

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SELF-SİMİLAR DÖNEL YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alev KELLEÇİ

(121121117)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

HAZİRAN-2014

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SELF-SİMİLAR DÖNEL YÜZEYLER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Alev KELLEÇİ
(121121117)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30 Mayıs 2014

HAZİRAN-2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SELF-SİMİLAR DÖNEL YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alev KELLEÇİ

(121121117)

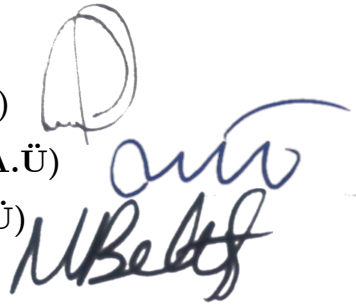
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30 Mayıs 2014

Tezin Savunulduğu Tarih: 18 Haziran 2014

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (A.Ü)

Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)



HAZİRAN-2014

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, engin bilgi ve birikimlerinden yararlandığım, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam, sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT' e teşekkürlerimi bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Alev KELLEÇİ

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa Numarası

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ.....	V
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ	1
2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. Frenet Çatısı ve Eğrilikler	3
2.2. $\mathbb{E}^n$, Öklid Uzayında Yüzeyler	4
2.3. Yarı-Riemann Manifoldları	6
3. $\mathbb{E}_1^3$, MINKOWSKI 3-UZAYI.....	13
3.1. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Yüzeyin Esas Formları	14
3.2. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Yüzeyin H ve K Eğrilikleri	18
3.3. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Dönel Yüzeyler	19
3.3.1. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Timelike Dönel Yüzeyler	23
3.3.2. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Spacelike Dönel Yüzeyler	36
4. $\mathbb{E}^3$, ÖKLİD 3-UZAYINDA SELF-SİMİLAR YÜZEYLER.....	50
4.1. $\mathbb{E}^3$ de, Monge Parametrizasyonu İle Verilen Yüzeyler.....	50
4.2. $\mathbb{E}^3$ de, Dönel Yüzeyler.....	53
5. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Self-Similar Timelike Dönel Yüzeyler ...	55
5.1. Spacelike dönme eksenli self-similar timelike dönel yüzeyler	55
5.2. Timelike dönme eksenli self-similar timelike dönel yüzeyler	56
5.3. Lightlike dönme eksenli self-similar timelike dönel yüzeyler	57
6. SONUÇ	58

KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	62

ÖZET

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SELF-SİMİLAR DÖNEL YÜZEYLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrıldı.

İkinci bölümde; temel tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde; $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında yüzeylerin genel özellikleri incelendi. Daha sonra, özel olarak dönel yüzeylerin genel özellikleri incelendi. İlk olarak, $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında timelike dönel yüzeyler incelendi. Ayrıca, $\mathbb{E}_1^3$ de verilen timelike minimal dönel yüzeylerin Lorentz konformal şartı; sırasıyla, spacelike, timelike ve lightlike dönme eksenleri için ayrı ayrı ifade edildi. Bu alt bölümde orijinal olarak; $\mathbb{E}_1^3$ de verilen timelike dönel yüzeylerin genel parametrizasyonları için ortalama eğrilikleri ve konum vektörlerinin normal bileşenleri hesaplandı. Ek olarak, timelike dönel yüzeyler için, [2] de verilen karakterizasyonları tamamladık. İkinci olarak da, $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında spacelike dönel yüzeyler incelendi. $\mathbb{E}_1^3$ de verilen spacelike maksimal dönel yüzeylerin konformal şartı; sırasıyla, spacelike, timelike ve lightlike dönme eksenleri için ayrı ayrı hesaplandı. Bu bölümde orijinal olarak; $\mathbb{E}_1^3$ de verilen spacelike dönel yüzeyler için, [3] de verilen karakterizasyonlar tamamlandı.

Dördüncü bölümde; $\mathbb{E}^3$, Öklid 3-uzayında self-similar yüzeyler verildi.

Son bölüm de ise; $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında timelike minimal dönel yüzeylerin self-similar şartı, sırasıyla, spacelike, timelike, lightlike dönme eksenleri için ayrı ayrı incelendi. Orijinal olarak bu yüzeyler için karakterizasyonlar ve bunlara ilişkin örnekler verildi.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-Uzayı, Minkowski 3-Uzayında Dönel Yüzeyler, Self-Similar Yüzeyler, Timelike ve Spacelike Yüzeyler.

SUMMARY

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SELF-SİMİLAR DÖNEL YÜZEYLER

This thesis contain five chapter.

In first chapter, we give place to entry.

In second chapter, basic definitions and concepts are given.

The third chapter is investigated general properties of surfaces in Minkowski 3-space. After,we examined general features of surfaces of revolution. Firstly, timelike surfaces in $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-space are researched. Additionally, whether these surfaces satisfy Lorentz conformal condition or are examined for theirs spacelike, timelike and lightlike axis,respectively. Originally, in this subchapter, mean curvatures and the normal component of theirs position vector.was calculated for general parametrizations of timelike surfaces of revolution in $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-space. Additionally, we completed characterization of timelike surfaces of revolution in $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-space given in [2]. Secondly, spacelike surfaces in $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-space are mentioned. In addition, whether these surfaces satisfy conformal condition or are examined for theirs spacelike, timelike and lightlike axis,respectively. Originally, in this subchapter, we completed characterization of spacelike surfaces of revolution in $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-space given in [3].

In the fourth chapter, we investigated self-similar surfaces in $\mathbb{E}^3$.

In last chapter, self-similar condition is inspected for timelike surfaces in $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-space of theirs spacelike, timelike and lightlike axis,respectively. And originally, we obtain some characterizations and give examples concerning these results.

Keywords: Minkowski 3-Space, Surfaces of Revolution in Minkowski 3-space , Self-Similar surfaces, Timelike and Spacelike Surfaces.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{E}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_\nu^n$	: Yarı-öklidyen uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	: Minkowski 3-uzay
Σ	: Yüzey
g	: Riemann metriği
Φ_*	: Türev dönüşümü
D	: Levi-Civita konneksiyonu
S	: Şekil operatörü
σ	: Parametrizasyon (Yama)
I, II	: $\mathbb{E}^3$ de birinci ve ikinci temel form
I_L, II_L	: $\mathbb{E}_1^3$ de birinci ve ikinci temel form
E, F, G ve e, f, g	: $\mathbb{E}^3$ de, sırasıyla, birinci ve ikinci temel form katsayıları
E_L, F_L, G_L ve e_L, f_L, g_L	: $\mathbb{E}_1^3$ de, sırasıyla, birinci ve ikinci temel form katsayıları
H, K	: Ortalama ve Gauss eğrilikleri

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. 1.dereceden katenoid	20
Şekil 3.2. 3.dereceden katenoid	20
Şekil 3.3. Küre	20
Şekil 3.4. Pseudo-küresi	20
Şekil 3.5. Eliptik paraboloid	20
Şekil 3.6. Tor yüzeyi	20
Şekil 3.7. $\gamma(u) = ((e^u + e^{-u}), u, 0)$ ve spacelike eksenli dönel yüzey	29
Şekil 3.8. $\gamma(u) = (u, 1 - \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), 0)$ ve spacelike eksenli dönel yüzey	30
Şekil 3.9. $\gamma(u) = (u, \cos u, 0)$ ve timelike eksenli dönel yüzey	32
Şekil 3.10. $\gamma(u) = (1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), u, 0)$ ve timelike eksenli dönel yüzey	33
Şekil 3.11. $\gamma(u) = (u - 2 \tanh(u), u, 0)$ ve lightlike eksenli dönel yüzey	35
Şekil 3.12. $\gamma(u) = (u, u - 2 \tan u, 0)$ ve lightlike eksenli dönel yüzey	36
Şekil 3.13. $\gamma(u) = (\cos u, u, 0)$ ve spacelike eksenli dönel yüzey	41
Şekil 3.14. $\gamma(u) = (u, 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), 0)$ ve spacelike eksenli dönel yüzey	42
Şekil 3.15. $\gamma(u) = (u, \sinh u, 0)$ ve timelike eksenli dönel yüzey	44
Şekil 3.16. $\gamma(u) = (1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), u, 0)$ ve timelike eksenli dönel yüzey	45
Şekil 3.17. $\gamma(u) = (u - 2 \tan u, u, 0)$ ve lightlike eksenli dönel yüzey	47
Şekil 3.18. $\gamma(u) = (u, u - 2 \tanh u, 0)$ ve lightlike eksenli dönel yüzey	49

1. GİRİŞ

Minkowski Uzayı, Alman matematikçi Hermann Minkowski tarafından, 1907 yılında ifade edilmiştir. Gerek matematik ve gerekse fizikte Minkowski uzayı, Einstein'ın izafiyet teorisini formüle etmek için en uygun yöntemdir. Minkowski uzayı Öklidyen uzaya kıyasla daha karmaşık ve daha zengin bir geometrik yapıya sahiptir. Örneğin, Minkowski 3-uzayında verilen dönel yüzeyler üç farklı dönme eksenine, sırasıyla, spacelike, timelike ve lightlike (null) eksenlerine sahiptir. Bu yüzden, Öklidyen uzaya kıyasla Minkowski uzayında dönme, üç farklı durum için gerçekleşmektedir. Ayrıca, Minkowski uzayında yüzeylerin normal vektörlerinin konumlarına göre de spacelike, timelike ve lightlike yüzeyler olarak isimlendirildiğini biliyoruz. Eğer yüzeyin normal vektörü spacelike (sırasıyla, timelike, lightlike) ise, ozaman yüzey timelike (sırasıyla, spacelike, lightlike) yüzey olarak adlandırılır. Yüzeyler teorisinde önemli özelliklere sahip olan dönel yüzeyler, Minkowski uzayında uzun yıllardır çalışılmakta olup bu alanda halen yeni çalışmalar yapılmaktadır. [1,2,3,10,15] çalışmalarında Minkowski 3-uzayında dönel yüzeyler için bazı sınıflandırmalar yapılmıştır.

Self-similar yüzeyler; $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ Öklidyen uzayda [6,7] ve $\mathbb{C}^n$ de [4] çalışılmış ve bu uzaylarda verilen bazı yüzeyler için karakterizasyonlar elde edilip örnekler verilmiştir. Asli eğrilik akışı (MCF), bir Riemann manifoldunun, n-boyutlu altmanifoldundaki uzayda bölge fonksiyonunun gradient akışıdır, açıkça bir altmanifoldun kendi ortalama eğriliğinin hareketidir, yani bir yer değiştirme işlemidir. Bu da altmanifoldun konum fonksiyonu için kısmi diferansiyel denklemlerin bir non-lineer parabolik sistemini meydana getirmektedir, [16,17,18,19]. Araştırmacıların genel olarak üzerinde çalıştıkları konu; MCF'nin bir özel çözümü olan self-similar çözümleri ile ilgilidir, [4].

Bu çalışmada; $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında yüzeylerin genel özellikleri verildi. Öncelikli olarak $\mathbb{E}_1^3$ de verilen bir timelike dönel yüzeyin ortalama eğriliği ve konum

vektörünün normal uzaya izdüşümü karakterize edildi. [2] de Lorentz konformal koşulunu sağlayan timelike dönel yüzeyler incelenmişti ve karakterizasyonlar verilmişti. Bu çalışmada bu karakterizasyonlar tamamlandı ve bunlara ilişkin örnekler verildi. Benzer adımlar, $\mathbb{E}_1^3$ de verilen bir spacelike dönel yüzeyler için de yapıldı. Son olarak Minkowski 3-uzayında verilen timelike minimal dönel yüzeylerin self-similar yüzey olma durumları incelenerek bunlara ilişkin karakterizasyon ve örnekler verildi. Ayrıca, bu çalışmanın 3. ve 5. Bölümlerde orijinal kısımlar bulunmaktadır. Bu çalışma boyunca nümerik çözümleri elde etmek için Maple14 kullanıldı, [20].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Frenet Çatısı ve Eğrilikleri

$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$ regüler parametrik bir eğri olsun. Bu taktirde $\forall t \in I$ için γ nın yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(r)}(t)$, ($r \leq n$) lineer bağımsız ve $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(r)}(t), \gamma^{(r+1)}(t)$ lineer bağımlı ise γ eğrisine r -ranklı Frenet eğrisi adı verilir. Bu durumda r -ranklı bir Frenet eğrisi $\mathbb{E}^n$ nin r -boyutlu alt uzayında yatacaktır. $\mathbb{E}^n$ nin r -boyutlu alt uzayını $\Phi_r(t)$ ile gösterelim.

