

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HER DUAL SONLU GENİŞLEMESİNDE ZAYIF TÖMLEYENE SAHİP
MODÜLLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazlı Makbule POLAT

Matematik Anabilim Dalı

**HAZİRAN 2014
SAMSUN**



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



MATEMATİK ANABİLİM DALI

**HER DUAL SONLU GENİŞLEMESİNDE ZAYIF TÖMLEYENE SAHİP
MODÜLLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Nazlı Makbule POLAT
(12210232)**

Tezin Savuma Tarihi : 30 Haziran 2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Nazlı Makbule POLAT Tarafından Hazırlanan

**HER DUAL SONLU GENİŞLEMESİNDE ZAYIF TÖMLEYENE
SAHİP MODÜLLER**

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 30/06/2014 tarihinde yapılan sınav ile

YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ali PANCAR
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN
Amasya Üniversitesi

Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

....../....../...2014

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve deneyimleriyle yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Hamza Çalışıcı' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan sabır ve fedakarlıklarından dolayı aileme en derin duygularla teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2014

Nazlı Makbule POLAT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
ÖZET.....	xi
ABSTRACT	xiii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	3
3. GENEL BİLGİLER.....	5
3.1. Modüller	5
3.2. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri	7
3.3. Direkt Toplamlar ve Direkt Çarpımlar	8
3.4. Maksimal Alt Modüller	10
3.5. Küçük Alt Modüller.....	11
3.6. Radikal ve Yarı Basit Modüller	13
4. MATERYAL VE METOD.....	17
4.1. Tümlenmiş ve Dual Sonlu Tümlenmiş Modüller	17
4.2. Zayıf Tümlenmiş ve Dual Sonlu Zayıf Tümlenmiş Modüller	24
4.3. Her Dual Sonlu Genişlemesinde Tümlenene Sahip Modüller	31
5. BULGULAR VE TARTIŞMA	39
5.1. Her Dual Sonlu Genişlemesinde Zayıf Tümlenene Sahip Modüller.....	39
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	45
7. KAYNAKLAR	47
8. ÖZGEÇMİŞ.....	49

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	: Birimli halka
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar halkası
$\emptyset$	: Boş küme
$\subseteq$	: Alt küme
$\leq$	: Alt modül
$\ll$	: Küçük alt modül
$\langle X \rangle$	: X kümesi tarafından üretilen alt modül
${}_R R$	: R sol R -modülü
$\sum_{i \in I} M_i$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin toplamı
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin iç direkt toplamı
$\prod_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin direkt çarpımı
Gör f	: Bir f homomorfizmasının görüntü kümesi
Çek f	: Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$\cong$	: İzomorfizma
$\frac{M}{N}$	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$M^{(I)}$	: M modülünün I indis kümesine göre kopyalarının toplamı

HER DUAL SONLU GENİŞLEMESİNDE ZAYIF TÜMLEYENE SAHİP MODÜLLER

ÖZET

Bu tezde her genişlemesinde (bol) tümleyene sahip modül kavramından yola çıkarak her dual sonlu genişlemesinde (bol) zayıf tümleyene sahip modül kavramları tanımlandı ve bu modüllerin bazı özellikleri incelendi. Her dual sonlu genişlemesinde (bol) zayıf tümleyene sahip modül ((*CWEE*)) (*CWE*) özelliğine sahip modül olarak adlandırıldı. Her alt modülü (*CWE*) özelliğine sahip modülün (*CWEE*) özelliğine sahip olduğu gösterildi. Her alt modülü (*CWE*) özelliğine sahip bir M modülünün her direkt toplam teriminin (*CWE*) özelliğine sahip olduğu gösterildi. Tersine, $\frac{M}{L}$ bölüm modülü (*CWE*) özelliğine sahip ve $L \ll M$ ise M nin de (*CWE*) özelliğine sahip olduğu gösterildi. Ayrıca halkalarla ilgili bazı karakterizasyonlar elde edildi: (1) Bir R halkasının yarılokal olması için gerek ve yeter şart her sol R -modülün (*CWE*) özelliğine sahip olmasıdır. (2) R değişmeli regüler halka olmak üzere bir M R -modülünün (*CWE*) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M nin dual sonlu injektif olmasıdır.

Anahtar kelimeler: Dual Sonlu Alt Modül; Tümleyen; Zayıf Tümleyen; Dual Sonlu Zayıf Tümleyen; Yarılokal Halka.

MODULES THAT HAVE A WEAK SUPPLEMENT IN EVERY COFINITE EXTENSION

ABSTRACT

In this thesis, based on the concept of module that have a (ample) supplement in every extension the concept of module that has a (ample) weak supplement in every cofinite extension is defined and some properties of these modules are examined. A module is called to have the property $((CWE))$ (CWE) if the module has a (ample) weak supplement in every cofinite extension. It is showed that a module has the property (CWE) if every submodule has the property (CWE) . It is showed that if a module has the property (CWE) then so does every direct summand. Conversely, it is showed that a module M has the property (CWE) if the factor module $\frac{M}{L}$ with $L \ll M$ has the property (CWE) . Some characterizations are obtained about rings:
(1) A ring R is semilocal if and only if every R -module has the property (CWE) .
(2) Let be R commutative regular ring. An R -module M has the property (CWE) if and only if M is cofinitely injective.

Key Words: Cofinite Submodule; Supplement; Weak Supplement; Cofinite Weak Supplement; Semilocal Ring.

1. GİRİŞ

Modül Teoride tümleyen kavramı, direkt toplam teriminin bir genelleştirilmesi olarak karşımıza çıkmaktadır. M bir R -modül, $N, K \leq M$ olsun. $M = N + K$ ve $N \cap K = 0$ koşullarını sağlayan M nin N ve K alt modüllerine M nin direkt toplam terimleri denir ve $M = N \oplus K$ ile gösterilir. M bir R -modül ve N M nin alt modülü olmak üzere $K \leq M$ için $M = N + K$ ve K bu şarta göre minimal ise (yani $M = N + U$ ve $U \leq K$ olması durumunda $U = K$ ise) K alt modülüne N alt modülünün M de bir tümleyeni denir. Bu tanıma denk olarak; K nın M de N nin tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $M = N + K$, $N \cap K \ll K$ olmasıdır. O halde her direkt toplam terimi aynı zamanda bir tümleyendir. Eğer $N \cap K \ll M$ ise K ya N nin zayıf tümleyeni denir. M modülünün her alt modülü M de bir (zayıf) tümleyene sahip ise M ye (zayıf) tümlenmiş modül denir. $\frac{M}{N}$ bölüm modülü sonlu üretilmiş ise N ye M nin dual sonlu alt modülü denir. M modülünün her dual sonlu alt modülü M de bir (zayıf) tümleyene sahip ise M modülüne dual sonlu (zayıf) tümlenmiş modül denir. Bir M modülü her dual sonlu genişlemesinde tümleyene sahip ise M ye (CE) özelliğine sahip modül, her dual sonlu genişlemesinde bol tümleyene sahip ise M ye (CEE) özelliğine sahip modül denir.

Bu tezdeki tüm halkalar en az iki elemana sahip birimli halka ve tüm modüller de üniter sol R -modül olarak alınacaktır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Genel bilgiler bölümünde modüller ile ilgili iyi bilinen temel kavramlara yer verildi.

Materyal ve Metot bölümünde tümlenmiş, dual sonlu tümlenmiş, zayıf tümlenmiş, dual sonlu zayıf tümlenmiş modüller ve her dual sonlu genişlemesinde tümleyene sahip modüller ile ilgili literatürde mevcut olan Bulgular ve Tartışma bölümünde kullanacak olduğumuz özellikler verildi.

Bulgular ve Tartışma bölümünde ise, her dual sonlu genişlemesinde (bol) zayıf tümleyene sahip modüller ((CWE)) (CWE) özelliğine sahip modül olarak adlandırıldı ve bu modüller ile ilgili elde edilen karakterizasyonlar verildi.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Kasch ve Mares 1966 yılında yarı mükemmel modülleri zayıflatarak tümlenmiş modülleri çalışmışlardır [8]. Zöschinger 1974 yılında yapmış olduğu “Komplementierte moduln über dedekindringen” isimli çalışmasında lokal Dedekind bölgeleri üzerinde tümlenmiş modül yapısını belirlemiştir [15]. Yine Zöschinger 1974 yılında “Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben” isimli çalışmasında her genişlemesinde tümleyene sahip modülleri (E) özelliğine sahip modül, her genişlemesinde bol tümleyene sahip modülleri (EE) özelliğine sahip modül olarak tanımlamıştır. Bu modüllerin bazı özelliklerini vermiştir [16]. 2012 yılında Çalışıcı ve Türkmen(E) ve (EE) özelliklerinin bir genelleştirmesi olarak her dual sonlu genişlemesinde; tümleyene sahip modülleri (CE) özelliğine sahip modül ve bol tümleyene sahip modülleri (CEE) özelliğine sahip modül olarak tanımlamışlardır. Yarı mükemmel halkalar için bir karakterizasyon vermişlerdir [5]. Zayıf tümlenmiş modüller 1978 yılında Zöschinger tarafından tanımlanmış olup 1999 yılında “On semilocal modules and rings” isimli çalışmasında, Lomp zayıf tümlenmiş modüllerle ilgili bazı karakterizasyonlar elde etmiştir [9]. 2003 yılında Alizade ve Büyükaşık “Cofinitely weak supplemented modules” isimli çalışmasında dual sonlu zayıf tümlenmiş modülleri ve bunların bazı özelliklerini çalışmışlardır [2].

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, modül ve modül üzerindeki izomorfizma teoremleri verilecek, küçük modüllerin birtakım özellikleri, bir modülün radikali ve yarı basit modül kavramları üzerinde durulacaktır.

3.1. Modüller

Tanım 3.1.1: $(R, +, \cdot)$ bir halka $(M, +)$ bir abel grup olsun. Eğer $\cdot: R \times M \rightarrow M$ dış işlemi aşağıdaki şartları gerçeklerse M ye $\cdot$ dış işlemine göre bir **sol R -modül** veya kısaca **R -modül** denir.

1. $\forall r \in R$ ve $\forall a, b \in M$ için $r(a+b) = ra + rb$
2. $\forall r, s \in R$ ve $\forall a \in M$ için $(r+s)a = ra + sa$
3. $\forall r, s \in R$ ve $\forall a \in M$ için $(rs)a = r(sa)$

Eğer R birimli ve birimi 1_R olmak üzere,

4. $\forall a \in M$ için $1_R a = a$ ise M ye **üniter sol R -modül** denir.

Bu tezdeki tüm halkalar en az iki elemana sahip birimli halka ve tüm modüller de üniter sol R -modül olarak alınacaktır [1].

Birimli bir R halkasının kendisi üzerinde bir üniter sol R -modül yapısına sahiptir. Bu modül ${}_R R$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2: M bir R -modül ve $\emptyset \neq U \subseteq M$ olsun. U , M nin bir alt grubu ve her $m \in U$, her $r \in R$ için $rm \in U$ ise U ya M nin bir **alt modülü** denir ve $U \leq M$ ile gösterilir [6].

M modülünün kendisinden farklı alt modülüne M nin **özalt modülü** denir [6].

M modülünün keyfi sayıdaki alt modüllerinin ara kesiti de M nin bir alt modülüdür [6].

Tanım 3.1.3: M bir R -modül ve $X \subseteq M$ olsun. M nin X i kapsayan bütün alt modüllerinin arakesatine X in **ürettiği alt modül** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X sonlu ise $\langle X \rangle$ e **sonlu üretilmiş alt modül** denir. $M = \langle X \rangle$ olacak şekilde

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu altkümesi varsa, M ye **sonlu üretilmiş modül** denir. M sonlu üretilmiş ise $M = \langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle = \{r_1x_1 + \dots + r_nx_n \mid r_i \in R, 1 \leq i \leq n\}$ şeklindedir. Yani M nin her bir x elemanı için $x = r_1x_1 + \dots + r_nx_n$ olacak şekilde $r_i \in R$ vardır. Eğer $M = \langle x \rangle$ olacak şekilde en az bir $x \in M$ varsa M ye **devirli modül** denir [6].

