarpım olarak tanımlanır. Simeş çarpım ve fonksiyon spektra arasındaki denklik istikrarlı homotopi kategorisi ve bir modülün türev kategorisi arasındaki denklik tarafından sağlandığından homoloji ve kohomoloji teorisi inşa edilebilir.

Bu bölümde dijital görüntüler için simeş çarpım tanımlanacaktır. Bu operatörün birleşmeli, dağılmalı ve değişmeli olduğu gösterilecektir. Son olarak simeş çarpım yardımıyla dijital koni ve dijital süspansiyon tanımları verilecektir.

Tanım 4.0.1. (X, κ) ve (Y, λ) dijital görüntüler olsun. $X \vee Y$ kümesi $X \times Y$ nin bir alt kümesi olmak üzere $X \wedge Y$ **simeş(smash) çarpımı** $(X \times Y)/(X \vee Y)$ dijital bölüm uzayı olarak tanımlanır.

Teorem 4.0.1. Bir A indeks kümesinin tüm a elemanları için (X_a, κ) ve (Y_a, λ) dijital görüntüler olsun. Her $a \in A$ için $f_a \simeq_{(\kappa, \lambda)} g_a : X_a \rightarrow Y_a$ iken A kümesinin kardinalitesi n olmak üzere $\prod_{a \in A} f_a \simeq_{(\kappa^n, \lambda^n)} \prod_{a \in A} g_a$ dır.

İspat. Her $a \in A$ için $[0, m]_{\mathbb{Z}}$ bir dijital aralık olmak üzere

$$F_a : X_a \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y_a$$

dönüşümü f_a ile g_a arasında bir dijital (κ, λ) -homotopi olsun. Her $a \in A$ için F_a dijital sürekli fonksiyon olduğundan $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ olmak üzere

$$F : \left(\prod_{a \in A} X_a \right) \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \prod_{a \in A} Y_a$$

$$F((x_a), t) \longmapsto (F_a(x_a, t))$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm dijital süreklidir. Bu nedenle F dönüşümü, $\prod_{a \in A} f_a$ ve $\prod_{a \in A} g_a$ arasında bir (κ^n, λ^n) -homotopidir. $\square$

Teorem 4.0.2. *Her $a \in A$ için $f_a : (X_a, \kappa) \rightarrow (Y_a, \lambda)$ dönüşümü (κ, λ) -homotopi denk ise, A kümesinin kardinalitesi n olmak üzere $\prod_{a \in A} f_a$ bir dijital (κ^n, λ^n) -homotopi denklidir.*

İspat. Her $a \in A$ için $g_a : Y_a \rightarrow X_a$ dönüşümü f_a nın (λ, κ) -homotopi tersi olsun. Böylece aşağıdaki homotopiler mevcuttur:

$$\left(\prod_{a \in A} g_a\right) \circ \left(\prod_{a \in A} f_a\right) = \prod_{a \in A} (g_a \circ f_a) \simeq_{(\lambda^n, \kappa^n)} \prod_{a \in A} (1_{X_a}) = 1_{\prod_{a \in A} X_a},$$

$$\left(\prod_{a \in A} f_a\right) \circ \left(\prod_{a \in A} g_a\right) = \prod_{a \in A} (f_a \circ g_a) \simeq_{(\kappa^n, \lambda^n)} \prod_{a \in A} (1_{Y_a}) = 1_{\prod_{a \in A} Y_a}.$$

Böylece $\prod_{a \in A} f_a$ bir dijital (κ^n, λ^n) -homotopi denklidir. $\square$

Teorem 4.0.3. *(X, κ) , (Y, λ) ve (Z, σ) birer dijital görüntü olsun.*

$p : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \lambda)$ bir (κ, λ) -çekinik dönüşüm ve (Z, σ) bir σ -bağlantılı dijital görüntü ise $1_Z : (Z, \sigma) \rightarrow (Z, \sigma)$ birim dönüşüm olmak üzere

$$p \times 1 : (X \times Z, k_*(\kappa, \sigma)) \rightarrow (Y \times Z, k_*(\lambda, \sigma))$$

$((\kappa, \sigma), (\lambda, \sigma))$ -çekinik dönüşümdür.

İspat. (Z, σ) , σ -bağlantılı dijital görüntü olduğundan her $y \in Y$ ve $z \in Z$ için

$$\begin{aligned} (p \times 1_Z)^{-1}(y, z) &= (p^{-1}(y), 1_Z^{-1}(z)) \\ &= (p^{-1}(y), z) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Dijital görüntüler üzerinde kartezyen çarpım yakınlığından her $y \in Y$ ve $z \in Z$ için $(p \times 1_Z)^{-1}(y, z)$ kümesi κ -bağlantılıdır. z_0 ve z_1 , σ -yakın olacak şekilde her $z_0, z_1 \in Z$ için $1_Z(\{z_0, z_1\}) = \{z_0, z_1\}$ kümesi σ -bağlantılıdır. Bu durumdan aşağıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} (p \times 1_Z)^{-1}(\{y_0, y_1\}, \{z_0, z_1\}) &= (p^{-1}(\{y_0, y_1\}), 1_Z^{-1}(\{z_0, z_1\})) \\ &= (p^{-1}(\{y_0, y_1\}), (\{z_0, z_1\})) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak her $y_0, y_1 \in Y$ ve $z_0, z_1 \in Z$ için $(p \times 1_Z)^{-1}(\{y_0, y_1\}, \{z_0, z_1\})$ bir (κ, λ) -bağlantılı kümedir. $\square$

Teorem 4.0.4. (X, κ) ile (Y, λ) dijital görüntüler ve A ile B sırasıyla X ve Y nin alt kümeleri olsun. $f \simeq_{(\kappa, \lambda)} g$ olacak şekilde $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ dönüşümleri (κ, λ) -sürekli ise bu dönüşümlerin indirgediği dönüşümler

$$\bar{f}, \bar{g} : (X/A, \kappa) \rightarrow (Y/B, \lambda)$$

dijital (κ, λ) -homotopiktir.

İspat. $I = [0, m]_{\mathbb{Z}}$ olmak üzere $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ dönüşümü f ve g arasında bir (κ, λ) -homotopi olsun. p ve q çekinik dönüşümler olmak üzere F dönüşümü, aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir $\bar{F} : (X/A) \times I \rightarrow Y/B$ dönüşümünü indirger.

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\ p \times 1 \downarrow & & \downarrow q \\ (X/A) \times 1 & \xrightarrow{\bar{F}} & Y/B \end{array}$$

$q \circ F$ dijital sürekli olduğundan, $p \times 1$ bir çekinik dönüşüm ve $\bar{F}(p \times 1) = q \circ F$ dir. Böylece $\bar{F}$ bir dijital sürekli dönüşümdür. Sonuç olarak $\bar{F}$, $\bar{f}$ ile $\bar{g}$ arasında bir (κ, λ) -homotopi dönüşümüdür. $\square$

Şimdi dijital simeş çarpıma ait bazı özellikleri vereceğiz. Aşağıdaki teorem dijital simeş çarpımlar ile dijital homotopi arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Teorem 4.0.5. (X, κ) , (Y, λ) , (A, σ) ve (B, α) dijital görüntüler olsun.

$f : X \rightarrow A$ ve $g : Y \rightarrow B$ dijital fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $f \wedge g : X \wedge Y \rightarrow A \wedge B$ dönüşümü vardır.

(i) $h : A \rightarrow C$ ve $k : B \rightarrow D$ dijital fonksiyonlar ise

$$(h \wedge k) \circ (f \wedge g) = (h \circ f) \wedge (k \circ g)$$

eşitliği vardır.

(ii) $f \simeq_{(\kappa, \sigma)} f' : X \rightarrow A$ ve $g \simeq_{(\lambda, \alpha)} g' : Y \rightarrow B$ ise

$$f \wedge g \simeq_{(k_*(\kappa, \lambda), k_*(\sigma, \alpha))} f' \wedge g'$$

homotopisi mevcuttur.

İspat. $f \times g : X \times Y \rightarrow A \times B$ dijital fonksiyonu

$$(f \times g)(X \vee Y) \subset A \times B$$

özelliğine sahiptir. $f \times g$ fonksiyonu $f \wedge g : X \wedge Y \rightarrow A \wedge B$ dönüşümünü indirger.

Diğer taraftan, $f \times g$ ve $f' \times g'$ arasında bir F dijital homotopi dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f \simeq_{(\kappa, \sigma)} f' \quad \text{ve} \quad g \simeq_{(\lambda, \alpha)} g'$$

olduğundan Teorem 4.0.1' den

$$f \times g \simeq_{(k_*(\kappa, \lambda), k_*(\sigma, \alpha))} f' \times g'$$

elde edilir. F dönüşümü, $(X \times Y, X \vee Y)$ den $(A \times B, A \vee B)$ ye bir dijital homotopidir. Böylece Teorem 4.0.4 'den $f \wedge g$ ile $f' \wedge g'$ arasında bir dijital homotopi inşa edilebilir. $\square$

Teorem 4.0.6. f ve g dijital homotopi denklikler ise $f \wedge g$ de bir dijital homotopi denklidir.

İspat. $f : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \lambda)$ dönüşümü (κ, λ) -homotopi denklik olsun. Bu durumda

$$f \circ f' \simeq_{(\lambda, \lambda)} 1_Y \quad \text{ve} \quad f' \circ f \simeq_{(\kappa, \kappa)} 1_X$$

olacak şekilde bir (λ, κ) -süreklili $f' : (Y, \lambda) \rightarrow (X, \kappa)$ fonksiyonu vardır.

$g : (A, \sigma) \rightarrow (B, \alpha)$ dönüşümü (σ, α) -homotopi denklik olsun. O halde

$$g \circ g' \simeq_{(\alpha, \alpha)} 1_B \quad \text{ve} \quad g' \circ g \simeq_{(\sigma, \sigma)} 1_A$$

olacak şekilde bir (α, σ) -süreklili $g' : (B, \alpha) \rightarrow (A, \sigma)$ fonksiyonu vardır.

Teorem 4.0.5 'den

$$(f \wedge g) \circ (f' \wedge g') = 1_{Y \wedge B},$$

$$(f \circ f') \wedge (g \circ g') = 1_{Y \wedge B},$$

$$(f' \wedge g') \circ (f \wedge g) = 1_{X \wedge A},$$

$$(f' \circ f) \wedge (g' \circ g) = 1_{X \wedge A}$$

olacak şekilde $f \wedge g : X \wedge A \rightarrow Y \wedge B$ ve $f' \wedge g' : Y \wedge B \rightarrow X \wedge A$ dönüşümleri vardır. Sonuç olarak, $f \wedge g$ bir dijital homotopi denklidir. $\square$

Aşağıdaki teoremde dijital simes çarpımının birleşmeli olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.0.7. (X, κ) , (Y, λ) ve (Z, σ) dijital görüntüler olsun. $(X \wedge Y) \wedge Z$ ile $X \wedge (Y \wedge Z)$ dijital izomorfik görüntülerdir.

İspat. $X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ formundaki dijital çekinik dönüşümler p ile temsil edilsin. Aşağıdaki gibi bir diyagram oluşturulabilir:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times Y \times Z & \xrightarrow{1} & X \times Y \times Z \\
 \downarrow p \times 1 & & \downarrow 1 \times p \\
 (X \wedge Y) \times Z & & X \times (Y \wedge Z) \\
 \downarrow p & & \downarrow p \\
 (X \wedge Y) \wedge Z & \xrightarrow{f} & X \wedge (Y \wedge Z)
 \end{array}$$

Burada $p \times 1$ ve $1 \times p$ Teorem 4.0.3 'den dolayı birer çekinik dönüşümdür.

$1 : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y \times Z$ dönüşümü

$$f : (X \wedge Y) \wedge Z \rightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$$

ve

$$g : X \wedge (Y \wedge Z) \rightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$$

dijital fonksiyonlarını indirger. Bu dönüşümlerin injektif olduğu açıktır.

Teorem 2.1.1 'den f bir dijital izomorfizmadır. □

Teorem 4.0.8. (X, κ) , (Y, λ) ve (Z, σ) dijital görüntüler olsun. $(X \vee Y) \wedge Z$ ve $(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$ dijital izomorfik görüntülerdir.

İspat. $X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ formundaki dijital çekinik dönüşümler p ve

$X \times Y \rightarrow X \vee Y$ formundaki dijital çekinik dönüşümler q ile gösterilsin.

Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım.

$$\begin{array}{ccc}
 (X \times Y) \times Z & \xrightarrow{m} & (X \times Z) \times (Y \times Z) \\
 \downarrow p & & \downarrow p \times p \\
 (X \times Y) \wedge Z & & (X \wedge Z) \times (Y \wedge Z) \\
 \downarrow q \wedge 1 & & \downarrow q \\
 (X \vee Y) \wedge Z & \xrightarrow{f} & (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)
 \end{array}$$

Teorem 4.4'den (Boxer, 2017a), $p \times p$ bir dijital çekinik dönüşümdür. Ayrıca

$q \wedge 1$ de Teorem 4.0.3'den dolayı bir dijital çekinik dönüşümdür.

$m : (X \times Y) \times Z \rightarrow (X \times Z) \times (Y \times Z)$ dijital fonksiyonu

$$f : (X \wedge Z) \times (Y \wedge Z) \rightarrow (X \times Z) \times (Y \times Z)$$

dijital dönüşümünü indirger. f injektiftir ve Teorem 2.1.1 'den f bir dijital izomorfizmadır. $\square$

Teorem 4.0.9. (X, κ) , (Y, λ) ve (Z, σ) dijital görüntüler olsun. $X \wedge Y$ ile $Y \wedge X$ dijital izomorfik görüntülerdir.

İspat. $X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ formundaki dijital çekinik dönüşümler p ve $Y \times X \rightarrow Y \wedge X$ formundaki dijital çekinik dönüşümler q ile gösterilsin. Aşağıdaki diyagram elde edilebilir:

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{u} & Y \times X \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X \wedge Y & \xrightarrow{f} & Y \wedge X \end{array}$$

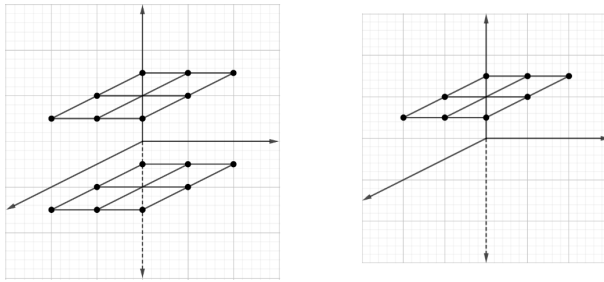
$u : X \times Y \rightarrow Y \times X$ dijital dönüşümü

$$f : X \wedge Y \rightarrow Y \wedge X$$

dijital fonksiyonunu indirger. f injektiftir ve Teorem 2.1.1'den f bir dijital izomorfizmadır. $\square$

Tanım 4.0.2. Bir X dijital görüntünün sX **dijital süspansiyonu** $X \wedge S_1$ olarak tanımlanır.

Örnek 4.0.1. $X = S_0$ dijital 0-küresinin dijital süspansiyonu Şekil 4.1'de gösterilmektedir.



Şekil 4.1: $S_1 \times S_0$ ve $S_1 \wedge S_0$

Teorem 4.0.10. X bir dijital görüntü ve x_0 bu görüntünün baz noktası olsun. $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ dijital aralığının kardinalitesi 8 olmak üzere sX dijital görüntüsü

$$(X \times [a, b]_{\mathbb{Z}}) / (X \times \{a\} \cup \{x_0\} \times [a, b] \cup X \times \{b\})$$

dijital bölüm uzayına izomorfiktir.

İspat. $c_i \in S_1$ ve $i \in \{0, 1, \dots, 7\}$ olmak üzere $\theta(t_i) = c_i \bmod 8$ ile tanımlanan

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\theta} S_1$$

dijital fonksiyonların bileşkesi bir dijital çekinik dönüşümdür.