Bu alt uzay, $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(r)}(t)$ vektörleri ile gerildiğinden $\Phi_r(t)$ ye γ eğrisinin r . nci oskülatör uzayı denir. Açık olarak $\Phi_1(t) \subset \Phi_2(t) \subset \dots \subset \Phi_r(t)$ dir. Eğer γ , r -ranklı bir Frenet eğrisi ise $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(r)}(t)$ vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulayarak $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \dots, V_r(t)$ ortonormal r -çatısı (Serret-Frenet Vektörleri) elde edilir, [8].

Teorem 2.1.1.

$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$ r -ranklı birim hızlı bir Frenet eğrisi olmak üzere γ nın ortonormal çatısı $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \dots, V_r(t)$ nin türevleri,

$$V_1'(t) = \kappa_1(t)V_2(t)$$

$$V_i'(t) = -\kappa_{i-1}(t)V_{i-1}(t) + \kappa_i(t)V_{i+1}(t) \quad (2.1)$$

$$V_r'(t) = -\kappa_{r-1}(t)V_{r-1}(t), \quad (2 \leq i \leq r-1)$$

dir.

Burada $\kappa_1, \dots, \kappa_{r-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları γ nın Frenet eğrilik fonksiyonlarıdır, [8].

Açıklama 2.1.1.

$V_1(t), V_2(t), V_3(t), \dots, V_r(t)$ vektörlerine Frenet r-çatısı ve (2.1) eşitliklerine de Frenet denklemleri adı verilir. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \dots \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & . & . & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & . & . \\ . & -\kappa_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & -\kappa_{r-1} \\ 0 & . & . & \kappa_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ V_r \end{bmatrix}.$$

2.2. $\mathbb{E}^n$, Öklid Uzayında Yüzeyler

Tanım.2.2.1. $U, \mathbb{E}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt cümlesi olmak üzere, $\sigma : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\sigma : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \sigma(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\sigma(U)$ cümlesine, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir basit yüzey denir. $\Sigma, \mathbb{E}^3$ uzayının bir alt cümlesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \sigma(U)$ ve $\sigma(U) \subset \Sigma$ olacak biçimde bir $\sigma(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa Σ cümlesine, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey denir, [8].

Tanım 2.2.2. Σ yüzeyi $\sigma : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$ parametrizasyonu ile verilsin. Σ nin $p \in \sigma(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, σ_u ve σ_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece Σ nin birinci ve ikinci temel formları, sırasıyla,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.2)$$

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

Burada, N birim normali olmak üzere, birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları, sırasıyla,

$$E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle, F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle, G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle, \quad (2.3)$$

ve

$$e = \langle \sigma_{uu}, N \rangle, f = \langle \sigma_{uv}, N \rangle, g = \langle \sigma_{vv}, N \rangle \quad (2.4)$$

şeklindedir, [11].

$\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin, ikinci temel formunun katsayıları, H.Anciaux tarafından;

$$\bar{e} = \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle, \bar{f} = \langle \sigma_{uv}, \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle, \bar{g} = \langle \sigma_{vv}, \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle \quad (2.5)$$

şeklinde alınarak yüzeyin H ortalama eğriliği,

$$2H = \frac{\bar{e}G + \bar{g}E - 2\bar{f}F}{(EG - F^2)^{3/2}} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlandı, [4].

Bir $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\overrightarrow{H} = HN$ şeklinde tanımlanır. (2.3) eşitliklerinden,

$$\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|^2 = EG - F^2$$

bulunur. Eğer, $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| \neq 0$ ise $\sigma(u, v)$ parametrizasyonu regülerdir denir, [8].

Bundan sonra, aksi söylenmedikçe $\sigma(u, v)$ parametrizasyonu regüler kabul edilecektir.

Önerme 2.2.1. Σ yüzeyi, $\sigma : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$ parametrizasyonu ile verilsin. (2.3) ve (2.4) eşitliklerinden, Σ yüzeyinin birinci ve ikinci temel formu, sırasıyla,

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \end{aligned}$$

olduğundan,

- i) $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$,
 - ii) $2H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$,
 - iii) asli eğrilikleri $H \pm \sqrt{H^2 - K}$
- dır, [13].

2.3. Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 2.3.1. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı, V üzerindeki simetrik bilineer form $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ -bilineer fonksiyonu olsun. V üzerinde tanımlı g simetrik bilineer formu;

i) $\forall v \in V$ ve bir $u \in V$ için $\langle u, v \rangle = 0$ şartı sadece $u = 0$ için sağlanıyorsa, nondejenere denir.

ii) $\forall v \in V$ ve bir $u \in V$ için $\langle u, v \rangle = 0$ şartı sadece $u \neq 0$ için sağlanıyorsa, dejenere denir.

V üzerinde tanımlı $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise $\langle, \rangle$ ye V üzerinde bir iç çarpım ve buradaki V vektör uzayına da bir iç çarpım uzayı denir, [8].

Tanım.2.3.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle, \rangle$ olsun. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için,

- i) $\langle u, u \rangle > 0$ [< 0] pozitif [negatif] tanımlı,
 - ii) $\langle u, u \rangle \geq 0$ [≤ 0] yarı pozitif [yarı negatif] tanımlı
- denir, [9].

Tanım 2.3.3. (İndirgenmiş metrik) $U \subset \mathbb{E}^3$ bir vektör altuzay, U üzerinde bir indirgenmiş metrik $\langle, \rangle|_U$;

$$\langle u, v \rangle|_U = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in U$$

şeklinde tanımlanır, [9].

Tanım 2.3.4. (Simetrik Bilineer Formun İndeksi) Bir V vektör uzayı üzerindeki g simetrik bilinear formunun v indeksi, $\langle, \rangle|_{(W \times W)}$ negatif tanımlı olacak şekilde verilen en büyük boyutlu $W \subset V$ alt uzayının boyutudur. $\langle, \rangle$ iç çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V iç çarpım uzayının indeksi üzerinde tanımlı $\langle, \rangle$, iç çarpım indeksi olarak tanımlanır, [8].

Tanım 2.3.5. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, bilinear, nondejenere ve sabit indeksli (0,2)-tipinden $\langle, \rangle$ tensör alanına bir metrik tensör denir, [8].

Tanım 2.3.6. $\mathbb{R}^n$, n -boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^n$ ve $v_p, w_p \in T_p\mathbb{E}^n$ olmak üzere

$$\langle v_p, w_p \rangle = - \sum_{i=1}^v v_i w_i + \sum_{i=v+1}^n v_i w_i$$

eşitliği ile verilen v -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{E}_v^n$ ile gösterilir.

Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla, v_i ve w_i ler, v_p ve w_p tanjant vektörlerinin bileşenidir, [8].

Tanım 2.3.7. $\mathbb{E}_v^n$ yarı-öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ için, $\mathbb{E}_1^n$ yarı-Öklidyen uzayına Minkowski (Lorentz) n -uzay denir, [8].

Tanım 2.3.8. Σ , düzgün ve sınırı $\partial\Sigma$ olan bağlantılı bir yüzey (2-boyutlu diferansiyellenebilir manifold) olsun. $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ diferansiyellenebilir dönüşümün, $d\phi_p : T_p\Sigma \rightarrow T_{\phi(p)}(\mathbb{E}^3)$ diferansiyel dönüşümü birebir ise ϕ dönüşümüne immersiyon denir. Ters Fonsiyon Teoremi gereğince, ϕ , $\phi(\Sigma)$ üzerinde lokal homeomorfizmdir. Eğer ϕ global homeomorfizmse, ϕ ye emmeding (gömülü) denir ve Σ de (ϕ ile) $\mathbb{E}_1^3$ de gömülüdür. Eğer $v_p, w_p \in T_p\Sigma$ için

$$\langle d\phi_p(v_p), d\phi_p(w_p) \rangle_{\phi(p)} = \langle v_p, w_p \rangle$$

ise ϕ dönüşümüne izometrik immersiyon denir, [9].

Tanım 2.3.9. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey Σ olsun. Eğer her $p \in \Sigma$ ve $v_p, w_p \in T_p\Sigma$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p = 0$$

önermesi sağlanıyorsa, Σ ye $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir nondejenere yüzey denir, [9].

Tanım 2.3.10. V bir Lorentz n -uzay olsun. $u \in V$ için,

- i) $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise u ya spacelike vektör,
- ii) $\langle u, u \rangle < 0$ ise u ya timelike vektör,
- iii) $\langle u, u \rangle = 0$ ve $u \neq 0$ ise u ya lightlike (null) vektör denir, [8].

Tanım 2.3.11. Π , $\mathbb{E}_1^2(u, v)$ de basit bağlantılı bir bölge ve $\sigma : \Pi \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ de $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir immersiyon olsun. Eğer her bir teğet düzlemi üzerinde Π üzerindeki indirgenmiş metrik Lorentz (sırasıyla, Riemann, dejenere) ise, σ immer-siyonuna timelike (sırasıyla, spacelike, lightlike) denir. Başka bir deyişle, Σ yüzeyinin

her bir noktasındaki N , lokal normal vektör alanı spacelike (sırasıyla, timelike, light-like) vektördür, [9].

Tanım.2.3.12. V yarı-Öklidyen uzay ve $\langle, \rangle_L$, yarı-Öklidyen metrik olmak üzere,

- i) $\Gamma_N = \{v \in (V - \{0\}) : \langle v, v \rangle_L = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V nin light-like (null) konisi,
- ii) $\Gamma_S = \{v \in V : \langle v, v \rangle_L \geq 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V nin spacelike konisi,
- iii) $\Gamma_T = \{v \in (V - \{0\}) : \langle v, v \rangle_L < 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine V nin time-like konisi denir, [9].

Tanım 2.3.13. V bir Lorentz uzayı ve W , V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda;

- i) $\langle, \rangle|_W$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike altuzay,
- ii) $\langle, \rangle|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike altuzay,
- iii) $\langle, \rangle|_W$ dejenere ise W ya lightlike altuzay denir, [8].

Tanım 2.3.14. M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir, [8].

Bundan sonraki kullanımlarda (M, g) yarı-Riemann manifoldunu, kısaca M ile göstereceğiz.

Tanım 2.3.15 (Yarı-Riemann Manifoldunun İndeksi) M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine, M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir, [8].

Tanım 2.3 16. M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\dim M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir Lorentz manifoldu denir. Bu tanıma göre bir M Lorentz manifoldu için,

$$g_p(v_p, w_p) = \sum_{i=2}^n v_i |pw_i|_p - v_1 |pw_1|_p, p \in M, v_p, w_p \in T_p M$$

dir, [8].

Tanım 2.3.17. M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset R \rightarrow M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere,

- i) $\langle T, T \rangle_L > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
- ii) $\langle T, T \rangle_L < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
- iii) $\langle T, T \rangle_L = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine lightlike eğri denir, [8].

Eğrinin bir özel hali olan doğruyu göz önüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü; spacelike ise spacelike doğru, timelike ise timelike doğru, lightlike ise lightlike doğru adını alır.

Tanım 2.3.18. M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\bar{M}$, M nin bir altmanifoldu olsun.

$j : \bar{M} \rightarrow M$ inclusion (içine) dönüşümü olmak üzere her $p \in \bar{M}$ için,

$$(j(g))(p) = g(j(p))$$

şeklinde tanımlı $j(g)$ dönüşümü $\bar{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\bar{M}$ ye M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir.

Bundan sonraki gösterimlerde $\bar{M}$ üzerindeki metrik tensör ile M üzerindeki metrik tensörü g ile göstereceğiz, [8].

Tanım 2.3.19. $\bar{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$D : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

indirgenmiş fonksiyonuna $\bar{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir. Burada $\chi(\bar{M})$ ile, $\bar{M}$ nin her bir p noktasında $Tp(M)$ de bir tanjant vektörü karşılık getiren, vektör alanlarının cümlesi gösterilmektedir, [8].

Teorem 2.3.1. $\bar{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olsun. Her $V, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$D_V W = \text{teg} D_V W$$

şeklinde tanımlı D fonksiyonu $\bar{M}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonudur, [8].

Tanım 2.3.20. $\bar{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$II : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})^\perp$$

şeklinde tanımlı $\chi(\bar{M})^\perp$ değerli, bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\bar{M}$ nin ikinci temel form tensörü (veya şekil tensörü) denir, [8].

Tanım 2.3.21. n -boyutlu bir M yarı-Riemann manifoldunun $(n-1)$ -boyutlu bir $\bar{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna M nin yarı-Riemann hiperyüzeyi denir, [8].

Tanım 2.3.22. M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her $V, W \in \chi(M)$ için,

$$g(S(V), W) = g(II(V, W), N)$$

şeklindeki (1,1)-tipinden tensör alanı S ye $\bar{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü denir.