Tanım 3.1.4: M bir R -modül ve $U \leq M$ olsun. Bu takdirde $\frac{M}{U}$ bölüm grubu her $r \in R$, her $m+U \in \frac{M}{U}$ için $r(m+U) = rm+U$ ile tanımlı dış işleme göre bir sol R -modül yapısına sahiptir ve bu modüle, M nin U alt modülüne göre **bölüm modülü** denir [14].

Teorem 3.1.5: M sonlu üretilmiş ise, her bölüm modülü de sonlu üretilmiştir [14].

İspat: M sonlu üretilmiş ise, $M = \langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$ olacak şekilde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq M$ alt kümesi vardır. O halde $\forall m \in M$ için $m = r_1x_1 + \dots + r_nx_n$ olacak şekilde $r_i \in R$ $1 \leq i \leq n$ vardır. $N \leq M$ için $m+N \in \frac{M}{N}$ keyfi bir eleman olmak üzere

$$m+N = (r_1x_1 + \dots + r_nx_n) + N = r_1(x_1+N) + \dots + r_n(x_n+N)$$

yazılabileceği için $\frac{M}{N} = \langle \{x_1+N, \dots, x_n+N\} \rangle$ dir. Yani $\frac{M}{N}$ sonlu üretilmiştir.

Tanım 3.1.6: Kendisinden ve sıfırdan başka alt modülü bulunmayan sıfırdan farklı modüle **basit modül** denir [14].

B modülü basitse, her $0 \neq b \in B$ elemanı için sıfırdan farklı olan Rb devirli alt modülü B ye eşit olmak zorundadır. Tersine, her $0 \neq b \in B$ için $Rb = B$ olsun. N B nin sıfırdan farklı bir alt modülü ise en az bir $0 \neq b' \in N$ vardır. Kabulden

$Rb' = B$ dir. $Rb' \leq N$ olduğundan $N = B$ elde ederiz. Böylece, B modülünün basit olması için gerek ve yeter şart her $0 \neq b \in B$ için $Rb = B$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

3.2. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri

Tanım 3.2.1: M ve N iki R -modül ve $f : M \rightarrow N$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu her $m_1, m_2 \in M$ ve her $r \in R$ için $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ ve $f(rm_1) = rf(m_1)$ koşullarını sağlarsa, f ye bir **R -modül homomorfizması** veya **homomorfizma** denir. f bire-bir ise f ye **monomorfizma**, örten ise **epimorfizma** ve hem örten hem bire-bir ise **izomorfizma** denir. $f : M \rightarrow N$ izomorfizma ise M ile N ye **izomorfturlar** denir ve $M \cong N$ ile gösterilir [6].

Tanım 3.2.2: $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu takdirde;

Gör $f = \{f(m) \mid m \in M\}$ kümesi N nin bir alt modülüdür ve bu alt modüle f **homomorfizmasının görüntü kümesi** denir.

$\{m \in M \mid f(m) = 0_N\}$ kümesi M nin bir alt modülüdür ve bu alt modüle f **homomorfizmasının çekirdeği** denir ve $\text{Çek } f$ ile gösterilir [6].

Teorem 3.2.3: M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde $\phi : M \rightarrow \frac{M}{N}$, $m \rightarrow \phi(m) = m + N$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $\text{Çek } \phi = N$ dir. Bu epimorfizmaya **doğal homomorfizma** denir [1].

Teorem 3.2.4: (Homomorfizma Teoremi ve 1. İzomorfizma Teoremi) $f : M \rightarrow N$ bir homomorfizma, S M nin $\text{Çek } f$ tarafından kapsanan bir alt modülü ise, $\phi : M \rightarrow \frac{M}{S}$, doğal homomorfizma olmak üzere $f = g \circ \phi$ olacak

şekilde teklikle belli $g : \frac{M}{S} \rightarrow N$ homomorfizması vardır. $S = \text{Çek } f$ ise g

monomorfizmadır. f örten ise g de örtendir. Özel olarak $\frac{M}{\text{Çek } f} \cong f(M)$ dir [6].

Teorem 3.2.5: (2. İzomorfizma Teoremi) M bir modül ve $N, K \leq M$ olmak üzere

$$\frac{N+K}{N} \cong \frac{K}{N \cap K} \text{ dir [12].}$$

Teorem 3.2.6: (3. İzomorfizma Teoremi) $N \leq K \leq M$ modüller olmak üzere

$$\frac{M}{K} \cong \frac{\frac{M}{N}}{\frac{K}{N}} \text{ dir [13].}$$

3.3. Direkt Toplamlar ve Direkt Çarpımlar

Tanım 3.3.1: R bir halka ve I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{E_i\}_{i \in I}$ R -modüllerinin bir ailesi olsun. Her $e_i \in E_i$ için tüm $(..., e_i, ...)$ elemanlarını $(e_i)_{i \in I}$ ile ve bu elemanların kümesini de E ile gösterelim. $r \in R$ ve $e_i, e'_i \in E_i$ olmak üzere $(e_i)_{i \in I} + (e'_i)_{i \in I} = (e_i + e'_i)_{i \in I}$ ve $r(e_i)_{i \in I} = (re_i)_{i \in I}$ işlemleri ile birlikçe E bir R -modül yapısına sahiptir. E modülüne $\{E_i\}_{i \in I}$ ailesinin **direkt çarpımı** denir ve $\prod_{i \in I} E_i$ ile gösterilir [12].

Tanım 3.3.2: Sadece sonlu sayıda $i \in I$ için $e_i \neq 0$ olan $(e_i)_{i \in I}$ elemanlarının kümesi E' olmak üzere E' , E modülünün bir altmodülüdür. E' modülüne $\{E_i\}_{i \in I}$ ailesinin **dış direkt toplamı** denir ve $\bigoplus_{i \in I} E_i$ ile gösterilir [12].

Tanım 3.3.3: M bir R -modül olsun. Tanım 3.3.2 deki her bir $i \in I$ için $E_i = M$ alınırsa $\bigoplus_{i \in I} E_i$ dış direkt toplamına, M nin **kopyalarının toplamı** denir ve $M^{(I)}$ ile gösterilir [12].

Tanım 3.3.4: $\{M_i \mid i \in I\}$, M modülünün alt modüllerinin topluluğu olsun. Bu alt modüllerin elemanlarının toplamı şeklinde gösterilebilen, yani $m = m_{i_1} + m_{i_2} + ... + m_{i_n}$

şeklinde yazılabilen $m \in M$ elemanlarının M nin bir alt modülünü oluşturduğu açıktır. $\sum_{i \in I} M_i$ ile gösterilen bu alt modüle $\{M_i \mid i \in I\}$, **alt modüller topluluğunun toplamı** denir [1].

Tanım 3.3.5: M bir R -modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\sum_{i \in I} M_i$ nin her bir elemanı, $m_i \in M_i$ ve sadece sonlu sayıda $i \in I$ için $m_i \neq 0$ olmak üzere $\sum_{i \in I} m_i$ formunda tek türlü olarak belirli ise, bu toplama $M_i (i \in I)$ **alt modüllerinin iç direkt toplamı** denir ve $\oplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir [12].

Bir M modülünün N alt modülü için $M = N \oplus K$ olacak şekilde M nin bir K alt modülü varsa N alt modülüne M nin bir **direkt toplam terimi** denir. M modülünün 0 ve kendisinden başka direkt toplam terimi mevcut değilse, M ye **parçalanamaz modül** denir [14].

Önerme 3.3.6: M modülünün alt modüllerinin bir ailesi $\{M_i\}_{i \in I}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $M = \oplus_{i \in I} M_i$
2. $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve her $j \in I$ için $M_j \cap (\sum_{i \neq j} M_i) = 0$ dır [11].

Her $i \in I$ için $m_i \in M_i$ olmak üzere $f((m_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} m_i$ ile tanımlı $f : \oplus_{i \in I} M_i \rightarrow \sum_{i \in I} M_i$ dönüşümünün bir izomorfizma olması için gerek ve yeter şart $\sum_{i \in I} M_i$ toplamının iç direkt toplam olmasıdır. Bu dönüşüm yardımıyla dış direkt toplam ile iç direkt toplam arasında bire-bir eşleme yapılır.

Tanım 3.3.7: Her $n \in I$ için $p_n((m_i)) = m_n$ ile bir $p_n : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_n$ fonksiyonunu tanımlayalım. p_n (ve bunun $\oplus_{i \in I} M_i$ ye kısıtlanmış) bir epimorfizmadır. p_n ye **n . projeksiyon** denir. Diğer taraftan her $n \in I$ için $m_n = m$ ve $i \neq n$ için $m_i = 0$ olmak üzere $\mu_n(m) = (m_i)$ ile tanımlı $\mu_n : M_n \rightarrow \oplus_{i \in I} M_i$ fonksiyonu bir monomorfizmadır. μ_n **n . gömme homomorfizması** denir [6].

Teorem 3.3.8: (Modüler Kural) $A, B, C \leq M$ ve $A \leq C$ ise

$$(A + B) \cap C = A + (B \cap C)$$

gerçeklenir [12].

3.4. Maksimal Alt Modüller

Tanım 3.4.1: M bir R -modül N , M nin bir alt modülü olsun. M nin N alt modülünü kapsayan N den başka özalt modül mevcut değilse N özalt modülüne M nin bir **maksimal alt modülü** denir [7].

Teorem 3.4.2: M bir R -modül, $N \leq M$ olsun. $\phi: M \rightarrow \frac{M}{N}$ doğal epimorfizma olmak üzere, $B, \frac{M}{N}$ nin bir maksimal bir alt modül ise $\phi^{-1}(B)$, M nin maksimal alt modülüdür [12].

İspat: K, M nin $\phi^{-1}(B) \leq K$ şartını sağlayan bir özalt modülü olsun. O halde $\phi(\phi^{-1}(B)) \leq \phi(K)$ dir. ϕ epimorfizma olduğundan $B = B \cap \phi(M) = \phi(\phi^{-1}(B)) \leq \phi(K)$ dir. $B, \frac{M}{N}$ de maksimal olduğundan $\phi(K) = \frac{M}{N}$ dir. Buradan $\phi^{-1}(\phi(K)) = \phi^{-1}(\frac{M}{N})$ yani $K + \text{Çek}\phi = M$ dir. $\phi^{-1}(0) \leq \phi^{-1}(B) \leq K$ olduğundan $K = M$ dir.

Teorem 3.4.3: M sıfırdan farklı sonlu üretilmiş bir R -modül ise, M nin her N öz alt modülü için, $N \leq P$ olacak şekilde M nin P maksimal alt modülü vardır [11].

Sonuç 3.4.4: Bir M R -modülü için $\frac{M}{N}$ sonlu üretilmiş ise N, M nin bir maksimal alt modülü tarafından kapsanır [12].

İspat : Teorem 3.4.3 den $\frac{M}{N}$ nin $\frac{P}{N}$ maksimal alt modülü vardır. Teorem 3.4.2 den $\phi^{-1}(\frac{P}{N})$, M nin N yi içeren maksimal alt modülüdür.

3.5. Küçük Alt Modüller

Tanım 3.5.1: M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. N alt modülünün sadece M ile toplamı M ye eşitse yani $N + K = M$ olması $K = M$ olmasını gerektiriyorsa, N ye M nin **küçük alt modülü** denir ve $N \ll M$ ile gösterilir [13].

M ve N birer R -modül olmak üzere $f : N \rightarrow M$ bir epimorfizma ve $\text{Çek } f \ll N$ ise f epimorfizmasına **küçük epimorfizma** denir . Bu durumda N ye ise f küçük epimorfizması ile birlikte M nin bir **küçük örtüsü** denir [9].

Küçük alt modül ile ilgili kullanacağımız belli özellikleri aşağıdaki teorem altında toplayabiliriz.

Teorem 3.5.2:

1. N, M nin küçük alt modülü ise, N nin her alt modülü M nin küçük alt modülüdür.
2. N bir modül , $A \leq N$ olsun. A, N de küçük ise N yi kapsayan her modül içinde de küçüktür.
3. X, A da küçük, Y, B de küçük ise $X + Y, A + B$ de küçüktür.
4. $f : M \rightarrow N$ homomorfizma olsun. A, M de küçük ise $f(A), f(M)$ de küçüktür.
5. $f : M \rightarrow N$ bir küçük epimorfizma olsun. U, N nin küçük alt modülü ise $f^{-1}(U)$ da M nin bir küçük alt modülüdür.
6. $K \leq L \leq M$ olsun. $L \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $K \ll M$ ve $\frac{L}{K} \ll \frac{M}{K}$ olmasıdır.
7. $L_1 + L_2 + \dots + L_n \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $L_i \ll M, 1 \leq i \leq n$ olmasıdır.