$p : X \times S_1 \rightarrow X \wedge S_1$ dijital çekinik dönüşüm ise

$$X \times [a, b]_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{1 \times \theta} X \times S_1 \xrightarrow{p} X \wedge S_1$$

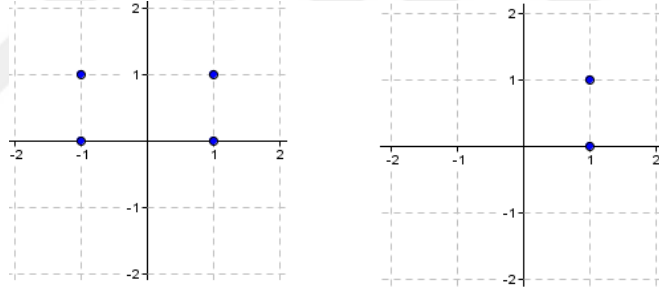
bileşke dönüşümü de çekinik dönüşümdür. Bu nedenle, $p(1 \times \theta)$ dönüşümü

$$(X \times [a, b]_{\mathbb{Z}}) / (X \times \{a\} \cup \{x_0\} \times [a, b]_{\mathbb{Z}} \cup X \times \{b\}) \rightarrow X \wedge S_1 = sX$$

dijital izomorfizmasını indirger. □

Tanım 4.0.3. Bir X dijital görüntüsünün cX **dijital koni** uzayı $I = [0, 1]_{\mathbb{Z}}$ olmak üzere $X \wedge I$ olarak tanımlanır.

Örnek 4.0.2. $X = S_0$ dijital 0-küresinin dijital koni uzayı Şekil 4.2'deki gibidir:



Şekil 4.2: $S_0 \times I$ ve $S_0 \wedge I$

Teorem 4.0.11. (X, κ) herhangi bir dijital görüntü olmak üzere cX büzülebilirliirdir.

İspat. $I = [0, 1]_{\mathbb{Z}}$ dijital aralığı büzülebilir olduğundan

$$cX = X \wedge I \simeq_{(\kappa, 2)} X \wedge \{0\}$$

bir tek noktadır. □

Sonuç 4.0.1. Her $m \in \mathbb{N}$ için $I = [0, 1]_{\mathbb{Z}}$ dijital aralık ve S_0 dijital 0-küre olmak üzere $S_m \wedge I = S_m \wedge S_0$ dır.

İspat. S_0 ve I iki nokta içerdiğinden iki dijital görüntü birbirine eşittir. □

5 KHALIMSKY DİJİTAL UZAYLARI İÇİN KOHOMOLOJİ GRUPLARI

Khalimsky topolojisi tam sayılar doğrusu üzerinde tanımlanan bir topolojidir. Dijital ortamda kullanılan bu topoloji 1960'lı yıllarda Efim Khalimsky tarafından ortaya atılmıştır.

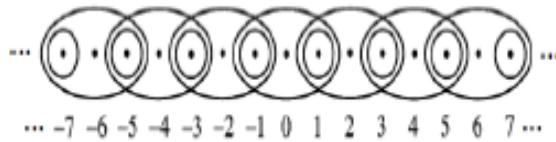
Vergili ve Karaca (Vergili and Karaca, 2015) dijital uzayların dijital singüler homoloji gruplarını incelemiştir. İkinci boyuta kadar bazı dijital uzayların homoloji gruplarını hesaplamışlardır. Ayrıca (Vergili and Karaca, 2018) bir Khalimsky dijital uzayın singüler relatif homoloji gruplarını incelemiştir.

Bu bölümde, Khalimsky topolojisi ile donatılmış dijital uzayların kohomoloji grupları incelenecektir. Ayrıca kohomoloji teorisi için Eilenberg-Steenrod aksiyomları, evrensel katsayı teoremi ve Künneth formülü ele alınacaktır. Son olarak, cup çarpım inşa edilecek ve bu çarpımın bazı özellikleri incelenecektir.

5.1 Khalimsky Topolojisi

Bu bölümde, Khalimsky dijital topolojisi tanıtılacak ve böylece dijital görüntüler bir topoloji ile donatılmış olacaktır.

$$B(n) = \begin{cases} \{n\}, & n \text{ tek} \\ \{n-1, n, n+1\}, & n \text{ çift.} \end{cases}$$



Şekil 5.1: $B(n)$ kümesinin görüntüsü

$\mathcal{B} = \{B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ baz kümesi tarafından üretilen topolojiye **Khalimsky dijital doğru topolojisi** (Khalimsky, Kopperman and Meyer, 1991) denir.

$m > 1$ için $\mathbb{Z}^m$ üzerindeki topoloji aşağıdaki gibi bir çarpım topolojisi

olarak düşünülebilir.

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^m B(n_i) : B(n_i), \mathbb{Z} \text{ üzerinde bir baz} \right\}.$$

$(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^m$ bir dijital görüntü olsun. X üzerindeki topolojinin bir bazı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{B} = \left\{ X \cap \prod_{i=1}^m B(n_i) : B(n_i), \mathbb{Z} \text{ üzerinde bir baz} \right\}.$$

Khalimsky topolojisi ile donatılmış X dijital görüntüsü üzerindeki topolojik uzay $(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ ile gösterilecektir.

$(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ bir dijital uzay ve x bu uzayda bir nokta olsun. x noktasının *komşuluğu* x noktasının bir G açığını içeren N_x kümesidir. $(X_{m_1,\kappa_1}, \tau_X)$ ve $(X_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y)$ Khalimsky dijital uzaylar olsun.

$$f : (X_{m_1,\kappa_1}, \tau_X) \longrightarrow (X_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y)$$

dönüşümü $f(x)$ i içeren Y nin tüm açık $G_{f(x)}$ alt kümeleri için, $f^{-1}(G_{f(x)})$ kümesi x i içeren X in açık bir alt kümesi ise f dönüşümüne x noktasında **süreklili fonksiyon** denir (Han, 2007).

Tanım 5.1.1. (Han, 2007) Bir $f : (X_{m_1,\kappa_1}, \tau_X) \longrightarrow (X_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y)$ dönüşümü için aşağıdaki koşullar sağlansın:

- i) f , x noktasında süreklidir,
- ii) Her $N_{\kappa_2}(f(x), \epsilon) \subset Y$ için $\epsilon, \delta \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(N_{\kappa_1}(x, \delta)) \subset N_{\kappa_2}(f(x), \epsilon)$$

olacak şekilde bir $N_{\kappa_1}(x, \delta) \subset X$ vardır. Bu durumda f dönüşümüne x noktasında **KD**-(κ_1, κ_2) **süreklili fonksiyon** denir. f , X in her noktasında **KD**-(κ_1, κ_2) süreklili ise f ye **KD**-(κ_1, κ_2) süreklili denir. Ayrıca f dönüşümü biyektif ve tersi de **KD**-(κ_1, κ_2) süreklili ise bu dönüşüme **KD**-(κ_1, κ_2) **izomorfizma** denir.

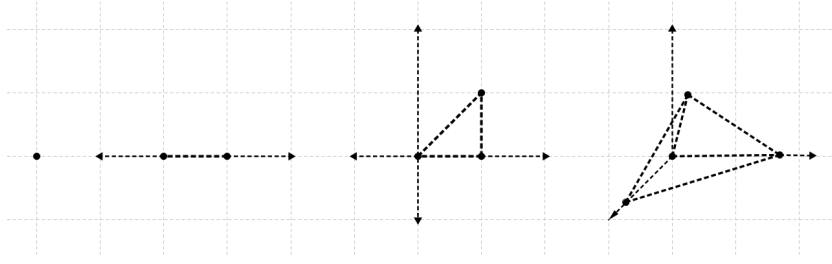
$n \geq 0$ için $e_0 = (0, 0, \dots, 0)$ ve $1 < i \leq n$ için $e_i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ olsun. e_i nin bileşenleri

$$i_m = \begin{cases} 1, & m \leq i \\ 0, & m > i \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Vergili and Karaca, 2015). Ayrıca standart n -simpleksler

$$\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$$

ile temsil edilecektir. Şekil 5.2 de $n = 0, 1, 2, 3$ için Δ^n resmedilmektedir.



Şekil 5.2: Δ^0 , Δ^1 , Δ^2 ve Δ^3

$\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$ standart n -simpleks olsun. Bu simpleksin köşeleri üzerinde lineer sıralama varsa Δ^n bir **yönlü simpleks** denir. Ayrıca simpleksin yüzlerinin indirgediği yönlendirme

$$(-1)^i [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\hat{e}_i$, i . bileşenin silinmesi anlamına gelmektedir (Vergili and Karaca, 2015).

$(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ Khalimsky dijital uzay olsun. $KD-(2^n - 1, \kappa)$ -süreklili

$$\sigma^n : \Delta \longrightarrow X$$

dönüşümüne X üzerinde **dijital singüler n -simpleks** denir (Vergili and Karaca, 2015).

$n \geq 0$ için $S_n(X)$, bir Khalimsky dijital uzay X deki tüm dijital singüler n -simpleksleri baz kabul eden serbest abel grup olsun. $S_n(X)$ in elemanlarına **dijital singüler n -zincir** denir.

Tanım 5.1.2. (Vergili and Karaca, 2015) $\epsilon_i := \epsilon_i^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ dönüşümü köşe noktaları üzerinde

$$\epsilon_i^n : (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \longrightarrow (t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$$

şeklinde tanımlansın. ϵ_i dönüşümüne **i . yüz dönüşümü** denir.

Tanım 5.1.3. (Vergili and Karaca, 2015) $(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ bir Khalimsky dijital uzay ve $\sigma^n : \Delta \longrightarrow X$ singüler dijital n -simpleks olsun.

$$\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

$$\sigma^n \longmapsto \partial_n(\sigma^n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma^n \epsilon_j^n$$

dönüşümüne **sınır homomorfizması** denir ve

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dizisine X uzayının **singüler zincir kompleksi** denir ve $S_*(X)$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.4. (Vergili and Karaca, 2015) $(X_{m,\kappa}\tau_X)$ bir Khalimsky dijital uzay olsun.

- $Z_q(X_{m,\kappa}\tau_X) := \text{Ker}\partial_q$ dijital singüler q -devir grubu,
- $B_q(X_{m,\kappa}\tau_X) := \text{Im}\partial_{q+1}$ dijital singüler q -sınır grubu,
- $H_q(X_{m,\kappa}\tau_X) := \frac{Z_q(X)}{B_q(X)}$ dijital singüler q . homoloji grubu denir.

$(X_{m_1,\kappa_1}, \tau_X)$ ve $(X_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y)$ Khalimsky dijital uzaylar olsun. Bu iki uzay KD- (κ_1, κ_2) izomorfik ise her $n \geq 0$ için $H_n(X) \cong H_n(Y)$ dir (Vergili and Karaca, 2018).

$X, \mathbb{Z}^m$ de tek noktalı bir dijital görüntü ise her $n > 0$ için $H_n(X) \cong \{0\}$ dır. X yol bağlantılı Khalimsky dijital uzayı olmak üzere $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ dir (Vergili and Karaca, 2015).

5.2 Bazı Dijital Görüntülerin Singüler Homoloji Grupları

Teorem 5.2.1. $X = \{a = (0, 1), b = (-1, 0), c = (0, 0), d = (1, 0)\} \subset \mathbb{Z}^2$ bir dijital görüntü olsun. X uzayının singüler homoloji grupları

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ 0, & n = 1, 2 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. X üzerindeki Khalimsky topolojisinin bir bazı

$$\mathcal{B}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{d\}, X\}$$

olsun. X uzayının dijital singüler zincir dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$S_0(X)$ serbest abel grubunun bazları,

$$\sigma_1^0 : e_0 \mapsto a \quad \sigma_2^0 : e_0 \mapsto b \quad \sigma_3^0 : e_0 \mapsto c \quad \sigma_4^0 : e_0 \mapsto d$$

$S_1(X)$ serbest abel grubunun bazları,

$$\sigma_1^1 : e_0 \mapsto a \quad \sigma_2^1 : e_0 \mapsto b \quad \sigma_3^1 : e_0 \mapsto c \quad \sigma_4^1 : e_0 \mapsto d$$

$$e_1 \mapsto a \quad e_1 \mapsto b \quad e_1 \mapsto c \quad e_1 \mapsto d$$

$$\begin{array}{ccc}
\sigma_5^1 : e_0 \mapsto c & \sigma_6^1 : e_0 \mapsto c & \sigma_7^1 : e_0 \mapsto c \\
e_1 \mapsto a & e_1 \mapsto b & e_1 \mapsto d
\end{array}$$

$S_2(X)$ serbest abel grubunun bazları,

$$\begin{array}{cccc}
\sigma_1^2 : e_0 \mapsto a & \sigma_2^2 : e_0 \mapsto b & \sigma_3^2 : e_0 \mapsto c & \sigma_4^2 : e_0 \mapsto d \\
e_1 \mapsto a & e_1 \mapsto b & e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto d \\
e_2 \mapsto a & e_2 \mapsto b & e_2 \mapsto c & e_2 \mapsto d
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\sigma_5^2 : e_0 \mapsto c & \sigma_6^2 : e_0 \mapsto c & \sigma_7^2 : e_0 \mapsto c & \sigma_8^2 : e_0 \mapsto c \\
e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto a \\
e_2 \mapsto a & e_2 \mapsto b & e_2 \mapsto d & e_2 \mapsto a
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\sigma_9^2 : e_0 \mapsto c & \sigma_{10}^2 : e_0 \mapsto c \\
e_1 \mapsto b & e_1 \mapsto d \\
e_2 \mapsto b & e_2 \mapsto d
\end{array}$$

$S_3(X)$ serbest abel grubunun bazları,

$$\begin{array}{cccc}
\sigma_1^3 : e_0 \mapsto a & \sigma_2^3 : e_0 \mapsto b & \sigma_3^3 : e_0 \mapsto c & \sigma_4^3 : e_0 \mapsto d \\
e_1 \mapsto a & e_1 \mapsto b & e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto d \\
e_2 \mapsto a & e_2 \mapsto b & e_2 \mapsto c & e_2 \mapsto d \\
e_3 \mapsto a & e_3 \mapsto b & e_3 \mapsto c & e_3 \mapsto d
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\sigma_5^3 : e_0 \mapsto c & \sigma_6^3 : e_0 \mapsto c & \sigma_7^3 : e_0 \mapsto c & \sigma_8^3 : e_0 \mapsto c \\
e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto a & e_1 \mapsto c \\
e_2 \mapsto c & e_2 \mapsto a & e_2 \mapsto a & e_2 \mapsto c \\
e_3 \mapsto a & e_3 \mapsto a & e_3 \mapsto a & e_3 \mapsto b
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\sigma_9^3 : e_0 \mapsto c & \sigma_{10}^3 : e_0 \mapsto c & \sigma_{11}^3 : e_0 \mapsto c & \sigma_{12}^3 : e_0 \mapsto c \\
e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto b & e_1 \mapsto c & e_1 \mapsto c \\
e_2 \mapsto b & e_2 \mapsto b & e_2 \mapsto c & e_2 \mapsto d \\
e_3 \mapsto b & e_3 \mapsto b & e_3 \mapsto d & e_3 \mapsto d
\end{array}$$

$$\sigma_{13}^3 : e_0 \mapsto c$$

$$e_1 \mapsto d$$

$$e_2 \mapsto d$$

$$e_3 \mapsto d$$

şeklindedir. Bu baz elemanları dikkate alınırsa aşağıdaki izomorfizmalar elde edilir:

$$S_0(X) \cong \mathbb{Z}^4, \quad S_1(X) \cong \mathbb{Z}^7, \quad S_2(X) \cong \mathbb{Z}^{10}, \quad S_3(X) \cong \mathbb{Z}^{13}.$$

Şimdi her bir dijital singüler n -zincirin devir ve sınır grupları belirlenebilir.

Her $\sigma_i^1 \in S_1(X)$ için $\partial_1 : S_1(X) \longrightarrow S_0(X)$ dönüşümü

$$\partial_1(\sigma_i^1) = \sigma_i^1(e_1) - \sigma_i^1(e_0), \quad i = 1, 2, \dots, 7$$

şeklinde tanımlanmasından

- $\partial_1(\sigma_1^1) = \sigma_1^0 - \sigma_1^0 = 0$
- $\partial_1(\sigma_2^1) = \sigma_2^0 - \sigma_2^0 = 0$
- $\partial_1(\sigma_3^1) = \sigma_3^0 - \sigma_3^0 = 0$
- $\partial_1(\sigma_4^1) = \sigma_4^0 - \sigma_4^0 = 0$
- $\partial_1(\sigma_5^1) = \sigma_1^0 - \sigma_3^0$
- $\partial_1(\sigma_6^1) = \sigma_2^0 - \sigma_3^0$
- $\partial_1(\sigma_7^1) = \sigma_4^0 - \sigma_3^0$

eşitlikleri mevcuttur. Böylece $\text{Im } \partial_1 \cong \mathbb{Z}^3$ dır. Şimdi ∂_1 in çekirdeğini bulalım.