Diğer bir ifadeyle, S şekil operatörü $\bar{M}$ nin her p noktasında,

$$S : \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

bir lineer operatördür, [8].

Teorem 2.3.2. M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve S de M nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V \in \chi(M)$ için,

$$S(V) = -\bar{D}_V N$$

dir. Ayrıca S şekil operatörü self-adjointtir. M nin bir yarı - Riemann hiperyüzeyi $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S olmak üzere, her $V, W \in \chi(M)$ için,

$$II(V, W) = \varepsilon g(S(V), W)N$$

dir.

Burada $\varepsilon = \langle N, N \rangle$ dir. Yarı-Riemann hiperyüzeyler için Gauss denklemi, her $V, W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$D_V W = \bar{D}_V W + \varepsilon g(S(V), W)N$$

şeklinde verilir, [8].

3. $\mathbb{E}_1^3$, MINKOWSKI 3-UZAYI

Tanım 3.1.1 n -boyutlu, v -indeksli $\mathbb{E}_v^n$ yarı-Öklidyen uzayının boyutu 3 ve indeksi 1 olarak alınır, elde edilen $\mathbb{E}_1^3$ uzayına Minkowski 3-uzayı denir, [8].

Tanım 3.1.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-Uzayında iki vektör $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere bu iki vektörün skaler çarpımı,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_L &: \mathbb{E}_1^3 \times \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\vec{u} = \vec{v}$ ise,

$$\|\vec{v}\|_L = (\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği ile tanımlı $\|\vec{v}\|_L$ reel sayısına, $\vec{v}$ vektörünün Lorentz anlamında normu denir. Normu 1 olan vektöre de Lorentz anlamında birim vektör denir, [8].

Tanım 3.1.3. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında iki vektör u ve v olsun. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere,

$$(u_3v_2 - u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (3.2)$$

vektörüne u ve v nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $u \times v$ veya $u \wedge v$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere,

$$u \wedge v = -\det \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

ya da

$$u \wedge v = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

olarak hesaplanabilir.

Burada $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yönü olarak alınmıştır, [1,11].

Teorem 3.1.1. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında iki vektör u ve v olsun.

- i) u ve v spacelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.
- ii) u spacelike ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- iii) u spacelike ve v lightlike vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \wedge v$ lightlike vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- iv) u ve v lightlike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- v) u timelike ve v lightlike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- vi) u ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür, [8].

3.1. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-Uzayında Yüzeylerin Esas Formları

M yarı-Riemann manifoldu olarak 3-boyutlu $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayını ve $\bar{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyi olarak da (U, σ) parametrizasyonu ile verilen,

$$\begin{aligned} \sigma & : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ (u, v) & \rightarrow \sigma(u, v) = (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v)) \end{aligned}$$

$\sigma(U)$ yüzeyini göz önüne alalım. $\{\sigma_*(\frac{\partial}{\partial u}), \sigma_*(\frac{\partial}{\partial v})\}$ lineer bağımsız olmak üzere yüzeyin vektör alanları uzayının bir bazı $\{\sigma_*(\frac{\partial}{\partial u}), \sigma_*(\frac{\partial}{\partial v})\}$ olur. Kısalığın hatırı için, sırasıyla, $\sigma_*(\frac{\partial}{\partial u})$ ve $\sigma_*(\frac{\partial}{\partial v})$ yerine, σ_u ve σ_v kullanacağız. $\{\sigma_u, \sigma_v\}$, cümlesi, yüzeyin bir bazı olarak alınabilir. Dolayısıyla yüzeyin birim normali ve σ nin normal bileşeni, sırasıyla,

$$N = \frac{\sigma_u \wedge_L \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge_L \sigma_v\|_L} \quad (3.4)$$

ve

$$\sigma^\perp = \langle \sigma, N \rangle_L \quad (3.5)$$

şeklinde bellidir.

Yüzeyin I . temel formunu, yani, metriğini hesaplamadan önce bazı eşitlikler verilecektir. (2.3) eşitliği Tanım 3.1.2 de göz önüne alınarak, bu uzaya göre yeniden yazılırsa,

$$E_L = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle_L, F_L = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_L, G_L = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle_L \quad (3.6)$$

olur. (3.4) den,

$$\langle N, N \rangle_L = \left\langle \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}, \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} \right\rangle_L \quad (3.7)$$

dir ve

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|_L^2 &= \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle_L \\ &= \langle u, v \rangle_L^2 - \langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı Lagrange özdeşliği (3.7) eşitliğinde göz önüne alınırsa,

$$\langle N, N \rangle_L = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_L^2 - \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle_L \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle_L \quad (3.8)$$

şeklinde bulunur.

Burada (3.6) eşitlikleri, (3.8) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\langle N, N \rangle_L = F_L^2 - E_L G_L \quad (3.9)$$

elde edilir.

Yüzeyin I . temel formunu hesaplamak için, $\sigma(u, v)$ yüzeyinin tam diferensiyeli alınır,

$$d\sigma = \sigma_u du + \sigma_v dv \quad (3.10)$$

olur. Bu denkleme tekrar aynı işlem uygulanırsa,

$$d^2\sigma = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle_L du^2 + 2 \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_L dudv + \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle_L dv^2 \quad (3.11)$$

elde edilir.

(3.6) eşitlikleri, (3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$d^2\sigma = E_L du^2 + 2F_L dudv + G_L dv^2$$

olur. Bu eşitlik (2.2) eşitliği ile karşılaştırılırsa,

$$I_L = E_L du^2 + 2F_L dudv + G_L dv^2 \quad (3.12)$$

elde edilir ki bu da $\sigma(U)$ yüzeyinin birinci temel formudur, [12].

Şimdi $\sigma(U)$ yüzeyinin ikinci esas formunu hesaplayalım:

(3.4) eşitliği, sırasıyla, σ_u ve σ_v ile ayrı ayrı iç çarpılırsa,

$$\langle \sigma_u, N \rangle_L = 0, \langle \sigma_v, N \rangle_L = 0 \quad (3.13)$$

olur. Bu eşitliklerin u ve v ye göre kısmi türevleri alınır,

$$\langle \sigma_{uu}, N \rangle_L + \langle \sigma_u, N_u \rangle_L = 0, \quad (3.14)$$

$$\langle \sigma_{uv}, N \rangle_L + \langle \sigma_u, N_v \rangle_L = 0,$$

$$\langle \sigma_{vu}, N \rangle_L + \langle \sigma_v, N_u \rangle_L = 0,$$

$$\langle \sigma_{vv}, N \rangle_L + \langle \sigma_v, N_v \rangle_L = 0$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.10) eşitliği, N ile iç çarpıma tabi tutulup ve (3.13) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\langle d\sigma, N \rangle_L = 0 \quad (3.15)$$

olur. (3.15) eşitliğinde diferensiyel alınırsa,

$$\langle d^2\sigma, N \rangle_L + \langle d\sigma, dN \rangle_L = 0 \quad (3.16)$$

ya da

$$\langle d^2\sigma, N \rangle_L = -\langle d\sigma, dN \rangle_L$$

yazılır.

Burada (3.10) ve (3.14) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\langle d^2\sigma, N \rangle_L = \langle \sigma_{uu}, N \rangle_L du^2 + 2\langle \sigma_u \sigma_v, N \rangle_L dudv + \langle \sigma_{vv}, N \rangle_L dv^2 \quad (3.17)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$ olduğu (3.14) eşitliklerinde göz önüne alınır ve (3.14) deki 2. ve 3. eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\langle \sigma_{uv}, N \rangle_L = -\frac{1}{2}(\langle \sigma_u, N_v \rangle_L + \langle \sigma_v, N_u \rangle_L) \quad (3.18)$$

olur.

Ayrıca (3.18), (3.14) de göz önüne alınır ve (3.14) yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{uu}, N \rangle_L &= -\langle \sigma_u, N_u \rangle_L, \\ \langle \sigma_{uv}, N \rangle_L &= -\frac{1}{2}(\langle \sigma_u, N_v \rangle_L + \langle \sigma_v, N_u \rangle_L) \\ \langle \sigma_{vv}, N \rangle_L &= -\langle \sigma_v, N_v \rangle_L\end{aligned}\tag{3.19}$$

bulunur. (2.4) eşitlikleri Tanım 3.1.2 de göz önüne alınarak, $\mathbb{E}_1^3$ uzayına göre yeniden yazılırsa,

$$e_L = \langle \sigma_{uu}, N \rangle, f_L = \langle \sigma_{uv}, N \rangle, g_L = \langle \sigma_{vv}, N \rangle$$

olur.

(3.19) eşitlikleri, (3.17) eşitliğinde yerine konulursa,

$$\langle d^2\sigma, N \rangle_L = e_L du^2 + 2f_L dudv + g_L dv^2\tag{3.20}$$

bulunur. Bu eşitlik (2.2) eşitliği ile karşılaştırılırsa, $\sigma(U) = \sigma(u, v)$ yüzeyinin ikinci esas formu,

$$II_L = e_L du^2 + 2f_L dudv + g_L dv^2\tag{3.21}$$

şeklinde elde edilir, [1,21].

3.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-Uzayında Yüzeylerin H ve K Eğrilikleri

Tanım 3.2.1. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey Σ ve Σ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \Sigma$ için,

$$K(p) = \varepsilon \det S_p = \varepsilon \frac{e_L g_L - f_L^2}{E_L G_L - F_L^2}\tag{3.22}$$

ifadesine, Σ yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği ve $K : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da Σ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir.

Burada, $\varepsilon = \langle N, N \rangle_L = \pm 1$ ile belirlidir. N , Σ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır, [8,9].

Tanım 3.2.2. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey Σ ve Σ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \Sigma$ için,

$$H(p) = \frac{1}{2} \varepsilon i z S_p = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{e_L G_L - 2f_L F_L + g_L E_L}{E_L G_L - F_L^2} \quad (3.23)$$

ifadesine, Σ yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriligi ve $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Σ yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir.

Burada, $\varepsilon = \langle N, N \rangle_L = \pm 1$ ile belirlidir. N , Σ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır, [8,9].

Önerme.3.2.1. İkinci temel form katsayıları (2.5) eşitliğindeki gibi alınırsa, yüzeyin gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{\bar{e}_L \bar{g}_L - \bar{f}_L^2}{(\varepsilon(E_L G_L - F_L^2))^{3/2}}, \quad (3.24)$$

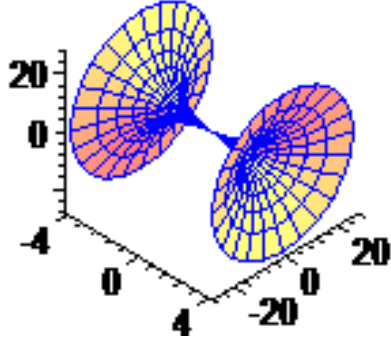
$$H = \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_L G_L - 2\bar{f}_L F_L + \bar{g}_L E_L}{(\varepsilon(E_L G_L - F_L^2))^{3/2}} \quad (3.25)$$

şeklinde olur, [9].

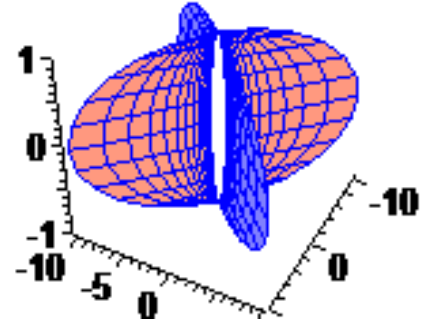
3.3. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Dönel Yüzeyler

Tanım 3.3.1. (Dönel yüzey) $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayının bir Ω düzleminde, $\gamma : I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ profil (üreteç) eğrisi verilsin ve l , γ ile kesişmeyen bu düzlemde bir doğru olsun. l doğrusu sabit kalmak üzere, γ eğrisinin l eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşturulan nondejenere yüzeye $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir dönel yüzey denir, [1].

