

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HARİTA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**TÜRKİYE ULUSAL UÇUŞ ROTALARI İÇİN JEODEZİK YÖNTEMLERLE EN KISA
GÜZERGAH ANALİZİ**

DOKTORA TEZİ

Oğuzhan KAHYA

**ARALIK 2019
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARİTA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**TÜRKİYE ULUSAL UÇUŞ ROTALARI İÇİN JEODEZİK YÖNTEMLERLE EN KISA
GÜZERGAH ANALİZİ**

Oğuzhan KAHYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"DOKTOR (HARİTA MÜHENDİSLİĞİ)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 / 10 /2019

Tezin Savunma Tarihi : 23 / 12 /2019

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Faruk YILDIRIM

Trabzon 2019

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Harita Mühendisliği Anabilim Dalı

Oğuzhan KAHYA Tarafından Hazırlanan

**TÜRKİYE ULUSAL UÇUŞ ROTALARI İÇİN JEDOEZİK YÖNTEMLERLE EN KISA
GÜZERGAH ANALİZİ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 26 /11 /2019 gün ve 1829 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.**

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Atakan AKSOY

Üye : Prof. Dr. Uğur DOĞAN

Üye : Doç. Dr. Yasemin ŞİŞMAN

Üye : Doç. Dr. Faruk YILDIRIM

Üye : Doç. Dr. Emine TANIR KAYIKÇI

Atakan Aksoy
.....
Uğur Doğan
.....

Yasemin Şişman
.....
Faruk Yıldırım
.....
Emine Tanır Kayıkçı
.....

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Gerçekleştirmiş olduğum doktora çalışmasının danışmanlığını üstlenen, bilgi ve deneyimleri ile çalışmalarımı yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Faruk YILDIRIM'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesinde görev alarak çalışmalarına katkı sağlayan Prof. Dr. Atakan AKSOY ve Doç. Dr. Emine Tanır KAYIKÇI'ya teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca üzüntü ve sevinçlerimi paylaşan, sürekli fedakârlık gösteren ve bu sebeple de övgülerin en büyüğünü hak eden eşime en içten teşekkürü bir borç bilirim.

Oğuzhan KAHYA
Trabzon 2019

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Türkiye Ulusal Uçuş Rotaları İçin Jeodezik Yöntemlerle En Kısa Güzergâh Analizi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Faruk YILDIRIM’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 23/12/2019

Oğuzhan KAHYA

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XI
KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Problemin Tanımı	10
1.3. Tezin Amacı.....	10
1.4. Metodoloji.....	11
1.5. Uçuş Planları.....	13
1.6. Uçuş Planlarının Hava Trafikinde Önemi	14
1.7. Rotaların Tespitinde Coğrafi Koordinatlar ve Hesap Yüzeyinin Önemi.....	15
1.8. Küresel Çözüm Yöntemleri	16
1.9. Elipsoidal Jeodezik Temel Problemlerin Çözüm Yöntemleri	20
1.9.1. İteratif Çözüm Yöntemleri.....	20
1.9.1.1. İteratif Yöntemle Direkt Jeodezik Problem Çözümü	30
1.9.1.2. İteratif Yöntemle Ters Jeodezik Problem Çözümü	32
1.9.1.2.1. Geliştirilmiş İteratif Yöntemle Ters Jeodezik Problem Çözümü	35
1.9.2. İteratif Olmayan Çözüm Yöntemleri	37
1.9.2.1. İteratif Olmayan Yöntemle Direkt Jeodezik Problem Çözümü.....	37
1.9.2.2. İteratif Olmayan Yöntemle Ters Jeodezik Problem Çözümü.....	42
1.9.3. Sayısal İntegrasyon Yaklaşımıyla Jeodezik Problem Çözümü	46
1.9.4. Çalışmada Kullanılan Yöntemlerin Matematiksel Formülasyonu	48
1.9.4.1. Bessel Çözüm Yöntemi	48
1.9.4.2. Sjöberg Çözüm Yöntemi	52

1.9.4.3.	Karney Çözüm Yöntemi	58
1.10.	Jeodezik Eğrinin Kirişlere Ayrılması Yöntemi	62
1.11.	Tseng Büyük Eliptik Yay Çözüm Yöntemi.....	65
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	69
2.1.	Çalışma Alanı	69
2.2.	Uygulamada Teknik Verilerinden Yararlanılan Uçağın Özellikleri.....	70
2.3.	Uçuş Güzergahı Ara Noktaların (Waypoints) Belirlenmesi	71
2.4.	Küresel Jeodezik Temel Problem Yöntemlerinin Karşılaştırılması	74
2.5.	Elipsoidal Jeodezik Temel Problem Yöntemlerinin Karşılaştırılması.....	77
2.6.	Analiz ve Görselleştirme	90
3.	BULGULAR VE İRDELEME	93
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	110
5.	KAYNAKLAR	113
ÖZGEÇMİŞ		

Doktora Tezi

ÖZET

TÜRKİYE ULUSAL UÇUŞ ROTALARI İÇİN JEODEZİK YÖNTEMLERLE EN KISA GÜZERGÂH ANALİZİ

Oğuzhan KAHYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Harita Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Faruk YILDIRIM
2019, 129 Sayfa

Jeodezik uygulamalarda, elipsoit üzerinde direkt ve ters jeodezik problemler önemli bir yer tutmuştur ve bu problemlerin çözümündeki hesaplama güçlükleri nedeniyle jeodeziciler ve matematikçiler sürekli yeni çözüm yöntemleri geliştirme çabasında olmuşlardır. Bu tez çalışmasında; hava seyrüseferinde kullanılan uçuş rotalarının, jeodezi ve kartografya disiplinlerinin sunduğu farklı yaklaşımlarla hesaplanan en kısa yolların küre ve elipsoit üzerinde karşılaştırılması amaçlanmıştır. Bu amaçla, uçuş mesafeleri 400-1400 km arasında değişen 17 uçuş güzergâhı alınarak incelenmiştir. Seçilen beş yöntemle elipsoidal jeodezik temel problem çözümü yapılmış ve doğruluk yönünden bu yöntemler karşılaştırılarak en uygun yöntem seçilmiştir. Aynı zamanda uçuş güzergâhını oluşturan ara noktalar arasındaki mesafelerin toplamından güzergâh uzunluğu hesaplanmıştır. Ayrıca büyük eliptik yayı üzerinde güzergâh uzunluğu hesaplanmıştır. Sonuçlar irdelendiğinde; jeodezik eğriye göre mesafe, gauss kürede maksimum % 0,19, otalik kürede ise maksimum % 0,03 ve diğerlerinde ise maksimum % 0,26 oranında değişmektedir. Uçuş güzergâhı ile jeodezik eğri karşılaştırıldığında, elipsoid yüzeyinde % 3,91 ile % 25,68, üç boyutlu uzayda ise % 4,08 ile % 26,05 arasında değişen oranlarda mesafe artışları saptanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Direkt ve ters jeodezik problem, Hava trafiği, Uçuş rotaları, En kısa yol, Jeodezik eğri, Büyük eliptik yayı

PhD. Thesis

SUMMARY

THE SHORTEST ROUTE ANALYSIS WITH GEODESIC METHODS FOR TURKEY'S NATIONAL FLIGHT ROUTES

Oğuzhan KAHYA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Geomatics Engineering Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Faruk YILDIRIM
2019, 129 Pages

The direct and inverse problems of the geodesic on an ellipsoid are fundamental geodetic operations and because of the computational difficulties in solving both geodetic problems, geodeticists and mathematicians have been constantly striving to develop new solutions. In this thesis, it is also aimed to compare flight routes on sphere and ellipsoid used in air traffic with the shortest routes calculated using different approaches provided by geodesy and cartography disciplines. For this purpose, 17 flight routes with flight distances ranging from 400 to 1400 km were investigated. The ellipsoidal geodetic problem solution has made with five selected methods and the most appropriate method was selected by comparing the methods in terms of accuracy. By the way, the length of the flight route calculated from the sum of the distances between the route's intermediate points. The length of the flight route has calculated on the great elliptical arc. When the results were analysed; according to geodesic curve, the distance was varied maximum 0.19% on gauss sphere, maximum 0.03% on authalic sphere and 0.26% in the others. When the flight route was compared to the geodesic curve, the distance increments has been determined at varying rates from 3.91% and 25.68% (median 6.7%) on ellipsoid surface and 4.08% to 26.05% (median 6.9%) in the three-dimensional space.

Key Words: Direct and inverse geodesic problem, Air traffic, Flight route, Shortest route, Geodesic curve, Great elliptical arc

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.	Küre ve Elipsoit üzerinde yapılan işlem akışı 12
Şekil 2.	Uçuş planı örneği 14
Şekil 3.	Küre jeosantrik koordinat sistemi 19
Şekil 4.	Yardımcı küre üzerinde kutupsal üçgen 21
Şekil 5.	Elipsoit ve küre üzerindeki diferansiyel şekiller 22
Şekil 6.	Yardımcı küresel üçgen geometrisi 24
Şekil 7.	Boylamın belirlenmesi için gerekli yardımcı küresel üçgen 27
Şekil 8.	Boylamın belirlenmesi için kullanılan diferansiyel üçgen 28
Şekil 9.	Ters jeodezik problemin çözümünde kullanılan yardımcı küre 33
Şekil 10.	Yardımcı küre üzerinde küresel üçgenler 49
Şekil 11.	NAB Elipsoidal üçgen 59
Şekil 12.	Yardımcı küre ile eşleştirilmiş temel elipsoidal üçgen 59
Şekil 13.	Elipsoidal kartezyen koordinatlar 62
Şekil 14.	Düşey yükseklik ilişkileri 64
Şekil 15.	Elipsoitte büyük eliptik yayı 66
Şekil 16.	Türkiye'deki havalimanları 69
Şekil 17.	Uygulamada teknik verilerinden yararlanılan A319neo uçağı 70
Şekil 18.	Kiriş boyu ile uçuş güzergâhı arasındaki farkın grafiksel gösterimi 73
Şekil 19.	Küre üzerinde çözüm yöntemlerinin grafiksel olarak karşılaştırılması 76
Şekil 20.	yöntem_küre_1 ve yöntem_küre_2'den hesaplanan güzergâh uzunluklarının yöntem_küre_3'ten bulunan güzergâh uzunluklarına göre değişim oranının grafiksel gösterimi 77
Şekil 21.	dS mesafe doğruluğuna göre yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması 81
Şekil 22.	dA1 azimut doğruluğuna göre yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması 81
Şekil 23.	dA2 azimut doğruluğuna göre yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması 82
Şekil 24.	İşlem zamanına göre yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması 83
Şekil 25.	dB=0° için yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması 84

Şekil 26.	$dL=0^\circ$ için yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması	85
Şekil 27.	$B2=90^\circ$ için yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması.....	86
Şekil 28.	$B1=B2=0^\circ$ için yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması	88
Şekil 29.	Yöntem_elipsoit_1, yöntem_elipsoit_2 ve yöntem_elipsoit_3 sonuçlarının grafiksel olarak karşılaştırılması.....	90
Şekil 30.	Güzergâh noktaları ve jeodezik eğriye dik inilmiş noktalar	91
Şekil 31.	SID örneği (İstanbul Atatürk havalimanı için).....	93
Şekil 32.	STAR örneği (Trabzon havalimanı için).....	94
Şekil 33.	İstanbul ile Adana arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	100
Şekil 34.	İstanbul ile Antalya arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	101
Şekil 35.	İstanbul ile Gaziantep arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	101
Şekil 36.	İstanbul ile Konya arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	102
Şekil 37.	İstanbul ile Kayseri arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	102
Şekil 38.	İstanbul ile Ordu/Giresun havalimanı arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	103
Şekil 39.	İstanbul ile Diyarbakır arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	103
Şekil 40.	İstanbul ile Erzurum arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü.....	104
Şekil 41.	İstanbul ile Kars arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	105
Şekil 42.	İstanbul ile Trabzon arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	105
Şekil 43.	İstanbul ile Van arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	106
Şekil 44.	İstanbul ile Ağrı arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	106
Şekil 45.	İstanbul ile Mardin arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	107
Şekil 46.	İstanbul ile Şanlıurfa arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	107
Şekil 47.	İstanbul ile Iğdır arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	108
Şekil 48.	İstanbul ile Hakkari arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü.....	108
Şekil 49.	İstanbul ile Samsun arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü	109

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1.	Havalimanlarının konum (WGS84 referans elipsoidinde) ve tanımlama bilgileri.....	70
Tablo 2.	A319neo teknik özellikleri	71
Tablo 3.	A319neo performans verisi	71
Tablo 4.	İstanbul-Adana arası tesis edilen ara noktalara ait konum ve mesafe değerleri	72
Tablo 5.	Küre üzerinde jeodezik problem çözüm yöntemlerinin karşılaştırılması.....	75
Tablo 6.	Elipsoit üzerinde jeodezik temel problem çözüm yöntemlerinin karşılaştırılması ($B1=42^\circ$; $L1=27^\circ$; $A1=135^\circ$)	78
Tablo 7.	Yöntemlerin işlem zamanlarına göre karşılaştırılması	82
Tablo 8.	$\delta B=0^\circ$ için yöntemlerin karşılaştırılması	84
Tablo 9.	$\delta L=0^\circ$ için yöntemlerin karşılaştırılması	85
Tablo 10.	$B2=90^\circ$ için yöntemlerin karşılaştırılması	86
Tablo 11.	$B1=B2=0^\circ$ için yöntemlerin karşılaştırılması	87
Tablo 12.	Elipsoit üzerinde uçuş mesafesine göre yöntem_elipsoit_1, yöntem_elipsoit_2 ve yöntem_elipsoit_3'den elde edilen sonuçların karşılaştırılması	89
Tablo 13.	Çalışmada kullanılan SID ve STAR verileri	94
Tablo 14.	Farklı yöntemlerle hesaplanan uçuş rotası mesafeleri ve ortalama dik sapma mesafeleri	95
Tablo 15.	Küre ve elipsoit üzerinde giriş boyu toplamalarının karşılaştırılması.....	98
Tablo 16.	Küre ile elipsoit üzerindeki giriş boyu toplamaları arasındaki farka göre tek yön ve gidiş-dönüş için ortalama yakıt tüketimi	98
Tablo 17.	Uzun mesafe uçuş güzergâhı için örnek hesaplama	99

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

a, b	Elipsoit yarı eksenleri
A	Elipsoidal jeodezik azimut
B, L	Elipsoidal jeodezik enlem ve boylam
α	Küresel azimut
β	İndirgenmiş enlem (yardımcı küre üzerindeki enlem)
β_0	İndirgenmiş enlem (jeodezik eğrinin en büyük değere ulaştığı noktanın)
c	Elipsoit kutup eğrilik yarıçapı ($c=a^2/b$)
e^2	Elipsoit birinci eksantrisite
e'^2	Elipsoit ikinci eksantrisite
f	Elipsoit basıklığı ($f=a-b/a$)
φ, λ	Küresel enlem ve boylam
M, N	Elipsoit eğrilik yarıçapları
ψ	Jeosantrik açı
q	İzometrik enlem (elipsoit üzerinde)
σ	Büyük daire yayı uzunluğu (yardımcı küre üzerinde)
σ_m	Küre üzerinde ekvator ile büyük daire yayının orta noktası arasındaki açısal uzunluk
s	Jeodezik eğri uzunluğu (elipsoit üzerinde)
AIP	Aeronautical Information Publications (Havacılık Bilgi Yayınları)
ATC	Air Traffic Controller (Hava Trafik Kontrolörü)
ATM	Air Traffic Management (Hava Trafik Yönetimi)
ATS	Air Traffic Service (Hava Trafik Hizmeti)
ATSB	Australian Transportation Safety Bureau
CFIT	Kontrollü Uçuşta Yere Çarpma (Controlled Flight Into Terrain)
CSV	Virgülle Ayrılmış Değerler (Comma-Separated Values)
DME	Distance Measurement Equipment (Mesafe Ölçüm Cihazı)
EGM	Earth Gravitational Model (Dünyanın Yerçekimi Modeli)
ETOPS	Extended-range Twin-engine Operation Performance Standards
GC	Great Circle (Büyük Daire)

GE	Great Ellipse (Büyük Elips)
IATA	Uluslararası Hava Taşımacılığı Birliği (International Air Transport Association)
ICAO	Uluslararası Sivil Havacılık Örgütü (International Civil Aviation Organization)
IERS	The International Earth Rotation and Reference Systems Service
IFR	Aletli Uçuş Kuralları (Instrument Flight Rules)
ITRS	The International Terrestrial Reference System (Uluslararası Yersel Referans Sistemi)
KML	Anahtar Deliği Biçimlendirme Dili (Keyhole Markup Language)
MSL	Ortalama Deniz Seviyesi (Mean Sea Level)
NDB	Yön Bilgisi Vermeyen Verici İstasyonu (Non-directional beacon)
PANS-ATM	Procedures for Navigation Services - Air Traffic Management
PANS-OPS	Procedures For Air Navigation Services - Aircraft Operations
RNAV	Area Navigation (Saha Seyrüseferi)
SID	Standard Instrument Departure (Standart Aletli Kalkış Yolu)
STAR	Standard Instrument Arrival (Standart Aletli İniş Yolu)
VFR	Görsel Uçuş Kuralları (Visual Flight Rules)
VOR	VHF Omni-directional Radio Range
WGS84	The World Geodetic System 1984

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Jeodezinin temel amaçlarından biri, elipsoit yüzeyindeki nokta konumlarına ilişkin coğrafi koordinatların belirlenmesidir. Bir noktanın coğrafi koordinatları ile jeodezik eğrinin bu noktadaki azimutu ve yay uzunluğu biliniyorsa, jeodezik eğriyi sınırlandıran ikinci noktanın koordinatlarının belirlenmesi ‘direkt problemi (birinci temel problemi)’; her iki noktanın da koordinatları biliniyorsa aralarındaki jeodezik eğrinin uzunluğu ve bu noktalarındaki azimutlarının belirlenmesi ‘ters problemi (ikinci temel problemi)’ ifade etmektedir.

Elipsoit üzerinde jeodezik temel problemlerin çözümü konusunda ilgili literatürde değişik hesap algoritmaları ve yöntemlerden hareket eden çok sayıda çözüm yolu vardır. Söz konusu çözüm yöntemlerine genel olarak bakıldığında, hesap algoritmalarının formül yapısı ve kullanılan bilgisayarın kapasitesi sonucu etkilemektedir (Kaya, 1984).

Elipsoit yüzeyinde temel problem çözümleri dört grupta toplanabilir (Demirel ve Üstün 2013; Grossman, 1976):

- a) Jeodezik eğrinin diferansiyel denklemleri ile elde edilen Legendre serilerine dayanan yöntemler: Bu kapsamdaki seriler çabuk yakınsamadığından hesaplama güçlükleri söz konusudur. Serilerde kısaltılmalar yapılarak hesaplama daha elverişli seriler elde edilmiştir. Bunların en çok bilinenleri Screiber’in birinci temel problem çözümü ve Gauss Ortalama Enlem Yöntemi’dir. Ancak bu yöntemler büyük mesafeler için sonuç vermez.
- b) Jeodezik eğriyi oluşturan noktalar ve kutbun oluşturduğu elipsoidal üçgen ile küresel üçgen arasındaki ilişkiden yararlanılan yöntemler: Bu yaklaşım büyük mesafeler için geliştirilmiş olup, en yaygın kullanılanı Vincenty yöntemiştir.
- c) Elipsoidin düzleme ya da küreye izdüşümü yapıp, hesaplama bu yüzeylerde yapılır. Daha sonra elipsoide ters izdüşümü ile çözüm elde edilebilir. Bu grup içinde uygulamada en çok kullanılan, Gauss-Krüger projeksiyonunda indirgeme bağıntıları ile yapılan çözümdür.

Bazı çözümlerde jeodezik eğri yerine kiriş, normal kesit yayı, loksodrom ya da uç noktalarındaki azimutları bu noktalardan geçen normal kesit eğrisinin azimutlarına eşit olan eğriler kullanılır.

Yapılan bilimsel çalışmalar incelendiğinde, yerküre için değişik şekil yaklaşımları kullanıldığı görülmektedir. Bu yaklaşımlar dört grupta özetlenebilir (Daidzic, 2017):

- a) Eşdeğer yoğunlukta idealleştirilmiş küresel yerküre
- b) Yerkürenin kendi eksenini etrafında dönmesinden elde edilen, düzgün ve kutuplardan basık olan referans elipsoit (WGS84, GRS80 vb.)
- c) Ortalama deniz seviyesine (MSL) yakın jeoit veya özel eş potansiyel yüzey
- d) Tüm yersel ayrıntıları içeren gerçek ve fiziksel yerküre yüzeyi

Yerkürenin kutup yarıçapı, ekvatorial yarıçapından 21 km daha kısa olduğu için yeryüzü bir küre olarak düşünülebilir (Tikhonov ve Samarskii, 1990).

Jeodezik çalışmalarda hesap yüzeyi olarak elipsoit yerine kürenin kullanılması doğruluktan bir miktar ödün vermekle beraber hesaplamalarda büyük kolaylık sağlar. Jeodezik çalışma yapılan bölgenin büyüklüğüne ve istenen doğruluk derecesine göre elipsoidin tamamı yerine bir küre alınabileceği gibi biraz daha fazla doğruluk için elipsoidin küçük parçaları yerine de bir küre hesap yüzeyi olarak alınabilir. Burada seçilecek kürenin elipsoide göre konumu ve yarıçapı önemlidir. Bu konuda iki farklı yaklaşım vardır (Özbenli, 1991):

- a) Birinci yaklaşımda, elipsoidin merkezi ile kürenin merkezi çakıştırılır ve elipsoidin tamamı yerine küre kullanılır, ancak bu şekilde duyarlık düşük olur ve jeodezik amaçlı çalışmalarda kullanılamaz.
- b) İkinci yaklaşımda, sınırlı bir bölgede (yarıçapı 150 km'den küçük) yapılacak jeodezik çalışmalar için sadece o bölgede elipsoide en iyi uyan küre alınır. Bu durumda küre ile elipsoidin merkezlerinin çakışması düşünülemez. Ölçü bölgesinin ortasında her iki yüzeyin en az bir ortak noktasının olması, eğriliklerin eşit olması ve bu noktadaki yüzey normallerinin çakışması yeterlidir. Jeodezik uygulamalarda sınırlı çalışma bölgeleri için genellikle Gauss küreleri kullanılmaktadır.

Sınırlı büyüklükteki çalışma bölgelerinde, Gauss küresinde yapılan hesaplamalarla elipsoit yüzeyinde aynı sonuçların elde edilebilmesi kürede yapılan jeodezik hesaplamaları daha da önemli kılmaktadır (Aksoy ve Güneş, 1990; Bektaş, 2001).

Elipsoidin merkezi ile kürenin merkezinin çakışması ön koşuluyla elipsoit yerine alınacak kürenin yarıçapının belirlenmesi farklı kabullere göre yapılabilir. Bunlar; yarıçapı elipsoit yarıçaplarının ortalaması olan küre, alanı elipsoidin alanına eşit olan küre, hacmi elipsoidin hacmine eşit olan küre ve elipsoitle arasındaki mesafelerin karelerinin toplamı minimum olan küre olarak özetlenebilir (Özbenli, 1991).

Elipsoidin tamamı yerine alınacak küre bazı enlemlerde elipsoide çok yakın (hatta teğet) olduğu halde bazı enlemlerde de elipsoitten büyük ölçüde uzaklaşır. Jeodezik uygulamalarda elipsoidin küçük parçaları yerine Soldner ve Gauss küreleri kullanılmaktadır. Soldner küresinde, çalışma bölgesinin ortasında olan bir noktadaki ana eğrilik yarıçapı kürenin yarıçapı olarak alınır. Bu durumda küre, başlangıç noktasından geçen paralel daire boyunca elipsoide teğet olur. Soldner küresi bu paralel daire dışında hiçbir noktada elipsoidi kesmez ve teğet olmaz, elipsoidi tamamen içine alır. Gauss küresi ise ölçü bölgesinin ortasındaki bir noktada elipsoitle ortak bir noktaya sahiptir ve bu noktada her iki yüzeyin normalleri çakışır (Kaya, 1999).

Yeryüzünün belli bir bölgesinde yapılacak jeodezik hesaplamalarda elipsoit yerine o bölge için hesaplanacak Gauss küresi kullanılır. Gauss küresi ile elipsoit, çalışma bölgesinin ortasında bulunan bir noktada birbirine yüzeysel teğettir. Gauss küresi ile elipsoit teğet noktada aynı eğriliğe sahip olup, çalışma bölgesinde elipsoit yüzeyi ile çok iyi uyum sağlar. Çalışma yapılacak bölgenin 150 km yarıçaplı bir daireden büyük olmaması halinde çalışma bölgesinin ortasındaki bir noktanın coğrafi enlemiyle hesaplanacak Gauss küresi hesap yüzeyi olarak alınabilir. Elipsoit yerine Gauss küresinin alınması nedeniyle hesaplamalarda ortaya çıkacak farklar ($<1\text{cm}$) pratik olarak ihmal edilecek düzeydedir (Aksoy ve Güneş, 1990; Bektaş, 2001).

Kürede jeodezik hesaplamalar için ölçülerin (yatay doğrultu, yatay uzunluk gibi) küre yüzeyinde verilmesi gerekir. Gerçekte ölçüler fiziksel yeryüzünde yapıldığı için ölçülerin küre yüzeyine indirgenmesi gerekmektedir. Fiziksel yeryüzünde ölçülen doğrultulardan hesaplanan açılar, çekül sapmaları göz ardı edildiğinde küre yüzeyindeymiş gibi alınabilir (Aksoy ve Güneş, 1990).

Bilindiği üzere küre yüzeyinin bütün normalleri kürenin merkezinde kesişir ve küre yüzeyinin her noktasında her doğrultuda eğrilik sabittir. Küre yüzeyi üzerinde iki noktayı tek anlamlı olarak birleştiren ve aynı zamanda en kısa uzaklık “büyük daire yayı (ortodrom eğrisi)” dır. Bu nedenle küre yüzeyindeki jeodezik amaçlı hesaplamalarda noktalar hep büyük daire yayları ile birleştirilir (Özbenli, 1991).

Küre yüzeyinde hesaplamalarda küresel üçgen ve küresel trigonometriden yararlanılır. Kenar uzunlukları maksimum 50 km olan küresel üçgenlerin çözümü için yeterli doğruluk verebilecek Legendre ve Additament (ekleme) olarak adlandırılan iki yöntem geliştirilmiştir. Legendre yönteminde küresel üçgenin açıları eksenin üçte biri kadar küçültülür ve küçük küresel üçgenler eşit kenarlı düzlem üçgenler gibi çözülür. Additament (ekleme) yönteminde ise, küresel üçgenin (s) kenarları $s^3/6R^2$ kadar küçültülüp elde edilen kenarlar ve küresel üçgenin açıları kullanılarak düzlem trigonometri formülleriyle çözüm yapılır. Bu yöntemde açıları küresel üçgenin açılarna eşit, kenarları yukarıdaki kurala göre kısaltılmış yardımcı düzlem üçgen kullanılarak çözüm yapılmaktadır (Bektaş, 2004).

Küre yüzeyinde jeodezik hesaplamalar farklı koordinat sistemlerinde (örneğin coğrafi koordinatlarla) yapılabilmeyle beraber jeodezide kürenin elipsoit yerine kullanıldığı düşünülürse, küresel jeodezik dik koordinatlarla çalışmak uygundur. Fakat coğrafi koordinatların tanımında esas alınan yüzey normalleri, küre ve elipsoitte çakışmadıklarından dolayı coğrafi koordinatlarla hesaplamalarda elipsoit yerine küre kullanılması doğru sonuçlar vermez. Coğrafi koordinatların kullanılması durumunda küre ile elipsoidin eğriliklerinin farklı oluşu koordinat hesaplarını doğrudan etkiler. Örneğin küre üzerinde eğrilik her noktada ve her doğrultuda sabittir. Oysa elipsoit üzerinde eğrilik enleme bağlı olarak her noktada ve her doğrultuda değişmektedir. Bu nedenle, küre üzerinde jeodezik amaçlı hesaplamalar için eğriliğe direkt bağlı olmayan küresel jeodezik dik koordinatlarla çalışmak uygundur. Küresel jeodezik dik koordinatlardan Soldner koordinat sistemi jeodezi uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır (Bektaş, 2001).

Coğrafi koordinatlarla jeodezik hesaplamalarda duyarlık sorunu da bir dar boğaz oluşturmaktadır. Coğrafi koordinatlardaki 1 saniyelik değişim yer küre üzerinde yaklaşık 30 m' ye tekabül etmektedir. Bu durumda, bir noktanın coğrafi koordinatlarından 1cm konum doğruluğu elde edebilmek için ekvatora yakın bölgelerde dahi enlem ve boylamın 0,0003" incelikte hesaplanması gereği vardır. Ayrıca coğrafi koordinatların açı birimli oluşu pratikte kullanımlarını engellemektedir. Jeodezik dik koordinatların pratikte daha anlaşılır metrik sistemde oluşu nedeniyle bu koordinatların kullanımı tercih edilmektedir (Bektaş, 2001).

Yerküre, kutuplarda biraz düzleştiği ve ekvatorunda biraz yükseldiği için jeodezide kullanılan yerkürenin şekline en yakın olan geometrik şekil bir dönel elipsoittir. Dönel

elipsoit, elipsoidin küçük eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen bir şekil ve referans yüzeyidir. (Bowditch, 1981; Chou, 1999).

Yerkürenin şeklini tanımlayan dönelel elipsoit, referans elipsoidi olarak adlandırılır. Yerküre tam bir küre olmadığı için büyük dairenin yerini büyük elips (GE) almakta ve yerküre için elipsoit modelin kullanımı, jeodezik eğrinin belirlenmesinde daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesine imkân tanımaktadır. Geleneksel seyrüseferde, hesaplamalar küresel yerküre modelinin kullanımı ile basitleştirilmiştir. (Sjöberg, 2012). Jeodezik hesaplamalar için çok sayıda iteratif işlem gerekmektedir. Büyük elipsin kullanımı ile bu işlem sayısı azaltılabilir ve en kısa mesafenin bulunması için iyi bir yaklaşım sunmuş olur (Walwyn, 1999).

Clairaut (1735) ve Bessel (1825)'in sunduğu çalışmalardan itibaren, elipsoit üzerinde jeodezik problemlerin çözümü çok sayıda haritacının dikkatini çekmiştir. Uzak çağına gelindiğinde, elipsoidal çözümlerin önemi azalsa da jeodezik problemler halen dikkat çekici özelliğini korumaktadır.

Jeodezik problemlere ait klasik çözümler, çoğunlukla elipsoidal eksantrisitenin kuvvet serileri formundadır. Bu teknikten aynı zamanda kapalı bir poligonun alanını bulmada da yararlanılmaktadır (Sjöberg, 2006a). Günümüzde, Rainsford'un çözüm yönteminde verilen serileri temel alan Vincenty'nin yaklaşık çözümü direkt ve ters jeodezik problemlerin çözümünde en çok tercih edilen yöntemdir (Vincenty, 1975). Diğer taraftan, teknolojinin ilerlemesine bağlı olarak bilgisayar kapasitelerindeki artışla birlikte sayısal integrasyon kullanan yöntemlerden faydalanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemlere öncülük eden araştırmacılardan biri olan Kivioja, jeodezik iki temel diferansiyel denklemin basit sayısal integrasyonlarını kullanarak direkt jeodezik problemi çözmüştür (Kivioja, 1971). Heck, Klotz ve Schmidt gibi araştırmacılar da bu alanda bazı katkılarda bulunmuşlar, fakat seri açılımlarına bağlı kalmışlardır (Heck, 1987; Klotz, 1991; Schmidt, 1999). Thomas ve Featherstone, Kivioja'nın tekniğini geliştirmişler ve buldukları yöntemle Vincenty'nin yöntemi arasında 18000 km'ye kadar olan mesafelerde dikkate değer bir sayısal uyumun olduğunu ileri sürmüşlerdir. Ancak, Kivioja'nın yöntemi sadece direkt problemi çözdüğü için Vincenty'nin ters problem çözümünü kontrol edememişlerdir (Thomas ve Featherstone, 2005).

Bilakis, Sjöberg direkt ve ters jeodezik problemleri önce küre üzerinde çözüp daha sonra düzeltmeler yaparak elipsoide taşımıştır. Küresel çözümler kapalı formlarda verilmiştir. Elipsoit düzeltmeleri, sayısal integrasyon için gerekli olan birinci

eksantrisitesinin karesinin (e^2), sırasıyla büyüklüklerinin eliptik integralleri şeklindedir. Bu yöntem, jeodezik eğri en yüksek noktaya ulaştığında (maksimum enlem) veya en düşük noktada (minimum enlem) iken uzun mesafeler için uygulanamamaktadır (Sjöberg, 2006a).

Bessel, direkt jeodezik problemin çözümü üzerine yaptığı çalışmasında bu problemle ilgili kendisinden daha önce yapılmış çalışmaların (Clairaut (1735), Euler (1755), du Séjour (1789), Legendre (1806), Oriani (1806), vd.) kısa ve net özetlerini vermiş ve jeodezik problemlerle ilgili sayısal formülasyonu sadeleştirmiştir. Daha sonra mesafe ve boylam integralleri için seriler geliştirerek işlem sonucunun doğruluğunu arttırmak için logaritmik ifade kullanmış ve 1000 km'yi aşan mesafelerde yaklaşık 3 cm doğruluk verebilen tablolar üretmiştir (Bessel, 1825).

McCaw, direkt jeodezik problemi iterasyona gerek duymadan hassas bir doğrulukta çözmüştür. Çalışmasında yardımcı küre (auxiliary sphere) kullanmıştır. Bu kürede, elipsoit üzerindeki B enlemli nokta ile aynı jeodezik enleme sahip nokta kullanılmıştır. Bu benzeşmeden dolayı küre üzerindeki boylam farkı ve azimutlar elipsoittekilerden farklı olurlar (McCaw, 1930).

Rainsford, direkt jeodezik problemin çözümünü McCaw'ın iteratif olmayan yöntemini yeniden biçimlendirerek sunmuştur. Ters jeodezik problemin çözümünde ise elipsoitte uzun mesafelerde hesap yapılabilmesine imkân tanıyan Sodano (1950)'nin iteratif olmayan yöntemini kullanmıştır (Rainsford, 1955).

Sodano, çok uzun mesafelerde ters jeodezik problem için iteratif olmayan hızlı ve kesin bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntemin teorik çıkarımı, Helmert (1880)'in çalışmasında sunduğu klasik formüllerin titiz bir modifikasyonuna dayanır. Helmert'in iteratif yöntemle elde ettiği formüllerin, eksantrisitenin (e) ikinci, dördüncü ve altıncı dereceden kuvvetlerini alarak seri açılımlarını bulmuş ve ihtiyaç duyulan doğruluğa göre kısaltmalar yapmıştır. Yöntemin doğruluğu azimut ve mesafede 10^{-10} radyandır. Eğer eksantrite sırasıyla ikinci ve dördüncü kuvvetlerine kısaltılarak kullanılırsa, doğruluk sırasıyla 10^{-7} ve 10^{-9} olmaktadır (Sodano, 1963).

Saito, sayısal integrasyon yaklaşımı ile jeodezik problemlerin çözümü üzerine yöntem geliştirmiştir. Problemlerin çözümünde uyguladığı yöntemin, seri açılımlarını kullanan yöntemlerle benzer sonuçlar verdiğini gözlemlemiştir (Saito, 1970).

Kivioja, direkt jeodezik problemin çözümü için ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemini uygulayarak, enlem ve boylamın mesafeye göre diferansiyellerini çözmüştür.

Yöntemde ilk olarak iterasyon sayısına (n) karar verilip, iterasyon boyutu $\delta s = s/n$ bulunur (Kivioja, 1971). Milimetre düzeyinde doğruluk elde edebilmek için δs 'in 100-200 m arasında olması, santimetre düzeyinde doğruluk için 1-2 km arasında olması tavsiye edilir. Bu yöntemin birkaç kısıtlaması vardır (Jank ve Kivioja, 1980):

- a) Enlem, maksimum veya minimum değere yaklaştığında yöntem jeodezik eğri boyunca olan tepe veya dip noktalarda uygulanamaz.
- b) Çok uzun mesafelerde uygulanmaz.
- c) Maksimum veya minimum enlem değerleri ile azimut hesaplandığı zaman büyük hatalar ortaya çıkar.
- d) Uzun mesafelerde yeterli doğruluğa ulaşmak için iterasyon sayısı arttığından işlem süresi artar.

Vincenty, Rainsford (1955)'un ters jeodezik problem çözümünde kullandığı formülleri geliştirerek ters jeodezik problemi çözmüştür. Direkt jeodezik problemi ise Rapp (1969)'in yaklaşımından yararlanarak, ters jeodezik problemde kullandığı formülasyonun tersini alıp çözüme gitmiştir. Önerilen çözümlerin sıklığı, eliptik terimleri hesaplamak için iç içe geçmiş denklemlerin kullanımından kaynaklanmakta ve sadece üç trigonometrik fonksiyon (sinüs, kosinüs ve arkatanjan) kullanılmaktadır (Vincenty, 1975).

Bowring, ters jeodezik problemin çözümünde iteratif yaklaşımla Newton-Raphson yöntemini kullanmış ve basit iterasyona göre yaklaşık %20 daha az iterasyon yapılmasına imkân sağlamıştır. Ayrıca Lagrange yöntemi ile geliştirilmiş Newton-Raphson yöntemini karşılaştırmış ve Newton-Raphson yöntemi ile daha doğru sonuçlar elde edildiğini ve programlamada daha kullanışlı olduğunu vurgulamıştır (Bowring, 1983).

Pittman, jeodezik bir nokta ile tepe noktası arasındaki mesafe ve boylam farkını veren eliptik integrallerin değerlendirilmesi için basit yineleme ilişkilerinden oluşan denklemler geliştirmiştir. Bu denklemler ile direkt ve ters jeodezik problemlerin çözümünde mesafe sınırı olmadan milimetrenin altında doğrulukta çözüm elde edilebilir. Pittman yönteminde mesafe sınırı yoktur, yardımcı yüzeyler içermez, rasgele üretilmiş seriler kullanılmaz ve doğruluğu yalnızca kullanılan bilgisayarın kapasitesi ile sınırlandırılmıştır (Pittman, 1986).

Thomas ve Featherstone, Kivioja (1971)'nın çalışmasında kullandığı Runge-Kutta yöntemini dördüncü seviyede uygulayarak, sıradan diferansiyel denklemlerin çözümü için yeni bir formül sunmuşlardır. Bu yöntemin dezavantajı, sadece direkt jeodezik problemlerin çözümüne imkân tanınmasıdır. Çalışmalarından elde ettikleri sonuçları 10

km'den 18000 km'ye kadar olan mesafeler için Vincenty (1975)'nin yöntemi ile karşılaştırıp, jeodezik mesafelerde 0,115 mm ve azimutlarda $5 \cdot 10^{-6}$ saniye farkla yakın sonuçlar elde etmişlerdir (Thomas ve Featherstone, 2005).

Karney, direkt jeodezik problemin çözümünde Helmert (1880)'in iteratif metodunda verdiği formülleri üst seviyeye çıkararak sade bir şekilde sunmuştur. Ters jeodezik problemin çözümünde ise yakınsamayı hızlandırmak için Newton metodunu kullanmış ve yakınsamayı garanti edecek başlangıç değerinin doğru tahmin edilmesini önermiştir (Karney, 2011).

Sjöberg ve Shirazian, elipsoitte jeodezik problemleri sayısal integrasyon yardımıyla çözmüşlerdir. Bu yöntemde çözüm önce küre üzerinde yapılmış, daha sonra sayısal integrasyon yardımıyla küredeki çözüme bir düzeltme ilave edilerek işleme elipsoitte devam edilmiştir. Elde edilen çözümler, Vincenty (1975)'nin iteratif yöntemi ile karşılaştırılmış ve jeodezik mesafede $2 \cdot 10^{-10}$ (~3,1 mm) ile azimutta $4 \cdot 10^{-5}$ saniye farkla 19000 km'ye kadar olan mesafelerde yakınlık sağlanmıştır (Sjöberg ve Shirazian, 2012).

Tseng vd., büyük eliptik yayların hesaplamada getirdiği işlem kolaylığından yararlanarak direkt ve ters jeodezik temel problemlerin çözümü için bir yöntem geliştirmişlerdir. Büyük eliptik yayı ile yeterli doğrulukta direkt ve ters problemlerin çözümü için sferoid üzerinde kompakt formüller verilmiştir. Çalışmasında sunduğu çözüm, azimut için kapalı formda algoritma türevini kapsamaktadır ve aynı zamanda eliptik yaylarla sınırlandırılmış poligonun alanı da bulunmaya çalışmıştır. Ayrıca çalışması, bilgisayar cebir sisteminin navigasyon ve jeodezide matematiksel türevleri çözmek için güçlü bir araç olduğunu göstermektedir (Tseng vd., 2015).

Denizcilik ve havacılıkta önemli bir yer tutan ve küre üzerinde özel eğriler olarak adlandırılan Ortodrom ve Loksodrom eğrileri özellikle iki nokta arasındaki en kısa mesafenin bulunmasında kullanılmaktadır. Ortodrom eğrisi, küre üzerinde coğrafi koordinatlarıyla bilinen iki noktayı birleştiren büyük daire yayıdır. Büyük daire, söz konusu bu iki nokta ile kürenin merkezinden geçen bir düzlemin küreyle arakesitidir. Bu daire üzerindeki iki noktayı birleştiren yaylardan kısa olanı büyük daire yayıdır. Loksodrom eğrisi, coğrafi koordinatlarıyla bilinen iki noktayı birleştiren eğrinin meridyen doğrultularıyla hep sabit bir açı yapmasıyla oluşan daire yayıdır. Eğri üzerinde yer alan her noktanın kuzeyle yaptığı açı değişmediği için eğriye “sabit pusula açısı altında gidilen yol” denir. Loksodrom eğrisi özellikle denizcilikte önemlidir ve gemiler yolculuklarını sabit kuzey açısı altında loksodrom eğrisi üzerinde yaparlar (Aksoy ve Güneş, 1990).

Küresel yerküre yaklaşımının kullanımı, uzun menzilli hava seyrüsefer problemlerinin çoğunda yeterlidir. Özellikle, Ortodrom ve Loksodrom'lar deniz ve hava seyrüseferinde en önemli iki eğri olarak kabul edilmektedir (Dadzic, 2017).

Küresel yerküre modelinde jeodezik eğri, bir büyük daire (GC) veya ortodrom eğrisinin bir parçasıdır. Atmosferik rüzgarlar mesafe-zaman optimizasyon problemlerinde önemli rol oynadığından, büyük daire mesafelerinin zamana göre her zaman en kısa mesafe olması şart değildir. Atmosferik faktörler, uzatılmış operasyonlar (ETOPS) prosedürleri (De Florio, 2016; FAA, 2008), hava sahası kısıtlamaları vs. dikkate alındığında, uçuş yollarının optimizasyonu zor bir görevdir (Daidzic, 2017).

Düzgün elipsoidal yerküre üzerinde jeodezik eğrinin bulunması işlemi yapılabilmesine rağmen, gerçek yerküre yüzeyi üzerinde iki keyfi nokta arasındaki jeodezik eğrinin bulunması tüm arazinin dikey özellikleri göz önüne alındığında pratik olarak mümkün değildir. Uzun yıllardan beri, büyük daire (great circle) teorisi ve sabit pusula açısı altında gidilen yol (rhumb-line) seyrüseferi, hava seyrüsefer çalışanlarına, operatörlere ve havacılık öğrencilerine açık ve kapsamlı olarak sunulmadığı için oluşturulan rota planlamaları basit olarak tasarlanmış hazır programlar üzerinden yapılmıştır (Daidzic, 2017).

Küresel ve elipsoidal yöntemlerin sonuçları arasındaki tutarsızlıklar, Tobler'e göre %0,27 ve Earle'ye göre %0,5 olduğundan geleneksel seyrüseferde pratik amaçlar için küresel modelin kullanımı yeterli kabul edilmektedir (Tobler, 1964; Earle, 2006). Buna rağmen, hava seyrüsefer problemlerinde bu hataların elimine edilebilmesi için hesaplamaların elipsoit üzerinde yapılması gereklidir (Tseng ve Lee, 2010).