$s_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^7 s_i \sigma_i^1\right) = 0$$

olsun. ∂_1 lineer olduğundan

$$\sum_{i=1}^{12} s_i \partial_1(\sigma_i^1) = 0$$

dır. Bu ifadeden

$$\sigma_1^0(s_5) + \sigma_2^0(s_6) + \sigma_3^0(-s_5 - s_6 - s_7) + \sigma_4^0(s_7) = 0$$

denkleminde ulaşılır. Böylece $s_5 = s_6 = s_7 = 0$ dır ve $\text{Ker } \partial_1 \cong \mathbb{Z}^4$ bulunur.

$\partial_2 : S_2(X) \longrightarrow S_1(X)$ dönüşümü $\sigma_i^2 \in S_2(X)$ için

$$\partial_2(\sigma_i^2) = \sigma_i^2[e_1, e_2] - \sigma_i^2[e_0, e_2] + \sigma_i^2[e_0, e_1], \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

şeklinde tanımlandığından,

- $\partial_2(\sigma_1^2) = \sigma_1^1 - \sigma_1^1 + \sigma_1^1 = \sigma_1^1,$
- $\partial_2(\sigma_2^2) = \sigma_2^1 - \sigma_2^1 + \sigma_2^1 = \sigma_2^1,$
- $\partial_2(\sigma_3^2) = \sigma_3^1 - \sigma_3^1 + \sigma_3^1 = \sigma_3^1,$
- $\partial_2(\sigma_4^2) = \sigma_4^1 - \sigma_4^1 + \sigma_4^1 = \sigma_4^1,$
- $\partial_2(\sigma_5^2) = \sigma_5^1 - \sigma_5^1 + \sigma_3^1 = \sigma_3^1,$
- $\partial_2(\sigma_6^2) = \sigma_6^1 - \sigma_6^1 + \sigma_3^1 = \sigma_3^1,$
- $\partial_2(\sigma_7^2) = \sigma_7^1 - \sigma_7^1 + \sigma_3^1 = \sigma_3^1,$
- $\partial_2(\sigma_8^2) = \sigma_1^1 - \sigma_5^1 + \sigma_5^1 = \sigma_1^1,$
- $\partial_2(\sigma_9^2) = \sigma_2^1 - \sigma_6^1 + \sigma_6^1 = \sigma_2^1,$
- $\partial_2(\sigma_{10}^2) = \sigma_4^1 - \sigma_7^1 + \sigma_7^1 = \sigma_4^1$

olur ve $\text{Im } \partial_2 \cong \mathbb{Z}^4$ bulunur. $s_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\partial_2\left(\sum_{i=1}^{10} s_i \sigma_i^2\right) = 0$$

ve ∂_2 nin lineerliğinden

$$\sum_{i=1}^{10} s_i \partial_2(\sigma_i^2) = 0$$

yazılabilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\sigma_1^1(s_1 + s_8) + \sigma_2^1(s_2 + s_9) + \sigma_3^1(s_3 + s_5 + s_6 + s_7) + \sigma_4^1(s_4 + s_{10}) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$s_1 + s_8 = 0$$

$$s_2 + s_9 = 0$$

$$s_3 + s_5 + s_6 + s_7 = 0$$

$$s_4 + s_{10} = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, $\text{Ker } \partial_2 \cong \mathbb{Z}^6$ dır.

$\partial_3 : S_3(X) \longrightarrow S_2(X)$ sınır homomorfizması $\sigma_i^3 \in S_3(X)$ için

$i = 1, 2, \dots, 13$ olmak üzere

$$\partial_3(\sigma_i^3) = \sigma_i^3[e_1, e_2, e_3] - \sigma_i^3[e_0, e_2, e_3] + \sigma_i^3[e_0, e_1, e_3] - \sigma_i^3[e_0, e_1, e_2]$$

ise

- $\partial_3(\sigma_1^3) = \sigma_1^2 - \sigma_1^2 + \sigma_1^2 - \sigma_1^2 = 0,$
- $\partial_3(\sigma_2^3) = \sigma_2^2 - \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - \sigma_2^2 = 0,$
- $\partial_3(\sigma_3^3) = \sigma_3^2 - \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3^2 = 0,$
- $\partial_3(\sigma_4^3) = \sigma_4^2 - \sigma_4^2 + \sigma_4^2 - \sigma_4^2 = 0,$
- $\partial_3(\sigma_5^3) = \sigma_5^2 - \sigma_5^2 + \sigma_5^2 - \sigma_3^2 = \sigma_5^2 - \sigma_3^2,$
- $\partial_3(\sigma_6^3) = \sigma_8^2 - \sigma_8^2 + \sigma_5^2 - \sigma_5^2 = 0,$
- $\partial_3(\sigma_7^3) = \sigma_1^2 - \sigma_8^2 + \sigma_8^2 - \sigma_8^2 = \sigma_1^2 - \sigma_8^2,$
- $\partial_3(\sigma_8^3) = \sigma_6^2 - \sigma_6^2 + \sigma_6^2 - \sigma_3^2 = \sigma_6^2 - \sigma_3^2,$
- $\partial_3(\sigma_9^3) = \sigma_9^2 - \sigma_9^2 + \sigma_6^2 - \sigma_6^2 = 0,$
- $\partial_3(\sigma_{10}^3) = \sigma_2^2 - \sigma_9^2 + \sigma_9^2 - \sigma_9^2 = \sigma_2^2 - \sigma_9^2,$
- $\partial_3(\sigma_{11}^3) = \sigma_7^2 - \sigma_7^2 + \sigma_7^2 - \sigma_3^2 = \sigma_7^2 - \sigma_3^2,$
- $\partial_3(\sigma_{12}^3) = \sigma_{10}^2 - \sigma_{10}^2 + \sigma_7^2 - \sigma_7^2 = 0,$
- $\partial_3(\sigma_{13}^3) = \sigma_4^2 - \sigma_{10}^2 + \sigma_{10}^2 - \sigma_{10}^2 = \sigma_4^2 - \sigma_{10}^2$

elde edilir. Böylece $\text{Im } \partial_3 \cong \mathbb{Z}^6$ dır. Sonuç olarak

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(X) \cong \{0\}, \quad H_2(X) \cong \{0\}$$

bulunur. □

Teorem 5.2.2. $X = \{k = (-1, 0), l = (1, 0), m = (1, 1), n = (0, -1), p = (2, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$ bir dijital görüntü olmak üzere X uzayının 2. boyuta kadar olan homoloji grupları

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^3, \quad H_1(X) \cong \{0\}, \quad H_2(X) \cong \{0\}$$

şeklindedir.

İspat. X üzerindeki Khalimsky topolojisinin bir bazı

$$\mathcal{B}(X) = \{\{k\}, \{m\}, \{n\}, \{l, m\}, \{m, p\}, \{l, m, p\}, \{k, l, m, n\}\}$$

olarak alınabilir. Dijital singüler zincir dönüşümler aşağıdaki gibidir.

$S_0(X)$ serbest abel grubunun bazıları,

$$\sigma_1^0 : e_0 \mapsto k \quad \sigma_2^0 : e_0 \mapsto l \quad \sigma_3^0 : e_0 \mapsto m \quad \sigma_4^0 : e_0 \mapsto n$$

$$\sigma_5^0 : e_0 \mapsto p$$

$S_1(X)$ serbest abel grubunun baz elemanları,

$$\begin{array}{cccc} \sigma_1^1 : e_0 \mapsto k & \sigma_2^1 : e_0 \mapsto l & \sigma_3^1 : e_0 \mapsto m & \sigma_4^1 : e_0 \mapsto n \\ e_1 \mapsto k & e_1 \mapsto l & e_1 \mapsto m & e_1 \mapsto n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \sigma_5^1 : e_0 \mapsto p & \sigma_6^1 : e_0 \mapsto l & \sigma_7^1 : e_0 \mapsto p \\ e_1 \mapsto p & e_1 \mapsto m & e_1 \mapsto m \end{array}$$

$S_2(X)$ serbest abel grubunun bazları,

$$\begin{array}{cccc} \sigma_1^2 : e_0 \mapsto k & \sigma_2^2 : e_0 \mapsto l & \sigma_3^2 : e_0 \mapsto m & \sigma_4^2 : e_0 \mapsto n \\ e_1 \mapsto k & e_1 \mapsto l & e_1 \mapsto m & e_1 \mapsto n \\ e_2 \mapsto k & e_2 \mapsto l & e_2 \mapsto m & e_2 \mapsto n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \sigma_5^2 : e_0 \mapsto p & \sigma_6^2 : e_0 \mapsto l & \sigma_7^2 : e_0 \mapsto l & \sigma_8^2 : e_0 \mapsto p \\ e_1 \mapsto p & e_1 \mapsto m & e_1 \mapsto l & e_1 \mapsto m \\ e_2 \mapsto p & e_2 \mapsto m & e_2 \mapsto m & e_2 \mapsto m \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sigma_9^2 : e_0 \mapsto p \\ e_1 \mapsto p \\ e_2 \mapsto p \end{array}$$

$S_3(X)$ serbest abel grubunun baz elemanları,

$$\begin{array}{cccc} \sigma_1^3 : e_0 \mapsto k & \sigma_2^3 : e_0 \mapsto l & \sigma_3^3 : e_0 \mapsto m & \sigma_4^3 : e_0 \mapsto n \\ e_1 \mapsto k & e_1 \mapsto l & e_1 \mapsto m & e_1 \mapsto n \\ e_2 \mapsto k & e_2 \mapsto l & e_2 \mapsto m & e_2 \mapsto n \\ e_3 \mapsto k & e_3 \mapsto l & e_3 \mapsto m & e_3 \mapsto n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \sigma_5^3 : e_0 \mapsto p & \sigma_6^3 : e_0 \mapsto l & \sigma_7^3 : e_0 \mapsto l & \sigma_8^3 : e_0 \mapsto l \\ e_1 \mapsto p & e_1 \mapsto m & e_1 \mapsto l & e_1 \mapsto l \\ e_2 \mapsto p & e_2 \mapsto m & e_2 \mapsto m & e_2 \mapsto l \\ e_3 \mapsto p & e_3 \mapsto m & e_3 \mapsto m & e_3 \mapsto m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\sigma_9^3 : e_0 \mapsto p & \sigma_{10}^3 : e_0 \mapsto p & \sigma_{11}^3 : e_0 \mapsto p \\
e_1 \mapsto m & e_1 \mapsto p & e_1 \mapsto p \\
e_2 \mapsto m & e_2 \mapsto m & e_2 \mapsto p \\
e_3 \mapsto m & e_3 \mapsto m & e_3 \mapsto m
\end{array}$$

Böylece aşağıdaki izomorfizmalar elde edilir:

$$S_0(X) \cong \mathbb{Z}^5, \quad S_1(X) \cong \mathbb{Z}^7, \quad S_2(X) \cong \mathbb{Z}^9, \quad S_3(X) \cong \mathbb{Z}^{11}.$$

Her bir dijital singüler n -zincirin devir ve sınır grupları aşağıdaki gibidir. ∂_1 sınır homomorfizması kullanılarak 7 farklı denklem elde edilir. Bu denklemler yardımıyla $\text{Im } \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$ elde edilir. Diğer taraftan $s_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^7 s_i \partial_1(\sigma_i^1) = 0$$

denkleminde

$$\sigma_2^0(-s_6) + \sigma_3^0(s_6 + s_7) + \sigma_5^0(-s_7) = 0$$

ve böylece $s_6 = s_7 = 0$ bulunur. Sonuç olarak $\text{Ker } \partial_1 \cong \mathbb{Z}^5$ dir.

Şimdi ∂_2 sınır dönüşümü ele alınırsa, elde edilen denklemler çözülerek

$$\text{Im } \partial_2 \cong \mathbb{Z}^5$$

bulunur. Her $s_i \in \mathbb{Z}$ için

$$\partial_2\left(\sum_{i=1}^9 s_i \sigma_i^2\right) = 0$$

eşitliğinden hareketle ∂_2 nin lineer olması kullanılarak

$$\sum_{i=1}^9 s_i \partial_2(\sigma_i^2) = 0$$

yazılabilir. Bu denklemin düzenlenmesi ile

$$\sigma_1^1(s_1) + \sigma_2^1(s_2 + s_7) + \sigma_3^1(s_3 + s_6 + s_8) + \sigma_4^1(s_4) + \sigma_5^1(s_5 + s_9) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$s_2 + s_7 = 0,$$

$$s_3 + s_6 + s_8 = 0,$$

$$s_5 + s_9 = 0,$$

denklem sistemi oluşur. Böylece, $\text{Ker } \partial_2 \cong \mathbb{Z}^4$ dır.

Son olarak, ∂_3 dönüşümü kullanılarak bir denklem sistemi elde edilir.

Uygun bir paket programı kullanılarak bu denklem sistemi çözülürse

$$\text{Im } \partial_3 \cong \mathbb{Z}^4$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

5.3 Dijital Singüler Kohomoloji Grupları

Bir Khalimsky dijital uzayı $(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ için,

$$S_*(X_{m,\kappa}, \tau_X) : \dots \longrightarrow S_{q+1}(X_{m,\kappa}, \tau_X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X_{m,\kappa}, \tau_X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X_{m,\kappa}, \tau_X)$$

bir singüler zincir kompleks olsun. Burada $S_q(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ serbest değişmeli grup ve her $q \geq 0$ için $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ dır. Bu bölümde $S(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ uzayı $S(X)$ ile gösterilecektir. A bir değişmeli grup olsun. Yukarıdaki zincir komplekse $\text{Hom}(\cdot, A)$ fonktörü uygulanırsa aşağıdaki uzun dizi elde edilir:

$$\text{Hom}(S_*(X), A) : 0 \longrightarrow \text{Hom}(S_0(X), A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}(S_{q-1}(X), A)$$

$$\xrightarrow{\text{Hom}(\partial_{q-1}, A)} \text{Hom}(S_q(X), A) \xrightarrow{\text{Hom}(\partial_q, A)} \text{Hom}(S_{q+1}(X), A) \longrightarrow \dots$$

$q \geq 0$ için $\text{Hom}(S_q(X), A) = S^q(X)$ ve $\text{Hom}(\partial_q, A) = \delta^q$ olarak alınırsa bu dizi

$$S^*(X) : 0 \longrightarrow S^0(X) \longrightarrow \dots \longrightarrow S^{q-1}(X) \xrightarrow{\delta^{q-1}} S^q(X) \xrightarrow{\delta^q} S^{q+1}(X) \longrightarrow \dots$$

şeklinde yazılabilir. $S^q(X)$ in elemanlarına **Khalimsky dijital eşzincir** denir.

$s^q \in S^q$ ve d^{q+1} bir zincir olmak üzere ∂_{q+1} operatörünün

$\delta^q : S_\kappa^q(X) \rightarrow S_\kappa^{q+1}(X)$ dual homomorfizması

$$\langle \delta^q s^q, d^{q+1} \rangle := \langle s^q, \partial_{q+1} d^{q+1} \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Her $q \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \delta^{q+1} \circ \delta^q &= \text{Hom}(\partial_{q+1}, A) \circ \text{Hom}(\partial_q, A) \\ &= \text{Hom}(\partial_q \circ \partial_{q+1}, A) \\ &= \text{Hom}(0, A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Burada $S^*(X)$ kompleksine $(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ Khalimsky dijital uzayının **singüler eşzincir kompleksi** denir.

$(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ Khalimsky dijital uzayı olsun.

- X uzayının q . eşdevir grubu olan $\text{Ker } \delta^q$ kümesi

$$Z_\kappa^q(X_m, \tau_X)$$

olarak tanımlanır. X uzayının q . eşsınır grubu $\text{Im } \delta^{q-1}$

$$B_\kappa^q(X_m, \tau_X)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece X uzayının q . singüler kohomoloji grubu

$$H_\kappa^q(X_m, \tau_X) := Z_\kappa^q(X_m, \tau_X) / B_\kappa^q(X_m, \tau_X)$$

bölüm grubudur.

Teorem 5.3.1. Her $q \geq 0$ için H_κ^q , Khalimsky dijital singüler kompleksler kategorisinden değişmeli gruplar kategorisine giden bir kontravaryant funktordur.