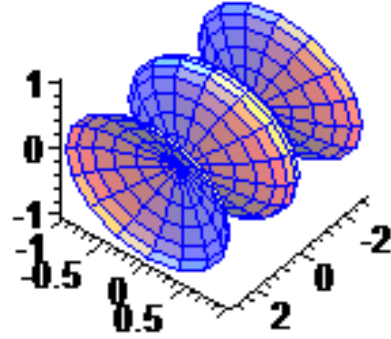
$\mathbb{E}_1^3$ de bazı dönel yüzey örnekleri aağıdaki gibidir:



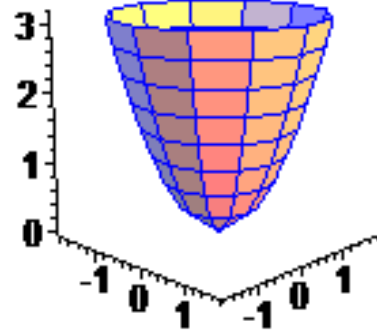
Seki 3.1. 1.dereceden katenoid



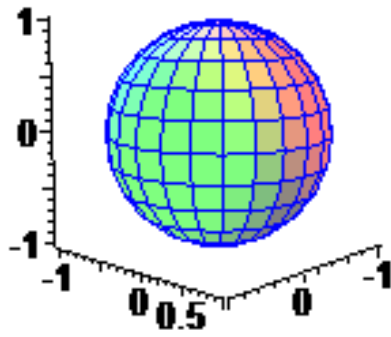
Seki 3.4. Pseudo-küresi



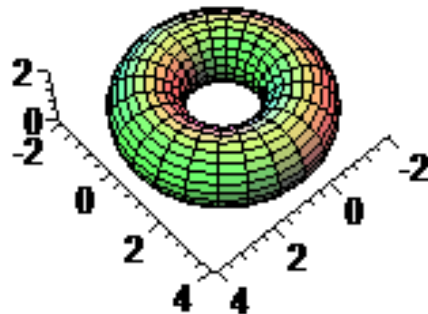
Seki 3.2. 3. dereceden katenoid



Seki 3.5. Eliptik paraboloid



Seki 3.3. Küre



Seki 3.6. Tor yüzeyi

$\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayındaki bir dönel yüzeyin l doğrultman doğrusu için;

- 1) Eğer l spacelike ise, x_2 -eksenine (veya x_1 -eksenine),
- 2) Eğer l timelike ise, x_0 -eksenine döndürür.
- 3) Eğer l lightlike ise, $(1, 1, 0)$ vektörüyle gerilen bir doğruya dönüştür.

Böylece, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki bir dönel yüzey için, l doğrultman doğrusunun spacelike, timelike veya lightlike olması gibi üç farklı durumu söz konusudur[2]:

Durum1. l doğrultman doğrusu spacelike olsun:

Kabul edelim ki γ profil eğrisi, x_1x_2 -düzleminde veya x_0x_2 -düzleminde olsun. O zaman γ eğrisi; $\gamma(u) = (0, f(u), g(u))$ veya $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ olarak temsil edilebilir. Buradaki f ve g fonksiyonları, $I = (a, b)$ açık aralığındaki düzgün fonksiyonlardır.

Diğer taraftan, $v \in \mathbb{R}$ için, $(0, 0, 1)$ vektörünü tespit eden Lorentz grubunun bir alt grubu,

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilsin. Böylece M yüzeyi;

$$\sigma(u, v) = (f(u) \sinh v, f(u) \cosh v, g(u)), f(u) > 0 \quad (3.26)$$

ya da

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cosh v, f(u) \sinh v, g(u)), f(u) > 0 \quad (3.27)$$

ile parametrize edilebilir, [1].

Durum2. l doğrultman doğrusu timelike olsun:

Genelliği bozmaksızın γ profil eğrisini, x_0x_1 -düzleminde kabul edebiliriz ve böylece, $I = (a, b)$ açık aralığındaki bazı pozitif $f = f(u)$ fonksiyonları için, γ eğrisi; $\gamma(u) = (g(u), f(u), 0)$ olarak temsil edilebilir. $v \in \mathbb{R}$ için, $(1, 0, 0)$ vektörünü tespit eden Lorentz grubunun bir alt grubu için;

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{bmatrix}$$

olarak verilirse, $v \in \mathbb{R}$ için, γ eğrisinin Ox_0 -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşturulan M dönel yüzeyi;

$$x(u, v) = (g(u), f(u) \cos v, f(u) \sin v), f(u) > 0 \quad (3.28)$$

ile parametrize edilebilir, [1].

Durum3. l doğrultman doğrusu lightlike olsun:

Bu durumda da, kabul edelim ki, l , $(1, 1, 0)$ vektörüyle gerilen bir doğru ve γ da x_0x_1 -düzleminde $\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$ formunda bir eğri olsun. Buradaki $f = f(u)$ pozitif bir fonksiyon ve g fonksiyonu da $\forall u \in I$ için $p(u) = f(u) - g(u) \neq 0$ eşitliğini sağlayan ve $I = (a, b)$ açık aralığındaki düzgün fonksiyonlardır. $v \in \mathbb{R}$ için, $(1, 1, 0)$ vektörünü tespit eden Lorentz grubunun bir alt grubu için;

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilirse, $v \in \mathbb{R}$ için M dönel yüzeyi;

$$x(u, v) = (f(u) + \frac{v^2}{2}p(u), g(u) + \frac{v^2}{2}p(u), p(u)v, f(u) > 0 \quad (3.29)$$

ile parametrize edilebilir. Burada $p(u) = -2u$ ve, $k(u) = f(u) + u$ alınırsa, γ profil eğrisinin tanımındaki f ve g fonksiyonları $f(u) = k(u) - u$ ve $g(u) = k(u) + u$ halini alır. Böylece (3.29) parametrizasyonu;

$$x(u, v) = (k(u) - u - v^2u, k(u) + u - v^2u, -2uv, f(u) > 0 \quad (3.30)$$

şekline dönüştür, [1].

3.3.1. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Timelike Dönel Yüzeyler

3-boyutlu Minkowski uzayında dönme eksenleri, sırasıyla, spacelike, timelike ve lightlike olan doğruları invaryant bırakan, semi-ortogonal dönme matrislerinin R_1, R_2, R_3 olduğu bir önceki bölümde verildi. Bundan sonraki işlemler bu matrisler kullanılarak yapılacaktır. Burada $X = \{R_1, R_2, R_3\}$ matrisleri için,

- i) $X.l = l$
 - ii) $X^t \zeta X = \zeta, \zeta = \text{diag}(-1, 1, 1)$
 - iii) $\det X = +1$
- özellikleri vardır.

3-boyutlu Minkowski uzayında, $u \in I, u \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı f, g ve h fonksiyonları C^k ($k \in \mathbb{N}$) sınıfından olsun. Eğer $\gamma(u) = (f(u), g(u), h(u))$ üreteç eğrisi timelike bir eğri ise bu eğri için

$$\langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle_L < 0$$

olur. Böylece elde edilen dönel yüzeylerin en genel parametrik gösterimleri,

$$R(u, v) = X(v) \cdot \gamma(u)$$

şeklindedir, [12].

Tanım 3.3.2. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey Σ olsun. Σ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise Σ ye $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir timelike yüzey denir, [2,9].

Teorem 3.3.1. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında (U, σ) parametrizasyonu ile verilen,

$$\begin{aligned} \sigma & : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ (u, v) & \rightarrow \sigma(u, v) = (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v)) \end{aligned}$$

$\sigma(U)$ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı olmasıdır, yani

$$\langle N, N \rangle_L > 0.$$

Burada N , Σ yüzeyinin birim normalidir, [9].

Tanım.3.3.3. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir timelike yüzey Σ olsun. Eğer, Σ yüzeyinin ortalama eğriliği $H = 0$ ise, Σ yüzeyine minimal yüzey denir, [2,8].

Tanım 3.3.4. $\eta : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon, Π üzerindeki lokal koordinat sistemi (u, v) ve indirgenmiş metrik I olmak üzere, σ immersiyonu

$$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_L = 0 \text{ ve } -\|\sigma_u\|_L = \|\sigma_v\|_L = e^{\eta/2} \quad (3.31)$$

koşullarını sağlıyorsa, $\sigma(u, v) : \Pi \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ immersiyonuna Lorentz konformal denir. Lorentz konformal timelike yüzeylere Lorentz yüzeyler denir, [2].

Örnek.3.3.1. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında,

$$\begin{aligned}\sigma &: \Pi \rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ (u, v) &\rightarrow \sigma(u, v) = (u, \sin u \cos v, \sin u \sin v)\end{aligned}$$

bir timelike immersiyon olsun. σ nin Lorentz konformal olduğunu gösterelim. Bunun için, σ nin kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\sigma_u &= (1, \cos u \cos v, \cos u \sin v) \\ \sigma_v &= (0, -\sin u \sin v, \cos u \cos v)\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_L = 0 \text{ ve } \|\sigma_u\|_L = \|\sigma_v\|_L$$

olur. Dolayısıyla $\sigma(u, v)$, Lorentz konformaldir.

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında Σ bir timelike yüzey olsun. Şimdi, (3.26)-(3.30) ile verilen σ parametrizasyonları için H ortalama eğriliklerini ve $\sigma^\perp$ ifadelerini hesaplayalım:

Durum1. Σ yüzeyi (3.26) parametrizasyonu ile verilsin. Σ yüzeyinin I . ve II . temel form katsayıları, sırasıyla,

$$E_L = (f')^2 + (g')^2, F_L = 0, G_L = -f^2$$

ve

$$e_L = \frac{g'f'' - f'g''}{((f')^2 + (g')^2)^{1/2}}, f_L = 0, g_L = \frac{fg'}{((f')^2 + (g')^2)^{1/2}} \quad (3.32)$$

şeklindedir. Dolayısıyla, son ifadeler (3.25) ve (3.5) eşitliklerinde göz önüne alınırsa,

$$H = -\frac{1}{2} \frac{f(g'f'' - f'g'') - g'((f')^2 + (g')^2)}{f((f')^2 + (g')^2)^{3/2}}$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{((f')^2 + (g')^2)^{1/2}} (fg' - gf')$$

elde edilir.

Benzer şekilde, diğer yüzeyler için de aynı işlemler uygulanırsa, yüzeylerin ortalama eğrilikleri ve σ parametrizasyonlarının normal bileşeni bulunabilir. Böylece, aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur:

Teorem 3.3.2. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında Σ , H ortalama eğrilikli bir timelike yüzey ve $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir immersiyon olsun. O zaman, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(a) Σ yüzeyi (3.26) parametrizasyonu ile verilsin. O zaman $f(u)$ ve $g(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonları,

$$H = -\frac{1}{2} \frac{f(g'f'' - f'g'') - g'((f')^2 + (g')^2)}{f((f')^2 + (g')^2)^{3/2}} \quad (3.33)$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{((f')^2 + (g')^2)^{1/2}} (fg' - gf')$$

diferansiyel denklemlerini sağlar. Eğer, Σ yüzeyi (3.27) ile verilmiş ise;

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{f(-g'f'' + f'g'') - g'((g')^2 - (f')^2)}{f((f')^2 - (g')^2)^{3/2}} \right) \quad (3.34)$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{((f')^2 - (g')^2)^{1/2}}(-f g' + g f').$$

Burada $\frac{df(u)}{du}$ ve $\frac{dg(u)}{du}$ fonksiyonları, sırasıyla, f' ve g' şeklinde gösterilmektedir.

(b) Σ yüzeyi (3.28) parametrizasyonu ile verilsin. O zaman $f(u)$ ve $g(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonları,

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{f(-g'f'' + f'g'') + g'((f')^2 - (g')^2)}{f((g')^2 - (f')^2)^{3/2}} \right) \quad (3.35)$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{((g')^2 - (f')^2)^{1/2}}(-f g' + g f')$$

diferansiyel denklemlerini sağlar.

(c) Σ yüzeyi (3.29) parametrizasyonu ile verilsin. O zaman, $p(u) = f(u) - g(u) \neq 0$ diferansiyel fonksiyonu,

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{(g - f)(g'f'' - f'g'') - (f' - g')((f')^2 - (g')^2)}{(f - g)((g')^2 - (f')^2)^{3/2}} \right) \quad (3.36)$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{((g')^2 - (f')^2)^{1/2}}(g'f - f'g)$$

diferansiyel denklemlerini sağlar. Eğer Σ , (3.30) parametrizasyonu ile verilmiş ise o zaman $k(u)$,

$$H = -\frac{1}{8} \frac{k'' + 2k'}{k' \sqrt{u^2 |k'|}} \quad (3.37)$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{u^2 k' - k}{\sqrt{u^2 |k'|}}$$

diferansiyel denklemleri sağlar. Burada k' ile $\frac{dk}{du}$ ifade edilmektedir.

