

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPER DUAL SAYILAR VE ÖZELLİKLERİ

Furkan ÇİL

TEZ DANIŞMANI

Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ

JÜRİ ÜYELERİ

Prof. Dr. Salim YÜCE

Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

RİZE - 2020

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPER DUAL SAYILAR VE ÖZELLİKLERİ

Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ danışmanlığında, Furkan ÇİL tarafından hazırlanan bu çalışma Enstitü Yönetim Kurulu kararı ile oluşturulan jüri tarafından 17/01/2020 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı, Adı Soyadı

Başkan

: Prof. Dr. Salim YÜCE

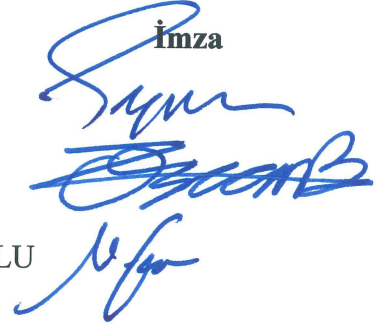
Üye

: Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ

Üye

: Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

İmza



Doç. Dr. Ferhat KALAYCI

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ



ÖNSÖZ

Dual sayılar, dual vektörler literatürde önemli bir yere sahiptir. Bu tez çalışmasında, hiper dual sayılar ve hiper dual vektörler araştırılmıştır. Tez çalışması dual sayılar ve dual vektörler ile ilgili yapılan tanım, teorem, sonuç ve örneklerin hiper dual sayılar ve hiper dual vektörler için yapılması açısından önemlidir.

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında ve sonuçlandırılmasında birikimini, desteğini ve katkılarını sunan değerli hocam Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Furkan ÇİL

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Hiper Dual Sayılar ve Özellikleri" başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 17/01/2020.



Furkan ÇİL

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİPER DUAL SAYILAR VE ÖZELLİKLERİ

Furkan ÇİL

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ

Tez çalışmasında, ilk olarak çalışmanın temelini oluşturan hiper dual sayılar ile ilgili ayrıntılı bilgiler verilmiştir. Daha sonra oluşturulan bu içerik kullanılarak hiper dual vektörler tanımlanıp özellikleri ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır.

2020, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dual Sayılar, Hiper Dual Sayılar, Hiper Dual Vektörler.

ABSTRACT

HYPER DUAL NUMBERS AND THEIR PROPERTIES

Furkan ÇİL

**Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Özcan BEKTAŞ**

Firstly, detailed information on hyper dual numbers which constitutes the basis of this study is given. Then, using this content, hyper dual vectors are introduced and their properties will be handled in detail.

2020, 50 pages

Keywords: Dual Numbers, Hyper Dual Numbers, Hyper dual Vectors.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Literatür Özeti.....	1
1.3. Dual Sayılar ve $\mathbb{D}$ - Modül.....	1
1.4. Dual Sayılar ile İlgili Temel Kavram ve Teorem.....	4
1.5. $\mathbb{D}$ - Modül ve Özellikleri.....	5
1.6. Dual Vektörler.....	5
1.7. Dual Kuaterniyonlar.....	11
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	14
2.1. Hiper Dual Sayılar ve Cebirsel Özellikleri.....	14
2.2. Hiper Dual Fonksiyonlar.....	19
2.3. Hiper Dual Sayıların Reel Matris Gösterimi.....	25
2.4. Hiper Dual Sayıların Dual Matris Gösterimi.....	26
2.5. Hiper Dual Sayılar ile İlgili Temel Kavram ve Teoremler.....	27
2.6. Hiper Dual Vektörler.....	32
2.7. Hiper Dual Vektörlerin Normlanması.....	36
2.8. Hiper Dual Vektörler için Skaler ve Vektörel Çarpım.....	42
2.9. Hiper Dual Vektörlerin Lineer Bağımlılığı, Lineer Bağımsızlığı ve Bazlar ...	43
3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	46
4. ÖNERİLER.....	47
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ	50

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Birim Dual Küre ve Dual Açı.....	9
---	---



SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{D}$	Dual Sayılar Kümesi
$\mathbb{HD}$	Hiper Dual Sayılar Kümesi
A	Dual Sayı
Φ	Dual Açık
$\wedge$	Dış Çarpım
$\langle, \rangle$	İç Çarpım
$\vec{a}$	Reel Vektör
$\vec{A}$	Dual Vektör
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Hiper Dual Birimler
a	Hiper Dual Sayı
$\ a\ $	a Dual Sayısının Normu
$\bar{a}$	a Hiper Dual Sayısının Eşleniği
A	a Hiper Dual Sayısına Karşılık Gelen Matris
$\vec{A}$	Hiper Dual Vektör
$\mathbb{HD}^3$	Hiper Dual Vektörlerin Kümesi
$\ \vec{A}\ $	$\vec{A}$ Hiper Dual Vektörünün Normu
Φ	Hiper Dual Açık
φ	Reel İki Vektör Arasındaki Açık
φ^*	Aykırı İki Doğru Arasındaki Uzaklık
q	Dual Kuaterniyon
$H_{\mathbb{D}}$	Dual Kuaterniyonların Kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Dual sayılar 1850’li yıllarda bilim adamı William Kingdon Clifford tarafından tanımlanmış ve geliştirilmiştir. Dual sayılara ait temel kavramlara Hacısalihoğlu’nun “Hareket Teorisi ve Kuaterniyonlar Teorisi” ve Müller’in “Kinematik Dersleri” adlı kitaplarında yer verilmiştir. 1903’de Eduard Study kendi adını verdiği E.Study dönüşümünde birim dual küre üzerindeki her noktanın $\mathbb{R}^3$ ’deki yönlü doğrulara birebir karşılık geldiğini kanıtlamıştır. Bu sayede $\mathbb{R}^3$ ’deki yönlü doğrular teorisinin dual sayılar yardımıyla incelenmesine imkan verilmiştir.

1.2. Literatür Özeti

Hiper dual sayılar ve özellikleri Fike ve Alonso tarafından tanımlanmıştır (Fike ve Alonso, 2011). Hiper dual sayıların tanımlanmasının ardından hiper dual sayılar ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar Fike, (2009), Fike vd.(2011), (Fike ve Alonso, 2012), Fike, (2013), (Volker vd., 2018), (Fumio vd., 2017), (Masato vd., 2015) ve (Masato vd., 2016), (Cohen ve Shoham, 2016), (Cohen ve Shoham, 2017) ve (Cohen ve Shoham, 2018) kaynaklarıyla verilen çalışmalardır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak dual sayılar ve dual kuaterniyonlarla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Daha sonra hiper dual sayılar ve hiper dual vektörler ile ilgili literatürde var olan bilgiler kaynak gösterilerek, araştırmalar sonucunda literatürde var olmadığı düşünülen bilgiler de kaynak gösterilmeden verilecektir.

1.3. Dual Sayılar ve $\mathbb{D}$ - Modül

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ işlemlerine göre bir cisimdir. Bu cisim kısaca $\mathbb{R}$ ile gösterilsin. $\mathbb{R}$ cismi yardımıyla kompleks ve hiperbolik sayılara benzer bir başka sayı sistemi dual sayılar sistemidir. Bu bölümde, dual sayılar ve özellikleri ile ilgili bilgiler verilecektir. Bu bilgiler Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi kitabında yer almaktadır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.1. Her $a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = (a, a^*)$ ikilisine sıralı ikili denir.

Bu şekilde tanımlanan sıralı ikililerin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{D}$ notasyonu ile gösterilsin. Bu durumda $\mathbb{D}$ kümesi

$$\mathbb{D} = \{(a, a^*) \mid \forall a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir. $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar sistemi, her bir $(a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da dual sayı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.2. Herhangi $A, B \in \mathbb{D}$ olmak üzere $A = (a, a^*), B = (b, b^*)$ için $a = b, a^* = b^*$ oluyorsa A ile B eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir.

Tanım 1.3. $A = (a, a^*), B = (b, b^*)$ dual sayılarının $+: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ toplama işlemi $A + B = (a, a^*) + (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$ ile tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 1.1. $\lambda \in \mathbb{R}$ skaler ve $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı için λ skalerinin A dual sayısı ile çarpma işlemi $\lambda A = \lambda(a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$ dır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.4. $+: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ iç işlemi için $A = (a, a^*), B = (b, b^*)$ dual sayılarının çıkarma işlemi $A + (-B) = (a, a^*) + (-b, -b^*) = (a - b, a^* - b^*)$ ile tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.5. $0 = (0, 0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ 'nin sıfır elemanı denir.

Sonuç 1.1. $(\mathbb{D}, +)$ ikilisi bir Abel grubudur (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.6. $\cdot: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ iç işlemi için $A = (a, a^*), B = (b, b^*)$ dual sayılarının çarpma işlemi $AB = (a, a^*)(b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$ şeklinde tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 1.2. $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.7. $a \neq 0$ olmak üzere $A = (a, a^*)$ için $AX = XA = (1, 0)$ olacak şekildeki bir tek $X = \left(\frac{1}{a}, \frac{-a^*}{a^2}\right) \in \mathbb{D}$ elemanına A dual sayısının tersi denir.

Teorem 1.3. $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ üçlüsü cisim değildir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.8. $A = (a, a^*)$ ve $a \neq 0$ olmak üzere B dual sayısının A dual sayısına bölme işlemi

$$\frac{B}{A} = \frac{(b, b^*)}{(a, a^*)} = \left(\frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2}\right)$$

ile tanımlanır.

Teorem 1.4. $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.9. $(a, 0)$ dual sayısı a reel sayısı ile gösterilir. Böylece $a = (a, 0)$ yazılır.

Tanım 1.10. $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı verilsin. a reel sayısına dual sayının reel kısmı, a^* reel sayısına da dual sayının dual kısmı denir. Böylece $Re\{A\} = a, Du\{A^*\} = a^*$ şeklinde ifade edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.11. $1 = (1, 0)$ dual sayısına dual sayı sisteminin reel birimi denir.

Tanım 1.12. $\varepsilon = (0, 1)$ dual sayısına dual sayı sisteminin dual birimi olarak isimlendirilir.

Sonuç 1.2. $\varepsilon^2 = (0, 0)$ dır.

Teorem 1.5. $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı, $A = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir. Yani $(a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 1.6. İki dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir.

Teorem 1.7. $a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$ matrislerinden oluşan M matris kümesi $\mathbb{D}$ dual sayılar halkasına izomorftur. Buradaki M matrisler kümesi birimli ve değişmeli bir halkadır (Hacısalıhoğlu, 1983).

1.4. Dual Sayılar ile İlgili Temel Kavram ve Teoremler

Tanım 1.13. $D = (d, d^*)$ dual sayılarının bütününe dual düzlem denir ve $\mathbb{D}$ ile gösterilir. Her bir (d, d^*) ikilisine de dual düzlemin dual noktası denir.

Tanım 1.14. $D = d + \varepsilon d^* \in \mathbb{D}$ dual sayısının eşleniği $\bar{D} = d - \varepsilon d^*$ ile tanımlıdır.

Teorem 1.8.

1) $D \in \mathbb{D}$ için $\bar{\bar{D}} = D$.

2) $\forall D_1, D_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{D_1 + D_2} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2$.

3) $\forall D_1, D_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{D_1 D_2} = \bar{D}_1 \bar{D}_2$.

4) $\forall D_1 \in \mathbb{D}, D_2 \neq (0, x^* \in \mathbb{D})$ için

$$\left(\frac{D_1}{D_2} \right) = \frac{\bar{D}_1}{\bar{D}_2}.$$

5) $\forall D \in \mathbb{D}$ için $D \bar{D} = |D|^2$.

6) $\forall D \in \mathbb{D}$ için $D + \bar{D} = 2 \cdot \text{Re}\{D\}$,

$$D - \bar{D} = 2 \cdot \text{Du}\{D\}.$$

7) $D = \bar{D}$ olması için gerek ve yeter şart D nin reel olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.15. $D = d + \varepsilon d^*$ dual sayısının mutlak değeri $|D| = |d + \varepsilon d^*| = |d|$ şeklindedir.

Teorem 1.9. $|d + \varepsilon \cdot d^*| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $d = 0$ olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 1.10. $D_1 = d_1 + \varepsilon d_1^*$ ve $D_2 = d_2 + \varepsilon d_2^*$ dual sayıları için $|D_1 D_2| = |D_1| |D_2|$ dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 1.11. (Üçgen Eşitsizliği). Her $D_1, D_2 \in \mathbb{D}$ için $|D_1 + D_2| \leq |D_1| + |D_2|$ dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

1.5. $\mathbb{D}$ - Modül ve Özellikleri

Tanım 1.16. $\mathbb{D}^3$ kümesi

$$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{A = (A_i) = (A_1, A_2, A_3) | A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D}\}$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.17. Herhangi $A, B \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere $A = (A_i), B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$ için $A_i = B_i$ ($i = 1, 2, 3$) oluyorsa A ile B eşittir denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.18. $A = (A_i), B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$ ($i = 1, 2, 3$) için $+: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$ toplama işlemi $A + B = (A_i + B_i)$ ($i = 1, 2, 3$) şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.19. $\lambda \in \mathbb{D}$ ve $A \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere ($i = 1, 2, 3$) $\cdot: \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$ dış işlemi $\lambda A = (\lambda A_i)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.12 $(\mathbb{D}^3, +)$ bir Abel grubudur.

Teorem 1.13. $(\mathbb{D}^3, +)$ Abel grubu $\mathbb{D}$ üzerinde modüldür (Hacısalıhoğlu, 1983).

1.6. Dual Vektörler

Tanım 1.20. $\mathbb{D}^3$ ün elemanları olan sıralı $A = (A_i) = (A_1, A_2, A_3)$ dual üçlülere dual vektör denir (Hacısalıhoğlu, 1983). Burada $A_i = a_i + \varepsilon. a_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) olmak üzere $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{a}^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ şeklindedir.

Teorem 1.14. $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$: üç boyutlu reel vektör uzayı) olmak üzere $\mathbb{D}$ -Modül'deki her bir $\vec{A}$ dual vektörü $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon. \vec{a}^*$ şeklinde yazılabilir.

İspat $a_1, a_2, a_3, a_1^*, a_2^*, a_3^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (A_1, A_2, A_3) \\ &= (a_1 + \varepsilon \cdot a_1^*, a_2 + \varepsilon \cdot a_2^*, a_3 + \varepsilon \cdot a_3^*) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon \cdot (a_1^*, a_2^*, a_3^*) \\ &= \vec{a} + \varepsilon \cdot \vec{a}^*\end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.21. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \cdot \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{D}$ dual sayısı ile çarpımı

$$\lambda \cdot \vec{A} = (\lambda \cdot \vec{a}, \lambda \cdot \vec{a}^*)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 1.22. $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ ve $\vec{B} = (\vec{b}, \vec{b}^*) \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ için $\vec{A} = \vec{B}$ olması için gerek ve yeter şart $\vec{a} = \vec{b}, \vec{a}^* = \vec{b}^*$ olmasıdır.