İspat. $(X_{m_1,\kappa_1}, \tau_X)$ ve $(Y_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y)$ Khalimsky dijital uzaylar ve

$$f : (X_{m_1,\kappa_1}, \tau_X) \longrightarrow (Y_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y)$$

KD- (κ_1, κ_2) sürekli fonksiyon olsun. Notasyonu sadeleştirmek açısından

$(X_{m_1,\kappa_1}, \tau_X)$ uzayı X ve $(Y_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y)$ uzayı Y ile gösterilecektir. $z \in Z_{\kappa_1}^q(X)$ için

$$f^* : H_{\kappa_1}^q(X) \longrightarrow H_{\kappa_2}^q(Y)$$

dönüşümü $f^*(z + B_{\kappa_1}^q(X)) = f^*(z) + B_{\kappa_2}^q(Y)$ şeklinde tanımlıdır. $1_X : X \longrightarrow X$ birim dönüşüm olmak üzere

$$\begin{aligned} [1_X]^*(z + B_{\kappa_1}^q(X)) &= (1_X)^*(z) + B_{\kappa_1}^q(X) \\ &= (1_X \circ z) + B_{\kappa_1}^q(X) \\ &= z + B_{\kappa_1}^q(X) \\ &= 1_{H_{\kappa_1}^q(X)}(z + B_{\kappa_1}^q(X)) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $f : (X_{m_1,\kappa_1}, \tau_X) \longrightarrow (Y_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y)$ ve

$g : (Y_{m_2,\kappa_2}, \tau_Y) \longrightarrow (Z_{m_3,\kappa_3}, \tau_Z)$ sırasıyla KD- (κ_1, κ_2) ve KD- (κ_2, κ_3) sürekli

fonksiyonlar olsun. $z \in B_{\kappa_3}^q(Z)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
H_{\kappa_3}^q(g \circ f)(z + B_{\kappa_3}^q(Z)) &= (g \circ f)^*(z + B_{\kappa_3}^q(Z)) \\
&= (g \circ f)^*(z) + B_{\kappa_1}^q(X) \\
&= f^* \circ g^*(z) + B_{\kappa_1}^q(X) \\
&= f^*(g^*(z) + B_{\kappa_2}^q(Y)) \\
&= f^* \circ g^*(z + B_{\kappa_3}^q(Z)) \\
&= H_{\kappa_2}^q(f) \circ H_{\kappa_3}^q(g)(z + B_{\kappa_3}^q(Z))
\end{aligned}$$

eşitliklerinden $H_{\kappa_3}^q(g \circ f) = H_{\kappa_2}^q(f) \circ H_{\kappa_3}^q(g)$ bulunur. $\square$

Önerme 5.3.1. $X = \{a = (0, 1), b = (-1, 0), c = (0, 0), d = (1, 0)\}$ dijital görüntüsünün dijital singüler kohomoloji grupları

$$H_{\kappa}^0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_{\kappa}^1(X) \cong \{0\}, \quad H_{\kappa}^2(X) \cong \{0\}$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 5.2.1' den

$$H_n^{\kappa}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ 0, & n = 1, 2 \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. $q = 1, 2$ için

$$S_{\kappa}^q(X) = Hom(S_{\kappa}^q(X), \mathbb{Z}) \cong \{0\}$$

olup $H_{\kappa}^q(X) = 0$ dır. Diğer taraftan $q = 0$ için

$$S_{\kappa}^0(X) = Hom(S_{\kappa}^0(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

dir. Böylece

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S_{\kappa}^0(X) \xrightarrow{\delta^0} 0$$

kısa tam dizisi elde edilir. $\text{Ker } \delta^0 = S_{\kappa}^0(X) = \mathbb{Z}$ ve $\text{Im } \delta^{-1} = 0$ olduğundan X in 0. boyuttaki singüler kohomoloji grubu $H_{\kappa}^0(X) = \mathbb{Z}$ olarak bulunur. $\square$

Şimdi Khalimsky dijital uzayların singüler kohomoloji grupları için Eilenberg-Steenrod aksiyomları ifade edilecektir (Munkres, 1984).

(1) Birim Aksiyomu $(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ bir Khalimsky dijital uzayı olmak üzere

$i : (X_{m,\kappa}, \tau_X) \rightarrow (X_{m,\kappa}, \tau_X)$ birim dönüşümünün indirgediği dönüşüm

$i^* : H_\kappa^*(X) \longrightarrow H_\kappa^*(X)$, birim homomorfizmasıdır.

(2) Bileşke Aksiyomu $(X_{m_1, \kappa_1}, \tau_X)$, $(Y_{m_2, \kappa_2}, \tau_Y)$ ve $(Z_{m_3, \kappa_3}, \tau_Z)$ birer Khalimsky dijital uzay olmak üzere

$$f : (X_{m_1, \kappa_1}, \tau_X) \rightarrow (Y_{m_2, \kappa_2}, \tau_Y)$$

ve

$$g : (Y_{m_2, \kappa_2}, \tau_Y) \rightarrow (Z_{m_3, \kappa_3}, \tau_Z)$$

sırasıyla KD- (κ_1, κ_2) ve KD- (κ_2, κ_3) sürekli dönüşümler ise $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$ dır.

(3) Boyut Aksiyomu $(X_{m, \kappa}, \tau_X)$ bir noktalı Khalimsky dijital uzay olsun. G bir grup olmak üzere

$$H_\kappa^q(X, G) = \begin{cases} G, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dır.

(4) Excision Aksiyomu (X, A) bir relatif Khalimsky dijital uzay olsun. G , X in bir açık alt kümesi ve $\bar{G} \subset \text{Int}A$ olmak üzere

$$j : (X - G, A - G) \rightarrow (X, A)$$

dönüşümü

$$H^*(j) : H_\kappa^*(X, A) \rightarrow H_\kappa^*(X - G, A - G)$$

izomorfizmasını indirger.

(5) Tamlık Aksiyomu (X, A) bir relatif Khalimsky dijital uzay ve $i : A \rightarrow X$ ile $j : X \rightarrow (X, A)$ kapsama dönüşümleri olmak üzere

$$\dots \rightarrow H_\kappa^q(X, A) \xrightarrow{j^*} H_\kappa^q(X) \xrightarrow{i^*} H_\kappa^q(A) \xrightarrow{\delta^*} H_\kappa^{q+1}(X, A) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisi mevcuttur.

5.4 Khalimsky Dijital Singüler Kohomoloji için Evrensel Katsayı Teoremi

Bu bölümde, Khalimsky dijital uzayların singüler kohomoloji grupları için evrensel katsayı teoremi ele alınacaktır. İlk olarak *Ext* fonktörünün bazı özellikleri verilecektir. Değişmeli gruplar arasındaki homomorfizmalardan oluşan $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter şart

$Im f = Ker g$ olmasıdır. Bir serbest değişmeli grup, baz elemanlarının sonlu lineer kombinasyonu olarak tek türlü yazılabilen bir değişmeli gruptur. Her A değişmeli grubu için F serbest değişmeli grup ve i kapsama dönüşümü olmak üzere

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. M bir değişmeli grup olmak üzere $Hom(-, M)$ kontravaryant fonktoru yukarıdaki tam diziye uygulanırsa

$$0 \longrightarrow Hom(A, M) \longrightarrow Hom(F, M) \xrightarrow{i^\#} Hom(R, M) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

dizisi elde edilir. Bu diziden $Ext(A, M)$ fonktoru

$$Ext(A, M) = coker i^\# = Hom(R, M) / i^\#(Hom(F, M)).$$

olarak tanımlanır.

Teorem 5.4.1. (*Prasolov, 2007*) $(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ bir Khalimsky dijital uzay olsun. G bir değişmeli grup ve $H_q^\kappa(X) = H_q^\kappa(X; \mathbb{Z})$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow Ext(H_{q-1}^\kappa(X), G) \rightarrow H_q^\kappa(X, G) \rightarrow Hom(H_q^\kappa(X), G) \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Ayrıca

$$H_q^\kappa(X, G) \cong Hom(H_q^\kappa(X), G) \oplus Ext(H_{q-1}^\kappa(X), G)$$

izomorfizması vardır.

Önerme 5.4.1. $X = \{a = (-1, 0), b = (1, 0), c = (1, 1), d = (0, -1), e = (2, 1)\}$ dijital görüntüsünün $\mathbb{Z}_2$ katsayılı singüler kohomoloji grupları aşağıdaki gibidir:

$$H^0(X, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^3, \quad H^1(X, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}, \quad H^2(X, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}.$$

İspat. Teorem 5.2.2'den

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^3, & n = 0 \\ 0, & n = 1, 2 \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. Evrensel katsayı teoremini kullanarak, X in $\mathbb{Z}_2$ katsayılı singüler kohomoloji gruplarını aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

$$H^0(X, \mathbb{Z}_2) \cong Hom(\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}_2) \oplus Ext(0, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^3,$$

$$H^1(X, \mathbb{Z}_2) \cong Hom(0, \mathbb{Z}_2) \oplus Ext(\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\},$$

$$H^2(X, \mathbb{Z}_2) \cong Hom(0, \mathbb{Z}_2) \oplus Ext(0, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}.$$

□

5.5 Khalimsky Dijital Singüler Kohomoloji için Künneth Formülü

Bu bölümde singüler kohomoloji teorisi için Künneth formülü verilecektir. İlk olarak Tor fonktörünün bazı özellikleri hatırlatılacaktır. A ve B değişmeli gruplar olsun. $A \otimes B$ tensör çarpımı, $A \times B$ üretecine sahip ve her $a, a' \in A$ ile $b, b' \in B$ için

$$(a + a', b) = (a, b) + (a', b) \quad \text{ve} \quad (a, b + b') = (a, b) + (a, b')$$

özelliklerinin sağlandığı bir değişmeli gruptur. F , tabanı $A \times B$ olan serbest değişmeli grup ve N , yukarıdaki tüm özellikleri sağlayan F nin bir alt grubu ise $A \otimes B = F/N$ dir. A bir değişmeli grup olmak üzere F serbest değişmeli grubu için

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Bir B değişmeli grubu için yukarıdaki diziye $- \otimes B$ kovaryant fonktörü uygulanırsa

$$0 \longrightarrow R \otimes B \xrightarrow{i^\# \otimes 1_B} F \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0.$$

dizisi elde edilir. Bu diziden $Tor(A, B)$ fonktörü

$$Tor(A, B) = Ker(i^\# \otimes 1_B)$$

olarak tanımlanır (Rotman, 1998).

Teorem 5.5.1. (*Munkres, 1984*) (**Künneth formülü**) $(X_{m_1, \kappa_1}, \tau_X)$ ve $(Y_{m_2, \kappa_2}, \tau_Y)$ Khalimsky dijital uzaylar olsun. $q \geq 0$ ve bir M modülü için

$$\begin{aligned} H_{\kappa_*(\kappa_1, \kappa_2)}^q(X \times Y; M) &\cong \sum_{i+j=q} H_{\kappa_1}^i(X; M) \otimes H_{\kappa_2}^j(Y; M) \\ &\oplus \sum_{p+q=q-1} Tor(H_{\kappa_1}^p(X; M), H_{\kappa_2}^q(Y; M)) \end{aligned}$$

izomorfizması vardır. Eğer $M = F$ bir cisim ise Tor fonktörü aşıkardır.

Bu durumda yukarıdaki izomorfizma aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$H_{\kappa_*(\kappa_1, \kappa_2)}^q(X \times Y; \mathbb{F}) \cong \sum_{i+j=q} H_{\kappa_1}^i(X; \mathbb{F}) \otimes H_{\kappa_2}^j(Y; \mathbb{F}).$$

Önerme 5.5.1. X tek noktalı dijital görüntü ve

$$Y = \{a = (-2, 1), b = (-2, 0), c = (0, 0), d = (1, 1), e = (2, 0)\} \subset \mathbb{Z}^2$$

olsun. olmak üzere $X \times Y$ uzayının katsayılı 2. boyuta kadar olan $\mathbb{Z}$ katsayılı singüler kohomoloji grupları aşağıdaki gibidir.

$$H_{\kappa_*}^0(\kappa_1, \kappa_2)(X \times Y, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_{\kappa_*}^1(\kappa_1, \kappa_2)(X \times Y, \mathbb{Z}) \cong \{0\}, \quad H_{\kappa_*}^2(\kappa_1, \kappa_2)(X \times Y, \mathbb{Z}) \cong \{0\}.$$

İspat. X ve Y nin dijital kohomoloji gruplarının

$$H_{\kappa_1}^q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad H_{\kappa_2}^q(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & q = 0 \\ 0, & q = 1, 2 \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. $\mathbb{Z}$ burulmasız bir grup olduğundan Künneth formülü

$$H_{\kappa_*}^q(\kappa_1, \kappa_2)(X \times Y; \mathbb{Z}) \cong \sum_{i+j=q} H_{\kappa_1}^i(X; \mathbb{Z}) \otimes H_{\kappa_2}^j(Y; \mathbb{Z})$$

şeklinde ifade edilir. Bu formülü kullanırsak $q = 0$ için

$$H_4^0(X \times Y; \mathbb{Z}) \cong H_2^0(X; \mathbb{Z}) \otimes H_2^0(Y; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$q = 1$ için

$$H_4^1(X \times Y; \mathbb{Z}) \cong (H_2^0(X; \mathbb{Z}) \otimes H_2^1(Y; \mathbb{Z})) \oplus (H_2^1(X; \mathbb{Z}) \otimes H_2^0(Y; \mathbb{Z})) \cong \{0\},$$

$q = 2$ için

$$\begin{aligned} H_4^2(X \times Y; \mathbb{Z}) &\cong (H_2^0(X; \mathbb{Z}) \otimes H_2^2(Y; \mathbb{Z})) \oplus (H_2^1(X; \mathbb{Z}) \otimes H_2^1(Y; \mathbb{Z})) \\ &\quad \oplus (H_2^2(X; \mathbb{Z}) \otimes H_2^0(Y; \mathbb{Z})) \\ &\cong \{0\} \end{aligned}$$

buluruz. □

5.6 Khalimsky Dijital Uzaylar için Singüler Cup Çarpım

Şimdi Khalimsky dijital uzaylar üzerinde cup çarpımın inşası verilecektir. $(X_{m, \kappa}, \tau_X)$ bir Khalimsky dijital uzay olsun. G bir toplamsal grup olmak üzere cup çarpım tanımlamak için G katsayılı kohomoloji grupları ele alınacaktır.

$\varphi \in S_{\kappa}^p(X; G)$ ve $\psi \in S_{\kappa}^q(X; G)$ eşzincirler için $S \subset \{0, 1, \dots, p+q\}$ ve ι_S , S tarafından gerilen simpleksin kanonik gömme dönüşümü olmak üzere bir

singüler simpleks $\sigma : \Delta^{p+q} \longrightarrow X$ üzerinde $\varphi \smile \psi \in S_{\kappa}^{p+q}(X; G)$ **cup çarpımı**,
 $\smile : \varphi \in S_{\kappa}^p(X; G) \times \psi \in S_{\kappa}^q(X; G) \longrightarrow \varphi \smile \psi \in S_{\kappa}^{p+q}(X; G)$
 $(\varphi, \psi) \longmapsto (\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q})$
olarak tanımlanır.

Teorem 5.6.1. *Khalimsky dijital uzay üzerinde cup çarpım bilineerdir.*

İspat. $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in H_{\kappa}^p(X, G_1)$ ve $\mu, \mu_1, \mu_2 \in H_{\kappa}^q(X, G_2)$ olsun.

$$\begin{aligned}
((\gamma_1 + \gamma_2) \smile \mu)(\sigma) &= (\gamma_1 + \gamma_2)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \mu(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}) \\
&= (\gamma_1(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) + \gamma_2(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p})) \cdot \mu(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}) \\
&= \gamma_1(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \mu(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}) \\
&\quad + \gamma_2(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \mu(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}) \\
&= (\gamma_1 \smile \mu)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) + (\gamma_2 \smile \mu)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) \\
&= (\gamma_1 \smile \mu + \gamma_2 \smile \mu)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\gamma \smile (\mu_1 + \mu_2))(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) &= \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot (\mu_1 + \mu_2)(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}) \\
&= \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot [(\mu_1(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}) \\
&\quad + \mu_2(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}))] \\
&= \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \mu_1(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}) \\
&\quad + \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \mu_2(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\dots,p+q}) \\
&= (\gamma \smile \mu_1)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) \\
&\quad + (\gamma \smile \mu_2)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) \\
&= (\gamma \smile \mu_1 + \gamma \smile \mu_2)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}).
\end{aligned}$$

Böylece istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 5.6.2. *Her $a \in S^p(X; G)$ ve $b \in S^q(X; G)$ için*

$$\delta(a \smile b) = \delta a \smile b + (-1)^p a \smile \delta b$$

eşitliği vardır.