Hava trafiğini sağlıklı biçimde yönetebilmek için hava sahalarında etrafı seyrüsefer yardımcı cihazları (VOR, NDB, DME vb.) ile donatılmış, bazıları tek yönlü bazıları ise çift yönlü kullanım amaçlı uçuş koridorları oluşturulmuştur ve uçaklar önceden belirlenmiş bu koridorları kullanırlar. Bu koridorlar boyunca, uçakların hava trafik kontrol birimiyle haberleştiği zorunlu ve zorunlu olmayan rapor noktaları ile RNAV noktalar (waypoints) belirlenmiştir. Uçaklar kalkışlarına müteakip bu güzergâh noktalarından geçerek varış noktasına ulaşırlar ve genellikle bu noktalarda yön, hız veya yükseklik değiştirirler. Her uçuş koridorunun sivil havacılık otoritesi tarafından belirlenmiş minimum irtifa değerleri mevcuttur ve uçaklar bu irtifaların altında uçamazlar. Uçaklar bu minimum irtifaların üzerinde hava trafik kontrolörünün ayırma sağlamak için tahsis ettiği uçuş seviyelerinde uçarlar. Uçakların uçuş öncesi izleyeceği rotalara ilişkin çeşitli bilgiler uçuş planlarında yer

alır ve bu planlar, uçuş öncesi hava trafik kontrol birimine iletildikten sonra uçağın konumunun izlenilmesine başlanır ve hava trafik hizmeti ile gerektiğinde acil durumlar için arama-kurtarma hizmeti verilir. Uçakların uyguladığı standart prosedürler, meteorolojik koşullar ve hava trafiğine bağlı olarak hava trafik kontrol birimi tarafından gerek görülürse değiştirilebilmektedir (FAA, 2011; 2015; 2016).

1.2. Problemin Tanımı

Uçuş rotaları; meteorolojik koşullar, yakıt harcaması, uçuş süresi, mevcut hava trafiği, arazi yükseltileri, hava sahası kısıtlamaları ve hava sahası kullanım ücretleri gibi çeşitli ölçütler dikkate alınarak belirlenir. Bu kapsamda, mümkün olan en az maliyetli yolun izlenmesi önemlidir ve geometrik açıdan bir noktadan diğerine en az maliyetle ulaşmak için en kısa yolun izlenmesi gerekir. En kısa yol, en klasik ve yaygın anlayışla küre üzerinde alınan ortodrom eğrisi (büyük daire yayı) olarak algılanmaktadır. Bununla birlikte, yeryüzünün şekli jeode daha yakın olduğundan daha yüksek doğrulukta hesaplamalar için geometrik olarak dönel elipsoit (sferoid) kabul edilerek çözüme gidilir. Bu nedenle, daha hassas değerlendirmeler için elipsoit üzerinde iki nokta arasındaki en kısa mesafe olan jeodezik eğri uzunluğu kullanılmalıdır.

Uçaklar, referans yüzeyi üzerinde değil belirli bir yükseklikte havada yol aldığından bir uçağın rotasının, referans yüzeylerinin üzerinde değerlendirilmesinin ötesinde konum ve yükseklik olarak üç boyutlu değerlendirilmesi, alacağı yolun çok daha gerçekçi bir biçimde belirlenmesi olanağını sağlar (Başaraner, 2017).

1.3. Tezin Amacı

Yapılan çalışmada, hava seyrüseferinde kullanılan uçuş rotalarının, jeodezi ve kartografya disiplinlerinin sunduğu farklı yaklaşımlar kullanılarak hesaplanan en kısa yollar ile karşılaştırılması amaçlanmıştır. Aynı zamanda, hava seyrüseferinde uçuş güzergahı uzunluğu açısından en kısa mesafenin bulunması amacıyla büyük daire yayı (küresel çözüm), jeodezik eğri (elipsoidal çözüm) ve büyük eliptik yayı (eliptik çözüm) üzerinde hesaplamalar yapılmış, ayrıca bu çözüm yöntemlerinin ayrıntılı matematiksel formülasyonları verilmiştir.

Daha sonra, küre ve elipsoit üzerinde literatürde kabul görmüş yöntemler yardımıyla matematiksel karşılaştırmalar yapılarak kalkış ve varış noktaları arasındaki en kısa yolun belirlenmesinde kullanılabilecek en iyi yöntem belirlenmeye çalışılmıştır. Ayrıca, uçuş rotalarının kullanılan referans yüzeyi üzerindeki en kısa yoldan ne kadar saptığının ve en kısa yol üzerinde gidildiği takdirde mesafelerin ne kadar değişeceğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, bu rotaların üç boyutlu (3B) görselleştirilmesi de ele alınmıştır.

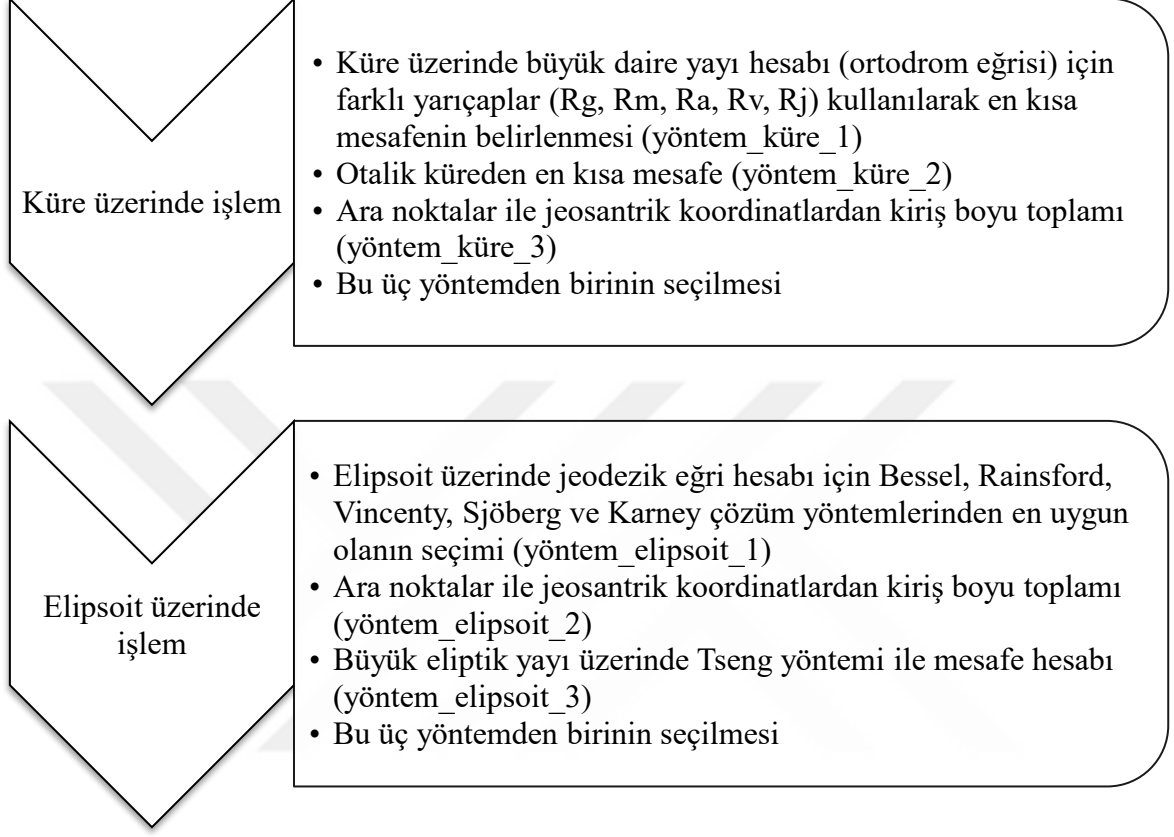
Küresel ve elipsoidal model kullanılarak bulunan mesafe ve açılar arasındaki farklar için eliptiklik hatası terimi kullanılır. Hesaplamalarda dikkate alınması gereken temel kural, bir yolun hesaplanan uzunluğundaki eliptiklik hatasının % 0,3 olmasıdır. Bu kuralın temelinde, yerin basıklığının “ f ” (WGS84 referans elipsoidi için $1/298,257223563$) yaklaşık olarak 0,003353 (% 0,34) olması yatar. Bu değer oldukça küçük olduğundan yerin şekli küre kabul edildiğinde oluşacak navigasyon hataları bu değeri aşamayacağından havacılık ile ilgili pek çok uygulamalar için küresel yaklaşım yeterli olmaktadır. Ancak daha hassas çalışmalarda yerin şekli için elipsoidin kullanımı, jeodezik eğri üzerinde güzergah uzunluklarının belirlenmesinde daha gerçekçi sonuçlar alınmasını sağlayacaktır. Bu amaçla yapılan çalışmada, küre ve elipsoit üzerinde uygulanabilecek çözüm yöntemleri araştırılmış ve hava seyrüseferinde daha hassas sonuçlar elde edilebilmesi için bu yöntemlerin karşılaştırılması yapılarak en uygun yöntem belirlenmeye çalışılmıştır. Ayrıca uygulamada, ayrıntılı matematiksel çıkarımlardan elde edilen sonuçlar verilmeye çalışılmıştır. Aynı zamanda büyük daire yayı, jeodezik eğri ve büyük eliptik yayı üzerinde uçuş güzergâhlarının uzunlukları hesaplanarak kıyaslama yapılmıştır.

1.4. Metodoloji

Yapılan çalışmada, elipsoit yüzeyinde jeodezik temel problem çözümünde uygulanan yöntemlerin hava seyrüseferinde kullanılabilirliği test edilmiş ve çalışmada elde edilen sonuçların, havacılıkta küre yüzeyinde yapılan hesaplama yöntemlerine kıyasla değişimin ne olacağı konusunda bir inceleme yapılmıştır. Aynı zamanda Matlab R2016b yazılımı kullanılarak çalışmada kullanılan her bir sayısal yöntemin programları yapılmıştır.

Çalışma iki aşamada gerçekleştirilmiştir (Şekil 1). İlk aşamada; küre üzerinde işlem gerçekleştirilmiş ve üç yöntem (yöntem_küre_1, yöntem_küre_2 ve yöntem_küre_3) belirlenip, mesafe açısından en iyi sonuç veren yöntem belirlenmiştir. yöntem_küre_1’de farklı küre yarıçapları, yöntem_küre_2’de otalık küre ve yöntem_küre_3’de jeosantrik

koordinatlardan kiriş boyu toplamı ile ortodrom eğrisi üzerinde en kısa mesafe bulunmuştur.



Şekil 1. Küre ve Elipsoit üzerinde yapılan işlem akışı

İkinci aşamada; elipsoit üzerinde işlem yapılmış ve küresel çözümdeki gibi üç yöntem (yöntem_elipsoit_1, yöntem_elipsoit_2 ve yöntem_elipsoit_3) belirlenip, mesafe açısından en iyi sonuç veren yöntem belirlenmiştir. yöntem_elipsoit_1’de literatürde elipsoidal çözüm için en çok kullanılan Bessel, Rainsford, Vincenty, Sjöberg ve Karney gibi yöntemler aşağıdaki üç duruma göre değerlendirilmiş ve en hassas sonucu veren yöntem belirlenmiştir.

- a) (B_1, L_1) ve A_1 sabit, s mesafesi değişken alınarak birinci temel problem çözümü ile (B_2, L_2, A_2) değerleri hesaplanmış ve bu değerler ile ikinci temel problem çözümü yapılarak başlangıç noktası ile farklar Δs , ΔA_1 ve ΔA_2 bulunarak yöntemler hassasiyet bakımından karşılaştırılmıştır.

- b) Matlab ile programları yapılan yöntemlerin bilgisayar kapasitesine bağlı olarak işlem zamanları karşılaştırılmıştır.
- c) Jeodezik eğrinin özel durumları için (jeodezik eğri paralel daire üzerinde $\Delta B=0^\circ$, jeodezik eğri meridyen üzerinde $\Delta L=0^\circ$, jeodezik eğri ekvator üzerinde $B_1=B_2=0^\circ$ ve jeodezik eğrinin bir kenarının kutupta olması $B=90^\circ$) yöntemlerin çözüm üretilip üretilmediği test edilmiştir.

yöntem_elipsoit_2’de jeodezik eğri üzerinde jeosantrik koordinatlardan giriş boyu toplamı ve yöntem_elipsoit_3’de ise büyük eliptik yayı üzerinde Tseng yöntemi ile en kısa mesafe belirlenmiştir.

1.5. Uçuş Planları

Havayolu şirketleri her zaman operasyonlarını daha verimli hale getirmenin yollarını ararlar. Yakıt, zaman ve maliyetten tasarruf etmek için havayolu şirketlerinin ihtiyaçlarını karşılayabilecek ölçeklenebilir bir uçuş planlaması yapılmalıdır. Türkiye hava sahası göz önüne alındığında, son zamanlarda yapılan uçuş rotalarının yenilenmesi ve direkt rotaların sayısının artırılması ile uçuş rotalarının optimizasyonu sağlanmıştır. Optimize edilmiş güzergâhlar sayesinde (RNAV yollar, direkt rotalar) yakıt maliyetleri ve overflight (bir ülke hava sahasını direkt geçme) ücretleri azalmıştır. Şirketler tarafından alınan entegre çözümler ve yapılandırılabilir otomatikleştirilmiş iş akışları sayesinde operasyonel verimlilik artırılmıştır (URL-3, 2017).

Uçuş planları, bir pilot veya dispeçer tarafından doldurulup kalkıştan önce yerel Sivil Havacılık Otoritesi’ne (örneğin Briefing Ofis veya Hava Trafik Kontrol Ünitesi) bulunduğu uçağın planlanan rotasını veya uçuş yolunu gösteren belgelerdir (Şekil 15). Uçuş planının biçimi ICAO Doc 4444’te belirtilmiştir. Genellikle; kalkış ve varış noktaları, tahmini uçuş süresi, kötü hava durumunda alternatif havaalanları, uçuş tipi (aletli uçuş kuralları [IFR] veya görsel uçuş kuralları [VFR]), pilotun bilgisi, uçaktaki yolcu sayısı ve uçağın kendisi hakkında (uçak tipi, çağrı adı, türbülans kategorisi vb.) bilgi gibi temel bilgileri içerirler. Çoğu ülkelerde, IFR uçuş kuralına tabi bütün uçuşlarda uçuş planları gereklidir, ancak uluslararası sınırları geçmediği sürece VFR uçuş kuralı ile uçmak için uçuş planı doldurmak isteğe bağlı olabilir (Türkiye de tüm uçuşlar için uçuş planı doldurma zorunluluğu vardır). Uçuş planları, uçuşun süresi geçtiği halde kendisinden haber

alınamayan bir uçak için arama-kurtarma hizmetinin başlatılması için imkân sağlar. Özellikle askeri hava sahalarından geçecek tüm uçakların uçuş planı doldurması gerekmektedir. IFR uçuşlar için uçuş planları, hava trafik kontrolörleri tarafından, takip ve yönlendirme hizmetleri sunmak için kullanılır. VFR uçuşlar için önemi ise, notamlı ve askeri sahalarla girilmesinin önlenmesi ve arama-kurtarma çalışmalarının yapılması için gereken bilgilerin sağlanmasıdır (URL-3, 2017).

```
<SOH> HNT1873 021745
FF LTBADEPX
021745 EUCHZMFP
<STX>
(FPL-THY5JK -IS
-A319/M-SDE1E2E3FGHIJ1LORVWY/LB1
-LTBA2045
-N0450F390 MOPIN UN644 KARDE UL851 ERIDU
-LTCG0120 LTCE
-PBN/A1B1D1O1S1S2 DOF/170302 REG/TCJLZ EET/LTAA0019 SEL/AHEG
CODE/4BAA8D RVR/75 OPR/THY ORGN/LTBATHYW TALT/LTBU RMK/TCAS
EQUIPPED THY2836)
<VT><ETX>
```

Şekil 2. Uçuş planı örneği (URL-3, 2017).

Uçuş planlarının oluşturulması ve sevk edilmesinden sorumlu kişiler olan dispeçerler (uçuş hareket uzmanı), uçak performansını ve yüklemeyi, enroute (yol üzerinde) rüzgarlarını, fırtına ve türbülans tahminlerini, hava sahası kısıtlamalarını ve havaalanı koşullarını dikkate alarak uçuş yollarının planlanmasını sağlar. Ayrıca uçuş boyunca oluşabilecek değişikliklere karşı pilotlara uyarı ve tavsiyelerde bulunur (URL-3, 2017).

1.6. Uçuş Planlarının Hava Trafiğinde Önemi

Uçuş planlarının hava trafiğinde büyük önemi vardır ve özellikle trafıklere etkin hava trafik hizmetinin verilebilmesini sağlar. Ayrıca herhangi bir kaza kırım halinde arama ve kurtarma operasyonunun yürütülmesinde yardımcı bir rol oynar. Uçuş planlaması, bir uçağın tasarlanan uçuşunu tanımlamada geçerli bir uçuş planı üretme sürecidir. Uçuş planlaması güvenlik açısından kritik iki hususu içerir; uçağın güvenli bir şekilde gideceği meydana ulaşmasını sağlamak için yakıt hesaplaması ve havada çarpışma riskini en aza indirmek için hava trafik kontrolü gereksinimlerine uyulmasıdır. Aynı zamanda, uçuş

planlamacıları normal olarak uygun rota, yükseklik ve hız seçimi sayesinde ve uçağa gerekli minimum yakıtı yükleyerek uçuş maliyetini en aza indirmeyi istemektedir. Hava trafik hizmetlerinin yürütülmesinde kontrollü uçaklar arasında gerekli ayırmanın sağlanması ve arama-kurtarma (SAR) operasyonları sırasında kayıp uçağın izlenmesi ve bulunması için eksiksiz bir uçuş planına ihtiyaç vardır (URL-3, 2017).

Uçuş planlamasında doğru hava tahminlerine ihtiyaç vardır. Böylece yakıt tüketimini etkileyen kafa veya kuyruk rüzgârlarının ve hava sıcaklığının hesaba katılması ile doğru yakıt tüketimi hesaplanabilir. Güvenlik mevzuatları ile uçağın kalkışından inişine kadar olan uçuşu ve beklenmedik durumlarda ya da iniş için planlanan meydanın kullanılamaması durumunda başka bir meydana yönlendirilmesi gerektiğinde gerekli olan minimum yakıta ilaveten yakıt taşımasını zorunlu tutmuştur (URL-3, 2017).

Uçuş planlarına temel altlık teşkil eden unsur ise hava sahasının etkin tasarımıdır. Hem terminal hem de enroute hava sahasında rotaların, bekleme paternlerinin, hava sahası yapısının ve ATC sektörünün doğru planlanması ve tasarımı, seviye taşıma hadiselerinin olasılığını azaltmada etkili olabilir. Aynı zamanda bu ifadenin tersi de doğrudur: Kötü tasarlanmış bir hava sahası, hava trafik yönetim (ATM) sistemi içinde seviye taşıma hadisesi olasılığının olabileceği durumlara neden olabilir (ICAO Doc 9157) (ICAO, 2006a).

İdeal bir dünyada hava sahası tasarımı, uçuşların bir diğeri ile kesişmemesi veya birbirlerinin seviyelerine doğru tırmanmasını ve alçalmasını önlemek için inen, kalkan ve enroute uçuşlarının operasyonunu mümkün kılar. Dahası, yaklaşma ve kalkış uçuş yollarında mâniyeler (uçuş için tehlike oluşturabilecek engeller) olmamalıdır. Ne yazık ki, bu "ideal" tasarım ortamı nadiren mümkündür, bu da hava sahası tasarımcılarının sözü geçen koşullardaki seviye taşıma olasılığını azaltmak için adımlar atmaları gerektiği anlamına gelir. Aslında, kötü tasarlanmış hava sahası, ayırma kaybı (uçaklar arasında tesis edilmesi gereken düşey ve yatay mesafeler), seviye taşması ve kontrollü uçuşta yere çarpma (CFIT-Controlled Flight Into Terrain) riskini artırabilir (Doc 9157) (ICAO, 2006a).

Hava sahası ve prosedürü tasarımı, ICAO Doc 8168/ PANS-OPS (ICAO, 2006b) ve Doc 4444/ PANS-ATM'de (ICAO, 2016) belirtilen ilkelere uymalıdır. PANS-OPS; aletli yaklaşma, bekleme ve kalkış prosedürlerinin tasarımı için kriterler sunar. PANS-OPS hükümleri aynı zamanda, mânia limitinin göz önüne alındığı enroute prosedürlerini de kapsar. PANS-ATM, temel ilkeleri hava sahası tasarımının temelini oluşturan hava seyrüsefer hizmetleri için prosedürler sunmaktır (ICAO, 2006b; 2016).

1.7. Rotaların Tespitinde Coğrafi Koordinatlar ve Hesap Yüzeyinin Önemi

Rota, iki havaalanı arasında uçan bir uçağın izlediği yolun tarifidir. Havacılıkta kullanılan koordinatlar WGS84 referans elipsoidi temel alınarak coğrafi koordinatlar (B, L) şeklinde belirtilirler. Ticari uçuşların çoğu bir havaalanından diğerine seyahat eder, ancak özel uçaklar, ticari gezi turları ve askeri uçaklar belli bir bölge üzerinde uçmak suretiyle kalkış yaptıkları meydana tekrar geri dönebilirler. Her havayolu bir ara noktada (waypoint) başlar ve diğerinde biter ve bu iki ara noktası arasında başka ara noktalar da olabilir. Havayolları bir ara noktayı kesebilir veya ara noktayla birleşebilir. Böylece bir uçak bu tür noktalar yardımıyla bir hava yolundan diğerine geçiş yapabilir. Havaalanları arasındaki tüm rota çoğu kez birkaç havayolu kullanır. İki ara noktası arasında uygun bir havayolu bulunmadığında ve havayollarının kullanılması biraz dolambaçlı bir rota ile sonuçlanacaksa, hava trafik kontrolü bir hava yolunu kullanmayan direkt rotaya izin verebilir. Hava trafiğinde uçuş planlamasında kullanılan uçuş rotası türleri aşağıda verilmiştir. Bir uçuş rotası, aşağıdaki gibi farklı uçuş rotası bölümlerinden oluşur (Air Clues, 1952):

a) Havayolu (airway): Havayolu rotası, uçuş yolları olarak adlandırılan önceden tanımlanmış yollar boyunca gerçekleşir. Havayolları, uçaklar için üç boyutlu otoyollar olarak düşünülebilir. Dünyanın çoğu karasal bölgelerinde, uçakların kalkış ve varış havaalanları arasındaki havayollarında uçurmaları gerekmektedir. Havayolu rotasını yöneten kurallar; irtifa, hava hızı ve havayoluna giriş ve çıkış usullerini (SID ve STAR) kapsar. Çoğu havayolu 8 nm (deniz mili) genişliğindedir ve havayolu uçuş seviyeleri, bir uçağın altında ve üstündeki uçuş seviyesinde bulunan uçaklardan en az 1000 ft (feet) düşey mesafeyle ayrılmasını sağlar. Havayolları genellikle, bir havayolundan diğerine geçişine imkân veren noktaları tanımlayan Navaids'te kesişir. Hava yolları, bir veya daha fazla harf ve ardından bir veya daha fazla rakamdan oluşan adlara sahiptir (UL620, W71 vb.).

b) Navaid (Seyrüsefer yardımcı cihazları ile): Navaid rotası, havayollarıyla her zaman bağlı olmayan seyrüsefer yardımcı cihazları (VOR, NDB) arasında gerçekleşir.

c) Direkt rota: Rota segmentinin uç noktalarından birinin veya her ikisinin de bir Navaid'de olmadığı bir enlem-boylamda gerçekleşir. Bazı uçuş planlama organizasyonları, direkt bir rota için sınırlı bir mesafede olan kontrol noktaları oluşturmuş ve kontrol noktaları arasında uçmanın zamanla sınırlı olduğunu belirtmektedir (örneğin, direkt kontrol noktaları, hızlı bir uçak için yavaş olandan daha uzak olabilir).

1.8. Küresel Çözüm Yöntemleri

Günümüzde yeryüzünün şekli genel olarak elipsoit kabul edilmekle beraber, küçük ölçekli harita çalışmalarında ve yeryüzünün elipsoit olarak kabul edilmesini gerektirmeyecek hesaplamalarda küre yüzeyi kullanılmaktadır. Küresel çözüm yöntemlerinde gerekli olan özellik, kullanılabilecek kürenin uygun yarıçapının (R) bulunmasıdır. Uygun yarıçaplar aşağıdaki gibi farklı şekillerde tanımlanabilir (Rapp,1991):

a) Gauss küre yarıçapı (R_G)

Elipsoidin belli bir bölgesi için elipsoide yakınsayan küre olarak düşünülen Gauss küresinin yarıçapı enleme bağlı olarak hesaplanır ve elipsoide belli bir paralel daire boyunca yakınsadığı kabul edilir. Gauss ortalama yarıçapı, 0 ile 360 derece arasında değişen azimut (α) değerine bağlı olarak R_α 'nın integrali alınarak (1) formülü ile tanımlanır:

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_\alpha d\alpha \quad (1)$$

Bu integralin sonucunda R_G ,

$$R_G = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B} \quad (2)$$

olarak elde edilir.

b) Elipsoidin üç yarı ekseninin ortalaması ile bulunan kürenin yarıçapı (R_M)

Global yaklaşımlarda kullanılır. Dönel elipsoitte $a=c$ olacağından yarıçap (3) formülünden,

$$R_M = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}(2a + b) \quad (3)$$

bulunur.

c) Elipsoit ile aynı alana sahip kürenin yarıçapı (R_A)

Elipsoidin alanına eşit alanda oluşturulan küredir ve bu kürenin yarıçapı;

$$R_A = b \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \frac{5}{9}e^8 + \dots\right)}$$

$$R_A = a \left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6 + \dots\right) \quad (4)$$

şeklinde ifade edilir.

d) Elipsoit ile aynı hacme sahip kürenin yarıçapı (R_V)

Kürenin hacmi V_S ve elipsoidin hacmi V_E olmak üzere, $V_S = V_E$ olacağından R_V (7)'deki formülle,

$$V_S = \frac{4}{3}\pi R_V^3 \quad (5)$$

$$V_E = \frac{4}{3}\pi a^2 b \quad (6)$$

$$R_V = \sqrt[3]{a^2 b} \quad (7)$$

elde edilir.

e) Elipsoitle arasındaki mesafelerin karelerinin toplamı minimum olan kürenin yarıçapı (R_J)

Elipsoitte jeosantrik enlemle tanımlanan jeosantrik yarıçapların yüzey integrali yolu ile bütün yüzey üzerinden ortalaması alınarak (8) formülündeki gibi hesaplanabilir.

$$R_J = a \left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{11}{120}e^4 - \frac{103}{1680}e^6 + \dots\right) \quad (8)$$

f) Otalık küre yarıçapı (R_O)

Yüzey alanı elipsoit yüzey alanına eşit olan küre yüzeyine otalık küre denir. Bu tanıma göre her elipsoit tanımı için bir de otalık küre tanımı söz konusu olur. Ayrıca otalık küre, belli bir elipsoit yerine alınabilecek ortalama bir küre olarak da düşünülebilir (Kimerling vd., 2016).

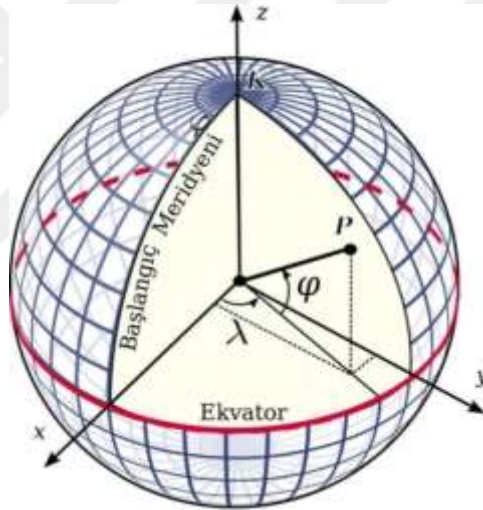
$$R_O = a \sqrt{\frac{q_N}{2}} \quad (9)$$

Burada q_N kutup noktasındaki izometrik enlemdir ve (11) formülünde $\varphi=90^\circ$ alınarak bulunur. Oyalık kürede enlem ise (10) formülü ile hesaplanır. Elipsoitte izometrik enlem ise (11) formülünden bulunur.

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{q}{q_N} \right) \quad (10)$$

$$q = (1 - e^2) \left(\frac{\sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} - \left(\frac{1}{2e} \right) \ln \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right) \right) \quad (11)$$

Kürede yarıçaplar belirlendikten sonra mesafe hesabı için farklı iki yöntem kullanılabilir. Birinci yöntemde küre yüzeyindeki noktaların konumları küre jeosantrik koordinat sistemi ile tanımlanabilir (Bildirici, 2016).



Şekil 3. Küre jeosantrik koordinat sistemi (Bildirici, 2016).

z eksenini yerin dönme eksenini ile çakışık şekilde, x eksenini küre merkezi ile başlangıç meridyeninin ekvatoru kestiği noktadan geçecek şekilde ve y eksenini ise diğer eksenlere dik olacak şekilde seçilmiştir (Şekil 3). Bu sistemde noktaların dik koordinatları ile coğrafi koordinatları arasındaki ilişkiler (12) formülündeki gibi kürenin parametrik denklemleri ile tanımlanır (Bildirici, 2016).

Konumu tanımlanan nokta küre yüzeyinde değil de küre yüzeyinden daha yüksek veya alçak bir konumda bulunuyorsa, noktadan geçen küre yarıçapı boyunca yükseklik de dikkate alınmalıdır. Burada yükseklik değeri olarak ortometrik veya elipsoidal yükseklik tercih edilebilir (Bildirici, 2016).

$$\begin{aligned}
x &= (R + h) \cos \varphi \cos \lambda \\
y &= (R + h) \cos \varphi \sin \lambda \\
z &= (R + h) \sin \varphi
\end{aligned} \tag{12}$$

Jeosantrik koordinatlardan üç boyutlu yol uzunluğu σ , (13) formülünden hesaplanır. Burada n güzergâh noktası sayısını, i herhangi bir güzergâh noktasını ve Δ koordinat farkını ifade etmektedir (Bossler ve Snay, 2010):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Delta X_{i,i+1}^2 + \Delta Y_{i,i+1}^2 + \Delta Z_{i,i+1}^2} \tag{13}$$

İkinci yöntemde küresel coğrafi koordinatlar kullanılarak büyük daire yayı (ortodrom eğrisi) üzerindeki en kısa yol uzunluğu, küresel üçgende kenar kosinüs bağıntısı ile (14) formülünden hesaplanabilir (Synder, 1987; Koçak, 1999; Uçar vd., 2011):

$$\sigma_{12} = R \cos^{-1}(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)) \tag{14}$$

(13) ve (14) formüllerinde, yukarıda bahsedilen farklı küre yarıçapları (R_G , R_M , R_A , R_V , R_J , R_O) kullanılıp, karşılaştırılarak küre üzerinde en kısa güzergâh uzunluğu tespit edilebilir. Otalık küre yarıçapı kullanıldığında izometrik enlem dikkate alınarak (15) formülünden en kısa güzergah uzunluğu belirlenir.

$$\sigma_{12} = R_O \cos^{-1}(\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)) \tag{15}$$

1.9. Elipsoidale Jeodezik Temel Problemlerin Çözüm Yöntemleri

Jeodezik temel problemlerin çözümünde genellikle küre ile elipsoit arasındaki ilişki dikkate alınarak hesaplama yapılmaktadır. Temel kural, yardımcı yüzey olarak kürenin kullanılması ve daha sonra elipsoitle ilişkilendirilmesidir. Elipsoit ile küre arasındaki diferansiyel ilişkileri gösteren ifadeler, Rapp (1993)'in "Geometric Geodesy-Part II" adlı çalışmasından yararlanılarak verilmiştir. Jeodezik problem çözüm yöntemleri; iteratif yöntemler, iteratif olmayan yöntemler ve sayısal integrasyon yaklaşımı ile çözüm yöntemleri olarak üç bölümde incelenmiştir.

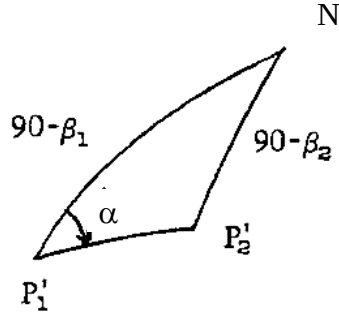
1.9.1. İteratif Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde, elipsoit üzerinde jeodezik temel problemlerinin çözümünde kullanılan iteratif çözüm yöntemlerine ait matematiksel formülasyonlar sunulmuştur. Aynı zamanda literatürde bu konuda çalışmış önemli araştırmacıların çalışmalarına da yer verilmiştir.

Elipsoit üzerinde jeodezik eğrinin temel özelliği Clairaut'un aşağıdaki denkleminde ifade edilmektedir:

$$\cos \beta_1 \sin A_1 = \cos \beta_2 \sin A_2 = \cos \beta_i \sin A_i = \cos \beta_0 \quad (16)$$

Burada, β jeodezik eğri üzerinde herhangi bir noktanın indirgenmiş enlemi ve A ise jeodezik azimutudur. β_0 'da jeodezik eğrinin en yüksek noktasının indirgenmiş enlemidir (Şekil 5).



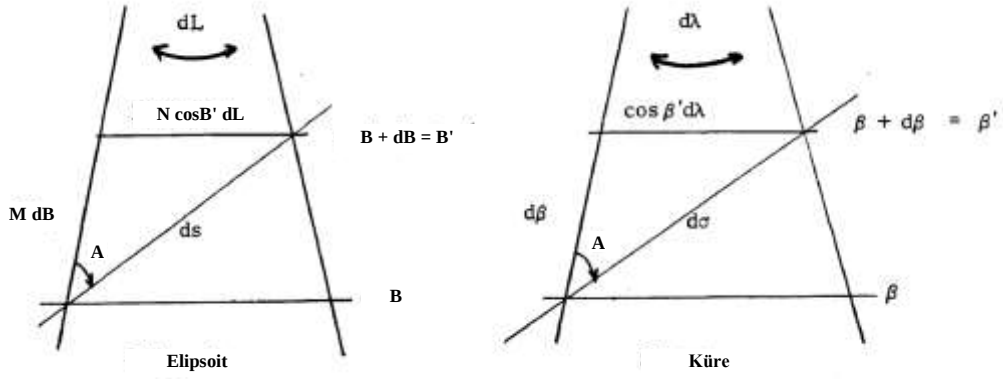
Şekil 4. Yardımcı küre üzerinde kutupsal üçgen (Rapp,1993).

Problemin çözümünde bir küre oluşturulur ve elipsoitten yardımcı küre üzerindeki büyük daireye doğru aynı β_0 değerine sahip bir jeodezik eğriye geçirilir (Şekil 5).

Şekil 4'te α , P_1' ile P_2' arasından geçen jeodezik eğrinin (kürede büyük daire yayının) azimutudur (N: küre kutbu). (1) denklemi α 'ya göre düzenlenirse,

$$\cos \beta_1 \sin \alpha_1 = \cos \beta_2 \sin \alpha_2 = \cos \beta_i \sin \alpha_i = \cos \beta_0 \quad (17)$$

elde edilir. (16) formülündeki β_0 ile (17) formülündeki β_0 aynı olmalıdır. Buradan hareketle, elipsoitteki ve küredeki azimutların eşit (yani $A_i = \alpha_i$) olduğu söylenebilir.



Şekil 5. Elipsoit ve küre üzerindeki diferansiyel şekiller (Rapp,1993).

Şekil 4'e göre elipsoit için (18) formülü,

$$\begin{aligned} ds \cos A &= M dB \\ ds \sin A &= N \cos B' dL \end{aligned} \quad (18)$$

ve küre için (19) formülü,

$$\begin{aligned} d\sigma \cos A &= d\beta \\ d\sigma \sin A &= \cos \beta' d\lambda \end{aligned} \quad (19)$$

elde edilir. Burada, M: meridyen eğrilik yarıçapı, N: çapraz eğrilik yarıçapı, dB, jeodezik enlem farkı, dL, jeodezik boylam farkıdır. (18) ve (19) arasındaki formül ilişkisi,

$$\frac{ds}{d\sigma} = M \frac{dB}{d\beta} = a \frac{dL}{d\lambda} \quad (20)$$

formülü ile gösterilmiştir. (20) formülü (21) ve (22)'ye göre düzenlendiğinde (23) ve (24) formülleri,

$$a = \frac{N \cos B'}{\cos \beta'} \quad (21)$$

$$\tan \beta = \sqrt{(1 - e^2)} \tan B \quad (22)$$

$$\frac{dB}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\cos^2 B}{\cos^2 \beta} \quad (23)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{M}{a\sqrt{1-e^2}} \frac{\cos^2 B}{\cos^2 \beta} \quad (24)$$

elde edilir. Bu noktada, meridyen elipsoidi üzerindeki bir noktanın x koordinatı için (25) ve (26)'deki formüllerden yararlanıp, c , V , M değerleri (23) ve (24) formüllerinde kullanılırsa (27) denklemi,

$$x = a \cos \beta = \frac{c}{V} \cos B \quad (25)$$

$$c = \frac{a^2}{b}; V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B; b = a\sqrt{1-e^2}; M = \frac{c}{V^3} \quad (26)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{1}{V} = \frac{1}{a} \frac{ds}{d\sigma} \quad (27)$$

elde edilir (c , kutup eğrilik yarıçapı; V , kısaltma) (Rapp,1984).

Rapp (1984)'in çalışmasında verdiği (28) formülündeki V kısaltmasının (27) formülünde kullanılması ile (29) ve (30) denklemleri bulunur.

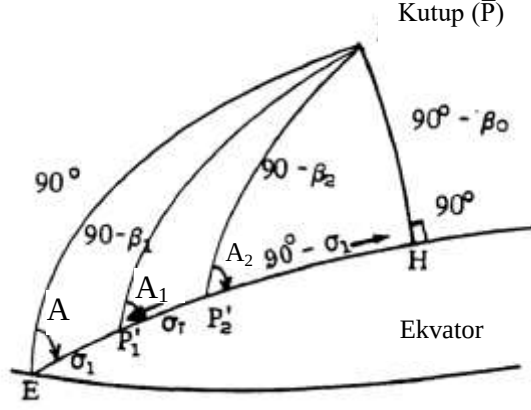
$$V = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} \quad (28)$$

$$\frac{ds}{d\sigma} = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} \quad (29)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} \quad (30)$$

(29) ve (30) diferansiyel denklemlerinin çözümünde Şekil 6'daki küresel üçgenden yararlanılarak işleme devam edilir.

Şekil 6'da gösterilen küre üzerinde P_1' ve P_2' (izdüşümü noktaları) gibi iki nokta düşünüldüğünde, σ büyük daire yayının uzunluğu ve σ_1 : E P_1' yay uzunluğu; σ_2 : E P_2' yay uzunluğu; σ_T : P_1' P_2' yay uzunluğu ($\sigma_T = \sigma_2 - \sigma_1$) olarak tanımlanır. Ayrıca, A : Büyük dairenin ekvatoru kestiği noktadaki azimutu; A_1 : Büyük dairenin P_1' deki azimutu; A_2 : Büyük dairenin P_2' deki azimutu; β_1 : P_1' noktasının indirgenmiş enlemi; β_2 : P_2' noktasının indirgenmiş enlemi ve β_0 : Büyük dairenin ulaştığı en yüksek indirgenmiş enlem olarak tanımlanır.



Şekil 6. Yardımcı küresel üçgen geometrisi (Rapp,1993).

$\bar{P}P_1'H$ küresel üçgeninden sinüs kuralı yardımıyla (31) formülü ve $P_1'\bar{P}H$ küresel üçgeninde Napier kuralı uygulanarak (32) formülü,

$$\cos \beta_0 = \sin A_1 \cos \beta_1 \quad (31)$$

$$\cos A_1 = \tan(90 - \sigma_1) \cot(90 - \beta_1) = \cot \sigma_1 \tan \beta_1 = \tan \sigma_1 = \frac{\tan \beta_1}{\cos A_1} \quad (32)$$

elde edilir. $\bar{P}P_2'H$ küresel üçgeninden (33) formülü bulunur. (33) formülünü büyük daire üzerinde herhangi bir P' noktası için uygularsak β_2 yerine β , σ_T yerine de σ gelir ve (34) formülü,

$$\sin \beta_2 = \sin(\sigma_1 + \sigma_T) \sin \beta_0 \quad (33)$$

$$\sin \beta = \sin(\sigma_1 + \sigma) \sin \beta_0 \quad (34)$$

elde edilir. (35) formülünde verilen ifadeler (34) formülünde kullanıldığında (36) formülü,

$$\begin{aligned} x &= \sigma_1 + \sigma \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 x \sin^2 \beta_0 \quad (36)$$

elde edilir. σ_1 sabit ve $dx=d\sigma$ olduğundan (29) formülü yeniden düzenlenirse (39) diferansiyel denklemi elde edilir.

$$ds = a\sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 x \sin^2 \beta_0} dx \quad (37)$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2}; \quad \frac{1}{(1+e'^2)^{1/2}} = \frac{b}{a}; \quad k^2 = e'^2 \sin^2 \beta_0 \quad (38)$$

$$ds = b\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} dx \quad (39)$$

(39) diferansiyel denkleminde verilen ifadenin integrali alınmadan önce x in alt ve üst limit değerleri belirlenmelidir. Bu noktada $x = \sigma_1 + \sigma$ ifadesinden, başlangıç çizgisi $\sigma=0$ için alt limit $x=\sigma_1$ ve bitiş çizgisinde $\sigma=\sigma_T$ için üst limit $x= \sigma_1+ \sigma_T$ olur. (39) diferansiyel denkleminin integral gösterimi (40)'ta verilmiştir.

$$s = b \int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma_T} \sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} dx \quad (40)$$

(40) denkleminde verilen bu integral bir eliptik integraldir (Bulirsch ve Gerstl, 1983). Bu tür integrallerin hesaplanmasında iki yöntem vardır; sayısal integrasyon veya analitik integrasyon. İlk yöntemde kullanılabilen çeşitli sayısal integrasyon metotları mevcuttur. İkinci yöntem, ilkinden daha karmaşık olmasına rağmen çözümde daha iyi doğruluk verir ve özgün denklem setlerinin oluşturulmasını sağlar.