Teorem 1.15. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, $\mathbb{D}\text{-Modül}$ 'ün elemanları $(\vec{a}, \vec{0})$ olan bir alt kümesine izomorftur.

Tanım 1.23. $\vec{0} = (\vec{0}, \vec{0})$ dual vektörüne sıfır dual vektör denir.

Tanım 1.24. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \cdot \vec{a}^*, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \cdot \vec{b}^* \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ vektörlerinin iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}$, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon \cdot (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)$ olarak tanımlanır. Buradaki iç çarpım $\mathbb{R}^3$ deki standart iç çarpımdır.

Tanım 1.25. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \cdot \vec{a}^*$ dual vektörünün normu

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \|\vec{a}\| + \varepsilon \cdot \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}, \vec{a} \neq 0$$

ile tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.26. Normu 1 olan dual vektöre birim dual vektör denir.

Sonuç 1.3. $\|\vec{A}\| = 1$ ise $\|\vec{a}\| = 1, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} = 0 \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ dir.

Teorem 1.16. $\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}) \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ olmak üzere $\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ birim dual vektördür.

Sonuç 1.4 $k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$ ve $a = \|\vec{a}\|$ olmak üzere $\vec{A} = a(1 + \varepsilon k)\vec{U}$ yazılabilir.

Örnek 1.1. $\vec{A} = (-\varepsilon, 2 + 3\varepsilon, 1 - 2\varepsilon)$ dual vektörü verilsin. Bu dual vektör için bir dual vektörün norm tanımı dikkate alınırsa

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{5}, \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = \langle (0, 2, 1), (-1, 3, -2) \rangle = 0 + 6 - 2 = 4, \quad k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{4}{5} \text{ ve}$$

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \left(\frac{-1}{5}\varepsilon, \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{7}{5\sqrt{5}}\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{14}{5\sqrt{5}}\varepsilon \right)$$

olmak üzere

$$\vec{A} = (-\varepsilon, 2 + 3\varepsilon, 1 - 2\varepsilon) = \sqrt{5} \left(1 + \frac{4}{5}\varepsilon \right) \left(\frac{-1}{5}\varepsilon, \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{7}{5\sqrt{5}}\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{14}{5\sqrt{5}}\varepsilon \right)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 1.27. Dual uzayda sabit bir $(0,0,0) \in \mathbb{D}$ sayısına 1 birim uzaklıktaki noktaların geometrik yerine birim dual küre denir. Birim dual küre S ile gösterilir. Bu durumda

$$S = \{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D} - \text{Modül} : \|\vec{X}\| = (1,0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3 \}$$

dir. Buradan $\|\vec{x}\| = 1$ ve $\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = 0$ elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983). Birim dual kürenin üzerindeki noktalara birim dual noktalar denir.

Teorem 1.17(E.Study Dönüşümü). Birim dual kürenin birim dual noktaları $\mathbb{R}^3$ te yönlü doğrulara birebir karşılık gelir.

Örnek 1.2. $\vec{A} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon, \frac{-1}{\sqrt{2}} + \varepsilon, 5\varepsilon \right)$ birim dual vektörü verilsin.

E.Study teoremine göre $\vec{A}$ birim dual vektörü $\mathbb{R}^3$ de yönlü doğru belirtir.

Doğru üzerinde orijine dik uzaklıkta bir $Z(x_0, y_0, z_0)$ noktası alınsın. Bu durumda

$$\vec{Z} = \vec{a} \wedge \vec{a}^* = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{-5}{\sqrt{2}}i - \frac{5}{\sqrt{2}}j + \frac{2}{\sqrt{2}}k = \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right)$$

bulunur. Buradaki $\wedge$ işlemi $\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpımdır. Böylece $\mathbb{R}^3$ de doğru denklemi

$$d \dots \frac{x + \frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y + \frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}}, z = \sqrt{2}$$

şeklindedir.

Teorem 1.18. O başlangıç noktası yerine başka bir P noktası seçildiğinde $\mathbb{R}^3$ 'teki yönlü doğruyu belirten birim dual vektör

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \cdot (\vec{PO} \wedge \vec{a} + \vec{a}_o^*)$$

dür.

Tanım 1.28. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere $\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ birim dual vektörüne $\vec{A}$ vektörünün eksenini denir.

Tanım 1.29. $k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$ reel sayısına $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün adımı veya yükselişi denir.

Tanım 1.30. $\vec{a} \neq \vec{0}$ ve $\vec{a}^* \neq \vec{0}$ ise $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörüne has dual vektör veya vida denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.31. $\vec{a} = \vec{0}$ ise $\vec{A} = \varepsilon \cdot \vec{a}^*$ dual vektörüne sırf dual vektör denir.

Teorem 1.19. $\vec{N} = \vec{n} + \varepsilon \vec{n}^*$ doğrusunun normali $\vec{V} = \vec{v} + \varepsilon \vec{v}^*$ olan ve başlangıç noktasından geçen bir E düzlemi içinde kalması için gerek ve yeter koşul

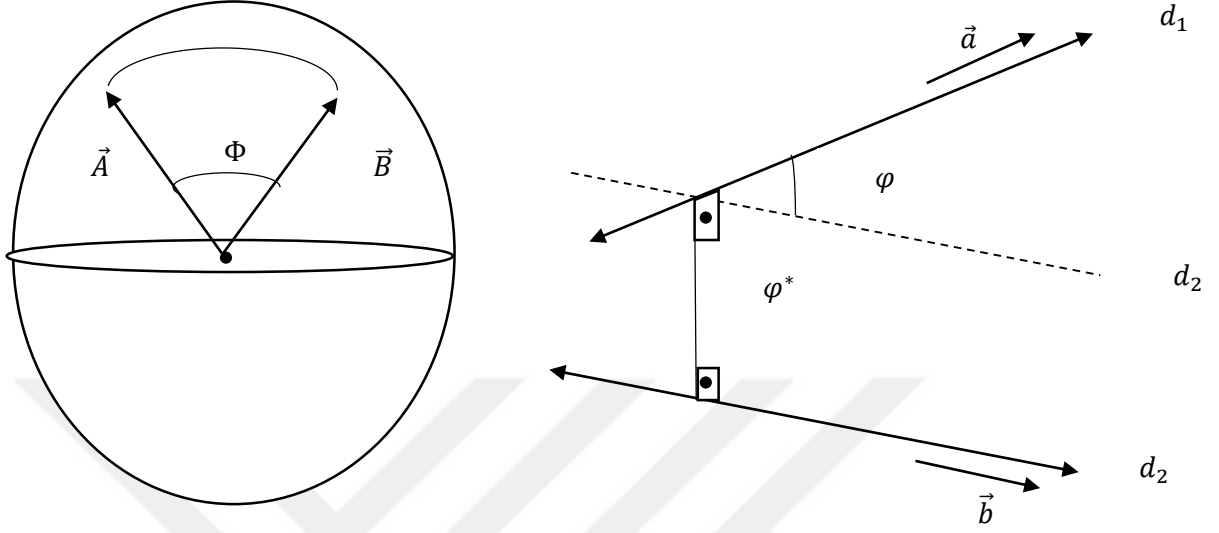
$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \vec{v}, \vec{n} \wedge \vec{n}^* \rangle = 0$$

olmasıdır. Ayrıca N doğrusunun başlangıç noktasından geçmesi ve E düzleminin içinde kalması için gerek ve yeter koşul

$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0, \|\vec{n}^*\| = 0 \text{ 'dır (Hacısalıhoğlu, 1983).}$$

Tanım 1.32. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki tane birim dual vektörleri verilsin. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ 'teki temsil ettikleri yönlü doğrular arasındaki açı φ ve bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklık φ^* olmak üzere $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = \cos \Phi$ şeklindedir. Buradaki $\Phi = \varphi + \varepsilon \cdot \varphi^*$ dual sayısına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki açı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\overrightarrow{OA} = \vec{A}$ ve $\overrightarrow{OB} = \vec{B}$ birim dual vektörlerinin uçları $\mathbb{D}$ -modülde O merkezli birim dual kürenin A ve B dual noktalarını belirteceğinden $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı A ve B noktalarından $\widehat{AB}$ yay uzunluğu olarak düşünülebilir.



Şekil 1. Birim Dual Küre ve Dual Aç

Eğer $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim değil ise;

$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$, $\vec{V} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$ eksenleri birim dual vektörlerdir. $\vec{U}$ ve $\vec{V}$ arasındaki dual açı Φ ise $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \Phi$ elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Örnek 1.3. $\vec{A} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \varepsilon.(1, 1, 5)$ ve $\vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + \varepsilon.(2, 2, -4)$ birim dual vektörleri verilsin.

$$\cos \varphi = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

olduğundan

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

bulunur.

Doğru üzerindeki noktalar

$$\vec{A} = \vec{a} \wedge \vec{a}^* = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

$$\vec{B} = \vec{b} \wedge \vec{b}^* = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \left(\frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{-6}{\sqrt{3}}, 0 \right)$$

olmak üzere

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \left(\frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{-6}{\sqrt{3}}, 0 \right) - \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right) = \left(\frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-6}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \right)$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b}) &= \begin{vmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{10\sqrt{3}}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{6}}i - \frac{1}{\sqrt{6}}j + \frac{2}{\sqrt{6}}k = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

için $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1$ elde edilir. Uzayda iki doğru arasındaki uzaklık tanımı

$$\varphi^* = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

$\varphi^* = \sqrt{3}$ bulunur. Böylece $\Phi = \varphi + \varepsilon$. $\varphi^* = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$. $\sqrt{3}$ şeklinde elde edilir.

Tanım 1.33. $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D} - \text{Modül}$ dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon. (\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$$

şeklinde elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 1.20. $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D} - \text{Modül}$ için

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \Phi \vec{N}$$

dir.

Teorem 1.21. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ has dual vektörlerinin dış çarpımı sıfır ise bu dual vektörlerin eksenleri çakışıktır.

Tanım 1.34. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D} - \text{Modül}$ dual vektörlerinin karma çarpımı

$$\langle \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle + \varepsilon. [\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c}^* \rangle + \langle \vec{a} \wedge \vec{b}^*, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}^* \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle]$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

1.7. Dual Kuaterniyonlar

Bu kısımda dual kuaterniyonlara ait özellikler verilecektir.

Tanım 1.35. $\forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = ij = ji = ki = ik = jk = kj = 0$ için $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ yapısına dual kuaterniyon denir.

Bu şekilde tanımlanan dual kuaterniyonların kümesi $H_{\mathbb{D}}$ notasyonu ile aşağıdaki gibi gösterilir:

$$H_{\mathbb{D}} = \{q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid \forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

(Majernik, 2006).

Tanım 1.36. $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonu verilsin. a_0 reel sayısına dual kuaterniyonun reel kısmı, $a = a_1i + a_2j + a_3k$ ifadesine de dual kuaterniyonun pure (vektör) kısmı denir. Böylece $Re\{q\} = a_0, DK\{q\} = a = a_1i + a_2j + a_3k$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda $q = a_0 + a$ yazılır (Yüce ve Ercan, 2011), (Nalbant, 2018).

Tanım 1.37. $\forall q_1, q_2 \in H_{\mathbb{D}}$ olmak üzere $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k,$

$q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ için $a_l = b_l, l = 0,1,2,3$ oluyorsa q_1 ile q_2 eşittir denir ve $q_1 = q_2$ ile gösterilir (Majernik, 2006).

Tanım 1.38. $+: H_{\mathbb{D}} \times H_{\mathbb{D}} \rightarrow H_{\mathbb{D}}$ iç işlemin için $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k,$

$q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ dual kuaterniyonlarının toplama işlemi

$$q_1 + q_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

ile tanımlanır (Majernik, 2006), (Yüce ve Ercan, 2011), (Nalbant, 2018).

Sonuç 1.5. $(H_{\mathbb{D}}, +)$ ikilisi bir Abel grubudur (Nalbant, 2018).

Tanım 1.39. $\cdot : H_{\mathbb{D}} \times H_{\mathbb{D}} \rightarrow H_{\mathbb{D}}$ iç işlemi için $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$,
 $q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ dual kuaterniyonlarının çarpma işlemi
 $q_1q_2 = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)i + (a_0b_2 + a_2b_0)j + (a_0b_3 + a_3b_0)k$
 şeklinde tanımlanır (Yüce ve Ercan, 2011), (Nalbant, 2018).

Teorem 1.22. $(H_{\mathbb{D}}, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 1.40. $\lambda \in \mathbb{R}$ skaler ve $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_{\mathbb{D}}$ olmak üzere λ ile q 'nın çarpımı

$\lambda \odot q = \lambda \odot (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) = \lambda a_0 + \lambda a_1i + \lambda a_2j + \lambda a_3k$
 ile tanımlanır (Yüce ve Ercan, 2011), (Nalbant, 2018).

Teorem 1.23. $\{H_{\mathbb{D}}, +, \mathbb{R}, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır, (Nalbant, 2018).

Tanım 1.41. $\forall q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun eşleniği
 $\bar{q} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k \in H_{\mathbb{D}}$ ile tanımlanır (Majernik, 2006), (Yüce ve Ercan, 2011), (Nalbant, 2018).

Tanım 1.42. $\forall q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun normu
 $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = |a_0|$ ile tanımlanır (Majernik, 2006), (Yüce ve Ercan, 2011), (Nalbant, 2018).

Tanım 1.43. $\forall q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun tersi
 $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = |a_0|$ ile tanımlanır (Majernik, 2006), (Yüce ve Ercan, 2011), (Nalbant, 2018).

Teorem 1.24. $(H_{\mathbb{D}}, +, \cdot)$ üçlüsü cisim değildir (Nalbant, 2018).

Tanım 1.44. $+: H_{\mathbb{D}} \times H_{\mathbb{D}} \rightarrow H_{\mathbb{D}}$ iç işlemi için $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$,
 $q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ dual kuaterniyonlarının çıkarma işlemi

$$q_1 + (-q_2) = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k - b_0 - b_1i - b_2j - b_3k = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.45. $0 = 0 + 0i + 0j + 0k \in H_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonuna $H_{\mathbb{D}}$ 'nin sıfır elemanı denir (Nalbant, 2018).

Teorem 1.25. $\{H_{\mathbb{D}}, +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ dual kuaterniyoların vektör uzayı $\{G^4, +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Galile vektör uzayına izomorftur (Nalbant, 2018).

Tanım 1.46. $\forall q = a_1i + a_2j + a_3k \in H_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonuna pure(vektör) dual kuaterniyon denir (Yüce ve Ercan, 2011), (Nalbant, 2018).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde konu bütünlüğü düşünülerek, hiper dual sayılardaki temel kavramlar ve bu sayılar ile ilgili yapılan yeni bilgiler daha sonra da hiper dual vektörlerin temel kavramları ve bu vektörler ile ilgili yapılan yeni bilgiler birlikte verilmiştir.