İspat. $\sigma : \Delta^{k+l+1} \rightarrow X$ dönüşümü için

$$\delta a \smile b(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i a(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,\hat{i},\dots,p+1}) \cdot b(\sigma \circ \iota_{p+1,\dots,p+q+1})$$

ve

$$(-1)^p (a \smile \delta b)(\sigma) = \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i a(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot b(\sigma \circ \iota_{p,\dots,\hat{i},\dots,p+q+1})$$

olup iki denklemin taraf tarafa toplanmasıyla, ilk toplamın ikinci terimi ile ikinci toplamın ilk terimi sadeleşeceğinden ve

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i (\sigma \circ \iota_{p,\dots,\hat{i},\dots,p+q+1})$$

olduğundan

$$\delta(a \smile b) = (a \smile b)(\partial \sigma)$$

elde edilir. □

Teorem 5.6.3. $(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ bir Khalimsky dijital uzayı olsun. Dijital singüler eşzincirler üzerindeki cup çarpım birleşmelidir. Ayrıca 1_X dijital singüler eşzincir birim elemandır.

İspat. Her $\gamma \in H_\kappa^p(X, G)$, $\mu \in H_\kappa^q(X, G)$ ve $\nu \in H_\kappa^r(X, G)$ için

$$\begin{aligned} ((\gamma \smile \mu) \smile \nu)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q+r}) &= (\gamma \smile \mu)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) \cdot \nu(\sigma \circ \iota_{p+q,\dots,p+q+r}) \\ &= (\gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \mu(\sigma \circ \iota_{p,\dots,p+q})) \cdot \nu(\sigma \circ \iota_{p+q,\dots,p+q+r}) \\ &= \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot (\mu(\sigma \circ \iota_{p,\dots,p+q}) \cdot \nu(\sigma \circ \iota_{p+q,\dots,p+q+r})) \\ &= \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot ((\mu \smile \nu)(\sigma \circ \iota_{p+q,\dots,p+q+r})) \\ &= (\gamma \smile (\mu \smile \nu))(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q+r}) \end{aligned}$$

olduğundan cup çarpım birleşmelidir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (1_X \smile \gamma)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) &= 1_X(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \\ &= \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\gamma \smile 1_X)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) &= \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot 1_X(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \\ &= \gamma(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \end{aligned}$$

eşitlikleri 1_X 'in dijital singüler eş zincir birim eleman olduğunu verir.

Teorem 5.6.4. $\mu \in H_\kappa^p(X, G)$ ve $\nu \in H_\kappa^q(X, G)$ eşdevirleri için

$$\mu \smile \nu = (-1)^{pq} \nu \smile \mu$$

dir.

İspat. Cup çarpım tanımından

$$(\mu \smile \nu)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) = \mu(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \nu(\sigma \circ \iota_{p,\dots,p+q})$$

ve

$$(\nu \smile \mu)(\sigma \circ \iota_{p+q,\dots,0}) = \nu(\sigma \circ \iota_{p+q,\dots,p}) \cdot \mu(\sigma \circ \iota_{p,\dots,0})$$

yazılabilir.

$$\iota_{s,\dots,0} = (-1)^{s(s+1)/2} \iota_{0,\dots,s} \quad \text{ve} \quad (p+q)(p+q+1) - p(p+1) - q(q+1) = 2pq$$

eşitliklerinden istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 5.6.5. $(X_{m,\kappa}, \tau_X)$ ve $(Y_{n,\kappa}, \tau_Y)$ Khalimsky dijital uzaylar olsun.

$f : (X_{m,\kappa}, \tau_X) \rightarrow (Y_{n,\kappa}, \tau_Y)$ dijital sürekli fonksiyon ve $\mu \in H_\kappa^p(X, G)$ ile $\nu \in H_\kappa^q(X, G)$ eşdevirler ise

$$f^*(\mu \smile \nu) = f^*(\mu) \smile f^*(\nu).$$

dir.

İspat. Cup çarpım tanımı kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} (f^*(\mu \smile \nu))(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) &= (\mu \smile \nu)(f \circ \sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) \\ &= \mu(f \circ \sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p}) \cdot \nu(f \circ \sigma \circ \iota_{p,\dots,p+q}) \\ &= f^*(\mu)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) \cdot f^*(\nu)(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}) \\ &= (f^*(\mu) \smile f^*(\nu))(\sigma \circ \iota_{0,1,\dots,p+q}). \end{aligned}$$

□

Sonuç 5.6.1. Dijital cup çarpım, Khalimsky dijital uzaylarının kohomoloji gruplarına halka yapısı verir.

İspat. Yukarıda tanımlanan cup çarpım işlemi kohomoloji gruplarına halka yapısı kazandırır. □

Örnek 5.6.1. *Teorem 5.2.2'den $X = \{a = (-1, 0), b = (1, 0), c = (1, 1), d = (0, -1), e = (2, 1)\}$ dijital görüntüsünün dijital homoloji gruplarının*

$$H_n^\kappa(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^3, & n = 0 \\ 0, & n = 1, 2 \end{cases}$$

ve Teorem 5.4.1 'den aynı görüntünün dijital kohomoloji gruplarının

$$H_\kappa^n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^3, & n = 0 \\ 0, & n = 1, 2 \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. X de 7 tane 1-simpleks vardır. Bu simpleksler kullanılarak X uzayının 1-eşdevir grupları aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$\begin{aligned} \omega &= -(\sigma_1^1)^*, \\ z &= -(\sigma_2^1)^* - (\sigma_6^1)^*, \\ \alpha &= -(\sigma_3^1)^* + (\sigma_6^1)^* + (\sigma_7^1)^*, \\ \beta &= -(\sigma_4^1)^*, \\ \gamma &= -(\sigma_5^1)^* - (\sigma_7^1)^*. \end{aligned}$$

$\omega, z, \alpha, \beta, \gamma$ 1-eşdevirlerinin cup çarpımı şöyledir:

$$\begin{aligned} (\omega \smile \omega)(\sigma_1^2) &= (\omega \smile \sigma_1^1).(\omega \smile \sigma_1^1) = -1. -1 = 1, \\ (\omega \smile z)(\sigma_1^2) &= (\omega \smile \sigma_1^1).(z \smile \sigma_1^1) = -1.0 = 0, \\ (\omega \smile \alpha)(\sigma_1^2) &= (\omega \smile \sigma_1^1).(\alpha \smile \sigma_1^1) = -1.0 = 0, \\ (\omega \smile \beta)(\sigma_1^2) &= (\omega \smile \sigma_1^1).(\beta \smile \sigma_1^1) = -1.0 = 0, \\ (\omega \smile \gamma)(\sigma_1^2) &= (\omega \smile \sigma_1^1).(\gamma \smile \sigma_1^1) = -1.0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z \smile \omega)(\sigma_1^2) &= (z \smile \sigma_1^1).(\omega \smile \sigma_1^1) = 0. -1 = 0, \\ (z \smile z)(\sigma_7^2) &= (z \smile \sigma_2^1).(z \smile \sigma_6^1) = -1. -1 = 1, \\ (z \smile \alpha)(\sigma_6^2) &= (z \smile \sigma_6^1).(\alpha \smile \sigma_3^1) = -1. -1 = 1, \\ (z \smile \beta)(\sigma_1^2) &= (z \smile \sigma_1^1).(\beta \smile \sigma_1^1) = 0.0 = 0, \\ (z \smile \gamma)(\sigma_1^2) &= (z \smile \sigma_1^1).(\gamma \smile \sigma_1^1) = 0.0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha \smile \omega)(\sigma_1^2) &= (\alpha \smile \sigma_1^1).(\omega \smile \sigma_1^1) = 0. -1 = 0, \\ (\alpha \smile z)(\sigma_6^2) &= (\alpha \smile \sigma_6^1).(z \smile \sigma_3^1) = -1.0 = 0, \\ (\alpha \smile \alpha)(\sigma_8^2) &= (\alpha \smile \sigma_7^1).(\alpha \smile \sigma_3^1) = 1. -1 = -1, \\ (\alpha \smile \beta)(\sigma_4^2) &= (\alpha \smile \sigma_4^1).(\beta \smile \sigma_4^1) = 0. -1 = 0, \\ (\alpha \smile \gamma)(\sigma_9^2) &= (\alpha \smile \sigma_5^1).(\gamma \smile \sigma_7^1) = 0.1 = 0, \end{aligned}$$

$$(\beta \smile \omega)(\sigma_4^2) = (\beta \smile \sigma_4^1).(\omega \smile \sigma_4^1) = -1.0 = 0,$$

$$(\beta \smile z)(\sigma_4^2) = (\beta \smile \sigma_4^1).(z \smile \sigma_4^1) = -1.0 = 0,$$

$$(\beta \smile \alpha)(\sigma_4^2) = (\beta \smile \sigma_4^1).(\alpha \smile \sigma_4^1) = -1.0 = 0,$$

$$(\beta \smile \beta)(\sigma_4^2) = (\beta \smile \sigma_4^1).(\beta \smile \sigma_4^1) = -1. - 1 = 1,$$

$$(\beta \smile \gamma)(\sigma_4^2) = (\beta \smile \sigma_4^1).(\gamma \smile \sigma_4^1) = -1.0 = 0,$$

$$(\gamma \smile \omega)(\sigma_1^2) = (\gamma \smile \sigma_1^1).(\omega \smile \sigma_1^1) = 0. - 1 = 0,$$

$$(\gamma \smile z)(\sigma_1^2) = (\gamma \smile \sigma_1^1).(z \smile \sigma_1^1) = 0.0 = 0,$$

$$(\gamma \smile \alpha)(\sigma_8^2) = (\gamma \smile \sigma_7^1).(\alpha \smile \sigma_3^1) = -1. - 1 = 1,$$

$$(\gamma \smile \beta)(\sigma_5^2) = (\gamma \smile \sigma_5^1).(\beta \smile \sigma_5^1) = -1.0 = 0,$$

$$(\gamma \smile \gamma)(\sigma_9^2) = (\gamma \smile \sigma_5^1).(\gamma \smile \sigma_7^1) = -1. - 1 = 1.$$

Yukarıdaki işlemler birleştirilirse aşağıdaki cup çarpım tablosuna ulaşılır:

$\smile$	ω	z	α	β	γ
ω	1	0	0	0	0
z	0	1	1	0	0
α	0	0	-1	0	0
β	0	0	0	1	0
γ	0	0	1	0	1

6 DİJİTAL TOPOLOJİDE KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR

1990'lı yılların ortalarında Kovalevsky (Kovalevsky, 1994) tarafından küme değerli fonksiyon kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra Tsaur ve Smyth (Tsaur and Smyth, 2001) sürekli küme değerli dijital fonksiyonu incelenmiştir. 2010' lara gelindiğinde Escibano, Giraldo ve Sastre (Escibano, Giraldo and Sastre, 2008) tarafından süreklilik kavramı daha da karakterize edilmiştir. Daha sonrasında (Escibano, Giraldo and Sastre, 2012) erozyon, dilasyon, açma ve kapama gibi morfolojik işlemler ele alınarak, sürekli küme değerli fonksiyonların sınıflama yoluna gidilmiştir. Basit noktaların silinmesi kavramı sürekli küme değerli fonksiyonlar tarafından karakterize edilmiştir. Son olarak küme değerli dijital retraksiyon tanımı verilip, tek değerli dijital retraksiyon ile arasındaki farka değinilmiştir.

2014 yılı itibariyle Boxer (Boxer, 2014) bu konuda çeşitli çalışmalar yapmıştır. Boxer çekinik dönüşümler yardımıyla sürekli küme değerli fonksiyonları sınıflama yoluna gitmiştir. Daha sonra bağlantılılığı koruyan dönüşümler ile sürekli küme değerli fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi vermiştir. Bu çalışmalara ek olarak, zayıf ve güçlü süreklilik kavramını tanımlamış ve bu yapıyı kullanarak bağlantılılığı koruyan dönüşüm ile sürekli küme değerli fonksiyonlar arasındaki bağıntı incelenmiştir.

Yukarıda bahsedilen yapının kurulmasındaki temel amaç, Euclidean uzayda sağlanan bazı özelliklerin dijital uzaylarda sağlanmamasıdır. Örneğin; Euclidean uzayda çember bir halkanın retraktıdır fakat dijital görüntülerde bu sağlanmaz. Sürekli küme değerli fonksiyonlar yardımıyla dijital çember bir dijital halkanın dijital retraktı olur.

Tanım 6.0.1. (Escibano, Giraldo and Sastre, 2008) $\mathbb{Z}^n$ nin *r.alt bölüntüsü*,

$$\mathbb{Z}_r^n = \{(\frac{z_1}{3^r}, \frac{z_2}{3^r}, \dots, \frac{z_n}{3^r}) | (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

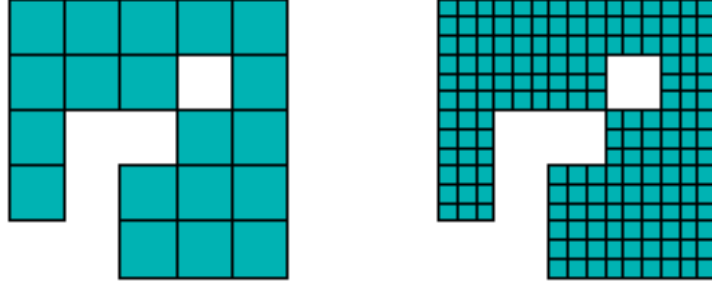
şeklinde ifade edilir. $(z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$, $(\frac{z_1}{3^r}, \frac{z_2}{3^r}, \dots, \frac{z_n}{3^r})$ e yakın bir nokta olmak üzere

$$i_r : \mathbb{Z}_r^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

$$(\frac{z_1}{3^r}, \frac{z_2}{3^r}, \dots, \frac{z_n}{3^r}) \longmapsto (z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$$

bir kapsama dönüşümüdür.

Şekil 6.1’de (Escribano, Giraldo and Sastre, 2008) bir dijital görüntünün birinci alt bölüntü kümesi verilmiştir:



Şekil 6.1: Bir dijital görüntünün 1. alt bölüntü kümesi

Bundan sonraki kısımda notasyon sadeliği olması açısından bir X dijital görüntüsünün r . alt bölüntü kümesi

$$S(X, r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_r^n \mid (\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor) \in X\}$$

olarak gösterilecektir. Bölüntü uzaylarında $\mathbb{Z}^n$ üzerindeki yakınlık bağıntısından indirgenen yeni bir yakınlık bağıntısından bahsetmek mümkündür. Bir başka deyişle $(z_1/r, z_2/r, \dots, z_n/r)$ ve $(z'_1/r, z'_2/r, \dots, z'_n/r)$ noktaları $\mathbb{Z}_r^n$ üzerinde κ -yakındır ancak ve ancak $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ and $(z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$ noktaları $\mathbb{Z}^n$ de κ -yakındır.

$$E_r : S(X, r) \longrightarrow X$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor)$$

dönüşümü bir gömme dönüşümüdür.

$X \subset \mathbb{Z}^m$ ve $Y \subset \mathbb{Z}^n$ olsun. $f : S(X, r) \rightarrow Y$ fonksiyonu

$$F : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto F(x) = \bigcup_{x' \in E_r^{-1}(x)} \{f(x')\}$$

küme değerli fonksiyonunu indirger. f fonksiyonuna F için bir **destek fonksiyonu** denir.

Tanım 6.0.2. (Escribano, Giraldo and Sastre, 2008) $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^m$, $(Y, \lambda) \subset \mathbb{Z}^n$ ve $r \in \mathbb{Z}^+$ için $f : S(X, r) \rightarrow Y$ bir (κ, λ) -sürekli fonksiyonu $F : X \multimap Y$ (κ, λ) küme değerli fonksiyonunu indirgerse F ye **sürekli küme değerli fonksiyon** denir.