Analitik integrasyon ile (40) denkleminin çözümü için denklem (41)'de ki gibi seriye açılır (Rapp,1993):

$$(1 + k^2 \sin^2 x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 x - \frac{1}{8}k^4 \sin^4 x + \frac{1}{16}k^6 \sin^6 x + \dots \quad (41)$$

Açı kuvvetleri açılı katları şeklinde gösterilirse (42) denklemini elde ederiz. $\cos(nx)$ 'in katsayıları olan A, B, C ve D katsayıları (43)'de verilmiştir.

$$(1 + k^2 \sin^2 x)^{1/2} = A + B\cos 2x + C\cos 4x + D\cos 6x + \dots \quad (42)$$

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 - \frac{175}{16384}k^8 + \dots \\ B &= -\frac{k^2}{4} + \frac{1}{16}k^4 - \frac{15}{512}k^6 + \frac{35}{2048}k^8 + \dots \\ C &= -\frac{1}{64}k^4 + \frac{3}{256}k^6 - \frac{35}{4096}k^8 + \dots \\ D &= -\frac{1}{512}k^6 + \frac{5}{2048}k^8 + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

(40) denklemi (42)'ye göre düzenlendiğinde,

$$\frac{s}{b} = A \int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma_T} dx + B \int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma_T} \cos 2x dx + C \int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma_T} \cos 4x dx + D \int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma_T} \cos 6x dx + \dots \quad (44)$$

elde edilir. $\cos(nx)$ 'in integrali (45) denkleminde,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma_T} \cos nx dx &= \frac{1}{n} [\sin n(\sigma_1 + \sigma_T) - \sin n\sigma_1] \\ \sin n(\sigma_1 + \sigma_T) - \sin n\sigma_1 &= 2 \cos \frac{n}{2} (2\sigma_1 + \sigma_T) \sin \frac{n}{2} \sigma_T \\ \sigma_1 + \sigma_2 &= 2\sigma_m \end{aligned} \quad (45)$$

verilmiştir. (45) denklemi yeniden düzenlenirse (46) denklemindeki,

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma_T} \cos nx dx = \frac{2}{n} \cos n\sigma_m \sin \frac{n}{2} \sigma_T \quad (46)$$

gibi olur. (46) denklemi (44) denkleminde kullanılarak integral işlemine devam edildiğinde s, (47) denklemindeki,

$$s = b(A\sigma_T + B\cos 2\sigma_m \sin \sigma_T + \frac{C}{2} \cos 4\sigma_m \sin 2\sigma_T + \frac{D}{3} \cos 6\sigma_m \sin 3\sigma_T + \dots) \quad (47)$$

gibi elde edilir. (47) denklemi, direkt jeodezik problemin iteratif çözümünün önemli bir parçasıdır. Bu denklemde kullanılan katsayıların Rainsford (1955) yönteminde kullanılan katsayılar ile tutarlı olması için yeni bir katsayı seti ($B_0=A$; $B_2=B$; $B_4=C/2$, $B_6=D/3$, $B_8=E/4$ vb.) tanımlanmıştır.

$$u^2 = k^2 = e'^2 \sin^2 \beta_0 = e'^2 \cos^2 \alpha \quad (48)$$

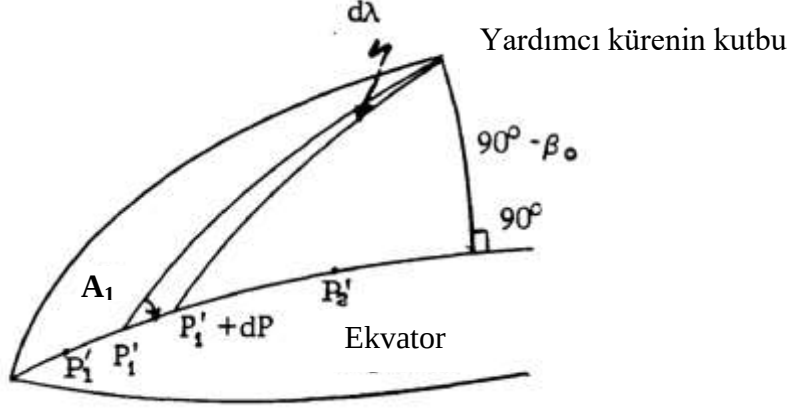
(47)'de, σ_T yerine σ kullanıldığında ve B_0, B_2, B_4, B_6, B_8 katsayıları u 'ya göre tanımlandığında, Rainsford (1955)'un bulduğu (49) ile aynı tutarlılıkta olur.

$$\begin{aligned} s &= b(B_0\sigma + B_2\cos 2\sigma_m \sin \sigma + B_4\cos 4\sigma_m \sin 2\sigma + B_6\cos 6\sigma_m \sin 3\sigma \\ &\quad + B_8\cos 8\sigma_m \sin 4\sigma \dots) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1 + \frac{1}{4}u^2 - \frac{3}{64}u^4 + \frac{5}{256}u^6 - \frac{175}{16384}u^8 + \dots \\
B_2 &= -\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{16}u^4 - \frac{15}{512}u^6 + \frac{35}{2048}u^8 + \dots \\
B_4 &= -\frac{1}{128}u^4 + \frac{3}{512}u^6 - \frac{35}{8192}u^8 + \dots \\
B_6 &= -\frac{1}{1536}u^6 + \frac{5}{6144}u^8 + \dots \\
B_8 &= -\frac{5}{65536}u^8 + \dots
\end{aligned} \tag{50}$$

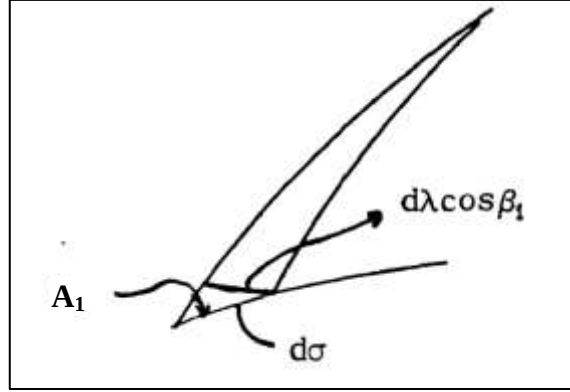
(49)'da verilen formül iki uygulamada kullanılabilir: Birinci uygulama; s bilindiğinde σ' yı iteratif olarak bulmaktır. Bunun için hesaplamada ilk değer olarak $\sigma_0 = s/bA$ kullanılarak yakınsama sağlanana kadar iterasyon yapılır ve σ değeri bulunur. İkinci uygulama ise, σ' 'nın belirlenip s 'nin hesaplanmasıdır. Böylelikle küre ve elipsoit üzerindeki mesafeler arasındaki bağlantı ortaya çıkarılmış olur.

Elipsoit ve kürede boylamlar arasında diferansiyel formdan başka nasıl bir ilişki olduğu ilk başta bilinmemektedir. Çözümüne (30)'da verilen denklemin integrasyonu ile başlanır.



Şekil 7. Boylamların belirlenmesi için gerekli yardımcı küresel üçgen (Rapp,1993).

Şekil 7'de, P_1' , P_1' ile P_2' arasından geçen büyük daire üzerinde keyfi bir noktadır. Bu diferansiyel üçgeni Şekil 8'deki gibi büyütebiliriz.



Şekil 8. Boylamanın belirlenmesi için kullanılan diferansiyel üçgen (Rapp,1993).

Şekil 8'deki diferansiyel üçgenden (51) ve (52) bağıntıları elde edilebilir:

$$d\lambda = \frac{\sin A_i}{\cos \beta_i} d\sigma \quad (51)$$

$$\sin A_i = \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta_i} \quad (52)$$

(52) formülü, (51) formülünde kullanıldığında (53) formülü elde edilir:

$$d\lambda = \frac{\cos \beta_0}{\cos^2 \beta_i} d\sigma \quad (53)$$

β_i yerine β kullanılıp (53) denklemi (30) denkleminde kullanıldığında, (54) diferansiyel denklemi elde edilir:

$$dL = \cos \beta_0 \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}}{\cos^2 \beta} d\sigma \quad (54)$$

(54) denkleminden (53) denklemi çıkarılarak (55) denklemi gibi düzenlenir:

$$dL - d\lambda = \cos \beta_0 \left[\frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}}{\cos^2 \beta} - \frac{1}{\cos^2 \beta} \right] d\sigma \quad (55)$$

(55) denklemindeki $(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2}$ ifadesi (56)'daki gibi seriye açılıp genişletilir ve (55) denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse (57) diferansiyel denklemi elde edilir:

$$(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \beta - \frac{e^4}{8} \cos^4 \beta - \frac{e^6}{16} \cos^6 \beta - \dots \quad (56)$$

$$d\lambda - dL = \frac{e^2}{2} \cos \beta_0 \left(1 + \frac{e^2}{4} \cos^2 \beta + \frac{e^4}{8} \cos^4 \beta + \dots \right) d\sigma \quad (57)$$

$$\begin{cases} \sin \beta = \sin(\sigma_1 + \sigma) \sin \beta_0 \\ x = \sigma_1 + \sigma \end{cases} \Rightarrow \sin \beta = \sin x \sin \beta_0 \quad (58)$$

(57) denkleminde kullanmak için gerekli olan tanımlamalar (59) içerisinde verilmiştir:

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta &= 1 - \sin^2 \beta_0 \sin^2 x \\ \cos^4 \beta &= 1 - 2 \sin^2 \beta_0 \sin^2 x + \sin^4 \beta_0 \sin^4 x \end{aligned} \quad (59)$$

(59) içerisindeki formüller (57) denkleminde kullanılarak denklem yeniden düzenlenirse (60) diferansiyel denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} d\lambda - dL &= \frac{e^2}{2} \cos \beta_0 \left[1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} - \frac{e^2}{8} \sin^2 \beta_0 - \frac{e^4}{8} \sin^2 \beta_0 + \frac{3}{64} e^4 \sin^4 \beta_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{e^2}{8} \sin^2 \beta_0 + \frac{e^4}{8} \sin^2 \beta_0 + \dots \right) \cos 2x + \frac{e^4}{64} \sin^4 \beta_0 \cos 4x + \dots \right] dx \end{aligned} \quad (60)$$

(60) denkleminde trigonometrik ifadelerin önüne gelecek katsayılar A' , B' , C' ve D' (61) denklemindeki gibi tanımlanarak işleme devam edilir ve (62) denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} A' &= 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5}{64} e^6 - \left(\frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{8} + \frac{15}{128} e^6 \right) \sin^2 \beta_0 \\ &\quad + \left(\frac{3}{64} e^4 + \frac{45}{512} e^6 \right) \sin^4 \beta_0 - \frac{25}{1024} e^6 \sin^6 \beta_0 \\ B' &= \left(\frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{8} + \frac{15}{128} e^6 \right) \sin^2 \beta_0 - \left(\frac{e^4}{16} + \frac{15}{128} e^6 \right) \sin^4 \beta_0 \\ &\quad + \frac{75}{2048} e^6 \sin^6 \beta_0 \\ C' &= \left(\frac{e^4}{64} + \frac{15}{512} e^6 \right) \sin^4 \beta_0 + \dots \\ D' &= \frac{5}{2048} e^6 \sin^6 \beta_0 + \dots \end{aligned} \quad (61)$$

$$d\lambda - dL = \frac{e^2}{2} \cos \beta_0 [A' + B' \cos 2x + C' \cos 4x + D' \cos 6x + \dots] dx \quad (62)$$

$$\int_0^\lambda d\lambda = \lambda; \quad \int_0^L dL = L \quad (63)$$

(63)'teki ifadelerle (62) denklemi düzenlendiğinde (64) denklemi elde edilir:

$$(\lambda - L) = \frac{e^2}{2} \cos \beta_0 \int_{\sigma_1}^{\sigma_1 + \sigma_T} (A' + B' \cos 2x + C' \cos 4x + D' \cos 6x + \dots) dx \quad (64)$$

(64) denkleminde integral işlemi uygulandığında (65) denklemi elde edilir:

$$(\lambda - L) = \frac{e^2}{2} \cos \beta_0 \left[A' \sigma_T + B' \sin \sigma_T \cos 2\sigma_m + \frac{C'}{2} \sin 2\sigma_T \cos 4\sigma_m + \frac{D'}{3} \sin 3\sigma_T \cos 6\sigma_m + \dots \right] \quad (65)$$

Rainsford (1955) çalışmasında dünyanın basıklık değeri (f)'i kullanarak (65) denklemini (67) denklemi şeklinde ifade etmiştir (Katsayılar formül (68)'de verilmiştir).

$$\cos \beta_0 = \sin \alpha; \quad \sigma = \sigma_T \quad (66)$$

$$(\lambda - L) = f \sin \alpha (A_0 \sigma + A_2 \sin \sigma \cos 2\sigma_m + A_4 \sin 2\sigma \cos 4\sigma_m + A_6 \sin 3\sigma \cos 6\sigma_m + \dots) \quad (67)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{1}{4}f(1 + f + f^2) \cos^2 \alpha + \frac{3}{16}f^2 \left(1 + \frac{9}{4}f\right) \cos^4 \alpha \\ &\quad - \frac{25}{128}f^3 \cos^6 \alpha + \dots \\ A_2 &= \frac{1}{4}f(1 + f + f^2) \cos^2 \alpha - \frac{1}{4}f^2 \left(1 + \frac{9}{4}f\right) \cos^4 \alpha \\ &\quad + \frac{75}{256}f^3 \cos^6 \alpha + \dots \\ A_4 &= \frac{1}{32}f^2 \left(1 + \frac{9}{4}f\right) \cos^4 \alpha - \frac{15}{256}f^3 \cos^6 \alpha + \dots \\ A_6 &= \frac{5}{768}f^3 \cos^6 \alpha + \dots \end{aligned} \quad (68)$$

1.9.1.1. İteratif Yöntemle Direkt Jeodezik Problem Çözümü

Direkt problem, ilk noktanın enlem ve boylam değeri ile aradaki mesafe ve azimutun verilip, ikinci noktanın enlem ve boylamı ile azimutunun bulunması işlemidir. Bu problemin çözümünde genel işlem adımları;

a) B_1 bilindiğinden, (22) formülünden ilk noktanın indirgenmiş enlemi bulunur. (69) formülünden jeodezik eğrinin ekvatorla yaptığı açı (A_0) bulunur. Sonraki adımda (70) denklemi iterasyon işlemine tabi tutulur ve σ değeri hesaplanır.

$$\sin A_0 = \cos \beta_1 \sin A_1 \quad (69)$$

$$\sigma = \frac{s}{bB_0} - \frac{B_2}{B_0} \sin \sigma \cos 2\sigma_m - \frac{B_4}{B_0} \sin 2\sigma \cos 4\sigma_m - \frac{B_6}{B_0} \sin 3\sigma \cos 6\sigma_m \dots \quad (70)$$

b) İterasyon işleminde ilk yakınsama değeri, $\sigma = \sigma^0 = s/b B_0$ alınarak işleme devam edilir. Bu aşamada σ_1 , (71) formülünden bulunarak iterasyon için gerekli olan $2\sigma_m$ (72) eşitliğinden bulunur. İterasyon sonucunda elde edilen yeni σ değeri ile (73) formülünden ikinci noktanın indirgenmiş enlemi (β_2) bulunur.

$$\sin \sigma_1 = \sin \beta_1 / \cos A \quad (71)$$

$$2\sigma_m = \sigma_1 + \sigma \quad (72)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta_0 \quad (73)$$

$$\sin \beta_2 = \sin(\sigma_1 + \sigma) \cos \alpha$$

c) β_2 hesaplandıktan sonra ikinci noktanın enlemi B_2 ,

$$\tan B_2 = \tan \beta_2 / \sqrt{1 - e^2} \quad (74)$$

formülünden elde edilir.

d) λ (75) formülünden, $(\lambda - L)$ ise (65) formülünden bulunduktan sonra elipsoit üzerinde jeodezik boylam farkı (76) formülünden hesaplanır.

$$\sin \lambda = \sin \sigma \sin A_1 / \cos \beta_2 \quad (75)$$

$$L = \lambda - (\lambda - L) \quad (76)$$

e) Ters azimut ise (77) formülünden bulunabilir.

$$\tan A_2 = \frac{\sin \lambda \cos \beta_1}{\sin \beta_2 \cos \beta_1 \cos \lambda - \sin \beta_1 \cos \beta_2} \quad (77)$$

Direkt jeodezik problemde iteratif çözüm öneren başlıca araştırmacılardan Vincenty (1975)'nin sunduğu iteratif yöntem en çok tercih edilen yöntemdir ve bu yöntemin direkt problemin çözümü için olan işlem adımları aşağıda sunulmuştur:

$$\tan \sigma_1 = \tan \beta_1 / \cos A_1 \quad (78)$$

$$\sin A_0 = \cos \beta_1 \sin A_1 \quad (79)$$

$$u^2 = e'^2 \cos^2 A_0 \quad (80)$$

$$A = 1 + \frac{u^2}{16384} \{4096 + u^2[-768 + u^2(320 - 175u^2)]\} \quad (81)$$

$$B = \frac{u^2}{1024} \{256 + u^2[-128 + u^2(74 - 47u^2)]\}$$

$$2\sigma_m = \sigma_1 + \sigma \quad (82)$$

$$\Delta\sigma = B \sin \sigma \left\{ \cos 2\sigma_m + \frac{1}{4} B (\cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)) - \frac{1}{6} B \cos 2\sigma_m (-3 + 4 \sin^2 \sigma)(-3 + 4 \cos^2 2\sigma_m) \right\} \quad (83)$$

$$\sigma = \frac{s}{bA} + \Delta\sigma \quad (84)$$

(81), (83) ve (84) denklemleri σ da göz ardı edilebilir bir değişiklik olana kadar iterasyona tabi tutulur. İterasyonda ilk yakınsama değeri (84) denkleminde elde edilir. σ elde edildikten sonra B_2 , L_2 ve A_2 bulunur.

$$\tan B_2 = \frac{\sin \beta_1 \cos \sigma + \cos \beta_1 \sin \sigma \cos A_1}{(1-f)[\sin^2 A_0 + (\sin \beta_1 \sin \sigma - \cos \beta_1 \cos \sigma \cos A_1)^2]^{1/2}} \quad (85)$$

$$\tan \lambda = \frac{\sin \sigma \sin A_1}{\cos \beta_1 \cos \sigma - \sin \beta_1 \sin \sigma \cos A_1} \quad (86)$$

$$C = \frac{f}{16} \cos^2 A_0 (4 + f(4 - 3 \cos^2 A_0)) \quad (87)$$

$$L = \lambda - (1 - C)f \sin A_0 \{ \sigma + C \sin \sigma (\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)) \} \quad (88)$$

$$\tan A_2 = \frac{\sin A_0}{-\sin \beta_1 \sin \sigma + \cos \beta_1 \cos \sigma \cos A_1} \quad (89)$$

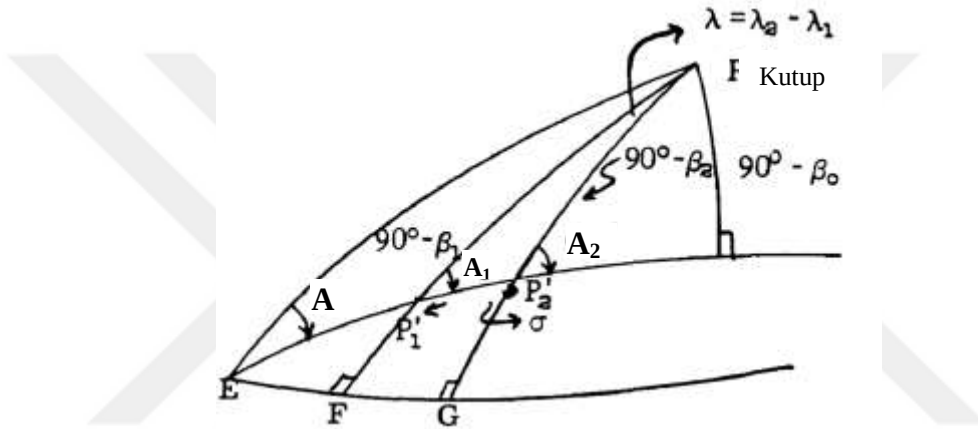
1.9.1.2. İteratif Yöntemle Ters Jeodezik Problem Çözümü

Enlem ve boylamları verilen iki nokta arasındaki mesafenin ve azimutun bulunması işlemidir. İteratif yöntemle problemin çözümünde ilk önce (22) formülünden indirgenmiş

enlemler bulunur (Rapp, 1993). Şekil 9'daki P_1 'Pole P_2 ' üçgeninde kosinüs kuralı uygulanarak (90) formülü elde edilir.

$$\cos \sigma = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda \quad (90)$$

σ küçük bir değer aldığında ($\sigma \rightarrow 0$), $\cos \sigma$ 1'e yaklaştığından bu formül hatalı sonuç verir ve bu yüzden Sodano (1963) $\sin \sigma$ ve $\cos \sigma$ 'nın (yani $\tan \sigma = \sin \sigma / \cos \sigma$) beraber kullanımını tavsiye etmiştir.



Şekil 9. Ters jeodezik problemin çözümünde kullanılan yardımcı küre (Rapp,1993).

$$\sin \sigma = [(\sin \lambda \cos \beta_2)^2 + (\sin \beta_2 \cos \beta_1 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda)^2]^{1/2} \quad (91)$$

Problemin çözümünde başlangıçta λ bilinmediği için (90) ve (91) formüllerini hesaplamak mümkün değildir. Bu noktada $\lambda=L$ ilk yaklaşım değeri alınarak iteratif çözüme başlanır ve iterasyon işlemi $\lambda-L$ değerinde belirgin bir değişim olmayana kadar devam eder. Sonra yeni hesaplanmış λ değeri ile σ hesaplanır. Şekil 9'dan yararlanarak (92) formülü ile A bulunur:

$$\begin{aligned} \sin A_1 &= \frac{\sin \lambda \cos \beta_2}{\sin \sigma} \\ \sin A_1 \cos \beta_1 &= \sin A_2 \cos \beta_2 = \sin A \cos 0^\circ \\ \sin A &= \sin A_1 \cos \beta_1 = \frac{\sin \lambda \cos \beta_1 \cos \beta_2}{\sin \sigma} \end{aligned} \quad (92)$$

$2\sigma_m$ ifadesini bulmak için (93) içerisindeki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(2\sigma_1 + \sigma) \\ \cos 2\sigma_m &= \cos(2\sigma_1 + \sigma) = \cos \sigma - 2 \sin \sigma_1 \sin(\sigma_1 + \sigma)\end{aligned}\quad (93)$$

$P_1'EF$ üçgeninden sinüs kuralı ile (94) formülü ve $P_2'EG$ üçgeninden sinüs kuralı ile (95) formülü,

$$\sin \sigma_1 = \sin \beta_1 / \cos A \quad (94)$$

$$\sin(\sigma_1 + \sigma) = \sin \beta_2 / \cos A \quad (95)$$

(94) ve (95) formüllerinden (96) formülü elde edilir ve $2\sigma_m$, $4\sigma_m$, $6\sigma_m$ vb. ifadeler yarım açı formülleri kullanılarak bulunabilir.

$$\cos 2\sigma_m = \cos \sigma - 2 \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\cos^2 A} \quad (96)$$

İterasyon işleminde başlangıç değeri $\lambda=L$ alınarak sırasıyla σ , A , $2\sigma_m$ ve $(\lambda-L)$ bulunur. İterasyon sonucunda (49) denkleminde mesafe, (97) formülünden azimutlar bulunur:

$$\begin{aligned}\sin A_1 &= \frac{\sin A}{\cos \beta_1} \\ \sin A_2 &= \frac{\sin A}{\cos \beta_2}\end{aligned}\quad (97)$$

Sodano (1963), (98)'deki gibi daha kullanışlı bir formül önermiştir:

$$\begin{aligned}\tan A_{12} &= \frac{\sin \lambda \cos \beta_2}{\sin \beta_2 \cos \beta_1 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda} \\ \tan A_{21} &= \frac{\sin \lambda \cos \beta_1}{\sin \beta_2 \cos \beta_1 \cos \lambda - \sin \beta_1 \cos \beta_2}\end{aligned}\quad (98)$$

Vincenty (1975), Rainsford'un çalışmasından yararlanarak ters jeodezik problemin çözümü için iteratif bir yöntem geliştirmiştir. Problemin çözümüne $\lambda=L$ ilk yaklaşım değeri ile başlamış ve aşağıdaki şekilde devam etmiştir:

$$\lambda=L \text{ (ilk yaklaşım)} \quad (99)$$

$$\sin^2 \sigma = (\cos \beta_2 \sin \lambda)^2 + (\cos \beta_1 \sin \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda)^2 \quad (100)$$

$$\cos \sigma = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda \quad (101)$$

$$\tan \sigma = \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma} \quad (102)$$

$$\sin A_0 = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \lambda}{\sin \sigma} \quad (103)$$

$$\cos 2\sigma_m = \cos \sigma - \frac{2 \sin \beta_1 \sin \beta_2}{\cos^2 A_0} \quad (104)$$

λ , (86) veya (88) formüllerinden bulunur. İşlem süreci, (100) denkleminin iterasyona tabi tutulması ile başlar ve λ 'daki değişiklik önceden belirlenen değerden (1×10^{-12}) daha az olana kadar devam eder.

$$s = bA(\sigma - \Delta\sigma) \quad (105)$$

(105) denkleminde $\Delta\sigma$, (83) formülünden bulunur. Azimutlar ise (106) ve (107) formüllerinden bulunur.

$$\tan A_1 = \frac{\cos \beta_2 \sin \lambda}{\cos \beta_1 \sin \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda} \quad (106)$$

$$\tan A_2 = \frac{\cos \beta_1 \sin \lambda}{-\sin \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \lambda} \quad (107)$$

1.9.1.2.1. Geliştirilmiş İteratif Yöntemle Ters Jeodezik Problem Çözümü

Bowring (1983), ters problemin iteratif olarak çözümünün değişik iterasyon yöntemlerinin yorumlanması ile geliştirilebileceğini gösteren bazı önerilerde bulunmuştur. Bowring ilk olarak aşağıdaki terimleri tanımlamıştır;

$$\lambda - L = E = (1 - D)f\gamma \left(\sigma + D \sin \sigma \left(\xi + D \cos \sigma (2\xi^2 - 1) \right) \right) \quad (108)$$

(108) denkleminde yer alan katsayılar aşağıda tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
x &= \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\
y &= \cos \beta_1 \cos \beta_2 \\
\bar{x} &= \cos \beta_1 \sin \beta_2 \\
\bar{y} &= \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\
\gamma &= \frac{y \sin \lambda}{\sin \sigma} = \sin A_0 \\
\Gamma &= 1 - \gamma^2 \\
\xi &= \cos \sigma - \frac{2x}{\Gamma} \\
\bar{\xi} &= \Gamma \cos \sigma - x \\
D &= \frac{1}{16} f \Gamma (4 + 4f - 3f\Gamma)
\end{aligned} \tag{109}$$

Bu gösterimler ile orantısal etkileşim prosedürü aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\lambda_{n+1} = L + E(\lambda_n) \tag{110}$$

(110) denklemini Newton-Raphson yöntemi ile yorumladığımızda (111) denklemi,

$$F(\lambda) = \lambda - L - E(\lambda) = 0 \tag{111}$$

elde edilir. (111) denkleminin λ 'ya göre türevi alındığında (112) denklemi,

$$F'(\lambda) = 1 - E'(\lambda) \tag{112}$$

elde edilir. (112) denkleminde Newton-Raphson prosedürü (113)'teki iteratif denkliği verir;

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{F(\lambda_n)}{F'(\lambda_n)} \equiv \lambda_n - \frac{(\lambda_n - L - E(\lambda_n))}{(1 - E'(\lambda_n))} \tag{113}$$

$$E'(\lambda_n) = f \left(\gamma^2 + \frac{\bar{\xi} \sigma}{\sin \sigma} \right) \tag{114}$$

Bowring çalışmasında hem genişletilmiş Newton-Raphson prosedürü hem de Lagrange yöntemi üzerinde durmuştur. Genişletilmiş Newton-Raphson prosedürü, $F(\lambda)$ 'nın birinci ve ikinci türevlerini kullanır. Aynı zamanda temel Newton-Raphson

prosedüründen daha doğru sonuçlar verir. Lagrange yöntemi ise λ 'nın aşağıdaki formda gösterilen bir seri açılımını oluşturur (Bowring, 1983);

$$\lambda = L + E(L) + E(L)E'(L) + \frac{1}{2}E^2(L)E''(L) + E(L)(E'(L))^2 \quad (115)$$

Bu denklemin sağ tarafı sadece L 'nin bir fonksiyonudur ve bu gerçekte iteratif olmayan bir prosedürdür. Bu geliştirilmiş yöntem test edildiğinde, Newton-Raphson prosedürü için gerekli olan iterasyon sayısı basit iterasyonun yarısı kadardır. Bu da hesaplama zamanında %20 oranında bir azalma sağlar.

1.9.2. İteratif Olmayan Çözüm Yöntemleri

İteratif çözümde yüksek doğruluk elde etmek için yakınsama değerinin yüksek tutulması işlem zamanının artmasına neden olmaktadır. Bu nedenle iteratif olmayan çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Aşağıda bu çözüm yöntemleri ile bilinen araştırmacıların çalışmaları verimiştir.

1.9.2.1. İteratif Olmayan Yöntemle Direkt Jeodezik Problem Çözümü

Direkt problemin çözümünde iterasyona ihtiyaç duymayan ve oldukça etkili çeşitli yöntemler mevcuttur. McCaw (1930)'ın yöntemini temel alan Rainsford (1955)'un çalışmasında, Sodano ve Robinson (1963)'un raporunda ve Singh (1980)'in tezinde, iteratif olmayan prosedür üzerinde durulmuştur.

McCaw (1930), çalışmasında hesaplama kolaylığı için yardımcı küreden yararlanmıştır. Elipsoit üzerindeki noktanın enlemi ie bu küre üzerine denk gelen noktanın jeodezik enlemini eşit varsaymıştır. Ancak küre üzerindeki boylam farkı elipsoit üzerindeki boylam farkından farklı olduğundan azimutlarda birbirinden farklı olacaktır. Azimutlar arasındaki ilişkiyi gösteren denklem aşağıdadır:

$$\cos \beta_1 \sin A_1 = \cos \beta_2 \sin A_2 = \cos \beta_0 \sin A_0 \quad (116)$$

McCaw'ın yararlandığı yardımcı kürede (116) eşitliği (117)'deki gibi tanımlanır:

$$\cos B_1 \sin A_1^* = \cos B_2 \sin A_2^* = \cos B_0 = \sin A^* \quad (117)$$

Burada A^* jeodezik eğrinin indirgenmiş azimutu olarak tanımlanır.

$$\cos B = \frac{(1-e^2)^{1/2} \cos \beta}{(1-e^2 \cos^2 \beta)^{1/2}} \quad (118)$$

$$\cos B_0 = \frac{(1-e^2)^{1/2} \cos \beta_0}{(1-e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2}} = \frac{(1-e^2)^{1/2} \cos \beta_0}{(1-e^2 \sin^2 A_0)^{1/2}} \quad (119)$$

$$\frac{\sin A_0}{\sin A^*} = \frac{\cos \beta_0}{\cos B_0} = \frac{(1-e^2 \sin^2 A_0)^{1/2}}{(1-e^2)^{1/2}} \quad (120)$$

$\sin A^*$, (120) formülünün (117) formülünde yerine konulmasıyla bulunur ve çözüme devam edilir:

$$\cos B_1 \sin A_1^* = \frac{\sin A_0 (1-e^2)^{1/2}}{(1-e^2 \sin^2 A_0)^{1/2}} \quad (121)$$

(99) formülünde $\cos B_1$ yerine (118) formülü yazılıp, denklemin sol tarafı $\sin A_1 \cos \beta_1$ ile sağ tarafı ise $\sin A_0$ ile bölünürse (122) denklemi elde edilir.

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_1^*} = \frac{(1-e^2 \sin^2 A_0)^{1/2}}{(1-e^2 \cos^2 \beta_1)^{1/2}} \quad (122)$$

(122) denkleminin her iki tarafının da karesi alınıp, $\sin^2 A$ ile $\sin^2 A_1^*$ yerine $1-\cos^2 A$ ile $1-\cos^2 A_1^*$ ve e^2 yerine e'^2 yazılırsa (123) ifadesi elde edilir:

$$\cos A_1 = k \cos A_1^* \quad (123)$$

$$k = \frac{(1+e'^2 \cos^2 A_0)^{1/2}}{(1+e'^2)^{1/2}} \quad (124)$$

$\sin \alpha = \cos \beta_0$ olduğundan (124) formülü (125)'deki gibi yazılabilir:

$$k^2 = 1 - e^2 \cos^2 \beta_0 \equiv \frac{1}{v_0^2} \quad (125)$$

$$\begin{aligned}\cos A_1^* &= V_0 \cos A_1 \\ \sin A_1^* &= \frac{V_0}{V} \sin A_1\end{aligned}\quad (126)$$

Rainsford (1955), orijinal McCaw yöntemindeki denklemleri yeniden düzenlemiş ve B_1, L_1, A_{12}, s için aşağıdaki formülleri sunmuştur:

$$\tan \beta = (1 - e^2)^{1/2} \tan B \quad (127)$$

$$\sin A_0 = \sin A_1 \cos \beta_1 \quad (128)$$

$$u^2 = e'^2 \cos^2 A_0 \quad (129)$$

$$k^2 = \frac{(1+u^2)}{(1+e'^2)} \quad (130)$$

$$\tan G_1 = \frac{k \tan B_1}{\cos \alpha A_1} \quad (131)$$

$$K = \frac{(1+u^2)^{1/2}}{b} \quad (132)$$

$$\gamma = KC_0 s \quad (133)$$

$$\gamma_1 = G_1 - C_2 \sin 2G_1 + C_4 \sin 4G_1 - C_6 \sin 6G_1 \quad (134)$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma \quad (135)$$

$$2\gamma_m = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (136)$$

$$G = \gamma + D_2 \sin \gamma \cos 2\gamma_m + D_4 \sin 2\gamma \cos 4\gamma_m + D_6 \sin 3\gamma \cos 6\gamma_m \quad (137)$$

$$G_2 = G + G_1 \quad 2G_m = G_1 + G_2 \quad (138)$$

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_6 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{4}u^2 + \frac{39}{64}u^4 - \frac{133}{256}u^6 + \frac{7491}{16384}u^8 \\ \frac{3}{8}u^2 - \frac{3}{16}u^4 + \frac{111}{1024}u^6 - \frac{141}{2048}u^8 \\ \frac{15}{256}u^4 - \frac{15}{256}u^6 + \frac{405}{8192}u^8 \\ \frac{35}{256}u^6 - \frac{105}{6144}u^8 \\ \frac{315}{131072}u^8 \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$\begin{bmatrix} D_2 \\ D_4 \\ D_6 \\ D_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}u^2 - \frac{3}{8}u^4 + \frac{213}{1024}u^6 - \frac{255}{2048}u^8 \\ \frac{21}{128}u^4 - \frac{21}{128}u^6 + \frac{1599}{12288}u^8 \\ \frac{151}{3072}u^6 - \frac{453}{6144}u^8 \\ \frac{1097}{65536}u^8 \end{bmatrix} \quad (140)$$

$$\sin B_2 = \frac{\sin G_2 \cos \alpha A_0}{k} \quad (141)$$

$$\cos A_2 = k \cot G_2 \tan B_2 \quad (142)$$

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \frac{(\cos G - \sin B_1 \sin B_2)}{\cos B_1 \cos B_2} \\ \sin \lambda &= \frac{\sin G (k^2 - \cos^2 A_1)^{1/2}}{k \cos B_2}\end{aligned}\quad (143)$$

$$(\lambda - L) = f \sin A_0 (E_0 G - E_2 \sin G \cos 2G_m + E_4 \sin 2G \cos 4G_m - E_6 \sin 3G \cos 6G_m) \quad (144)$$

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_2 \\ E_4 \\ E_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{4}f(1 + f + f^2) \cos^2 A_0 + \frac{3}{16}f^2 \left(1 + \frac{9}{4}f\right) \cos^4 A_0 - \frac{25}{128}f^3 \cos^6 A_0 \\ \frac{1}{4}f(3 + 5f + 7f^2) \cos^2 A_0 - f^2 \left(1 + \frac{49}{16}f\right) \cos^4 A_0 + \frac{365}{256}f^3 \cos^6 A_0 \\ \frac{5}{32}f^2 \left(1 + \frac{13}{4}f\right) \cos^4 A_0 - \frac{95}{256}f^3 \cos^6 A_0 \\ \frac{35}{768}f^3 \cos^6 A_0 \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$L_2 = L_1 + \lambda - (\lambda - L) \quad (146)$$

İteratif olmayan direkt problem için bir başka çözüm şekli, McCaw (1930)'ın geliştirdiği bazı prosedürleri esas alan Singh (1980) tarafından tanımlanmıştır. Tanımlanan prosedür, aşağıda (147) denkleminde verilen belirsiz integralin çözümüyle başlar;

$$\frac{s}{b} = \int (A + B \cos 2x + C \cos 4x + \dots) dx \quad (147)$$

(147) denkleminin integrali alındığında (148) denklemindeki şekli alır:

$$\frac{s}{b} = \left(Ax + \frac{B}{2} \sin 2x + \frac{C}{4} \sin 4x + \dots \right) \quad (148)$$

(148) eşitliğinin her iki tarafı A ile bölündüğünde (149) denklemi,

$$\frac{s}{b} C_0 = x + C_2 \sin 2x + C_4 \sin 4x \quad (149)$$

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{1}{A} \\ C_2 &= \frac{B}{2A} \\ C_4 &= \frac{C}{4A}\end{aligned} \quad (150)$$

elde edilir. Burada, C değerleri (139)'da tanımlanan değerlerle aynı değildir. Aynı zamanda (140)'ta verilen D değerleri de (157)'de tanımlanan değerlerden farklıdır. (149)

ve (150) denklemleri, $\sigma=0$ ile $\sigma=\sigma_1$ ($s=s_1$ olduğunda) arasında değerlendirilip, γ_1 değişkeni tanımlandığında (151) denklemi elde edilir:

$$\gamma_1 \equiv \frac{s_1 C_0}{b} = \sigma_1 + C_2 \sin 2\sigma_1 + C_4 \sin 4\sigma_1 + \dots \quad (151)$$

(149) ve (150) denklemleri, 0 ile $s+s_1=s_2$ arasında değerlendirildiğinde (s , ilgili iki nokta arasındaki çizginin uzunluğu);

$$\begin{aligned} \frac{C_0(s+s_1)}{b} &= \gamma + \gamma_1 = \sigma_2 + C_2 \sin 2\sigma_2 + C_4 \sin 4\sigma_2 + \dots \\ \sigma_2 &= s + s_1 \\ \gamma &= C_0 s / b \end{aligned} \quad (152)$$

(151) ve (152) denklemlerine ters seri açılımı uygulandığında (153) ve (154) denklemleri elde edilir:

$$\sigma_1 = \gamma_1 + \overline{C}_2 \sin 2\gamma_1 + \overline{C}_4 \sin 4\gamma_1 + \overline{C}_6 \sin 6\gamma_1 + \dots \quad (153)$$

$$\sigma_2 = (\gamma + \gamma_1) + \overline{C}_2 \sin 2(\gamma + \gamma_1) + \overline{C}_4 \sin 4(\gamma + \gamma_1) + \dots \quad (154)$$

İki nokta arasındaki uzunluk σ ise (153) ve (154) denklemlerinin farkı alınarak (155) denklemi bulunur:

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_2 - \sigma_1 &= \gamma + D_2 \sin \gamma \cos 2\gamma_m + D_4 \sin 2\gamma \cos 4\gamma_m \\ &\quad + D_6 \sin 3\gamma \cos 6\gamma_m + \dots \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma_m &= \gamma + 2\gamma_1 \\ u^2 &= e'^2 \sin^2 \beta_0 \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{bmatrix} D_2 \\ D_4 \\ D_6 \\ D_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{8}u^4 + \frac{71}{1024}u^6 - \frac{85}{2048}u^8 + \dots \\ \frac{5}{128}u^4 - \frac{5}{128}u^6 + \frac{383}{12288}u^8 + \dots \\ \frac{29}{3072}u^6 - \frac{29}{2048}u^8 + \dots \\ \frac{539}{196608}u^8 + \dots \end{bmatrix} \quad (157)$$

Sayısal testler, Singh (1980) metodu ile bulunan sonuçların doğruluğunun iteratif yöntemlerle aynı olduğunu göstermektedir.

1.9.2.2. İteratif Olmayan Yöntemle Ters Jeodezik Problem Çözümü

İteratif çözüm yöntemiyle hesaplama yaparak yüksek doğruluk elde etmek çok fazla zaman alabilir. Sodano (1958), iteratif olmayan bir yaklaşımla çözüm elde edilebilmesi için bir yöntem geliştirmiştir. Gerekli formüller aşağıda verilmiştir:

$$\lambda = L + x \quad (158)$$

olarak alınır. Burada x , (67) denkleminin sağ tarafına eşittir ve küçük bir değerdir. λ değerini bulmak için (90) denklemindeki $\cos \lambda$ 'ya ihtiyaç vardır. Buradan hareketle (159)'daki denklemler,

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos(L + x) = \cos L \cos x - \sin L \sin x \\ \cos \lambda &= \cos L \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right) - (\sin L) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \end{aligned} \quad (159)$$

bulunur. (159)'da verilen denklemlerin düzenlenmesi ile (160) denklemi,

$$\cos \lambda = \cos L - (\sin L)x - \left(\frac{1}{2} \cos L\right)x^2 + \dots \quad (160)$$

elde edilir. İteratif olmayan bu prosedürün gelişim usulü, iteratif prosedür içinde uygun seriye açılımların kullanılmasını kapsayan bir işlemdir. Örneğin, (90) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \left(\cos L - \sin L x - \frac{1}{2} \cos L x^2 + \dots\right) \\ &= \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos L - \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin L x \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos L x^2 \end{aligned} \quad (161)$$

$$\cos \sigma = \cos \sigma_0 - \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin L x - \frac{1}{2} \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos L x^2 + \dots \quad (162)$$

$\cos \sigma = \cos \sigma_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$ denkleminde k uygun sabitine göre tanımlamalar yapılırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılır (k_i : uygun sabit; $i=1,2,3,\dots,n$):

$$\sigma = \sigma_0 + k_3 x + k_4 x^2 + \dots \quad (163)$$

$$\sin \lambda = \sin L + k_5 x + k_6 x^2 + \dots \quad (164)$$

(67) denklemi k sabitine göre ifade edilirse (165) denklemi

$$(\lambda - L) = k_7 + k_8 x + k_9 x^2 + \dots \quad (165)$$

elde edilir. Burada k_7 , k_8 ve k_9 karmaşık ifadelerdir.

(165) denklemi (158) denkleminde $(\lambda-L)=x$ olacak şekilde yeniden düzenlenirse (166) ve sonuçta (167) denklemi,

$$(\lambda - L) = x = k_7 + k_8 x + k_9 x^2 \quad (166)$$

$$x = k_7(1 + k_8 + k_8^2 + k_7 k_9) \quad (167)$$

elde edilebilir. k_7 , k_8 ve k_9 ifadelerini bildiğimizden iterasyona başvurmadan x veya $(\lambda-L)$ için cebirsel bir ifade geliştirmek mümkündür. Bu ifadeyi vermeden önce, x parametresinin bir fonksiyonu olan σ veya $\sin \sigma$ ve katlarının seriye açılımları kullanılarak (49) denklemindeki uzaklık ifadesini değiştirmek mümkündür. Esasında yardımcı küre üzerindeki boylam farkına göre oluşturulan (49) denkleminin aksine, buradaki ifade elipsoidal boylam farkının bir fonksiyonu olacaktır. Bu durumda (49) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$s = b(k_{10} + k_{11}x + k_{12}x^2 + \dots) \quad (168)$$

Aynı işlem, elipsoidal boylam farkı ve x parametresinin bir fonksiyonu olacak şekilde azimutlar içinde yapılabilir. (167) denkleminin çözümünden bulunan x değeri kullanılarak λ bulunur.

$(\lambda-L)$ değeri, (167) denklemi yardımıyla bulunduktan sonra (90) veya (91) denkleminden σ bulunur, (92) denklemlerinden azimutlar bulunabilir ve nihayetinde (49) denkleminden mesafe elde edilir. Ancak s için (168) denklemi de alternatif olarak kullanılabilir. Bu işlem, (167) denkleminde bulunan x ifadesinin cebirsel olarak (168) denklemi içinde kullanılmasıyla gerçekleştirilir. Cebirsel olarak karmaşık bir işlem yapısına sahip olmasına rağmen, elde edilen sonuç açısından etkili bir denklemdir.