2.1 Hiper Dual Sayılar ve Cebirsel Özellikleri

Tanım 2.1. Hiper dual sayı $\mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ şeklinde bir reel ve üç reel olmayan kısım ile tanımlanır.

Burada reel olmayan ε_1 ve ε_2 dual birimleri için

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 = 0$$

$$\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \neq 0, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \neq 0$$

doğrudur ve $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ dir (Fike ve Alonso, 2011).

Diğer taraftan $\mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayısı

$$\varepsilon = \varepsilon_1; \varepsilon^* = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^{*2} = 0$$

$$\varepsilon \neq 0, \varepsilon^* \neq 0, \varepsilon \neq \varepsilon^*$$

$$\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon^*\varepsilon \neq 0$$

olmak üzere iki dual sayının toplamı olarak

$$\mathbf{a} = (a_0 + \varepsilon a_1) + \varepsilon^*(a_2 + \varepsilon a_3)$$

verilebilir. Buradaki ε^* hiper dual birim olarak adlandırılır (Cohen ve Shoham 2016), (Cohen ve Shoham 2018). Burada $d_1 = a_0 + \varepsilon a_1$ ve $d_2 = a_2 + \varepsilon a_3$ ile gösterilirse $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^*d_2$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2. Hiper dual sayıların oluşturduğu küme

$$\mathbf{HD} = \{\mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \mid \forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

olarak gösterilebilir.

Bu küme üzerindeki bazı işlemler eşitlik, toplama, çarpma işlemleridir.

Tanım 2.3. $\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısı $Re(\mathbf{a}) = a_0$ ve $HDu(\mathbf{a}) = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ olmak üzere $\mathbf{a} = Re(\mathbf{a}) + HDu(\mathbf{a})$ şeklinde ifade edilebilir. $Re(\mathbf{a}) = a_0$ sayısına $\mathbf{a}$ hiper dual sayısının reel kısmı ve $HDu(\mathbf{a}) = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ifadesine de $\mathbf{a}$ hiper dual sayısının hiper dual kısmı denir (Fike ve Alonso, 2011).

Tanım 2.4. İki hiper dual sayının eşitlik işlemi

Her hangi $\mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ iken $a_i = b_i$, $1 \leq i, j \leq 3$ olmasıdır (Fike ve Alonso, 2011).

Ayrıca $\mathbf{a} = Re(\mathbf{a}) + HDu(\mathbf{a})$ ve $\mathbf{b} = Re(\mathbf{b}) + HDu(\mathbf{b})$ olmak üzere $Re(\mathbf{a}) = Re(\mathbf{b})$ ve $HDu(\mathbf{a}) = HDu(\mathbf{b})$ ise $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ olur.

Diğer taraftan, $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^*d_2$ ve $\mathbf{b} = d_3 + \varepsilon^*d_4$ olmak üzere $d_1 = d_3$ ve $d_2 = d_4$ ise $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ olur.

Tanım 2.5. İki hiper dual sayının toplama işlemi

$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + (a_3 + b_3)\varepsilon_1\varepsilon_2$ şeklinde tanımlıdır (Fike ve Alonso, 2011).

Ayrıca $\mathbf{a} = Re(\mathbf{a}) + HDu(\mathbf{a})$ ve $\mathbf{b} = Re(\mathbf{b}) + HDu(\mathbf{b})$ olmak üzere

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (Re(\mathbf{a}) + Re(\mathbf{b})) + (HDu(\mathbf{a}) + HDu(\mathbf{b})) \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Diğer taraftan, $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^*d_2$ ve $\mathbf{b} = d_3 + \varepsilon^*d_4$ olmak üzere

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (d_1 + d_3) + \varepsilon^*(d_2 + d_4) \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Tanım 2.6. İki hiper dual sayının hiper dual çarpma işlemi

$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için $\mathbf{ab} = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)\varepsilon_1 + (a_0b_2 + a_2b_0)\varepsilon_2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$

şeklinde tanımlıdır (Fike ve Alonso, 2011).

Ayrıca $\mathbf{a} = Re(\mathbf{a}) + HDu(\mathbf{a})$ ve $\mathbf{b} = Re(\mathbf{b}) + HDu(\mathbf{b})$ olmak üzere

$$\mathbf{ab} = Re(\mathbf{a})Re(\mathbf{b}) + Re(\mathbf{a})HDu(\mathbf{b}) + Re(\mathbf{a})HDu(\mathbf{a}) + (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

şeklinde tanımlanır.

Diğer taraftan, $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^*d_2$ ve $\mathbf{b} = d_3 + \varepsilon^*d_4$ olmak üzere

$\mathbf{ab} = (d_1d_3) + \varepsilon^*(d_1d_4 + d_2d_3)$ şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.1. $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1$ olduğundan hiper dual çarpma işlemi değişimlidir.

Sonuç 2.2. $(\mathbf{HD}, +)$ ikilisi bir Abel grubudur (Fike ve Alonso, 2011).

$\mathbf{HD}$ kümesinin birim elemanı (sıfır elemanı) $0 = 0 + 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayıdır.

Benzer şekilde,

$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayısının toplama işlemine göre tersi $-\mathbf{a} = -a_0 - a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_2 - a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayıdır.

Tanım 2.7. Bir hiper dual sayının bir skaler ile çarpma işlemi

$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)\varepsilon_1 + (\lambda a_2)\varepsilon_2 + (\lambda a_3)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

şeklinde tanımlıdır (Fike ve Alonso, 2011).

Ayrıca $\mathbf{a} = \text{Re}(\mathbf{a}) + \text{HDu}(\mathbf{a})$ ve $\mathbf{b} = \text{Re}(\mathbf{b}) + \text{HDu}(\mathbf{b})$ olmak üzere

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(\text{Re}(\mathbf{a})) + \lambda(\text{HDu}(\mathbf{a}))$$

şeklinde tanımlanır.

Diğer taraftan $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^*d_2$ olmak üzere

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda d_1) + \varepsilon^*(\lambda d_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.3. $\mathbf{HD}$ kümesi üzerindeki skaler ile çarpma işlemi

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{a}$$

$$(\lambda_1 \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1(\lambda_2 \mathbf{a})$$

$$1_{\mathbb{R}} \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

özelliklerini sağladığından $\{\mathbf{HD}, +, \mathbb{R}, +, \cdot, \cdot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Sonuç olarak $\mathbf{HD} = \text{Sp}\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2\}$ olup $\text{boy}\mathbf{HD}=4$ dür.

Diğer taraftan, $(\mathbf{HD}, +)$ Abel grubu $\mathbb{D}$ üzerinde modüldür.

Sonuç 2.4. Hiper dual sayılar kümesi üzerindeki çarpma işlemi

$$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2, \mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

$$\mathbf{c} = c_0 + c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$$

hiper dual sayıları

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$$

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$$

$$1_{\mathbf{HD}}\mathbf{a} = \mathbf{a}1_{\mathbf{HD}} = \mathbf{a}$$

özelliklerini sağladığından dolayı $(\mathbf{HD}, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişimli halkadır. Burada $1_{\mathbf{HD}} = 1 + 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayıların çarpma işlemine göre birim elemandır.

Sonuç 2.5. $\{\mathbf{HD}, +, \mathbb{R}, +, \cdot, \cdot\}$ vektör uzayı hiper dual sayı çarpım işlemine göre

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$$

$$\lambda(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b}$$

özelliklerini sağladığından değişmeli, birleşmeli ve birimli bir cebirdir (Fike ve Alonso, 2011).

Tanım 2.8.

$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2, 0 \neq \mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için

$$\mathbf{bx} = \mathbf{a}$$

denkleminin çözümü olan $\mathbf{x}$ hiper dual sayısına $\mathbf{a}$ nın $\mathbf{b}$ ye bölümü denir ve

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

ile gösterilir. İki hiper dual sayının tanımı gereğince

$$\mathbf{bx} = (b_0x_0) + (b_0x_1 + b_1x_0)\varepsilon_1 + (b_0x_2 + b_2x_0)\varepsilon_2 + (b_0x_3 + b_1x_2 + b_2x_1 + b_3x_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

dir. Böylece

$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2, \mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayılarının bölme işlemi

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{(a_1 b_0 - a_0 b_1)}{b_0^2} \varepsilon_1 + \frac{(a_2 b_0 - a_0 b_2)}{b_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{a_3 b_0^2 - a_0 b_0 b_3 - a_1 b_0 b_2 - a_2 b_0 b_1 + 2a_0 b_1 b_2}{b_0^3} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

şeklindedir (Dikkat edilirse $x \in HD$ olduğu görülmektedir).

Örnek 2.1. $a = 2 - 3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2$, $b = -1 + 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayıları için a nın b ye bölümü $\frac{a}{b} = -2 - \varepsilon_1 - 8\varepsilon_2 - 20\varepsilon_1\varepsilon_2$ bulunur.

Not 2.1 Messelmi'nin dual kompleks sayılar için tanımladığı eşlenik tanımları hiper dual sayılara uygulanırsa aşağıdaki tanım verilebilir (Messelmi, 2015).

Tanım 2.9. $\forall a = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in HD$ hiper dual sayısının eşleniği

$$\overline{a_I} = a_0 - a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_2 - a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 = Re(a) - HDu(a)$$

şeklinde tanımlı bir hiper dual sayıdır. Bu eşlenik I. tipten eşlenik olarak adlandırılır.

Ayrıca $a = d_1 + \varepsilon^* d_2$ hiper dual sayısı için 3 farklı tipten eşlenik tanımlanabilir:

$$\overline{a_{II}} = \overline{d_1} + \varepsilon^* \overline{d_2}$$

eşleniğine II. tipten eşlenik,

$$\overline{a_{III}} = \overline{d_1} - \varepsilon^* \overline{d_2}$$

eşleniğine III. tipten eşlenik,

$$\overline{a_{IV}} = d_1 - \varepsilon^* d_2$$

eşleniğine de IV. tipten eşlenik denir. Burada $d_1 = a_0 + a_1\varepsilon$, $d_2 = a_2 + a_3\varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ ve $\varepsilon^* = \varepsilon_2$ dir.

Not 2.2. $a = d_1 + \varepsilon^* d_2$ ve $b = d_3 + \varepsilon^* d_4$ olmak üzere

II. tipten eşlenik kullanılırsa

$$\frac{a}{b} = \frac{d_1 + \varepsilon^* d_2}{d_3 + \varepsilon^* d_4} = \frac{(d_1 + \varepsilon^* d_2)(\overline{d_3} + \varepsilon^* \overline{d_4})}{(d_3 + \varepsilon^* d_4)(\overline{d_3} + \varepsilon^* \overline{d_4})} = \frac{(d_1 \overline{d_3}) + \varepsilon^* (d_2 \overline{d_3} + d_1 \overline{d_4})}{d_3 \overline{d_3} + \varepsilon^* (d_3 \overline{d_4} + d_4 \overline{d_3})}$$

III. tipten eşlenik kullanılırsa,

$$\frac{a}{b} = \frac{d_1 + \varepsilon^* d_2}{d_3 + \varepsilon^* d_4} = \frac{(d_1 + \varepsilon^* d_2)(\overline{d_3} - \varepsilon^* \overline{d_4})}{(d_3 + \varepsilon^* d_4)(\overline{d_3} - \varepsilon^* \overline{d_4})} = \frac{(d_1 \overline{d_3}) + \varepsilon^* (d_2 \overline{d_3} - d_1 \overline{d_4})}{d_3 \overline{d_3} + \varepsilon^* (d_4 \overline{d_3} - d_3 \overline{d_4})}$$

IV. tipten eşlenik kullanılırsa

$$\frac{a}{b} = \frac{d_1 + \varepsilon^* d_2}{d_3 + \varepsilon^* d_4} = \frac{(d_1 + \varepsilon^* d_2)(d_3 - \varepsilon^* d_4)}{(d_3 + \varepsilon^* d_4)(d_3 - \varepsilon^* d_4)} = \frac{(d_1 d_3) + \varepsilon^* (d_2 d_3 - d_1 d_4)}{d_3^2}$$

elde edilir.

Sonuç 2.6. $\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısı için hiper dual sayıların çarpımı tanımına göre

$$\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}}_I = (a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2)(a_0 - a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_2 - a_3\varepsilon_1\varepsilon_2)$$

çarpımı hesaplanırsa

$$\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}}_I = (a_0a_0) + (a_0(-a_1) + a_1a_0)\varepsilon_1 + (a_0(-a_2) + a_2a_0)\varepsilon_2 + (a_0(-a_3) + a_1(-a_2) + a_2(-a_1) + a_3a_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olmak üzere I. tip eşlenik için

$$\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}}_I = a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2$$

elde edilir. Benzer şekilde II. III. ve IV. tip eşlenikler için sırasıyla

$$\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}}_{II} = a_0^2 + 2a_0a_2\varepsilon_2$$

$$\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}}_{III} = a_0^2 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}}_{IV} = a_0^2 + 2a_0a_1\varepsilon_1$$

şeklinde bulunur.

2.2. Hiper Dual Fonksiyonlar

$$f: \mathbf{HD} \rightarrow \mathbf{HD}$$

fonksiyonu için Taylor seri açılımı

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \cdot h^1 + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot h^n + \dots$$

şeklinde dir. Bu eşitlik $\forall \mathbf{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 \\ &+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2)^n + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = f(x_0) &+ f'(x_0)(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!} (x_1^2\varepsilon_1^2 + x_2^2\varepsilon_2^2 + x_3^2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 2x_1x_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2x_1x_3\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 2x_2x_3\varepsilon_1\varepsilon_2^2) \end{aligned}$$

ve

$$f(\mathbf{x}) = f(x_0) + x_1f'(x_0)\varepsilon_1 + x_2f'(x_0)\varepsilon_2 + (x_3f'(x_0) + x_1x_2f''(x_0))\varepsilon_1\varepsilon_2$$

bulunur (Fike ve Alonso, 2011), (Cohen ve Shoham 2018).