$\sigma : \Pi \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ parametrizasyonu ile verilen Lorentz yüzeyinin ortalama eğriliği $H = 0$ olduğunda yüzey minimaldir. Şimdi, yukarıda verilen diferansiyel denklemlerin $H = 0$ için, özel çözümlerini hesaplayalım:

a) Σ yüzeyi (3.26) parametrizasyonu ile verilsin:

ξ_2 eksenli timelike dönel yüzeyler için (3.33) eşitliğinde verilen ortalama eğrilik formülünde $H = 0$ alınır,

$$\frac{1}{2} \frac{f(-g'f'' + f'g'') - g'(-(f')^2 + (g')^2)}{f((g')^2 - (f')^2)^{3/2}} = 0 \quad (3.38)$$

bulunur. (3.6) eşitliklerinden, E_L, F_L, G_L katsayıları,

$$E_L = -(f')^2 + (g')^2, F_L = 0, G_L = f^2$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan, (3.31) deki Lorentz konformal eşitliklerinden,

$$-(f')^2 + (g')^2 = f^2$$

bulunur. Böylece (3.38) denklemi,

$$g''f' - f''g' - g'f = 0 \quad (3.39)$$

şeklinde elde edilir, [2].

(3.39) denkleminde $a, b \in \mathbb{R}$ için, $g(u) = au + b$ alınır, denklem harmonik osilator (salınım) denklem haline gelir. Yani,

$$f'' - f = 0$$

olur. Bu denklem çözülürse,

$$f(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u}.$$

elde edilir. Böylece (3.26) parametrizasyonu

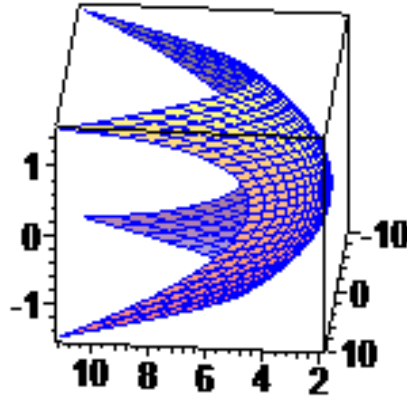
$$\sigma(u, v) = ((c_1 e^u + c_2 e^{-u}) \cosh v, (c_1 e^u + c_2 e^{-u}) \sinh v, au + b). \quad (3.40)$$

şeklinde yazılır, [2].

Genelliği bozmayacağı için, (3.40) parametrizasyonunda $c_1 = c_2 = a = 1, b = 0$ alınabilir. O zaman (3.40) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = ((e^u + e^{-u}) \cosh v, (e^u + e^{-u}) \sinh v, u) \quad (3.41)$$

şeklinde elde edilir. (3.41) in grafiği Şekil 3.7 deki gibidir:



Sekil 3.7 $\gamma(u) = ((e^u + e^{-u}), 0, u)$ ve spacelike eksenli dñnel yüzey

(3.39) denkleminde $a, b \in \mathbb{R}$ için, $f(u) = au + b$ alırsa,

$$g'' - g'(u + d) = 0, d \in \mathbb{R}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme dñtüşür. Elde edilen diferansiyel denklemin çözüümü;

$$g(u) = 1 - \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), I^2 = -1$$

dır. Böylece, (3.26) ile verilen ξ_2 eksenli dönel yüzey

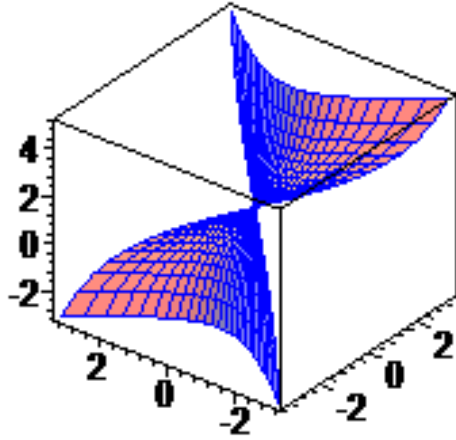
$$\sigma(u, v) = ((au + b) \cosh v, (au + b) \sinh v, 1 - \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI)) \quad (3.42)$$

şeklinde yeniden parametrize edilir.

Genelliği bozmayacağı için, (3.42) parametrizasyonunda $c_1 = c_2 = a = 1, b = 0$ alınabilir. Dolayısıyla (3.42) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, 1 - \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI)) \quad (3.43)$$

şeklinde bulunur. (3.43) in grafiği Şekil 3.8 deki gibidir:



Sekil 3.8 $\gamma(u) = (u, 0, 1 - \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI))$ ve spacelike eksenli dönel yüzey

b) Σ yüzeyi (3.28) parametrizasyonu ile verilsin:

ξ_0 eksenli timelike dönel yüzeyler için (3.35) eşitliğinde verilen ortalama eğrilik formülünde $H = 0$ alınır,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f(g''f' - f''g') + g'((f')^2 - (g')^2)}{f((g')^2 - (f')^2)^{3/2}} \right) = 0. \quad (3.44)$$

elde edilir. (3.6) eşitliklerinden, E_L, F_L, G_L katsayıları,

$$E_L = (f')^2 - (g')^2, F_L = 0, G_L = f^2.$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan, (3.31) deki Lorentz konformal eşitliklerinden,

$$(f')^2 - (g')^2 = f^2.$$

olur. Böylece (3.44) denklemi,

$$g''f' - f''g' + g'f = 0. \quad (3.45)$$

şeklinde bulunur.

(3.45) denkleminde $a, b \in \mathbb{R}$ için, $g(u) = au + b$ alınırsa, denklem harmonik osilator denklem haline gelir. Yani,

$$f'' + f = 0$$

olup, çözümü;

$$f(u) = c_1 \cos u + c_2 \sin u.$$

dır. Dolayısıyla (3.28) ile verilen dönel yüzey,

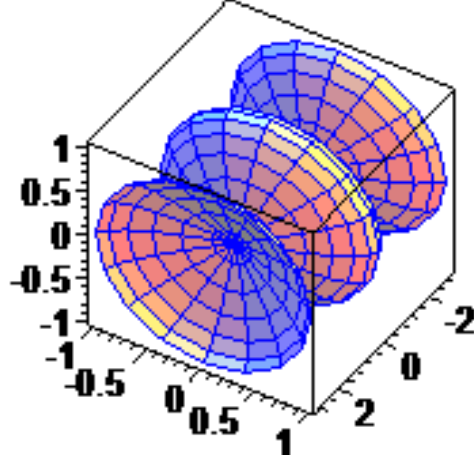
$$\sigma(u, v) = (au + b, (c_1 \cos u + c_2 \sin u) \cos v, (c_1 \cos u + c_2 \sin u) \sin v). \quad (3.46)$$

şeklinde yeniden yazılabilir, [2].

Genelliği bozmayacağı için, (3.46) parametrizasyonunda $c_1 = a = 1, c_2 = b = 0$ alınabilir. O zaman (3.46) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (u, \cos u \cos v, \cos u \sin v) \quad (3.47)$$

olur. (3.47) parametrizasyonuna sahip dönel yüzeyin grafiği Şekil 3.9 deki gibidir:



Şekil 3.9 $\gamma(u) = (u, \cos u, 0)$ ve timelike eksenli dönel yüzey

(3.45) denkleminde $a, b \in \mathbb{R}$ için, $f = f(u)$ fonksiyonu lineer olsun. Buna göre, (3.45) denklemi değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme dönüştür, yani;

$$g'' + g'(u + d) = 0, d \in \mathbb{R}$$

olur. Elde edilen bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$g(u) = 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), I^2 = -1$$

dır. Böylece, (3.28) ile verilen ξ_2 eksenli dönel yüzey;

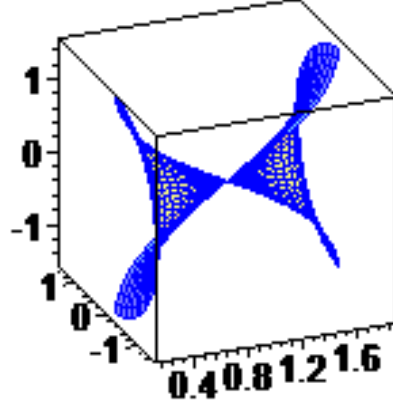
$$\sigma(u, v) = (1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), (au + b) \cos v, (au + b) \sin v) \quad (3.48)$$

şeklinde yeniden parametrize edilir.

Genelliği bozmayacağı için, (3.48) parametrizasyonunda $a = 1, b = 0$ alınabilir. O zaman (3.48) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), u \cos v, u \sin v) \quad (3.49)$$

şeklinde bulunur. (3.49) in grafiği Şekil 3.10 deki gibidir:



Şekil 3.10 $\gamma(u) = (1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), u, 0)$ ve timelike eksenli dönel yüzey

c) Σ yüzeyi (3.29) parametrizasyonu ile verilsin:

$\xi_0 + \xi_1$ eksenli timelike dönel yüzeyler için (3.36) eşitliğinde verilen ortalama eğrilik formülünde $H = 0$ alınırsa,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(g-f)(g'f'' - f'g'') - (f'-g')((f')^2 - (g')^2)}{(g-f)((g')^2 - (f')^2)^{3/2}} \right) = 0 \quad (3.50)$$

yazılır. (3.6) eşitliklerinden, E_L, F_L, G_L katsayıları,

$$E_L = (g')^2 - (f')^2, F_L = 0, G_L = (f - g)^2$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan, (3.31) deki Lorentz konformal eşitliklerinden,

$$(g')^2 - (f')^2 = (f - g)^2$$

bulunur. Böylece (3.50) denklemi,

$$f''g' - g''f' + (g' - f')(f - g) = 0 \quad (3.51)$$

olur. Burada, $a, b \in \mathbb{R}$ için, $g(u) = au + b$ alınırsa, (3.51) denklemi harmonik osilator denklem haline gelir, yani;

$$f'' + (f' - 1)(u - f) = 0$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin çözümü;

$$f(u) = u + c_1 \tanh\left(\frac{c_1}{2}(-u + c_2)\right)$$

dır. Böylece (3.29) parametrizasyonu,

$$\begin{aligned} \sigma_0(u, v) &= u + c_1 \tanh(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right) \left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}u, \\ \sigma_1(u, v) &= u \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) + u + c_1 \tanh(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right), \\ \sigma_2(u, v) &= (c_1 \tanh(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right))v \end{aligned}$$

olmak üzere

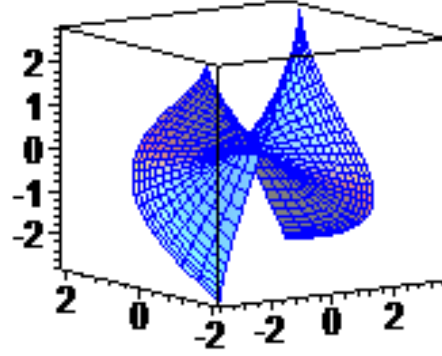
$$\sigma(u, v) = (\sigma_0(u, v), \sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v)) \quad (3.52)$$

şeklinde bulunur, [2].

Genelliği bozmayacağı için, (3.52) parametrizasyonunda $c_1 = 2, a = 1$, ve $c_2 = b = 0$ alınabilir. O zaman (3.52) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = \left(u + \left(\frac{v^2}{2} - 1\right)(-2 \tanh(u)), \frac{v^2}{2}(u - 1) + \frac{v^2}{2}(u - 2 \tanh(u)), -2 \tanh(u)v\right). \quad (3.53)$$

elde edilir. (3.53) in grafiği Şekil 3.11 deki gibidir:



Şekil 3.11 $\gamma(u) = (u - 2 \tanh(u), u, 0)$ ve lightlike eksenli dönel yüzey

Benzer işlemler $f = f(u)$ lineer fonksiyonu için uygulanırsa, (3.51) denklemi,

$$g'' + (g' - 1)(g - u) = 0$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$g(u) = u + c_1 \tan\left(\frac{c_1}{2}(-u + c_2)\right)$$

dır. Böylece (3.29) parametrizasyonu ile verilen $\xi_0 + \xi_1$ dönme eksenli dönel yüzey;

$$\begin{aligned}\sigma_0(u, v) &= u + c_1 \tan(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right) \left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}u, \\ \sigma_1(u, v) &= u \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) + u + c_1 \tan(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right), \\ \sigma_2(u, v) &= (c_1 \tan(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right))v.\end{aligned}$$

olmak üzere,

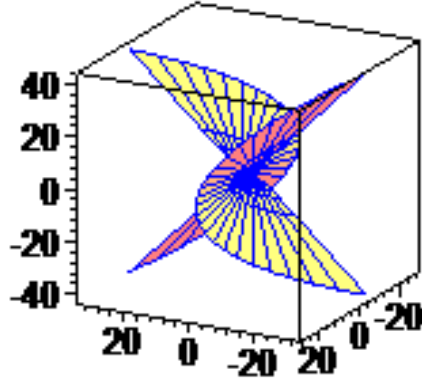
$$\sigma(u, v) = (\sigma_0(u, v), \sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v)) \quad (3.54)$$

şeklinde yeniden parametrize edilir. .