Sodano (1965), önceki çalışmasındaki denklemleri sadeleştirerek iteratif olmayan çözüm için yeni bir yöntem sunmuştur. Çalışmasında sunduğu denklemler f 'nin katları şeklinde düzenlenmiştir ve tanımladığı a_k , b_k , c_k ve m ifadeleri ile oluşturulan çözüm yöntemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} a_k &= \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ b_k &= \cos \beta_1 \cos \beta_2 \\ \cos B &= a_k + b_k \cos L \end{aligned} \quad (169)$$

$$\sin B = ((\sin L \cos \beta_2)^2 + (\sin \beta_2 \cos \beta_1 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos L)^2)^{1/2} \quad (170)$$

$$\begin{aligned} c_k &= b_k \sin L / \sin B \\ m &= 1 - c_k^2 \end{aligned} \quad (171)$$

s ve λ için Sodano ve Robinson (1963)'dan alınan aşağıdaki denklemler kullanılır:

$$\begin{aligned} \frac{s}{b_0} &= (1 + f + f^2 + f^3)B \\ &+ a_k \left[(f + f^2 + f^3) \sin B + \left(-\frac{1}{2}f^2 - f^3 \right) B^2 \csc B + \frac{1}{2}f^3 B^3 \csc B \cot B \right] \\ &+ m \left[\left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}f^3 \right) B + \left(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}f^3 \right) \sin B \cos B + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{2}f^2 + f^3 \right) B^2 \cot B - \frac{1}{6}f^3 B^3 - \frac{1}{2}f^3 B^3 \cot^2 B \right] \\ &+ a_k^2 \left[\left(-\frac{1}{2}f^2 - f^3 \right) \sin B \cos B + \frac{1}{2}f^3 B^3 \csc^2 B + \frac{1}{2}f^3 B \right] \\ &+ m^2 \left[\left(\frac{1}{16}f^2 + \frac{1}{8}f^3 \right) B + \left(\frac{1}{16}f^2 + \frac{1}{8}f^3 \right) \sin B \cos B + \left(-\frac{1}{2}f^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{7}{4}f^3 \right) B^2 \cot B + \left(-\frac{1}{8}f^2 - \frac{1}{4}f^3 \right) \sin B \cos^3 B + \frac{1}{4}f^3 B \cos^2 B + \frac{1}{3}f^3 B^3 + \\ &\quad \left. \frac{3}{2}f^3 B^3 \cot^2 B \right] \\ &+ a_k m \left[\left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{7}{4}f^3 \right) B^2 \csc B + \left(\frac{1}{2}f^2 + f^3 \right) \sin B \cos^2 B - \frac{3}{4}f^3 B \cos B - \right. \\ &\quad \left. 2f^3 B^3 \csc B \cot B \right] \\ &+ a_k^2 m \left[-\frac{1}{2}f^3 B - \frac{1}{2}f^3 \sin B \cos B - \frac{1}{2}f^3 B^3 \csc^2 B + f^3 \sin^3 B \cos B \right] \\ &+ a_k m^2 \left[-\frac{3}{4}f^3 B^2 \csc B + \frac{1}{2}f^3 \sin B \cos^2 B + \frac{3}{4}f^3 B \cos B + \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{2}f^3 B^2 \csc B \cot B - \frac{1}{2}f^3 \sin B + \frac{1}{2}f^3 \sin^5 B \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m^3 \left[-\frac{1}{32}f^3B + \frac{3}{4}f^3B^2 \cot B - \frac{1}{32}f^3 \sin B \cos B + \frac{1}{16}f^3 \sin B \cos^3 B - \right. \\
& \left. \frac{1}{4}f^3B \cos^2 B - \frac{1}{6}f^3B^3 - f^3B^3 \cot^2 B + \frac{1}{12}f^3 \sin^3 B \cos^3 B \right] \\
& +a_k^3 \left[\frac{1}{2}f^3 \sin B - \frac{2}{3}f^3 \sin^3 B \right]
\end{aligned} \tag{172}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda-L}{c_k} &= [(f + f^2 + f^3)B] \\
& +a_k \left[\left(-\frac{1}{2}f^2 - f^3 \right) \sin B + (-f^2 - 4f^3) B^2 \csc B + \frac{3}{2}f^3B^3 \csc B \cot B \right] \\
& +m \left[\left(-\frac{5}{4}f^2 - 3f^3 \right) B + \left(\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{2}f^3 \right) \sin B \cos B + (f^2 + 4f^3)B^2 \cot B - \right. \\
& \left. \frac{1}{2}f^3B^3 - \frac{3}{2}f^3B^3 \cot^2 B \right] \\
& +m^2 \left[\frac{31}{16}f^3B - \frac{7}{16}f^3 \sin B \cos B + \frac{1}{2}f^3B^3 - \frac{1}{8}f^3 \sin^3 B \cos B - \right. \\
& \left. \frac{9}{2}f^3B^2 \cot B + \frac{1}{2}f^3B \cos^2 B + \frac{5}{2}f^3B^3 \cot^2 B \right] \\
& +a_k m \left[\frac{9}{2}f^3B^2 \csc B - \frac{3}{2}f^3B \cos B - \frac{7}{2}f^3B^3 \csc B \cot B - \frac{1}{2}f^3 \sin B \cos^2 B + \right. \\
& \left. f^3 \sin B \right] \\
& +a_k^2 \left[f^3B + \frac{1}{2}f^3 \sin B \cos B + f^3B^3 \csc^2 B \right]
\end{aligned} \tag{173}$$

Sodano (1965), iteratif olmayan denklemleri geliştirirken, σ değerinin 180 dereceye yaklaştığı çizgilerde iteratif ters problemlerin sayısal olarak kontrol edilmesinde bir problem ortaya çıkmıştır. Bu çizgilere, anti-podal (açısal olarak ters yönde) çizgiler veya yakın anti-podal çizgiler denir. Ortaya çıkan tutarsızlıklar, (172) ve (173) denklemlerinde bazı terimlerin artmasına neden olur ve özellikle bu durum $\csc B$ ve $\cot B$ terimlerini içeren denklemlerde görülebilir. $B \rightarrow 180^\circ$ olduğunda, bu terimler oldukça büyür ve limit sonsuza gider. $B \rightarrow 0^\circ$ olduğunda, B ve $\sin B$ terimleri de sifıra yaklaşacağından bu problemler olmaz. Bu amaçla, (158) denklemi aşağıdaki gibi yeniden formüle edilmiştir:

$$\lambda = L_n + z \tag{174}$$

L_n , λ değerine L 'den daha yakın bir değerdir ve z , x 'den daha küçük bir değerdir. (174) denkleminde L_n yerine $L+x$ yazarsak;

$$\lambda = (L + x) + z \tag{175}$$

elde edilir. (175) denklemini kullanarak, iteratif olmayan prosedürden türetilen bütün prosedür tekrarlanabilir. Bu defa denklemler, L yerine L_n 'nin bir fonksiyonu olur.

$$\begin{aligned}(\lambda - L) &= f \sin A_0 (k\sigma + \dots) = L_n + z - L \\ z &= (L - L_n) + f \sin A_0 (k\sigma + \dots)\end{aligned}\quad (176)$$

Burada L yerine L_n ve x yerine de z değeri kullanılarak terimleri düzenlenmiştir;

$$z = \frac{16(L-L_n) + (16e^2 h_1 c_k B - e^2 h_2 c_k B - e^2 h_2 c_k \sin B \cos B + 2e^2 e'^2 c_k P \sin^2 B)_n}{16(1-e^2 h_1 c_k^2 - e^2 h_1 P B)_n} \quad (177)$$

$$\begin{aligned}h_1 &= \frac{e'}{(e' + e)} \\ h_2 &= e'^2 m \\ P &= (1 - c_k^2) \cot B - a_k \csc B\end{aligned}\quad (178)$$

(177) denklemindeki n alt indeksi, tüm değerlendirmelerin L yerine L_n değeri ile yapılması gerektiğini ifade eder. z değeri aslında eğrinin uzunluğuna bağlıdır. Yay uzunluğu 170 derecenin altındaki eğriler için z , 0,001" olabilir. Bununla birlikte, uzunluğu 180 dereceden az olan eğriler için z ; azimut, başlangıç enlemi vs. bağlı olarak 4" veya 5" ye ulaşabilir.

1.9.3. Sayısal İntegrasyon Yaklaşımıyla Jeodezik Problem Çözümü

Denklemlerin seriye açılımları yerine hesaplamada alternatif bir yöntem olarak sayısal integrasyon kullanılabilir ve bu konuda Saito (1970) bir yöntem geliştirmiştir. Bu prosedürü geliştirmek için (55) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenir:

$$dL - d\lambda = \cos \beta_0 \left[\frac{(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{\frac{1}{2}} - 1}{\cos^2 \beta} \right] d\sigma \quad (179)$$

(179) denkleminin sağ tarafındaki pay ve paydayı $(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} + 1$ ile çarparsak aşağıdaki denklem,

$$d\lambda - dL = \frac{e^2 \cos \beta_0 d\sigma}{(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} + 1} \quad (180)$$

elde edilir. $x = \sigma_1 + \sigma$ olduğu varsayılırsa, $dx = d\sigma$ olur. $k^2 = e'^2 \sin^2 \beta_0$ kullanılarak (180) denklemi yeniden düzenlenirse (181) denklemi,

$$d\lambda - dL = \frac{e^2 \cos \beta_0 dx}{1 + \frac{b}{a}(1 + k^2 \sin^2 x)^{1/2}} \quad (181)$$

elde edilir. (181) denkleminin integrali alınırsa (182) denklemi,

$$\lambda - L = e^2 \cos \beta_0 \int_{\sigma_1}^{\sigma_1 + \sigma_T} \frac{dx}{1 + \frac{b}{a}(1 + k^2 \sin^2 x)^{1/2}} \quad (182)$$

elde edilir. İntegrasyon aralığını normalleştirmek için bir z değeri tanımlanır;

$$\begin{aligned} x &= \sigma_1 + \sigma_T z \\ dx &= \sigma_T dz \\ 0 &\leq z \leq 1 \end{aligned} \quad (183)$$

(40) ve (182) denklemleri, z değerine göre düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$s = b\sigma_T \int_0^1 \sqrt{1 + k^2 \sin^2(\sigma_1 + \sigma_T z)} dz \quad (184)$$

$$\lambda - L = e^2 \cos \beta_0 \sigma_T \int_0^1 \frac{dz}{1 + \frac{b}{a}(1 + k^2 \sin^2(\sigma_1 + \sigma_T z))^{1/2}} \quad (185)$$

Saito (1979), aynı zamanda Gauss karesel formüllerini dikkate alarak (182), (184) veya (185) gibi denklemlerin değerlendirilmesi için kullanılabilecek çok özel bir integrasyon prosedürü üzerinde de durmuştur. Bu prosedürü gerçekleştirmek için yeni bir değer olan z' tanımlamıştır.

$$\begin{aligned} x &= \sigma_m + \frac{\sigma}{2} z' \\ \sigma_m &= (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \\ -1 &\leq z' \leq 1 \end{aligned} \quad (186)$$

(40) ve (182) denklemleri yeniden düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$s = \frac{b}{2} \sigma_T \int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \left(\sigma_m + \frac{\sigma_T}{2} z' \right)} dz' \quad (187)$$

$$\lambda - L = \frac{e^2 \cos \beta_0 \sigma_T}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz'}{\left(1 + \frac{b}{a} \left(1 + k^2 \sin^2 \left(\sigma_m + \frac{\sigma_T}{2} z' \right) \right) \right)^{1/2}} \quad (188)$$

$f(x)$ fonksiyonuna uygulanan Gauss karesel prosedür aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad (189)$$

Burada w_k ağırlıkları, x_k ise eş düğümleri ifade eder ve değerlendirmenin doğruluğu n değerine bağlıdır. (189) denklemi ile (187) ve (188) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$s = \frac{b}{2} \sigma_T G \quad (190)$$

$$G = \sum_{i=1}^n w_i \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \left(\sigma_m + \frac{\sigma_T}{2} z_i' \right)}$$

$$\lambda - L = \frac{F}{2} e^2 \cos \beta_0 \sigma_T \quad (191)$$

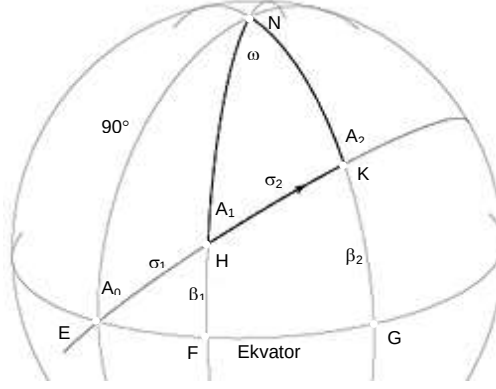
$$F = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\left(1 + \frac{b}{a} \left(1 + k^2 \sin^2 \left(\sigma_m + \frac{\sigma_T}{2} z_i' \right) \right) \right)^{1/2}}$$

1.9.4. Çalışmada Kullanılan Yöntemlerin Matematiksel Formülasyonu

Bu bölümde, aynı zamanda çalışmamızdaki uygulamada da kullanılan Bessel, Sjöberg ve Karney çözüm yöntemlerine değinilmiştir:

1.9.4.1. Bessel Çözüm Yöntemi

Bessel (1825), yardımcı küre üzerinde oluşturduğu denklemlerle mesafe ve boylam farkını ifade eden integralleri seriye açarak yeni denklemler elde etmiştir.



Şekil 10. Yardımcı küre üzerinde küresel üçgenler

EHK, jeodezik eğri; N, kuzey kutup noktası; EFG, ekvator ve NE, NHF, NKG; meridyenlerdir (Şekil 10). Çalışmasını, mesafe denkleminin çözümü ve boylam farkının hesaplanması şeklinde iki bölümde sunmuştur.

a) Mesafe denkleminin çözümü:

$$ds = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\sigma \quad (192)$$

(192)'de verilen diferansiyel denklemi çözmek için önce β_1 , β_2 , A_1 , A_2 ve σ arasındaki ilişkiyi gösteren üç denklem tanımlanır;

$$\begin{aligned} \sin \beta_2 &= \sin \beta_1 \cos \sigma_2 + \cos \beta_1 \cos A_1 \sin \sigma_2 \\ -\cos \beta_2 \cos A_2 &= -\sin \beta_1 \sin \sigma_2 + \cos \beta_1 \cos A_1 \cos \sigma_2 \\ -\cos \beta_2 \sin A_2 &= \cos \beta_1 \sin A_1 \end{aligned} \quad (193)$$

EAN küresel üçgeninin açı ve kenarı olan m ve M yardımcı açıları yardımıyla aşağıdaki denklemler elde edilir. Burada AEF üçgeninde sinüs kuralı ile kosinüs kuralı ve ANE üçgeninde sinüs kuralı uygulanmıştır.

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \cos A_0 \sin \sigma_1 \\ \cos \beta_1 \cos A_1 &= \cos A_0 \cos \sigma_1 \\ \cos \beta_1 \sin A_1 &= \sin A_0 \end{aligned} \quad (194)$$

(193) denklemi (194) denklemine göre düzenlenirse (195) denklemi,

$$\begin{aligned}
\sin \beta_2 &= \cos A_0 \sin(\sigma_1 + \sigma_2) \\
\cos \beta_2 \cos A_2 &= -\cos A_0 \cos(\sigma_1 + \sigma_2) \\
\cos \beta_2 \sin A_2 &= -\sin A_0
\end{aligned} \tag{195}$$

elde edilir ve tanımlanan bu denklemler yardımıyla ds denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
ds &= a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1+k^2\sin^2(\sigma_1+\sigma_2)}d\sigma \\
k &= \frac{e\cos A_0}{\sqrt{1-e^2}}
\end{aligned} \tag{196}$$

(196) denkleminde ds seriye açıldığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$ds = a \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e} d\sigma [A - 2B \cos 2(\sigma_1 + \sigma_2) - 2C \cos 4(\sigma_1 + \sigma_2) - 2D \cos 6(\sigma_1 + \sigma_2) - \dots] \tag{197}$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{1+k^2}-1}{\sqrt{1+k^2}+1} \tag{198}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \epsilon^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 \epsilon^4 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 \epsilon^6 + \dots \\ \frac{1}{2} \epsilon - \frac{1.1}{2.4} \frac{1}{2} \epsilon^3 - \frac{1.1.3}{2.4.6} \frac{1}{2.4} \epsilon^5 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \frac{1.1.3}{2.4.6} \epsilon^7 - \dots \\ \frac{1.1}{2.4} \epsilon^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6} \frac{1}{2} \epsilon^4 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \frac{1.1}{2.4} \epsilon^6 - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \frac{1.1.3}{2.4.6} \epsilon^8 - \dots \\ \frac{1.1.3}{2.4.6} \epsilon^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \frac{1}{2} \epsilon^5 - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \frac{1.1}{2.4} \epsilon^7 - \frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} \frac{1.1.3}{2.4.6} \epsilon^9 - \dots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{199}$$

$\sigma_2=0$ başlangıç değeri ile ds denkleminin integrali aşağıdaki gibi olur:

$$s = \frac{b}{1-e} \left[A\sigma_2 - \frac{2}{1} B \cos(2\sigma_1 + \sigma_2) \sin \sigma - \frac{2}{2} C \cos(4\sigma_1 + 2\sigma_2) \sin 2\sigma_2 - \frac{2}{3} D \cos(6\sigma_1 + 3\sigma_2) \sin 3\sigma_2 - \dots \right] \tag{200}$$

s, A_1 ve β_1 bilindiğinde (200) denkleminde σ_2 bulunabilir. İkinci noktanın enlemi ve jeodezik azimut (195) denkleminde elde edilir. (200) denklemi serilere çevrilerek ya da iteratif yaklaşımla çözülebilir. (200) denklemi çözüm için yeniden düzenlendiğinde (201) denklemi elde edilir (α , β , γ ve δ ; Bessel tarafından tanımlanan katsayılarıdır):

$$\sigma_2 = \frac{\alpha}{b} s + [\beta \cos(2\sigma_1 + \sigma_2) \sin \sigma_2 + \gamma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma_2) \sin 2\sigma_2 + \delta \cos(6\sigma_1 + 3\sigma_2) \sin 3\sigma_2 + \dots] \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{648000}{\pi} \frac{1-\epsilon}{A} \\ \beta &= \frac{648000}{\pi} \frac{2B}{A} \\ \gamma &= \frac{648000}{\pi} \frac{C}{A} \\ \delta &= \frac{648000}{\pi} \frac{2D}{3A} \end{aligned} \quad (202)$$

b) Boylam denkleminin çözümü:

$$d\omega = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\omega \quad (203)$$

$$d\omega = d\omega - (1 - \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}) d\omega \quad (204)$$

$$d\omega = \frac{\sin A_1 \cos \beta_1}{\cos^2 \beta_2} d\sigma \quad (205)$$

$$\omega = \omega - \sin A_1 \cos \beta_1 \int \frac{1 - \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}}{\cos^2 \beta} d\sigma \quad (206)$$

(203) denkleminin çözümü için (206) denklemi seriye açılır ve (207) denkleme dönüştürülür:

$$\begin{aligned} \omega &\approx \omega - \frac{e^2}{2} \sin A_0 \int \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}e^2 \cos^2 \beta_2}} \\ &\approx \omega - \frac{e^2}{2} \sin A_0 \int \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{4}e^2 \cos^2 A_0 \sin^2(\sigma_1 + \sigma_2)}} \end{aligned} \quad (207)$$

$$k' = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}e \cos A_0}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^2}} \quad (208)$$

(208) formülündeki gibi bir k' terimi tanımlanarak, (207) denklemindeki integral içinde değerlendirildiğinde oluşan ifade aşağıdaki gibidir:

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}e^2} \sqrt[3]{1 + k'^2 \sin^2(\sigma_1 + \sigma_2)}} \quad (209)$$

İntegrasyona tabi tutulan (207) denklemi, bir ϵ' terimi tanımlanarak aşağıdaki gibi iki karmaşık değişkene ayrılır (210 ve 211):

$$\epsilon' = \frac{\sqrt{1+k'^2}-1}{\sqrt{1+k'^2}+1} \quad (210)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{(1-\epsilon')^2/(1-\frac{3}{4}e^2)}d\sigma}{\sqrt[3]{1-\epsilon' \exp(2i(\sigma_1+\sigma_2))} \sqrt[3]{1-\epsilon' \exp(-2i(\sigma_1+\sigma_2))}} \quad (211)$$

(211) denklemi sonsuz serilere açılırsa, (212) denklemi elde edilir (α' , β' , γ' , δ' : Bessel tarafından tanımlanan katsayılardır):

$$\frac{2}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}e^2}} \int (\alpha' + \beta' \cos 2(\sigma_1 + \sigma_2) + 2\gamma' \cos 4(\sigma_1 + \sigma_2) + 3\delta' \cos 6(\sigma_1 + \sigma_2) + \dots) d\sigma \quad (212)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1-\epsilon')^2} \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \epsilon'^2 + \left(\frac{1.4}{3.6}\right)^2 \epsilon'^4 + \dots \right] \\ \frac{1}{1} \sqrt[3]{(1-\epsilon')^2} \left[\frac{1}{3} \epsilon' + \frac{1.4}{3.6} \frac{1}{3} \epsilon'^3 + \frac{1.4.7}{3.6.9} \frac{1.4}{3.6} \epsilon'^5 + \dots \right] \\ \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1-\epsilon')^2} \left[\frac{1.4}{3.6} \epsilon'^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9} \frac{1}{3} \epsilon'^4 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12} \frac{1.4}{3.6} \epsilon'^6 + \dots \right] \\ \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-\epsilon')^2} \left[\frac{1.4.7}{3.6.9} \epsilon'^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12} \frac{1}{3} \epsilon'^5 + \frac{1.4.7.10.13}{3.6.9.12.15} \frac{1.4}{3.6} \epsilon'^7 + \dots \right] \end{pmatrix} \quad (213)$$

$\sigma_2=0$ için integrasyon yapıldığında (214) formülü elde edilir. (215)'de verilen formüllerden A_1 ve A_2 bulunabilir.

$$\omega \approx \omega - \frac{e^2 \sin A_0}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}e^2}} (\alpha' \sigma_2 + \beta' \cos(2\sigma_1 + \sigma_2) \sin \sigma_2 + \gamma' \cos(4\sigma_1 + 2\sigma_2) \sin 2\sigma_2 + \delta' \cos(6\sigma_1 + 3\sigma_2) \sin 3\sigma_2 + \dots) \quad (214)$$

$$\sin \omega = \frac{\sin \sigma_2 \sin A_1}{\cos \beta_2} = -\frac{\sin \sigma_2 \sin A_2}{\cos \beta_1} = \frac{\sin \sigma_2 \sin A_0}{\cos \beta_2 \cos \beta_1} \quad (215)$$

1.9.4.2. Sjöberg Çözüm Yöntemi

Sjöberg (2012), sayısal integrasyonun avantajlarından yararlanarak elipsoit üzerinde direkt ve ters jeodezik problemlerin çözümünü gerçekleştirmiştir. Çözüme küre üzerinde

başladıktan sonra sayısal integrasyon ile belirlenen bir düzeltme ekleyerek elipsoit üzerinde sonuca gitmiştir. Sjöberg, 2006 yılında yaptığı çalışmasında; küresel çözümleri kapalı formda sunmuş, elipsoit üzerindeki düzeltmeleri ise sayısal integrasyon için uygun olan (e^2)'nin katlarının eliptik integralleri şeklinde düzenlemiştir. Ancak bu yöntem, maksimum veya minimum enlemlerde olan uzun jeodezik eğriler için iyi performans gösterememiştir (Sjöberg, 2006). Sjöberg, 2012 yılındaki çalışmasında ise; azimutlar boyunca integralleri, indirgenmiş enlemler boyunca önceki integrallere dönüştürerek bu sorunu çözmeye çalışmıştır. Aynı zamanda, jeosantrik açı boyunca integrasyon alınarak çözüme devam edilmiştir (Sjöberg, 2012).

a) Direkt problemin çözümünde üç özel durum üzerinde durulmuştur:

Durum-1: ($A_1=0$) ve ($\lambda_2=\lambda_1$) Bu durumda, Clairaut sabiti (c) sıfır olur ve ikinci noktanın enlemi ds 'in iterasyona tabi tutulması sonucunda (194) denkleminde bulunur:

$$\beta_2 = \beta_1 + (s - ds)/a \quad (216)$$

$$ds = -ae^2 \int_{x_1=\sin \beta_1}^{x_2=\sin \beta_2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-e^2(1-x^2)}} dx \quad (217)$$

Durum-2: ($B_1=0$ ve $A_1=90^\circ$) Bu durumda, jeodezik eğri ekvator boyunca uzanır ve ikinci noktanın enlem ve boylamı aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 0 \\ L_2 &= L_1 + s/a \end{aligned} \quad (218)$$

Durum-3: Durum-1 ve durum-2 haricindeki tüm durumlar için geçerlidir. Problemde önce Clairaut sabiti (c) hesaplanır;

$$c = \cos \beta_1 \sin A_1 \quad (219)$$

Jeodezik eğrinin maksimum olduğu enlem ile ilk nokta arasındaki jeodezik uzunluk s_0 (s yerine s_0 konulur) aşağıdaki denklemlere göre hesaplanır:

$$s = S + ds \quad (220)$$

$$\begin{aligned}
S &= ac \int_{A_1}^{A_2} \frac{dA}{\sin A \sqrt{\sin^2 A - c^2}} \\
&= \pm ac \int_{x_1=\sin A_1}^{x_2=\sin A_2} \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2} \sqrt{x^2-c^2}} = \pm a \operatorname{arc} \sin \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2-c^2}{1-c^2}} \right)_{x_1}^{x_2}
\end{aligned} \tag{221}$$

- Eğer jeodezik eğri ekvatorndan geçmiyorsa;

$$ds = \pm e^2 ac^3 \int_{y_1=\cos \alpha_1}^{y_2=\cos \alpha_2} \frac{dy}{(1-y^2)^{3/2} \sqrt{1-c^2-y^2} (\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-y^2-e^2 c^2})} \tag{222}$$

- Eğer jeodezik eğri ekvatorndan geçiyorsa;

$$ds = -ae^2 \int_{x_1=\sin \beta_1}^{x_2=\sin \beta_2} \frac{dx}{\sqrt{1-c^2-x^2} (1+\sqrt{1-e^2+e^2 x^2})} \tag{223}$$

- Eğer $s=s_0$ ise

$$\beta_2 = \operatorname{arc} \cos(c) \tag{224}$$

- Eğer $s \neq s_0$ ise

$$x_1 = \sin A_1 \tag{225}$$

$$A = \frac{1}{x_2} \sqrt{\frac{x_2^2-c^2}{1-c^2}} = \sin \left[\frac{s-ds}{a} + \operatorname{arc} \sin \left(\frac{1}{x_1} \sqrt{\frac{x_1^2-c^2}{1-c^2}} \right) \right] \tag{226}$$

$$x_2 = \sin A_2 = \frac{c}{\sqrt{1-A^2(1-c^2)}} \tag{227}$$

$$\cos \beta_2 = \sqrt{1-A^2(1-c)^2} \tag{228}$$

Burada ds ve A ; (200), (204), (205) ve (206) denklemlerinin iterasyonu ile belirlenir. L_2 'nin hesaplanma prosedürü ise aşağıda açıklandığı gibi yapılır. $0 < c < 1$ olmak üzere;

$$L_2 - L_1 = \Lambda + dL \tag{229}$$

$$\Lambda = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin A dA}{\sqrt{\sin^2 A - c^2}} \tag{230}$$

$$dL = -e^2 c^2 \int_{A_1}^{A_2} \frac{dA}{\sqrt{\sin^2 A - c^2} (\sin A + \sqrt{\sin^2 A - e^2 c^2})} \tag{231}$$

b) Ters problem çözümünde ise beş özel durum üzerinde durulmuştur:

Durum-1: ($L_1 = L_2$)

Bu durumda jeodezik eğri meridyen boyunca uzanır ve $A_1 = A_2 = 0$ veya π olur.

Jeodezik eğrinin uzunluğu;

$$s = a \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\beta = a(\beta_2 - \beta_1) + ds \quad (232)$$

$$\begin{aligned} ds &= a \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} - 1) d\beta = -ae^2 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\cos^2 \beta d\beta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} + 1} \\ &= -ae^2 \int_{x_1=\sin \beta_1}^{x_2=\sin \beta_2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-e^2(1-x^2)}} dx \end{aligned} \quad (233)$$

Durum-2: ($\beta_1 = \beta_2 = 0$ ve $|\pi - \Delta L| > h$ ($\Delta L = L_2 - L_1$) ve $h \approx \pi e^2 / 2 \approx 36'09''$)

Bu durumda, jeodezik eğri ekvator boyunca uzanır ve $A_1 = A_2 = \pm \pi/2$ olur. Bu eğrinin uzunluğu ise;

$$s = a\Delta L \quad (234)$$

Durum-3: ($\beta_1 = \beta_2 = 0$ ve $|\pi - \Delta L| \leq h$)

Bu durumda, Clairaut sabiti aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\pi - \Delta L}{2e^2 I} \approx \frac{2}{e^2} \left(1 - \frac{\Delta L}{\pi}\right) \\ I &\approx \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (235)$$

Terminal noktalarının azimutları (236) formülünden hesaplanır:

$$A = \pm \arcsin c \quad (236)$$

Mesafe ise (237), (238), (239), (240) ve (241) denklemlerinin çözümünden elde edilir:

$$s = S + ds \quad (237)$$

$$\begin{aligned} S &= ac \int_{A_1}^{A_2} \frac{dA}{\sin A \sqrt{\sin^2 A - c^2}} = \pm ac \sum_{i=1}^2 \int_{x_1=\sin A_i}^1 \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2} \sqrt{x^2-c^2}} \\ &= a \sum_{i=1}^2 \arcsin \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2-c^2}{1-c^2}} \right)_{x=x_i} \end{aligned} \quad (238)$$

$$ds = ds_1 + ds_2 \quad (239)$$

$$ds_1 = -ae^2c^3 \int_{\beta_1}^{\beta_3} \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{\cos^2 \beta - c^2(1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta})}} \quad (240)$$

$$ds_2 = ae^2c^3 \int_{\cos A_3}^{\cos A_2} \frac{dy}{(1 - y^2)^{3/2} \sqrt{1 - c^2 - y^2} (\sqrt{1 - e^2 c^2} + \sqrt{1 - y^2})} \quad (241)$$

Burada tanımlanan β_3 jeodezik eğri üzerinde alınan keyfi bir noktanın enlemidir ve ilk noktaya göre ekvatorun karşı tarafında yer alır ve bu noktanın azimutu (242) formülünden hesaplanabilir:

$$A_3 = \pi - \arcsin(c / \cos \beta_3) \quad (242)$$

Durum-4: ($\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $\beta_1 \neq 0$ ve/veya $\beta_2 \neq 0$)

Bu durumda, Clairaut sabiti (c), (243) formülündeki gibi olur:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + t_0^2}} \quad (243)$$

$$t_0^2 = \frac{t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2 \cos DL}{\sin^2 DL} \quad (244)$$

$$t_i = \tan \beta_i \quad (245)$$

$$DL = L_2 - L_1 - dL \neq \pi \quad (246)$$

dL ise (229), (230) ve (231) denklemlerinden elde edilir.

Durum-5: Eğer $DL = \pi$ olursa, (243) formülü geçerli olmaz ve bu durumda Clairaut sabiti c, (235) formülünden bulunur. Azimutlar (247) formülünden, mesafe ise; (237), (238), (239), (240) ve (241) denklemlerinden bulunur.

$$\begin{aligned} A_i &= \arcsin(c / \cos \beta_i) \\ A_i &= \pi - \arcsin(c / \cos \beta_i) \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \quad (247)$$

c) Sjöberg (2012), aynı zamanda jeodezik eğri boyunca integrasyon için Bessel (1826)'ın kullandığı yardımcı kürenin avantajından yararlanarak sayısal integrasyon için kapalı ifadeler içeren denklemler geliştirmiştir.

- Direkt problemin çözümünde Clairaut sabiti (c),

$$c = \cos \beta_1 \sin A_1 \quad (248)$$

elde edilir. γ sabiti, (249) formülünden

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sin \beta_1}{\sqrt{1-c^2}} \quad (249)$$

bulunur. ψ jeosantrik açı olmak üzere iterasyona tabi tutulacak denklem ($j=1,2,\dots$) (250)'de,

$$\psi_{j+1} = \frac{1}{1+\frac{k^2}{4}} \left[\frac{s}{b} - \frac{k^2}{4} \frac{\sin 2\gamma_1 - \sin 2\gamma_j}{2} + \frac{k^4}{2} \int_0^{\psi_j} \frac{\sin^4 \gamma}{(1+\sqrt{1+k^2 \sin^2 \gamma})^2} d\psi \right] \quad (250)$$

tanımlanmıştır. İterasyona, yakınsama en iyi olana kadar devam edilmelidir. İkinci noktanın enlemi,

$$\begin{aligned} \sin \beta_2 &= \sqrt{1-c^2} \sin \gamma_2 \\ \gamma_2 &= \gamma(\psi) = \gamma_1 + \psi \end{aligned} \quad (251)$$

formülünden elde edilir. İkinci noktanın boylamı ($\beta_1 < \beta_2$),

$$\Delta\lambda = c \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta - c^2}} \frac{d\beta}{\cos \beta} = \Lambda + dL \quad (252)$$

$$\Lambda = \arctan(c \tan \gamma_2) - \arctan(c \tan \gamma_1) \quad (253)$$

$$dL = -\frac{ce^2}{2} \left\{ \psi + e^2 \int_0^{\psi} \frac{1-(1-c^2) \sin^2 \gamma(\psi) d\psi}{[1+\sqrt{1-e^2} \sqrt{1+k^2 \sin^2 \gamma(\psi)}]^2} \right\} \quad (254)$$

formüllerinden elde edilir. Azimut (A_2) ise

$$\begin{aligned} \cos A_2 &= \frac{\sqrt{\cos^2 \beta_2 - c^2}}{\cos \beta_2} \\ \sin A_2 &= \frac{c}{\cos \beta_2} \end{aligned} \quad (255)$$

formülünden bulunur.

• Ters problemin çözümünde Clairaut sabiti (c); (235), (243), (244) ve (245) formüllerinden hesaplanır. dL aşağıdaki formülden belirlenir:

$$\begin{aligned} dL &= c \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}-1}{\cos \beta \sqrt{\cos^2 \beta - c^2}} d\beta = c \int_0^\psi \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}-1}{\cos^2 \beta} d\psi \\ &= -ce^2 \int_0^\psi \frac{d\psi}{1+\sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}} = -ce^2 \int_0^\psi \frac{d\psi}{1+\sqrt{1-e^2} \sqrt{1+k^2 \sin^2 \gamma(\psi)}} \end{aligned} \quad (256)$$

Azimutlar (A_1 ve A_2), (257), (258) ve (259) formüllerinden hesaplanır:

$$\sin A_1 = \frac{c}{\cos \beta_1} \quad (257)$$

$$\sin A_2 = \frac{c}{\cos \beta_2}$$

$$\psi = \gamma_2 - \gamma_1 = \arcsin \left(\frac{\sin \beta_2}{\sqrt{1-c^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{\sin \beta_1}{\sqrt{1-c^2}} \right) \quad (258)$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1-c^2}} \quad (259)$$

Mesafe (s), (260) formülünden bulunur:

$$s = b \left\{ \left[1 + \frac{k^2}{4} \right] \psi + \frac{k^2}{4} \frac{\sin 2\gamma_1 - \sin 2\gamma(\psi)}{2} - \frac{k^4}{2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_1+\psi} \frac{\sin^4 \gamma(\psi)}{(1+\sqrt{1+k^2 \sin^2 \gamma(\psi)})^2} d\psi \right\} \quad (260)$$

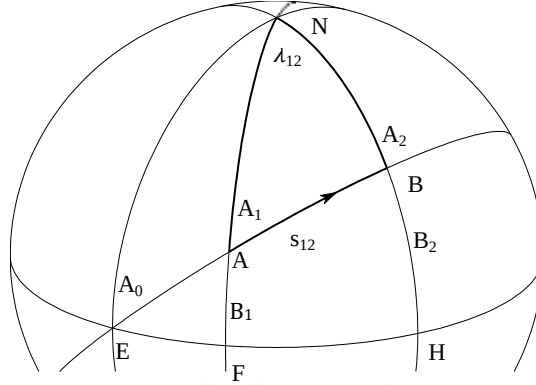
En yüksek hassasiyette c 'yi hesaplamak için (261) formülü kullanılabilir. DL , (246) formülünden ve dL , (254) formülünden bulunur.

$$c = \sin DL / \sqrt{(t_1 - t_2)^2 + \sin^2 DL + 2t_1 t_2 (1 - \cos DL)} \quad (261)$$

1.9.4.3. Karney Çözüm Yöntemi

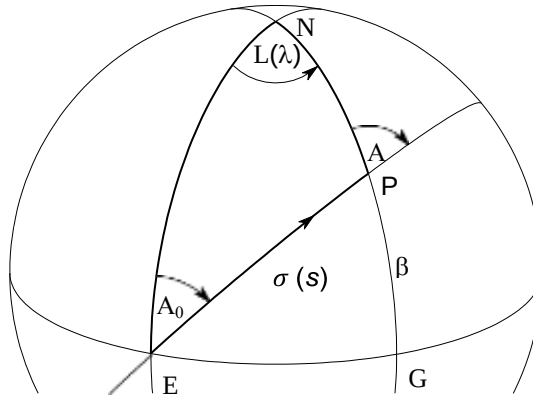
Karney (2013) çalışmasında, dönel elipsoid üzerinde jeodezik eğrilerin hesaplanması için algoritmalar geliştirmiştir. Bu algoritmalar sayesinde jeodezik temel problemler daha doğru, sağlam ve hızlı bir şekilde çözülebilir. Aynı zamanda jeodezik eğrilerin diferansiyel ve integral çözümlerine imkân verir. Çalışmasının amacı, Helmert (1880)'in ve önceki kuşak araştırmacıların jeodezik metotlarını modern bilgisayarın kullanımına adapte

etmektedir. Direkt jeodezik temel problemin çözümünde Şekil 11'deki üçgenden yararlanılmıştır.



Şekil 11. NAB Elipsoidal üçgen

Şekil 11'de, NAB elipsoidal üçgen, N kuzey kutup noktası, NAF ve NBH meridyen yayları, AB, (s_{12}) jeodezik eğri uzunluğudur. λ_{12} : A ile B noktaları arasındaki boylam farkı, B_1 ve B_2 : A ile B noktalarının enlemleri, EFH ekvator çizgisi, A_0 : EAB jeodezik eğrinin ekvatoru kestiği E noktasındaki azimutu, A_1 ve A_2 : jeodezik eğrinin A ve B noktalarındaki azimutlarıdır. Şekil 12'de NEP: yardımcı küre ile eşleştirilmiş temel elipsoidal üçgen, NE ve NPG: meridyen yayları, EG: ekvator, EP: büyük daire yayı, P: Şekil 11'de gösterilen EAB jeodezik eğrisi üzerinde alınan keyfi bir noktayı temsil etmektedir.



Şekil 12. Yardımcı küre ile eşleştirilmiş temel elipsoidal üçgen

$i = \sqrt{-1}$ } kompleks sayı olmak üzere;
 $ph(x + iy)$

$$A_0 = ph(|\cos A_1 + i \sin A_1 \sin \beta_1| + i \sin A_1 \cos \beta_1) \quad (262)$$

$$\sigma_1 = ph(\cos A_1 \cos \beta_1 + i \sin \beta_1) \quad (263)$$

$$\omega_1 = ph(\cos \sigma_1 + i \sin A_0 \sin \sigma_1) \quad (264)$$

$$k = e' \cos A_0 \quad (265)$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{1+k^2}-1}{\sqrt{1+k^2}+1} \quad (266)$$

$$A_{k1} = (1 - \epsilon)^{-1} \left(1 + \frac{1}{4}\epsilon^2 + \frac{1}{64}\epsilon^4 + \frac{1}{256}\epsilon^6 + \dots \right) \quad (267)$$

$$I_1(\sigma_1) = A_{k1}(\sigma_1 + \sum_{l=1}^{\infty} C_{1l} \sin 2l\sigma_1) \quad (268)$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \\ C_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{16}\epsilon^3 - \frac{1}{32}\epsilon^5 + \dots \\ -\frac{1}{16}\epsilon^2 + \frac{1}{32}\epsilon^4 - \frac{9}{2048}\epsilon^6 + \dots \\ -\frac{1}{48}\epsilon^3 + \frac{3}{256}\epsilon^5 + \dots \\ -\frac{5}{512}\epsilon^4 + \frac{3}{512}\epsilon^6 + \dots \\ -\frac{7}{1280}\epsilon^5 + \dots \\ -\frac{7}{2048}\epsilon^6 + \dots \end{bmatrix} \quad (269)$$

Elipsoit üzerinde jeodezik eğri uzunluğu için (270, 271, 272 ve 273) formülleri kullanılır. C' katsayıları ise seriye açılım ile hesaplanır.

$$s_1 = bI_1(\sigma_1) \quad (270)$$

$$s_2 = s_1 + s_{12} \quad (271)$$

$$\tau_2 = s_2 / bA_{k1} \quad (272)$$

$$\sigma_2 = \tau_2 + \sum_{l=1}^{\infty} C'_{1l} \sin 2l\tau_2 \quad (273)$$

$$\begin{bmatrix} C'_{11} \\ C'_{12} \\ C'_{13} \\ C'_{14} \\ C'_{15} \\ C'_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\epsilon - \frac{9}{32}\epsilon^3 + \frac{205}{1536}\epsilon^5 + \dots \\ \frac{5}{16}\epsilon^2 - \frac{37}{96}\epsilon^4 + \frac{1335}{4096}\epsilon^6 + \dots \\ \frac{29}{96}\epsilon^3 - \frac{75}{128}\epsilon^5 + \dots \\ \frac{539}{1536}\epsilon^4 - \frac{2391}{2560}\epsilon^6 + \dots \\ \frac{3467}{7680}\epsilon^5 + \dots \\ \frac{38081}{61440}\epsilon^6 + \dots \end{bmatrix} \quad (274)$$

$$A_2 = ph(\cos A_0 \cos \sigma_2 + i \sin A_0) \quad (275)$$

$$\beta_2 = ph(|\cos A_0 \cos \sigma_2 + i \sin A_0| + i \cos A_0 \sin \sigma_2) \quad (276)$$

$$\omega_2 = ph(\cos \sigma_2 + i \sin A_0 \sin \sigma_2) \quad (277)$$

$$A_{k3} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n\right)\epsilon - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}n - \frac{3}{8}n^2\right)\epsilon^2 - \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16}n + \frac{1}{16}n^2\right)\epsilon^3 \\ - \left(\frac{3}{64} + \frac{1}{32}n\right)\epsilon^4 - \frac{3}{128}\epsilon^5 + \dots \quad (278)$$

$$I_3(\sigma_1) = A_{k3}(\sigma_1 + \sum_{l=1}^{\infty} C_{3l} \sin 2l\sigma_1) \quad (279)$$

$$I_3(\sigma_2) = A_{k3}(\sigma_2 + \sum_{l=1}^{\infty} C_{3l} \sin 2l\sigma_2) \quad (280)$$

$$\begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \\ C_{34} \\ C_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}n\right)\epsilon + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}n^2\right)\epsilon^2 + \left(\frac{3}{64} + \frac{3}{64}n - \frac{1}{64}n^2\right)\epsilon^3 + \left(\frac{5}{128} + \frac{1}{64}n\right)\epsilon^4 + \frac{3}{128}\epsilon^5 + \dots \\ \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{32}n + \frac{1}{32}n^2\right)\epsilon^2 + \left(\frac{3}{64} - \frac{1}{32}n - \frac{3}{64}n^2\right)\epsilon^3 + \left(\frac{3}{128} + \frac{1}{128}n\right)\epsilon^4 + \frac{5}{256}\epsilon^5 + \dots \\ \left(\frac{5}{192} - \frac{3}{64}n + \frac{5}{192}n^2\right)\epsilon^3 + \left(\frac{3}{128} - \frac{5}{192}n\right)\epsilon^4 + \frac{7}{512}\epsilon^5 + \dots \\ \left(\frac{7}{512} - \frac{7}{256}n\right)\epsilon^4 + \frac{7}{512}\epsilon^5 + \dots \\ \frac{21}{2560}\epsilon^5 + \dots \end{bmatrix} \quad (281)$$

$$L_1 = \omega_1 - f \sin A_0 I_3(\sigma_1) \quad (282)$$

$$L_2 = \omega_2 - f \sin A_0 I_3(\sigma_2) \quad (283)$$

$$\tan B_2 = \tan \beta_2 / (1 - f) \quad (284)$$

Direkt problemin çözümünde öncelikle B_1 bilindiğinden β_1 bulunur. Daha sonra Şekil 11'deki NEA üçgenin çözümünden (262), (263) ve (264) denklemleri ile A_0 , σ_1 ve ω_1 bulunur. s_1 ve L_1 (269) ve (280) denklemlerinin yardımıyla (271) ve (283) formüllerinden bulunur. $s_2 = s_1 + s_{12}$ belirlenir ve σ_2 (274) denkleminde yararlanılarak bulunur. NEB küresel üçgenin çözümü ile A_2 , β_2 , B_2 ve ω_2 (276), (277) ve (278) formüllerinden bulunur. Son olarak L_2 , (281) denkleminin yardımıyla (284) formülünden bulunur.