Önerme 6.0.1. (Escribano, Giraldo and Sastre, 2012) $F : X \multimap Y$ bir

(κ, κ') -sürekli küme değerli fonksiyon olsun.

- Her $x \in X$ için $F(x)$ bağlantılıdır.
- $x \leftrightarrow_{\kappa} y \in X$ olmak üzere $F(x) \cup F(y)$ kümesi Y nin κ' -bağlantılı bir alt kümesidir.
- $A \subset X$ bağlantılı küme için $F(A)$ bağlantılıdır.

İspat. $F : X \multimap Y$ bir (κ, κ') -sürekli küme değerli fonksiyon olsun. Küme değerli fonksiyonların sürekliliğinden F dönüşümünün bağlantılılığı koruduğu açıktır. Böylece istenen sonuçlar elde edilir.

$x \leftrightarrow_{\kappa} y \in X$ olsun. F dönüşümü sürekli olduğundan bağlantılılığı koruyan bir dönüşümdür. Böylece yakın noktaların F altındaki görüntü kümeleri de yakın alt kümelerdir.

Hipotezden, $F : X \multimap Y$ bir (κ, κ') -sürekli küme değerli fonksiyondur. F sürekli olduğundan bağlantılılığı koruyan dönüşümdür. Buradan istenen sonuç elde edilir. $\square$

Önerme 6.0.2. (Escribano, Giraldo and Sastre, 2008) $F : X \multimap Y$ bir (κ, κ') -sürekli küme değerli fonksiyon ve $X' \subset X$ ise $F|_{X'} : X' \multimap Y$ bir (κ, κ') -sürekli küme değerli fonksiyondur.

İspat. $F : X \multimap Y$ sürekli bir fonksiyon olduğundan $f : S(X, r) \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü vardır. $X' \subset X$ olduğundan $S(X', r) \subset S(X, r)$ dir. Tek değerli sürekli bir dijital fonksiyonun kısıtlanması da sürekli olduğundan

$$f' : S(X', r) \rightarrow Y$$

süreklidir. Buradan $F' : X' \multimap Y$ sürekli bir fonksiyondur. $\square$

$X \subset \mathbb{Z}^m$ ve $\kappa = 3^m - 1$ olmak üzere $F : X \multimap Y$ bir (κ, κ') -sürekli küme değerli fonksiyon ve $G : Y \multimap Z$ bir (κ', κ'') -sürekli küme değerli fonksiyon ise $G \circ F : X \multimap Z$ bir (κ, κ'') -sürekli küme değerli fonksiyondur (Giraldo and Sastre, 2015).

6.1 Bağlantılılığı Koruyan Dönüşümler

Tanım 6.1.1. (Boxer and Staecker, 2016a) Bir küme değerli fonksiyon

$F : X \multimap Y$ için her $A \subset X$ bağlantılı iken $F(A) \subset Y$ bağlantılı oluyor ise F ye **bağlantılılığı koruyan dönüşüm** denir.

Teorem 6.1.1. (Boxer and Staecker, 2016a) $(X, \kappa) \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ için $F : X \multimap Y$ bir sürekli küme değerli fonksiyon ise F bağlantılıdır.

İspat. Önerme 6.0.1 den, X in tüm bağlantılı alt kümesi A için $F(A)$ bağlantılıdır. Bağlantılılığı koruyan dönüşüm tanımından istenen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 6.1.2. (Boxer and Staecker, 2016a) $f : X \multimap Y$ fonksiyonun bağlantılılığı koruması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulları sağlamasıdır;

- Her $x \in X$ için $f(x)$, Y nin bağlantılı alt kümesidir.
- Her yakın $x, x' \in X$ elemanları için $f(x)$ ve $f(x')$ de yakındır.

İspat. $(\Leftarrow)$: f dönüşümünün yukarıdaki iki koşulu sağladığını kabul edelim. A bağlantılı olsun, bu durumda $f(A)$ nın da bağlantılı olduğu gösterilmelidir. $y, y' \in A$ olsun. Bu durumda y ve y' nü içeren bağlantılı bir $B \subset f(A)$ kümesi bulunabilir. O halde y ile y' arasında $f(A)$ da bir yol vardır. $y, y' \in f(A)$ olduğundan $y \in f(x)$ ve $y' \in f(x')$ olacak şekilde $x, x' \in A$ vardır. A bağlantılı olduğundan $x_i \in A$ olmak üzere x_i ve x_{i+1} yakın olacak şekilde $x = x_0, x_1, \dots, x_k = x'$ yolu vardır.

Hipotezden $f(x_i)$ ler bağlantılıdır ve her i için $f(x_i)$ ve $f(x_{i+1})$ kümeleri yakındır. Bu durumda

$$B = \bigcup_{i=0}^k f(x_i)$$

bağlantılıdır. O halde y ve y' noktalarını içeren $B \subset f(A)$ bulunabildiğinden $f(A)$ bağlantılıdır.

$(\Rightarrow)$: f bağlantılılığı koruyan bir dönüşüm olsun. İlk koşulun ispatı $f(x) = f(\{x\})$ ve $\{x\}$ bağlantılı olduğundan açıktır. İkinci koşulun ispatı için $x, x' \in X$ yakın noktaları ele alınsın. $f(x)$ ve $f(x')$ nün yakın olduğu gösterilmelidir. x ve x' yakın olduğundan $\{x, x'\}$ bağlantılı bir kümedir. O halde $f(\{x, x'\}) = f(\{x\}) \cup f(\{x'\})$ de bağlantılıdır. Bu durumda $f(x)$ ile $f(x')$ yakın olmalıdır. $\square$

Önerme 6.1.1. (Boxer and Staecker, 2016a) X ve Y dijital uzaylar olsun. Y nin bağlantılı olduğunu kabul edelim. Her $x \in X$ için $F(x) = Y$ ile tanımlanan $F : X \multimap Y$ küme değerli fonksiyonu bağlantılıdır.

İspat. Her $\{x\} \subset X$ için $F(x) = Y$ bağlantılı bir küme olduğundan F bağlantılılığı koruyan bir dönüşümdür. $\square$

Önerme 6.1.2. (Boxer and Staecker, 2016a) (X, κ) ve (Y, λ) dijital uzaylar olsun. $F : X \multimap Y$ örten küme değerli fonksiyonu için X sonlu ve Y sonsuz ise F sürekli değildir.

İspat. F örten, X sonlu ve Y sonsuz olduğundan $F(x')$ sonsuz bir küme olacak şekilde $x' \in X$ vardır. Buradan F yi indirgeyen $f : S(X, r) \rightarrow Y$ tek değerli fonksiyonu yoktur. Çünkü böyle bir fonksiyon için

$$\bigcup_{x \in E_r^{-1}(x')} \{f(x)\}$$

sonlu bir kümedir. $\square$

Teorem 6.1.3. (Boxer, 2014) $f : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \lambda)$ sürekli ve örten dönüşümünün çekinik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her λ -bağlantılı $B \subseteq Y$ alt kümesi için $f^{-1}(B)$ nin de κ -bağlantılı olmasıdır.

İspat. İlk olarak f dönüşümünün çekinik olduğunu kabul edelim. λ -bağlantılı $B \subseteq Y$ alt kümesi alınsın. $\{b_0, b_1\} \subseteq f^{-1}(B)$ olsun. O halde $p_0 = f(b_0) \in B$, $p_m = f(b_1) \in B$ ve $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ için p_i ve p_{i+1} noktaları λ -yakın olacak şekilde $\{p_i\}_{i=0}^m \subset B$ kümesi vardır. Bu durumda $\{b_0, b_1\}$ aşağıdaki şekilde tanımlanan C bağlantılı kümesinin bir alt kümesidir.

$$C = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^{-1}(\{p_i, p_{i+1}\})$$

Bu nedenle, $f^{-1}(B)$ in κ -bağlantılı olduğu sonucuna ulaşılır. İspatın yeter yönü çekinik dönüşüm tanımından açıktır. $\square$

Her $x \in X$ için $F(x) = Y$ şeklinde tanımlı $F : X \multimap Y$ küme değerli fonksiyon olsun. X sonlu ve Y sonsuz bağlantılı bir küme olmak üzere F bağlantılılığı koruyan dönüşümdür fakat sürekli değildir.

Teorem 6.1.4. (Boxer and Staecker, 2016a) $F : X \multimap Y$ ve $G : Y \multimap Z$ bağlantılılığı koruyan dönüşümler ise $G \circ F : X \multimap Z$ bağlantılılığı korur.

İspat. $A \subset X$ bağlantılı olsun. F bağlantılılığı koruduğundan $F(A)$ bağlantılıdır ve G bağlantılılığı koruduğundan $G(F(A))$ bağlantılıdır. $\square$

X ve Y dijital uzaylar olsun. $F : X \multimap Y$ sürekli küme değerli örten bir dönüşüm olmak üzere F çekinik bir dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $F^{-1} : Y \multimap X$ bağlantılılığı koruyan küme değerli fonksiyon olmasıdır (Boxer and Staecker, 2016a).

$F : X \multimap Y$ bir küme değerli fonksiyon olsun.

- X deki her x, y yakın çifti için $F(x)$ ve $F(y)$ alt kümeleri Y nin yakın alt kümesi ise F ye **zayıf sürekli** denir.
- X deki her x, y yakın çifti için $F(x)$ in her noktası $F(y)$ nin bazı noktalarına eşit yada yakın ve $F(y)$ in her noktası $F(x)$ nin bazı noktalarına eşit yada yakın ise F ye **güçlü sürekli** denir (Tsaur and Smyth, 2001).

Önerme 6.1.3. (Boxer, 2017c) $F : X \multimap Y$ bir küme değerli fonksiyon olsun. F bağlantılılığı korur ancak ve ancak F zayıf sürekli ve her $x \in X$ için $F(x)$ bağlantılıdır.

İspat. Zayıf süreklilik tanımından ve Teorem 6.1.2'den istenen sonuç elde edilir. $\square$

Önerme 6.1.4. (Boxer, 2017c) $F : X \multimap Y$ bir küme değerli fonksiyon olsun. F güçlü sürekli ve her $x \in X$ için $F(x)$ bağlantılı ise F bağlantılılığı korur.

İspat. Teorem 6.1.2'den her $x \in X$ için $F(x)$ bağlantılı ve her yakın $x, x' \in X$ elemanları için $F(x)$ ve $F(x')$ de yakın iken F bağlantılılığı korur. Hipotezden F güçlü sürekli olduğundan her yakın $x, x' \in X$ elemanları için $F(x)$ ve $F(x')$ de yakındır ve yine hipotezden her $x \in X$ için $F(x)$ bağlantılı olduğundan F dönüşümü bağlantılılığı korur. $\square$

Örnek 6.1.1. (Boxer and Staecker, 2016a)

$$F : [2, 3]_{\mathbb{Z}} \multimap [2, 4]_{\mathbb{Z}}$$

$$2 \mapsto \{2\}$$

$$3 \mapsto \{3, 4\}$$

küme değerli dönüşümü sürekli ve zayıf süreklidir. Fakat bu dönüşüm güçlü sürekli değildir.

Örnek 6.1.2. (Boxer and Staecker, 2016a)

$$G : [2, 3]_{\mathbb{Z}} \multimap [2, 4]_{\mathbb{Z}}$$

$$2 \mapsto \{3\}$$

$$3 \mapsto \{2, 4\}$$

küme değerli dönüşümü zayıf ve güçlü süreklidir. Diğer taraftan G dönüşümü bağlantılılığı koruyan bir dönüşüm olmadığından sürekli de değildir.

$F : X \multimap Y$ küme değerli fonksiyon olsun. F güçlü sürekli ve her $x \in X$ için $F(x)$ bağlantılı ise F bağlantılılığı korur (Boxer and Staecker, 2016a).

X ve Y dijital uzaylar olmak üzere $F : X \multimap Y$ küme değerli fonksiyonu her $x \in X$ için $F(x) = Y$ şeklinde tanımlansın.

- i) F hem zayıf hem de güçlü süreklidir.
- ii) F nin bağlantılılığı koruması için gerek ve yeter şart Y nin bağlantılı bir küme olmasıdır (Boxer and Staecker, 2016a).

Teorem 6.1.5. (Boxer, 2017c) $F : (X, \kappa) \multimap (Y, \lambda)$ ve $G : (Y, \lambda) \multimap (Z, \mu)$ herhangi iki küme değerli fonksiyon olsun.

- a) F ve G zayıf sürekli ise $G \circ F$ de zayıf süreklidir.
- b) F ve G güçlü sürekli ise $G \circ F$ de güçlü süreklidir.

İspat. a) F ve G zayıf sürekli ve $x \leftrightarrow_{\kappa} x'$ olsun. F zayıf olduğundan $y \leftrightarrow_{\lambda} y'$ olacak şekilde $y \in F(x)$ ve $y' \in F(x')$ vardır. Buradan $w \leftrightarrow_{\mu} w'$ olacak şekilde $w \in G(y) \subset G \circ F(x)$ ve $w' \in G(y') \subset G \circ F(x')$ vardır. Öyleyse $G \circ F$ zayıf süreklidir.

b) F ve G güçlü sürekli ve $x \leftrightarrow_{\kappa} x'$ olsun. Her $y \in F(x)$ için $y \leftrightarrow_{\lambda} y'$ olacak şekilde $y' \in F(x')$ vardır. Buradan her $w \in G(y) \subset G \circ F(x)$ için $w \leftrightarrow_{\mu} w'$ olacak şekilde $w' \in G(y') \subset G \circ F(x')$ vardır. $y, F(x)$ in keyfi bir elemanı olduğundan her $w \in G \circ F(x)$ için $w \leftrightarrow_{\mu} w'$ olacak şekilde $w' \in G \circ F(x')$ vardır. Benzer şekilde her $w' \in G(y) \subset G \circ F(x')$ için $w \leftrightarrow_{\mu} w'$ olacak şekilde $w \in G \circ F(x)$ mevcuttur. Sonuç olarak $G \circ F$ güçlü süreklidir. $\square$

6.2 Evrensel Küme Değerli Fonksiyonlar

(X, κ) ve (Y, λ) dijital görüntüler olsun. Herhangi bir $G : X \multimap Y$ sürekli küme değerli fonksiyonu için $F(x) \leftrightarrow_{\lambda} G(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa

$F : X \multimap Y$ sürekli küme değerli fonksiyonuna **evrensel küme değerli fonksiyon** denir.

Teorem 6.2.1. (X, κ) ve (Y, λ) dijital görüntüler olsun. $U \subset X$ için $F|_U : (U, \kappa) \multimap (Y, \lambda)$ evrensel küme değerli fonksiyon ise $F : (X, \kappa) \multimap (Y, \lambda)$ fonksiyonu da evrensel küme değerlidir.

İspat. $H : X \multimap Y$ sürekli küme değerli fonksiyon olsun. F dönüşümünün U ya kısıtlanması evrensel olduğundan

$$H(u) = H|_U(u) \leftrightarrow F|_U(u) = F(u)$$

olacak şekilde $u \in U \subset X$ vardır. Sonuç olarak (X, Y) ikilisi için F bir evrensel dönüşümdür. $\square$

Teorem 6.2.2. X ve Y dijital görüntüler olsun. $|X| > 1$ ve $|Y| > 1$ olmak üzere her $x \in X$ için $F(x) = Y$ şeklinde tanımlı $F : X \multimap Y$ dönüşümü evrenseldir.

İspat. Evrensel dönüşüm ve F fonksiyonunun tanımından istenen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 6.2.3. (Boxer, Ege, Karaca, Lopez and Louwsma, 2016b) (X, κ) , (Y, λ) ve (Z, β) dijital görüntüler olsun. $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ dönüşümleri sırasıyla (κ, λ) ve (λ, β) -sürekli fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ evrensel dönüşüm ise g de evrensel bir dönüşümdür.

Uyarı: Teorem 6.2.3 dijital küme değerli fonksiyonlar için sağlanmaz:

Örnek 6.2.1. $n > 3$ olmak üzere C_n bir dijital basit kapalı eğri olsun. Her $x \in C_n$ için

$$F : C_n \multimap C_n$$

$$x \mapsto C_n$$

küme değerli fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır. G dönüşümü C_n üzerinde birim dönüşüm olsun. $G \circ F = F$ evrenseldir fakat G dönüşümü evrensel bir dönüşüm değildir. 2 noktaya göre C_n nin bir rotasyonunu h olarak alabiliriz. Böylece C_n eğrisinde $h(x)$ ile $G(x) = x$ noktasını yakın yapacak bir x noktası yoktur.