Bu tanım kullanılırsa $\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayısı için aşağıdaki örnekler verilebilir:

Örnek 2.2. Herhangi bir a hiper dual sayısının bazı açılımları

$$\begin{aligned} \sin(\mathbf{a}) &= \sin(a_0) + a_1\cos(a_0)\varepsilon_1 + a_2\cos(a_0)\varepsilon_2 + (a_3\cos(a_0) - a_1a_2\sin(a_0))\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \cos(\mathbf{a}) &= \cos(a_0) - a_1\sin(a_0)\varepsilon_1 - a_2\sin(a_0)\varepsilon_2 - (a_3\sin(a_0) + a_1a_2\cos(a_0))\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \tan(\mathbf{a}) &= \tan(a_0) - \frac{a_1}{\cos^2(a_0)}\varepsilon_1 + \frac{a_2}{\cos^2(a_0)}\varepsilon_2 + \left(\frac{a_3}{\cos^2(a_0)} + \frac{2a_1a_2\sin(2a)}{\cos^4(a)}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ e^{\mathbf{a}} &= e^{a_0}(1 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + (a_3 - a_1a_2)\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ \sqrt[n]{\mathbf{a}} &= \sqrt[n]{a_0} + \frac{a_1}{n\sqrt[n]{a_0}^{n-1}}\varepsilon_1 + \frac{a_2}{n\sqrt[n]{a_0}^{n-1}}\varepsilon_2 + \left(\frac{a_3}{n\sqrt[n]{a_0}^{n-1}} - \frac{a_1a_2(n-1)}{n^2\sqrt[n]{a_0}^{2n-1}}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \mathbf{a}^n &= a_0^n + na_1a_0^{n-1}\varepsilon_1 + na_2a_0^{n-1}\varepsilon_2 + (na_3a_0^{n-1} - n(n-1)a_1a_2a_0^{n-2})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \ln(\mathbf{a}) &= \ln(a_0) + \frac{a_1}{a_0}\varepsilon_1 + \frac{a_2}{a_0}\varepsilon_2 + \left(\frac{a_3}{a_0} + \frac{a_1a_2}{a_0^2}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{aligned}$$

(Fike ve Alonso, 2011), (Cohen ve Shoham 2018).

Hiper dual fonksiyonlar yardımıyla bir hiper dual sayının mutlak değeri ve karekökü tanımları aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.10. $\forall \mathbf{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısının mutlak değeri

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| &= |x_0| + x_1|x_0|'\varepsilon_1 + x_2|x_0|'\varepsilon_2 + (x_3|x_0|' + x_1x_2|x_0|'')\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \text{ve } |x_0|' &= \frac{x_0}{|x_0|} \text{ ve } |x_0|'' = \left(\frac{x_0}{|x_0|}\right)' = \frac{x_0 - x_0 \frac{x_0}{|x_0|}}{|x_0|^2} = 0 \text{ olup} \\ |\mathbf{x}| &= |x_0| + x_1 \frac{x_0}{|x_0|}\varepsilon_1 + x_2 \frac{x_0}{|x_0|}\varepsilon_2 + \left(x_3 \frac{x_0}{|x_0|}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2 = \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{if } x_0 \geq 0 \\ -\mathbf{x}, & \text{if } x_0 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Buradaki $|x_0|'$ ifadesi x_0 ın mutlak değerinin türevidir).

Tanım 2.11. Bir hiper dual sayının karesi

$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için

$$\mathbf{a}^2 = a_0^2 + (2a_0a_1)\varepsilon_1 + (2a_0a_2)\varepsilon_2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

ile bulunur. $\forall \mathbf{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısı için

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{x}$$

ifadesinin her iki tarafının karekökü alındığında

$$\sqrt{x} = |a|$$

elde edilir. $\sqrt{x}$ hiper dual sayısına x hiper dual sayısının karekökü denir. Bu eşitlikte

$|a| = a$ yani $a_0 \geq 0$ olmak üzere

$x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2 = a_0^2 + (2a_0a_1)\varepsilon_1 + (2a_0a_2)\varepsilon_2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)\varepsilon_1\varepsilon_2$ eşitliğinden

$$a_0 = \sqrt{x_0}, a_1 = \frac{x_1}{2\sqrt{x_0}}, a_2 = \frac{x_2}{2\sqrt{x_0}} \text{ ve } a_3 = \left(\frac{x_3}{2\sqrt{x_0}} - \frac{x_1x_2}{4x_0\sqrt{x_0}} \right)$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$\sqrt{x} = \sqrt{x_0} + \frac{x_1}{2\sqrt{x_0}}\varepsilon_1 + \frac{x_2}{2\sqrt{x_0}}\varepsilon_2 + \left(\frac{x_3}{2\sqrt{x_0}} - \frac{x_1x_2}{4x_0\sqrt{x_0}} \right)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olarak bulunur.

Tanım 2.12. $\forall a = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in HD$ ve $b = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in HD$ hiper dual sayılarının iç çarpımı

$$\langle a, b \rangle = a\bar{b} = a_0b_0 + (a_1b_0 - a_0b_1)\varepsilon_1 + (a_2b_0 - a_0b_2)\varepsilon_2 + (a_3b_0 - a_0b_3 - a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.13. $\forall a = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in HD$ hiper dual sayısının normu, hiper dual sayının I. tipten eşlenik, iç çarpım ve karekök tanımı göz önüne alınırsa I. tip norm

$$\|a\|_I = \sqrt{a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2} = |a_0| - \frac{a_1a_2}{|a_0|}\varepsilon_1\varepsilon_2$$

şeklinde tanımlanır. II. tipten eşlenik, iç çarpım ve karekök tanımı göz önüne alınırsa II. tip norm

$$\|a\|_{II} = \sqrt{a_0^2 + 2a_0a_2\varepsilon_2} = |a_0| + \frac{a_0a_2}{|a_0|}\varepsilon_2$$

şeklinde tanımlanır. III. tipten eşlenik, iç çarpım ve karekök tanımı göz önüne alınırsa III. tip norm

$$\|a\|_{III} = \sqrt{a_0^2 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)\varepsilon_1\varepsilon_2} = |a_0| + \frac{a_0a_3 - a_1a_2}{|a_0|}\varepsilon_1\varepsilon_2$$

şekilde tanımlanır. IV. tipten eşlenik, iç çarpım ve karekök tanımı göz önüne alınırsa IV. tip norm

$$\|a\|_{IV} = \sqrt{a_0^2 + 2a_0a_1\varepsilon_1} = |a_0| + \frac{a_0a_1}{|a_0|}\varepsilon_1$$

şeklinde tanımlanır.

Not 2.3. Diğer taraftan

$\forall a = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısının normu

$$\|a\| = \sqrt{a_0^2} = |a_0|$$

reel sayıdır, şeklinde de tanımlanmıştır (Fike ve Alonso, 2011).

Tanım 2.14. $\forall a = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısının normu

$$\|a\| = 1$$

reel sayısı ise a' ya birim hiper dual sayı denir.

Tanım 2.15. $\forall a = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ ($a_0 \neq 0$) hiper dual sayısı için

$$aa^{-1} = (a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2)(x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2) = 1$$

eşitliğinden iki hiper dual sayının çarpımı kullanılırsa

$$(a_0x_0) + (a_0x_1 + a_1x_0)\varepsilon_1 + (a_0x_2 + a_2x_0)\varepsilon_2 + (a_0x_3 + a_1x_2 + a_2x_1 + a_3x_0)\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$$

elde edilir. Buradan hiper dual sayıların eşitliğinden yararlanılırsa

$$x_0 = \frac{1}{a_0}, \quad x_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}, \quad x_2 = -\frac{a_2}{a_0^2}, \quad x_3 = \frac{2a_1a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2}$$

bulunur. Böylece

$$a^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2}\varepsilon_2 + \left(\frac{2a_1a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

şeklinde elde edilen hiper dual sayıya a hiper dual sayısının inversi (tersi) denir (Fike ve Alonso, 2011).

Örnek 2.3. $a = 2 - 3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayısının tersi

$$a^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{(-3)}{2^2}\varepsilon_1 - \frac{4}{2^2}\varepsilon_2 + \left(\frac{2(-3).4}{2^3} - \frac{5}{2^2}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{17}{4}\varepsilon_1\varepsilon_2$$

bulunur.

Sonuç 2.7. $\forall a = 0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ şeklindeki hiper dual sayıların tersi olmadığından dolayı $(\mathbf{HD}, +, \cdot)$ üçlüsü cisim değildir (Fike ve Alonso, 2011).

Sonuç 2.8.

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{2a_1a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

olmak üzere, I. tip norm tanımına göre

$$\frac{\overline{\mathbf{a}}_I}{\|\mathbf{a}\|_I^2} = \frac{a_0 - a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_2 - a_3\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{2a_1a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

II. tip norm tanımına göre

$$\frac{\overline{\mathbf{a}}_{II}}{\|\mathbf{a}\|_{II}^2} = \frac{a_0 - a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 - a_3\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_0^2 + 2a_0a_2\varepsilon_2} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{2a_1a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

III. tip norm tanımına göre

$$\frac{\overline{\mathbf{a}}_{III}}{\|\mathbf{a}\|_{III}^2} = \frac{a_0 - a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_0^2 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)\varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{2a_1a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

IV. tip norm tanımına göre

$$\frac{\overline{\mathbf{a}}_{IV}}{\|\mathbf{a}\|_{IV}^2} = \frac{a_0 + a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_2 - a_3\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_0^2 + 2a_0a_1\varepsilon_1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{2a_1a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

elde edilir. Bu durumda herhangi tipten norm ve eşlenik tanımına göre $I \leq \mathbf{P} \leq IV$ olmak üzere

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{a}}_P}{\|\mathbf{a}\|_P^2}$$

dir.

Not 2.4. Bir hiper dual sayı için $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_0^2}$ şeklinde verilen norm tanımına göre

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{2a_1a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

ve

$$\frac{\overline{\mathbf{a}}}{\|\mathbf{a}\|^2} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2} \varepsilon_2 + \frac{a_3}{a_0^2} \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

olduğundan

$$\mathbf{a}^{-1} \neq \frac{\overline{\mathbf{a}}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.4. $\mathbf{a} = 2 - 3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayısının tersi $\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{7}{4}\varepsilon_1\varepsilon_2$ bulunur. Diğer taraftan $\bar{\mathbf{a}} = 2 + 3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $\|\mathbf{a}\|^2 = 4 + 24\varepsilon_1\varepsilon_2$ olmak üzere I. tip eşlenik ve norm tanımına göre

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\|\mathbf{a}\|_I^2} &= \frac{2 + 3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1\varepsilon_2}{4 + 24\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ \frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\|\mathbf{a}\|_I^2} &= \frac{2}{4} + \frac{[3.4-2.0]}{16}\varepsilon_1 + \frac{[(-4).4-2.0]}{16}\varepsilon_2 + \\ &\quad \frac{[(-5).16-2.4.24-(-3).4.0-4.4.0-2.2.0.0]}{64}\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\|\mathbf{a}\|_I^2} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{17}{4}\varepsilon_1\varepsilon_2\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\|\mathbf{a}\|_I^2}$$

olduğu görülür.

Tanım 2.16. Reel kısmı sıfır olan hiper dual sayıya pure (sıfır) hiper dual sayı denir.

İki pure hiper dual sayının çarpma işlemi

$\forall \mathbf{a} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\mathbf{b} = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için

$\mathbf{ab} = (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.1. İki hiper dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir.

İspat. $\forall a_2, a_3, b_2, b_3 \neq 0$ olmak üzere

$\mathbf{a} = a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $\mathbf{b} = b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayılarının çarpımı

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (0 + 0\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2)(0 + 0\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= (0.0) + (0.0 + 0.0)\varepsilon_1 + (0.b_2 + a_2.0)\varepsilon_2 + (0.b_3 + 0.b_2 + a_2.0 + a_3.0)\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

olur.

2.3. Hiper Dual Sayıların Reel Matris Gösterimi

$\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için

$$L_{\mathbf{a}}: \mathbf{HD} \rightarrow \mathbf{HD}, L_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$$

lineer dönüşümünü tanımlansın. $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2\}$ standart bazına göre $L_{\mathbf{a}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris bulunabilir. Bu matris lineer dönüşüm yardımıyla

$$L_{\mathbf{a}}(1) = \mathbf{a}1 = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$L_{\mathbf{a}}(\varepsilon_1) = \mathbf{a}\varepsilon_1 = 0 + a_0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$L_{\mathbf{a}}(\varepsilon_2) = \mathbf{a}\varepsilon_2 = 0 + 0\varepsilon_1 + a_0\varepsilon_2 + a_1\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$L_{\mathbf{a}}(\varepsilon_3) = \mathbf{a}\varepsilon_3 = 0 + 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + a_0\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olmak üzere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir (Fike ve Alonso, 2011). Bu matrisin determinanı

$$\det \mathbf{A} = a_0^4$$

şeklinde bulunur.

Burada $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1$ olduğundan kuaterniyonlarda olduğu gibi sol ve sağ matris gösterimi bulunmaz.

Örnek 2.5. $\mathbf{a} = 3 + 5\varepsilon_1 - 7\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayısı için

$$L_{\mathbf{a}}: \mathbf{HD} \rightarrow \mathbf{HD}, L_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$$

lineer dönüşümü tanımlansın. $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2\}$ standart bazına göre $L_{\mathbf{a}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris bulunabilir. Bu matris lineer dönüşüm yardımıyla

$$L_{\mathbf{a}}(1) = \mathbf{a}1 = 3 + 5\varepsilon_1 - 7\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$L_{\mathbf{a}}(\varepsilon_1) = \mathbf{a}\varepsilon_1 = 0 + 3\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 - 7\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$L_{\mathbf{a}}(\varepsilon_2) = \mathbf{a}\varepsilon_2 = 0 + 0\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$L_{\mathbf{a}}(\varepsilon_3) = \mathbf{a}\varepsilon_3 = 0 + 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olmak üzere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3^4 = 81$$

elde edilir.

2.4. Hiper Dual Sayıların Dual Matris Gösterimi

$\mathbf{a}$ hiper dual sayısının

$$\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^* d_2$$

dual sayı katsayılı yazımını göz önüne alarak $\mathbf{a}$ hiper dual sayısına karşılık gelen matrisi bulalım:

$\forall \mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^* d_2 \in \mathbf{HD}$ için $F_{\mathbf{a}}: \mathbf{HD} \rightarrow \mathbf{HD}$, $F_{\mathbf{a}}(b) = \mathbf{a}b$ lineer dönüşümü tanımlansın. $\{1, \varepsilon^*\}$ standart bazına göre $F_{\mathbf{a}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris bulunabilir. Bu matris lineer dönüşüm yardımıyla

$$F_{\mathbf{a}}(1) = \mathbf{a} \cdot 1 = d_1 + \varepsilon^* d_2$$

$$F_{\mathbf{a}}(\varepsilon^*) = \mathbf{a} \cdot \varepsilon^* = 0 + \varepsilon^* d_1$$

olmak üzere

$$\mathbf{A}_{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir. Bu matrisin determinanı

$$\det \mathbf{A}_{\mathbb{D}} = d_1^2 = (a_0 + \varepsilon a_1)^2 = a_0^2 + 2\varepsilon a_0 a_1$$

şeklinde bulunur.

Burada $\varepsilon \varepsilon^* = \varepsilon^* \varepsilon$ olduğundan kuaterniyonlarda olduğu gibi sol ve sağ matris gösterimi bulunmaz.