Karney ters jeodezik temel problemin çözümünde Newton metodundan yararlanmıştır. Ters problemi çözmede A_1 için iyi bir başlangıç değerine ihtiyaç vardır. Çoğu durumda bu değer, $\omega_{12} = L_{12}/\varpi$ farz edilerek ve yardımcı kürede büyük daire yayı üzerinde çözüm yapılarak sağlanmaktadır.

$$\varpi = \sqrt{1 - e^2((\cos \beta_1 + \cos \beta_2)/2)^2} \quad (285)$$

$$z_1 = \cos \beta_1 \sin \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \omega_{12} + i \cos \beta_2 \sin \omega_{12} \quad (286)$$

$$z_2 = -\sin \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \omega_{12} + i \cos \beta_1 \sin \omega_{12} \quad (287)$$

$$A_1 = phz_1 \quad (288)$$

$$A_2 = phz_2 \quad (289)$$

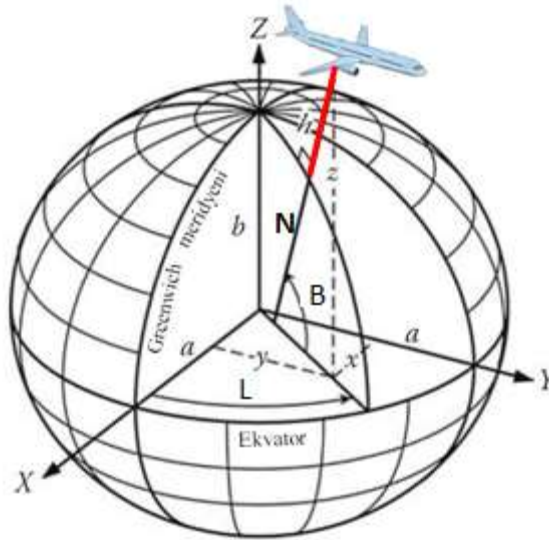
$$\sigma_{12} = ph(\sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \omega_{12} + i|z_1|) \quad (290)$$

Öncelikle, bilinen coğrafi enlemlerden β_1 ve β_2 indirgenmiş enleme geçilir. Daha sonra (285) formülünden ϖ , (286) ve (287) denklemlerinden yararlanılarak (288) ve (289) formülleriyle A_1 ve A_2 bulunur. (286) denkleminde yararlanılarak (290) formülünden σ_{12} bulunur. Son olarak, s_{12} aşağıdaki formülden hesaplanır:

$$s_{12} = a\varpi\sigma_{12} \quad (291)$$

1.10. Jeodezik Eğrinin Kirişlere Ayrılması Yöntemi

Elipsoit yüzeyinde coğrafi koordinatları bilinen başlangıç ve bitiş noktaları arasında uzanan jeodezik eğrinin, uygulayıcının belirleyeceği sabit oranda mesafe (örneğin 10 km aralıklı) veya boylam (örneğin, 10° aralıklı) değerlerine bölünmesi ve bu suretle oluşturulan ara noktaların (waypoint) koordinatlarının bulunması işlemidir.



Şekil 13. Elipsoidal kartezyen koordinatlar (Başaraner ve Çetinkaya, 2017).

Uçaklar, uçuş öncesinde belirlenmiş irtifalarda (yüksekliklerde) uçtuklarından, izledikleri güzergâhlar üzerinde tanımlanmış noktaların (waypoint) koordinatları elipsoidal kartezyen koordinatlar yardımıyla bulunabilir (Şekil 13). Bu ara noktaların elipsoidal coğrafi koordinatları ise birinci jeodezik temel problemle hesaplanır. Ara noktaların coğrafi koordinatları belirlendikten sonra meridyene dik doğrultudaki eğrilik yarıçapı N , B coğrafi enlemine bağlı olarak (292) formülünden belirlenir. Daha sonra kartezyen koordinatları (293)'de ifade edilen formüllerden bulunur (Bildirici, 2016).

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (292)$$

$$X = (N + h) \cos B \cos L$$

$$Y = (N + h) \cos B \sin L \quad (293)$$

$$Z = (N(1 - e^2) + h) \sin B$$

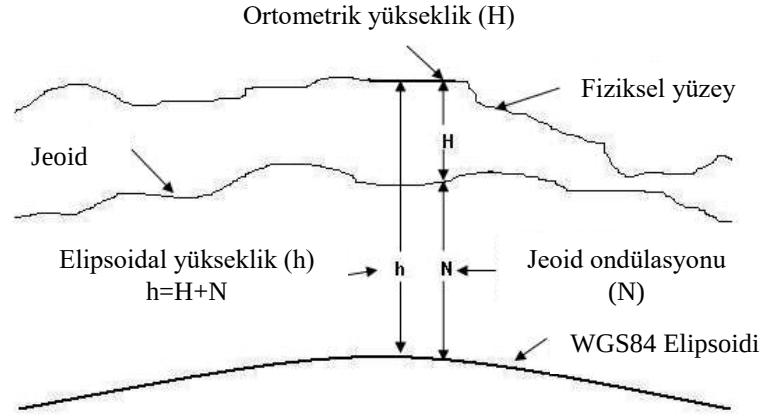
(293) formülünden bulunan (X, Y, Z) kartezyen koordinatlarından üç boyutlu yol uzunluğu S , (294) formülü ile elde edilir. Burada n güzergâh noktası sayısını, i herhangi bir güzergâh noktasını ve Δ koordinat farklarını ifade etmektedir (Bossler ve Snay, 2010).

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Delta X_{i,i+1}^2 + \Delta Y_{i,i+1}^2 + \Delta Z_{i,i+1}^2} \quad (294)$$

Uçuş hattı boyunca olan uçuş yüksekliği, ortalama deniz seviyesine göredir ve pratik anlamda ortometrik yüksekliğe karşılık gelir. Elipsoidal yüksekliği hesaplamak için (295) eşitliği kullanılır. Bu eşitlikte h elipsoidal yüksekliği, H ortometrik yüksekliği ve N jeoid ondülasyonunu (jeoid yüksekliği) ifade etmektedir (Bossler ve Snay, 2010):

$$h = H + N \quad (295)$$

(295) eşitliğini düşey referans sistemi içerisinde değerlendirecek olursak; düşey referans sistemi sadece iki parametre ile tanımlanabilir. Bunlar; düşey farkların hesaplanması ile yüksekliği bulunan bir nokta ve referans yüzeyidir (URL-4, 2017). Şekil 14'e göre düşey yükseklik ile ilgili bazı tanımlamalar aşağıda verilmiştir:



Şekil 14. Düşey yükseklik ilişkileri (URL-4, 2017).

a) Elipsoidal Yükseklik (h): Fiziksel yüzey üzerindeki bir noktaya referans elipsoidi arasındaki dikey (ortogonal) uzaklıktır (Şekil 14).

b) Ortometrik Yükseklik (H): Fiziksel yüzey üzerindeki bir noktanın jeoid'den olan düşey uzaklığıdır (Şekil 14).

c) Jeoid Ondülasyonu (N): Global olarak, jeoid ile jeosantrik WGS84 elipsoidi arasındaki yükseklik farkı ± 100 m arasındadır ve yükseklikteki bu farka, jeoid ondülasyonu (dalgalanması) denmektedir (Şekil 14).

d) Jeoid (Dünyanın Yerçekimi Modeli – EGM): Jeoid, yükseklik ölçümleri için referans yüzeyi görevi gören ve belirli bir seviyede (yaklaşık Ortalama Deniz Seviyesi (MSL)) seçilen yerçekimi alanının eş potansiyel yüzeyidir (Şekil 14).

Küresel ve yerel jeoidler, birkaç açıdan farklılık göstermektedirler. Küresel jeoidler (EGM96 gibi), tüm dünyanın yerçekimi alanının yalnızca uzun ve orta dalgalı kısımlarını dikkate almaktadır (URL-5, 2017). Yerel jeoidler ise, yerçekimi alanının daha küçük bir bölgesinin uzun, orta ve kısa dalga bölümlerini dikkate almaktadır. Dünyanın en iyi küresel jeoid modellerinden biri EGM2008'dir (URL-6, 2017). EGM2008, 2159 derece ve sıradan modelleme imkânı sunar. Bu nedenle orta ve kısa dalga bölümlerinin daha önceki global jeoidlere göre daha kapsamlı olduğu düşünülmektedir. Küresel jeoidler, uzun mesafelerde (anakara veya yer ölçümü) tutarlı ortometrik yüksekliklere ihtiyaç duyulduğunda kullanılır (URL-6, 2017).

Yerel mühendislik uygulamaları ve kadaströ ölçümleri için, küresel jeoidlerden gerektiği kadar doğru sonuçlar elde edilemeyebilir. Böyle uygulamalar için, yerel jeoid modelleri hesaplanmaktadır. Bunlar yalnızca yerel saha ölçümleri kullanılarak

geliştirilebilir. Yüksek çözünürlüklü yerel jeoidler, birkaç yüz kilometre üzerinde santimetre düzeyinde hassasiyet sunarlar. Yerel jeoidler, başlangıç noktası ile referans yükseklikleri arasındaki farkı (farklı eş potansiyel seviyeler) dikkate aldığı için, geniş mesafelerde yükseklik karşılaştırması için uygun değildir (URL-4, 2017).

En yeni küresel jeoid modeli olan EGM2008, daha fazla doğruluk elde etmek için bir araç olarak kullanılabilir. Uydu izleme, gravite anomalisi ve uydu altimetresi kullanılarak kararlılığı arttırılabilir. Tahmini küresel doğruluğu, ± 0.05 m (okyanuslarda) ve ± 0.5 m (karada) aralığı içindedir. Bu doğruluk, düz bölgelerde topoğrafik olarak dağlık arazilerdekenden daha yüksektir ki, EGM08 tüm gereksinimleri karşılar ve uygulandığında, EGM96'nın yerel doğruluğunun değerlendirilmesi yükümlülüğünü sonlandırır (URL-4, 2017).

1.11. Tseng Büyük Eliptik Yayı Çözüm Yöntemi

Elipsoit üzerinde jeodezik eğri kullanımı yerine hesap yükünden kaçınmak için büyük eliptik yayı yardımıyla hesap yapılabilir. Elipsoitte büyük eliptik yayı, jeosantrik enlemin normal kesit eğrilerinin arakesit düzlemlerinden oluşur. Jeosantrik enlem ise, bir elipsoid noktasını elipsoidin merkezine bağlayan doğrunun ekvator düzlemi ile yaptığı açıdır. Büyük eliptik kesiti, büyük eliptik yayını içinde bulundurur ve ekvatoru elipsoit merkezinde (O) ve E ile E' olmak üzere iki noktada keser (Şekil 15). Bu yayda jeosantrik enlemin yarıçapı, elipsoit merkeziyle birleştiği için hesap jeodezik eğriye nispeten daha basittir. Elipsoitte ekvator ve tüm meridyenler büyük eliptik yayıdır. Elipsoitte herhangi iki noktadan, elipsoit merkeziyle beraber yalnız bir eliptik düzlemi oluşur ve bu iki noktadan sadece bir büyük eliptik yayı geçer. Büyük eliptik yayı en kısa mesafeyi vermez. Elipsoitte büyük eliptik yayı ekvatoru E ve E' noktalarında keser. Büyük eliptik yayının elipsoitte maksimum coğrafi enlemi ise V noktasıdır. Bu nokta aynı zamanda büyük eliptik yayının kuzey kutup noktasıdır. Elipsoitte herhangi bir büyük eliptik yayının büyük yarı eksenini $EE'=2a$ ve küçük yarı eksenini ise $VV'=2b'$ dir (Şekil 15) (Deakin ve Hunter, 2010).

$$v_1 = \text{atan2}[\sin \alpha_1, \cos(B_1 - \gamma_1) \cos \alpha_1] \quad (297)$$

$$L_e = L_1 + \text{atan2}(-\sin \gamma_1 \sin v_1, \cos v_1) \quad (298)$$

$$\gamma_v = \text{acos}(\cos \gamma_1 \sin v_1) \quad (299)$$

$$\varepsilon = \frac{e \sin \gamma_v}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \gamma_v}} \quad (300)$$

$$\sigma_1 = \text{atan2}[\sin(L_1 - L_e) \sec \gamma_v, \cos(L_1 - L_e)] \quad (301)$$

$$\psi_1 = \text{atan2}[\sin \sigma_1, (1 - \varepsilon^2) \cos \sigma_1] \quad (302)$$

$$S(\psi_1) = a(1 - \varepsilon^2)[M_0 \psi_1 + \sum_{i=1}^{\infty} M_{2i} \sin(2i\psi_1)] \quad (303)$$

$$M_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{-\frac{3}{2}}{k} \binom{2k}{k} \varepsilon^{2k} \quad (304)$$

$$M_{2i} = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k}}{2^{2k}} \binom{-\frac{3}{2}}{k} \binom{2k}{k-i} \varepsilon^{2k} \quad (305)$$

$$\mu_1 = \frac{\pi S(\psi_1)}{2S(\pi/2)} \quad (306)$$

$$S(\pi/2) = \frac{\pi}{2} a(1 - e^2) M_0 \quad (307)$$

$$\mu_2 = \mu_1 + \frac{\text{sign}(\alpha_1)s}{a(1-e^2)M_0} \quad (308)$$

$$\psi_2 = \mu_2 + C_2 \sin 2\mu_2 + C_4 \sin 4\mu_2 + C_6 \sin 6\mu_2 + C_8 \sin 8\mu_2 \quad (309)$$

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \\ C_6 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4096 \{1536 + [768 + (426 + 255\varepsilon^2)\varepsilon^2]\varepsilon^2\}\varepsilon^2 \\ 1/8192 [672 + (672 + 533\varepsilon^2)\varepsilon^2]\varepsilon^4 \\ 1/12288 (302 + 453\varepsilon^2)\varepsilon^6 \\ 1097/131072 \varepsilon^8 \end{bmatrix} \quad (310)$$

$$\sigma_2 = \text{atan2}[(1 - \varepsilon^2) \sin \psi_2, \cos \psi_2] \quad (311)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (312)$$

$$\gamma_2 = \text{asin}(\sin \gamma_1 \cos \sigma_{12} + \cos \gamma_1 \sin \sigma_{12} \cos v_1) \quad (313)$$

$$B_2 = \text{atan2}[\sin \gamma_2, (1 - e^2) \cos \gamma_2] \quad (314)$$

$$L_2 = L_1 + \text{atan2}(\sin \sigma_{12} \sin v_1, \cos \gamma_1 \cos \sigma_{12} - \sin \gamma_1 \sin \sigma_{12} \cos v_1) \quad (315)$$

$$\alpha_2 = \text{atan2}(\cos(B_2 - \gamma_2) \cos \gamma_1 \sin v_1, -\sin \gamma_1 \sin \sigma_{12} + \cos \gamma_1 \cos \sigma_{12} \cos v_1) \quad (316)$$

b) Ters çözüm:

$$\gamma_1 = \text{atan2}[(1 - e^2) \sin B_1, \cos B_1] \quad (317)$$

$$\gamma_2 = \text{atan2}[(1 - e^2) \sin B_2, \cos B_2] \quad (318)$$

$$v_1 = \text{atan2}(\cos \gamma_2 \sin L_{12}, \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos L_{12}) \quad (319)$$

$$L_{12} = L_2 - L_1 \quad (320)$$

$$L_e = L_1 + \text{atan2}(-\sin \gamma_1 \sin v_1, \cos v_1) \quad (321)$$

$$\gamma_v = \text{acos}(\cos \gamma_1 \sin v_1) \quad (322)$$

$$\varepsilon = \frac{e \sin \gamma_v}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \gamma_v}} \quad (323)$$

$$\sigma_1 = \text{atan2}[\sin(L_1 - L_e) \sec \gamma_v, \cos(L_1 - L_e)] \quad (324)$$

$$\sigma_2 = \text{atan2}[\sin(L_2 - L_e) \sec \gamma_v, \cos(L_2 - L_e)] \quad (325)$$

$$\psi_1 = \text{atan2}[\sin \sigma_1, (1 - \varepsilon^2) \cos \sigma_1] \quad (326)$$

$$\psi_2 = \text{atan2}[\sin \sigma_2, (1 - \varepsilon^2) \cos \sigma_2] \quad (327)$$

$$S(\psi_1) = a(1 - \varepsilon^2)[M_0 \psi_1 + \sum_{i=1}^{\infty} M_{2i} \sin(2i\psi_1)] \quad (328)$$

$$S(\psi_2) = a(1 - \varepsilon^2)[M_0 \psi_2 + \sum_{i=1}^{\infty} M_{2i} \sin(2i\psi_2)] \quad (329)$$

$$M_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{-\frac{3}{2}}{k} \binom{2k}{k} \varepsilon^{2k} \quad (330)$$

$$M_{2i} = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k}}{2^{2k}} \binom{-\frac{3}{2}}{k} \binom{2k}{k-i} \varepsilon^{2k} \quad (331)$$

$$s = \begin{cases} |S(\psi_2) - S(\psi_1)|, \text{sign}(B_1) = \text{sign}(B_2) \\ |S(\psi_2)| + |S(\psi_1)|, \text{sign}(B_1) \neq \text{sign}(B_2) \end{cases} \quad (332)$$

$$\alpha_1 = \text{atan2}[\cos(B_1 - \gamma_1) \sin v_1, \cos v_1] \quad (333)$$

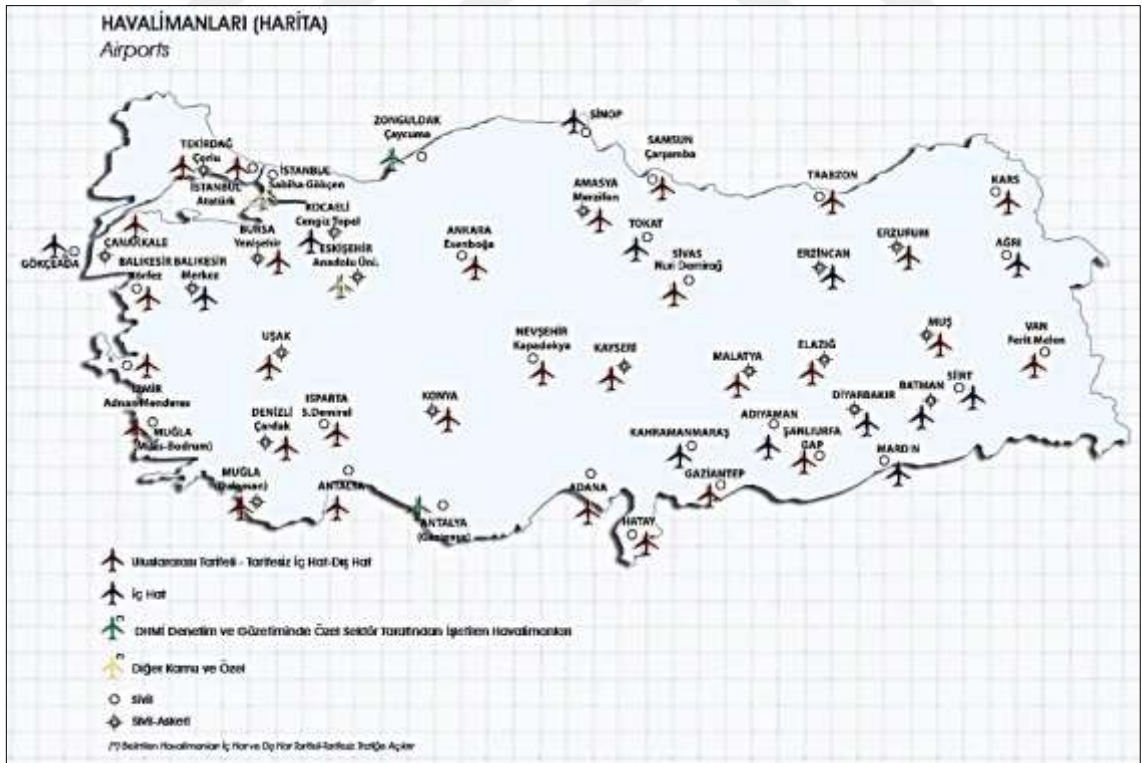
$$\alpha_2 = \text{atan2}(\cos(B_2 - \gamma_2) \cos \gamma_2 \sin L_{12}, -\sin \gamma_1 \cos B_2 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos L_{12}) \quad (334)$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Çalışma Alanı

Ülkemizde faaliyette olan 55 sivil havalimanı ve havaalanından 37'sinde uluslararası uçuşlar gerçekleştirilmektedir. Bunların 18'i aynı zamanda askerî amaçla kullanılmaktadır. Şekil 16'da Türkiye'deki havalimanlarını gösteren bir harita sunulmuştur (URL-1, 2017).

Çalışmada, Türkiye hava sahası içinde yer alan 12 tanesi uluslararası trafiğe açık, uçuş süresi bir saatin üzerinde ve mesafenin yaklaşık 400 ile 1400 km arasında olduğu 18 adet havalimanı seçilmiştir. Bu havalimanlarına ait bilgiler Tablo 1'de sunulmuştur. Ayrıca, başlangıç (kalkış) noktası batıda İstanbul Atatürk Havalimanı, bitiş (varış) noktaları ise sırasıyla doğu, kuzeydoğu, güney ve güneydoğu bölgelerindeki havalimanları alınarak jeodezik temel problem çözümleri gerçekleştirilmiştir.



Şekil 16. Türkiye'deki havalimanları (URL-1, 2017).

Tablo 1. Havalimanlarının konum (WGS84 referans elipsoidinde) ve tanımlama bilgileri

ICAO	IATA	Şehir	Havalimanı	Enlem (°)	Boylam (°)
LTBA	IST	İstanbul	Atatürk	40,97611111	28,81416667
LTAI	AYT	Antalya	Antalya	36,90027778	30,79277778
LTAF	ADA	Adana	Şakirpaşa	36,98222222	35,28027778
LTFH	SZF	Çarşamba	Çarşamba	41,26555556	36,54861111
LTCB	OGU	Ordu-Giresun	Ordu-Giresun	40,96722222	38,08194444
LTCG	TZX	Trabzon	Trabzon	40,99583333	39,78527778
LTAU	ASR	Kayseri	Erkilet	38,77027778	35,49527778
LTAN	KYA	Konya	Konya	37,98055556	32,56250000
LTAJ	GZT	Gaziantep	Oğuzeli	36,94777778	37,47888889
LTCS	GNV	Şanlıurfa	GAP	37,45666667	38,90833333
LTCC	DIY	Diyarbakır	Diyarbakır	37,89250000	40,20111111
LTCI	VAN	Van	Ferit Melen	38,46805556	43,33222222
LTCF	KSY	Kars	Harakani	40,56222222	43,11472222
LTCO	AJI	Ağrı	Ahmed-i Hani	39,64750000	43,02861111
LTCE	ERZ	Erzurum	Erzurum	39,95583333	41,17055556
LTCW	YKO	Yüksekova	Selahaddin Eyyübi	37,54972222	44,23750000
LTCT	IGD	İğdır	Şehit Bülent Aydın	39,98305556	43,86638889
LTCR	MQM	Mardin	Mardin	37,23277778	40,64055556

2.2. Uygulamada Teknik Verilerinden Yararlanılan Uçağın Özellikleri

Çalışmada uçuş güzergah noktalarının ortometrik yüksekliklerinin bulunmasında uçuşların A319neo uçağı ile gerçekleştirildiği düşünülüp, bu uçağın teknik verilerinden yararlanılmıştır.



Şekil 17. Uygulamada teknik verilerinden yararlanılan A319neo uçağı (URL-7, 2017).

Airbus A319neo; Airbus tarafından üretilen, kısa ve orta menzilli, dar gövdeli, iki motorlu jet uçaklara sahip ticari yolcu taşıyan Airbus A320 ailesinin bir üyesidir. A319neo, maksimum 160 yolcu kapasitesine ve 3750 nm (6,950 km) maksimum menzile

sahiptir (Şekil 17). Operasyonel verimliliğine en büyük katkı, *Sharklets* adı verilen büyük ve yakıt tasarrufu sağlayan kanat uçları cihazlarının birleşiminin yanı sıra iki yeni nesil motorun (PurePower PW1100G-JM ve LEAP-1A) seçilmesidir (URL-7, 2017).

Tablo 2. A319neo teknik özellikleri (URL-7, 2017).

A319neo			
Kokpit	2 kişilik	Hız	Mach 0.78 (829 km/h)
Yolcu kapasitesi	140 (max. 160)	Mesafe	3,750 nm /6,950 km
Uzunluğu	33.84 m	Kalkış mesafesi	1,850 m
Kanat genişliği	35.8 m	İniş mesafesi	1,360 m
Uçuş yüksekliği	39,100–41,000 ft		

Tablo 3. A319neo performans verisi (URL-7, 2017).

Kalkış safhası		Yükselme safhası (5000 ft'e kadar)		Yükselme safhası (5000 ft-15000 ft)		Yükselme safhası (15000 ft-24000 ft)	
Hız V ₂ (IAS)	135 kts	IAS	165 kts	IAS	290 kts	IAS	290 kts
Mesafe	1750 m	Yükselme oranı	2500 ft/min	Yükselme oranı	2200 ft/min	Yükselme oranı	1500 ft/min
Uçuş seyir safhası							
Hız (TAS)	450 kts	Uçuş yüksekliği	39000 ft	Mesafe		18000 nm (~33,336 km)	
Alçalma safhası (24000 ft'den itibaren)		Alçalma safhası (24000 ft- 10000 ft)		Alçalma safhası (10000 ft ve altı)		İniş safhası	
Hız (TAS)	450 kts	Hız (IAS)	290 kts	Hız (IAS)	210 kts	Hız V _{app} (IAS)	130 kts
Alçalma oranı	1000 ft/min	Alçalma oranı	3500 ft/min	Alçalma oranı	1000 ft/min	Mesafe	1350 m

2.3. Uçuş Güzergahı Ara Noktaların (Waypoints) Belirlenmesi

Havacılıkta uçuş güzergahı planlanırken meteorolojik koşullar, yakıt sarfıyatı, uçuş süresi, mevcut hava trafiği, mevcut arazi şartları, hava sahası kısıtlamaları ve hava sahası kullanım ücretleri gibi çeşitli ölçütler dikkate alınır (ICAO, 2006b).

Bu bölümde, uçuş güzergahlarında tesis edilen ara noktaların bu ölçütlerden bağımsız olarak nasıl belirlenebileceği üzerinde durulmuştur. Bu ara noktaların (waypoints) konumları (enlem ve boylam olarak), uçuş güzergahı üzerinde mesafe veya boylam değeri sabit bir oranda artırılarak bulunabilir. Örneğin, İstanbul-Adana uçuş güzergahı üzerinde boylam değeri sabit bir oranda artırılarak oluşturulan uçuş güzergahı ve ara noktaların konum bilgileri Şekil 18 ve Tablo 4'te verilmiştir.

Ayrıca bu örnekte oluşturulan ara noktaların sayısı, AIP ve uçuş planlarına bağlı kalınarak mevcut uçuş güzergahına ait ara noktalar ile eşit olacak şekilde belirlenmiştir. Bu yeni ara noktaların enlem, boylam, azimut ve mesafe değerleri, sabit oranda boylamın artırılmasıyla elde edildiği için orijinal noktaların konum değerlerinden doğal olarak farklı olmuştur.

$$\text{Sabit Oran} = \text{Boylam Farkı} / \text{İstenilen Ara Nokta Sayısı} \quad (335)$$

İlk nokta (lat1, lon1), ikinci nokta (lat2, lon2) ve ara noktanın boylamı lonx olmak üzere ara noktanın enlemi (latx),

$$\text{latx} = \tan^{-1} \left[\frac{\tan(\text{lat1}) \sin(\text{lonx} - \text{lon2}) + \tan(\text{lat2}) \sin(\text{lon1} - \text{lonx})}{\sin(\text{lon1} - \text{lon2})} \right] \quad (336)$$

$\text{lon1} \neq \text{lon2}$

formülünden hesaplanır.

Tablo 4. İstanbul-Adana arası tesis edilen ara noktalara ait konum ve mesafe değerleri

Nokta adı	Enlem (°)	Boylam (°)	Azimut (°)	Mesafe (km)
İstanbul	40,97611111	28,81416667	-	-
Waypoint_1	40,69703853	29,31155983	126,39743165	52,095
Waypoint_2	40,41345538	29,80895299	126,72268101	52,537
Waypoint_3	40,12531218	30,30634616	127,04607874	52,985
Waypoint_4	39,83255943	30,80373932	127,36758700	53,440
Waypoint_5	39,53514758	31,30113248	127,68716728	53,901
Waypoint_6	39,23302715	31,79852564	128,00478041	54,368
Waypoint_7	38,92614873	32,29591881	128,32038655	54,842
Waypoint_8	38,61446310	32,79331197	128,63394516	55,323
Waypoint_9	38,29792122	33,29070513	128,94541502	55,809
Waypoint_10	37,97647436	33,78809829	129,25475420	56,302
Waypoint_11	37,65007413	34,28549146	129,56192007	56,801
Waypoint_12	37,31867257	34,78288462	129,86686933	57,307
Adana	36,98222222	35,28027778	130,16955793	57,818

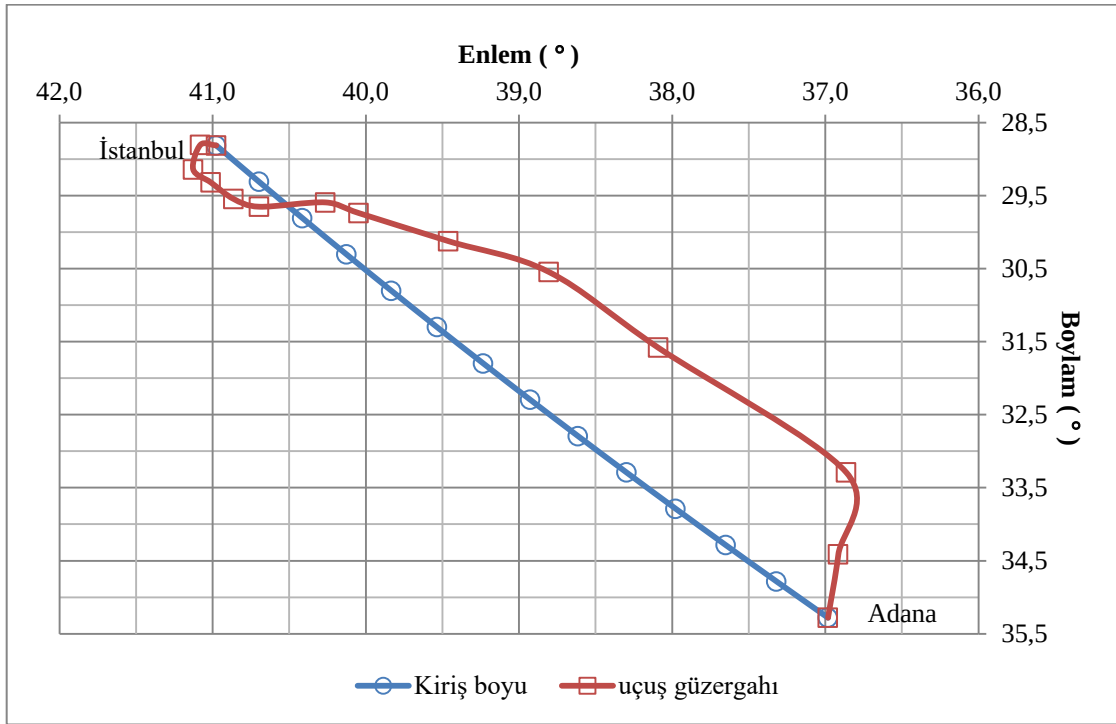
Azimut (uçuş başı), ortodrom eğrisi üzerinde sürekli olarak değişir ve

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left[\frac{\sin(\text{lon1} - \text{lonx})}{\cos(\text{lat1}) \tan(\text{lat2}) - \sin(\text{lat1}) \cos(\text{lon1} - \text{lonx})} \right] \quad (337)$$

formülünden bulunur. Noktalar arasındaki mesafe ise

$$s = 2R \sin^{-1} \left[\sqrt{\sin^2 \left(\frac{lat1-lat2}{2} \right) + \cos(lat1) \cos(lat2) \sin^2 \left(\frac{lon1-lon2}{2} \right)} \right] \quad (338)$$

formülünden hesaplanır.



Şekil 18. Kiriş boyu ile uçuş güzergâhı arasındaki farkın grafiksel gösterimi

İstanbul-Adana arası uçuş güzergâhı, gerçek uçuş planında 12 ara noktadan oluşmuştur. Ancak burada verilen örnekte, 13 ara nokta alınıp son noktanın (Adana) enlemini doğru bulmasının kontrolü sağlanmıştır.

Şekil 18 incelendiğinde, jeodezik eğrinin (uçuş güzergâhı) kırıslara bölünmesiyle oluşturulan yeni hattın (mavi hat) düz bir çizgi şeklinde olduğu görülmektedir. Boylam değeri sabit şekilde artarken, enlem değeri doğrusal olarak azalmaktadır. Orijinal uçuş güzergâhı ile karşılaştırıldığında, oluşan çizgi İstanbul ile Adana noktalarından geçen ortodrom eğrisi veya jeodezik eğriden büyük bir oranda saptığı görülmektedir. Bunun nedeni, uçakların uçuş boyunca açı (uçuş başı) ve seviye değiştirmeleri ve aynı zamanda

uçuş planlaması yapılırken yakıt, süre, meteorolojik koşullar, mevcut hava trafiği ve arazi koşullarının dikkate alınmasıdır.

2.4. Küresel Jeodezik Temel Problem Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Elipsoit yerine küre kullanılmasında konform tasvirle ya da çalışılan bölgede elipsoidi temsil eden yaklaşık küreler kullanılarak küreye geçiş yapılır. Çalışmamızda farklı yarıçaplara göre oluşturulmuş konform tasvir küresi kullanılmıştır. Elipsoidin küreye konform tasvirinde elipsoidin tamamı değil, sınırlı bir bölgesinin küreye tasviri söz konusudur. Konform tasvir yoluyla kürede hesap yapılarak, elipsoit üzerindeki hesap yoğunluğunun bir ölçüde azaltılması amaçlanır. Elipsoidin küreye konform tasvirinde, elipsoitte B_0 enlemi için yuvarlak bir değer seçimi başlangıç enlemine bağlı büyüklüklerin hesabında kolaylık sağlar. Uygulamamız Türkiye hava sahasındaki uçuş güzergâhlarını kapsadığından ve Türkiye'nin coğrafi konumunun enlem olarak 36° - 42° kuzey enlemleri arasında olmasından bu enlemleri ortalayan bir B_0 enleminde tasvir küresini seçmek mümkündür (Kaya, 1984). Elipsoitte B_0 ortalama enlemine göre tasvir sabitleri aşağıdaki formüllerle tanımlanabilir (K_1 ve K_2 tasvir sabitleri):

$$K_1 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 B_0} \quad (339)$$

$$\varphi_0 = a \sin((1/K_1) \sin B_0) \quad (340)$$

K_1 ve φ_0 değeri hesaplandıktan sonra B_0 ve φ_0 orta enlemlerine karşılık gelen q_0 ve w_0 izometrik enlemleri hesaplanır:

$$q_0 = \operatorname{atanh}(\sin B_0) - e * \operatorname{atanh}(e \sin B_0) \quad (341)$$

$$w_0 = \operatorname{atanh}(\sin \varphi_0) \quad (342)$$

$$K_2 = w_0 - K_1 q_0 \quad (343)$$

Bu hesaplamaların ardından konform tasvir küresinin enlem ve boylamı (344) ve (345) formüllerinden bulunur:

$$\lambda = K_1 L \quad (344)$$

$$\varphi = \operatorname{asin}\{\tanh[K_1(\operatorname{atanh}(\sin B) - e * \operatorname{atanh}(e \sin B)) + K_2]\} \quad (345)$$

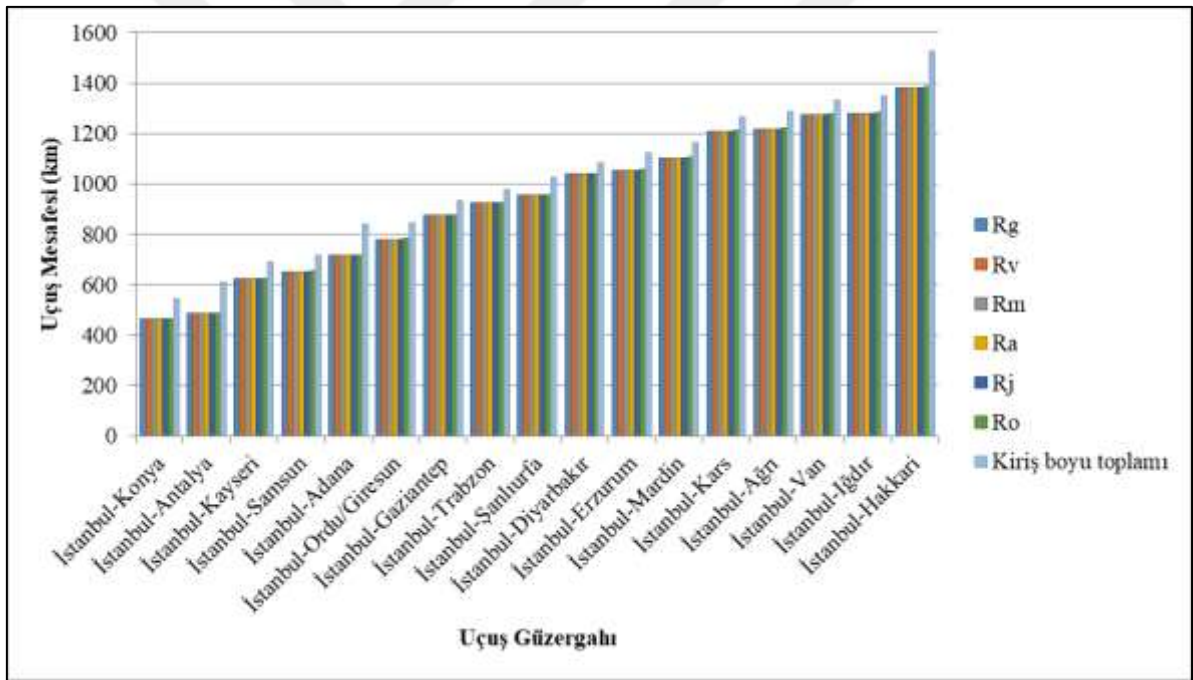
Küre üzerinde jeodezik temel problem çözüm yöntemleri incelendiğinde Tablo 5’de sunulan yöntemler karşılaştırılarak uçuş güzergâhları için en uygun çözüm yöntemi elde edilmeye çalışılmıştır. Havacılıkta küre üzerindeki hesaplamalar doğruluk açısından yeterli görüldüğünden, Tablo 5’e göre yöntem_küre_1 ve yöntem_küre_2’den elde edilen sonuçların benzer olduğu, sadece yöntem_küre_3’ün farklı sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu farklılık, güzergâhın bir doğru şeklinde değil kırılganlara ayrılmış şekilde değerlendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Aynı zamanda uçakların uçuş güzergâhları boyunca uçuş planlarına göre üzerinden geçmeleri gereken fix veya waypoint’lerdeki irtifaları da gözönüne alındığında oluşan ortodrom eğrisi, sürekli artan veya azalan eğimde bir çizgi değil de değişen azimutlarda kırılganlardan oluşan bir çizgi şeklindedir. Ayrıca uçakların kalkışta uyguladıkları SID ve inişte uyguladıkları STAR prosedürleri uçuş güzergâhı mesafesinin daha büyük olmasında etken faktörlerdir.

Tablo 5. Küre üzerinde jeodezik problem çözüm yöntemlerinin karşılaştırılması

Uçuş Güzergahı	yöntem_küre_1 (km)					yöntem_küre_2 (km)	yöntem_küre_3 (km)
	Rg	Rm	Ra	Rv	Rj	Ro	
İstanbul-Adana	714,147	713,857	713,857	713,856	713,856	714,623	838,874
İstanbul-Samsun	650,283	649,859	649,859	649,858	649,857	651,722	717,457
İstanbul-Ordu/Giresun	779,886	779,391	779,391	779,390	779,390	781,621	845,130
İstanbul-Trabzon	922,852	922,264	922,264	922,263	922,262	924,905	976,941
İstanbul-Kayseri	621,678	621,362	621,362	621,361	621,361	622,680	687,423
İstanbul-Konya	463,200	462,986	462,986	462,985	462,985	463,278	543,517
İstanbul-Gaziantep	873,416	873,063	873,063	873,062	873,061	874,434	934,124
İstanbul-Şanlıurfa	954,541	954,128	954,127	954,126	954,125	956,024	1024,518
İstanbul-Diyarbakır	1037,500	1037,025	1037,025	1037,024	1037,023	1039,360	1081,364
İstanbul-Van	1273,999	1273,374	1273,373	1273,372	1273,371	1276,599	1332,645
İstanbul-Kars	1207,132	1206,394	1206,393	1206,392	1206,391	1209,816	1263,022
İstanbul-Ağrı	1216,059	1215,380	1215,379	1215,378	1215,377	1218,700	1286,194
İstanbul-Erzurum	1053,333	1052,726	1052,726	1052,725	1052,724	1055,632	1122,688
İstanbul-Hakkari	1382,301	1381,696	1381,695	1381,694	1381,692	1384,966	1526,186
İstanbul-Iğdır	1279,696	1278,957	1278,957	1278,955	1278,954	1282,513	1348,688
İstanbul-Mardin	1102,992	1102,528	1102,528	1102,527	1102,526	1104,819	1163,360
İstanbul-Antalya	483,859	483,665	483,665	483,664	483,664	483,941	609,134

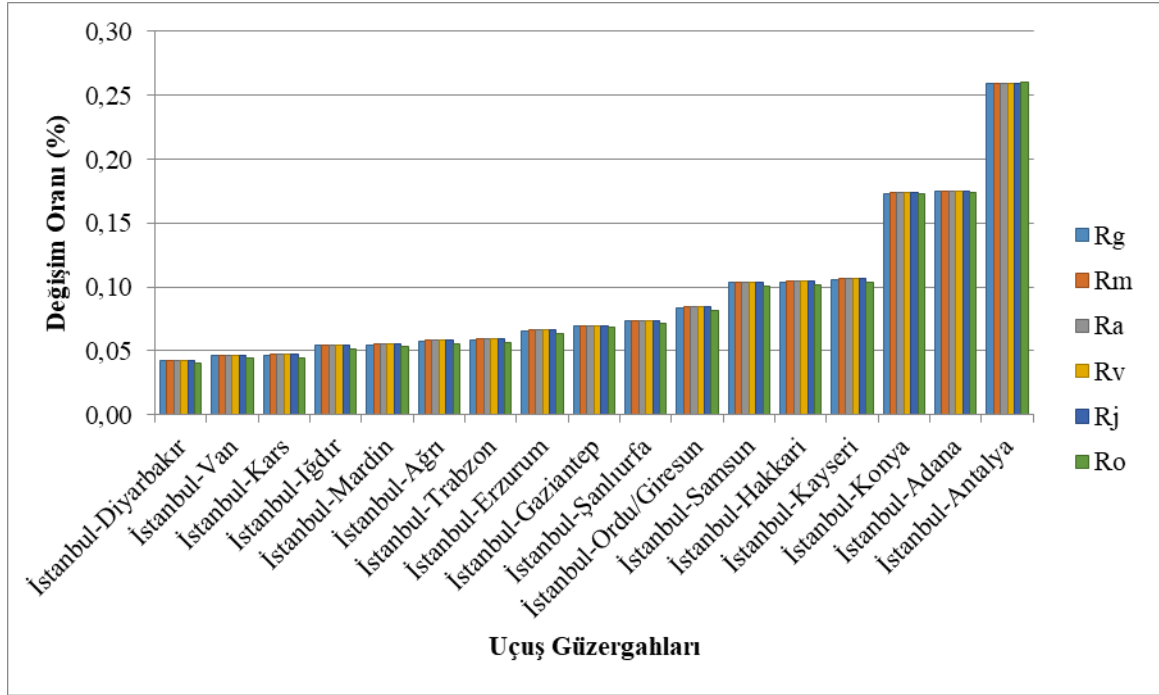
Tablo 5'te; yöntem_küre_1, farklı küre R yarıçapları kullanılarak elde edilen uçuş güzergah uzunluklarını belirtmektedir. yöntem_küre_2, otalık küre yarıçapı kullanılarak bulunan güzergah uzunluklarını göstermektedir. yöntem_küre_3 ise küre üzerinde kırıslara bölünmüş ve her bir parçası jeosantrik koordinatlar kullanılarak hesaplanmış kırış boyu toplam uzunluğunu göstermektedir.