Teorem 6.2.4. (Boxer, Ege, Karaca, Lopez and Louwsma, 2016b)

$g : (U, \mu) \rightarrow (X, \kappa)$ ve $h : (Y, \lambda) \rightarrow (V, \nu)$ dijital izomorfizmalar ve $f : X \rightarrow Y$ bir (κ, λ) -sürekli dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (1) f dönüşümü (X, Y) için evrenseldir.
- (2) $f \circ g$ evrenseldir.
- (3) $h \circ f$ evrenseldir.

Uyarı: Örnek 6.2.1'den, Teorem 6.2.4 dijital küme değerli fonksiyonlar için sağlanmaz.

6.3 Yaklaşık Sabit Nokta Teoremi

A ile B dijital görüntüler ve $F : A \multimap B$ bir küme değerli fonksiyon olsun.

- $F(a) = F(b)$ iken $a = b$ ise F dönüşümüne **injektif** denir.
- $a \neq b$ iken $F(a) \cap F(b) = \emptyset$ ise F dönüşümüne **mutlak injektif** denir.
- Her $b \in B$ için $b \in F(a)$ olacak şekilde öyle bir $a \in A$ varsa F dönüşümüne **surjektif** denir.
- $1_A : A \multimap A$ bijektif dönüşüm olsun. Her $a \in A$ için $a \in 1_A(a)$ ise 1_A dönüşümüne **birim dönüşüm** denir.

(X, κ) bir dijital görüntü ve $F : X \multimap X$ sürekli küme değerli fonksiyon olsun. $p \in F(p)$ veya $F(p)$ ile $\{p\}$ kümeleri κ -yakın ise p noktasına F nin **yaklaşık sabit noktası** denir. (X, κ) dijital görüntüsüne de **yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir** denir.

Teorem 6.3.1. (X, κ) bir dijital görüntü ve $|X| > 1$ olsun. (X, κ) yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir ancak ve ancak (X, X) için küme değerli birim fonksiyon evrensel dönüşümdür.

İspat. $(\Rightarrow)$ $F : X \multimap X$ küme değerli fonksiyon olsun. Hipotezden $\{p\} \leftrightarrow F(p)$ olacak şekilde $p \in X$ vardır. Böylece (X, X) için 1_X evrensel bir dönüşümdür. $(\Leftarrow)$ (X, X) için 1_X evrensel fonksiyon olsun. $F : X \multimap X$ küme değerli bir fonksiyon için $\{p\} \in 1_X(p) \leftrightarrow F(p)$ olacak şekilde $p \in X$ vardır. Sonuç olarak (X, κ) yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir. $\square$

Teorem 6.3.2. $(X_i, c_{n_i}) \subset \mathbb{Z}^{n_i}$ dijital görüntüleri olsun. $i = 1, 2, \dots, m$ için $s = \sum_{i=1}^m n_i$ olsun. $X = \prod_{i=1}^m X_i \subset \mathbb{Z}^s$ için (X, c_s) yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip ise her bir (X_i, c_{n_i}) yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir.

İspat. (X, c_s) yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olsun. $i = 1, 2, \dots, m$ için $F_i : X_i \multimap X_i$ sürekli küme değerli fonksiyon olsun. Buradan

$$F : X \multimap X$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m))$$

(c_s, c_s) -sürekli fonksiyonu vardır. 1_X dönüşümü (X, X) için evrenseldir.

$x_* \leftrightarrow_{c_s} F(x_*)$ olacak şekilde $x_{i,*} \in X_i$ için bir $x_* = (x_{1,*}, x_{2,*}, \dots, x_{m,*}) \in X$ noktası vardır. O halde her $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ için $x_{i,*} \leftrightarrow_{c_{n_i}} F_i(x_{i,*})$ dir. Sonuç olarak her bir $F_i : X_i \multimap X_i$ dönüşümü yaklaşık sabit noktaya sahiptir. $\square$

Teorem 6.3.3. $(X, c = 3^n - 1) \subset \mathbb{Z}^n$ bir dijital görüntü ve $R : X \multimap Y$, (c, c) -retraksiyon olsun. Eğer (Y, c) yaklaşık sabit noktaya sahip ise (X, c) de yaklaşık sabit noktaya sahiptir.

İspat. $R : X \multimap Y$ küme değerli retraksiyon ve $F : Y \multimap Y$ sürekli küme değerli dönüşüm olsun. (Y, c) yaklaşık sabit noktaya sahip olduğundan

$$y \in F(y) \text{ veya } \{y\} \leftrightarrow_c F(y)$$

olacak şekilde $y \in Y$ vardır. $I : Y \multimap X$ kapsama dönüşümü için $y \in I(y) \subset X$ olduğundan ve

$$X \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{I} X$$

için $G = I \circ F \circ R$ olmak üzere

$$G(y) = I \circ F \circ R(y) = I \circ F(y)$$

eşitliği mevcuttur. I kapsama dönüşümü ve $y \in F(y)$ olduğundan $y \in G(y)$ olur. $\square$

6.4 Küme Değerli Fonksiyonlarda Dijital Simes Çarpım İçin Bazı Sonuçlar

Önerme 6.4.1. (Boxer, 2017a) (A, α) , (B, β) , (C, γ) ve (D, δ) dijital görüntüler olsun. $f : (A, \alpha) \rightarrow (C, \gamma)$ ve $g : (B, \beta) \rightarrow (D, \delta)$ olmak üzere f ve g sürekli dönüşümlerdir ancak ve ancak

$$f \times g : (A \times B, k_*(\alpha, \beta)) \longrightarrow (C \times D, k_*(\gamma, \delta))$$

$$(f \times g)(a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm süreklidir.

İspat. f ve g sürekli olsun. (a, b) ile (a', b') birbirine $k_*(\alpha, \beta)$ -yakın olsun. a ve a' eşit veya α -yakındır. Böylece $f(a)$ ve $f(a')$ eşit veya γ -yakındır. Benzer şekilde b ve b' eşit veya β -yakın olduğundan $g(b)$ ve $g(b')$ eşit veya δ -yakındır. Normal çarpım yakınlık tanımından $(f \times g)(a, b)$ ve $(f \times g)(a', b')$ eşit veya $k_*(\gamma, \delta)$ -yakındır. Sonuç olarak $f \times g$ yakındır.

Diğer taraftan, $f \times g$ sürekli olsun. $p_1(x, y) = x$ ve $p_2(x, y) = y$ ile tanımlanan

$$p_1 : (X \times Y, k_*(\kappa, \lambda)) \rightarrow (X, \kappa)$$

ve

$$p_2 : (X \times Y, k_*(\kappa, \lambda)) \rightarrow (Y, \lambda)$$

izdüşüm dönüşümleri sürekli dir. Sürekli fonksiyonların bileşkesi de sürekli olduğundan $f = p_1 \circ (f \times g)$ ve $g = p_2 \circ (f \times g)$ sürekli dir. $\square$

Önerme 6.4.2. (X, κ) ve (Y, λ) dijital görüntüler olsun. $(A, \kappa) \subset (X, \kappa)$ olmak üzere $f : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \lambda)$ sürekli dönüşümünün (A, κ) ya kısıtlanması da sürekli dir.

İspat. $i : (A, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$ dijital kapsama dönüşümü sürekli dir. İki sürekli fonksiyonun bileşkesi sürekli olduğundan

$$f \circ i : (A, \kappa) \rightarrow (Y, \lambda)$$

sürekli dir. $\square$

Önerme 6.4.3. (X, κ) ve (Y, λ) dijital görüntüler olsun. $(Z, \lambda) \subset (Y, \lambda)$ λ -bağlantılı olmak üzere $f : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \lambda)$ sürekli fonksiyonu için $f(X) \subset Z$ iken $f := f' : (X, \kappa) \rightarrow (Z, \lambda)$ dönüşümü de sürekli dir.

İspat. f sürekli olduğundan X in her κ -bağlantılı alt kümesi A için $f(A) \subset Y$ λ -bağlantılıdır. Ayrıca

$$f'(A) = f(A) \subset f(X) \subset Z \subset Y$$

oldüğundan $f'(A)$, λ -bağlantılıdır. $\square$

Teorem 6.4.1. (X, κ) , (X', κ) , (Y, λ) ve (Y', λ) dijital görüntüler olsun. $f, F : X \multimap Y$ yi indirgeyen sürekli fonksiyon ve $g, G : X' \multimap Y'$ yi indirgeyen

sürekli tek değerli fonksiyon olmak üzere $(f \times g)(S(X, r) \wedge S(X', r)) \subset (Y \wedge Y')$ ise

$$F \wedge G : X \wedge X' \multimap Y \wedge Y'$$

küme değerli fonksiyonu sürekli dir.

İspat. F ve G sürekli küme değerli fonksiyon olsun. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere F ve G yi indirgeyen

$$f : S(X, r) \rightarrow Y$$

ve

$$g : S(X', r) \rightarrow Y'$$

sürekli tek değerli dönüşümler vardır. Önerme 6.4.1' den,

$$f \times g : S(X, r) \times S(X', r) \rightarrow Y \times Y'$$

ve Önerme 6.4.2' den

$$(f \times g)|_{S(X, r) \wedge S(X', r)} : S(X, r) \wedge S(X', r) \rightarrow Y \times Y'$$

sürekli dir. Hipotezden, $f \times g(S(X, r) \wedge S(X', r)) \subset (Y \wedge Y')$ olduğundan ve Önerme 6.4.3' den

$$(f \times g)|_{S(X, r) \wedge S(X', r)} : S(X, r) \wedge S(X', r) \rightarrow Y \wedge Y'$$

sürekli dir. Sonuç olarak $(f \times g)|_{S(X, r) \wedge S(X', r)}$ sürekli dönüşümü

$$F \wedge G : X \wedge X' \multimap Y \wedge Y'$$

küme değerli dönüşümünü indirger. □

Sonuç 6.4.1. (X, κ) , (X', κ) , (Y, λ) ve (Y', λ) dijital görüntüler olsun.

$$F \wedge G : X \wedge X' \multimap Y \wedge Y'$$

sürekli küme değerli fonksiyonu bağlantılılığı koruyan bir dönüşümdür.

İspat. $F \wedge G$ sürekli küme değerli fonksiyon olduğundan ve Teorem 6.1.1 den

$$F \wedge G : X \wedge X' \multimap Y \wedge Y'$$

bağlantılılığı koruyan bir dönüşümdür. □

6.5 Morfolojik Operatörler

Bu bölümde erozyon, dilasyon, açma ve kapama gibi temel operatörler incelenecektir. (Escribano, Giraldo and Sastre, 2012) bu operatörlerin dijital sürekli küme değerli fonksiyonlar için modellenebileceğini göstermiştir. Ayrıca (Boxer and Staecker, 2016a) bağlantınlığı koruyan küme değerli fonksiyonların modellenebileceğini ispatlamıştır.

Bir görüntünün **yapı elemanı(structuring element)** bir nokta ve o noktanın komşularından oluşur. Seçilen nokta merkez noktası olarak kabul edilir.

Bir yapı elemanı B ye göre bir X kümesinin **erezyonu(erosion)** x noktalarının yörüngesi olarak tanımlanır öyle ki B nin orijini x noktasında yer aldığında B , X de içerilir ve

$$\varepsilon_B(X) = \{x \mid B_x \subset X\}$$

olarak gösterilir (Soille, 1999).

Bir yapı elemanı B ye göre bir X kümesinin **dilasyonu(dilation)** x noktalarının yörüngesi olarak tanımlanır öyle ki B nin orijini x ile çakıştığında B , X ile denk gelir ve

$$\delta_B(X) = \{x \mid B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

olarak ifade edilir (Soille, 1999).

Bir yapı elemanı B ye göre bir X kümesinin **açılması(opening)** B ye göre erezyona uğramış bir uzaya transpoze $\check{B}$ ye göre dilasyon uygulanmasıdır ve

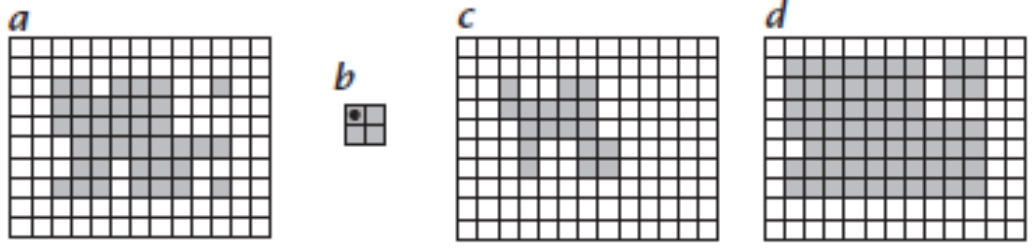
$$\gamma_B(X) = \bigcup \{B \mid B \subseteq X\}$$

olarak tanımlanır (Soille, 1999).

Bir yapı elemanı B ye göre bir X kümesinin **kapanması(closing)** B ya göre dilasyona uğramış bir uzaya transpoze $\check{B}$ ye göre erozyon uygulanmasıdır ve

$$\phi_B(X) = \bigcap \{B^c \mid X \subseteq B^c\}$$

şeklindedir (Soille, 1999).



Şekil 6.2: Bir dijital görüntünün bazı morfolojik operatörleri (Soille, 1999)

- a) Bir dijital görüntü X .
- b) Bir yapı elemanı B .
- c) B ye göre X in erezyonu.
- d) B ye göre X in dilasyonu.

Bir dijital görüntünün dilasyon kümesi $(X, \kappa) \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ olmak üzere aşağıdaki gibi düşünülebilir:

$$D_\kappa(X) = \bigcup_{x \in X} N_\kappa^*(x).$$

Teorem 6.5.1. $(X, \kappa) \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ dijital görüntüsü için

$$\begin{aligned} D_\kappa : X &\multimap D_\kappa(X) \\ x &\mapsto N_\kappa(x) \cup \{x\} \end{aligned}$$

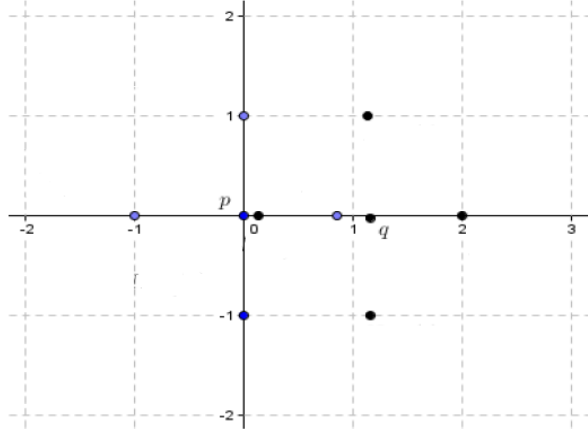
şeklinde tanımlı küme değerli fonksiyonu güçlü süreklidir.

İspat. x ve y , κ -yakın noktalar olsun. $D_\kappa(y)$ nin her elemanı $y \in D_\kappa(x)$ noktasına eşit veya κ -yakındır. Benzer şekilde $D_\kappa(x)$ kümesinin her elemanı $x \in D_\kappa(y)$ noktasına eşit veya κ -yakındır. Böylece D_κ operatörü güçlü süreklidir. $\square$

Örnek 6.5.1. $X = \{p = (0, 0), q = (1, 0)\} \subset \mathbb{Z}^2$ bir dijital görüntü olsun.

$$\begin{aligned} \tilde{D}_4 : X &\multimap D_4(X) \\ (0, 0) &\mapsto N_4((0, 0)) \cup \{(0, 0)\} \\ (1, 0) &\mapsto N_4((1, 0)) \cup \{(1, 0)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı küme değerli fonksiyonu güçlü süreklidir (Bkz Şekil 6.3).



Şekil 6.3: p ve q nun 4-yakın komşulukları

$X \subset \mathbb{Z}^n$ olmak üzere X dijital görüntüsünün erozyon kümesi

$$E_{\kappa}(X) = \mathbb{Z}^n \setminus D_{\kappa}(\mathbb{Z}^n \setminus X)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 6.5.1. $(X, \kappa) \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ dijital görüntüsü için

$$E_{\kappa} : \mathbb{Z}^n \setminus X \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

$$x \mapsto N_{\kappa}(x) \cup \{x\}$$

küme değerli fonksiyonu güçlü süreklidir.