Örnek 2.6. $\mathbf{a} = 3 + 5\varepsilon_1 - 7\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayısı $d_1 = 3 + 5\varepsilon_1$ ve $d_2 = -7 + 4\varepsilon_1$ olmak üzere

$$\mathbf{a} = (3 + 5\varepsilon_1) + \varepsilon^*(-7 + 4\varepsilon_1)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\mathbf{a} = (3 + 5\varepsilon_1) + \varepsilon^*(-7 + 4\varepsilon_1)$$

için $F_a: \mathbf{HD} \rightarrow \mathbf{HD}$, $F_a(b) = \mathbf{a}b$ lineer dönüşümünü tanımlansın. $\{1, \varepsilon^*\}$ standart bazına göre F_a lineer dönüşümüne karşılık gelen matris bulunabilir. Bu matris lineer dönüşüm yardımıyla

$$\begin{aligned} F_a(1) &= \mathbf{a} \cdot 1 = (3 + 5\varepsilon_1) + \varepsilon^*(-7 + 4\varepsilon_1) \\ F_a(\varepsilon^*) &= \mathbf{a} \cdot \varepsilon^* = 0 + \varepsilon^*(3 + 5\varepsilon_1) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{A}_{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} 3 + 5\varepsilon_1 & 0 \\ -7 + 4\varepsilon_1 & 3 + 5\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buarada

$$\det(\mathbf{A}_{\mathbb{D}}) = \begin{vmatrix} 3 + 5\varepsilon_1 & 0 \\ -7 + 4\varepsilon_1 & 3 + 5\varepsilon_1 \end{vmatrix} = 9 + 30\varepsilon_1$$

bulunur.

2.5. Hiper Dual Sayılar ile İlgili Temel Kavram ve Teoremler

Teorem 2.2. Aşağıdaki ifadeler herhangi tipten eşlenikler için geçerlidir.

- 1) Her $\mathbf{a} \in \mathbf{HD}$ için her tipten eşlenik tanımına göre $\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$ dir.
- 2) Her $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{HD}$ için her tipten eşlenik tanımına göre $\overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$ dir.
- 3) Her $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^* d_2 \in \mathbf{HD}$ için

$$\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}_I} = 2\text{Re}\{\mathbf{a}\}, \quad \mathbf{a} - \overline{\mathbf{a}_I} = 2\text{HDu}\{\mathbf{a}\}$$

$$\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}_{II}} = 2\text{Re}\{d_1\} + 2\text{Re}\{d_2\}\varepsilon_2, \quad \mathbf{a} - \overline{\mathbf{a}_{II}} = 2\text{Du}\{d_1\}\varepsilon_1 + 2\text{Du}\{d_2\}\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

$$\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}_{III}} = 2\text{Re}\{d_1\} + 2\text{Du}\{d_2\}\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \mathbf{a} - \overline{\mathbf{a}_{III}} = 2\text{Du}\{d_1\}\varepsilon_1 + 2\text{Re}\{d_2\}\varepsilon_2,$$

$$\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}_{IV}} = 2d_1, \quad \mathbf{a} - \overline{\mathbf{a}_{IV}} = 2d_2\varepsilon_2$$

dir.

- 4) $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{HD}$ için her tipten eşlenik tanımına göre $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \mathbf{a}$ dır.

Sonuç 2.9. Dual sayılar için geçerli olan özelliklerden bazıları hiper dual sayılar için geçerli değildir, bu özellikler aşağıdaki gibi verilebilir:

1) Her $a, b \in HD$ için $\overline{(ab)}_I \neq \overline{a}_I \overline{b}_I$, fakat $\overline{a}_I \overline{b}_I = \overline{b}_I \overline{a}_I$,

2) $\forall a \in HD, \forall b \neq 0$ için

$$\left(\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right)_I \neq \frac{\overline{a}_I}{\overline{b}_I}$$

dir.

İspat.

1) $\forall a = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2, b = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in HD$ için iki hiper dual sayının çarpımı

$$ab = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)\varepsilon_1 + (a_0b_2 + a_2b_0)\varepsilon_2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olduğundan eşlenik tanımını kullanılırsa,

$$\overline{(ab)}_I = (a_0b_0) - (a_0b_1 + a_1b_0)\varepsilon_1 - (a_0b_2 + a_2b_0)\varepsilon_2 - (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

elde edilir. Diğer taraftan

$\forall \overline{a}_I = a_0 - a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_2 - a_3\varepsilon_1\varepsilon_2, \overline{b}_I = b_0 - b_1\varepsilon_1 - b_2\varepsilon_2 - b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in HD$ hiper dual sayılarının çarpımı

$$\overline{a}_I \overline{b}_I = (a_0b_0) + (a_0(-b_1) + (-a_1)b_0)\varepsilon_1 + (a_0(-b_2) + (-a_2)b_0)\varepsilon_2 + (a_0(-b_3) + (-a_1)(-b_2) + (-a_2)(-b_1) + (-a_3)b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olduğundan

$$\overline{a}_I \overline{b}_I = (a_0b_0) - (a_0b_1 + a_1b_0)\varepsilon_1 - (a_0b_2 + a_2b_0)\varepsilon_2 - (a_0b_3 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

elde edilir. Böylece $\overline{(ab)}_I \neq \overline{a}_I \overline{b}_I$ dir. Diğer taraftan

$$\overline{b}_I \overline{a}_I = (b_0a_0) + (b_0(-a_1) + (-b_1)a_0)\varepsilon_1 + (b_0(-a_2) + (-b_2)a_0)\varepsilon_2 + (b_0(-a_3) + (-b_1)(-a_2) + (-b_2)(-a_1) + (-b_3)a_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olduğundan

$$\overline{b}_I \overline{a}_I = (a_0b_0) - (a_0b_1 + a_1b_0)\varepsilon_1 - (a_0b_2 + a_2b_0)\varepsilon_2 - (a_0b_3 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

elde edilir. Böylece $\overline{a}_I \overline{b}_I = \overline{b}_I \overline{a}_I$ dir.

2) $\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2, \mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in HD$ hiper dual sayıların bölme işlemi

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{(a_1b_0 - a_0b_1)}{b_0^2}\varepsilon_1 + \frac{(a_2b_0 - a_0b_2)}{b_0^2}\varepsilon_2 + \left(\frac{a_3b_0^2 - a_0b_0b_3 - a_1b_0b_2 - a_2b_0b_1 + 2a_0b_1b_2}{b_0^3} \right)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olduğundan eşlenik tanımını kullanılırsa,

$$\left(\frac{\bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{b}}} \right)_I = \frac{a_0}{b_0} - \frac{(a_1b_0 - a_0b_1)}{b_0^2}\varepsilon_1 - \frac{(a_2b_0 - a_0b_2)}{b_0^2}\varepsilon_2 - \left(\frac{a_3b_0^2 - a_0b_0b_3 - a_1b_0b_2 - a_2b_0b_1 + 2a_0b_1b_2}{b_0^3} \right)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

elde edilir. Diğer taraftan

$\forall \bar{\mathbf{a}}_I = \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1\varepsilon_1 - \mathbf{a}_2\varepsilon_2 - \mathbf{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2, \bar{\mathbf{b}}_I = \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1\varepsilon_1 - \mathbf{b}_2\varepsilon_2 - \mathbf{b}_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in HD$ hiper dual sayılarının bölümü

$$\frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\bar{\mathbf{b}}_I} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{((-a_1)b_0 - a_0(-b_1))}{b_0^2}\varepsilon_1 + \frac{((-a_2)b_0 - a_0(-b_2))}{b_0^2}\varepsilon_2 + \left(\frac{(-a_3)b_0^2 - a_0b_0(-b_3) - (-a_1)b_0(-b_2) - (-a_2)b_0(-b_1) + 2a_0(-b_1)(-b_2)}{b_0^3} \right)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olduğundan

$$\frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\bar{\mathbf{b}}_I} = \frac{a_0}{b_0} - \frac{(a_1b_0 - a_0b_1)}{b_0^2}\varepsilon_1 - \frac{(a_2b_0 - a_0b_2)}{b_0^2}\varepsilon_2 - \left(\frac{a_3b_0^2 - a_0b_0b_3 + a_1b_0b_2 + a_2b_0b_1 - 2a_0b_1b_2}{b_0^3} \right)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

elde edilir. Böylece $\left(\frac{\bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{b}}} \right)_I \neq \frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\bar{\mathbf{b}}_I}$ dir.

Örnek 2.7. $\mathbf{a} = 2 - 3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2, \mathbf{b} = -1 + 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayıları için $\mathbf{a}$ nın $\mathbf{b}$ ile çarpımı

$$\mathbf{ab} = -2 + 7\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 14\varepsilon_1\varepsilon_2$$

dir. Fakat $\bar{\mathbf{a}}_I = 2 + 3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1\varepsilon_2, \bar{\mathbf{b}}_I = -1 - 2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayıları için $\bar{\mathbf{a}}_I$ nın $\bar{\mathbf{b}}_I$ ile çarpımı

$$\bar{\mathbf{a}}_I\bar{\mathbf{b}}_I = -2 - 7\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 12\varepsilon_1\varepsilon_2$$

dir. Diğer taraftan $\mathbf{a}$ nın $\mathbf{b}$ ye bölümü $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = -2 - \varepsilon_1 - 8\varepsilon_2 - 20\varepsilon_1\varepsilon_2$ iken

$$\frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\bar{\mathbf{b}}_I} = -2 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 20\varepsilon_1\varepsilon_2$$

elde edilir. Sonuç olarak $\overline{(\mathbf{ab})}_I \neq \bar{\mathbf{a}}_I\bar{\mathbf{b}}_I$ ve $\left(\frac{\bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{b}}} \right)_I \neq \frac{\bar{\mathbf{a}}_I}{\bar{\mathbf{b}}_I}$ olduğu görülmektedir.

Teorem 2.3. $\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için, aşağıdakiler doğrudur.

$$(i) \quad \|\mathbf{a}\|_I = 0 \Leftrightarrow a_0^2 = 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

$$(ii) \quad \|\mathbf{a}\|_{II} = 0 \Leftrightarrow a_0^2 = -2a_0a_2\varepsilon_2.$$

$$(iii) \quad \|\mathbf{a}\|_{III} = 0 \Leftrightarrow a_0^2 = 2(a_1a_2 - a_0a_3)\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

$$(iv) \quad \|\mathbf{a}\|_{IV} = 0 \Leftrightarrow a_0^2 = -2a_0a_1\varepsilon_1.$$

İspat. $\|\mathbf{a}\|_I = 0$ ise I. tip norm tanımına göre $\|\mathbf{a}\|_I = \sqrt{a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2} = 0$ olup $a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$ elde edilir.

Tersine, $a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$ ise $\|\mathbf{a}\|_I = \sqrt{a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2} = 0$ olduğu açıktır.

Diğer ispatlar da benzer şekilde farklı tiplerdeki normlar için yapılır.

Teorem 2.4. $\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $\mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayıları için $\|\mathbf{ab}\|_I \neq \|\mathbf{a}\|_I \cdot \|\mathbf{b}\|_I$ dir.

İspat. $\mathbf{ab} = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)\varepsilon_1 + (a_0b_2 + a_2b_0)\varepsilon_2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$

çarpımından, I. tip norm tanımına göre

$$\begin{aligned} \|\mathbf{ab}\|_I &= \sqrt{(a_0b_0)^2 - 2(a_0b_1 + a_1b_0)(a_0b_2 + a_2b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ &= \sqrt{a_0^2b_0^2 - 2(a_0^2b_1b_2 + a_0a_2b_0b_1 + a_1b_0a_0b_2 + b_0^2a_1a_2)\varepsilon_1\varepsilon_2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|_I \cdot \|\mathbf{b}\|_I &= \sqrt{(a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2)} \cdot \sqrt{(b_0^2 - 2b_1b_2\varepsilon_1\varepsilon_2)} \\ &= \sqrt{a_0^2b_0^2 - 2(a_0^2b_1b_2 + b_0^2a_1a_2)\varepsilon_1\varepsilon_2} \end{aligned}$$

olduğundan $\|\mathbf{ab}\|_I \neq \|\mathbf{a}\|_I \cdot \|\mathbf{b}\|_I$ elde edilir.

Diğer norm tanımlarına göre de eşitlik olmadığı görülebilir.

Teorem 2.5. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{HD}$ için $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|_I \neq \|\mathbf{a}\|_I + \|\mathbf{b}\|_I$ dir.

İspat. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + (a_3 + b_3)\varepsilon_1\varepsilon_2$ olup

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|_I = (a_0 + b_0)^2 - 2(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

bulunur.

Diğer taraftan $\|\mathbf{a}\|_I + \|\mathbf{b}\|_I = a_0^2 - 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + b_0^2 - 2b_1b_2\varepsilon_1\varepsilon_2$ olup

$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|_I \neq \|\mathbf{a}\|_I + \|\mathbf{b}\|_I$ dir.

Teorem 2.6. Bir hiper dual sayı için $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_0^2}$ şeklinde verilen norm tanımına göre

1. $\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$ için $\|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$ 'dır.

2. $\forall \mathbf{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $\mathbf{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual sayıları için $\|\mathbf{ab}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ dir.

3. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{HD}$ için $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ dir.

İspat 1. $\|\mathbf{a}\| = 0$ ise norm tanımına göre $|a_0| = 0$ olup $a_0 = 0$ elde edilir.

Tersine, $\mathbf{a} = 0$ ise $\|\mathbf{a}\| = |a_0| = |0| = 0$ bulunur.

2. $\mathbf{ab} = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)\varepsilon_1 + (a_0b_2 + a_2b_0)\varepsilon_2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\varepsilon_1\varepsilon_2$ çarpımından

$$\|\mathbf{ab}\| = |a_0b_0| = |a_0| \cdot |b_0| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

bulunur.

3. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + (a_3 + b_3)\varepsilon_1\varepsilon_2$ olup

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = |a_0 + b_0| \leq |a_0| + |b_0| \text{ (reeldeki üçgen eşitsizliğinden)}$$

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

elde edilir.

Tanım 2.17. $\forall \mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^*d_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısı için Taylor seri açılımı kullanılırsa

$$f(\mathbf{a}) = f(d_1) + \frac{f'(d_1)}{1!} \cdot (\varepsilon^*d_2)^1 + \frac{f''(d_1)}{2!} \cdot (\varepsilon^*d_2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(d_1)}{n!} \cdot (\varepsilon^*d_2)^n + \dots$$

elde edilir. Burada, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 0$ olduğundan

$$f(\mathbf{a}) = f(d_1) + \varepsilon^*d_2f'(d_1)$$

bulunur. Buna göre $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^*d_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısının üstel fonksiyonu

$$e^{d_1 + \varepsilon^*d_2} = e^{d_1} + \varepsilon^*d_2e^{d_1} = e^{d_1}(1 + \varepsilon^*d_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.10. $\forall \mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^* d_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısı için $\mathbf{a} = d_1 e^{\frac{d_2}{d_1} \varepsilon^*}$ dir.