Şekil 19'da uçuş güzergâhını oluşturan güzergâh noktaları arasındaki ortodrom eğrisi segmentlerinin uzunlukları parça parça elde edilmekte ve bunların toplamından kalkış ve varış noktaları arasında alınan yol ortometrik yükseklik dikkate alınarak küre üzerinde hesaplanmıştır. Uygulamada teknik verilerinden yararlanılan A319neo uçağının uçuş güzergâhları üzerinde olması gereken irtifaları gerçeğe yakın olarak hesaplanmış ve ortometrik yükseklik olarak güzergâh uzunluğu hesabında kullanılmıştır.



Şekil 19. Küre üzerinde çözüm yöntemlerinin grafiksel olarak karşılaştırılması

Şekil 20'de, Tablo 5'te verilen yöntem_küre_1 ve yöntem_küre_2'den bulunan sonuçların yöntem_küre_3'e göre değişimi gösterilmektedir. En büyük değişim % 26 oranında artışla İstanbul-Antalya uçuş güzergâhında olmuştur. Sonrasında % 18 ile İstanbul-Adana ve % 17 ile İstanbul-Konya uçuş güzergâhlarında artış yönünde bir değişim olmuştur. En az değişim % 4 ile İstanbul-Diyarbakır güzergahında olmuştur. Diğer uçuş güzergâhlarında ise değişim oranı % 10'un altında kalmaktadır.



Şekil 20. yöntem_küre_1 ve yöntem_küre_2'den hesaplanan güzergâh uzunluklarının yöntem_küre_3'ten bulunan güzergâh uzunluklarına göre değişim oranının grafiksel gösterimi

2.5. Elipsoidal Jeodezik Temel Problem Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Elipsoidal jeodezik temel problemlerin karşılaştırılmasında öncelikle Bessel, Rainsford, Vincenty, Sjoberg ve Karney çözüm yöntemlerinin aşağıdaki işlem adımlarına göre karşılaştırılması yapılmıştır:

1. Tablo 6'ya göre (B_1 , L_1) ve A_1 sabit, S mesafesi değişken alınarak birinci temel problem çözümü ile (B_2 , L_2 , A_2) değerleri hesaplanmış ve bu değerler ile ikinci temel problem çözümü yapılarak başlangıç noktası ile farklar dS , dA_1 ve dA_2 bulunarak yöntemler hassasiyet bakımından karşılaştırılmıştır (Şekil 21).
2. Yöntemlerin işlem zamanları karşılaştırılmıştır (Şekil 22).
3. Jeodezik eğrinin özel durumları için (jeodezik eğri paralel daire üzerinde $dB=0^\circ$, jeodezik eğri meridyen üzerinde $dL=0^\circ$, jeodezik eğri ekvator üzerinde $B_1=B_2=0^\circ$ ve jeodezik eğrinin bir kenarının kutupta olması $B=90^\circ$) yöntemlerin çözüm üretilip üretilmediği test edilmiştir (Şekil 23-24-25-26).

Jeodezik problemlerin çözümünde enlem ve boylamlarda $0,0001''$, azimutta $0,001''$ ve mesafede 0.001 m doğruluk hesaplama için yeterlidir (Demirel ve Üstün 2013).

Tablo 6. Elipsoit üzerinde jeodezik temel problem çözüm yöntemlerinin karşılaştırılması (B1=42°; L1=27°; A1=135°)

Bessel						
Birinci Jeodezik Temel Problem				İkinci Jeodezik Temel Problem		
S (km)	B2 (°)	L2 (°)	A2 (°)	S (km)	A1 (°)	A2 (°)
50	41,68089708	27,42461996	315,28324821	50,000	135,00000000	315,28324821
100	41,36022298	27,84505485	315,56195157	100,000	135,00000000	315,56195157
150	41,03800995	28,26137249	315,83617256	150,000	135,00000000	315,83617256
200	40,71428957	28,67364013	316,10597301	200,000	135,00000000	316,10597301
250	40,38909278	29,08192439	316,37141414	250,000	135,00000000	316,37141414
300	40,06244988	29,48629128	316,63255645	300,000	135,00000000	316,63255645
350	39,73439053	29,88680616	316,88945977	350,000	135,00000000	316,88945977
400	39,40494380	30,28353371	317,14218321	400,000	135,00000000	317,14218321
450	39,07413815	30,67653794	317,39078515	450,000	135,00000000	317,39078515
500	38,74200146	31,06588216	317,63532321	500,000	135,00000000	317,63532321
550	38,40856103	31,45162897	317,87585427	550,000	135,00000000	317,87585427
600	38,07384359	31,83384026	318,11243443	600,000	135,00000000	318,11243443
650	37,73787533	32,21257717	318,34511901	650,000	135,00000000	318,34511901
700	37,40068189	32,58790013	318,57396253	700,000	135,00000000	318,57396253
750	37,06228841	32,95986882	318,79901874	750,000	135,00000000	318,79901874
800	36,72271948	33,32854217	319,02034057	800,000	135,00000000	319,02034057
850	36,38199920	33,69397837	319,23798015	850,000	135,00000000	319,23798015
900	36,04015120	34,05623486	319,45198881	900,000	135,00000000	319,45198881
950	35,69719858	34,41536833	319,66241706	950,000	135,00000000	319,66241706
1000	35,35316402	34,77143471	319,86931462	1000,000	135,00000000	319,86931462
1050	35,00806971	35,12448920	320,07273039	1050,000	135,00000000	320,07273039
1100	34,66193740	35,47458624	320,27271245	1100,000	135,00000000	320,27271245
1150	34,31478840	35,82177954	320,46930809	1150,000	135,00000000	320,46930809
1200	33,96664359	36,16612206	320,66256381	1200,000	135,00000000	320,66256381
Rainsford						
S (km)	B2 (°)	L2 (°)	A2 (°)	S (km)	A1(°)	A2 (°)
50	41,68089708	27,42461996	315,28324821	50,000	135,00000000	315,28324821
100	41,36022298	27,84505485	315,56195157	100,000	135,00000000	315,56195157
150	41,03800995	28,26137249	315,83617256	150,000	135,00000000	315,83617256
200	40,71428957	28,67364013	316,10597301	200,000	135,00000000	316,10597301
250	40,38909278	29,08192439	316,37141414	250,000	135,00000000	316,37141414
300	40,06244988	29,48629128	316,63255645	300,000	135,00000000	316,63255645
350	39,73439053	29,88680616	316,88945977	350,000	135,00000000	316,88945977
400	39,40494380	30,28353371	317,14218321	400,000	135,00000000	317,14218321
450	39,07413815	30,67653794	317,39078515	450,000	135,00000000	317,39078515
500	38,74200146	31,06588216	317,63532321	500,000	135,00000000	317,63532321
550	38,40856103	31,45162897	317,87585427	550,000	135,00000000	317,87585427
600	38,07384359	31,83384026	318,11243443	600,000	135,00000000	318,11243443
650	37,73787533	32,21257717	318,34511901	650,000	135,00000000	318,34511901
700	37,40068189	32,58790013	318,57396253	700,000	135,00000000	318,57396253
750	37,06228841	32,95986882	318,79901874	750,000	135,00000000	318,79901874
800	36,72271948	33,32854217	319,02034057	800,000	135,00000000	319,02034057
850	36,38199920	33,69397837	319,23798015	850,000	135,00000000	319,23798015
900	36,04015120	34,05623486	319,45198881	900,000	135,00000000	319,45198881
950	35,69719858	34,41536833	319,66241706	950,000	135,00000000	319,66241706
1000	35,35316402	34,77143471	319,86931462	1000,000	135,00000000	319,86931462
1050	35,00806971	35,12448920	320,07273039	1050,000	135,00000000	320,07273039
1100	34,66193740	35,47458624	320,27271245	1100,000	135,00000000	320,27271245
1150	34,31478840	35,82177954	320,46930809	1150,000	135,00000000	320,46930809
1200	33,96664359	36,16612206	320,66256381	1200,000	135,00000000	320,66256381

Tablo 6'nın devamı

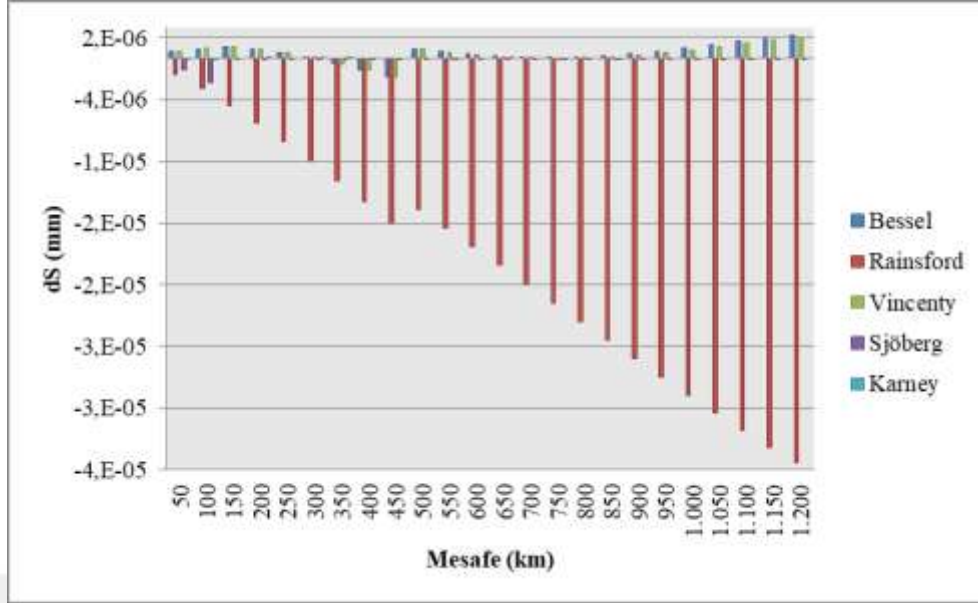
Vincenty						
S (km)	B2 (°)	L2 (°)	A2 (°)	S (km)	A1 (°)	A2 (°)
50	41,68089708	27,42461996	315,28324821	50,000	135,00000000	315,28324821
100	41,36022298	27,84505485	315,56195157	100,000	135,00000000	315,56195157
150	41,03800995	28,26137249	315,83617256	150,000	135,00000000	315,83617256
200	40,71428957	28,67364013	316,10597301	200,000	135,00000000	316,10597301
250	40,38909278	29,08192439	316,37141414	250,000	135,00000000	316,37141414
300	40,06244988	29,48629128	316,63255645	300,000	135,00000000	316,63255645
350	39,73439053	29,88680616	316,88945977	350,000	135,00000000	316,88945977
400	39,40494380	30,28353371	317,14218321	400,000	135,00000000	317,14218321
450	39,07413815	30,67653794	317,39078515	450,000	135,00000000	317,39078515
500	38,74200146	31,06588216	317,63532321	500,000	135,00000000	317,63532321
550	38,40856103	31,45162897	317,87585427	550,000	135,00000000	317,87585427
600	38,07384359	31,83384026	318,11243443	600,000	135,00000000	318,11243443
650	37,73787533	32,21257717	318,34511901	650,000	135,00000000	318,34511901
700	37,40068189	32,58790013	318,57396253	700,000	135,00000000	318,57396253
750	37,06228841	32,95986882	318,79901874	750,000	135,00000000	318,79901874
800	36,72271948	33,32854217	319,02034057	800,000	135,00000000	319,02034057
850	36,38199920	33,69397837	319,23798015	850,000	135,00000000	319,23798015
900	36,04015120	34,05623486	319,45198881	900,000	135,00000000	319,45198881
950	35,69719858	34,41536833	319,66241706	950,000	135,00000000	319,66241706
1000	35,35316402	34,77143471	319,86931462	1000,000	135,00000000	319,86931462
1050	35,00806971	35,12448920	320,07273039	1050,000	135,00000000	320,07273039
1100	34,66193740	35,47458624	320,27271245	1100,000	135,00000000	320,27271245
1150	34,31478840	35,82177954	320,46930809	1150,000	135,00000000	320,46930809
1200	33,96664359	36,16612206	320,66256381	1200,000	135,00000000	320,66256381
Sjöberg						
S (km)	B2 (°)	L2 (°)	A2 (°)	S (km)	A1 (°)	A2 (°)
50	42,31749883	27,42854527	314,71214388	50,000	135,00000000	314,71214388
100	42,63335995	27,86141287	314,41961621	100,000	135,00000000	314,41961621
150	42,94754908	28,29867217	314,12235284	150,000	135,00000000	314,12235284
200	43,26003118	28,74039301	313,82028912	200,000	135,00000000	313,82028912
250	43,57077053	29,18664561	313,51335993	250,000	135,00000000	313,51335993
300	43,87973064	29,63750057	313,20149978	300,000	135,00000000	313,20149978
350	44,18687431	30,09302882	312,88464280	350,000	135,00000000	312,88464280
400	44,49216356	30,55330154	312,56272283	400,000	135,00000000	312,56272283
450	44,79555964	31,01839010	312,23567345	450,000	135,00000000	312,23567345
500	45,09702302	31,48836605	311,90342807	500,000	135,00000000	311,90342807
550	45,39651341	31,96330101	311,56591997	550,000	135,00000000	311,56591997
600	45,69398969	32,44326661	311,22308237	600,000	135,00000000	311,22308237
650	45,98940993	32,92833442	310,87484854	650,000	135,00000000	310,87484854
700	46,28273140	33,41857589	310,52115183	700,000	135,00000000	310,52115183
750	46,57391055	33,91406221	310,16192581	750,000	135,00000000	310,16192581
800	46,86290298	34,41486428	309,79710430	800,000	135,00000000	309,79710430
850	47,14966346	34,92105258	309,42662151	850,000	135,00000000	309,42662151
900	47,43414591	35,43269707	309,05041216	900,000	135,00000000	309,05041216
950	47,71630342	35,94986710	308,66841151	950,000	135,00000000	308,66841151
1000	47,99608821	36,47263128	308,28055557	1000,000	135,00000000	308,28055557
1050	48,27345165	37,00105736	307,88678115	1050,000	135,00000000	307,88678115
1100	48,54834425	37,53521211	307,48702602	1100,000	135,00000000	307,48702602
1150	48,82071567	38,07516116	307,08122905	1150,000	135,00000000	307,08122905
1200	49,09051472	38,62096893	306,66933032	1200,000	135,00000000	306,66933032

Tablo 6'nın devamı

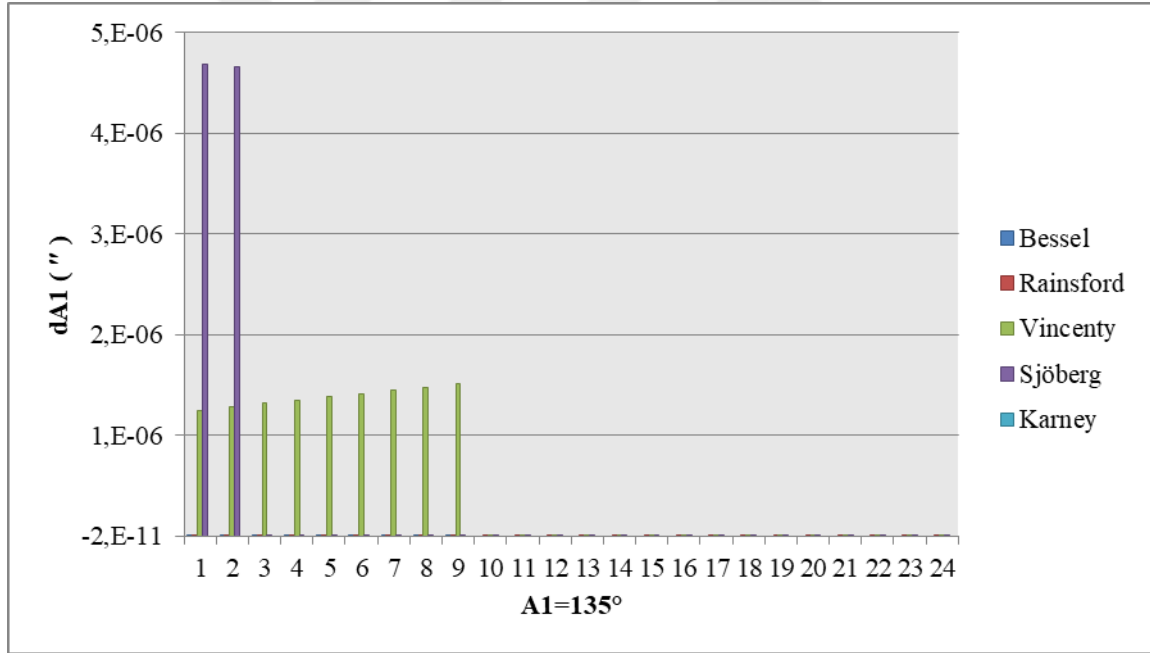
Karney						
S (km)	B2 (°)	L2 (°)	A2 (°)	S (km)	A1 (°)	A2 (°)
50	41,68089708	27,42461996	315,28324821	50,000	135,00000000	315,28324821
100	41,36022298	27,84505485	315,56195157	100,000	135,00000000	315,56195157
150	41,03800995	28,26137249	315,83617256	150,000	135,00000000	315,83617256
200	40,71428957	28,67364013	316,10597301	200,000	135,00000000	316,10597301
250	40,38909278	29,08192439	316,37141414	250,000	135,00000000	316,37141414
300	40,06244988	29,48629128	316,63255645	300,000	135,00000000	316,63255645
350	39,73439053	29,88680616	316,88945977	350,000	135,00000000	316,88945977
400	39,40494380	30,28353371	317,14218321	400,000	135,00000000	317,14218321
450	39,07413815	30,67653794	317,39078515	450,000	135,00000000	317,39078515
500	38,74200146	31,06588216	317,63532321	500,000	135,00000000	317,63532321
550	38,40856103	31,45162897	317,87585427	550,000	135,00000000	317,87585427
600	38,07384359	31,83384026	318,11243443	600,000	135,00000000	318,11243443
650	37,73787533	32,21257717	318,34511901	650,000	135,00000000	318,34511901
700	37,40068189	32,58790013	318,57396253	700,000	135,00000000	318,57396253
750	37,06228841	32,95986882	318,79901874	750,000	135,00000000	318,79901874
800	36,72271948	33,32854217	319,02034057	800,000	135,00000000	319,02034057
850	36,38199920	33,69397837	319,23798015	850,000	135,00000000	319,23798015
900	36,04015120	34,05623486	319,45198881	900,000	135,00000000	319,45198881
950	35,69719858	34,41536833	319,66241706	950,000	135,00000000	319,66241706
1000	35,35316402	34,77143471	319,86931462	1000,000	135,00000000	319,86931462
1050	35,00806971	35,12448920	320,07273039	1050,000	135,00000000	320,07273039
1100	34,66193740	35,47458624	320,27271245	1100,000	135,00000000	320,27271245
1150	34,31478840	35,82177954	320,46930809	1150,000	135,00000000	320,46930809
1200	33,96664359	36,16612206	320,66256381	1200,000	135,00000000	320,66256381

Tablo 6'da $B1=42^\circ$, $L1=27^\circ$, $A1=135^\circ$ ve S ise 50 ile 1200 km arasında alınarak direkt ve ters jeodezik temel problem çözümleri yapılmıştır. Bunun nedeni, elipsoidal çözüm için seçilen 5 yöntemin dS, dA1 ve dA2 farklarına göre hassasiyet yönünden karşılaştırmasını yapıp, en hassas çözüm veren yöntemi belirlemektir. Hassasiyet değerlendirmesinde mesafede milimetre (1 mm), azimutlarda ise saniye mertebesi (1×10^{-3}) dikkate alınmıştır ve Şekil 21, 22 ve 23'de grafiksel olarak gösterilmiştir.

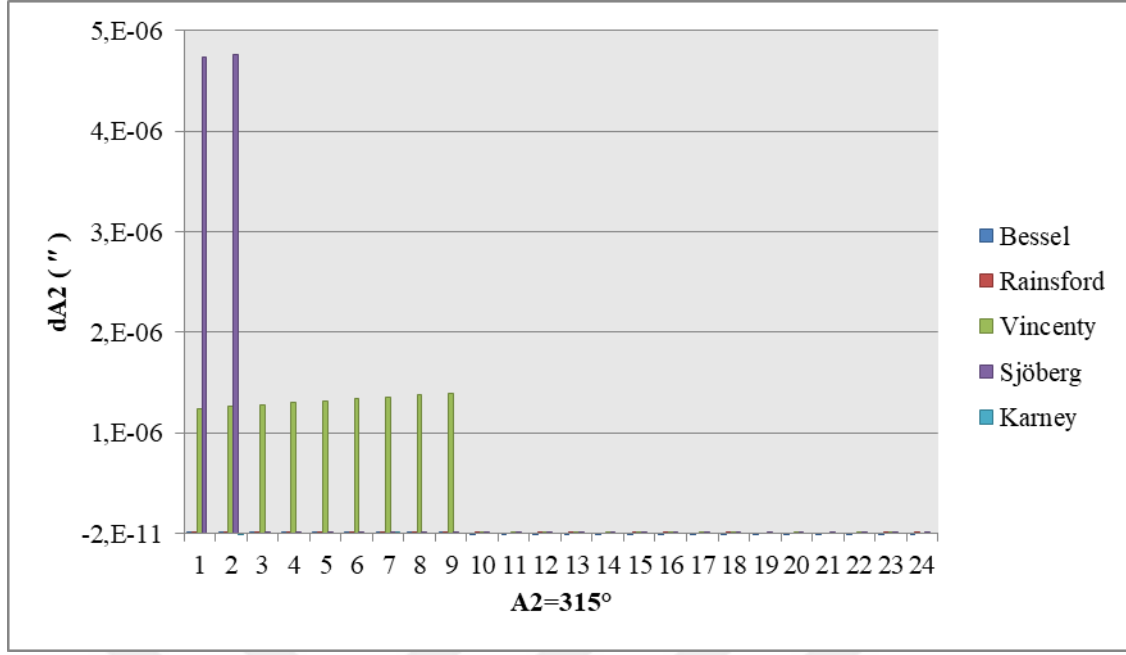
Şekil 21 değerlendirildiğinde, Tablo 6'da gösterilen sonuçlara göre 5 yöntemde de ds mesafe farklarında 1 mm'nin altında doğruluk elde edilmiştir. Bu jeodezik çalışmalarda yeterli bir değerdir. Şekil 22 ve Şekil 23 değerlendirildiğinde, dA₁ ve dA₂ azimut farklarında 10^{-6} ile 10^{-11} arasında doğruluk elde edilmiştir. Bu doğruluklar, jeodezik çalışmalarda azimut doğruluğu için yeterli olan 1×10^{-3} nin içinde kalan değerlerdir.



Şekil 21. dS mesafe doğruluğuna göre yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması



Şekil 22. dA1 azimut doğruluğuna göre yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması

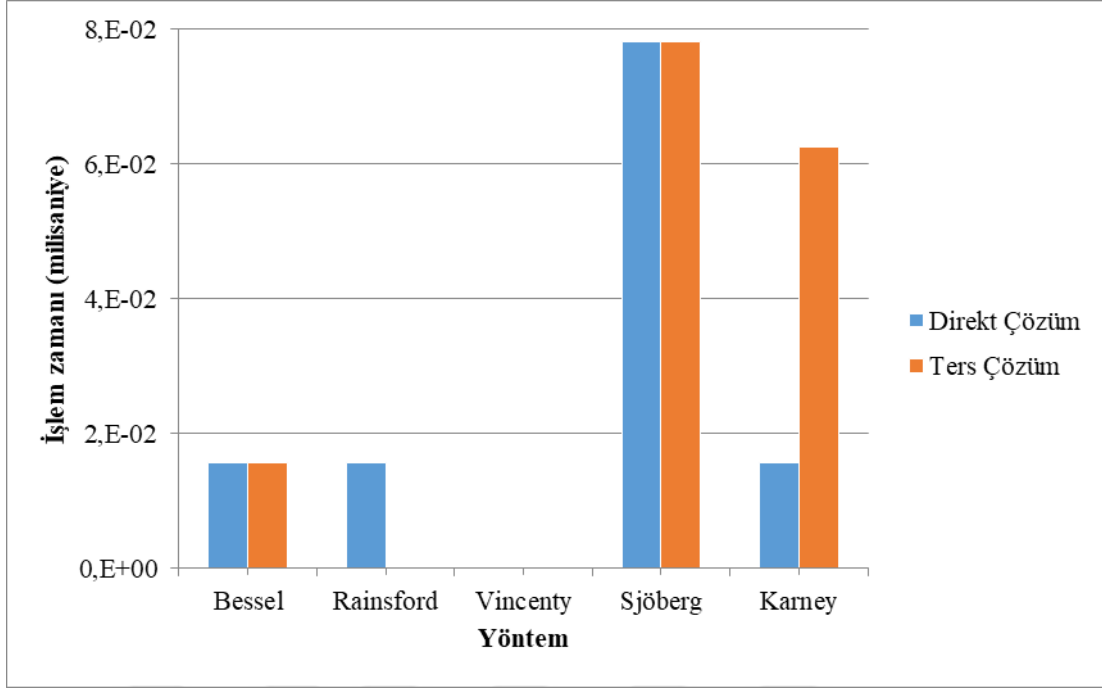


Şekil 23. dA2 azimut doğruluğuna göre yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması

Yöntemler işlem zamanına göre karşılaştırıldığında, en iyi performansı Vincenty yönteminin verdiği görülmektedir. Birçok deneme yapılarak elde edilen ve Tablo 7’de verilen değerler bunu ispatlamaktadır. Vincenty yönteminin en iyi performansı vermesinin nedeni, çalışmasında uyguladığı formülasyonun sade ve pratik olmasıdır. Şekil 24’de yöntemlerin işlem zamanına göre grafiksel olarak karşılaştırılması verilmiştir.

Tablo 7. Yöntemlerin işlem zamanlarına göre karşılaştırılması

Yöntem	İşlem zamanı (milisaniye)	
	Direkt çözüm	Ters çözüm
Bessel	16×10^{-3}	16×10^{-3}
Rainsford	16×10^{-3}	0
Vincenty	0	0
Sjöberg	78×10^{-3}	78×10^{-3}
Karney	16×10^{-3}	63×10^{-3}



Şekil 24. İşlem zamanına göre yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması

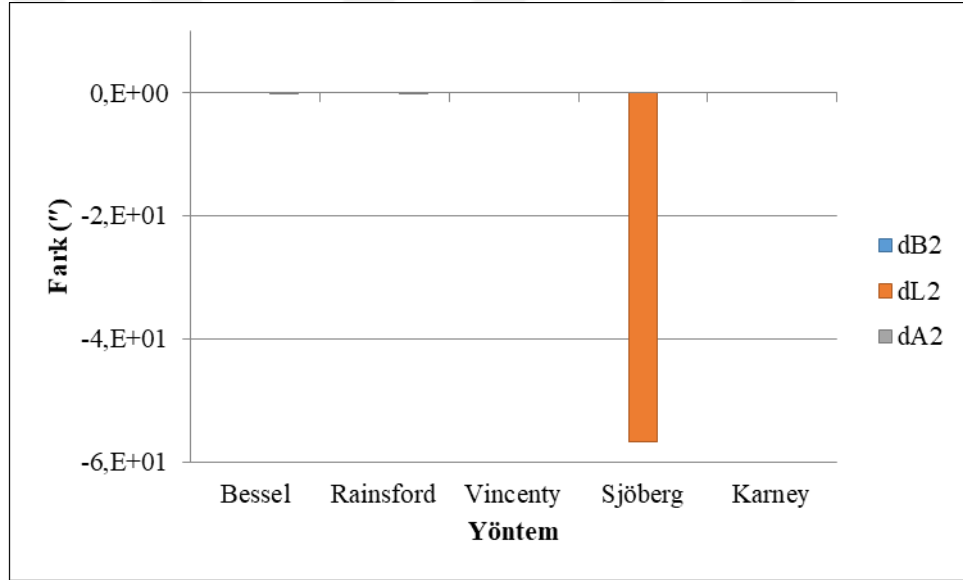
Elipsoidal jeodezik temel problem çözüm yöntemlerinin aşağıda verilen 4 özel durumu için karşılaştırılması yapılmıştır:

a) $dB=0^\circ$ ($B_1=42^\circ$; $L_1=27^\circ$; $B_2=42^\circ$; $L_2=28^\circ$ olarak seçilmiştir)

$dB=0^\circ$ için seçilen (B_1, L_1) ve (B_2, L_2) değer çiftlerine göre Tablo 8 ve Şekil 25 incelendiğinde, öncelikle ters çözümde S , A_1 , A_2 değerleri hesaplanmış ve direkt çözümde bu değerlerin kullanımı ile yeni B_2 , L_2 , A_2 değerleri bulunmuştur. Bulunan yeni B_2 , L_2 , A_2 değerleri ile başlangıçta belirlenmiş değerlerin farkı alınarak, hangi yöntemin daha iyi sonuç verdiği araştırılmıştır. Bessel ve Rainsford yöntemleri dA_2 'de yaklaşık 3×10^{-5} " fark vermiştir. Sjöberg yöntemi ise dL_2 'de 57" fark vermiştir. Karney çözüm yöntemi diğer yöntemlere göre dB_2 , dL_2 ve dA_2 'de 0" hassasiyetle doğru sonucu vermiştir. $dB=0^\circ$ için Karney yöntemi seçilebilir.

Tablo 8. $dB=0^\circ$ için yöntemlerin karşılaştırılması

		Yöntem				
		Bessel	Rainsford	Vincenty	Sjöberg	Karney
Ters çözüm	S (km)	82850,291	82850,291	82850,291	82851,332	82850,291
	A1 ($^\circ$)	89,66542999	89,66542999	89,66542999	89,67066197	89,66542999
	A2 ($^\circ$)	270,33457002	270,33457002	270,33457001	269,67066197	270,33457001
Direkt çözüm	B2 ($^\circ$)	42,00000000	42,00000000	42,00000000	42,00000000	42,00000000
	L2 ($^\circ$)	28,00000000	28,00000000	28,00000000	27,98427386	28,00000000
	A2 ($^\circ$)	270,33457001	270,33457001	270,33457001	269,67066197	270,33457001
Farklar	dB2 ($''$)	0	0	0	0	0
	dL2 ($''$)	-4×10^{-8}	-6×10^{-8}	-4×10^{-8}	-56,6	0
	dA2 ($''$)	-3×10^{-5}	-3×10^{-5}	0	0	0

Şekil 25. $dB=0^\circ$ için yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması

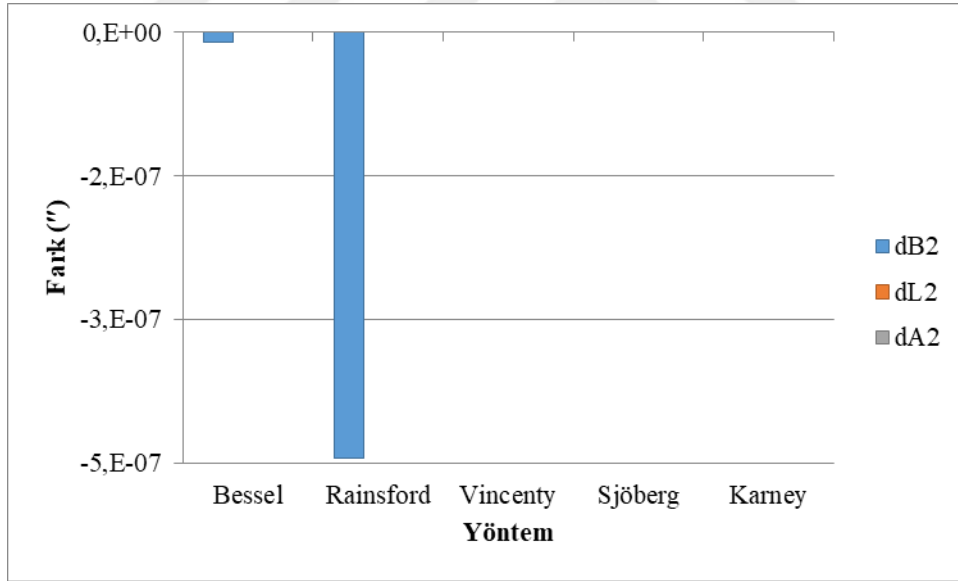
b) $dL=0^\circ$ ($B1=42^\circ$; $L1=27^\circ$; $B2=43^\circ$; $L2=27^\circ$ olarak seçilmiştir)

$dL=0^\circ$ için seçilen ($B1,L1$) ve ($B2,L2$) değer çiftlerine göre Tablo 9 ve Şekil 26 incelendiğinde, öncelikle ters çözümden S, A1, A2 değerleri hesaplanmış ve direkt çözümde bu değerlerin kullanımı ile yeni B2, L2, A2 değerleri bulunmuştur. Bulunan yeni B2, L2, A2 değerleri ile başlangıçta belirlenmiş değerlerin farkı alınarak hangi yöntemin daha iyi sonuç verdiği araştırılmış ve tüm yöntemlerin yaklaşık aynı sonuçları verdiği gözlemlenmiştir. Sadece Rainsford yönteminde dB2 enlem farkı diğerlerine göre biraz

yüksek çıkmıştır. $dL=0^\circ$ için Vincenty, Sjöberg ve Karney yöntemleri en hassas çözümü vermişlerdir.

Tablo 9. $dL=0^\circ$ için yöntemlerin karşılaştırılması

		Yöntem				
		Bessel	Rainsford	Vincenty	Sjöberg	Karney
Ters çözüm	S (km)	111083,004	111083,004	111083,004	111083,004	111083,004
	A1 ($^\circ$)	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
	A2 ($^\circ$)	180,00000000	180,00000000	180,00000000	180,00000000	180,00000000
Direkt çözüm	B2 ($^\circ$)	43,00000000	43,00000000	43,00000000	43,00000000	43,00000000
	L2 ($^\circ$)	27,00000000	27,00000000	27,00000000	27,00000000	27,00000000
	A2 ($^\circ$)	180,00000000	180,00000000	180,00000000	180,00000000	180,00000000
Farklar	dB2 ($''$)	-1×10^{-8}	-44×10^{-8}	0	0	0
	dL2 ($''$)	0	0	0	0	0
	dA2 ($''$)	0	0	0	0	0



Şekil 26. $dL=0^\circ$ için yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması

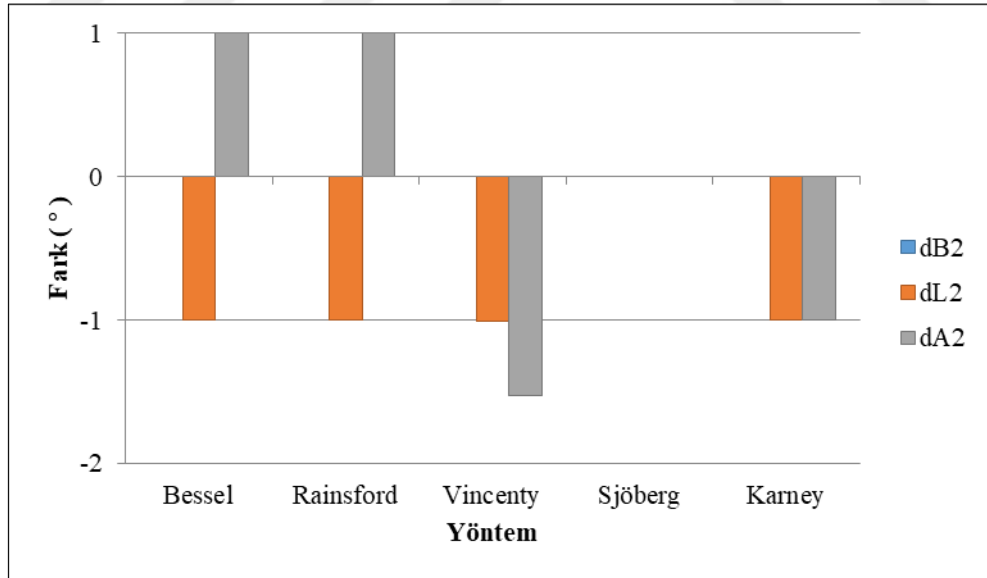
c) $B2=90^\circ$ ($B1=42^\circ$; $L1=27^\circ$; $B2=90^\circ$; $L2=28^\circ$ olarak seçilmiştir)

$B2=90^\circ$ için seçilen ($B1, L1$) ve ($B2, L2$) değer çiftlerine göre Tablo 10 ve Şekil 27 irdelendiğinde, öncelikle ters çözümde S, A1, A2 değerleri hesaplanmış ve direkt çözümde bu değerlerin kullanımı ile yeni B2, L2, A2 değerleri bulunmuştur. Bulunan yeni

B2, L2, A2 değerleri ile başlangıçta belirlenmiş değerlerin farkı alınarak hangi yöntemin daha iyi sonuç verdiği araştırılmıştır. dB2 farkında tüm yöntemler aynı hassasiyettedir, fakat dL2 ve dA2’de Bessel, Rainsford ve Karney’de 1°, Vincenty’de ise 1,5° fark ortaya çıkmıştır. Bunun nedeni, ikinci noktanın kutupta alınmasıdır.

Tablo 10. B2=90° için yöntemlerin karşılaştırılması

		Yöntem				
		Bessel	Rainsford	Vincenty	Sjöberg	Karney
Ters çözüm	S (km)	5350328,850	5350328,850	5350328,850	5350328,850	5350328,850
	A1 (°)	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
	A2 (°)	359,00000000	359,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000
Direkt çözüm	B2 (°)	90,00000000	90,00000000	90,00000000	90,00000000	90,00000000
	L2 (°)	27,00000000	27,00000000	26,99049131	28,00000000	27,00000000
	A2 (°)	360,00000000	360,00000000	359,47334068	1,00000000	0,00000000
Farklar	dB2 (°)	0	0	0	0	0
	dL2 (°)	-1,00000000	-1,00000000	-1,00950869	0	-1,00000000
	dA2 (°)	1,00000000	1,00000000	-1,52665932	0	-1,00000000



Şekil 27. B2=90° için yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması

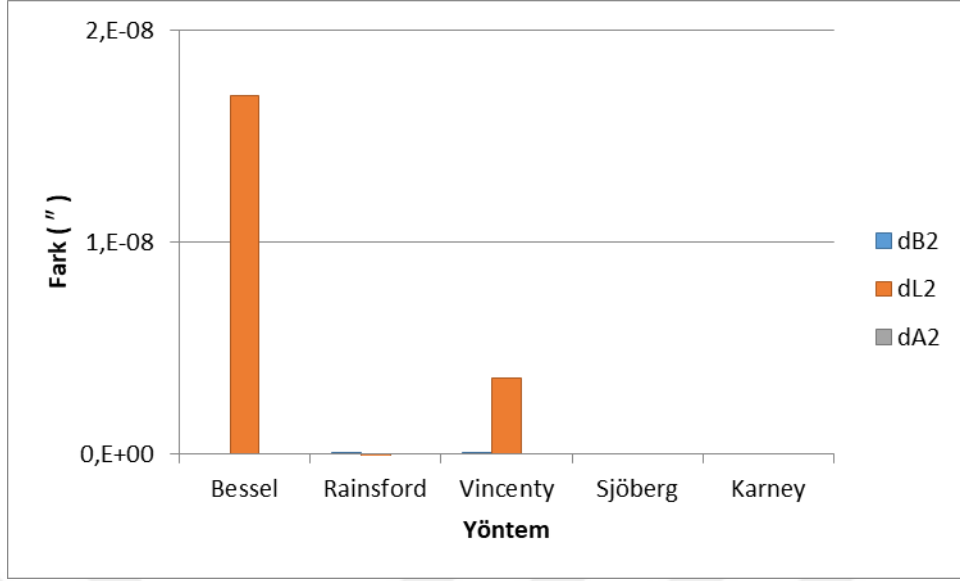
Sonuçlara bakıldığında, yöntemlerin tümünün dB2 farkı için doğru sonuç verdiği ancak dL2 ve dA2 farklarında sadece Sjoberg çözüm yönteminin doğru sonuç verdiği görülmüştür. B2=90° için Sjoberg yöntemi tercih edilebilir.

d) $B_1=B_2=0^\circ$ ($B_1=0^\circ$; $L_1=27^\circ$; $B_2=0^\circ$; $L_2=28^\circ$ olarak seçilmiştir)

$B_1=B_2=0^\circ$ için seçilen (B_1, L_1) ve (B_2, L_2) değer çiftlerine göre Tablo 11 ve Şekil 28 irdelendiğinde, öncelikle ters çözümden S, A1, A2 değerleri hesaplanmış ve direkt çözümde bu değerlerin kullanımı ile yeni B2, L2, A2 değerleri bulunmuştur. Bulunan yeni B2, L2, A2 değerleri ile başlangıçta belirlenmiş değerlerin farkı alınarak hangi yöntemin daha iyi sonuç verdiği araştırılmıştır. Sonuçlara bakıldığında $B_1=B_2=0^\circ$ ve $L_1 < L_2$ seçildiğinde $A_1=90^\circ$ ve $A_2=270^\circ$ olmaktadır. Seçilen yöntemlerin tümü dB2, dL2 ve dA2 farkları için doğru sonuç vermiştir ancak sadece Bessel yönteminde dL2 farkında küçük bir sapma olduğu görülmüştür. $B_1=B_2=0^\circ$ için tüm yöntemler tercih edilebilir.

Tablo 11. $B_1=B_2=0^\circ$ için yöntemlerin karşılaştırılması

		Yöntem				
		Bessel	Rainsford	Vincenty	Sjöberg	Karney
Ters çözüm	S (km)	111319,491	111319,491	111319,491	111319,491	111319,491
	A1 ($^\circ$)	90,00000000	90,00000000	90,00000000	90,00000000	90,00000000
	A2 ($^\circ$)	270,00000000	270,00000000	270,00000000	270,00000000	270,00000000
Direkt çözüm	B2 ($^\circ$)	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
	L2 ($^\circ$)	28,00000000	28,00000000	28,00000000	28,00000000	28,00000000
	A2 ($^\circ$)	270,00000000	270,00000000	270,00000000	270,00000000	270,00000000
Farklar	dB2 ($''$)	0	0	0	0	0
	dL2 ($''$)	2×10^{-8}	0	0	0	0
	dA2 ($''$)	0	0	0	0	0



Şekil 28. $B_1=B_2=0^\circ$ için yöntemlerin grafiksel olarak karşılaştırılması

Elipsoit üzerinde jeodezik temel problemlerin çözümünde hangi yöntemin daha uygun olduğunu bulmak için uygulamada kullanılan yöntemler (Bessel, Rainsford, Vincenty, Sjöberg, Karney) üç aşamalı bir teste tabi tutulmuştur. İlk olarak, mesafe açısından $S=50-1200$ km arasında 50 km artırımlı seçilerek yöntemler karşılaştırılmıştır (Tablo 6). İkincisinde, işlem zamanları açısından yöntemler kıyaslanmıştır (Tablo 7). Sonuncu olarak, özel durumlar için ($\Delta B=0^\circ$, $\Delta L=0^\circ$, $B_2=90^\circ$, $B_1=B_2=0^\circ$) karşılaştırma yapılmıştır (Tablo 8-9-10-11). Bu işlemlerin sonucunda Sjöberg ve Karney yöntemleri ön plana çıkmıştır. Ancak işlemlerdeki iterasyon sayısı ve işlem algoritmasının kullanışlılığı açısından değerlendirildiğinde Karney yöntemi, yöntem_elipsoit_1 seçilmiştir.