8. L, M nin direkt toplam terimi ise $K \ll L$ olması için gerek ve yeter şart $K \ll M$ olmasıdır.
9. $K \ll M$ ve K, M nin bir direkt toplam terimi ise $K = 0$ dır [7].

İspat: 1. N, M nin küçük alt modülü $U \leq N$ olsun. Bir $K \leq M$ için $U + K = M$ olsun. $U \leq N$ olduğundan $N + K = M$ ve N küçük olduğundan $K = M$.

2. M, N yi içeren bir modül $A \ll N$ olsun. Bir $K \leq M$ için $A + K = M$ olsun. Modüler kuraldan $A + K \cap N = N$ ve $A \ll N$ olduğundan $K \cap N = N$. O halde $A \leq N \leq K$ yani $K = A + K = M$ dir.

3. $(X + Y) + K = A + B$, $K \leq A + B$ olsun. X, A da küçük olduğundan 2) den $X, A + B$ de de küçüktür. Böylece $Y + K = A + B$ dir. Benzer şekilde $Y, A + B$ de küçüktür. O halde $K = A + B$ olmalıdır.

4. $f(A) + X = M$, $X \leq f(M)$ olsun. $f^{-1}(f(A) + X) = f^{-1}(f(M)) = M$ yani $A + \text{Çek} f + f^{-1}(X) = M$ dir. $\text{Çek} f = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(X)$ olduğundan $A + f^{-1}(X) = M$ ve $A \ll M$ olduğundan $f^{-1}(X) = M$ ve buradan $X = f(f^{-1}(X)) = X \cap f(M) = f(M)$ dir.

5. Bir $A \leq M$ için $f^{-1}(U) + A = M$ olsun. f epimorfizma olduğundan $N = f(M) = f(f^{-1}(U) + A) = U + f(A)$ dır. Buradan $M = f^{-1}(N) = f^{-1}(f(A)) = A + \text{Çek} f$ ve $\text{Çek} f \ll M$ olduğundan $A = M$ dir.

6. $(\Rightarrow)$ 1) den $K \ll M$. $\frac{L}{K} + \frac{U}{K} = \frac{M}{K}$, $\frac{U}{K} \leq \frac{M}{K}$ olsun. O halde $\frac{L+U}{K} = \frac{M}{K}$ yani $L+U = M$ dir. $L \ll M$ olduğundan $U = M$ dir. Böylece $\frac{U}{K} = \frac{M}{K}$ dir.

$(\Leftarrow)$ $L+U = M$, $U \leq M$ olsun. Buradan $\frac{L+U}{K} = \frac{M}{K}$ ve

$\frac{U+K}{K} + \frac{L}{K} = \frac{M}{K}$ olur. $\frac{L}{K} \ll \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{U+K}{K} = \frac{M}{K}$ yani $M = U + K$ dır.

$K \ll M$ olduğundan $U = M$ dir.

7. $(\Rightarrow)$ 1) den görülür.

$(\Leftarrow) L_1 + L_2 + \dots + L_n + K = M, K \leq M$ olsun. $L_1 \ll M$ olduğundan $L_2 + \dots + L_n + K = M$ ve böylece devam ederek $L_n + K = M$ dir. $L_n \ll M$ olduğundan $K = M$ dir.

8. $(\Rightarrow)$ 2) den görülür.

$(\Leftarrow) K + U = L, U \leq L$ olsun. L, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M = L \oplus S$ olacak şekilde $S \leq M$ vardır. O halde $K + U + S = M$ ve $K \ll M$ olduğundan $U + S = M$ dir. Modüler kuraldan $U = U + S \cap L = L$ dir. Çünkü $S \cap L = 0$ dir.

9. $K \ll M$ ve $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ bulunsun. $K \ll M$ olduğundan $K' = M$ olmak zorundadır. O halde $K = M \cap K = K' \cap K = 0$ dir.

3.6. Radikal ve Yarı Basit Modüller

Tanım 3.6.1: Bir M R -modülünün bütün maksimal alt modüllerinin kesişimine M nin **radikali** denir ve $RadM$ ile gösterilir. M nin maksimal alt modülü yoksa bu $RadM = M$ ile tanımlanır [6].

Teorem 3.6.2: $RadM = \sum_{L \ll M} L$ dir [7].

Sonuç 3.6.3: $RadM = 0$ ise M modülü 0 dan başka küçük alt modül içermez [6].

Teorem 3.6.4: $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin N alt modülünü kapsayan alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda

$$\bigcap_{i \in I} \left(\frac{N_i}{N} \right) = \frac{\bigcap_{i \in I} N_i}{N} \text{ dir [12].}$$

İspat: $m + N \in \bigcap_{i \in I} \left(\frac{N_i}{N} \right)$ olsun. $\forall i \in I$ için $m + N \in \frac{N_i}{N}$ yani $m \in N_i$ dir. O halde

$\forall i \in I$ için $m \in N_i$ ve buradan $m \in \bigcap_{i \in I} N_i$ böylece $m + N \in \frac{\bigcap_{i \in I} N_i}{N}$ dir.

Tersine, benzer işlemler yapılarak eşitlik gösterilebilir.

Teorem 3.6.5: Bir M , R -modülü için aşağıdakiler denktir:

1. M nin her altmodülü basit alt modüllerin toplamıdır.
2. M basit alt modüllerin toplamıdır.
3. M basit alt modüllerin direkt toplamıdır.
4. M nin her alt modülü bir direkt toplam terimidir [7].

Tanım 3.6.6: M bir R -modül olsun. Teorem 3.6.5 in denk koşullarından birini sağlayan M modülüne **yarı basit modül** denir. R halkası sol R -modül olarak yarı basit ise R halkasına **yarı basit halka** denir [7].

M yarı basit modül ise $Rad M = 0$ dır [14].

Teorem 3.6.7: M yarı basitse M nin her özalt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır [12].

İspat: U , M nin özalt modülü olsun. Teorem 3.6.5 den U direkt toplam terimidir ve $M = U \oplus (\bigoplus_{i \in I} U_i)$ olacak şekilde M nin U_i basit alt modülleri vardır.

Homomorfizma Teoreminden $\frac{M}{U \oplus (\bigoplus_{i \in I - \{j\}} U_i)} \cong U_j$ ve U_j basit olduğundan

$U \oplus (\bigoplus_{i \in I - \{j\}} U_i)$ M nin maksimal alt modülüdür. Bu alt modülün U yu kapsadığı açıktır.

Teorem 3.6.8: Her M modülü için, $Rad(\frac{M}{RadM}) = 0$ dır [7].

İspat: $Rad(\frac{M}{RadM})$, $\frac{M}{RadM}$ nin bütün maksimal alt modüllerinin arakesitidir. O halde $\{P_i\}_{i \in I}$, M nin bütün maksimal alt modüllerinin ailesi olmak üzere, Teorem 3.6.4 yardımıyla

$$Rad\left(\frac{M}{RadM}\right) = \bigcap_{i \in I} \left(\frac{P_i}{RadM}\right) = \frac{\bigcap_{i \in I} P_i}{RadM} = \frac{RadM}{RadM} = 0 \text{ dır.}$$

Teorem 3.6.9: M nin her alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyorsa, $RadM \ll M$ dir [14].

İspat: $RadM + U = M$ olacak şekilde $U \leq M$ olsun. $U \neq M$ olsa, kabulden $U \leq P$ olacak şekilde P maksimal alt modülü vardır. Bu durumda $M = RadM + U = RadM + P = P$ olur ki bu, P nin maksimalliği ile çelişir.

Sonuç 3.6.10: M sonlu üretilmiş ise $RadM \ll M$ dir [14].

İspat: Teorem 3.4.3 ve Teorem 3.6.9 dan istenilen görülür.

Teorem 3.6.11: $\frac{M}{RadM}$ yarı basit ve $RadM \ll M$ ise, M nin her özalt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır [12].

İspat: N, M nin bir özalt modülü olsun. $\phi: M \rightarrow \frac{M}{RadM}$ doğal epimorfizma olmak üzere $\phi(N) = \frac{N + RadM}{RadM} \neq \frac{M}{RadM}$ dir. Çünkü $RadM \ll M$ dir. Teorem 3.6.7 den $\phi(N) \leq \frac{P}{RadM}$ olacak şekilde bir $\frac{P}{RadM} \leq \frac{M}{RadM}$ maksimal alt modülü vardır. Teorem 3.4.2 den, $\phi^{-1}(\frac{P}{RadM})$, M nin N yi kapsayan maksimal alt modülüdür.

Teorem 3.6.12: Her $f: M \rightarrow N$ homomorfizma ise $f(RadM) \leq RadN$ dir [12].

İspat: $RadM$, M nin bütün küçük alt modüllerinin toplamı olarak düşünüldüğünde, Teorem 3.5.2. 4) yardımı ile istenilen görülür.

Teorem 3.6.13: Bir M yarı basit modülünün epimorf görüntüsü de yarı basittir [7].

4. MATERYAL VE METOT

4.1. Tümlenmiş ve Dual Sonlu Tümlenmiş Modüller

Bu bölümde, tümlenmiş modüller verilecek ve bazı tümlenmiş modüllerin (oyuk, lokal) belli özellikleri anlatılacaktır. Daha sonra dual sonlu tümlenmiş modüllerin özellikleri ve tümlenmiş modüllerle arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir.

Tanım 4.1.1: M bir R -modül, $U, V \leq M$ olsun. $U + V = M$ ve V bu şartı sağlayan minimal alt modül ise, yani bir $K \leq V$ için $U + K = M$ olması $K = V$ olması ile mümkünse V ye U nun **toplamaya göre tümleyeni** veya kısaca **tümleyeni** denir [1].

Bir M modülünün 0 aşikar alt modülü, modülün kendisinin tümleyeni olduğu açıktır. Bununla birlikte bir modülün her alt modülünün tümleyeni olmayabilir. Örneğin, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bir $\mathbb{Z}$ -modül olarak alındığında $n \neq 0, n \neq \mp 1$ için $(n, m) = 1$, $n, m \in \mathbb{Z}$ olsun. O halde $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ dir. $(n, q) = 1$ şartını sağlayan her $q > 1$ tamsayısı için $(n, qm) = 1$ olup $n\mathbb{Z} + qm\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $qm\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ ve $qm\mathbb{Z} \neq m\mathbb{Z}$ dir. Bu yüzden $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ tümleyene sahip değildir.

Teorem 4.1.2: M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olsun. V alt modülünün M de U nun tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır [14].

İspat: $(\Rightarrow)$ V, U nun tümleyeni olsun. O halde $M = U + V$ dir. $(U \cap V) + L = V$, $L \leq V$ olsun. Modüler kuraldan $V \cap (U + L) = V$ yani $U + L \geq V$ dir. O halde $M = U + V = U + L$ dir. V nin minimalliğinden $L = V$ dir.

$(\Leftarrow)$ Bir $L \leq V$ için $M = U + L$ olsun. Her iki tarafı V ile kesiştirirsek modüler kuraldan $L + U \cap V = V$ ve $U \cap V \ll V$ olduğundan $L = V$ çıkar.

Teorem 4.1.3: M bir R -modül, $U, V \leq M$ ve U nun tümleyeni V olsun. Bir $W \leq U$ için $W + V = M$ ise, V, W için de bir tümleyendir [14].

İspat: $W \cap V \leq U \cap V$ ve $U \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 3.5.2. 1) den $W \cap V \ll V$ ve Teorem 4.1.2 den V, W nin tümleyenidir.

Teorem 4.1.4: M bir R -modül, $U, V \leq M$ olsun. V, U nun tümleyeni ise bir $L \leq U$ için $\frac{V+L}{L}, \frac{U}{L}$ nin $\frac{M}{L}$ içinde bir tümleyenidir [14].