İspat. Herhangi bir $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^* d_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısı verilsin. Üstel fonksiyon yardımıyla

$$d_1 e^{\frac{d_2}{d_1} \varepsilon^*} = d_1 \left(e^{0 + \frac{d_2}{d_1} \varepsilon^*} \right) = d_1 \left[e^0 \left(1 + \varepsilon^* \frac{d_2}{d_1} \right) \right] = d_1 + \varepsilon^* d_2 = \mathbf{a}$$

bulunur.

Tanım 2.18. Bir $\mathbf{a} = d_1 + \varepsilon^* d_2 \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısının argümenti $Arg(\mathbf{a}) = \frac{d_2}{d_1}$ şeklinde tanımlanır.

2.6. Hiper Dual Vektörler

Tanım 2.19. $\mathbf{HD}^3$ hiper dual vektörlerin kümesi

$$\mathbf{HD}^3 = \mathbf{HD} \times \mathbf{HD} \times \mathbf{HD} = \{ \vec{\mathbf{A}} = (A_1, A_2, A_3) | A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{HD} \}$$

ile tanımlanır.

$$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = (a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2, b_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2, c_0 + c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + c_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2)$$

olup

$$\vec{\mathbf{A}} = (a_0, b_0, c_0) + (a_1, b_1, c_1) \varepsilon_1 + (a_2, b_2, c_2) \varepsilon_2 + (a_3, b_3, c_3) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \text{ olarak}$$

yazılır. Burada $\vec{a}_0 = (a_0, b_0, c_0)$, $\vec{a}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{a}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, $\vec{a}_3 = (a_3, b_3, c_3)$

vektörler olmak üzere $\vec{\mathbf{A}} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \varepsilon_1 + \vec{a}_2 \varepsilon_2 + \vec{a}_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$ ifadesine hiper dual vektör denir.

Tanım 2.20. $\vec{\mathbf{A}} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \varepsilon_1 + \vec{a}_2 \varepsilon_2 + \vec{a}_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\vec{\mathbf{B}} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 \varepsilon_1 + \vec{b}_2 \varepsilon_2 + \vec{b}_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$ hiper dual vektörlerinin eşit olmaları için gerek ve yeter şart $\vec{a}_i = \vec{b}_i$, $0 \leq i \leq 3$ olmasıdır.

Tanım 2.21. $\vec{\mathbf{A}} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \varepsilon_1 + \vec{a}_2 \varepsilon_2 + \vec{a}_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\vec{\mathbf{B}} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 \varepsilon_1 + \vec{b}_2 \varepsilon_2 + \vec{b}_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$ hiper dual vektörlerinin toplamı

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) + (\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \varepsilon_1 + (\vec{a}_2 + \vec{b}_2) \varepsilon_2 + (\vec{a}_3 + \vec{b}_3) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.22. $\vec{A} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektörünün $\lambda \in \mathbf{HD}$ hiper dual sayısı ile çarpımı

$$\lambda.\vec{A} = \lambda\vec{a}_0 + (\lambda\vec{a}_1)\varepsilon_1 + (\lambda\vec{a}_2)\varepsilon_2 + (\lambda\vec{a}_3)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

şeklindedir.

Teorem 2.7. $(\mathbf{HD}^3, +)$ ikilisi bir abel grubudur.

İspat.

i) $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbf{HD}^3$ için Tanım 2.21 dikkate alınır

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (\vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) + (\vec{b}_0 + \vec{b}_1\varepsilon_1 + \vec{b}_2\varepsilon_2 + \vec{b}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) + (\vec{a}_1 + \vec{b}_1)\varepsilon_1 + (\vec{a}_2 + \vec{b}_2)\varepsilon_2 + (\vec{a}_3 + \vec{b}_3)\varepsilon_1\varepsilon_2\end{aligned}$$

olup $\vec{A} + \vec{B} \in \mathbf{HD}^3$ elde edilir.

ii) $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbf{HD}^3$ için Tanım 2.21 ve $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ üçlüsünün bir halka olduğu göz önüne alınır,

$$\begin{aligned}(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} &= [(\vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) + (\vec{b}_0 + \vec{b}_1\varepsilon_1 + \vec{b}_2\varepsilon_2 + \vec{b}_3\varepsilon_1\varepsilon_2)] \\ &\quad + (\vec{c}_0 + \vec{c}_1\varepsilon_1 + \vec{c}_2\varepsilon_2 + \vec{c}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= [(\vec{a}_0 + \vec{b}_0) + (\vec{a}_1 + \vec{b}_1)\varepsilon_1 + (\vec{a}_2 + \vec{b}_2)\varepsilon_2 + (\vec{a}_3 + \vec{b}_3)\varepsilon_1\varepsilon_2] \\ &\quad + (\vec{c}_0 + \vec{c}_1\varepsilon_1 + \vec{c}_2\varepsilon_2 + \vec{c}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= [(\vec{a}_0 + \vec{b}_0) + \vec{c}_0] + [(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \vec{c}_1]\varepsilon_1 + [(\vec{a}_2 + \vec{b}_2) + \vec{c}_2]\varepsilon_2 \\ &\quad + [(\vec{a}_3 + \vec{b}_3) + \vec{c}_3]\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= [\vec{a}_0 + (\vec{b}_0 + \vec{c}_0)] + [\vec{a}_1 + (\vec{b}_1 + \vec{c}_1)]\varepsilon_1 + [\vec{a}_2 + (\vec{b}_2 + \vec{c}_2)]\varepsilon_2 \\ &\quad + [\vec{a}_3 + (\vec{b}_3 + \vec{c}_3)]\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= (\vec{c}_0 + \vec{c}_1\varepsilon_1 + \vec{c}_2\varepsilon_2 + \vec{c}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) + [(\vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) + \\ &\quad (\vec{b}_0 + \vec{b}_1\varepsilon_1 + \vec{b}_2\varepsilon_2 + \vec{b}_3\varepsilon_1\varepsilon_2)] \\ &= \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})\end{aligned}$$

bulunur.

iii) $\forall \vec{0} \in \mathbf{HD}^3$ için Tanım 2.21 ve $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ üçlüsünün bir halka olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\vec{0} + \vec{A} &= (\vec{0} + \vec{0}\varepsilon_1 + \vec{0}\varepsilon_2 + \vec{0}\varepsilon_1\varepsilon_2) + (\vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= \vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \vec{A}\end{aligned}$$

bulunur. $\vec{0}$ elemanı $+$ işlemine göre $\mathbf{HD}^3$ deki birim elemandır.

iv) $\forall \vec{A} \in \mathbf{HD}^3$ için

$$\begin{aligned}\vec{X} + \vec{A} &= (\vec{x}_0 + \vec{x}_1\varepsilon_1 + \vec{x}_2\varepsilon_2 + \vec{x}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) + (\vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= \vec{0} + \vec{0}\varepsilon_1 + \vec{0}\varepsilon_2 + \vec{0}\varepsilon_1\varepsilon_2\end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek $\vec{X} = -\vec{A} = -\vec{a}_0 - \vec{a}_1\varepsilon_1 - \vec{a}_2\varepsilon_2 - \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbf{HD}^3$ elemanı vardır. $-\vec{A} \in \mathbf{HD}^3$ $+$ işlemine göre $\vec{A} \in \mathbf{HD}^3$ elemanının tersidir.

v) $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbf{HD}^3$ için Tanım 2.21 $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ üçlüsünün bir halka olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (\vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) + (\vec{b}_0 + \vec{b}_1\varepsilon_1 + \vec{b}_2\varepsilon_2 + \vec{b}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) + (\vec{a}_1 + \vec{b}_1)\varepsilon_1 + (\vec{a}_2 + \vec{b}_2)\varepsilon_2 + (\vec{a}_3 + \vec{b}_3)\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= (\vec{b}_0 + \vec{a}_0) + (\vec{b}_1 + \vec{a}_1)\varepsilon_1 + (\vec{b}_2 + \vec{a}_2)\varepsilon_2 + (\vec{b}_3 + \vec{a}_3)\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= (\vec{b}_0 + \vec{b}_1\varepsilon_1 + \vec{b}_2\varepsilon_2 + \vec{b}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) + (\vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= \vec{B} + \vec{A}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $(\mathbf{HD}^3, +)$ ikilisi bir abel grubudur.

Teorem 2.8. $(\mathbf{HD}^3, +)$ sistemi $\mathbf{HD}$ üzerinde bir modüldür.

İspat $(\mathbf{HD}, +, \cdot)$ üçlüsünün birimli ve değişimli bir halka olduğu bilinmektedir. $(\mathbf{HD}^3, +)$ ikilisinin Abel grubu olduğu da bir önceki teorem ile ispatlanmıştır. Bu durumda,

$$\therefore \mathbf{HD} \times \mathbf{HD}^3 \rightarrow \mathbf{HD}^3$$

$\forall \lambda \in \mathbf{HD}$ ve $\forall \vec{A} \in \mathbf{HD}^3$ için

$$\lambda \cdot \vec{A} = \lambda \vec{a_0} + (\lambda \vec{a_1})\varepsilon_1 + (\lambda \vec{a_2})\varepsilon_2 + (\lambda \vec{a_3})\varepsilon_1\varepsilon_2$$

şeklinde tanımlı dış işleminin modül aksiyomlarını sağladığı gösterilmelidir.

i) $\forall \lambda \in \mathbf{HD}$ ve $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbf{HD}^3$ için yukarıdaki dış işlem göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{A} + \vec{B}) &= \lambda[(\vec{a_0} + \vec{b_0}) + (\vec{a_1} + \vec{b_1})\varepsilon_1 + (\vec{a_2} + \vec{b_2})\varepsilon_2 + (\vec{a_3} + \vec{b_3})\varepsilon_1\varepsilon_2] \\ &= \lambda(\vec{a_0} + \vec{b_0}) + \lambda(\vec{a_1} + \vec{b_1})\varepsilon_1 + \lambda(\vec{a_2} + \vec{b_2})\varepsilon_2 + \lambda(\vec{a_3} + \vec{b_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \lambda \vec{a_0} + (\lambda \vec{a_1})\varepsilon_1 + (\lambda \vec{a_2})\varepsilon_2 + (\lambda \vec{a_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &\quad + \lambda \vec{b_0} + (\lambda \vec{b_1})\varepsilon_1 + (\lambda \vec{b_2})\varepsilon_2 + (\lambda \vec{b_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \lambda \vec{A} + \lambda \vec{B} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{HD}$ ve $\forall \vec{A} \in \mathbf{HD}^3$ için yukarıdaki dış işlem göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\vec{A} &= (\lambda + \mu) \vec{a_0} + (\lambda + \mu)(\vec{a_1})\varepsilon_1 + (\lambda + \mu)(\vec{a_2})\varepsilon_2 + (\lambda + \mu)(\vec{a_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \lambda \vec{a_0} + (\lambda \vec{a_1})\varepsilon_1 + (\lambda \vec{a_2})\varepsilon_2 + (\lambda \vec{a_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &\quad + \mu \vec{a_0} + (\mu \vec{a_1})\varepsilon_1 + (\mu \vec{a_2})\varepsilon_2 + (\mu \vec{a_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \lambda \vec{A} + \mu \vec{A} \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{HD}$ ve $\forall \vec{A} \in \mathbf{HD}^3$ için yukarıdaki dış işlem göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)\vec{A} &= (\lambda\mu) \vec{a_0} + (\lambda\mu)(\vec{a_1})\varepsilon_1 + (\lambda\mu)(\vec{a_2})\varepsilon_2 + (\lambda\mu)(\vec{a_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \lambda(\mu \vec{a_0}) + \lambda(\mu \vec{a_1})\varepsilon_1 + \lambda(\mu \vec{a_2})\varepsilon_2 + \lambda(\mu \vec{a_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \lambda(\mu \vec{A}) \end{aligned}$$

elde edilir.

iv) $1 \in HD$ için

$$\begin{aligned} 1\vec{A} &= 1\vec{a_0} + (1\vec{a_1})\varepsilon_1 + (1\vec{a_2})\varepsilon_2 + (1\vec{a_3})\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \vec{a_0} + \vec{a_1}\varepsilon_1 + \vec{a_2}\varepsilon_2 + \vec{a_3}\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \vec{A} \end{aligned}$$

dir.

Böylece $(HD^3, +)$ sistemi HD üzerinde bir modüldür.

Tanım 2.23. $\vec{A} = \vec{a_0} + \vec{a_1}\varepsilon_1 + \vec{a_2}\varepsilon_2 + \vec{a_3}\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\vec{B} = \vec{b_0} + \vec{b_1}\varepsilon_1 + \vec{b_2}\varepsilon_2 + \vec{b_3}\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektörleri için

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: HD^3 \times HD^3 &\rightarrow HD \\ \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \langle \vec{a_0}, \vec{b_0} \rangle + (\langle \vec{a_0}, \vec{b_1} \rangle + \langle \vec{a_1}, \vec{b_0} \rangle)\varepsilon_1 + (\langle \vec{a_0}, \vec{b_2} \rangle + \langle \vec{a_2}, \vec{b_0} \rangle)\varepsilon_2 + \\ &\quad (\langle \vec{a_0}, \vec{b_3} \rangle + \langle \vec{a_3}, \vec{b_0} \rangle + \langle \vec{a_1}, \vec{b_2} \rangle + \langle \vec{a_2}, \vec{b_1} \rangle)\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu HD^3 uzayına da iç çarpım uzayı denir.

1) **Simetri (Değişme) Özelliği:** $\forall \vec{A}, \vec{B} \in HD^3$ için $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle$ dir.

2) **Bilineerlik Özelliği:** $\forall \vec{A}, \vec{B} \in HD^3$ ve $\forall \lambda \in HD$ için

$$\langle \lambda \vec{A}, \vec{B} \rangle = \lambda \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$$

$$\langle \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle \text{ dir.}$$

3) $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$ dir.

2.7. Hiper Dual Vektörlerin Normlanması

Tanım 2.24. Bir $\vec{A} = \vec{a_0} + \vec{a_1}\varepsilon_1 + \vec{a_2}\varepsilon_2 + \vec{a_3}\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektörün normu

$$\|\vec{A}\| = (\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle)^{1/2} = (\|\vec{a_0}\|^2 + 2\langle \vec{a_0}, \vec{a_1} \rangle \varepsilon_1 + 2\langle \vec{a_0}, \vec{a_2} \rangle \varepsilon_2 + 2(\langle \vec{a_0}, \vec{a_3} \rangle + \langle \vec{a_1}, \vec{a_2} \rangle)\varepsilon_1\varepsilon_2)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada bir hiper dual sayının karekökü tanımı kullanılırsa

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\|\vec{a_0}\|^2} + \frac{2\langle \vec{a_0}, \vec{a_1} \rangle}{2\sqrt{\|\vec{a_0}\|^2}}\varepsilon_1 + \frac{2\langle \vec{a_0}, \vec{a_2} \rangle}{2\sqrt{\|\vec{a_0}\|^2}}\varepsilon_2 + \left(\frac{2(\langle \vec{a_0}, \vec{a_3} \rangle + \langle \vec{a_1}, \vec{a_2} \rangle)}{2\sqrt{\|\vec{a_0}\|^2}} - \frac{2\langle \vec{a_0}, \vec{a_1} \rangle 2\langle \vec{a_0}, \vec{a_2} \rangle}{4\|\vec{a_0}\|^2\sqrt{\|\vec{a_0}\|^2}} \right) \varepsilon_1\varepsilon_2$$

veya

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}_0\| + \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} \varepsilon_1 + \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} \varepsilon_2 + \left(\frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

olarak yazılır.