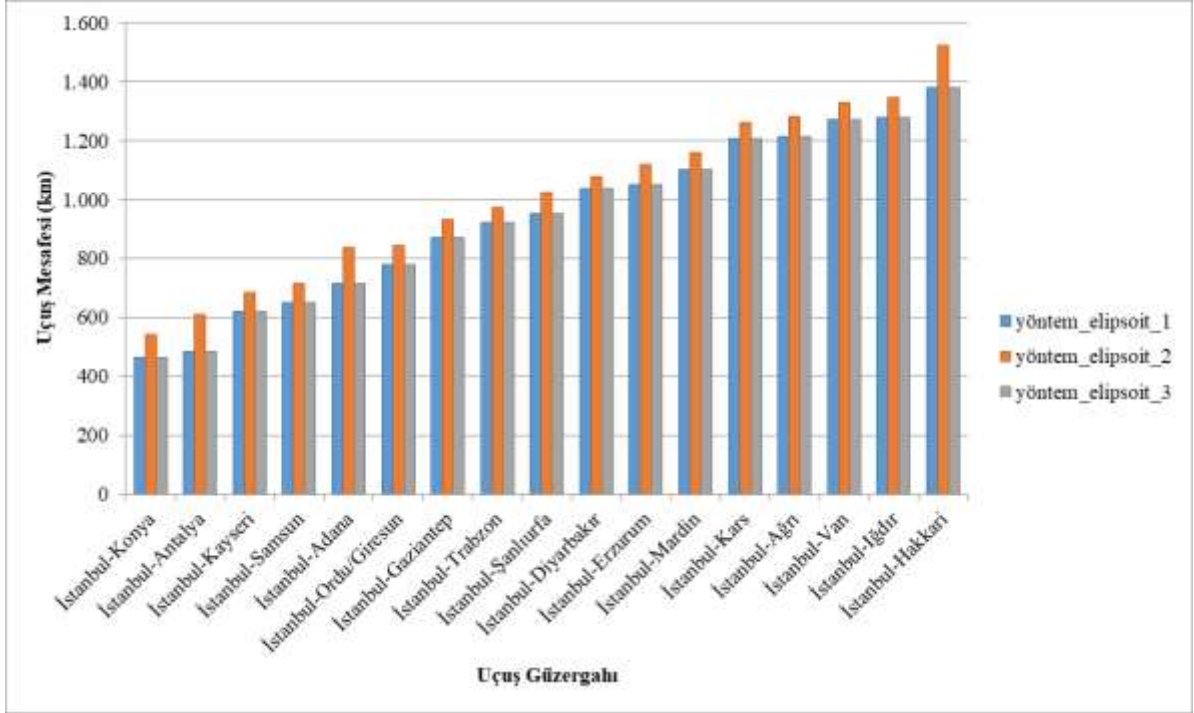
yöntem_elipsoit_2 olarak elipsoit üzerinde jeodezik eğri segmentlerinin toplam uzunluğu (jeosantrik koordinatlardan toplam giriş mesafeleri) kullanılmıştır. yöntem_elipsoit_3 ise Tseng'in eliptik çözüm yöntemidir. Tablo 12 ve Şekil 29'da yöntem_elipsoit_1, yöntem_elipsoit_2 ve yöntem_elipsoit_3'den elde edilen sonuçların tablosal ve grafiksel karşılaştırmaları verilmiştir.

Tablo 12 incelendiğinde, güzergâh uzunlukları arasında yöntem_elipsoit_2'den elde edilen sonuçların diğerlerinden daha fazla olduğu görülmektedir. Bunun nedeni, mevcut havacılık haritalarında uçuş güzergâhlarının aslında kırılgan (segmentlere) ayrılmış olarak oluşturulmasıdır. Aslında uçaklar, kalkışlarından inişlerine kadar sadece seyir seviyesine (cruising level) ulaştıklarında düz uçuş yapmaktadırlar.

Tablo 12. Elipsoit üzerinde uçuş mesafesine göre yöntem_elipsoit_1, yöntem_elipsoit_2 ve yöntem_elipsoit_3'den elde edilen sonuçların karşılaştırılması

Uçuş Güzergahı	Uçuş mesafesi (km)		
	yöntem_elipsoit_1	yöntem_elipsoit_2	yöntem_elipsoit_3
İstanbul-Adana	714,153	838,758	714,153
İstanbul-Samsun	650,128	716,316	650,128
İstanbul-Ordu/Giresun	779,715	843,740	779,715
İstanbul-Trabzon	922,647	975,199	922,647
İstanbul-Kayseri	621,620	686,667	621,620
İstanbul-Konya	463,178	543,577	463,178
İstanbul-Gaziantep	873,425	933,467	873,425
İstanbul-Şanlıurfa	954,523	1023,382	954,523
İstanbul-Diyarbakır	1037,455	1079,804	1037,455
İstanbul-Van	1273,902	1330,412	1273,902
İstanbul-Kars	1206,894	1260,703	1206,894
İstanbul-Ağrı	1215,884	1283,936	1215,884
İstanbul-Erzurum	1053,163	1120,738	1053,163
İstanbul-Hakkari	1382,269	1523,785	1382,269
İstanbul-Iğdır	1279,487	1346,342	1279,487
İstanbul-Mardin	1102,986	1161,911	1102,986
İstanbul-Antalya	483,866	609,896	483,866

Uçaklar, kalkışta SID ve inişte STAR uyguladıklarından uçuş güzergâhlarının uzunluğu doğal olarak artmaktadır. Özellikle Türkiye hava sahası içerisinde denize yakın havalimanları haricinde diğer havalimanlarında uçakların iniş veya kalkışta gerekli emniyet irtifalarını alabilmesi için farklı prosedürler uygulamasına ihtiyaç vardır. Aynı zamanda gerçekte kat ettikleri yol giriş mesafelerinden elde edilen yoldur. Diğer iki yöntem ise sadece jeodezik eğri üzerinde başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki en kısa mesafeyi bulmayı amaçladığından, uçakların kalkış ve iniş safhalarında uyguladıkları prosedürlerden oluşan mesafeler göz ardı edilmektedir. Bu sebeplerden dolayı, havacılık ile ilgili uygulamalarda jeodezik eğri segmentlerinin toplamından oluşan mesafelerin kullanılması daha doğru olacaktır (yöntem_elipsoit_2).



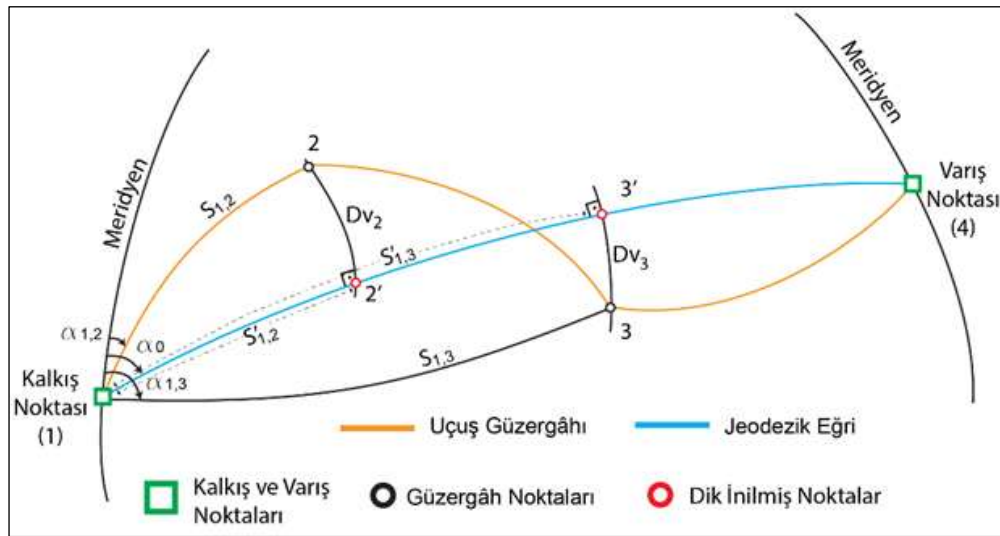
Şekil 29. Yöntem_elipsoit_1, yöntem_elipsoit_2 ve yöntem_elipsoit_3 sonuçlarının grafiksel olarak karşılaştırılması

2.6. Analiz ve Görselleştirme

Bu bölümde, uçuş planında yer alan rota ile ilgili bilgiler Excel tablolarına aktarılmış ve her bir havalimanı çifti ayrı dosyalar halinde kaydedilmiştir. Coğrafi koordinatlar WGS84 koordinat sisteminde sunulmuştur. Noktaların jeoid ondülasyonu değerleri, U.S. National Geospatial Intelligence Agency tarafından yayımlanan ve WGS84 koordinat sisteminde tanımlı 1'x1' çözünürlüklü EGM2008-1 (yer gravite modeli 2008) raster grid verileri kullanılmıştır (URL-6, 2017). Jeoid ondülasyonu (N), Karney'in C++ kitaplığının bir alt kümesi şeklinde MATLAB uygulamaları olarak hazırladığı GeographicLib fonksiyon kütüphanesinde yer alan geoid_load.m ve geoid_height.m fonksiyonları kullanılarak bulunmuştur (Karney, 2017). Noktaların ortometrik yükseklikleri, uygulamada teknik verilerinden yararlanılan A319neo uçağının Tablo 3'de verilen performans verileri kullanılarak, gerçeğe yakın olarak uçağın güzergâh noktaları üzerinde olması gereken irtifaları bulunmuştur. Bulunan bu irtifalara göre yükseklik profili oluşturulmuş ve ortometrik yükseklik olarak uygulamada kullanılmıştır. Ortometrik yüksekliklere jeoid ondülasyonu değerleri eklenerek elipsoidal yükseklikler elde edilmiş (elipsoidal yükseklik=ortometrik yükseklik+jeoid ondülasyonu) ve ayrı bir dosyada saklanmıştır.

Uçuş güzergahlarının elipsoit üzerindeki jeodezik eğri uzunluğunun hesabında, Karney'in geoddistance.m fonksiyonu kullanılmıştır (Karney, 2017).

Üç boyutlu görselleştirmede kullanılmak üzere jeodezik eğriye dik inilmiş güzergâh noktalarının elipsoidal kartezyen koordinatları ile üç boyutlu yol uzunluğu ayrıca hesaplanmıştır. Bu yaklaşımda güzergâh noktaları, jeodezik eğriye dik olarak inilmiştir. Kalkış noktası ve herhangi bir güzergâh noktası arasındaki uzunluk değeri, Gauss küresi üzerinde dik üçgen çözümüyle elde edilmektedir (Şekil 30). Bu amaçla elipsoidal ikinci temel ödev ile ilk olarak kalkış noktası ve güzergâh noktaları arasındaki azimutlar α , ikinci olarak kalkış ve varış noktaları arasındaki azimut α_0 ve ayrıca bunların farkı $\Delta\alpha$ (346) formülüyle hesaplanmaktadır. Jeodezik eğri üzerine dik inilen bir nokta ile kalkış noktası arasındaki jeodezik eğri uzunluğu S' ; bir güzergâh noktası ile kalkış noktası arasındaki jeodezik eğri uzunluğu S ve azimut farkı $\Delta\alpha$ parametreleri kullanılarak Neper formülünü esas alan (347) eşitliğiyle elde edilmektedir. R_G ilgili iki noktanın enlemlerinin ortalaması kullanılarak (314) formülüyle hesaplanır. Daha sonra kalkış noktasının coğrafi koordinatları, α_0 ve S' kullanılarak elipsoidal birinci temel ödev ile dik inilen noktanın coğrafi koordinatları elde edilmektedir (Başaraner ve Çetinkaya, 2017).



Şekil 30. Güzergâh noktaları ve jeodezik eğriye dik inilmiş noktalar (Başaraner ve Çetinkaya, 2017).

$$\Delta\alpha_{1,k} = |\alpha_0 - \alpha_{1,k}| \quad (346)$$

$$S'_{1,k} = R_G \frac{\pi}{180^\circ} \tan^{-1} \left(\tan \left(\frac{S_{1,k}}{R_G} \times \frac{180^\circ}{\pi} \right) \cos \Delta\alpha_{1,k} \right) \quad (347)$$

$$k = 2, 3, \dots, n - 1$$

Bu yöntemle elde edilen noktaların ortometrik yükseklikleri karşılık geldikleri güzergâh noktalarında uçağın olması gereken irtifası ile aynı kabul edilmektedir. Noktaların elipsoidal yükseklikleri ise formül (295)'e göre elde edilir. Elipsoidal kartezyen koordinatlar (292 ve 293) ve 3B yol uzunluğu ise (294) formülüyle hesaplanır.

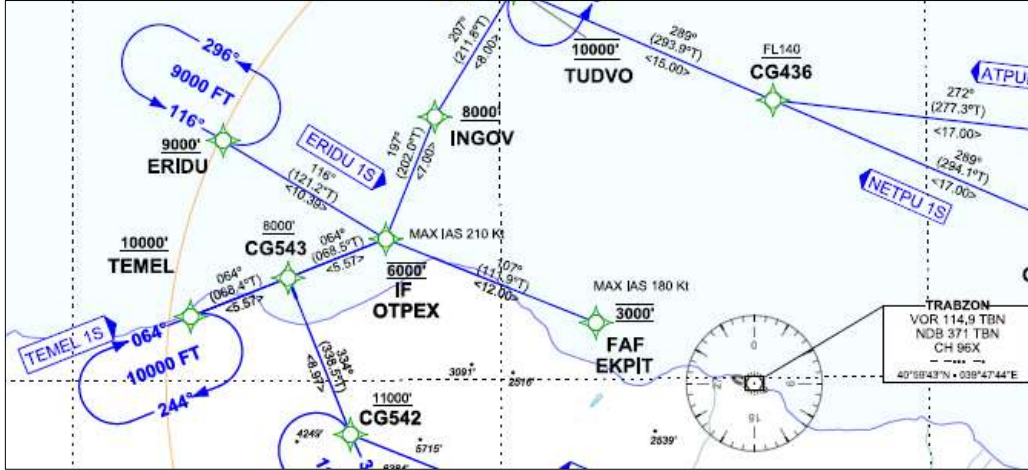
Ayrıca orijinal ve jeodezik eğriye dik inilen güzergâh noktaları arasındaki elipsoidal ve üç boyutlu sapma uzunlukları hesaplanmıştır. Bu işlemde, güzergâh noktaları ve bu noktaların jeodezik eğriye dik inilmesiyle elde edilen noktalar arasındaki ortalama sapma uzunlukları hesaplanır. İlk durumda elipsoit yüzeyindeki sapma Dv , Gauss küresinde Sinüs teoremini esas alan (348) formülüyle hesaplanır. İkinci durumda üç boyutlu sapma Dv_{3B} , daha önce hesaplanan elipsoidal kartezyen koordinatlar kullanılarak (349) eşitliğiyle hesaplanır. Burada k nokta numarasını ifade etmektedir (Başaraner ve Çetinkaya, 2017).

$$Dv_k = R_G \frac{\pi}{180^\circ} \left(\sin^{-1} \left(\sin \left(\frac{S_{1,k}}{R_G} \times \frac{180^\circ}{\pi} \right) \sin \Delta\alpha_{1,k} \right) \right) \quad (348)$$

$$Dv_{3B,k} = \sqrt{(X_k - X'_k)^2 + (Y_k - Y'_k)^2 + (Z_k - Z'_k)^2} \quad (349)$$

Bu işlemlerin ardından, üç boyutlu görselleştirmede kullanılmak üzere orijinal güzergâh noktaları ile jeodezik eğriye dik inilerek elde edilen noktalar ayrı dosyalar halinde CSV formatına dönüştürülüp, Australian Transportation Safety Bureau tarafından yayımlanan ATSB KML Creator uygulamasına aktarılmıştır (URL-8, 2017). Bu uygulamayla, Google Earth Pro üzerinde noktaların coğrafi koordinatları ve elipsoidal yükseklikleriyle KML formatlı üç boyutlu uçuş güzergâhları oluşturulmuştur.

Şekil 31 ve 32’de gösterildiği üzere, özellikle kalkışta ve inişte uygulanan SID ve STAR’lar uçakların kat ettiği yolda mesafe farkını artıran en önemli nedendir.



Şekil 32. STAR örneği (Trabzon havalimanı için)

Tablo 13. Çalışmada kullanılan SID ve STAR verileri

Kalkış	Kalkış pisti	SID	Varış	İniş pisti	STAR
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Hakkari	11	DERIL1G
İstanbul	35L	MOPIN1Y	Trabzon	11	ERIDU1S
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Diyarbakır	34	MOVUL1A
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Gaziantep	10	ASBOM1K
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Şanlıurfa	04	BADEM1E
İstanbul	35L	MOPIN1Y	Kars	24	BAYGA1E
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Ağrı	16	INBAT1D
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Van	03	BEYAZ1A
İstanbul	35L	MOPIN1Y	İğdır	12	YAVUZ1B
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Erzurum	08L/R	DAMAT1D
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Mardin	03/21	DYB1E
İstanbul	35L	EDASA1Y	Adana	05	MANAZ1D
İstanbul	35L	MOPIN1Y	Samsun	13	BAFRA1T
İstanbul	35L	MOPIN1Y	Ordu/Giresun	10	TERME1E
İstanbul	35L	PIMAV1Y	Kayseri	07	SARIZ1E
İstanbul	35L	EDASA1Y	Konya	01	HISAR1S
İstanbul	35L	EDASA1Y	Antalya	36L/C/R	EKSEN1A

Tablo 13'e göre İstanbul Atatürk havalimanı kalkış, Trabzon havalimanı iniş ve RWY35L (kalkış pisti) ile RWY11 (iniş pisti) kullanılan pistler olmak üzere; uçakların kullanabilecekleri standart kalkış ve iniş rotaları olan MOPIN1Y ve ERIDU1S prosedürleri aşağıda verilmiştir:

MOPIN 1Y: To BA010 on course 355° M at 2200 ft minimum, max. speed 240 kts,
turn right to BKZ, turn left to TEMGO, turn left to MOPIN

ERIDU1S: To ERIDU at 9000 feet minimum, turn right to OTPEX at 6000 feet max.
speed 210 kts, turn left to EKPIT at 3000 feet max. speed 180 kts.

SID ve STAR bilgileri uçuş güzergâhında değerlendirildiğinde (Tablo 13), jeodezik eğri üzerindeki segmentler arasındaki mesafe ile üç boyutlu elipsoidal kartezyen koordinatlardan elde edilen segmentler arasındaki mesafe yaklaşık olarak aynı değerlerdedir. Ancak jeodezik eğri üzerinde kalkış ve varış noktası arasındaki direkt mesafeden daha uzun olmaktadır.

Uçuş güzergâhlarına ve en kısa yollara ilişkin elde edilen mesafeler ve ortalama sapma uzunlukları Tablo 14’de verilmektedir. Türkiye hava sahasındaki havalimanları kullanıldığından küre üzerindeki hesaplamada gauss küresi ve elipsoitle aynı alana sahip olduğu için otalık küre kullanılmıştır. Gauss ve otalık kürede ortodrom eğrisi üzerinde uçuş güzergâhlarının uzunlukları, jeodezik eğri üzerinde hesaplanan güzergâh uzunluklarına daha yakın bir değerde olmaktadır.

Tablo 14. Farklı yöntemlerle hesaplanan uçuş rotası mesafeleri ve ortalama dik sapma mesafeleri

Uçuş güzergâhı	Jeodezik Eğri Uzunluğu (km)		3B Elipsoidal Kartezyen Koordinatlardan Güzergâh Uzunluğu (km)		Ortalama Sapma (km)	
	Direkt Mesafe	Uçuş güzergâhı ara noktaları toplamı	Uçuş güzergâhı	Jeodezik eğriye dik inilerek bulunan güzergâh	Elipsoid yüzeyi	Üç Boyutlu
İstanbul-Adana	714,153	837,146	838,758	714,153	52,964	53,636
İstanbul-Antalya	483,866	608,113	609,896	483,866	28,654	29,894
İstanbul-Gaziantep	873,425	931,703	933,467	873,425	26,704	26,974
İstanbul-Konya	463,178	542,255	543,577	463,178	31,240	32,210
İstanbul-Kayseri	621,620	684,942	686,667	621,620	23,810	24,079
İstanbul-Ordu/Giresun	779,715	842,027	843,740	779,715	64,003	63,991
İstanbul-Diyarbakır	1037,455	1078,001	1079,804	1037,455	10,503	10,623
İstanbul-Erzurum	1053,163	1118,606	1120,738	1053,163	44,976	45,002
İstanbul-Kars	1206,894	1258,340	1260,703	1206,894	55,430	55,439
İstanbul-Trabzon	922,647	973,390	975,199	922,647	56,777	56,775
İstanbul-Van	1273,902	1328,095	1330,412	1273,902	43,070	43,139
İstanbul-Ağrı	1215,884	1281,452	1283,936	1215,884	38,524	38,546
İstanbul-Mardin	1102,986	1160,006	1161,911	1102,986	23,807	23,972
İstanbul-Şanlıurfa	954,523	1021,377	1023,382	954,523	27,418	27,624
İstanbul-Iğdır	1279,487	1343,780	1346,342	1279,487	76,282	76,309
İstanbul-Hakkari	1382,269	1520,812	1523,785	1382,269	22,369	22,430
İstanbul-Samsun	650,128	714,585	716,316	650,128	52,703	52,693

Tablo 14'e göre değerlendirme yapıldığında, WGS84 elipsoidinde jeodezik eğri üzerinde ara noktaların toplamından oluşan uçuş güzergâhı uzunluğu ile üç boyutlu ara noktaların toplamından elde edilen güzergâh uzunluğu karşılaştırıldığında sonuçlar yakın çıkmıştır ve maksimum binde 2,9 oranında bir fark meydana gelmiştir. Jeodezik eğri üzerinde Karney yöntemi ile coğrafi koordinatlar ve elipsoidal yükseklik kullanılmış, üç boyutlu segmentlerin toplam uzunluğunda ise kartezyen koordinatlarla elipsoidal yükseklik kullanılarak hesaplama yapılmıştır. Ayrıca işlemde doğru parçaları şeklinde geometriye dayalı hesaplama yapılmıştır.

Aynı şekilde Tablo 14'e göre, kalkış ve varış noktaları arasındaki toplam güzergâh uzunluğunun jeodezik eğri uzunluğuna göre artışının medyan değeri % 6,7 olup, minimum % 3,9 ile İstanbul-Diyarbakır rotasında ve maksimum % 25,7 ile İstanbul-Antalya rotasında saptanmıştır. Uçuş güzergâhının üç boyutlu segment toplam uzunluğunun jeodezik eğri uzunluğuna göre artışının medyan değeri % 6,9 olup, minimum % 4,1 ile İstanbul-Diyarbakır rotasında ve maksimum % 26,0 ile İstanbul-Antalya rotasında gözlemlenmiştir. Uçuş güzergâhı noktalarının jeodezik eğriden ortalama dik sapma miktarları (elipsoid yüzeyinde sapma ve üç boyutlu sapma) genel olarak yaklaşık 10 ile 76 km arasında değişkenlik göstermektedir ve sapma miktarının medyan değeri 38,5 km'dir.

Küresel yöntem değerlendirmesinde; havacılıkta küre üzerindeki hesaplamalar doğruluk açısından yeterli görüldüğünden, Tablo 5'e göre yöntem_küre_1 ve yöntem_küre_2'den bulunan sonuçların benzer olduğu sadece yöntem_küre_3'ün farklı sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu farklılık, güzergâhın bir doğru şeklinde değil kırılgan ayrılmış şekilde değerlendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Aynı zamanda uçakların uçuş güzergâhları boyunca uçuş planlarına göre üzerinden geçmeleri gereken rapor noktaları (reporting fix) veya ara noktalardaki (waypoint) irtifaları da gözönüne alındığında, oluşan ortodrom eğrisi sürekli artan veya azalan eğimde bir çizgi değil de değişen azimutlarda kırılganlardan oluşan bir çizgi şeklindedir. Ayrıca uçakların kalkışta uyguladıkları SID ve inişte uyguladıkları STAR prosedürleri uçuş güzergâhı mesafesinin daha büyük olmasında etken faktörlerdir. Küresel yöntemde, yöntem_küre_1'de verilen elipsoitle arasındaki mesafelerin karelerinin toplamı minimum olan yarıçaplı (R_J) küre üzerinde çözüm yapılarak en kısa mesafe belirlenebilir. Ancak jeosantrik koordinatlardan kırılgan boyu toplamı (yöntem_küre_3), gerçek uçuş rotasını temsil ettiğinden havacılık için uygulanması gereken bir yöntemdir.

Elipsoidal yöntem değerlendirmesinde; en çok yararlanılan beş yöntem seçilmiş ve bu yöntemlerin çözüm doğrulukları kıyaslanarak uygulamada kullanılmak üzere en etkili yöntem belirlenmeye çalışılmıştır. Tablo 6-7-8-9-10-11 değerlendirildiğinde, Sjöberg ve Karney çözüm yöntemleri ile doğru sonuçlar elde edilmiştir. İkisi arasında seçim yapıldığında Sjöberg yönteminin dezavantajı, sadece $B1 < B2$ ve $L1 < L2$ için çözüm üretmesi uygulama açısından bir kısıtlama olduğundan Karney çözüm yönteminin daha kullanışlı olduğu ortaya çıkmaktadır. yöntem_elipsoit_1 olarak Karney çözüm yöntemi, yöntem_elipsoit_2 olarak elipsoit üzerinde jeodezik eğri segmentlerinin toplam uzunluğu ve yöntem_elipsoit_3 olarak Tseng'in eliptik çözüm yöntemi seçilmiştir (Tablo 12). Tablo 12 incelendiğinde, güzergâh uzunlukları arasında yöntem_elipsoit_2'den elde edilen sonuçların diğerlerinden daha fazla olduğu görülmektedir. Bunun nedeni, mevcut havacılık haritalarında uçuş güzergâhlarının aslında kırılgan (segmentlere) ayrılmış olarak oluşturulmasıdır. Aslında uçaklar, kalkışlarından inişlerine kadar sadece seyir seviyesine (cruising level) ulaştıklarında düz uçuş yapmaktadırlar.

Uçaklar, kalkışta SID ve inişte STAR uyguladıklarından uçuş güzergâhlarının uzunluğu doğal olarak artmaktadır. Özellikle Türkiye havasahası içerisinde denize yakın havalimanları haricinde diğer havalimanlarında uçakların iniş veya kalkışta gerekli emniyet irtifalarını alabilmesi için farklı prosedürler uygulamasına ihtiyaç vardır. Aynı zamanda gerçekte kat ettikleri yol kırılgan mesafelerinden elde edilen yoldur. Diğer iki yöntem ise sadece jeodezik eğri üzerinde başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki en kısa mesafeyi bulmayı amaçladığından, uçakların kalkış ve iniş safhalarında uyguladıkları prosedürlerden oluşan mesafeler göz ardı edilmektedir. Bu sebeplerden dolayı havacılık amaçlı uygulamalarda jeodezik eğri segmentlerinin toplamından oluşan mesafelerin (yöntem_elipsoit_2) kullanılması daha doğru olacaktır.

Tseng'in eliptik çözüm yönteminde (yöntem_elipsoit_3), Karney çözüm yöntemine (yöntem_elipsoit_1) yakın sonuçlar elde edilmiştir (Tablo 12). Bu yöntemin avantajı, elipsoitte jeodezik eğri üzerinde hesap yükünden kaçınmak için büyük eliptik yayı yardımıyla hesap yapılabilmesidir. Elipsoitte büyük eliptik yayı, jeosantrik enlemin normal kesit eğrilerinin arakesit düzlemlerinden oluşur. Büyük eliptik kesiti, büyük eliptik yayını içinde bulundurur ve ekvatoru ellipsoid merkezinde iki noktada keser. Bu yayda jeosantrik enlemin yarıçapı, ellipsoid merkeziyle birleştiği için hesap jeodezik eğriye göre daha basittir. Elipsoitte herhangi iki noktadan, ellipsoid merkeziyle beraber yalnız bir eliptik düzlem oluşur ve bu iki noktadan sadece bir büyük eliptik yayı geçer. Büyük eliptik yayı

en kısa mesafeyi vermediğinden ve havacılık uygulamalarında en kısa mesafeden uçuşların gerçekleştirilmesi önemlidir. Bu açıdan, büyük eliptik yayının kullanımı küre gibi hesap kolaylığı sağladığından kısa ve orta mesafelerde tercih edilebilir.

Tablo 15. Küre ve elipsoit üzerinde kiriş boyu toplamalarının karşılaştırılması

Uçuş Güzergâhı	Küre üzerinde kiriş boyu toplamı (km)	Elipsoit üzerinde kiriş boyu toplamı (km)
İstanbul-Adana	838,874	838,758
İstanbul-Samsun	717,457	716,316
İstanbul-Ordu/Giresun	845,130	843,740
İstanbul-Trabzon	976,941	975,199
İstanbul-Kayseri	687,423	686,667
İstanbul-Konya	543,517	543,577
İstanbul-Gaziantep	934,124	933,467
İstanbul-Şanlıurfa	1024,518	1023,382
İstanbul-Diyarbakır	1081,364	1079,804
İstanbul-Van	1332,645	1330,412
İstanbul-Kars	1263,022	1260,703
İstanbul-Ağrı	1286,194	1283,936
İstanbul-Erzurum	1122,688	1120,738
İstanbul-Hakkari	1526,186	1523,785
İstanbul-Iğdır	1348,688	1346,342
İstanbul-Mardin	1163,360	1161,911
İstanbul-Antalya	609,134	609,896

Tablo 16. Küre ile elipsoit üzerindeki kiriş boyu toplamaları arasındaki farka göre tek yön ve gidiş-dönüş için ortalama yakıt tüketimi

Uçuş Güzergâhı	Fark (Küre ile elipsoit kiriş boyları arasındaki) (km)	Yakıt tüketimi (Tek yön) (lt)	Yakıt tüketimi (Gidiş-Dönüş) (lt)
İstanbul-Adana	0,116	0,4	0,9
İstanbul-Samsun	1,141	4,4	8,8
İstanbul-Ordu/Giresun	1,390	5,4	10,7
İstanbul-Trabzon	1,742	6,7	13,4
İstanbul-Kayseri	0,756	2,9	5,8
İstanbul-Konya	0,060	0,2	0,5
İstanbul-Gaziantep	0,657	2,5	5,1
İstanbul-Şanlıurfa	1,136	4,4	8,7
İstanbul-Diyarbakır	1,559	6,0	12,0
İstanbul-Van	2,234	8,6	17,2
İstanbul-Kars	2,319	8,9	17,9
İstanbul-Ağrı	2,258	8,7	17,4
İstanbul-Erzurum	1,950	7,5	15,0
İstanbul-Hakkari	2,401	9,2	18,5
İstanbul-Iğdır	2,346	9,0	18,1
İstanbul-Mardin	1,449	5,6	11,2
İstanbul-Antalya	0,762	2,9	5,9

Tablo 15'e göre küre üzerinde kiriş boyları toplamına göre bulunan güzergâh uzunluğu elipsoit üzerinde hesaplanandan fazla çıkmıştır. Buradan hareketle, elipsoit üzerinde yapılan hesaplamaların havacılıkta kullanılması daha etkili sonuçlar elde edilmesini sağlayacaktır.

Uçuş güzergâhı üzerindeki tüm detaylar gözönüne alınarak hesaplama yapıldığından dolayı, elipsoid veya küresel kartezyen koordinatların yükseklikle beraber kullanılması ve uçuş güzergâhının parçalara ayrılarak aradaki mesafelerin toplamından elde edilen güzergâh uzunluğunun havacılıkta uygulanmasının daha gerçekçi bir yaklaşım olduğu görülmektedir.

Tablo 16'da bir uçuş için geçerli olmak üzere uygulamada kullanılan A319neo uçağına ait teknik verilerden hareketle km başına 3,85 lt yakıt harcamaktadır. Buradan uçuş güzergâhlarında oluşan yakıt tüketimi 0,4 ile 9,2 lt arasında değişim göstermektedir. Türkiye hava sahasındaki uçuş güzergâhları değerlendirildiğinden orta mesafeler için bir değerlendirme yapılmış olup günde bir uçuş varsayılarak yakıt tüketimi hesaplanmıştır. Gerçekte minimum 2 uçuş olmak üzere aktüel günlük uçuş sayısı düşünülürse, yakıt tüketiminin daha da fazla olacağı tahmin edilebilmektedir. Bu nedenle hesaplamaların elipsoitte jeodezik eğri üzerinde yapılması ile yakıt ve zamandan tasarruf sağlanabileceği düşünülmektedir.

Uzun mesafe uçuşlar düşünüldüğünde jeodezik eğri ve ortodrom eğrisi üzerinde güzergâh uzunlukları arasındaki farklar ve oluşan yakıt tüketimi aşağıda bir örnek olarak sunulmuştur (Tablo 17):

Tablo 17. Uzun mesafe uçuş güzergâhı için örnek hesaplama

Uçuş güzergâhı		Ortodrom eğrisi uzunluğu	Jeodezik eğri uzunluğu	Fark	Yakıt tüketimi
Kalkış	Varış	(km)	(km)	(km)	(lt)
İstanbul 40.97611111 28.81416667	Beijing (NE) 40.08000000 116.58444444	7093,912	7089,454	4,458	52,8
	Sydney (SE) -33.946110 151.177222	14947,735	14901,288	46,447	549,9
	Rio de Janerio (SW) -22.808902 -43.243646	10240,664	10217,512	23,152	274,1
	Seattle (NW) 47.449889 -122.311777	9817,760	9803,565	14,200	168,1

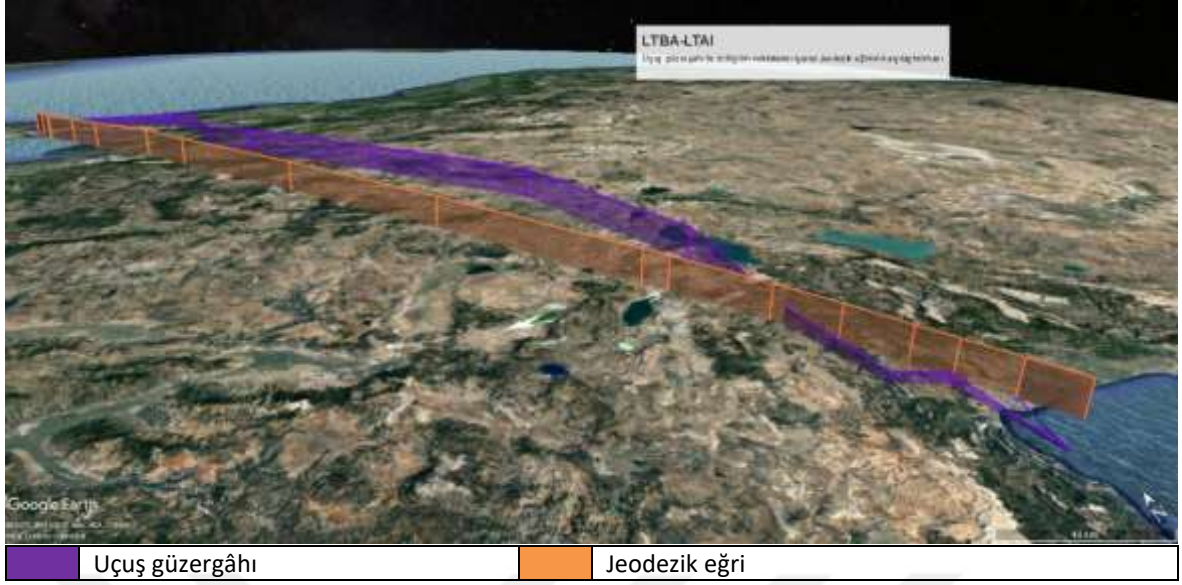
Üç boyutlu görselleştirme için kullanılan Google Earth Pro uygulamasında üç boyutlu görünümün yanında yükseklik profili de oluşturulabilmektedir. Şekil 33 ile Şekil 49 arasında uçuş güzergâhları ile jeodezik eğrinin karşılaştırılmasını gösteren üç boyutlu görüntüler sunulmuştur.



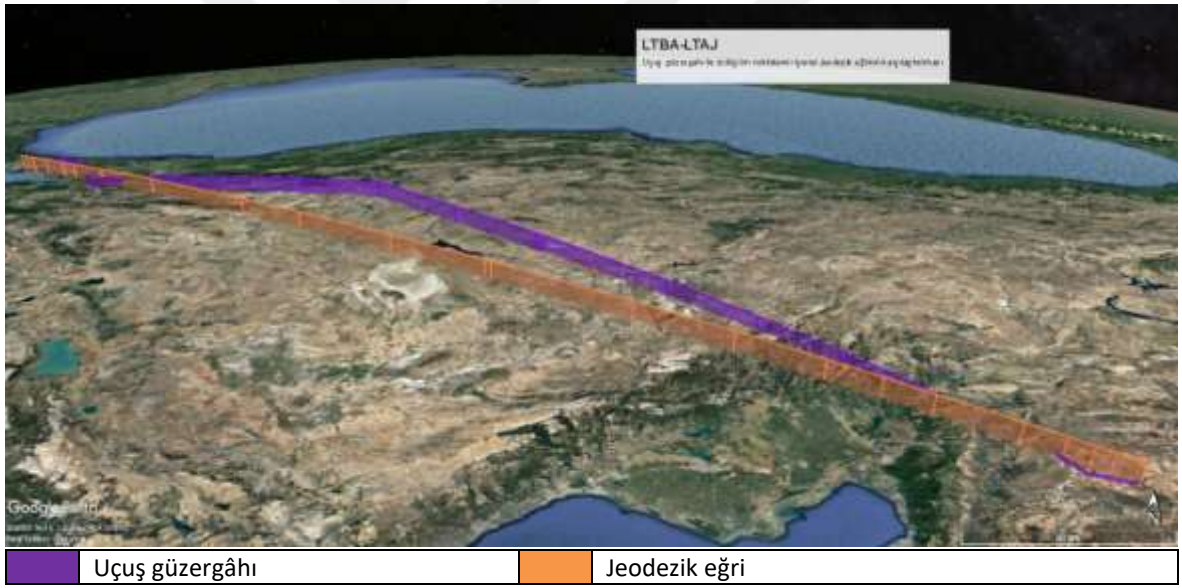
Şekil 33. İstanbul ile Adana arası uçuş güzergâhı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 33'te İstanbul ile Adana havalimanları arasında uçuş planına göre oluşturulan uçuş güzergâhı ile jeodezik eğri arasında oldukça fazla bir sapma vardır. Uçuş planına göre 12 ara noktadan oluşan bu güzergahtaki sapmanın en büyük nedeni mevcut arazi koşullarına göre uçuş için gerekli minimum emniyet irtifalarının jeodezik eğri üzerinde gidildiğinde sağlanamamasıdır.

Şekil 34'de İstanbul ile Antalya havalimanı arasında oluşturulan uçuş güzergâhı ise jeodezik eğriye nispeten daha yakındır. 16 ara noktadan oluşan bu güzergah başlangıç ve bitiş bölümlerinde farklılık göstermektedir. Bunun nedeni, uçağın kalkış ve iniş pistlerine göre uyguladığı SID ve STAR konfigürasyonlarıdır. Ayrıca uçuş güzergâhının orta kısmında oluşan jeodezik eğriye göre sapma ise mevcut arazi koşullarından kaynaklanmaktadır.

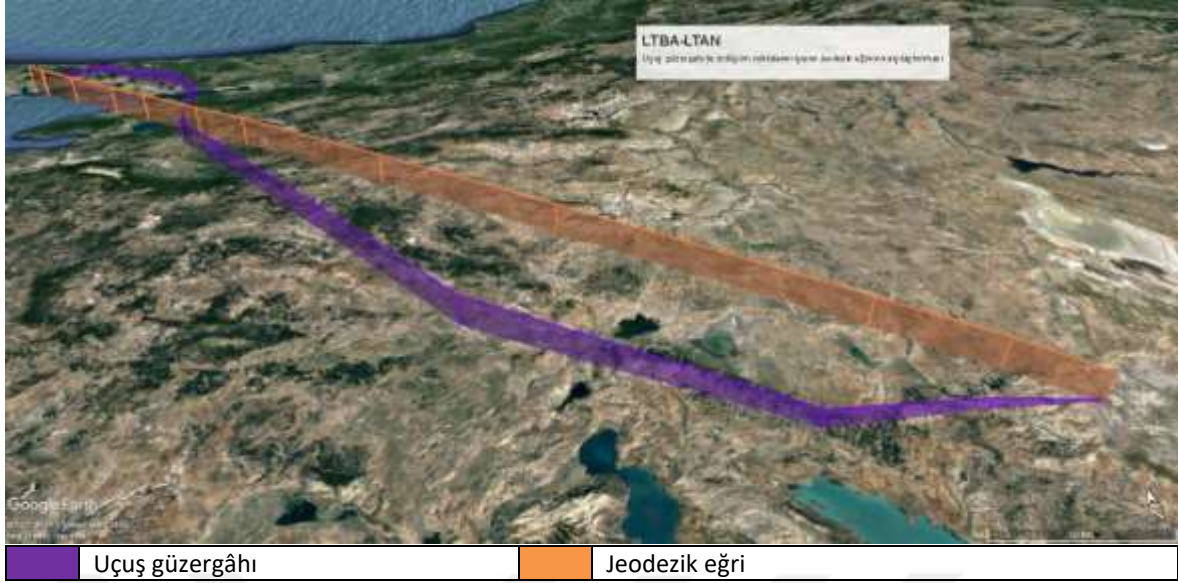


Şekil 34. İstanbul ile Antalya arası uçuş güzergâhı karşılaştırma görüntüsü



Şekil 35. İstanbul ile Gaziantep arası uçuş güzergâhı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 35'te İstanbul ile Gaziantep havalimanı arasında oluşturulan uçuş güzergâhı jeodezik eğriye yakın sayılabilir. 21 ara noktadan oluşan bu güzergâh arazi şartlarından dolayı orta bölümde jeodezik eğriden biraz uzaklaşmıştır.



Şekil 36. İstanbul ile Konya arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

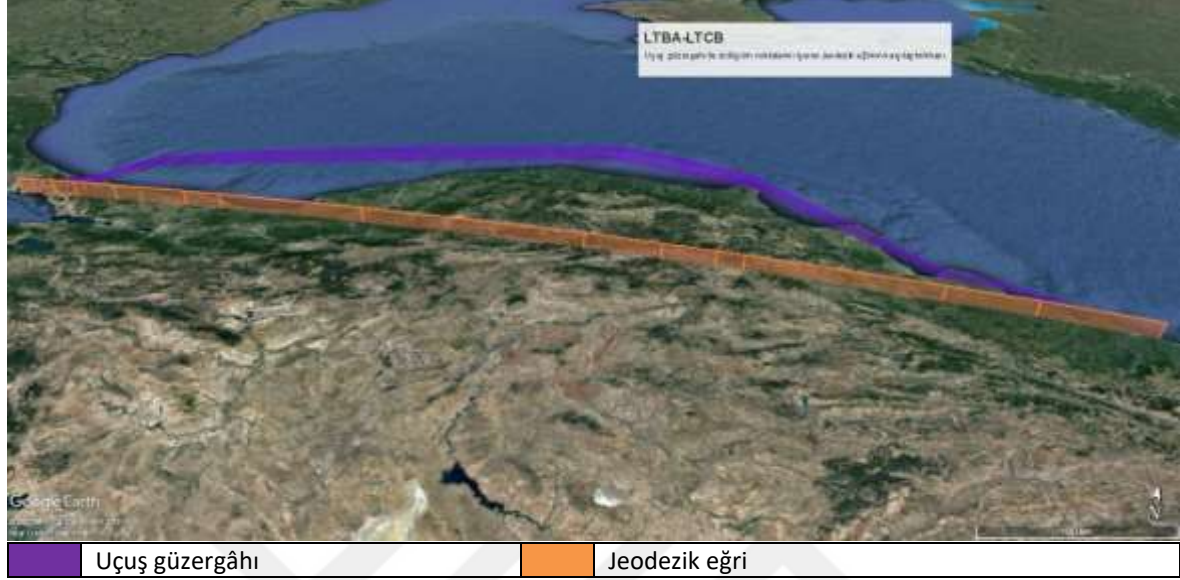


Şekil 37. İstanbul ile Kayseri arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

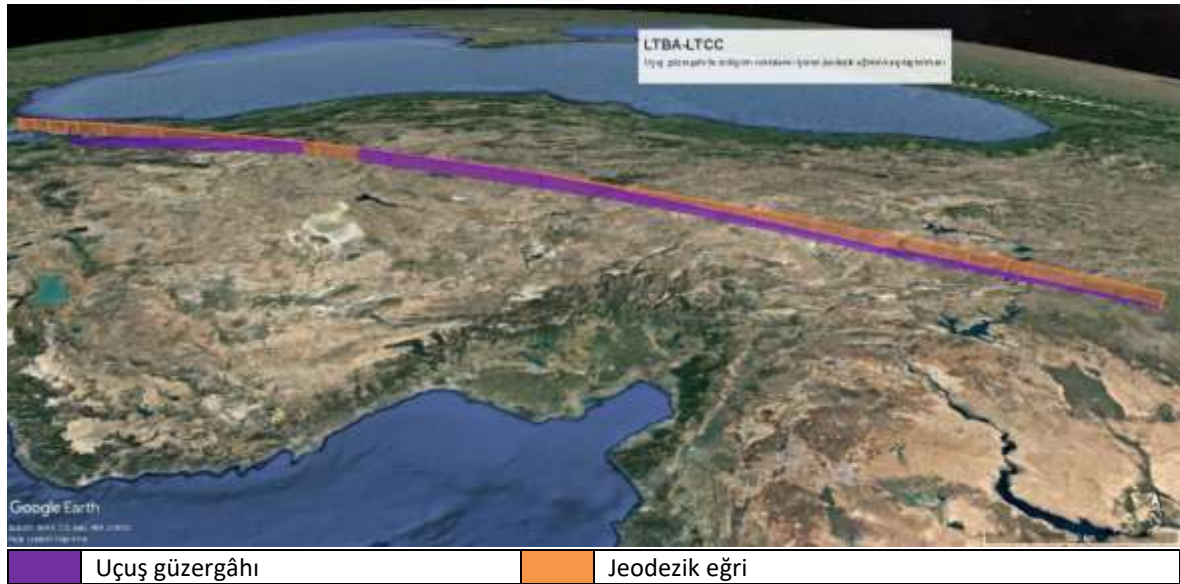
Şekil 36’da İstanbul ile Konya havalimanı arasında oluşturulan uçuş güzergahı, mevcut arazi şartlarında (özellikle dağlık bölgeler) uçuş için gerekli minimum emniyet irtifalarının sağlanamaması, askeri operasyonlar için tahsis edilmiş tahditli hava sahalarının olması ve iki yönlü muhabere için gerekli yer tabanlı iletişim istasyonlarının kapsama alanının azalmasından dolayı jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.