İspat: V, U nun tümleyeni ise $U + V = M$ ve $V \cap U \ll V$ dir. O halde $\frac{V+L}{L} + \frac{U}{L} = \frac{M}{L}$ dir. Bir $\frac{K}{L} \leq \frac{V+L}{L}$ için $\frac{U}{L} \cap \frac{V+L}{L} + \frac{K}{L} = \frac{V+L}{L}$ olsun. Modüler kuraldan $\frac{L+(U \cap V)+K}{L} = \frac{V+L}{L}$ ve $L \leq K$ olduğundan $U \cap V + K = V + L$ dir.

$U \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 3.5.2. 2) den $K = V + L$ yani $\frac{K}{L} = \frac{V+L}{L}$ dir.

Tanım 4.1.5: Bir M modülünün her alt modülü tümleyene sahipse modüle **tümlenmiş modül** denir [14].

Yarı basit modüller tümlenmiştir [14].

Teorem 4.1.6: M tümlenmiş ise, $\frac{M}{RadM}$ yarıbasittir [12].

İspat: $\frac{N}{RadM}, \frac{M}{RadM}$ nin bir alt modülü olsun. O halde $N \leq M$ ve M tümlenmiş olduğundan $N + K = M$, $N \cap K \ll K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. Ayrıca Teorem 4.1.4 den $\frac{K+RadM}{RadM}, \frac{N}{RadM}$ nin $\frac{M}{RadM}$ de bir tümleyenidir. Yani $\frac{K+RadM}{RadM} + \frac{N}{RadM} = \frac{M}{RadM}$ ve Modüler Kuraldan

$\frac{K + RadM}{RadM} \cap \frac{N}{RadM} = \frac{RadM + (N \cap K)}{RadM}$ dir. $N \cap K \ll K$ ve buradan $N \cap K \ll M$ olduğundan Teorem 3.6.2 den $N \cap K \subseteq RadM$ yani $\frac{K + RadM}{RadM} \cap \frac{N}{RadM} = 0$ dir. O halde $\frac{K + RadM}{RadM} \oplus \frac{N}{RadM} = \frac{M}{RadM}$ dir. Teorem 3.6.6. 4) gereği $\frac{M}{RadM}$ yarıbasittir.

Teorem 4.1.7: Her tümlenmiş modülün epimorf görüntüsü de tümlenmiştir [7].

İspat: $f : M \rightarrow N$ bir epimorfizma, M tümlenmiş olsun. $A \leq N$ alalım. $f^{-1}(A) \leq f^{-1}(N) = M$ ve M tümlenmiş olduğundan, $f^{-1}(A) + B = M$, $f^{-1}(A) \cap B \ll B$ olacak şekilde $B \leq M$ vardır. O halde $f(f^{-1}(A) + B) = A \cap f(M) + f(B) = f(M)$ ve f epimorfizma olduğundan $A + f(B) = N$ dir. Ayrıca Teorem 3.5.2. 4) den $f(f^{-1}(A) \cap B) \ll f(B)$ yani $A \cap f(B) \ll f(B)$ dir. Böylece $f(B) \leq N$, A nın tümleyenidir.

Tanım 4.1.8: Bir M modülünün her öz alt modülü M de küçük ise M ye **oyuk modül**, M nin bütün alt modüllerini içeren (en büyük) öz alt modüle sahipse M ye **lokal modül** denir [14].

Teorem 4.1.9: Bir M lokal modülü $x \in M - RadM$ ile üretilen devirli modüldür [14].

İspat: M lokal modül ve en büyük alt modülü P olsun. $RadM = P$ olduğu açıktır. $x \in M - P$ olsun. O halde $\langle x \rangle \not\subseteq P$ dir. P , M nin bütün öz alt modüllerini kapsayan alt modül olduğundan $M = \langle x \rangle$ olmalıdır.

Teorem 4.1.10: M bir R -modül olsun. M nin lokal olması için gerek ve yeter şart M nin oyuk ve $RadM \neq M$ olmasıdır [14].

İspat: $(\Rightarrow)$ M lokal modül, P M nin en büyük alt modülü ise $Rad M = P \ll M$ dir. Böylece $Rad M \neq M$ dir. U M nin bir öz alt modülü ise $U \leq P$ ve $P \ll M$ olduğundan Teorem 3.5.2. 1) den $U \ll M$ dir.

$(\Leftarrow)$ M nin her öz alt modülü M de küçük olsun. Böylece $Rad M$, M nin bütün öz alt modüllerinin toplamıdır. $Rad M \neq M$ olduğundan $Rad M$, M nin bütün öz alt modüllerini kapsayan M nin öz alt modülüdür.

Teorem 4.1.11: M bir modül, $P, L \leq M$ ve L, P nin tümleyeni olsun. P maksimal ise L lokaldir [14].

İspat: $P + L = M$, $P \cap L \ll L$, ve P maksimal olsun. P maksimal olduğundan $L \not\subseteq P$ dir. O halde en az bir $x \in L - P$ elemanı var ve P nin maksimalliğinden $P + \langle x \rangle = M$ dir. Ayrıca $\langle x \rangle \leq L$ olup L nin minimalliğinden $\langle x \rangle = L$ dir. Böylece L M nin devirli bir alt modülüdür. $P \cap L \ll L$ olduğundan Teorem 3.6.2 den $P \cap L \subseteq Rad L$ ve $\frac{M}{P} = \frac{P+L}{P} \cong \frac{L}{P \cap L}$ olduğundan $P \cap L$, L de maksimal olup $Rad L \subseteq P \cap L$ dir. Böylece $P \cap L = Rad L$ L nin tek maksimal alt modülüdür. L devirli olduğundan Teorem 3.4.3 den L nin her alt modülü $P \cap L$ maksimal alt modülü tarafından kapsanır. O halde $P \cap L$, L nin en büyük alt modülüdür. Yani L lokaldir.

Teorem 4.1.12: Her oyuk modül tümlenmiştir [14].

İspat: M oyuk modül, $N \leq M$ olsun. O halde $N + M = M$ ve $N = N \cap M \ll M$ olduğundan M modülünün kendisi, her öz alt modülü için bir tümleyendir.

Tanım 4.1.13: M bir R -modül $U \leq M$ olsun. M nin $M = U + V$ olacak şekilde her V alt modülü için, U nun M de $V' \leq V$ olacak şekilde V' tümleyeni varsa U ya M de **bol tümleyene sahiptir** denir. Eğer M nin her alt modülü bol tümleyene sahipse M ye **bol tümlenmiş modül** denir [12].

Her bol tümlenmiş modül tümlenmiştir. Çünkü M nin her N alt modülü için $N + M = M$ dir.

Tanım 4.1.14: M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $\frac{M}{N}$ bölüm modülü sonlu üretilmişse N ye **dual sonlu alt modül** denir [2].

Tanım 4.1.15: Bir M modülünün her dual sonlu alt modülü tümleyene sahipse M ye **dual sonlu tümlenmiş modül** denir. Eğer M nin her dual sonlu alt modülü bol tümleyene sahipse M ye **bol dual sonlu tümlenmiş** denir [2].

Her bol dual sonlu tümlenmiş modülün dual sonlu tümlenmiş olduğu, (bol) tümlenmiş modüllerin (bol) dual sonlu tümlenmiş oldukları açıktır.

Teorem 4.1.16: Dual sonlu tümlenmiş bir modülün homomorf görüntüsü de dual sonlu tümlenmiştir [2].

İspat: M dual sonlu tümlenmiş R -modül, N bir R -modül ve $f : M \rightarrow N$ homomorfizma olsun. $X, f(M)$ nin dual sonlu alt modülü olsun. O halde $\frac{f(M)}{X}$ sonlu üretilmiştir. Homomorfizma Teoreminden ve 3. İzomorfizma Teoreminden

$$\frac{f(M)}{X} \cong \frac{\frac{M}{\text{Çek } f}}{\frac{f^{-1}(X)}{\text{Çek } f}} \cong \frac{M}{f^{-1}(X)}$$

sonlu üretilmiştir. O halde $f^{-1}(X)$, M nin dual sonlu alt modülüdür. Buradan $f^{-1}(X) + Y = M$ ve $f^{-1}(X) \cap Y \ll Y$ olacak şekilde $Y \leq M$ vardır. $f(f^{-1}(X) + Y) = X \cap f(M) + f(Y) = X + f(Y) = f(M)$ dir. Ayrıca Teorem 3.5.2. 4) den $f(f^{-1}(X) \cap Y) = X \cap f(Y) \ll f(Y)$ dir. O halde $f(Y) \leq f(M)$, X in $f(M)$ de bir tümleyenidir.

Sonuç 4.1.17: Dual sonlu tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü de dual sonlu tümlenmiştir [2].

İspat: M dual sonlu tümlenmiş modül ve $N \leq M$ olsun. $\phi : M \rightarrow \frac{M}{N}$ doğal epimorfizma olmak üzere bir önceki teoremden $\phi(M) = \frac{M}{N}$ dual sonlu tümlenmiştir.

Teorem 4.1.18: M dual sonlu tümlenmiş modül ve $RadM$, M nin dual sonlu alt modülü olsun. Bu durumda $\frac{M}{RadM}$ yarı basittir [12].

İspat: M dual sonlu tümlenmiş olduğundan $\frac{M}{RadM}$ dual sonlu tümlenmiştir.

$\frac{N}{RadM} \leq \frac{M}{RadM}$ alalım. $\frac{\frac{M}{RadM}}{\frac{N}{RadM}} \cong \frac{M}{N}$ olduğundan Teorem 3.1.5 den $\frac{M}{N}$ sonlu

üretlmıştır. Böylece $N \leq M$ dual sonludur. M , dual sonlu tümlenmiş olduğundan $N+U=M$, $N \cap U \ll U$ olacak şekilde $U \leq M$ vardır. Teorem 4.1.4 den

$\frac{U+RadM}{RadM}, \frac{N}{RadM}$ nin $\frac{M}{RadM}$ de bir tümleyenidir. O halde

$\frac{U+RadM}{RadM} + \frac{N}{RadM} = \frac{M}{RadM}$ dir. Böylece $\frac{M}{RadM}$ tümlenmiştir. Ayrıca

$N \cap U \ll U$ ve böylece $N \cap U \ll M$ olduğundan $N \cap U \subseteq RadM$ ve buradan

$$\frac{U+RadM}{RadM} \cap \frac{N}{RadM} = \frac{RadM + (N \cap U)}{RadM} = 0 \text{ dir.}$$

Bu yüzden $\frac{U+RadM}{RadM} \oplus \frac{N}{RadM} = \frac{M}{RadM}$ dir. Yani $\frac{M}{RadM}$ yarı basittir.

Yardımcı Teorem 4.1.19: $N, U \leq M$ ve N tümlenmiş olsun. $N+U$, M de tümleyene sahipse, U da M de tümleyene sahiptir [2].

İspat: $N+U$ nun M de bir tümleyeni X olsun. O halde $(N+U)+X=M$ ve $(N+U) \cap X \ll X$ dir. $N \cap (U+X) \leq N$ alt modülünü ele alalım. N tümlenmiş olduğundan $N \cap (U+X)+Y=N$, $N \cap (U+X) \cap Y = (U+X) \cap Y \ll Y$ olacak şekilde $Y \leq N$ vardır. Bunlar yardımı ile $M = (N+U)+X = N \cap (U+X)+Y+U+X = U+(X+Y)$

$U \cap (X+Y) \leq X \cap (U+Y)+Y \cap (U+X) \leq X \cap (U+N)+Y \cap (U+X) \ll X+Y$ dir. O halde $X+Y$, U nun M de bir tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 4.1.20: $N, U \leq M$, N dual sonlu tümlenmiş ve U M nin dual sonlu alt modülü olsun. $N+U, M$ de tümleyene sahip ise U da M de tümleyene sahiptir [2].

İspat: $N+U$ nun tümleyeni X olsun. O halde $(N+U)+X=M$ ve $X \cap (N+U) \ll X$ dir. N nin $N \cap (U+X)$ alt modülünü alalım. U M nin dual sonlu alt modülü olduğundan ve Teorem 3.1.5 den

$$\frac{N}{N \cap (U+X)} \cong \frac{N+U+X}{U+X} = \frac{M}{U+X} \cong \frac{\frac{M}{U}}{\frac{U+X}{U}} \quad \text{sonlu \u00fcretilmi\u015f oldu\u011fundan}$$

$N \cap (U+X)$, N de dual sonludur. N dual sonlu tümlenmiş olduğundan $N \cap (U+X)+Y=N$, $N \cap (U+X) \cap Y = (U+X) \cap Y \ll Y$ olacak şekilde $Y \leq N$ vardır. Bundan sonra Yardımcı Teorem 4.1.19 ispatındakine benzer olarak, $X+Y$ nin, U nun M de tümleyeni olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.1.21: Keyfi sayıda dual sonlu tümlenmiş modülün toplamı dual sonlu tümlenmiştir [2].