Genelliği bozmayacağı için, (3.54) parametrizasyonunda $c_1 = 2, a = 1$, ve $c_2 = b = 0$ alınabilir. Böylece (3.54) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (u + (\frac{v^2}{2} - 1)(-2 \tan(u)), \frac{v^2}{2}(u - 1) + \frac{v^2}{2}(u - 2 \tan(u)), -2 \tan(u)v). \quad (3.55)$$

olur. (3.55) in grafiği Şekil 3.12 deki gibidir:



Şekil 3.12 $\gamma(u) = (u, u - 2 \tan u, 0)$ ve lightlike eksenli dönel yüzey

3.3.2. $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-Uzayında Spacelike Dönel Yüzeyler

Tanım 3.3.5. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey Σ olsun. Σ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı yani, Riemann metriği ise Σ ye $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir spacelike yüzey denir, [3,9].

Teorem 3.3.2. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında (U, σ) parametrizasyonu ile verilen,

$$\begin{aligned} \sigma &: U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ (u, v) &\rightarrow \sigma(u, v) = (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v)) \end{aligned}$$

$\sigma(U)$ yüzeyinin spacelike yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, yani,

$$\langle N, N \rangle_L < 0$$

olmasıdır. Burada N , Σ yüzeyinin birim normalidir, [9].

Önerme 3.3.1. Spacelike yüzeyler, lokal olarak $\{z = 0\}$ düzleminde tanımlı bir fonksiyonun grafiğidir, [9].

Tanım.3.3.6. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir spacelike yüzey Σ olsun. Eğer, Σ yüzeyinin ortalama eğriliği $H = 0$ ise, Σ yüzeyine maksimal yüzey denir, [3,8].

Tanım 3.3.7. $\eta : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon, Π üzerindeki lokal koordinat sistemi (u, v) ve indirgenmiş metrik I olmak üzere, σ immersiyonu

$$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_L = 0 \text{ ve } \|\sigma_u\|_L = \|\sigma_v\|_L = e^{\eta/2} \quad (3.56)$$

koşullarını sağlanıyorsa, $\sigma(u, v) : \Pi \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ immersiyonuna konformal denir, [3].

Örnek.3.3.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında,

$$\begin{aligned} \sigma & : \quad \Pi \rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ (u, v) & \rightarrow \sigma(u, v) = (\cos u \cosh v, \cos u \sinh v, u) \end{aligned}$$

bir spacelike immersiyon olsun. σ nin konformal olduğunu gösterelim. Bunun için, σ nin kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \sigma_u & = (-\sin u \cosh v, -\sin u \sinh v, 1) \\ \sigma_v & = (\cos u \sinh v, \cos u \cosh v, 0) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_L = 0 \text{ ve } \|\sigma_u\|_L = \|\sigma_v\|_L$$

olur. Dolayısıyla $\sigma(u, v)$, konformaldır.

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında Σ bir spacelike yüzey olsun. Şimdi, (3.27)-(3.29) ile verilen σ parametrizasyonları için H ortalama eğriliklerini ve $\sigma^\perp$ ifadelerini hesaplayalım:

Durum1. Σ yüzeyi (3.27) parametrizasyonu ile verilsin. Σ yüzeyinin I . ve II . temel form katsayıları, sırasıyla,

$$E_L = -(f')^2 + (g')^2, F_L = 0, G_L = f^2$$

ve

$$e_L = \frac{-g'f'' + f'g''}{(-(f')^2 + (g')^2)^{1/2}}, f_L = 0, g_L = \frac{-fg'}{(-(f')^2 + (g')^2)^{1/2}} \quad (3.57)$$

şeklindedir. Son değerler (3.25) ve (3.5) eşitliklerinde göz önüne alınırsa,

$$H = -\frac{1}{2} \frac{f(g'f'' + f'g'') - g'((f')^2 - (g')^2)}{f(-(f')^2 + (g')^2)^{3/2}}$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{(-(f')^2 + (g')^2)^{1/2}}(fg' - gf')$$

elde edilir.

Benzer şekilde, diğer yüzeyler için de aynı işlemler uygulanırsa, yüzeylerin ortalama eğrilikleri ve σ parametrizasyonlarının normal bileşeni bulunabilir. Böylece, aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur:

Teorem 3.3.3. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında Σ , H ortalama eğrilikli bir spacelike yüzey ve $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir immersiyon olsun. O zaman, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(a) Σ yüzeyi (3.27) parametrizasyonu ile verilsin. O zaman $f(u)$ ve $g(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonları,

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{f(g'f'' + f'g'') - g'(-(g')^2 + (f')^2)}{f(-(f')^2 + (g')^2)^{3/2}} \right), \quad (3.58)$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{(-(f')^2 + (g')^2)^{1/2}} (fg' - gf')$$

diferansiyel denklemlerini sağlar. Burada f' ve g' fonksiyonları, sırasıyla, $\frac{df(u)}{du}$, $\frac{dg(u)}{du}$ ifadelerini göstermektedir.

(b) Σ yüzeyi (3.28) parametrizasyonu ile verilsin. O zaman $f(u)$ ve $g(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonları,

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{f(g'f'' - f'g'') - g'((f')^2 - (g')^2)}{f(-(g')^2 + (f')^2)^{3/2}} \right), \quad (3.59)$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{(-(g')^2 + (f')^2)^{1/2}} (-fg' + gf')$$

diferansiyel denklemlerini sağlar.

(c) Σ yüzeyi (3.29) parametrizasyonu ile verilsin. O zaman, $p(u) = f(u) - g(u) \neq 0$ fonksiyonu,

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{(g-f)(g'f'' - f'g'') - (f'-g')((f')^2 - (g')^2)}{(g-f)(-(g')^2 + (f')^2)^{3/2}} \right) = 0 \quad (3.60)$$

ve

$$\sigma^\perp = \frac{1}{(-(g')^2 + (f')^2)^{1/2}}(g'f - f'g)$$

diferansiyel denklemlerini sağlar.

$\sigma : \Pi \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ parametrizasyonu ile verilen spacelike dönel yüzeyinin ortalama e rili i $H = 0$ olduğunda yüzey maximaldir. Şimdi, yukarıda verilen diferansiyel denklemlerin $H = 0$ için, özel c z mlerini hesaplayalım:.

a) Σ yüzeyi (3.27) parametrizasyonu ile verilsin:

ξ_2 eksenli spacelike dönel yüzeyler için (3.57) e itli inde verilen ortalama eğrilik formülünde $H = 0$ alınırsa,

$$\frac{f(g'f'' - f'g'') - g'((f')^2 - (g')^2)}{f((g')^2 - (f')^2)^{3/2}} = 0 \quad (3.61)$$

elde edilir. (3.6) eşitliklerinden, E_L, F_L, G_L katsayıları,

$$E_L = -(f')^2 + (g')^2, F_L = 0, G_L = f^2$$

bulunur.

Diğer taraftan, (3.56) deki Lorentz konformal eşitliklerinden,

$$-(f')^2 + (g')^2 = f^2$$

yazılır. Bu ifade (3.61) denkleminde yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$g''f' + f''g' + g'f = 0 \quad (3.62)$$

elde edilir.

(3.62) denkleminde, $a, b \in \mathbb{R}$ için, $g(u) = au + b$ alınırsa, bu denklem harmonik osilator denklem haline gelir, yani;

$$f'' + f = 0$$

olur. Bu denklem çözülürse,

$$f(u) = c_1 \cos u + c_2 \sin u.$$

bulunur. Dolayısıyla (3.27) parametrizasyonu,

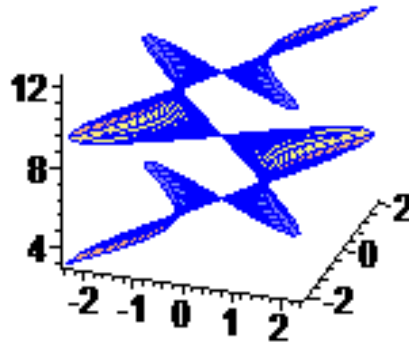
$$\sigma(u, v) = ((c_1 \cos u + c_2 \sin u) \cosh v, (c_1 \cos u + c_2 \sin u) \sinh v, au + b). \quad (3.63)$$

şeklinde yazılır, [3].

Genelliği bozmayacağı için, (3.63) parametrizasyonunda $c_1 = a = 1, c_2 = b = 0$ alınabilir. O zaman (3.63) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (\cos u \cosh v, \cos u \sinh v, u) \quad (3.64)$$

olur. (3.64) in grafiği Şekil 3.13 deki gibidir:



Şekil 3.13 $\gamma(u) = (\cos u, u, 0)$ ve spacelike eksenli dönel yüzey

Şimdi, (3.62) denkleminde $a, b \in \mathbb{R}$ için, $f(u) = au + b$ alınırsa, bu denklem değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme dönüştür, yani;

$$g'' + g'(u + d) = 0, d \in \mathbb{R}$$

olur. Elde edilen diferansiyel denklemin çözümü;

$$g(u) = 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), I^2 = -1$$

dır. Böylece, (3.27) ile verilen ξ_2 eksenli dönel yüzey,

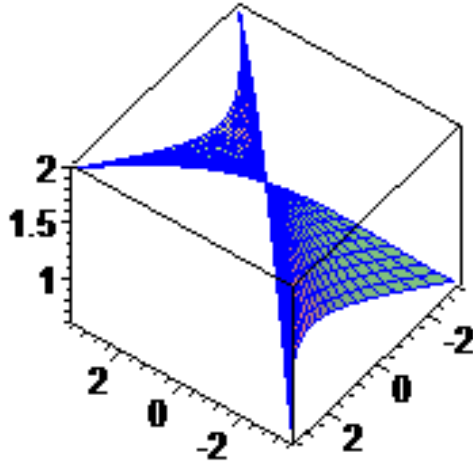
$$\sigma(u, v) = ((au + b) \cosh v, (au + b) \sinh v, 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI)) \quad (3.65)$$

şeklinde yeniden parametrize edilir.

Genelliği bozmayacağı için, (3.65) parametrizasyonunda $c_1 = c_2 = a = 1, b = 0$ alınabilir. Böylece (3.65) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI)) \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilir. (3.66) in grafiği Şekil 3.14 deki gibidir:



Sekil 3.14 $\gamma(u) = (u, 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), 0)$ ve spacelike eksenli dönel yüzey

a) Σ yüzeyi (3.29) parametrizasyonu ile verilsin:

ξ_0 eksenli spacelike dönel yüzeyler için (3.59) e itli inde verilen ortalama eğrilik formülünde $H = 0$ alınırsa,

$$\left(\frac{f(g''f' - f''g') + g'((f')^2 - (g')^2)}{f(-(g')^2 + (f')^2)^{3/2}} \right) = 0 \quad (3.67)$$

elde edilir. (3.6) eşitliklerinden, E_L, F_L, G_L katsayıları,

$$E_L = (f')^2 - (g')^2, F_L = 0, G_L = f^2$$

 eklinde bulunur.

Diğer taraftan, (3.56) deki Lorentz konformal eşitliklerinden,

$$(f')^2 - (g')^2 = f^2$$

yazılır. Bu ifade (3.67) denkleminde yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$g''f' - f''g' + g'f = 0 \quad (3.68)$$

elde edilir.

(3.68) denkleminde, $a, b \in \mathbb{R}$ için, $g(u) = au + b$ alınırsa, bu denklem harmonik osilator denklem haline gelir, yani;

$$f'' - f = 0$$

olup, c z m ;

$$f(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$$

olur. Böylece (3.28) ile verilen spacelike maksimal dönel yüzeyi,

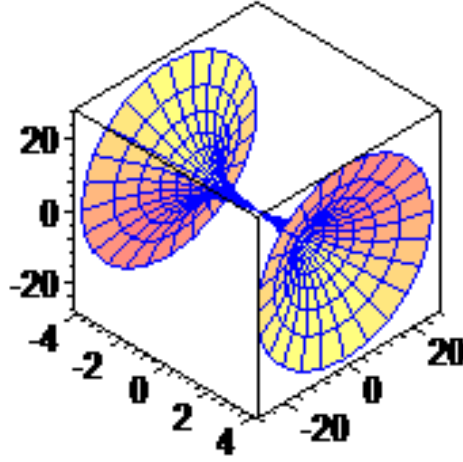
$$\sigma(u, v) = (au + b, (c_1 e^u + c_2 e^{-u}) \cos v, (c_1 e^u + c_2 e^{-u}) \sin v) \quad (3.69)$$

şeklinde yazılabilir, [3].