Şekil 37’de İstanbul ile Kayseri havalimanı arasında oluşturulan güzergah jeodezik eğriye nispeten yakındır. 13 ara noktadan oluşan bu güzergah orta ve son bölümde jeodezik

eğriden biraz sapma göstermiştir. Bunun nedeni de iniş için kullanılan STAR'a ait uçağın uyguladığı manevralardır.



Şekil 38. İstanbul ile Ordu/Giresun havalimanı arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

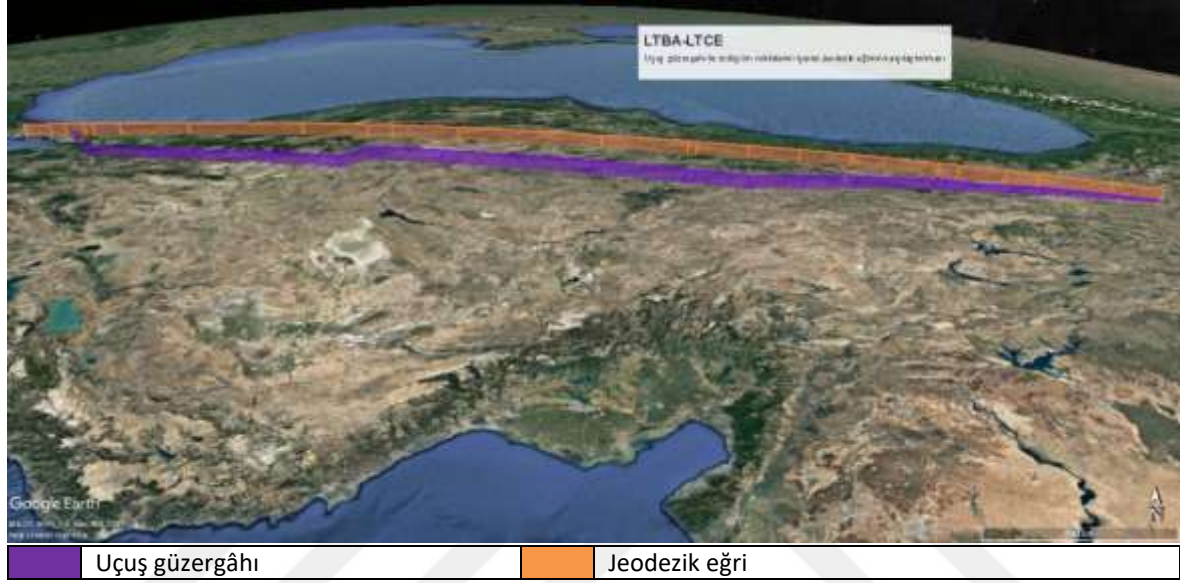


Şekil 39. İstanbul ile Diyarbakır arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 38'de İstanbul ile Ordu/Giresun havalimanı arasında oluşturulan uçuş güzergahı minimum uçuş emniyet irtifalarının deniz üzerinde daha az olması ve dağlık arazi koşullarının oluşturduğu farklı meteorolojik durumlar nedeni ile jeodezik eğriden

uzaklaşmıştır. 13 ara noktadan oluşan bu güzergah dağlık arazi şartlarından uzaklaşmak için deniz üzerinde oluşturulmuştur.

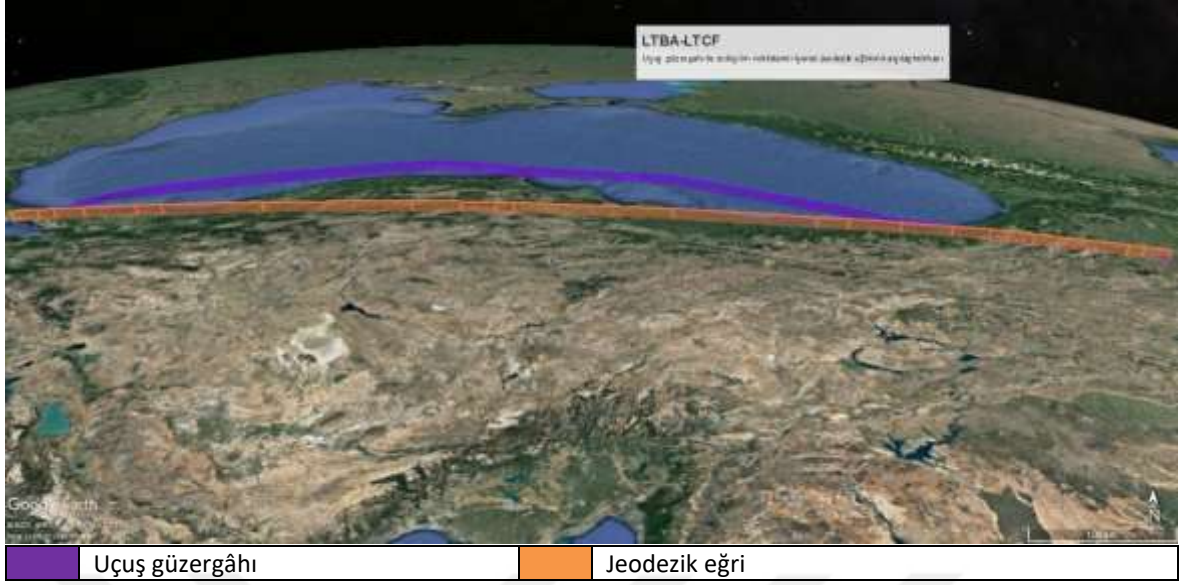
Şekil 39'da İstanbul ile Diyarbakır havalimanı arasında oluşturulan bu güzergah jeodezik eğri ile tamamen örtüşmektedir. 17 ara noktadan oluşan bu güzergah zorlu arazi koşulları olsa bile jeodezik eğri ile tam bir uyum içinde bulunmaktadır.



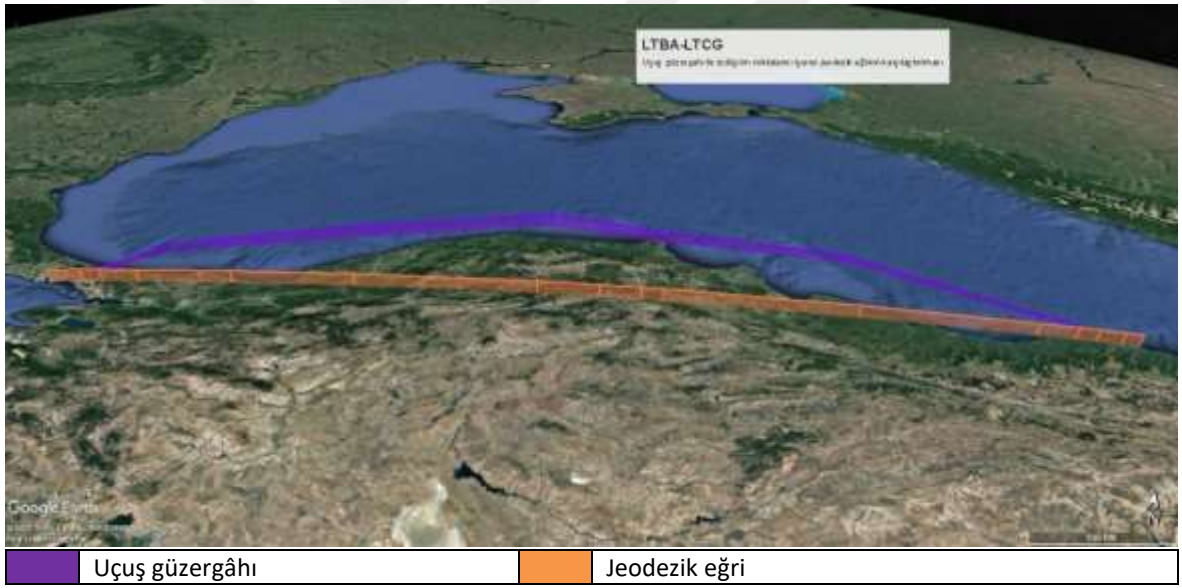
Şekil 40. İstanbul ile Erzurum arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 40'ta İstanbul ile Erzurum havalimanı arasında oluşturulan güzergah jeodezik eğriye nispeten yakındır. 22 ara noktadan oluşan bu güzergah orta bölümde arazi koşullarından dolayı (dağlık alan) jeodezik eğriden biraz sapmıştır.

Şekil 41'de İstanbul ile Kars havalimanı arasında oluşturulan uçuş güzergahı mevcut arazi koşullarından kaçınmak için deniz üzerinde oluşturulmuştur. 19 ara noktadan oluşan bu güzergah, orta bölümü deniz üzerinde tesis edildiğinden jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.



Şekil 41. İstanbul ile Kars arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

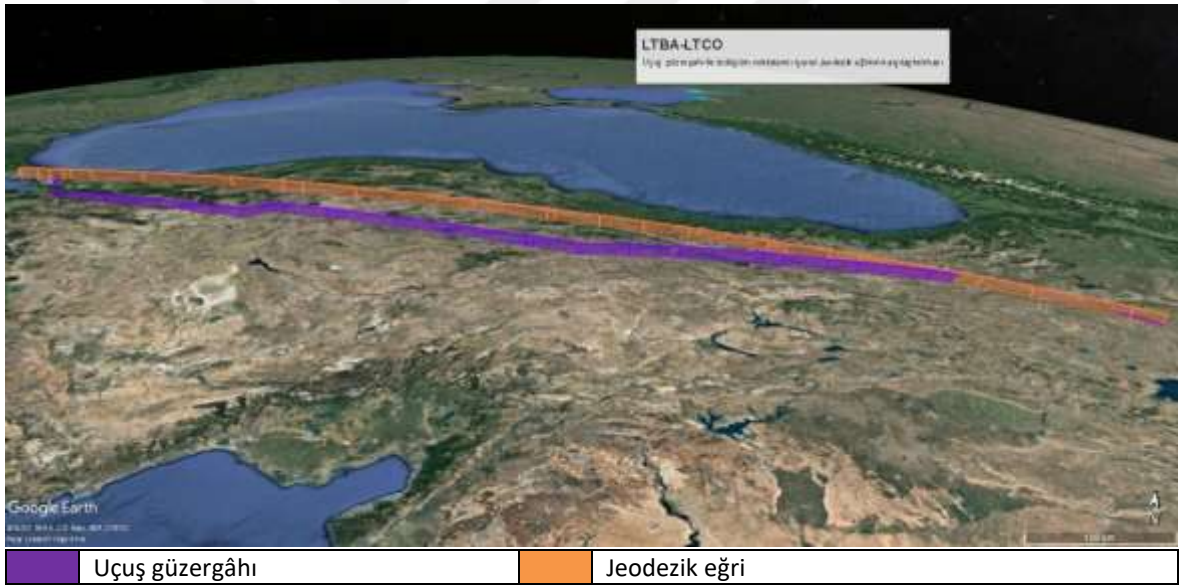


Şekil 42. İstanbul ile Trabzon arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 42’de İstanbul ile Trabzon havalimanı arasında 16 ara noktadan oluşturulan bu güzergah, yine dağlık arazi şartlarından kaçınmak için deniz üzerinde alınmıştır. Bu nedenle, güzergahın orta bölümü jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.



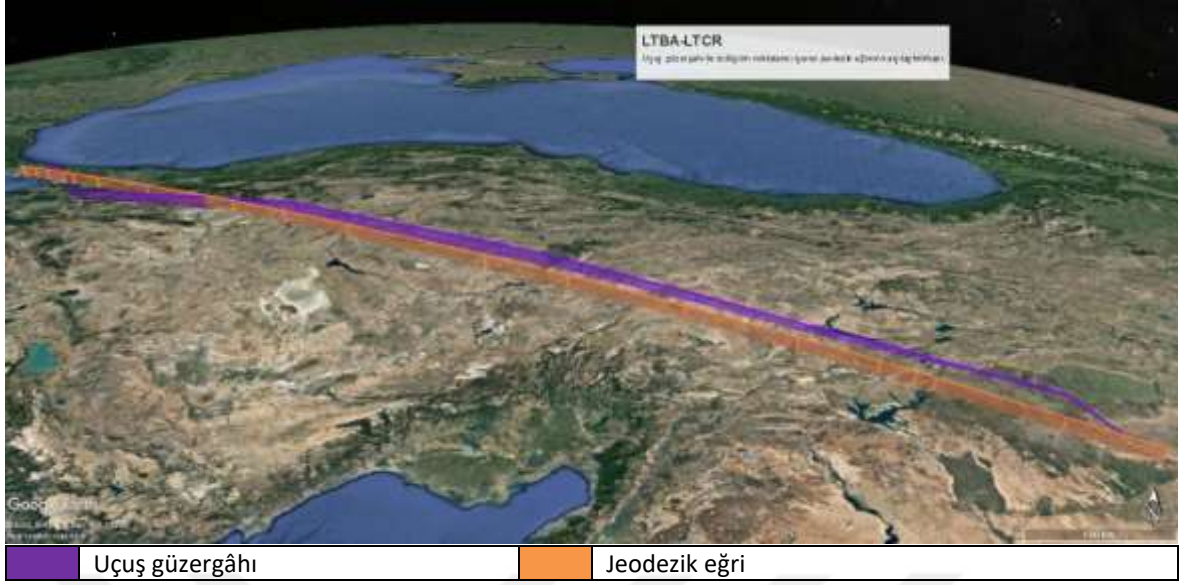
Şekil 43. İstanbul ile Van arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü



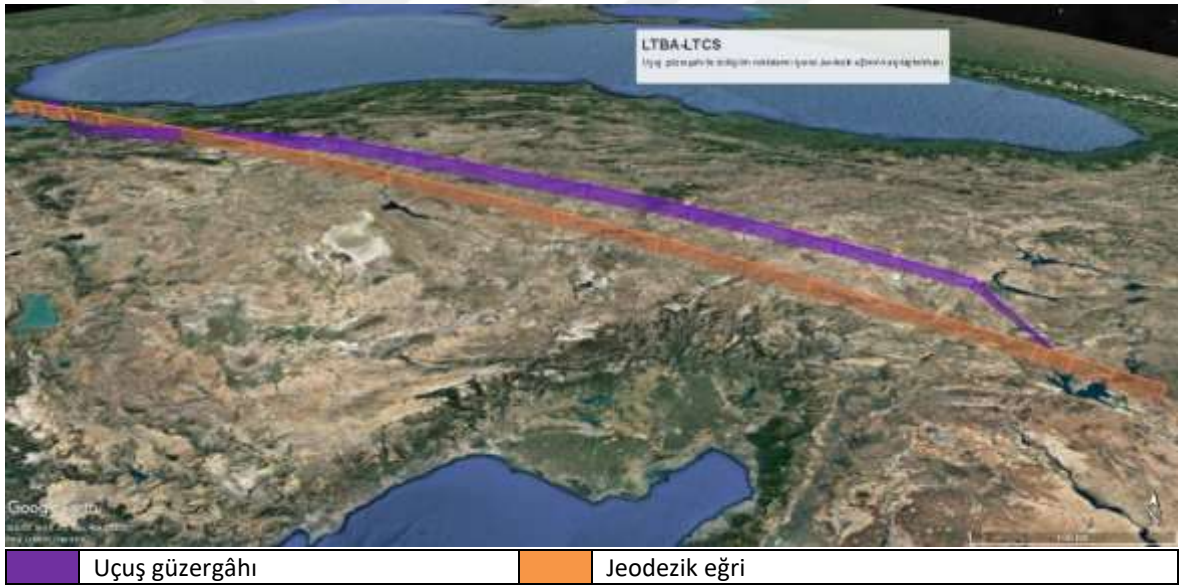
Şekil 44. İstanbul ile Ağrı arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 43'te İstanbul ile Van havalimanı arasında 20 ara noktadan oluşturulan güzergah, askeri tahditli hava sahaları ve arazi şartları nedeniyle orta bölümde jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.

Şekil 44'te İstanbul ile Ağrı havalimanı arasında 25 ara noktadan oluşturulan bu güzergah, İstanbul-Van arasında olduğu gibi askeri tahditli hava sahaları ve arazi şartlarından dolayı orta bölümde jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.



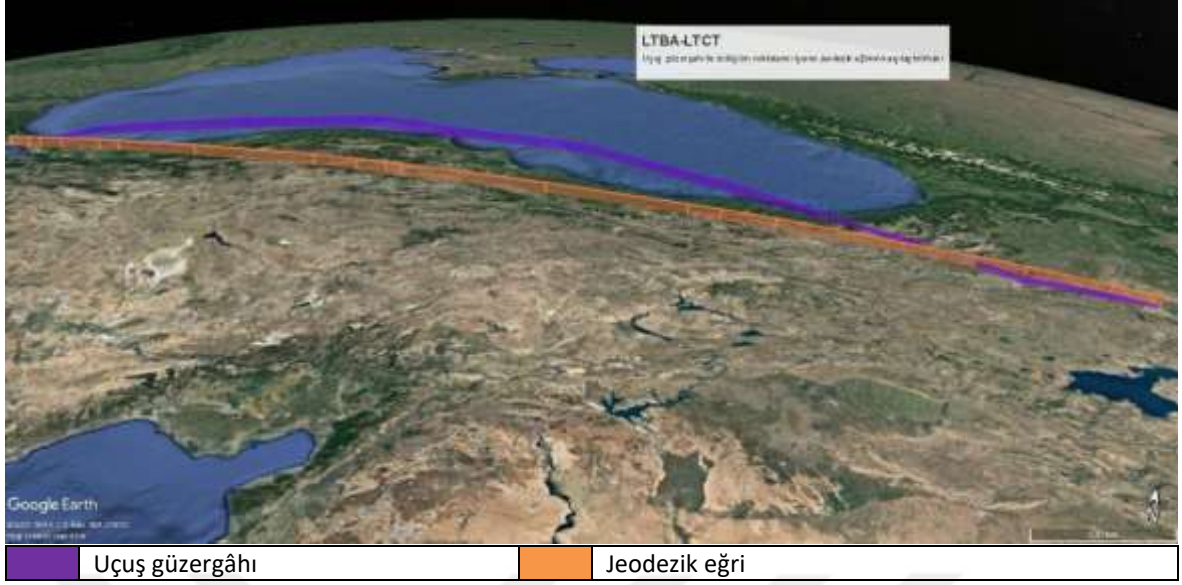
Şekil 45. İstanbul ile Mardin arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü



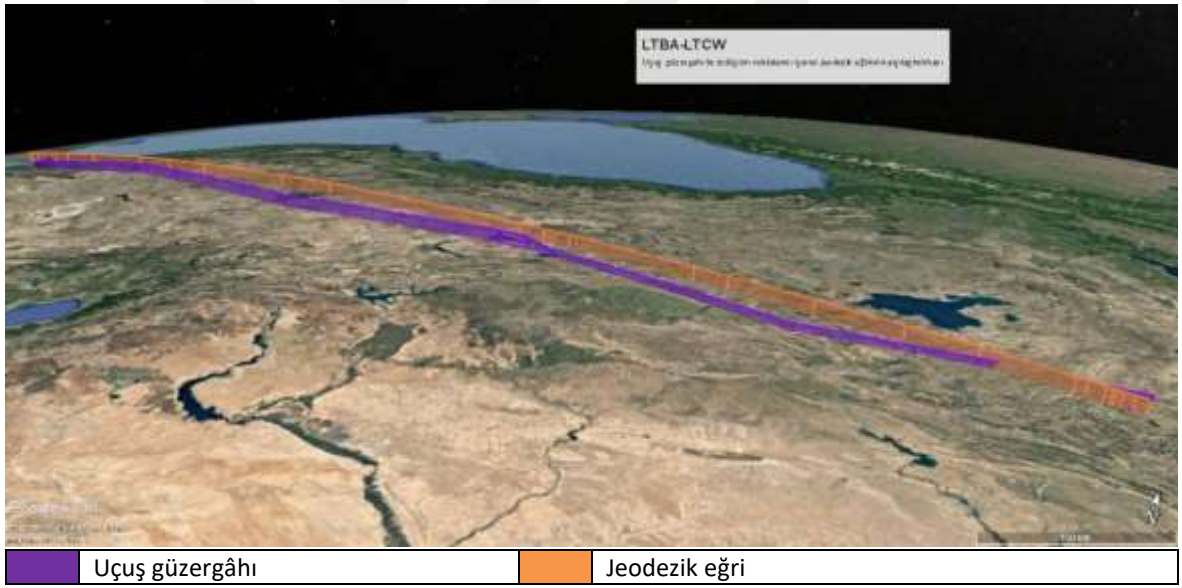
Şekil 46. İstanbul ile Şanlıurfa arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 45’de İstanbul ile Mardin havalimanı arasında 18 ara noktadan oluşturulan bu güzergah, jeodezik eğriye oldukça yakındır. Sadece başlangıç ve bitiş noktalarında kullanılan SID ve STAR konfigürasyonlarına göre yapılan manevralardan kaynaklanan sapmalar mevcuttur.

Şekil 46’da İstanbul ile Şanlıurfa havalimanı arasında 18 ara noktadan oluşturulan uçuş güzergahı, orta bölümde arazi koşullarından dolayı jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.



Şekil 47. İstanbul ile Iğdır arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü



Şekil 48. İstanbul ile Hakkari arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 47’de İstanbul ile Iğdır arasında 17 ara noktadan oluşturulan bu güzergah, dağlık araziye göre deniz üzerinde uçmanın avantajını kullandığından jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.

Şekil 48’de İstanbul ile Hakkari havalimanı arasında 27 ara noktadan oluşturulan güzergah, arazi şartları nedeni ile az da olsa jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.



Şekil 49. İstanbul ile Samsun arası uçuş güzergahı karşılaştırma görüntüsü

Şekil 49’da İstanbul ile Samsun havalimanı arasında 15 ara noktadan oluşturulan güzergah, dağlık arazi şartlarından kaçınmak için deniz üzerinde alınmıştır. Bu yüzden orta bölümde jeodezik eğriden uzaklaşmıştır.

Üç boyutlu görüntüler değerlendirildiğinde, jeodezik eğriden en az sapan İstanbul-Diyarbakır (10,5 km ortalama sapma) ve İstanbul-Hakkari (22,4 km ortalama sapma) uçuş güzergahları olmuştur. Sapmanın en fazla olduğu güzergahlar ise İstanbul-Iğdır (76,3 km ortalama sapma) ve İstanbul-Ordu/Giresun (64 km ortalama sapma)’dur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çalışmamızda, havacılıkta kullanılan uçuş planlarından yararlanılarak elde edilen uçuş güzergâhı uzunluklarını farklı yaklaşımlar kullanılarak küre ile elipsoit üzerinde ve üç boyutlu uzayda hesaplayarak kendi aralarında karşılaştırmaları yapılmıştır.

Küre üzerindeki hesaplamada üç yöntem oluşturulmuştur. yöntem_küre_1’de farklı küre yarıçapları kullanarak mesafe bulma, yöntem_küre_2’de otalık küre yardımıyla mesafe bulma ve yöntem_küre_3’te ise jeosantrik koordinatlardan giriş boyu toplam uzunluğunun bulunması ele alınmıştır. yöntem_küre_1 ve yöntem_küre_2’ye göre uçuş güzergâhlarının uzunluğu yakın değerlerde çıkmıştır. yöntem_küre_3’te ise güzergâh uzunluklarında belirgin bir artış olmuştur ve en büyük değişim % 26 oranında artışla İstanbul-Antalya uçuş güzergâhında, sonrasında ise % 18 ile İstanbul-Adana ve % 17 ile İstanbul-Konya uçuş güzergâhlarında olmuştur. Diğer uçuş güzergâhlarında ise değişim oranı % 10’un altında gerçekleşmiştir. Oluşan bu farklılık, uçuş güzergâhının bir ortodrom eğrisi şeklinde değil de kırıslara ayrılmış kırık çizgi şeklinde değerlendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Ayrıca uçakların kalkışta ve inişte uyguladıkları SID ve STAR prosedürleri, güzergâh boyunca kat ettikleri yolun artmasına neden olan etken faktörlerdir. Jeosantrik koordinatlardan giriş boyu toplamı (yöntem_küre_3), gerçek uçuş rotasını temsil ettiğinden havacılıkta en çok tercih edilen yöntemdir.

Elipsoit üzerindeki hesaplamada da üç yöntem oluşturulmuştur. Birinci yöntemde, beş çözüm yöntemi seçilerek en uygun yöntemin belirlenebilmesi amacıyla üç aşamalı bir teste tabi tutulmuştur. Bu testin sonucunda yöntem_elipsoit_1 olarak Karney çözüm yöntemi seçilmiştir. Daha sonra yöntem_elipsoit_2 ve yöntem_elipsoit_3 olarak seçilen çözüm yöntemleri ile yöntem_elipsoit_1’in karşılaştırması yapılarak havacılıkta kullanılabilecek en etkin yöntemin belirlenmesi sağlanmıştır. yöntem_elipsoit_1 ve yöntem_elipsoit_3’ün yakın sonuçlar verdiği fakat yöntem_elipsoit_2’den elde edilen sonuçlarda belirgin bir artış olduğu görülmektedir. yöntem_elipsoit_1 ve yöntem_elipsoit_3’ün yöntem_elipsoit_2’ye göre değişim oranı minimum % 4 maksimum % 26 olmuştur. En büyük artış % 26 İstanbul-Antalya, sonrasında % 17 ile İstanbul-Adana ve İstanbul-Konya güzergâhlarında, en az artış ise % 4 ile İstanbul-Diyarbakır güzergâhında olmuştur. Bu artışa neden olan şey, küresel çözümde olduğu gibi uçuş güzergâhının bir jeodezik eğri şeklinde değil de kırıslara ayrılmış

kırık çizgi şeklinde değerlendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Aynı zamanda SID ve STAR prosedürleri de, uçakların kat ettikleri güzergâh uzunluğunun artmasına neden olan etken faktörlerdir. Bu çalışmada elipsoit üzerinde havacılıkta kullanılabilecek yöntem olarak yöntem_elipsoit_1'i tavsiye edebiliriz, çünkü yakıt ve zaman maliyeti açısından en kısa uçuş mesafesini vermektedir. Uçuş güzergâhı ile ilgili tüm detay dikkate alınarak uçuş planı ile oluşturulan rotaların mümkün olduğunca jeodezik eğriye yaklaştırılması gerekmektedir. yöntem_elipsoit_2'de bu işlem yakıt ve zaman açısından değerlendirilmiş ve uçuş güzergâhları mümkün olduğunca jeodezik eğriye yakınlaştırılmıştır. Ancak mesafede artış olmuştur.

Çalışmada aynı zamanda, Karney'in ters jeodezik temel problem çözüm yöntemi kullanılarak jeodezik eğri üzerindeki uçuş güzergâhlarının uzunlukları hesaplanmıştır. Uygulamada A319neo tipi uçağın performans değerleri kullanılarak güzergâh noktaları üzerinde olunması gereken irtifalar (ortometrik yükseklik) gerçeğe yakın olarak belirlenmiştir. Daha sonra güzergâh noktalarına ait jeoid ondülasyonları hesaplanarak ortometrik yüksekliğe dâhil edilmesi ile elipsoidal yükseklikler elde edilmiştir. Elipsoidal yükseklik değerleri ile güzergâh noktalarının üç boyutlu uzunluk değerlendirilmesi yapılmıştır. Ayrıca uçuş güzergâhı noktalarının jeodezik eğriye dik inilmesi ile elde edilen yeni noktalar kullanılarak uzunluk hesaplaması yapılmıştır. Buradan hareketle elipsoit yüzeyinde ve üç boyutlu uzayda ortalama sapmalar elde edilmiştir. Aynı zamanda uçuş güzergâhı ile jeodezik eğri karşılaştırmasını gösteren üç boyutlu görselleştirme yapılmıştır.

Havacılık uygulamalarında jeodezik uygulamalara göre ihtiyaç duyulan konum ve yükseklik doğruluğu daha düşüktür. Aslında küre yüzeyi üzerinde yapılan hesaplamalar yeterli görülmektedir. Ancak elipsoid yüzeyinde yapılan hesaplamaların daha hassas olduğu düşünülmektedir. Değişken ortometrik yüksekliklerin alınması sonuçların daha verimli olduğunu göstermektedir. Uygulamada uçuş planlarında yer almayan verilerin de (kullanılan pist, SID, STAR, yaklaşma prosedürü gibi) kullanılması daha gerçekçi sonuçların elde edilmesini sağlamaktadır.

Uçaklar meteorolojik şartlar, yakıt mesafesi ve coğrafik koşullar göz ardı edildiğinde, kalkıştan inişe kadar tüm uçuşu boyunca sabit bir uçuş başını takip ederek uçuşunu gerçekleştirebilir. Eğer bu şartlar dikkate alınırsa en kısa yol her zaman mesafe açısından en ekonomik yol olmayabilir. Sabit uçuş başında düz veya eğri bir çizgiyi takip etmek zaman ve yakıt sarfıyatına neden olur. Bu nedenle, uçuş güzergâhı planlanırken ortodrom eğrisi veya jeodezik eğri segmentlere ayrılır. Bu sayede, ortodrom veya jeodezik

eğri üzerinde gidildiğinde uçuşu etkileyebilecek faktörlerden kaçınılmış olur. Buradan hareketle çalışmada verilmek istenen tavsiye, havacılık uygulamalarında segmentlere (kirişlere) ayrılmış jeodezik eğrinin toplam uzunluğundan uçuş güzergâhının bulunmasının pratik amaçlar için uygun olduğu, ancak uçuşu engelleyebilecek bütün faktörler dikkate alınarak hesaplamanın mümkün olduğunca elipsoitte jeodezik eğri üzerinde yapılması daha hassas sonuçlar alınmasını sağlayacaktır. Tablo 15’de verilen değerler gözönüne alındığında elipsoitte kiriş boyu toplam uzunluğu kürede olduğundan daha kısa olmaktadır. Bu mesafeler arasındaki farklar ile uçuş güzergâhlarında oluşan yakıt tüketimi 0,5 ile 9,2 lt arasında değişim göstermektedir (Tablo 16). Bu da en basit anlamda, uygulamada kullanılan 17 güzergâh günlük 17 tek yön uçuş olarak değerlendirilirse toplamda günlük 99,09 lt yakıt tasarrufu sağlanacaktır (Tablo 16).

Rüzgâr verisi bu çalışmada sakın rüzgâr şeklinde değerlendirildiğinden daha sonraki çalışmalarda ön, arka ve yan rüzgâr değerlerinin dikkate alınmasıyla daha gerçekçi sonuçlara ulaşılabilir. Ayrıca farklı uçak tipleri içinde uygulama genişletilebilir.

5. KAYNAKLAR

- Air Clues. The RAF Flight Safety Magazine, Royal Air Force of United Kingdom, <https://www.raf.mod.uk/organisation/airclues.cfm>, 10 Temmuz 1952.
- AIP, 2016. Aeronautical Information Publication, DHMİ Genel Müdürlüğü, Hava Seyrüsefer Dairesi Başkanlığı, Ankara.
- Aksoy, A. ve Güneş, İ., 1990. Jeodezi I-II, İTÜ Yayınları, Yayın No:1421, İstanbul.
- Başaraner, M. ve Çetinkaya, S., 2017. Uçuş Rotalarının ve En Kısa Yolların Karşılaştırmalı Mekânsal Analizi ve Görselleştirilmesi, Harita Dergisi, 158, 10-19.
- Bektaş, S., 2001. Matematik Jeodezi, Kamer Matbaa Yayıncılık, Samsun.
- Bektaş, S., 2004. Jeodezik Hesap-Düzlemde ve Küre Yüzeyinde Jeodezik Hesaplamalar, OMÜ yayınları, Yayın no:120, Samsun.
- Bessel, F., W., 1825. Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen, Astron. Nachr., 4, 86, 241–254.
- Bildirici, İ.Ö., 2016. Kartografya - Ders Notu, Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Bowditch, N., 1981. The American Practical Navigator, II, Defense Mapping Agency.
- Bossler, J., D. ve Snay, R., 2010. Datums and Geospatial Reference Systems, J.D. Bossler, J.B. Campbell, R.B. McMaster, C. Rizos (ed.), Manual of Geospatial Science and Technology, 2nd Edition, CRC Press, Boca Raton.
- Bowring, B., R., 1983. The Geodesic Inverse Problem, Bulletin Geodesique, 57, 109-120.
- Bulirsch, R. ve Gerstl, M., 1983. Numerical Evaluation of Elliptic Integrals for Geodetic Applications, in Proc., Eighth Symposium of Mathematical Geodesy, held in Como, Italy 1981, Florence.
- Chou, H., 1999. Geo Navigation, Maritime Research Center, National Taiwan Ocean University, Taiwan.
- Clairaut, A., C., 1735. Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini, Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris 1733, pp. 406–416.

- Daidzic, N., E., 2017. Long and Short-range Air Navigation on Spherical Earth, *International Journal of Aviation, Aeronautics, and Aerospace*, 4, 1.
- De Florio, F., 2016. *Airworthiness: An Introduction to Aircraft Certification and Operations* (3rd ed.), Oxford, UK: Butterworth-Heinemann.
- Deakin, R. E. ve M. N., Huntre, 2010. *Geometric Geodesy Part A*. School of Mathematical and Geospatial Sciences, RMIT University, Melbourne, Australia.
- Demirel, H. ve Üstün, A. Matematiksel Jeodezi, Yayınlanmamış Ders Notu, <http://atlas.selcuk.edu.tr/1205429/dokumanlar/jeodezi2013.pdf>.
- Dionis du Séjour, A., P., 1789. *Traité Analytique des Mouvements apparens des Corps Célestes*, volume 2 (Valade, Paris).
- Earle, M., A., 2006. Sphere to Spheroid Comparison, *The Journal of navigation*, 59, 491-496.
- Euler, L., 1755. Éléments de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits, *Mém. de l'Acad. Roy. Des Sciences de Berlin*, 9, 258–293.
- FAA. Determining Extended Operations (ETOPS) Applicability for 14 CFR 135 Turbine Powered Aircraft, https://www.faa.gov/other_visit/aviation_industry/airline_operators/airline_safety/info/all_infos/media/2008/135ETOPS.pdf, 06.06.2008.
- FAA, 2011. *Flight Navigator Handbook*. U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration, FAA-H-8083-18.
- FAA, 2015. *Instrument Procedures Handbook*. U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration, FAA-H-8083-16A.
- FAA, 2016. *Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge*. U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration, FAA-H-8083-25A.
- Grossman, W., 1976. *Geodatische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessungen*, 3. Auflage. Konrad Wittwer, Stuttgart, 14, 63.
- Heck, B., 1987. *Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung*, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, Germany.
- Helmert, F., R., 1880. *Die Mathematischen Und Physikalischen Theorium Der Hoheren Geodasie*, B.G. Teubner, Leipzig, 1880 (reprinted 1962), (translation by Aeronautical Chart and Information Center, St. Louis, 1964).
- ICAO, 2006a. *Aerodrome Design Manual*, Doc 9157-AN/901, 3rd edition.
- ICAO, 2006b. *PANS-OPS (Doc 8168), Procedures for Air Navigation Services-Aircraft Operations*. <https://www.icao.int/safety/airnavigation/OPS/Pages/flsannex.aspx>.

- ICAO, 2016. PANS-ATM (Doc 4444), Procedures for Air Navigation Services-Air Traffic Management, Sixteenth Edition.
- Jank, W. ve Kivioja, L., A., 1980. Solution of the Direct and Inverse Problems on Reference Ellipsoids by Point-by-Point Integration Using Programmable Pocket Calculators, *Surveying and Mapping*, XL, 3, 325-337.
- Karney, C., F., F., 2011. Geodesics on an Ellipsoid of Revolution. Technical report, SRI International, E-print arXiv: 1102.1215v1.
- Karney, C., F., F., 2013. Algorithms for Geodesics. *Journal of Geodesy* 87, 43-55.
- Karney, C., F., F. GeographicLib Library, GeographicLib toolbox, Version 1.49. <https://geographiclib.sourceforge.io/1.49>, 05 Ekim 2017.
- Kaya, A., 1984. Elipsoidin Küreye Konform Tasviri Yoluyla Jeodezik Temel Problemlerin Çözümü Üzerine Bir İnceleme, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kaya, A., 1999. Jeodezi-II, KTÜ Yayınları, Yayın No:195, Trabzon.
- Kimerling, A., J., vd., 2016. Map Use: Reading, Analysis, Interpretation, 8th edition. ESRI Press, Redlands.
- Kivioja, L., A., 1971. Computation of Geodetic Direct and Indirect Problems by Computers Accumulating Increments from Geodetic Line Elements, *Bulletin Geodesique*, No. 99, 55-63.
- Klotz, J., 1991. Eine Analytische Lösung Kanonischer Gleichungen der Geodätischen Linien zur Transformation Ellipsoidischer Flächenkoordinaten, *Deutsche Geod. Kommission Ser. C*, No. 385, Bavarian Academy of Sciences, Munich.
- Koçak, E., 1999. Harita Projeksiyonları. ZKÜ Yayınları, Zonguldak.
- Legendre, A., M., 1806. Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde, *Mém. de l'Inst. Nat. de France*, 1st sem., 130–161.
- McCaw, G., T., 1930. *Empire Survey Review*, II, 156-63, 346-52, 505-8.
- Oriani, B., 1806. Elementi di trigonometria sferoidica, Pt. 1, *Mem. dell'Ist. Naz. Ital.*, 1, 1, 118–198
- Özbenli, E., 1991. Jeodezi, KTÜ Yayınları, Yayın No:154, Trabzon.
- Pittman, M., E., 1986. Precision Direct and Inverse Solutions of the Geodesic, *Surveying and Mapping*, 46, 1, 47-54.
- Rainsford, H., F., 1955. Long Geodesics on the Ellipsoid, *Bulletin Geodesique*, 37, September, 1955, 12-21.

- Rapp, R., H., 1969. Geometric Geodesy Notes, The Ohio State University.
- Rapp, R.H., 1984. Geometric Geodesy, Volume I (Basic Principles), Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University,.
- Rapp R., H., 1991. Geometric Geodesy, Part I, Ohio State Univ., Sec. 6.5.
- Rapp, R., H., 1993. Geometric geodesy: Part II. Columbus, OH: State University.
- Saito, T., 1970. The Computation of Long Geodesics on the Ellipsoid by Non-Series Expanding Procedure, Bulletin Geodesique, 98, 341-374.
- Saito, T., 1979. The Computation of Long Geodesies on the Ellipsoid Through Gaussian Quadrature, Bulletin Geodesique, 53, 165-177.
- Schmidt, H., 1999. Lösung der Geodätischen Hauptaufgaben auf dem Rotationsellipsoid Mittels Numerischer Integration, Z. Vermessungsw 124, 121–128.
- Singh, A., 1980. An Analysis of McCaw's Solution of the Direct Problem of Long Lines on the Ellipsoid, M. Sc. Thesis, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Sjöberg, L., E. ve Shirazian, M., 2012. Solving the Direct and Indirect Geodetic Problems on the Ellipsoid by Numerical Integration, Journal of Surv. Eng., 138, 9-16.
- Sjöberg, L., E., 2006a. New Solutions to the Direct and Indirect Geodetic Problems on the Ellipsoid, Zeitschrift fuer Vermessungswesen, 131, 35–39.
- Sjoberg, L., E., 2012. Solutions to the Direct and Inverse Navigation Problems on the Great Ellipse, Journal of Geodetic Science, 2, 3, 200–205.
- Sodano, E., M., 1950. Inverse Computation for Long Lines; A Non-iterative Method Based on the True Geodesic, Technical Report No. 7.
- Sodano, E.M. ve Robinson T., 1963. Direct and Inverse Solutions of Geodesics, Army Map Service Technical Report No. 7, AD 657591.
- Sodano, E., M., 1958. A Rigorous Non-Iterative Procedure for Rapid Inverse Solutions of Very Long Geodesics, Bulletin Geodesique, 47/48.
- Sodano, E., M., 1965. General Non-Iterative Solution of the Inverse and Direct Geodetic Problems, Bulletin Geodesique, March, 75, 69-89.
- Snyder, J., P., 1987. Map Projections – Working Manual. US Geological Survey, Professional paper 1395, Washington.
- Thomas, C., M. ve Featherstone, W., E., 2005. Validation of Vincenty's Formulas for the Geodesic Using a New Fourth-order Extension of Kivioja's Formula, J. Surv. Eng., 131, 1, 20–26.

- Tikhonov, A., N. ve Samarskii, A., A., 1990. Equations of Mathematical Physics, Mineola, NY: Dover.
- Tobler, W., R., 1964. A Comparison of Spherical and Ellipsoidal Measures, The Professional Geographer, XVI, 4, 9-12.
- Tseng, W., K. ve Lee, H., S., 2010. Navigation on a Great Ellipse, Journal of Marine Science and Technology, 18, 3, 369-375.
- Tseng, W., K., vd., 2015. The Geometric Algorithm Of Inverse And Direct Problems with An Area Solution For The Great Elliptic Arcs, Journal of Marine Science and Technology, 23, 4, 481-490.
- Uçar, D., vd., 2011. Matematiksel Kartografya: Harita Projeksiyonları Teorisi ve Uygulamaları, 2. Baskı, Atlas Yayın Dağıtım, Ankara.
- URL-1, <http://www.dhmi.gov.tr/havaalanlari.aspx>, 15 Kasım 2017.
- URL-2, <http://www.ga.gov.au/>, Geoscience Australia, 11 Ekim 2017.
- URL-3, <https://www.law.cornell.edu/cfr/text/14/part-121/subpart-U,14> CFR Part 121 Operating Requirements: Domestic, Flag, and Supplemental Operations Subpart U-Dispatching and Flight Release Rules. 15 Aralık 2017.
- URL-4, European Vertical Reference System (EVRS). <http://www.bkg.bund.de/geodIS/EVRS>, 15 Kasım 2017.
- URL-5, The NASA Goddard Space Flight Center (GSFC) and National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Joint Geopotential Model EGM96. <http://cddis.nasa.gov/926/egm96>, 15 Kasım 2017.
- URL-6, http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html, 15 Kasım 2017.
- URL-7, <https://www.skybrary.aero/index.php/A319neo>, 15 Kasım 2017.
- URL-8, <https://www.atsb.gov.au/utilities/atsb-kml-creator>, 13 Aralık 2017.
- Vincenty, T., 1975. Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with Application of Nested Equations, Survey Review, 23, 176, 88-93.
- Walwyn, P., R., 1999. The Great Ellipse Solution for Distances and Headings to Steer between Waypoints, Journal of Navigation, 43, 421-424.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında İstanbul’da doğdu. İlköğrenimini Konya’da, ortaöğrenimini Trabzon’da tamamladı. 1999 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü’nden mezun oldu. 2002-2004 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü anabilim dalında yüksek lisans eğitimini yaptı. 2006 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü anabilim dalında doktora eğitimine başladı. İyi derecede İngilizce bilmektedir. Evli ve üç çocuk babasıdır.