İspat: $(M_i)_{i \in I}$, $M = \sum_{i \in I} M_i$ olacak şekilde dual sonlu tümlenmiş modüllerin bir

kolleksiyonu olsun. $N \leq M$ dual sonlu olsun. O halde $\frac{M}{N}$ sonlu \u00fcretilmiştir ve

b\u00f6ylece $\frac{M}{N} = \langle \{x_1 + N, \dots, x_n + N\} \rangle$ olacak şekilde $x_i \in M_i, 1 \leq i \leq n$ vardır.

$x_i \in M = \sum_{i \in I} M_i$ ise $x_i = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_{s(i)}}$ olacak şekilde $m_{i_k} \in M_{i_k}, 1 \leq k \leq s(i)$

vardır. Her $m + N \in \frac{M}{N}$ i\u00e7in $m + N = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n + N, r_i \in R, 1 \leq i \leq n$

yazılabilece\u011fi i\u00e7in $m = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n + a$ olacak şekilde $a \in N$ vardır. O halde

M nin her bir elemanı $m = r_1(m_{i_1} + \dots + m_{i_{s(1)}}) + \dots + r_n(m_{i_1} + \dots + m_{i_{s(n)}}) + a$

formunda yazılabilir. B\u00f6ylece $M = \sum_{j \in J} M_j + N$ olacak şekilde I nin

$J = \{1, 1_2, \dots, 1_{s(1)}, 2, \dots, 2_{s(2)}, \dots, n_{s(n)}\}$ sonlu indis k\u00fcmesi vardır.

$M = M_{1_1} + \sum_{j \in J - \{1_1\}} M_j + N$ yazalım. M_{1_1} dual sonlu tümlenmiş olduğundan ve $M_{1_1} + \sum_{j \in J - \{1_1\}} M_j + N$, 0 aşıkâr tümleyenine sahip olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.20 den $\sum_{i \in I - \{1_1\}} M_i + N$, M de tümleyene sahiptir. Böyle devam ederek J kümesi sonlu olduğu için N dual sonlu alt modülünün bir tümleyene sahip olduğu görülür.

Sonuç 4.1.22: Dual sonlu tümlenmiş modüllerin direkt toplamı dual sonlu tümlenmiştir [2].

4.2. Zayıf Tümlenmiş ve Dual Sonlu Zayıf Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.2.1: M bir R -modül olmak üzere U ve V M nin iki alt modülü olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \ll M$ ise V ye U nun M de **zayıf tümleyeni** denir veya U , M de bir **zayıf tümleyene sahiptir** denir. Eğer M nin her alt modülü bir zayıf tümleyene sahipse M ye **zayıf tümlenmiş modül** denir [3].

Tanım 4.2.2: M bir modül ve $U \leq M$ olsun. Eğer $U + V = M$ şartını sağlayan her V alt modülü için U nun $V' \leq V$ olacak şekilde M de bir V' zayıf tümleyeni varsa U ya **bol zayıf tümleyene sahiptir** denir [9].

Tanım 4.2.3: M bir R -modül olmak üzere, M nin her dual sonlu alt modülü zayıf tümleyene sahip ise M ye **dual sonlu zayıf tümlenmiş modül** denir [3].

Yardımcı Teorem 4.2.4: M bir R -modül ve U , M nin dual sonlu alt modülü olsun. Eğer V , U nun M de bir zayıf tümleyeni ise U , M de V tarafından kapsanan sonlu üretilmiş bir zayıf tümleyene sahiptir [2].

İspat: Eğer U dual sonlu ise $\frac{V}{V \cap U} \cong \frac{M}{U}$ olduğu için $\frac{V}{V \cap U}$ sonlu üretilmiştir.

$\frac{V}{V \cap U}$ bölüm modülü $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ olmak üzere $x_1 + V \cap U, x_2 + V \cap U, \dots, x_n + V \cap U$ elemanları tarafından üretilsin. O zaman V nin

$W = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$ sonlu üretilmiş bir alt modülü için $W + U = W + V \cap U + U = V + U = M$ ve $W \cap U \leq V \cap U \ll M$ dir. Bu yüzden W , U nun V tarafından kapsanan sonlu üretilmiş bir zayıf tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 4.2.5: $f : M \rightarrow N$ homomorfizma ve M nin Çek f yi kapsayan bir L alt modülü M de zayıf tümleyene sahip ise, $f(L)$, $f(M)$ de zayıf tümleyene sahiptir [2].

İspat: L, M de K nin zayıf tümleyeni olsun. $f(M) = f(L + K) = f(L) + f(K)$ ve $L \cap K \ll M$ dir. Teorem 2.5.2. 4) den $f(L \cap K) \ll f(M)$ dir. Çek $f \subseteq L$ olduğu için $f(L) \cap f(K) = f(L \cap K)$ dir. Bu yüzden $f(L)$, $f(M)$ de $f(K)$ nin zayıf tümleyenidir.

Önerme 4.2.6: Dual sonlu zayıf tümlenmiş bir modülün homomorf görüntüsü de dual sonlu zayıf tümlenmiştir [2].

İspat: $f : M \rightarrow N$ bir homomorfizma ve M dual sonlu zayıf tümlenmiş modül olsun. X , $f(M)$ nin dual sonlu alt modülü olsun. O zaman

$$\frac{M}{f^{-1}(X)} \cong \frac{\frac{M}{\text{Çek } f}}{\frac{f^{-1}(X)}{\text{Çek } f}} \cong \frac{f(M)}{X} \text{ sonlu üretilmiştir. } M \text{ dual sonlu zayıf tümlenmiş}$$

modül olduğundan $f^{-1}(X)$, M de bir zayıf tümlemdir ve Yardımcı Teorem 4.2.5 den $X = f(f^{-1}(X))$, $f(M)$ de bir zayıf tümlemdir.

Sonuç 4.2.7: Her dual sonlu zayıf tümlenmiş modülün bölüm modülü de dual sonlu zayıf tümlenmiştir [2].

Yardımcı Teorem 4.2.8: K, L, M birer R -modül olmak üzere $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow L$ epimorfizma olsun. fg nin küçük olması için gerek ve yeter şart f ve g nin küçük olmasıdır [14].

Önerme 4.2.9: M bir modül K, M nin bir alt modülü olsun. K, M de bir N alt modülünün zayıf tümleyeni ve $T \ll M$ ise K, M de $N+T$ nin de zayıf tümleyenidir [2].

İspat: $f : M \rightarrow \frac{M}{N} \oplus \frac{M}{K}$, $f(m) = (m+N, m+K)$ ve $g : \frac{M}{N} \oplus \frac{M}{K} \rightarrow \frac{M}{N+T} \oplus \frac{M}{K}$, $g(m+N, m'+K) = (m+N+T, m'+K)$ şeklinde tanımlayalım. $M = N+K$ olduğundan f bir epimorfizmadır. K, M de N nin zayıf tümleyeni olduğu için $\text{Çek } f = N \cap K \ll M$ dir. Bu yüzden f küçük epimorfizmadır. $T \ll M$ olduğu için $\text{Çek } g = \frac{N+T}{N \oplus 0}$ dir ve $\phi : M \rightarrow \frac{M}{N}$ doğal homomorfizması için $\frac{N+T}{N} = \phi(T) \ll \frac{M}{N}$ dir. Bu yüzden g küçük epimorfizmadır. Yardımcı Teorem 4.2.8 fg küçük epimorfizma olup $(N+T) \cap K = \text{Çek } fg \ll M$ dir. Açık ki $(N+T)+K = M$, M de $N+T$ nin zayıf tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 4.2.10: $f : M \rightarrow N$ bir küçük epimorfizma ise M nin bir L alt modülünün M de zayıf tümleyen olması için gerek ve yeter şart $f(L)$ nin N de zayıf tümleyen olmasıdır [1].

İspat: L, M de K nin zayıf tümleyeni olsun. Önerme 4.2.9 dan $L + \text{Çek } f$ de K nin zayıf tümleyeni ve Yardımcı Teorem 4.2.5 den $f(L) = f(L + \text{Çek } f)$, N de bir zayıf tümleyenidir.

Tersine $f(L), N$ de bir T alt modülü için zayıf tümleyeni olsun. O halde $N = f(L) + T$ ve $f(L) \cap T \ll N$ dir. O zaman $M = L + f^{-1}(T)$ dir. Teorem 3.5.2. 5) den $L \cap f^{-1}(T) \leq f^{-1}(f(L) \cap T) \ll N$ dir. Böylece $f^{-1}(T), L$ nin M de zayıf tümleyenidir.

Sonuç 4.2.11: Dual sonlu zayıf tümlenmiş modülün küçük örtüsü de dual sonlu zayıf tümlenmiştir [2].

İspat: N dual sonlu zayıf tümlenmiş modül, $f : M \rightarrow N$ küçük epimorfizma ve L, M nin bir dual sonlu alt modülü olsun. O halde $\overline{f}(m+L) = f(m) + f(L)$ ile

tanımlı $\bar{f}: \frac{M}{L} \rightarrow \frac{N}{f(L)}$ fonksiyonu bir epimorfizma olduğundan $\bar{f}(\frac{M}{L}) = \frac{N}{f(L)}$ sonlu üretilmiş olup, $f(L)$, N nin dual sonlu alt modülüdür. N dual sonlu zayıf tümlenmiş olduğundan $f(L)$, N de zayıf tümlemdir. Yardımcı Teorem 4.2.10 dan L , M de bir zayıf tümleyendir.

Sonuç 4.2.12: M bir R -modül olsun. $RadM \ll M$ ve $\frac{M}{RadM}$ dual sonlu zayıf tümlenmiş ise M dual sonlu zayıf tümlenmiştir [2].

Yardımcı Teorem 4.2.13: N , M nin dual sonlu zayıf tümlenmiş alt modülü ve U , M nin dual sonlu alt modülü olmak üzere $N+U$, M de zayıf tümleyene sahip ise U , M de zayıf tümleyene sahiptir [2].

İspat : X , M de $N+U$ nun zayıf tümleyeni olsun. O halde $M = (N+U) + X$ ve $(N+U) + X \ll M$ yazılabilir. N dual sonlu zayıf tümlenmiş ve

$$\frac{N}{N \cap (X+U)} \cong \frac{N+X+U}{X+U} = \frac{M}{X+U} \cong \frac{\frac{M}{U}}{\frac{X+U}{U}} \quad \text{sonlu üretilmiş olduğundan}$$

$N \cap (X+U)$, N de bir Y zayıf tümleyenine sahiptir. Yani

$$Y + (N \cap (X+U)) = N, \quad Y \cap N \cap (X+U) = Y \cap (X+U) \ll N$$

dir. Buradan $M = U + X + N = U + X + Y + (N \cap (X+U)) = U + X + Y$ ve

$$U \cap (X+Y) \leq (X \cap (Y+U)) + (Y \cap (X+U))$$

$$\leq (X \cap (N+U)) + (Y \cap (X+U))$$

$$\ll M + M = M$$

dir. Bu yüzden $X+Y$, M de U nun zayıf tümleyenidir.

Önerme 4.2.14: Keyfi sayıda dual sonlu zayıf tümlenmiş modülün toplamı da dual sonlu zayıf tümlenmiştir [2].