Örnek 2.8. $\vec{A} = (1, 2, 3) + (1, 0, -2)\varepsilon_1 + (5, -1, 0)\varepsilon_2 + (3, -4 - 2)\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektörünün normu

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{14} - \frac{5}{\sqrt{14}}\varepsilon_1 + \frac{3}{\sqrt{14}}\varepsilon_2 + \left(\frac{69}{14\sqrt{14}} \right) \varepsilon_1\varepsilon_2$$

dir.

Tanım 2.25. Normu 1 olan hiper dual vektöre birim hiper dual vektör denir.

Teorem 2.9. $\vec{A}$ birim hiper dual vektör ise

$$\|\vec{a}_0\| = 1 \text{ ve } \langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle = \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle = \langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = 0 \text{ dir.}$$

İspat Hiper dual sayının normu tanımına göre

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}_0\| + \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} \varepsilon_1 + \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} \varepsilon_2 + \left(\frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

ve

$$\|\vec{a}_0\| + \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} \varepsilon_1 + \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} \varepsilon_2 + \left(\frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1 + 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_1\varepsilon_2$$

yazılabilir. İki hiper dual sayının tanımı göz önüne alınırsa,

$$\|\vec{a}_0\| = 1 \text{ ve } \langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle = \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle = \langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = 0$$

elde edilir.

Teorem 2.10. $\vec{A} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektör olmak üzere

$$\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \vec{U}$$

birim dual vektördür.

İspat:

$$a_0 = \|\vec{a}_0\|, a_1 = \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|}, a_2 = \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|}, a_3 = \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3}$$

olmak üzere

$$\|\vec{A}\| = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$$

dir.

$\vec{a}_0 = (a_0, b_0, c_0)$, $\vec{a}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{a}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, $\vec{a}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} &= \frac{\vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ &= \frac{((a_0, b_0, c_0) + (a_1, b_1, c_1)\varepsilon_1 + (a_2, b_2, c_2)\varepsilon_2 + (a_3, b_3, c_3)\varepsilon_1\varepsilon_2)}{a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ &= \left(\frac{a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2}, \frac{b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2}, \frac{c_0 + c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2} \right) \\ &= \left(\frac{a_0}{a_0} + \frac{(a_1a_0 - a_0a_0)}{a_0^2}\varepsilon_1 + \frac{(a_2a_0 - a_0a_2)}{a_0^2}\varepsilon_2 + \left(\frac{a_3a_0^2 - a_0a_0a_3 - a_1a_0a_2 - a_2a_0a_1 + 2a_0a_1a_2}{a_0^3} \right)\varepsilon_1\varepsilon_2, \right. \\ &\quad \left. \frac{b_0}{a_0} + \frac{(b_1a_0 - b_0a_0)}{a_0^2}\varepsilon_1 + \frac{(b_2a_0 - b_0a_2)}{a_0^2}\varepsilon_2 + \left(\frac{b_3a_0^2 - b_0a_0a_3 - b_1a_0a_2 - b_2a_0a_1 + 2b_0a_1a_2}{a_0^3} \right)\varepsilon_1\varepsilon_2, \right. \\ &\quad \left. \frac{c_0}{a_0} + \frac{(c_1a_0 - c_0a_0)}{a_0^2}\varepsilon_1 + \frac{(c_2a_0 - c_0a_2)}{a_0^2}\varepsilon_2 + \left(\frac{c_3a_0^2 - c_0a_0a_3 - c_1a_0a_2 - c_2a_0a_1 + 2c_0a_1a_2}{a_0^3} \right)\varepsilon_1\varepsilon_2 \right) \\ &= \left(\frac{a_0}{a_0}, \frac{b_0}{a_0}, \frac{c_0}{a_0} \right) + \left(\frac{((a_1, b_1, c_1))}{a_0} - \frac{a_1(a_0, b_0, c_0)}{a_0^2} \right) \varepsilon_1 \\ &\quad + \left(\frac{((a_2, b_2, c_2))}{a_0} - \frac{a_2(a_0, b_0, c_0)}{a_0^2} \right) \varepsilon_2 \\ &\quad + \left(\frac{((a_3, b_3, c_3))}{a_0} - \frac{a_3(a_0, b_0, c_0)}{a_0^2} - \frac{a_2(a_1, b_1, c_1)}{a_0^2} - \frac{a_1(a_2, b_2, c_2)}{a_0^2} \right. \\ &\quad \left. + 2a_1a_2 \frac{(a_0, b_0, c_0)}{a_0^3} \right) \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|} + \left(\frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_0 \right) \varepsilon_1 + \left(\frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_0 \right) \varepsilon_2 \\ &\quad + \left[\frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_1 - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_2 - \left(\frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} - 2 \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \right) \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|^2} \right] \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \vec{U} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\vec{u}_0 &= \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|}, \\
\vec{u}_1 &= \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_0, \\
\vec{u}_2 &= \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_0, \\
\vec{u}_3 &= \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_1 - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_2 \\
&\quad - \left(\frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} - 2 \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \right) \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\langle \vec{u}_0, \vec{u}_0 \rangle = \left\langle \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|}, \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{a}_0\|^2} \cdot \|\vec{a}_0\|^2 = 1,$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}_0, \vec{u}_1 \rangle &= \left\langle \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|}, \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_0 \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|\vec{a}_0\|^2} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^4} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle \\
&= \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}_0, \vec{u}_2 \rangle &= \left\langle \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|}, \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_0 \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|\vec{a}_0\|^2} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^4} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle \\
&= \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}_0, \vec{u}_3 \rangle + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= \left\langle \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|}, \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_0\|} - \left(\frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \right) \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_1 - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_2 + 2 \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^5} \vec{a}_0 \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_0, \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_0\|} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^3} \vec{a}_0 \right\rangle \\
&= \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2} - \left(\frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^4} \right) \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle + \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^6} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle \\
&\quad - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^4} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^4} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle + 2 \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^6} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle \\
&\quad + \frac{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^4} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^4} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle + \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^6} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \vec{U}$ birim hiper dual vektördür.

Örnek 2.9. $\vec{A} = (1,2,3) + (1,0,-2)\varepsilon_1 + (5,-1,0)\varepsilon_2 + (3,-4-2)\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektörü için

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{14} - \frac{5}{\sqrt{14}}\varepsilon_1 + \frac{3}{\sqrt{14}}\varepsilon_2 + \left(\frac{69}{14\sqrt{14}}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

olmak üzere

$$\vec{U} = \frac{(1,2,3) + (1,0,-2)\varepsilon_1 + (5,-1,0)\varepsilon_2 + (3,-4-2)\varepsilon_1\varepsilon_2}{\sqrt{14} - \frac{5}{\sqrt{14}}\varepsilon_1 + \frac{3}{\sqrt{14}}\varepsilon_2 + \left(\frac{69}{14\sqrt{14}}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

vektörü birim vektördür. Yukarıdaki teorem kullanılırsa; $\vec{U}$ birim vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{U} &= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) + \left(\frac{19}{14\sqrt{14}}, \frac{10}{14\sqrt{14}}, -\frac{13}{14\sqrt{14}} \right) \varepsilon_1 \\
&\quad + \left(\frac{67}{14\sqrt{14}}, -\frac{20}{14\sqrt{14}}, -\frac{9}{14\sqrt{14}} \right) \varepsilon_2 \\
&\quad + \left(\frac{935}{196\sqrt{14}}, -\frac{776}{196\sqrt{14}}, -\frac{191}{196\sqrt{14}} \right) \varepsilon_1\varepsilon_2
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Gerçekten $\langle \vec{u}_0, \vec{u}_0 \rangle = 1$, $\langle \vec{u}_0, \vec{u}_1 \rangle = 0$, $\langle \vec{u}_0, \vec{u}_2 \rangle = 0$ ve $\langle \vec{u}_0, \vec{u}_3 \rangle + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$ elde edilir.

Sonuç 2.11. Teorem 2.10' da

$$k_1 = \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2},$$

$$k_2 = \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2},$$

$$k_3 = \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_3 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^2} - \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^4} - 2 \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_1 \rangle \langle \vec{a}_0, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_0\|^5}$$

alınırsa,

$$\vec{A} = a_0(1 + k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_1\varepsilon_2)\vec{U}$$

yazılabilir. Buradaki k_1, k_2 ve k_3 $\vec{A}$ dual vektörünün adımlarıdır.

Örnek 2.10. $\vec{A} = (1, 2, 3) + (1, 0, -2)\varepsilon_1 + (5, -1, 0)\varepsilon_2 + (3, -4, -2)\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektörü için $\vec{A}$ dual vektörünün adımları $k_1 = -\frac{5}{\sqrt{14}}, k_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$ ve $k_3 = \frac{-30-69\sqrt{14}}{196\sqrt{14}}$ olarak bulunur. Bu durumda, $\vec{U}$ birim hiper dual vektörü

$$\begin{aligned} \vec{U} = & \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) + \left(\frac{19}{14\sqrt{14}}, \frac{10}{14\sqrt{14}}, -\frac{13}{14\sqrt{14}} \right) \varepsilon_1 \\ & + \left(\frac{67}{14\sqrt{14}}, -\frac{20}{14\sqrt{14}}, -\frac{9}{14\sqrt{14}} \right) \varepsilon_2 \\ & + \left(\frac{935}{196\sqrt{14}}, -\frac{776}{196\sqrt{14}}, -\frac{191}{196\sqrt{14}} \right) \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\vec{A} = \sqrt{14} \left(1 - \frac{5}{\sqrt{14}}\varepsilon_1 + \frac{3}{\sqrt{14}}\varepsilon_2 + \left(\frac{-30-69\sqrt{14}}{196\sqrt{14}} \right) \varepsilon_1\varepsilon_2 \right) \vec{U}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.26. $\vec{a}_0 \neq \vec{0}, \vec{a}_1 \neq \vec{0}, \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ ve $\vec{a}_3 \neq \vec{0}$ ise $\vec{A} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektörüne has hiper dual vektör denir.

Tanım 2.27. $\vec{a}_0 = \vec{0}$ ise $\vec{A} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ hiper dual vektörüne sırf hiper dual vektör denir.

2.8. Hiper Dual Vektörler İçin Skaler ve Vektörel Çarpım

Tanım 2.28. $\vec{A}, \vec{B} \in HD^3$ hiper dual vektörlerinin dış çarpımı;

$$\wedge: HD^3 \times HD^3 \rightarrow HD^3$$

işlemi $\vec{A} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1\varepsilon_1 + \vec{a}_2\varepsilon_2 + \vec{a}_3\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\vec{B} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1\varepsilon_1 + \vec{b}_2\varepsilon_2 + \vec{b}_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ için

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} = & \vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0 + \varepsilon_1(\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_1 + \vec{a}_1 \wedge \vec{b}_0) + \varepsilon_2(\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_2 + \vec{a}_2 \wedge \vec{b}_0) \\ & + \varepsilon_1\varepsilon_2(\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_3 + \vec{a}_1 \wedge \vec{b}_2 + \vec{a}_2 \wedge \vec{b}_1 + \vec{a}_3 \wedge \vec{b}_0) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.29.

$$\varepsilon = \varepsilon_1; \varepsilon^* = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^{*2} = 0$$

$$\varepsilon \neq 0, \varepsilon^* \neq 0, \varepsilon \neq \varepsilon^*$$

$$\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon^*\varepsilon \neq 0$$

olmak üzere $\vec{A}$ hiper dual vektörü iki dual vektörün toplamı olarak $\vec{A} = \vec{A}_1 + \varepsilon^*\vec{A}_2$ şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{A}_1 = \vec{a}_0 + \varepsilon\vec{a}_1$ ve $\vec{A}_2 = \vec{a}_2 + \varepsilon\vec{a}_3$ dual vektörleridir.

Hiper dual vektörlerin skaler ve vektörel çarpımları (Cohen ve Shoham, 2018) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$, $\vec{A}^* = \vec{a}^* + \varepsilon(\vec{a}^*)^*$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b}^*$ ve $\vec{B}^* = \vec{b}^* + \varepsilon(\vec{b}^*)^*$ dual vektörler ve $\vec{A} = \vec{A} + \varepsilon^*\vec{A}^*$ ve $\vec{B} = \vec{B} + \varepsilon^*\vec{B}^*$ hiper dual vektörleri verilsin.

$$\vec{A}^* = \vec{X} \wedge \vec{A} \text{ ve } \vec{B}^* = \vec{Y} \wedge \vec{B}$$

olmak üzere $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ hiper dual vektörlerinin skaler çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \langle \vec{A} + \varepsilon^*(\vec{X} \wedge \vec{A}), \vec{B} + \varepsilon^*(\vec{Y} \wedge \vec{B}) \rangle \\ &= \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \varepsilon^*[\langle \vec{A}, \vec{Y} \wedge \vec{B} \rangle + \langle \vec{X} \wedge \vec{A}, \vec{B} \rangle] \\ &= \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \varepsilon^*[-\langle \vec{Y}, \vec{A} \wedge \vec{B} \rangle + \langle \vec{X}, \vec{A} \wedge \vec{B} \rangle] \\ &= \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \varepsilon^*(\langle \vec{X} - \vec{Y}, \vec{A} \wedge \vec{B} \rangle) \\ &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos \Phi + \varepsilon^*(\langle -\vec{M}, \vec{A} \wedge \vec{B} \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \Phi - \varepsilon^*(\langle \vec{M}, \vec{A} \wedge \vec{B} \rangle) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \Phi - \varepsilon^*(\|\vec{M}\| \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| \cos 0) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \Phi - \varepsilon^*(\varphi^* \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \Phi) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \Phi - \varphi^* \varepsilon^*(\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \Phi)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varphi^* = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2$ bir dual sayıdır.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi - \varphi^* \varepsilon^*(\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \Phi) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \Phi - \varepsilon^*(\varphi_1 + \varepsilon \varphi_2)(\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \Phi) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| (\cos \varphi - \varphi^* \varepsilon \sin \varphi) - \varepsilon^*(\varphi_1 + \varepsilon \varphi_2) (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| (\sin \varphi + \varepsilon \varphi^* \cos \varphi)) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| (\cos \varphi - \varphi^* \varepsilon \sin \varphi - \varepsilon^*(\varphi_1 \sin \varphi + \varepsilon \varphi_1 \varphi^* \cos \varphi + \varepsilon \varphi_2 \sin \varphi)) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| (\cos \varphi - \varphi^* \varepsilon_1 \sin \varphi - \varepsilon_2 \varphi_1 \sin \varphi - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi_1 \varphi^* \cos \varphi - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi_2 \sin \varphi) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \Phi
\end{aligned}$$

dir, burada $\Phi = \Phi + \varepsilon^* \Phi^*$ dir (Cohen ve Shoham, 2018).

$$\begin{aligned}
\vec{A} \wedge \vec{B} &= (\vec{A} + \varepsilon^*(\vec{X} \wedge \vec{A})) \wedge (\vec{B} + \varepsilon^*(\vec{Y} \wedge \vec{B})) \\
&= \vec{A} \wedge \vec{B} + \varepsilon^*[\vec{A} \wedge (\vec{Y} \wedge \vec{B}) + (\vec{X} \wedge \vec{A}) \wedge \vec{B}] \\
&= \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \vec{M} \sin \Phi + \varepsilon^*(\varphi^* \vec{M} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \vec{Y} \wedge (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \vec{M} \sin \Phi)) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \vec{M} \sin \Phi + \varepsilon^*(\varphi^* \vec{m} \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \Phi - \varphi^* \vec{M} \wedge (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \vec{M} \sin \Phi)) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \vec{M} (\sin \Phi + \varepsilon^*(\varphi^* \cos \Phi)) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \vec{M} (\sin \varphi + \varepsilon \varphi^* \cos \varphi + \varepsilon^*(\varphi_1 + \varepsilon \varphi_2)(\cos \varphi - \varphi^* \varepsilon \sin \varphi)) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \vec{M} (\sin \varphi + \varepsilon_1 \varphi^* \cos \varphi + \varepsilon_2 \varphi_1 \cos \varphi + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi_2 \cos \varphi - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi_1 \varphi^* \sin \varphi) \\
&= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \vec{M} \sin \Phi
\end{aligned}$$

elde edilir (Cohen, ve Shoham, 2018).