İspat. x ve y , κ -yakın noktalar olsun. $E_{\kappa}(y)$ nin her elemanı $y \in E_{\kappa}(x)$ noktasına eşit veya κ -yakındır. Benzer şekilde $E_{\kappa}(x)$ kümesinin her elemanı $x \in E_{\kappa}(y)$ noktasına eşit veya κ -yakındır. Sonuç olarak E_{κ} güçlü süreklidir. $\square$

Bir (X, κ) dijital görüntüsünün kapanış kümesi

$$C_{\kappa}(X) = \mathbb{Z}^n \setminus \tilde{D}_{\kappa}(\mathbb{Z}^n \setminus \bigcup_{x \in X} N_{\kappa}^*(x))$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ ve $x \in X$ olmak üzere dijital görüntü X in sınırı

$$\partial_{\kappa}(X) = \{y \in X \mid N_{\kappa}(y) \setminus X \neq \emptyset\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 6.5.2. $(X, \kappa) \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ olmak üzere

$$\tilde{C}_{\kappa}(x) = \begin{cases} \{x\}, & x \in X \setminus \partial_{\kappa}X \\ (\{x\} \cup N_{\kappa}(x)) \cap C_{\kappa}(X), & x \in \partial_{\kappa}X \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\tilde{C}_{\kappa} : X \rightarrow C_{\kappa}(X)$ küme değerli fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat. $x \leftrightarrow_{\kappa} x'$ olsun. Aşağıdaki durumları inceleyelim:

- $x, x' \in X \setminus \partial_{\kappa} X$ olsun. $x \in \tilde{C}_{\kappa}(x)$ ve $x' \in \tilde{C}_{\kappa}(x')$ olduğundan $\tilde{C}_{\kappa}(x)$ ile $\tilde{C}_{\kappa}(x')$ kümeleri κ -yakın kümelerdir.
- $x \in X \setminus \partial_{\kappa} X$ ve $x' \in \partial_{\kappa} X$ olsun. x noktası $\tilde{C}_{\kappa}(x')$ bir elemanı olduğundan, $x \in \tilde{C}_{\kappa}(x) \cap \tilde{C}_{\kappa}(x')$ dir. Böylece $\tilde{C}_{\kappa}(x)$ ve $\tilde{C}_{\kappa}(x')$ κ -yakın kümelerdir.
- $x \in \partial_{\kappa} X$ ve $x' \in X \setminus \partial_{\kappa} X$ olsun. Önceki durum ile benzer sonuç gelir.
- $x, x' \in \partial_{\kappa} X$ olsun. $\tilde{C}_{\kappa}$ nın tanımından, $x \in \tilde{C}_{\kappa}(x')$ dür. Buradan $\tilde{C}_{\kappa}(x)$ ve $\tilde{C}_{\kappa}(x')$ κ -yakın kümelerdir.

Sonuç olarak, $\tilde{C}_{\kappa}$ zayıf süreklidir. $\square$

(X, κ) dijital görüntüsünün açma operatörünü $\mathbb{Z}^n \setminus X$ üzerinde kapama operatörü olarak düşünebiliriz.

Sonuç 6.5.2. Verilen bir dijital görüntü $(X, \kappa) \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ için

$$\bar{O}_{\kappa} : \mathbb{Z}^2 \setminus X \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

küme değerli fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat. $x \leftrightarrow_{\kappa} x'$ olsun. Aşağıdaki durumları inceleyelim:

- $x, x' \in X \setminus \partial_{\kappa} X$ olsun. $x \in \bar{O}_{\kappa}(x)$ ve $x' \in \bar{O}_{\kappa}(x')$ olduğundan $\bar{O}_{\kappa}(x)$ ile $\bar{O}_{\kappa}(x')$ kümeleri κ -yakın kümelerdir.
- $x \in X \setminus \partial_{\kappa} X$ ve $x' \in \partial_{\kappa} X$ olsun. x noktası $\bar{O}_{\kappa}(x')$ bir elemanı olduğundan, $x \in \bar{O}_{\kappa}(x) \cap \bar{O}_{\kappa}(x')$ dir. Böylece $\bar{O}_{\kappa}(x)$ ve $\bar{O}_{\kappa}(x')$ κ -yakın kümelerdir.
- $x \in \partial_{\kappa} X$ ve $x' \in X \setminus \partial_{\kappa} X$ olsun. Önceki durum ile benzer sonuç gelir.
- $x, x' \in \partial_{\kappa} X$ olsun. $\bar{O}_{\kappa}$ nın tanımından, $x \in \bar{O}_{\kappa}(x')$ dür. Buradan $\bar{O}_{\kappa}(x)$ ve $\bar{O}_{\kappa}(x')$ κ -yakın kümelerdir.

Bu durumda $\bar{O}_{\kappa}$, zayıf süreklidir. $\square$

7 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, dijital topoloji üzerindeki küme değerli fonksiyonlar için yapılan çalışmalar incelendi ve bu konular üzerine önemli sonuçlar elde edildi.

$MSS'_6 \# MSS'_6$ ve $MSS'_6 \# MSS_6$ bağlantılı toplam yüzeyleri oluşturulup dijital homoloji grupları hesaplandı. Daha sonra bu yüzeylerin Euler karakteristikleri belirlendi. Dijital simes çarpım tanıtıldı. Çeşitli özellikleri verilip, bu tanım aracılığıyla dijital süspansiyon ve dijital koni kavramları literatüre kazandırıldı. Khalimsky topolojisi kullanılarak dijital görüntüler üzerinde bir uzay yapısı inşa edildi. Dijital evrensel katsayı teoremi kullanılarak bu uzayların $\mathbb{Z}_2$ katsayılı dijital homoloji grupları hesaplandı. Künneth formülünden yararlanarak iki Khalimsky dijital uzayın kartezyen çarpımlarının dijital homoloji grupları bulundu. Dijital cup çarpım tanımlanarak, Khalimsky dijital uzaylarının kohomoloji gruplarına halka yapısı verildi. Ayrıca dijital küme değerli fonksiyonlar için yaklaşık sabit nokta özelliği verildi. Evrensel dijital küme değerli fonksiyon literatüre kazandırıldı. Simes çarpımın küme değerli fonksiyonlar üzerinde çeşitli özellikleri incelendi. Son olarak dilasyon ile erozyon morfolojik operatörlerin dijital güçlü sürekliliğe ve açma ile kapama operatörlerinin dijital zayıf sürekliliğe sahip olduğu gösterildi.

Bu tez çalışmasının, dijital küme değerli fonksiyonların yaklaşık sabit nokta teorisi için ilerleyen zamanlardaki çalışmalara ışık tutması ve dijital anlamda tanımlanmış olan simes çarpımın çeşitli uygulama alanlarında kullanılması beklenmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Arslan, H., Karaca, I. and Öztel, A.**, 2008, Homology groups of n -dimensional digital images, XXI. Turkish National Mathematics Symposium, B1-13pp.
- Bertrand, G.**, 1994, Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids, Pattern Recognition Letters, 15: 1003-1011pp.
- Bertrand, G. and Malgouyres, R.**, 1999, Some topological properties of discrete surfaces, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 11: 207-211pp.
- Boxer, L.**, 1994, Digitally continuous functions, Pattern Recognition Letters, 15: 833-839pp.
- Boxer, L.**, 1999, A classical construction for the digital fundamental group, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 10: 51-62pp.
- Boxer, L.**, 2005, Properties of digital homotopy, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 22: 19-26pp.
- Boxer, L.**, 2006, Homotopy properties of sphere-like digital images, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 24: 167-175pp.
- Boxer, L.**, 2006, Digital products, wedges, and covering spaces, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 25: 169-171pp.
- Boxer, L.**, 2007, Fundamental groups of unbounded digital images, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 27: 121-127pp.
- Boxer, L. and Karaca, I.**, 2010, Some properties of digital covering spaces, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 37(1): 17-26pp.
- Boxer, L., Karaca, I. and Öztel, A.**, 2011, Topological invariant in digital images, Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications, 11: 109-140pp.
- Boxer, L. and Karaca, I.**, 2012, Fundamental groups for digital products, Advances in Applied Mathematics, 11: 161-180pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Boxer, L.**, 2014, Remarks on digitally continuous multivalued functions, Journal of Advances in Mathematics, 9(1): 1755-1762pp.
- Boxer, L. and Staecker, P.C.**, 2016, Connectivity preserving multivalued functions in digital topology, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 55(3): 370-377pp.
- Boxer, L., Ege, O., Karaca, I., Lopez, J. and Louwsma, J.**, 2016, Digital fixed points, approximate fixed points and universal functions, Applied General Topology, 17(2): 159-172pp.
- Boxer, L.**, 2017, Digital shy maps, Applied General Topology, 18: 143-152pp.
- Boxer, L.**, 2017, Generalized normal product adjacency in digital topology, Applied General Topology, 18(2): 401-427pp.
- Boxer, L.**, 2017, Multivalued functions in digital topology, Note di Matematica, 37(2): 61-76pp.
- Burak, G. and Karaca, I.**, 2017, Digital Borsuk-Ulam theorem, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 43: 477-499pp.
- Demir, E. U. and Karaca, I.**, 2015, Simplicial homology groups of certain surfaces, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44(5): 1011-1022pp.
- Demir, E. U. and Karaca, I.**, 2016, An algorithm for computing digital cohomology groups, Applied Mathematics and Information Science, 10(3): 1017-1025pp.
- Chen, L.**, 2004, Discrete surfaces and manifolds. Scientific Practical Computing, Rockville, MD.
- Ege, O. and Karaca, I.**, 2013, Fundamental properties of digital simplicial homology groups, American Journal of Computer Technology and Application, 1(2): 25-41pp.
- Ege, O. and Karaca, I.**, 2013, Cohomology theory for digital images, Romanian Journal of Information Science and Technology, 16(1): 10-28pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Ege, O., Karaca, I. and Ege, M.E.**, 2014, Relative homology groups of digital images, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 8(5): 2337-2345pp.
- Ege, O. and Karaca, I.**, 2016, Digital cohomology operations, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 9(4): 1953-1960pp.
- Ege, O. and Karaca, I.**, 2016, Some properties of digital H -spaces, *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 24(3): 1930-1941pp.
- Ege, O. and Karaca, I.**, 2017, Digital fibrations, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 87(1): 109-114pp.
- Escribano, C., Giraldo, A. and Sastre, M.**, 2008, Digitally continuous multivalued functions, In: *Discrete Geometry for Computer Imagery. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, 4992: 81-92pp.
- Escribano, C., Giraldo, A. and Sastre, M.**, 2012, Digitally continuous multivalued functions, morphological operations and thinning algorithms, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42: 76-91pp.
- Giraldo, A. and Sastre, M.**, 2015, On the composition of digitally continuous multivalued functions, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 53(2): 196-209pp.
- Han, S.E.**, 2006, Connected sum of digital closed surfaces, *Information Sciences*, 176: 332-348pp.
- Han, S.E.**, 2007, The fundamental group of a closed κ -surface, *Information Sciences*, 177: 3731-3748pp.
- Herman, G.T.**, 1993, Oriented surfaces in digital spaces, *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 55: 381-396pp.
- Jones, J.T.S.**, 1987, Cyclic homology and equivariant homology, *Inventiones Mathematicae*, 87: 403-423pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Karaca, I. and Ege, O.**, 2012, Some results on simplicial homology groups of 2D digital images, International Journal of Information and Computer Science, 1(8): 198-203pp.
- Karaca, I. and Burak, G.**, 2014, Simplicial relative cohomology rings of digital images, Applied Mathematics and Information Science, 8(5): 2375-2387pp.
- Khalimsky, E., Kopperman, R. and Meyer, P.R.**, 1991, Computer graphics and connected topologies on finite ordered set, Topology and Its Applications, 36(1): 1-17pp.
- Kong, T.Y.**, 1989, A digital fundamental group, Computers and Graphics, 13: 159-166pp.
- Kovalevsky, V.**, 1994, A new concept for digital geometry, Shape in Picture. Springer, New York.
- Munkres, J.R.**, 1984, Elements of Algebraic Topology. Addison-Wesley Publishing Company, 452p.
- Prasolov, V.V.**, 2007, Elements of Homology Theory. American Mathematical Society.
- Rosenfeld, A.**, 1979, Digital topology, American Mathematical Monthly, 86: 76-87pp.
- Rosenfeld, A.**, 1986, Continuous functions on digital pictures, Pattern Recognition Letters, 4: 177-184pp.
- Rotman, J.J.**, 1998, An Introduction to Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York, 433p.
- Soille, P.**, 1999, Morphological operators. In: Jähne, B., et al. (eds.) Signal Processing and Pattern Recognition. Handbook of Computer Vision and Applications, Academic Press, San Diego, 2: 627-682pp.
- Spanier, E.H.**, 1966, Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York, 528p.
- Stout, Q.F.**, 1983, "Topological matching" in Proc. 15th Annual Symp. on Theory of Computing: 24-31pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Tsaur, R. and Smyth, M., 2001, Continuous multifunctions in discrete spaces with applications to fixed point theory, In: Bertrand, G., et al. (eds.) Digital and Image Geometry: Advanced Lectures. Lecture Notes in Computer Science, Springer, New York, 2243: 75-88pp.

Vergili, T. and Karaca, I., 2015, Some properties of homology groups of Khalimsky spaces, Mathematical Science Letters, 4: 131-140pp.

Vergili, T. and Karaca, I., 2018, The Excision theorem for digital Khalimsky spaces, New Trends in Mathematical Science, 8: 226-237pp.



TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde bilgi, görüş ve tecrübelerinden yararlandığım doktora tez danışmanım Prof. Dr. İsmet KARACA'ya, tez aşaması boyunca değerli vakitlerini ayıran tez izleme komitesi üyeleri Doç. Dr. Özgür EGE ve Doç. Dr. Cihangir ALACA'ya, ayrıca değerli tez savunma jürisi üyeleri Prof. Dr. Urfat NURİYEV ve Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ'a teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, "BİDEB-2211 Yurt İçi Doktora Burs Program" adı altında finansal olarak TÜBİTAK tarafından desteklendiği için TÜBİTAK'a teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışma Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince FDK-2019-20333 proje numarası ile desteklenmiştir.

Son olarak bana verdikleri büyük desteklerinden dolayı tüm aileme teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

İsmet ÇINAR, 29.12.1989 tarihinde İzmir’de dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladı. 2013 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden birincilikle mezun oldu. 2015 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı.

YAYINLAR

1. Ismet KARACA and Ismet CINAR, The cohomology structure of digital Khalimsky spaces, Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 8(2018) no.2, 110 – 128.
2. Ismet CINAR and Ismet KARACA, Some new results on connected sum of certain digital surfaces, Malaya Journal of Matematik, 7(2019) no.2, 318 – 325.
3. Ismet CINAR and Ismet KARACA, Some properties of multivalued functions in digital topology, Bulletin of International Mathematical Virtual Institute, 9(2019) no.3, 553 – 565.
4. Ismet CINAR, Ozgur EGE and Ismet KARACA, The digital smash product, İncelemede.

KATILDIĞI KONFERANSLAR

1. Ismet CINAR and Ismet KARACA, Computing homology groups of complexes of matching, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2014), Antalya, Turkey, 6 – 9 November 2014, pp. 74.
2. Ismet CINAR and Ismet KARACA, Homology Groups of Certain Khalimsky Digital Spaces, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016), Muğla, Turkey, 19 – 23 May 2016, pp. 65.
3. Ismet CINAR and Ismet KARACA, Cohomology structure of digital Khalimsky spaces, International Workshop on Mathematical Methods in Engineering (MME 2017), Ankara, Turkey, 27 – 29 April 2017, pp. 58.

4. Ismet CINAR and Ismet KARACA, Some new results on digital topological sum, International Students Science Congress (ISSC 2018), Izmir, Turkey, 4–5 May 2018, pp. 119.
5. Ismet CINAR and Ismet KARACA, Some properties of smash product for digital multivalued functions, International Students Science Congress (ISSC 2019), Izmir, Turkey, 3 – 4 May 2019, pp. 71.
6. Ismet CINAR and Ismet KARACA, Some morphological operations in digital multivalued functions, International Conference on Advence in Natural and Applied Science (ICANAS 2019), Ağrı, Turkey, 19–22 June 2019, pp. 145.