İspat: R bir halka, $\{M_i\}_{i \in I}$ ise $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olacak şekilde dual sonlu zayıf tümlenmiş R -modüllerin bir topluluğu ve $N \leq M$ dual sonlu olsun. O halde $\frac{M}{N}$ sonlu üretilmiştir ve böylece $\frac{M}{N} = \langle \{x_1 + N, x_2 + N, \dots, x_k + N\} \rangle$ olacak şekilde $x_i \in M$, $1 \leq i \leq k$ vardır. Buradan $M = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_k + N$ yazılabilir. Her bir x_i elemanı için, $x_i \in \bigoplus_{j \in F_i} M_j$ olacak şekilde I kümesinin F_i sonlu alt kümesi bulunabileceğinden, $Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_k \leq \bigoplus_{j \in F} M_j$ olacak şekilde I nin $F = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ sonlu alt kümesi vardır. O halde $M = \bigoplus_{t=1}^r M_{i_t} + N$ yazılabilir. $M = M_{i_1} + \left(\bigoplus_{t=2}^r M_{i_t} + N \right)$ nin M de 0 zayıf tümleyenine sahip olduğu açıktır. M_{i_1} dual sonlu zayıf tümlenmiş olduğundan Yardımcı Teorem 4.2.13 den $\bigoplus_{t=2}^r M_{i_t} + N$, M de zayıf tümleyene sahiptir. F kümesi sonlu olduğundan bu şekilde devam edilirse (Yardımcı Teorem 4.2.13 r kez kullanılırsa) N nin M de bir zayıf tümleyene sahip olduğu görülür.

Tanım 4.2.15: M ve N birer R -modül olsun. Bir Λ kümesi için bir $f : M^{(\Lambda)} \rightarrow N$ epimorfizması varsa, N ye bir **M -üretilmiş modül** denir [14].

Sonuç 4.2.16: M bir dual sonlu zayıf tümlenmiş modül ise her M -üretilmiş modül de dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.17: U ve K , M nin iki alt modülü ve K , M nin bir P maksimal alt modülünün zayıf tümleyeni olsun. $K+U$, M de bir zayıf tümleyene sahip ise U , M de bir zayıf tümleyene sahiptir [2].

İspat: X , M de $K+U$ nun zayıf tümleyeni olsun. $K \cap (X+U) \subseteq K \cap P$ ise $M = P + K$ ve $P \cap K \ll M$ olduğu için $U \cap (X+K) \leq X \cap (K+U) + K \cap (X+U) \ll M$ yazılabilir. Böylece $X+K$, U nun

M de zayıf tümleyenidir. $K \cap (X+U) \not\subseteq K \cap P$ olduğunu kabul edelim.

$\frac{K}{K \cap M} \cong \frac{K+M}{M} = \frac{N}{M}$ olduğundan $K \cap P$, K nin maksimal alt modülüdür. Bu yüzden $(K \cap P) + (K \cap (X+U)) = K$ dir. $K \cap (X+U) \leq X+U$ ve $K \cap P \ll M$ olduğundan $M = X+U+K = X+U + (K \cap P) + (K \cap (X+U)) = X+U$ dur. Ayrıca $U \cap X \leq (U+X) \cap X \ll M$ olduğundan X, M de U nun zayıf tümleyenidir. Böylece her iki durumda da U, N de zayıf tümleyendir.

Bir M modülü için K, M de en az bir maksimal alt modülün zayıf tümleyeni olacak şekildeki tüm K alt modüllerinin ailesi Γ ile ve Γ ya ait tüm alt modüllerin toplamını kısaca $mzt(M)$ ile gösterilsin. $\Gamma = \emptyset$ ise $mzt(M) = 0$ alınır.

Teorem 4.2.18: Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. M dual sonlu zayıf tümlenmiş modüldür.
2. M nin her maksimal alt modülü zayıf tümleyene sahiptir.
3. $\frac{M}{mzt(M)}$ nin maksimal alt modülü yoktur [2].

İspat : (1) $\Rightarrow$ (2) Her maksimal alt modülün dual sonlu olduğu açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Kabul edelim ki $\frac{P}{mzt(M)}, \frac{M}{mzt(M)}$ nin maksimal alt modülü olsun. O

halde P, M nin maksimal alt modülü olur. Kabulden P nin M bir K zayıf tümleyeni vardır. O halde $K \in \Gamma$, $K \leq mzt(M) \leq P$ dir. Bu yüzden $M = P + K = P$

olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\frac{M}{mzt(M)}$ maksimal alt modüle sahip değildir.

(3) $\Rightarrow$ (1) U, M nin dual sonlu alt modülü olsun. O halde $U + mzt(M)$ de M de

dual sonludur. Eğer $\frac{M}{U + mzt(M)} \neq 0$ ise Teorem 3.4.3 den $\frac{M}{U + mzt(M)}$ sonlu

üretilmiş modülün bir $\frac{P}{U + mzt(M)}$ maksimal alt modüllü vardır. Buradan P, M nin

maksimal alt modülü ve $\frac{P}{mzt(M)}, \frac{M}{mzt(M)}$ nin maksimal alt modülüdür. Bu ise

kabülümüz ile çelişir. Dolayısıyla $M = U + mzt(M)$ dir. $\frac{M}{U},$

$x_1 + U, x_2 + U, \dots, x_n + U$ elemanları ile üretilsin. Buradan $N = U + Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$ yazılabilir. Her bir x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) elemanı $u_i \in U, c_i \in \text{mzt}(M)$ olmak üzere $x_i = u_i + c_i$ şeklinde yazılabilir. Her bir c_i, Γ nin sonlu sayıda alt modüllerinin toplamı tarafından kapsandığı için $M = K_1 + K_2 + \dots + K_m + U$ olacak şekilde M nin Γ ya ait $K_1, K_2, \dots, K_m$ alt modülleri vardır. $M = (K_1 + K_2 + \dots + K_{m-1} + U) + K_m, 0$ zayıf tümleyenine sahiptir. Yardımcı Teorem 4.2.17 den $M = (K_1 + K_2 + \dots + K_{m-1} + U)$ M de bir zayıf tümleyene sahiptir. Bu şekilde devam edilir ve Yardımcı Teorem 4.2.17 m kez uygulanırsa U nun M de bir zayıf tümleyene sahip olduğu görülür.

Teorem 4.2.19: M bir R -modül ve $\text{Rad}M \ll M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. M dual sonlu zayıf tümlenmiştir.
2. $\frac{M}{\text{Rad}M}$ dual sonlu zayıf tümlenmiştir.
3. $\frac{M}{\text{Rad}M}$ nin her dual sonlu alt modülü bir direkt toplam terimidir.
4. $\frac{M}{\text{Rad}M}$ nin her maksimal alt modülü bir direkt toplam terimidir.
5. $\frac{M}{\text{Rad}M}$ nin her maksimal alt modülü bir zayıf tümleyendir.
6. M nin her maksimal alt modülü bir zayıf tümleyendir [2].

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Sonuç 4.2.7 den açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\text{Rad}(\frac{M}{\text{Rad}M}) = 0$ olduğundan açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Maksimal alt modüller dual sonludur.

(4) $\Rightarrow$ (5) Açıktır.

(5) $\Rightarrow$ (6) Yardımcı Teorem 4.2.10 dan açıktır.

(6) $\Rightarrow$ (1) Teorem 4.2.18 den açıktır.

Tanım 4.2.20: M bir R -modül olsun. $\frac{M}{RadM}$ yarı basit ise M modülüne **yarı lokal modül** denir. R halkası sol R -modül olarak yarı lokal ise R halkasına **yarı lokal halka** denir [14].

Teorem 4.2.21: Bir R halkasının yarı lokal olması için gerek ve yeter şart ${}_R R$ nin zayıf tümlenmiş olmasıdır [9].

Sonuç 4.2.22: R bir halka olsun. R nin yarılokal olması için gerek ve yeter şart her R -modülün dual sonlu zayıf tümlenmiş olmasıdır [2].

İspat: R yarı lokal halka ile Teorem 4.2.21 den ${}_R R$ zayıf tümlenmiştir. Her sol R -modül R üretilmiş olduğu için Sonuç 4.2.16 ile istenen elde edilir.

4.3. Her Dual Sonlu Genişlemesinde Tümleyene Sahip Modüller

Tanım 4.3.1: R bir halka ve M ve N birer R -modül olsun. $M \subseteq N$ (ve $\frac{N}{M}$ sonlu üretilmiş) ise N ye M nin bir **(dual sonlu) genişlemesi** denir [5].
Bir M modülü için aşağıdaki koşulları düşünelim:

(E) M her genişlemesinde bir tümleyene sahiptir.

(EE) M her genişlemesinde bol tümleyene sahiptir.

Bu özelliklere sahip modül kavramı ilk kez [15] de H. Zöschinger tarafından tanımlandı. Yazar (E) ve (EE) özelliğine sahip modüllerin yapısını inceledi. Daha sonra 2012 yılında [6] da Çalışıcı ve Türkmen tarafından (E) ve (EE) özelliklerinin bir genelleştirmesi olarak aşağıdaki ifadeler tanıtıldı.

(CE) M her dual sonlu genişlemesinde bir tümleyene sahiptir.

(CEE) M her dual sonlu genişlemesinde bir bol tümleyene sahiptir.

Açıktır ki (E) özelliğine sahip her modül (CE) özelliğine sahiptir. Benzer özellik (EE) ve (CEE) özelliğine sahip modüller arasında da geçerlidir. Biz bu kısımda (CE) ve (CEE) özelliğine sahip modüllerin sağladığı temel özellikleri veriyoruz.

Teorem 4.3.2: Bir M modülünün (CEE) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M nin her alt modülünün (CE) özelliğine sahip olmasıdır [5].

İspat : $(\Leftarrow)$ M nin her alt modülü (CE) özelliğine sahip olsun. N , M nin dual sonlu genişlemesi olsun. $N = M + V$ olacak şekilde $V \leq N$ alt modülü için $\frac{N}{M} = \frac{M+V}{M} \cong \frac{V}{M \cap V}$ sonlu üretilmiş olduğundan $M \cap V, V$ nin dual sonlu alt modülüdür. $M \cap V \leq M$ olduğundan kabul gereği $M \cap V$, (CE) özelliğine sahip olup $V = M \cap V + K$, $(M \cap V) \cap K = M \cap K \ll K$ olacak şekilde $K \leq V$ vardır. $N = M + V = M + (M \cap V + K) = M + K$ dir. O halde $K \leq V$, M nin N de tümleyenidir. Böylece M , (CEE) özelliğine sahip bir modüldür.

$(\Rightarrow)$ M , (CEE) özelliğine sahip bir modül olsun. M nin herhangi bir M_1 alt modülünü alalım. $M_1 \subseteq N$ dual sonlu genişlemesi için $H = \{(k, -k) / k \in M_1\} \leq M \oplus N$ için $F = \frac{M \oplus N}{H}$ ve $\alpha: M \rightarrow F$, $\alpha(m) = (m, 0) + H$, $\beta: N \rightarrow F$, $\beta(n) = (0, n) + H$, $m \in M, n \in N$ alalım. α ve β nın bir monomorfizma olduğu açıktır.

$\mu_1: M_1 \rightarrow N$, $\mu_2: M_1 \rightarrow M$ gömme homomorfizmaları olmak üzere aşağıdaki diyagramı oluşturabiliriz.

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\mu_1} & N \\ \downarrow \mu_2 & & \downarrow \beta \\ M & \xrightarrow{\alpha} & F \end{array}$$

$F = \text{Gör } \alpha + \text{Gör } \beta$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Her $(m, n) + H \in F$ için $\gamma: F \rightarrow \frac{N}{M_1}$, $\gamma((m, n) + H) = n + M_1$ şeklinde bir

epimorfizma tanımlayalım. Çek $\gamma = \text{Gör } \alpha$ olduğundan $\frac{N}{M_1} \cong \frac{F}{\text{Gör } \alpha}$ sonlu

üretlmifltir. α bir monomorfizma olduğu için $Gör\alpha \cong \frac{M}{Çek\alpha} = M$ olup kabulden $Gör\alpha$ (CEE) özelliğine sahiptir. Dolayısı ile $Im\alpha$, F de $V \leq Gör\beta$ tümleyenine sahiptir. Yani $F = Gör\alpha + V$ ve $Gör\alpha \cap V \ll V$ dir. O halde $N = \beta^{-1}(Gör\alpha) + \beta^{-1}(V) = M_1 + \beta^{-1}(V)$ ve $M_1 \cap \beta^{-1}(V) \ll \beta^{-1}(V)$ dir. Dolayısıyla $\beta^{-1}(V)$, N modülünde M_1 in tümleyenidir. Böylece M_1 (CE) özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.3.3: (CEE) özelliğine sahip bir modülün her alt modülü dual sonlu tümlenmiştir. Ayrıca (CEE) özelliğine sahip bir modül bol dual sonlu tümlenmiştir.