Hiper dual vektörler için skaler ve vektörel çarpım göz önüne alınırsa, dual vektörler için tanımlanan skaler ve vektörel çarpımla aynı özelliklere sahip olduğu görülebilir.

2.9. Hiper Dual Vektörlerin Lineer Bağımlılığı, Lineer Bağımsızlığı ve Bazlar

Tanım 2.30. $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3 \in \mathcal{HD}^3$ has hiper dual vektörler ve

$\mu_i = (\delta_0)_i + (\delta_1)_i \varepsilon_1 + (\delta_2)_i \varepsilon_2 + (\delta_3)_i \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbf{HD}$, $1 \leq i \leq 3$ hiper dual sayıları için $\sum_{i=1}^3 \mu_i \vec{A_i} = \vec{0}$ iken her μ_i hiper dual sayıları $\mathbf{0}$ hiper dual sayısı oluyorsa $\{\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}\}$ has hiper dual vektörlerin kümesine lineer bağımsızdır denir.

Aksi halde $\{\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}\}$ has hiper dual vektörlerin kümesine lineer bağımlıdır denir.

Teorem 2.11. $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$ ve $c_k \neq 0$, $0 \leq i, j, k \leq 3$ ise

$$A_1 = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2, A_2 = b_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \text{ ve}$$

$$A_3 = c_0 + c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + c_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \text{ olmak üzere}$$

$$\{\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)\} \text{ kümesi lineer bağımsızdır.}$$

İspat. $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ hiper dual vektör olsun. Bu durumda hiper dual vektör tanımına göre

$$(A_1, A_2, A_3) = (a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2, b_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2, c_0 + c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + c_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2)$$

dir. $\mu = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_1 + \delta_2 \varepsilon_2 + \delta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$ olmak üzere

$$\mu \vec{A} = \vec{0}$$

iken

$$\mu(A_1, A_2, A_3) = \vec{0}$$

ve

$$\mu A_1 = \mu A_2 = \mu A_3 = \mathbf{0}$$

elde edilir. İki hiper dual sayının tanımına göre

$$\mu A_1 = \mathbf{ab} = (\delta_0 a_0) + (\delta_0 a_1 + \delta_1 a_0) \varepsilon_1 + (\delta_0 a_2 + \delta_2 a_0) \varepsilon_2 + (\delta_0 a_3 + \delta_1 a_2 + \delta_2 a_1 + \delta_3 a_0) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

$$\mu A_2 = \mathbf{ab} = (\delta_0 b_0) + (\delta_0 b_1 + \delta_1 b_0) \varepsilon_1 + (\delta_0 b_2 + \delta_2 b_0) \varepsilon_2 + (\delta_0 b_3 + \delta_1 b_2 + \delta_2 b_1 + \delta_3 b_0) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

ve

$$\mu A_3 = \mathbf{ab} = (\delta_0 c_0) + (\delta_0 c_1 + \delta_1 c_0) \varepsilon_1 + (\delta_0 c_2 + \delta_2 c_0) \varepsilon_2 + (\delta_0 c_3 + \delta_1 c_2 + \delta_2 c_1 + \delta_3 c_0) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

olup

$$\delta_0 a_0 = \delta_0 b_0 = \delta_0 c_0 = 0,$$

$$\delta_0 a_1 + \delta_1 a_0 = \delta_0 a_2 + \delta_2 a_0 = \delta_0 a_3 + \delta_1 a_2 + \delta_2 a_1 + \delta_3 a_0 = 0,$$

$$\delta_0 b_1 + \delta_1 b_0 = \delta_0 b_2 + \delta_2 b_0 = \delta_0 b_3 + \delta_1 b_2 + \delta_2 b_1 + \delta_3 b_0 = 0,$$

$$\delta_0 c_1 + \delta_1 c_0 = (\delta_0 c_2 + \delta_2 c_0 = (\delta_0 c_3 + \delta_1 c_2 + \delta_2 c_1 + \delta_3 c_0 = 0$$

elde edilir. Böylece $0 \leq i, j, k \leq 3$ için $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$ ve $c_k \neq 0$ olduğundan

$\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ elde edilir. Bu durumda $\mu = \mathbf{0}$ bulunur. Sonuç olarak

$\{\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Tanım 2.31. $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3 \in \mathbf{HD}^3$ birim hiper dual vektörleri karşılıklı olarak ortogonal iseler $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ birim hiper dual vektörlerine ortonormal hiper dual vektörler denir.

Teorem 2.12. $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ ortonormal vektörler iseler $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

İspat $\mu_i = (\delta_0)_i + (\delta_1)_{i\varepsilon_1} + (\delta_2)_{i\varepsilon_2} + (\delta_3)_{i\varepsilon_1\varepsilon_2} \in \mathbf{HD}$, $1 \leq i \leq 3$ hiper dual sayıları için $\sum_{i=1}^3 \mu_i \vec{A}_i = \vec{0}$ eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla $\vec{A}_j$, $1 \leq j \leq 3$ hiper dual sayıları ile iç çarpılırsa

$$\sum_{i=1}^3 \mu_i \langle \vec{A}_i, \vec{A}_j \rangle = \langle \vec{0}, \vec{A}_j \rangle = 0$$

elde edilir. $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ sisteminin ortonormal olduğu göz önüne alınırsa

$$\langle \vec{A}_i, \vec{A}_j \rangle = \begin{cases} 1, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases}, 1 \leq i \leq 3$$

olduğundan

$$\mu_i = 0, 1 \leq i \leq 3$$

elde edilir. Böylece, $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

Tanım 2.32. $\mathbf{HD}^3$ ün herhangi bir T alt kümesi lineer bağımsız ve $Sp\{T\} = \mathbf{HD}^3$ ($\forall \vec{A} \in \mathbf{HD}^3$ için T kümesindeki sonlu sayıdaki elemanın bir lineer kombinasyonudur) özelliklerini sağlıyorsa T kümesine $\mathbf{HD}^3$ ün bir bazı denir.

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Çalışmada ilk olarak literatürde var olan hiper dual sayılar ile ilgili bilgiler verilmiştir. Ayrıca bu bilgilere ek olarak bir hiper dual sayının mutlak değeri ve bir hiper dual sayının karekökü işlemleri tanıtılmıştır. Hiper dual sayıların reel katsayılı matris gösterimine ek olarak dual katsayılı matris gösterimi tanımlanmıştır. Diğer taraftan kompleks ve dual sayılarda geçerli olan bazı özelliklerin hiper dual sayılar için geçerli olmadığı sonucuna varılmıştır. Örneğin; $\forall a \in HDS, \forall b \neq 0 \in HDS$ hiper dual sayıları için $\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right) \neq \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ ve $\overline{a \cdot b} \neq \bar{a} \cdot \bar{b}$ elde edilmiştir.

Daha sonra hiper dual vektörler tanıtılıp literatürde var olan ve var olmayan tanımlar, teoremler, sonuçlar ve özellikleri ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. İkinci bölümde, HDS^3 hiper dual vektörlerin kümesi verilmiş ve $(HDS^3, +)$ ikilisinin bir Abel grubu, $(HDS^3, +)$ sisteminin de HDS üzerinde bir modül olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca bir hiper dual vektörün normlanması dual sayının normunun genellemesi olarak bulunmuştur. Buradan da birim hiper dual vektör olma şartı elde edilmiştir.

4. ÖNERİLER

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1$$

olmak üzere

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_2 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2$$

elde edilir. Buradan

$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = -1, (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 = 1$ ise sayıya dairesel dörtlü kompleks sayı (circular fourcomplex number) ve $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 = 1$ ise sayıya hiper-çift sayı (hyper-double number) denir.

Bu tez çalışmasında ayrıntılı bir şekilde özellikleri verilen hiper dual sayılara benzer olarak yukarıdaki sayı sistemlerinin de özellikleri incelenebilir.

Ayrıca bu sayılar kullanılarak dairesel dörtlü kompleks ve hiper çift vektörler tanımlanıp özellikleri verilebilir.

Diğer taraftan bu üç farklı sayı sistemleri kullanılarak her biri için ayrı ayrı hiper dual sayı, dairesel dörtlü kompleks sayı ve hiper-çift sayı katsayılı matrisler tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

- Blaschke, W. (1930). Vorlesungen Über Differential Geometry I. Verlag von Julius Springer in Berlin, 89.
- Bottema, O. and Roth, B. (1979). Theoretical Kinematics. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics 24. Amsterdam-New York-Oxford Publishing Company.
- Cohen, A., and Shoham, M. (2016). Application of hyper-dual numbers to multi-body kinematics. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(1), 011015 (4).
- Cohen, A., and Shoham, M. (2017). Application of hyper-dual numbers to rigid bodies equations of motion, *Mechanism and Machine Theory*, 111, 76-84.
- Cohen, A., and Shoham, M. (2018). Principle of transference—an extension to hyper-dual numbers. *Mechanism and Machine Theory*, 125, 101-110.
- Dimentberg, F.M. (1965). The Screw Calculus and Its Application in Mechanics, Clearinghouse for Federal and Scientific Technical Information, Nauka, Moscow, USSR, English translation: A D 680993.
- Fike, J.A. (2009). Numerically exact derivative calculations using hyper-dual numbers. 3rd Annual Student Joint Workshop in Simulation- Based Engineering and Design.
- Fike, J. A., and Alonso, J. J. (2011). The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations. 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 4-7 January 2011, Orlando, Florida.
- Fike, J. A., Jongsma, S., Alonso, J. J., and Van Der Weida, E. (2011). Optimization with gradient and hessian information calculated using hyper-dual numbers. 29th AIAA Applied Aerodynamics Conference Honolulu, Hawaii, June 29.
- Fike, J. A., and Alonso, J. J. (2012). Automatic Differentiation Through The Use of Hyper-dual Numbers for Second Derivatives. Recent Advances in Algorithmic Differentiation, 163–173, Lecture Notes Computer Science Engineering, 87, Springer Heidelberg.
- Fike, J.A. (2013). Multi-objective optimization using hyper-dual numbers. Doctor of Philosophy. Stanford University, California.
- Fumio, F., Masato, T., Takashi, S., and Ryuji, O. (2017). Computational two-mode asymptotic bifurcation theory combined with hyper dual numbers and applied to plate/shell buckling. *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, 325, 666–688.

- Guggenheimer, H. (1963). Differential Geometry. Mc Graw-Hill Book Company, London, Library Congress Cat Card Number 63(12118),164.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1971). Acceleration axes in spatial kinematics I. *Communications De La Faculté des Sciences de L'Université d'Ankara. Série A, Année, 15.*
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1977). Study map of a circle. *Journal of The Faculty of The Karadeniz Technical University I*, 69-80.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Matematik 2, Ankara.
- Majernik, V. (2006). Quaternion formulation of the galilean space time *Transformation, Acta Physica*, 56 (1), 9-13.
- Masato, T., Takashi, S., Ryuji, O., Masaki, F., Daniel, B., Schröder., and Jörg, S. (2015). A highly accurate 1st- and 2nd-order differentiation scheme for hyperelastic material models based on hyper-dual numbers. *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*. 283, 22–45.
- Masato, T., Daniel, B., and Jörg, S. (2016). Implementation of incremental variational formulations based on the numerical calculation of derivatives using hyper dual numbers. *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*. 301 , 216–241.
- Müller, H. R. (1963). Kinematik Dersleri. Ankara University Prees, 247-271.
- Nalbant, K.G. (2018). Dual Kuaterniyon Katsayılı Matrisler, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 247.
- Nomizu, K. (1966). Fundamentals af Linear Algebra. Mc Graw-Hill Book Company, London, Library Congress Cat Card Numbers 65(28732), 52-67.
- Pennestri, E., and R. Stefanelli, R. (2007). Linear algebra and numerical algorithms using dual numbers. *Multibody Systems Dynamics*, 18 (3) 323–344.
- Volker, F., Alexander, B., and Jörn, M. (2018). Variational updates for thermomechanically coupled gradient-enhanced elastoplasticity implementation based on hyper-dual numbers. *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, 339, 239–261.
- Yüce, S., and Ercan, Z. (2011). On properties of the dual quaternions. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4 (2), 142-146.
- Messelmi F. (2015). Dual-complex numbers and their holomorphic functions. [https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114178\(2015\)](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114178(2015)).

ÖZGEÇMİŞ

Furkan ÇİL, 22/07/1985 tarihinde Rize’de doğdu. 1996 yılında Rize Merkez Kurtuluş İlkokulunu, 1999 yılında Rize Merkez İmam Hatip Ortaokulunu ve 2003 yılında Rize Fener Lisesi (Y.D.A.)’nde öğrenimini tamamladı. 18/09/2006 tarihinde başladığı lisans eğitimini 01/07/2011 tarihinde Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde tamamladı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitim Bölümünde Pedagojik Formasyon eğitimini tamamlamıştır. 2017 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başladığı yüksek lisans öğrenimine halen devam etmektedir. 2011 yılından itibaren özel sektörde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.