Genelliği bozmayacağı için, (3.69) parametrizasyonunda $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}, a = 1, b = 0$ alınabilir. O zaman (3.69) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (u, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v) \quad (3.70)$$

olur. (3.70) parametrizasyonuna sahip dönel yüzeyin grafiği Şekil 3.15 deki gibidir:



Şekil 3.15 $\gamma(u) = (u, \sinh u, 0)$ ve timelike eksenli dönel yüzey

(3.68) denkleminde $a, b \in \mathbb{R}$ için, $f = f(u)$ fonksiyonunu lineer alalım. O zaman, (3.68) denklemi değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemine döndürür, yani;

$$g'' + g(u + d) = 0, d \in \mathbb{R}$$

dır. Elde edilen diferansiyel denklemin çözümü;

$$g(u) = 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), I^2 = -1$$

dır. Böylece, (3.28) ile verilen ξ_2 eksenli dönel yüzey

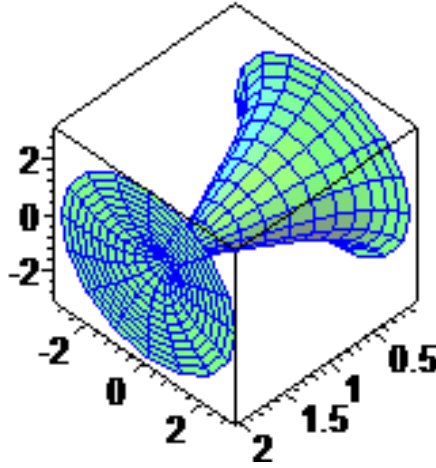
$$\sigma(u, v) = (1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), (au + b) \cos v, (au + b) \sin v) \quad (3.71)$$

şeklinde yeniden parametrize edilir.

Genelliği bozmayacağı için, (3.71) parametrizasyonunda $a = 1, b = 0$ alınırsa, (3.71) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), u \cos v, u \sin v) \quad (3.72)$$

olur. (3.72) in grafiği Şekil 3.16 deki gibidir:



Şekil 3.16 $\gamma(u) = (1 + \frac{1}{2}I\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(uI), u, 0)$ ve timelike eksenli dönel yüzey

c) Σ yüzeyi (3.29) parametrizasyonu ile verilsin:

$\xi_0 + \xi_1$ eksenli spacelike dönel yüzeyler için (3.59) de verilen ortalama eğrilik formülünde $H = 0$ alınırsa,

$$\left(\frac{(g-f)(g'f'' - f'g'') - (f'-g')((f')^2 - (g')^2)}{(g-f)((f')^2 - (g')^2)^{3/2}} \right) = 0 \quad (3.73)$$

elde edilir. (3.6) eşitliklerinden, E_L, F_L, G_L katsayıları,

$$E_L = (f')^2 - (g')^2, F_L = 0, G_L = (f-g)^2$$

şeklinde bulunur.

Diğer taraftan, (3.56) deki Lorentz konformal eşitliklerinden,

$$(f')^2 - (g')^2 = (f-g)^2$$

olur. Bu ifade (3.73) denkleminde göz önüne alınırsa,

$$f''g' - g''f' + (g' - f')(g - f) = 0 \quad (3.74)$$

elde edilir. (3.74) de, $a, b \in \mathbb{R}$ için, $g(u) = au + b$ alınırsa, harmonik osilator denkleminde dönüşür, yani;

$$f'' - (f' - 1)(u - f) = 0$$

olur. Bu denklemin çözümü,

$$f(u) = u - c_1 \tan\left(\frac{c_1}{2}(u + c_2)\right)$$

dır. Böylece (3.29) parametrizasyonu

$$\begin{aligned}
\sigma_0(u, v) &= u(1 + \frac{v^2}{2}) - \frac{v^2}{2}(u - c_1 \tan(\frac{c_1}{2}(u - c_2))), \\
\sigma_1(u, v) &= \frac{uv^2}{2} + (1 - \frac{v^2}{2})(u - c_1 \tan(\frac{c_1}{2}(u - c_2))), \\
\sigma_2(u, v) &= uv - v(u - c_1 \tan(\frac{c_1}{2}(u - c_2)))
\end{aligned}$$

olmak üzere

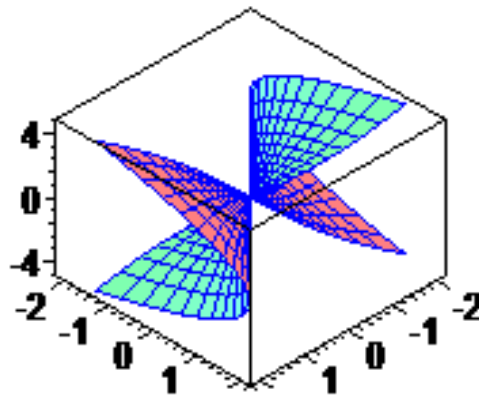
$$\sigma(u, v) = (\sigma_0(u, v), \sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v)) \quad (3.75)$$

şeklinde yazılır, [3].

Genelliği bozmayacağı için, (3.75) parametrizasyonunda $c_1 = 2, a = 1$, ve $c_2 = b = 0$ alınırsa, (3.75) parametrizasyonu,

$$\sigma(u, v) = (u - 2 \tan u, u + (v^2 - 2) \tan u, 2v \tan u). \quad (3.76)$$

olur. (3.76) in grafiği Şekil 3.17 deki gibidir:



Şekil 3.17 $\gamma(u) = (u - 2 \tan u, u, 0)$ ve lightlike eksenli döne1 yüzey

Benzer işlemler $f = f(u) = u$ lineer fonksiyonu için uygulanırsa, (3.74) denklemi,

$$g'' + (g' - 1)(u - g) = 0$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$g(u) = u + c_1 \tanh\left(\frac{c_1}{2}(-u + c_2)\right).$$

şeklindedir. Böylece (3.7) parametrizasyonu ile verilen $\xi_0 + \xi_1$ dönme eksenli dönel yüzey;

$$\begin{aligned}\sigma_0(u, v) &= u + c_1 \tanh(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right) \left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}u, \\ \sigma_1(u, v) &= u \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) + u + c_1 \tanh(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right), \\ \sigma_2(u, v) &= (c_1 \tanh(u) \left(\frac{c_1}{2}(c_2 - u)\right))v\end{aligned}$$

olmak üzere,

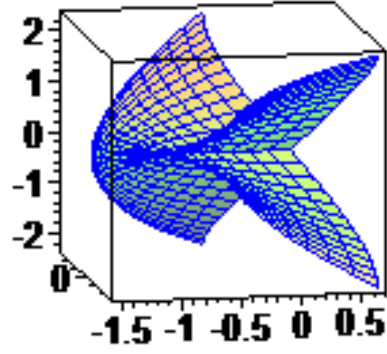
$$\sigma(u, v) = (\sigma_0(u, v), \sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v)) \quad (3.77)$$

şeklinde yeniden parametrize edilir.

Genelliği bozmayacağı için, (3.77) parametrizasyonunda $c_1 = 2$ ve $c_2 = 0$ alınırsa,

$$\sigma(u, v) = \left(u + \left(\frac{v^2}{2} - 1\right)(-2 \tanh(u)), \frac{v^2}{2}(u - 1) + \frac{v^2}{2}(u - 2 \tanh(u)), -2 \tanh(u)v\right) \quad (3.78)$$

elde edilir. (3.78) in grafiği Şekil 3.18 deki gibidir:



Şekil 3.18 $\gamma(u) = (u, u - 2 \tanh u, 0)$ ve lightlike eksenli dönel yüzey

4. $\mathbb{E}^3$, ÖKLİD 3-UZAYINDA SELF-SİMİLAR YÜZEYLER

4.1. $\mathbb{E}^3$ de, Monge parametrizasyonu ile verilen self-similar yüzeyler

Tanım 4.1.1. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi,

$$\vec{H} + \lambda \sigma^\perp = 0 \quad (4.1)$$

eşitliğini sağlarsa, bu yüzeye self-similar (kendisine benzer) yüzey denir. Burada $\sigma^\perp$ vektörü ile σ in normal bileşeni gösterilmektedir, [4,5].

Önerme 4.1.1. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart;

$$\bar{e}G + \bar{g}E - 2fF + 2\lambda(EG - F^2)^{1/2} \det(\sigma, \sigma_u, \sigma_v) = 0 \quad (4.2)$$

olmasıdır, [4,5].

Sonuç 4.1.1. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi, $\sigma(u, v)$ regüler parametrizasyonu ile verilen sabit ortalama eğrilikli ($H \neq 0$) bir yüzey olsun. Σ nin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$(EG - F^2)^{1/2} \det(\sigma, \sigma_u, \sigma_v) \neq 0$$

olmasıdır, [6].

Tanım 4.1.2. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi,

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (4.3)$$

parametrizasyonu ile verilsin. $\mathbb{E}^3$ de (4.3) ile verilen Σ yüzeyine Monge parametrizasyonuna sahip yüzey denir, [6,7,13].

(4.3) de σ parametrizasyonu ile verilen yüzeyin kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\sigma_u &= (1, 0, f_u), \\ \sigma_v &= (0, 1, f_v), \\ \sigma_{uu} &= (0, 0, f_{uu}), \\ \sigma_{uv} &= (0, 0, f_{uv}), \\ \sigma_{vv} &= (0, 0, f_{vv})\end{aligned}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki ifadeler (2.3) ve (2.5) eşitliklerinde göz önüne alınırsa,

$$E = 1 + (f_u)^2, F = f_u f_v, G = 1 + (f_v)^2 \quad (4.4)$$

ve

$$\bar{e} = \frac{f_{uu}}{(1 + (f_u)^2 + (f_v)^2)^{1/2}}, \bar{f} = \frac{f_{uv}}{(1 + (f_u)^2 + (f_v)^2)^{1/2}}, \bar{g} = \frac{f_{vv}}{(1 + (f_u)^2 + (f_v)^2)^{1/2}} \quad (4.5)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\det(\sigma, \sigma_u, \sigma_v) = f - (u f_u - v f_v) \quad (4.6)$$

dir.

Böylece, (4.4)-(4.6) eşitlikleri (4.2) da yerine yazılırsa

$$f_{uu}(1 + (f_v)^2) + f_{vv}(1 + (f_u)^2) - 2f_u f_v f_{uv} + 2\lambda(1 + (f_u)^2 + (f_v)^2)(f - (u f_u - v f_v)) = 0 \quad (4.7)$$

bulunur, [6].

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1.1. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi (4.3) Monge parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. Σ nin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart (4.7) eşitliğinin sağlanmasıdır, [6].

Tanım 4.1.3. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi,

$$\alpha(u) = (u, 0, h(u)), \beta(v) = (0, v, g(v)) \quad (4.8)$$

uzay eğrilerinin toplamı olarak tanımlanırsa, bu yüzeye öteleme yüzeyi denir. Böylece $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ öteleme yüzeyi;

$$\sigma(u, v) = (u, v, h(u) + g(v)) \quad (4.9)$$

Monge parametrizasyonu ile tanımlanır, [6].

Sonuç 4.1.2. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ öteleme yüzeyi olsun. Σ nin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$h''(1 + (g')^2) + g''(1 + (h')^2) + \lambda(1 + (g')^2 + (h')^2)(h + g - uh' + vg') = 0 \quad (4.10)$$

olmasıdır, [6].

Teorem 4.1.2. Σ öteleme yüzeyi, sabit ortalama eğrilikli ($H \neq 0$) bir yüzey olsun. Bu taktirde Σ yüzeyi,

$$h(u) = -\frac{\sqrt{1+a^2}}{2H}\sqrt{1+4H^2u^2}, g(v) = -av \quad (4.11)$$

parametrizasyonu ile verilen bir yüzeydir. Burada $a < 1$ ve sıfırdan farklı pozitif bir sabittir, [6].

Böylece (4.10) ve (4.11) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.3. 3- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli self-similar bir öteleme yüzeyi yoktur, [6].

4.2. $\mathbb{E}^3$ de, Self-Similar Dönel Yüzeyler

Tanım 4.2.1. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi,

$$\sigma(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v) \quad (4.12)$$

parametrizasyonu ile verilsin. $\mathbb{E}^3$ de (4.12) ile verilen Σ yüzeyine dönel yüzey denir, [6,7].