İspat: M , (CEE) özelliğine sahip bir modül olsun. $M_1 \subseteq M$ olsun. $U \subseteq M_1$ dual sonlu alt modülünü ele alalım. Buradan $\frac{M_1}{U}$ sonlu üretlmifltir. $U \subseteq M_1 \subseteq M$ den $U \subseteq M$ olup Teorem 4.3.2 den U , (CE) özelliğine sahiptir. O halde U nun M_1 de bir tümleyeni vardır. Böylece M_1 dual sonlu tümlenmiştir.

M (CEE) özelliğine sahip bir modül ve M nin bir M_1 dual sonlu alt modülü için $M = M_1 + K$, $K \leq M$ olsun. $\frac{M}{M_1} \cong \frac{K}{M_1 \cap K}$ sonlu üretlmifltir. $M_1 \cap K \subseteq M$ olduğundan Teorem 4.3.2 ile $M_1 \cap K$, (CE) özelliğine sahiptir. Buradan $M_1 \cap K + L = K$, $(M_1 \cap K) \cap L = M_1 \cap L \ll L$, $L \leq K$ vardır. $M = M_1 + K = M_1 + L$ olup M_1 M de bol tümleyene sahiptir. Böylece M bol dual sonlu tümlenmiştir.

Teorem 4.3.4: M bir modül olsun. Eğer M , (CE) özelliğine sahip ise, her direkt toplam terimi de (CE) özelliğine sahiptir [5].

İspat : M_1 , M nin bir direkt toplam terimi olsun. O halde $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde $M_2 \leq M$ vardır. N , M_1 in bir dual sonlu genişlemesi ve N' , $N \oplus M_2$ nin dış direkt toplamı olsun. $\varphi: M \rightarrow N'$ gömme homomorfizması için $\varphi(M) \cong M$ dir. Kabulden M , (CE) özelliğine sahip olduğundan $\varphi(M)$, (CE) özelliğine sahiptir.

$\frac{N}{M_1} \cong \frac{N \oplus M_2}{\varphi(M)} = \frac{N'}{\varphi(M)}$ sonlu üretilmiştir. $\varphi(M)$, (CE) özelliğine sahip olduğu için

$N' = \varphi(M) + V$, $\varphi(M) \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq N'$ vardır. $\pi: N' \rightarrow N$ projeksiyonu için $N = \pi(N') = \pi(\varphi(M) + V) = \pi(\varphi(M)) + \pi(V) = M_1 + \pi(V)$ dir. Çek $\pi \subseteq \varphi(M)$ olduğu için $\pi(\varphi(M) \cap V) \subseteq \pi(\varphi(M)) \cap \pi(V) = M_1 \cap \pi(V) \ll \pi(V)$ dir. Böylece $\pi(V)$, N de M_1 in tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 4.3.5: M bir modül ve U , M nin dual sonlu alt modülü olsun. U , M de V tümleyenine sahip ise V sonlu üretilmiştir [5].

İspat : V , M de U nun tümleyeni olsun. O halde $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir.

$\frac{M}{U} \cong \frac{V}{U \cap V}$ sonlu üretilmiş olduğu için $V = U \cap V + X$ olacak şekilde V nin en az

bir X alt modülü vardır. $U \cap V \ll V$ olduğundan $X = V$ dir. Bu yüzden V sonlu üretilmiştir.

Tanım 4.3.6: $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ modüller topluluğundan ve bunların $f_n: M_n \rightarrow M_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan $\dots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \rightarrow \dots$ dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $Gör f_{n+1} = Çek f_n$ ise bu diziye **tam dizi** denir [2].

$0 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{e} 0$ şeklindeki tam diziye **kısa tam dizi** denir [1].

Teorem 4.3.7: $0 \rightarrow A \xleftarrow[h]{f} B \xleftarrow[k]{g} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

1. $h \circ f = 1_A$ olacak şekilde bir $h: B \rightarrow A$ homomorfizması bulunur.
2. $Gör f$ alt modülü B nin bir direkt toplam terimidir.
3. $g \circ k = 1_C$ olacak şekilde bir $k: C \rightarrow B$ homomorfizması bulunur.

Bu durumda $B = A \oplus C$ dir [1].

Tanım 4.3.8: Teorem 4.3.7 deki denk koşullardan herhangi birini gerçekleyen $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ kısa tam dizisine **parçalanabilir kısa tam dizi** denir [1].

Teorem 4.3.9: $0 \rightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \rightarrow 0$ bir kısa tam dizi olsun. Eğer K ve L (CE) özelliğine sahip ise M de (CE) özelliğine sahiptir. Eğer dizi parçalanana ise (yani $\text{Im } f = \text{Çek } g$ M nin bir direkt toplam terimi ise) ifadenin terside doğrudur. Yani M (CE) özelliğine sahip ise, K ve L de (CE) özelliğine sahiptir [5].

İspat: Genelliği bozmaksızın $K \leq M$ alalım. N, M nin dual sonlu genişlemesi

olsun. $K \leq M \leq N$ için $\frac{N}{M} \cong \frac{\frac{N}{K}}{\frac{M}{K}}$ sonlu üretilmiş olup $\frac{M}{K}, \frac{N}{K}$ nin dual sonlu alt

modülüdür. $L, (CE)$ özelliğine sahip ve $L \cong \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{M}{K}, (CE)$ özelliğine

sahiptir. O halde $\frac{M}{K} + \frac{V}{K} = \frac{N}{K}$ ve $\frac{M \cap V}{K} \ll \frac{V}{K}$ olacak şekilde $\frac{V}{K} \leq \frac{N}{K}$ vardır.

Buradan $N = M + V$ dir. Yardımcı Teorem 4.3.5 den $\frac{V}{K}$ sonlu üretilmiştir.

$K, (CE)$ özelliğine sahip olduğundan $K \cap V$ de K' tümleyenine sahiptir. Yani $V = K + K', K \cap K' \ll K'$ dır.

$N = M + V = M + K'$ dır. Bir $X \leq K'$ için $M + X = N$ olduğunu kabul edelim.

Buradan $\frac{M}{K} + \frac{X + K}{K} = \frac{N}{K}$ ve $\frac{V}{K}$ nin minimalliğinden $\frac{X + K}{K} = \frac{V}{K}$ olur. Buradan

$V = X + K$ olup K' nün minimalliğinden $X = K'$ dır. O halde K', N de M nin tümleyenidir. Böylece $M, (CE)$ özelliğine sahip olur. Tersine M parçalanana dizi olsun. O halde Teorem 4.3.4 den K ve L (CE) özelliğine sahip olur.

Sonuç 4.3.10: $M_i, i=1,2,...,n$ modüllerin sonlu koleksiyonu ve $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. M nin (CE) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart her $i=1,2,...,n$ için M_i nin (CE) özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $M, (CE)$ özelliğine sahip olsun. Teorem 4.3.4 den istenen elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Her $i=1,2,...,n$ için $M_i, (CE)$ özelliğine sahip olsun. n üzerinde tümevarım ile ifadenin doğruluğunu göstermek için $n=2$ bunun doğruluğunu göstermek yetelidir. Bu yüzden $M = M_1 \oplus M_2$ olduğunu kabul edelim.

$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ kısa tam dizisini kullanarak, Teorem 4.3.9 dan M , (CE) özelliğine sahiptir

Tanım 4.3.11: P bir modül olsun. Eğer her $f: M \rightarrow N$ epimorfizması ve her $g: P \rightarrow N$ homomorfizması için $g = f \circ h$ olacak şekilde bir $h: P \rightarrow M$ homomorfizması bulunursa, P ye **projektif modül** denir [1].

Tanım 4.3.12: P projektif modülüne, $f: P \rightarrow M$ küçük epimorfizması ile birlikte M modülünün **projektif örtüsü** denir [1].

Tanım 4.3.13: Eğer M nin her bölüm modülü bir projektif örtüye sahip ise M ye **yarı mükemmel modül** denir.

Bir R halkası sol R -modül olarak yarı mükemmel ise halkaya **yarı mükemmel halka** denir [12].

Teorem 4.3.14: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. R yarı mükemmeldir.
2. ${}_R R$ tümlenmiştir.
3. Her sonlu üretilmiş R -modül yarı mükemmeldir.
4. Her sonlu üretilmiş R -modül bir projektif örtüye sahiptir.
5. Her sonlu üretilmiş R -modül (bol) tümlenmiştir [14].

Teorem 4.3.15: M bir R -modül $A, B \leq M$ ve $M = A + B$ olsun. $\frac{M}{A}$ bir projektif örtüye sahip ise A nın M de B tarafından kapsanan bir tümleyeni vardır [10].

Teorem 4.3.16: Bir R halkasının yarı mükemmel olması için gerek ve yeter şart her sol R -modülün (CE) özelliğine sahip olmasıdır [5].

İspat: ($\Rightarrow$) R yarı mükemmel bir halka olsun. M bir R -modül ve N, M nin dual sonlu genişlemesi olsun. O halde $N = M + K$ olacak şekilde N nin sonlu üretilmiş bir K alt modülü vardır. R yarı mükemmel olduğundan Teorem 4.3.14 den $\frac{N}{M}$

projektif örtüye sahiptir. Ayrıca $N = M + K$ olduğundan Teorem 4.3.15 den M N de bir tümleyeni vardır. Böylece M , (CE) özelliğine sahiptir.

$(\Leftarrow)$ Her sol R -modül (CE) özelliğine sahip olsun. O halde R nin her sol ideali bir sol R -modül olarak R de tümleyene sahiptir. Bu yüzden ${}_R R$ R -modülü tümlenmiştir. Dolayısı ile Teorem 4.3.14 den R yarı mükemmeldir.

Teorem 4.3.17: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. R yarı mükemmeldir.
2. ${}_R R$ her dual sonlu genişlemesinde bol tümleyene sahiptir, yani ${}_R R$ (CEE) özelliğine sahiptir.
3. ${}_R R$ her sonlu üretilmiş genişlemesinde bol tümleyene sahiptir.
4. Her sol R -modül (CE) özelliğine sahiptir.
5. Her sol R -modül (CEE) özelliğine sahiptir [14].

İspat: Teorem 4.3.16 dan $(1) \Leftrightarrow (4)$ olduğu gösterilebilir. $(5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$ olduğu açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$ ${}_R R$ (CEE) özelliğine sahip olsun. Teorem 4.3.2 den ${}_R R$ tümlenmiştir. Dolayısıyla Teorem 4.3.14 den R nin yarı mükemmel olduğu görülür.

$(4) \Rightarrow (5)$ Teorem 4.3.2 den açıktır.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1. Her Dual Sonlu Genişlemesinde Zayıf Tümleyene Sahip Modüller

Tanım 5.1.1: M her dual sonlu genişlemesinde bir zayıf tümleyene sahip ise M ye (CWE) özelliğine sahiptir denir. M her dual sonlu genişlemesinde bol zayıf tümleyene sahip ise M ye $(CWEE)$ özelliğine sahiptir denir.

Açıkça her (CE) özelliğine sahip modül (CWE) özelliğine sahiptir. Benzer şekilde her (CEE) özelliğine sahip modül $(CWEE)$ özelliğine sahiptir.