(4.12) de verilen σ parametrizasyonunun kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \sigma_u &= (f_u, g_u \cos v, g_u \sin v), \\ \sigma_v &= (0, -g \sin v, g \cos v), \\ \sigma_{uu} &= (f_{uu}, g_{uu} \cos v, g_{uu} \sin v), \\ \sigma_{uv} &= (f_{uv}, -g_u \sin v, g_u \cos v), \\ \sigma_{vv} &= (0, -g \cos v, -g \sin v) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki ifadeler (2.3) ve (2.5) eşitliklerinde göz önüne alınırsa,

$$E = (f_u)^2 + (g_u)^2, F = 0, G = g^2 \quad (4.13)$$

ve

$$\bar{e} = \frac{g_u f_{uu} - f_u g_{uu}}{(f_u^2 + g_u^2)^{1/2}}, \bar{f} = 0, \bar{g} = \frac{g f_u}{(f_u^2 + g_u^2)^{1/2}} \quad (4.14)$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\det(\sigma, \sigma_u, \sigma_v) = g(f g_u - g f_u) \quad (4.15)$$

dir.

Böylece (4.13)– (4.15) eşitlikleri (4.2) eşitliğinde göz önüne alınırsa,

$$g(g_u f_{uu} - f_u g_{uu}) + f_u(f_u^2 + g_u^2) + 2\lambda g^2(f_u^2 + g_u^2)^{3/2}(f g_u - g f_u) = 0 \quad (4.16)$$

elde edilir, [7].

Teorem 4.3.1. $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi (4.12) parametrizasyonu ile verilen bir dönel yüzey olsun. Σ nin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart (4.16) eşitliğinin sağlanmasıdır, [6].

5. $\mathbb{E}_1^3$, MINKOWSKI 3-UZAYINDA SELF-SİMİLAR DÖNEL YÜZEYLER

$\Sigma \subset \mathbb{E}_1^3$ yüzeyinin self-similar olması için, (4.1) şartını sağlaması gerekir. Yüzeyin minimal olması halinde, $\sigma^\perp$ bileşeni sıfır olamayacağından λ değerinin sıfır olmasının gerekliliği açıktır. Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ deki (4.1) şartını sağlayan timelike minimal dönel yüzeyler için bazı karakterizasyonlar ve örnekler verilecektir:

5.1. Spacelike dönme eksenli self-similar timelike dönel yüzeyler

Σ yüzeyi (3.26) parametrizasyonu ile verilsin. Yani,

$$\sigma(u, v) = (f(u) \sinh v, f(u) \cosh v, g(u)), f(u) > 0$$

olsun. Bu yüzeyin ortalama eğriliği ve σ konum vektörünün normal uzay üzerine izdüşüm vektörü Teorem 3.3.2 de verildi. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.1.1. Σ , (3.26) parametrizasyonu ile verilen spacelike dönme eksenli timelike dönel yüzey olsun. Σ yüzeyinin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$f(g'f'' - f'g'') - g'((g')^2 + (f')^2) + 2\lambda f((g')^2 + (f')^2)(fg' - gf') = 0 \quad (5.1)$$

olmasıdır.

İspat. (3.26) de diferansiyel alımp, (3.33) ve (4.1) eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

Şimdi, (3.27) parametrizasyonu ile verilen spacelike dönme eksenli, yani,

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cosh v, f(u) \sinh v, g(u)), f(u) > 0$$

dönel yüzeyi için benzer adımlar izlenilirse, yine, Teorem 3.3.2 den, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.1.2. Σ , (3.27) parametrizasyonu ile verilen spacelike dönme eksenli dönel yüzey olsun. Σ yüzeyinin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$f(g'f'' - f'g'') + g'((g')^2 - (f')^2) + 2\lambda f((f')^2 - (g')^2)(f'g - gf') = 0 \quad (5.2)$$

olmasıdır.

İspat. (3.27) de diferansiyel alınıp, (3.34) ve (5.1) eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

Örnek 5.1.1. (3.41) parametrizasyonu ile verilen timelike minimal yüzeyi (5. dereceden catenoid), $\lambda = 0$ durumunda self-similardır.

Örnek 5.1.2. (3.43) parametrizasyonu ile verilen timelike minimal yüzeyi (Catenoid), $\lambda = 0$ durumunda self-similardır.

Sonuç.5.1.1. Minkowski 3-uzayda bir minimal yüzey, $\lambda \neq 0$ durumunda self-similar olamaz.

5.2. Timelike dönme eksenli self-similar timelike dönel yüzeyler

Σ yüzeyi (3.28) parametrizasyonu ile verilsin. Yani,

$$\sigma(u, v) = (g(u), f(u) \cos v, f(u) \sin v), f(u) > 0$$

olsun. Bu yüzeyin ortalama eğriliği ve σ konum vektörünün normal uzay üzerine izdüşüm vektörü Teorem 3.3.2 de verildi. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.2.1. Σ , (3.28) parametrizasyonu ile verilen spacelike dönme eksenli dönel yüzey olsun. Σ yüzeyinin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$f(f''g' - f'g'') - g'((f')^2 - (g')^2) + 2\lambda f((g')^2 - (f')^2)(f'g - g'f) = 0 \quad (5.3)$$

olmasıdır.

İspat. (3.28) de diferansiyel alınıp, (3.35) ve (5.1) eşitlikeleri kullanılarak gösterilebilir.

Örnek 5.2.1. (3.46) parametrizasyonu ile verilen timelike minimal yüzeyi (3. dereceden catenoid), $\lambda = 0$ durumunda self-similar'dır.

Örnek 5.2.2. (3.49) parametrizasyonu ile verilen timelike minimal yüzeyi (Catenoid), $\lambda = 0$ durumunda self-similar'dır.

5.3. Lightlike dönme eksenli self-similar timelike dönel yüzeyler

Σ yüzeyi (3.29) parametrizasyonu ile verilsin. Yani,

$$\sigma(u, v) = (f(u) + \frac{v^2}{2}p(u), g(u) + \frac{v^2}{2}p(u), p(u)v)$$

olsun. Bu yüzeyin ortalama eğriliği ve σ konum vektörünün normal uzay üzerine izdüşüm vektörü Teorem 3.3.2 de verildi. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.3.1. Σ , (3.29) parametrizasyonu ile verilen spacelike dönme eksenli dönel yüzey olsun. Σ yüzeyinin self-similar yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$(f - g)(f''g' - g''f') + (f' - g')((f')^2 - (g')^2) + 2\lambda(f - g)((g')^2 - (f')^2)(g'f - f'g) = 0 \quad (5.4)$$

olmasıdır.

İspat. (3.29) de diferansiyel alınıp, (3.36) ve (5.1) eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

Örnek 5.3.1. (3.63) parametrizasyonu ile verilen timelike minimal yüzeyi, $\lambda = 0$ durumunda self-similar yüzeydir.

Örnek 5.3.2. (3.65) parametrizasyonu ile verilen timelike minimal yüzeyi, $\lambda = 0$ durumunda self-similar yüzeydir.

6. SONUÇ

Minkowski uzayı Öklidyen uzaya kıyasla daha karmaşık ve daha zengin bir geometrik yapıya sahiptir. Örneğin, Minkowski 3-uzayında verilen dönel yüzeyler üç farklı dönme eksenine, sırasıyla, spacelike, timelike ve lightlike (null) eksenlerine sahiptir. Bu sebeple, Öklidyen uzaya kıyasla Minkowski uzayında dönme, üç farklı durum için gerçekleşmektedir. Minkowski 3-uzayında verilen yüzeylerin genel özellikleri ve bu üç durum üçüncü bölümde ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Diğer yandan, Minkowski uzayında verilen yüzeylerin normal vektörlerinin konumlarına göre de spacelike, timelike ve lightlike yüzeyler olarak isimlendirildiğini biliyoruz. Bu çalışmada, Minkowski uzayında spacelike ve timelike dönel yüzeylerinin bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. Daha sonrasında, bu yüzeylerin ortalama eğrilikleri H ve konum vektörlerinin $\sigma^\perp$, normal bileşenlerine dair bazı karakterizasyonlar üçüncü bölümünde verilmiştir.

Yine üçüncü bölümde, timelike (spacelike) dönel yüzeylerin farklı dönme eksenine sonucu oluşan parametrizasyonları, yüzeyin minimal (maximal) ve lorentz konformal (konformal) olma durumu göz önüne alınarak yeniden parametrize edilmiş ve elde edilen parametrizasyonlara ilişkin örnekler verilmiştir.

Asli eğrilik akışı (MCF), bir Riemann manifoldunun, n -boyutlu altmanifoldundaki uzayda bölge fonksiyonunun gradient akışıdır, açıkça bir altmanifoldun kendi ortalama eğrilik hareketidir, yani bir yer değiştirme işlemidir. Bu da altmanifoldun konum fonksiyonu için kısmi diferansiyel denklemlerin bir non-lineer parabolik sistemini meydana getirmektedir. MCF'nin bir özel çözümü olan self-similar çözümleri, yani, (4.1) koşulunu, sağlayan bazı yüzeyler bu çalışmanın dördüncü bölümünde incelenmiştir.

Beşinci bölümde, $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında timelike minimal dönel yüzeylerin, sırasıyla, spacelike, timelike, lightlike dönme eksenleri için (4.1) şartı ayrı ayrı incelenmiştir. İncelemeler sonucunda, bu yüzeylere ilişkin bazı karakterizasyonlar ve

örnekler verilmiştir.

Bu çalışmada bulunan sonuçlar, $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında verilen tüm yüzeyler için incelenebilir. Ayrıca, Timelike (spacelike) yüzeylerin Lorentz konformal (konformal) olma şartları dışında çeşitli özel şartlar için de incelenebilir, farklı sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. **Choi Miekyung , Kim Young Ho, Yoon Dae Won**, Some classification of surfaces of revolution in Minkowski 3-space , Journal of Geometry (2013).
2. **Lee S. and Varnado J. H.**, Timelike surfaces of revolution with constant mean curvature in Minkowski 3-space, Differential Geometry and Dinamical Systems, 9 (2007), pp.82-102.
3. **Lee S. and Varnado J. H.**, Spacelike surfaces of revolution with constant mean curvature in Minkowski 3-space, Differential Geometry and Dinamical Systems, 8 (2006), pp.144-165.
4. **Anciaux, H.**, Construction Of Equivariant Self-Similar Solutions To The Mean Curvature Flow In $\mathbb{C}^n$,Geom. Dedicata, 120, no.1, 37-48 (2006) .
5. **Anciaux H. and Romon P.**, Cyclic and ruled Lagrangian surfaces in complex Euclidean space, Bull Braz Math Soc, New Series 40(3) (2009), 341-369.
6. **Etemoğlu E. , Arslan K. , Bulca B.**, Self Similar Surfaces in Euclidean Spaces, Selçuk J. Appl. Math. , article in press.
7. **Etemoğlu E.**, Danışman: Prof. Dr. Arslan K. , $\mathbb{E}^n$ deki kendisine benzer eğriler ve yüzeylerin bir karakterizasyonu, Yüksek lisans tezi, Bursa (2013).
8. **O' Neill B.**, 1983, Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity, Academic Press Inc. New York.
9. **Lopez R.**, Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, arXiv:0810.3351v1 [math.DG] (2008)..
10. **Lopez R.** , Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space, Tohoku Math. J., 52 (2000).
11. **Abdelaziz H. S. , Saad M. Khalifa , Kiziltuğ S. ,** Parallel Surfaces Of Weingarten Type In Minkowski 3-space, İnternational Matematical Forum (2012).
12. **Güler E.**, Danışman: Prof. Dr. Yaylı Y., 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lightlike Üreteç Eğrili Timelike Helisoidal Ve Dönel Yüzeyler, Doktora tezi , Ankara

(2010).

13. Pressley A. ,Elementary Differential Geometry , Springer.

14. Izumiya S. and Takiyamaa A. ,Time-like surface in Minkowski 3-space which contains pseudocircles, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 40 (1997), 127-136.

15. Hano J. -I. and Nomizu K., Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space, Tohoku Math. Journ., 36 (1984), 427-437.

16. Ilmanen T., Lectures on mean curvature flow and related equations, Draft Version, recompiled August 1998.

17. Chen Y. G., Giga Y. and Goto Y., Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. J. Differential Geom. 33 (1991), no. 3, 749–786.

18. Brakke K. A. , The motion of a surface by its mean curvature, Mathematical Notes Princeton University Press and University of Tokyo Press, (1978).

19. Wang M.-T., Some recent developments in Lagrangian mean curvature flows, International Press, (2008).

20. Çelik B. , Maple ve Maple ile Matematik. Nobel Yayın Dağıtım.

21. Blaschke W. , (Çeviren : Erim K.) Diferensiyel Geometri Dersleri , (1949).

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Hatay 'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Hatay 'da tamamladım. 2006 yılında Ege Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2010 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisansa başladım ve ders aşamasını tamamladım. 2012 yılında tez aşamasındayken, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim dalına ÖYP kapsamında Araştırma Görevlisi olarak atandım ve Geometri Anabilim dalında yeniden yüksek lisansa başladım. Halen, aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.