Örnek 5.1.2: Bir modül her dual sonlu genişlemesinde zayıf tümleyene sahip olmak zorunda değildir. $2\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -modülü için $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ bölüm modülü sonlu üretilmiş olduğundan $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$ nin bir dual sonlu genişlemesidir ve $2\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{Z}$ de bir zayıf tümleyeni yoktur. Eğer bir $0 < m \in \mathbb{Z}$ için $m\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{Z}$ de bir zayıf tümleyeni olsa $2\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ve $2\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \ll \mathbb{Z}$ yazılabilir. $0 < m \in \mathbb{Z}$ olduğundan $2\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \neq 0$ dır. Bu ise $\mathbb{Z}$ nin tek küçük alt modülünün 0 olması ile çelişir. Böylece $2\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -modülü (CWE) özelliğine sahip olmayan bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Örnek 5.1.3: $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -modülü için N , $\mathbb{Z}$ nin bir dual sonlu genişlemesi olsun. Bu durumda $\frac{N}{\mathbb{Z}}$ sonlu üretilmiştir ve $\mathbb{Z}$, N nin bir direkt toplam terimidir. Yani $N = \mathbb{Z} \oplus K$ olacak şekilde $K \leq N$ vardır. O halde K , $\mathbb{Z}$ nin N de zayıf tümleyenidir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ (CWE) özelliğine sahip bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Teorem 5.1.4: M bir R -modül olsun. M nin her alt modülü (CWE) özelliğine sahip ise M $(CWEE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: M nin her alt modülü (CWE) özelliğine sahip olsun. $M \subset N$ dual sonlu genişlemesini alalım. $N = M + V$ olacak şekildeki N nin her $V \leq N$ alt modülü için $\frac{N}{M} = \frac{M+V}{M} \cong \frac{V}{M \cap V}$ yazılabilir. $\frac{N}{M}$ sonlu üretilmiş olduğundan, $\frac{V}{M \cap V}$ sonlu üretilmiş olup $M \cap V$, V nin bir dual sonlu alt modüdür. Böylece V , $M \cap V$ nin bir dual sonlu genişlemesidir. Kabulden $M \cap V \leq V$ (CWE) özelliğine sahip olduğundan, $M \cap V$ nin V de bir zayıf tümleyenidir. Yani $V = M \cap V + K$ ve $(M \cap V) \cap K = M \cap K \ll V$ olacak şekilde $K \leq V$ vardır. Buradan $N = M + V = M + V \cap V + K = M + K$ dır. Ayrıca $M \cap K \ll V$ ve $V \leq N$ olduğundan Teorem 3.5.2. 2) den $M \cap K \ll N$ dır. Böylece K , M nin N de bir bol tümleyenidir. O halde M (CWEE) özelliğine sahiptir.

Teorem 5.1.5: M bir R -modül olsun. M (CWE) özelliğine sahip ise M nin her direkt toplam terimi de (CWE) özelliğine sahiptir.

İspat: $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $M_1 \subseteq N$ dual sonlu genişlemesini alalım. $N' = N \oplus M_2$ ve $\varphi: M \rightarrow N'$ gömme homomorfizmasını alalım. O zaman $M \cong \varphi(M)$ olduğundan $\varphi(M)$, (CWE) özelliğine sahiptir. M_1 N nin dual sonlu alt modülü olduğundan

$$\frac{N}{M_1} \cong \frac{N \oplus M_2}{\varphi(M)} = \frac{N'}{\varphi(M)}$$

sonlu üretilmiştir. $\varphi(M)$, (CWE) özelliğine sahip olduğu için $N' = \varphi(M) + V$ ve $\varphi(M) \cap V \ll N'$ olacak şekilde $V \leq N'$ vardır. $\pi: N' \rightarrow N$ projeksiyonunu için $M_1 + \pi(V) = N$ yazılabilir. $\varphi(M) \cap V \ll N'$ olduğundan Teorem 3.5.2. 4) den $\pi(\varphi(M) \cap V) = M_1 \cap \pi(V) \ll \pi(N') = N$ yani $M_1 \cap \pi(V) \ll N$ elde edilir. Böylece $\pi(V)$, N de M_1 in bir zayıf tümleyenidir. Yani M_1 (CWE) özelliğine sahiptir.

Önerme 5.1.6: N, M nin dual sonlu genişlemesi ve M, N de V zayıf tümleyenine sahipse M nin N de $W \leq V$ olacak şekilde sonlu üretilmiş W zayıf tümleyenidir.

İspat: N, M nin dual sonlu genişlemesi olsun. M, N de V zayıf tümleyenine sahip olduğundan $N = M + V, M \cap V \ll N$ dir. $\frac{N}{M} = \frac{M+V}{M} \cong \frac{V}{M \cap V}$ olduğundan $\frac{V}{M \cap V}$ sonlu üretilmiştir. Bu bölüm modülü $x_1 + M \cap V, x_2 + M \cap V, \dots, x_n + M \cap V$ elemanları tarafından üretilsin. O halde V nin sonlu üretilmiş $W = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$ alt modülü için $W + M = W + V \cap M + M = M + V = N$ dir. Ayrıca $W \cap M \leq V \cap M \ll N$ olduğundan $W \cap M \ll N$ dir. Dolayısıyla M nin N de $W \leq V$ olacak şekilde sonlu üretilmiş W zayıf tümleyeni vardır.

Teorem 5.1.7: R bir halka olsun. R nin yarılokal olması için gerek ve yeter şart her R -modülün (CWE) özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: R yarılokal olsun. M bir R -modül ve N, M nin dual sonlu genişlemesi olsun. R yarılokal olduğundan Sonuç 4.2.22 den her modül dual sonlu zayıf tümlenmiş modül olup N dual sonlu zayıf tümlenmiş modüldür. M, N nin dual sonlu alt modülü olduğundan M nin zayıf tümleyeni vardır. O halde M (CWE) özelliğine sahiptir. Tersine M bir R -modül ve M (CWE) özelliğine sahip olsun. U, M nin dual sonlu alt modülü olsun. O halde M, U nun dual genişlemesidir. Kabulden U, M de bir zayıf tümleyene sahiptir. Böylece M dual sonlu zayıf tümlenmiş modül olup Sonuç 4.2.22 den M yarılokaldır.

Örnek 5.1.8: Her (CE) özelliğine sahip modülün (CWE) özelliğine sahip olduğu açıktır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. p ve q farklı asal tamsayılar olmak üzere $\mathbb{Z}_{p,q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (p, b) = 1, (q, b) = 1 \right\}$ yarı mükemmel olmayan bir yarı lokal halkadır [2]. Bu durumda Teorem 4.3.16 dan (CE) özelliğine sahip olmayan en az bir M sol R -modülü vardır. R yarı lokal olduğundan Teorem 5.1.7 den $M, (CWE)$ özelliğine sahiptir.

Sonuç 5.1.9: R bir halka olmak üzere, her R -modülün dual sonlu zayıf tümlenmiş olması için gerek ve yeter şart her R -modülün (CWE) özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: Sonuç 4.2.22 ve Teorem 5.1.7 den istenen elde edilir.

Teorem 5.1.10: M bir modül ve $L \ll M$ olsun. Eğer $\frac{M}{L}$ bölüm modülü (CWE) özelliğine sahip ise M de (CWE) özelliğine sahiptir.

İspat: N, M nin bir dual sonlu genişlemesi olsun. Bu durumda $\frac{N}{M}$ sonlu üretilmiştir. 3. İzomorfizma Teoreminden

$$\frac{N}{M} \cong \frac{\frac{N}{L}}{\frac{M}{L}}$$

bölüm modülü sonlu üretilmiş olup, $\frac{M}{L}$ (CWE) özelliğine sahip olduğundan $\frac{M}{L}$ nin $\frac{N}{L}$ de bir $\frac{K}{L}$ zayıf tümleyeni vardır. Böylece $\frac{M}{L} + \frac{K}{L} = \frac{N}{L}$ ve $\frac{M}{L} \cap \frac{K}{L} \ll \frac{N}{L}$ yazılabilir. Buradan $M + K = N$ dir. Ayrıca $M \cap K \ll N$ dir. Gerçekten bir $S \leq N$ için $M \cap K + S = N$ olsa, $\frac{M \cap K}{L} + \frac{S+L}{L} = \frac{N}{L}$ ve $\frac{M \cap K}{L} = \frac{M}{L} \cap \frac{K}{L} \ll \frac{N}{L}$ olduğundan $\frac{S+L}{L} = \frac{N}{L}$ elde edilir. Buradan $S+L = N$ ve $L \ll M$ olduğundan $L \ll N$ ve böylece $S = N$ elde edilir.

Sonuç 5.1.11: M sonlu üretilmiş modül ve $\frac{M}{RadM}$ bölüm modülü (CWE) özelliğine sahip ise M de (CWE) özelliğine sahiptir.

Tanım 5.1.12: M bir R -modül olsun. M nin kendisi her dual sonlu genişlemesinde bir direkt toplam terim ise M ye **dual sonlu injektif modül** denir [5].

Tanım 5.1.13: R bir halka $a \in R$ olsun. Eğer $aba = a$ olacak şekilde en az bir $b \in R$ elemanı varsa a ya R nin bir **regüler elemanı** denir. R nin her elemanı regüler ise R ye **Von Neumann regüler** veya kısaca **regüler halka** denir [14].

Teorem 5.1.15: R bir değişmeli Von Neumann regüler halka olsun. Bir M R -modülün (CWE) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M dual sonlu injektif olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir R -modül ve M (CWE) özelliğine sahip olsun. $M \subseteq N$ dual sonlu genişlemesini alalım. M (CWE) özelliğine sahip olduğundan $N = M + V$, $M \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq N$ vardır. [14] 3.73 ve 3.75 den $RadN = 0$ dır. O halde tek maksimal alt modül 0 dır. Buradan $M \cap V = 0$ olup $N = M \oplus V$ dir. Dolayısıyla M dual sonlu injektiftir.

$(\Leftarrow)$ M dual sonlu injektif modül olsun. $M \subseteq N$ dual sonlu genişlemesini alalım. M dual sonlu injektif modül olduğundan $N = M \oplus K$ olacak şekilde $K \leq N$ vardır. Buradan $N = M + K$, $M \cap K \ll N$ dir. O halde M (CWE) özelliğine sahiptir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde her dual sonlu genişlemesinde tümleyene sahip modüllerden yola çıkarak her dual sonlu genişlemesinde zayıf tümleyene sahip modüller tanımlandı. Bu modüllerin yarılokal ve değişmeli regüler halkalar için karakterizasyonlar verildi. Ayrıca (CWE) özelliğine sahip modüllerin (CE) özelliğine sahip olması gerekmediği gösterildi. R bir halka olmak üzere her R -modülün dual sonlu zayıf tümlenmiş olması için her R -modülün (CWE) özelliğine sahip olmasıdır.

Bu tezden yola çıkarak her dual sonlu genişlemesinde zayıf radikal tümleyene sahip modül yapısı çalışılabilir. Benzer özellikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Alizade R., Pancar A., 1999. *Homoloji Cebire Giriş*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi, Samsun.
- [2] Alizade R., Büyükaşık E., 2003. Cofinitely weak supplemented modules, *Comm. Algebra*, 31, 11, 5377-5390.
- [3] Alizade R., Bilhan G. Smith P.F., 2001. Modules whose maksimal submodules have supplements, *Comm. Algebra*, 29, 6, 2389-2405.
- [4] Clark J., Lomp C., Vajana, N., Wishbauer , R., 2006. *Lifting Modules*, 1st. ed., Birkhauser Verlag Basel, Boston-Berlin.
- [5] Çalışıcı H., Türkmen E., 2012. Modules that have a supplement in every cofinite extension, *Georgian Mathematical Journal*, 19, 2, 209-216.
- [6] Hungerford T.W., 1973. *Algebra*, Springer-Verlag, Newyork.
- [7] Kasch F., 1982. *Modules and Rings*, Munich, Germany: Ludwig-Maximilan.
- [8] Kasch F., Mares E.A., 1966. Eine Kennzeichnung semiperfekter Moduln, *Nagoya Math. J.* 27, 525-529
- [9] Lomp C., 1999. On semilocal modules and rings, *Communications in Algebra*, 27, 4, 1921-1935.
- [10] Mohamed S. H. and Müller B. J., 1990. *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. LNS 147 Cambridge Univ. Press, 126 p.
- [11] Nebiyev C., 2005. Amply weak supplemented modules, *Int. J. Comput. Cognition*, 3, 1, 88-90.
- [12] Sharpe D.W., Vamos P., 1972. *Injective Modules*, Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, The Great Britain.
- [13] T. Y. Lam. 1999. Lectures on Modules and Rings. Graduate texts in mathematics 189. Springer-Verlag.
- [14] Wisbauer R., 1991. *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Philadelphia.
- [15] Zöschinger H., 1974a. Komplementierte moduln über dedekindringen, *J. Algebra* 29, 42-56, 606p.
- [16] Zöschinger H., Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben, *Math. Scand.*, 35, 267–287, 1975. 1974c.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Nazlı Makbule POLAT

Doğum Yeri ve Tarihi: Şanlıurfa 31.05.1989

Adres: Mimar Sinan Mah. 158. Sokak Nas Apt. No.3 Kat.2 Daire.6

Atakum/SAMSUN

E-Posta: nazl.polat@yahoo.com

Lisans: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi 2007-2011

Yüksek Lisans: Ondokuz Mayıs Üniversitesi 2012-

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

